MATEK - ZUPANČIČ

ARITMETIKA IN ALGEBRA

ZA VIŠJE RAZREDE REALK

CENA V PLATNO VEZANI KNJIGI K 5·30

Aritmetika in algebra

za

višje razrede realk.

Za gimnazije spisal

Blaž Matek, profesor na c. kr. gimnaziji v Mariboru.

Za realke priredil in izpopolnil

Jakob Zupančič, profesor na c. kr. realki v Gorici.

Cena nevezani knjigi K 4·50, v platno vezani K 5·30.

1910.

Založila „Katoliška Bukvarna“ v Ljubljani.

Natisnila „Katoliška Tiskarna“.

Vsebina.

Uvod.

§ 1. Pojasnila.

Stvari vsakdanjega življenja in tudi našega mišljenja so ali iste vrste ali raznih vrst. Stvari iste vrste moreš zameniti drugo za drugo ali popolnoma ali vsaj deloma; stvari raznih vrst pa se ne dado tako zamenjavati.

Istovrstne in raznovrstne stvari = gleichartige und ungleichartige Dinge.

Ako imamo množino stvari iste vrste, pravimo vsaki stvari enota; izraz za vse stvari te množine se zove število. S številom določamo, koliko istovrstnih stvari imamo v mislih. Enote sestavljajo število.

Enota = die Einheit. Število = die Zahl.

Kadar pridenemo enoti enoto, z dobljenim številom spojimo enoto in to ponavljamo, tedaj štejemo. Vrsti števil, ki jo dobimo pri štetju, pravimo naravna številna vrsta. V govoru izražamo števila naravne številne vrste s posebnimi imeni (s števniki) in v pismu jih predočujemo s posebnimi znaki (s številkami).

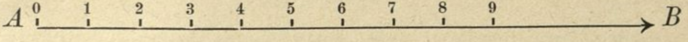
Šteti. Naravna številna vrsta = die natürliche Zahlenreihe. Števnik = das Zahlwort. Številka = die Ziffer.

Ako se pri štetju ne oziramo na to, katere vrste je enota, dobimo neimenovana števila; če pa pri štetju povemo tudi vrsto enote, dobimo imenovana števila.

Imenovana in neimenovana števila = benannte und unbenannte Zahlen.

Naravno številno vrsto predočimo s sliko, ako načrtamo na poluomejeni premici ali na polutraku AB od

Predočevanje naravne številne vrste s sliko.



krajišča A enake daljice drugo poleg druge. Vsaka taka daljica predstavlja enoto; dve daljici skupaj predočujeta število „dve“, tri daljice skupaj dado število „tri“ i. t. d.

Števila, ki izražajo določeno množino enot, se imenujejo posebna števila; pišejo se z arabskimi številkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Števila, ki izražajo nedoločeno množino enot, se imenujejo občna števila; pišejo se navadno z latinskimi črkami. Črka je znak vsakršne množine enot; če se ista črka ponavlja v enem

Posebno število = besondere Zahl. Občno število = allgemeine Zahl.

in istem računu, pomeni vsakikrat istotoliko enot, kolikor jih je pomenila prvikrat. Različne črke zaznamujejo različna števila. Glavni razloček med posebnim in občnim številom je ta, da posebno število zavzema določeno, občno število pa nedoločeno mesto v naravni številni vrsti.

Računati. Znesek = das Resultat.

Kadar spajamo števila med seboj po določenih pravilih, tedaj računamo. Število, ki ga najdemo pri računanju, se zove znesek ali rezultat.

Aritmetika = die Arithmetik. Posebna in občna aritmetika = besondere und allgemeine Arithmetik. Algebra = die Algebra. Številni izraz = der Zahlenausdruck. Oklepaj = die Klammer.

Nauk o številih in njih medsebojnih zvezah je aritmetika. Če se aritmetika peča le s posebnimi števili, se zove posebna aritmetika; če pa se aritmetika peča z občnimi števili, se imenuje občna aritmetika. Občna aritmetika se zove tudi algebra.

Vsakemu znaku, ki ga rabimo za število, pravimo številni izraz. Ako spojimo dva ali več enostavnih številnih izrazov v celoto, stvorimo sestavljene številne izraze. Kadar spajamo sestavljene številne izraze med seboj, devamo jih v oklepaje. Oklepaji so raznovrstni: okrogli (), oglati [] in zaviti {}. Kadar je treba okleniti oklepaj, rabimo raznovrstne oklepaje.

Zameniti = substituieren.

Ako postavimo v številne izraze namesto občnih števil posebna števila ter izvršimo s temi števili nakazane računske načine, pravimo, da zamenimo.

Enaki številni izrazi.

Ako pomenita številna izraza a in b isto število, pravimo, da sta izraza enaka, v znakih $a = b$.

Enačba = die Gleichung. Enačbena dela = Teile der Gleichung.

Dva izenačena številna izraza tvorita enačbo ter se zoveta enačbena dela. Vsako enačbo utegnemo čitati ali od leve proti desni ali pa obratno od desne proti levi.

Neenaki številni izrazi. Neenačba = die Ungleichung.

Ako ima izraz a več enot nego izraz b, pravimo, da je a večji ko b, v znakih $a > b$. Če pa ima a manj enot nego b, je a manjši ko b, v znakih $a < b$.

Enačaj = das Gleichheitszeichen. Neenačaj = das Ungleichheitszeichen.

Znak $=$ se imenuje enačaj; znak $>$ ali $<$ se pa zove neenačaj. V votlino neenačaja pišemo večji izraz, pred vrh neenačaja pa manjšega.

Količina = die Größe.

Vsaka stvar, ki je sestavljena iz enakih delov ali iz delov iste vrste ali se da vsaj tako misliti, se imenuje količina. Bistvena lastnost vsake količine je, da jo moremo povečati in zmanjšati.

Števila smemo smatrati za *količine*; zakaj vsako število ima lastnosti, ki se pripisavajo količinam. Razen *številnih količin* imamo še *prostorske količine* (telesa, ploskve, črte), *fizikalne količine* i. t. d. Nauk o številnih količinah je *aritmetika*, nauk o prostorskih količinah *geometrija*, nauk o številnih in prostorskih količinah sploh pa *matematika*. Aritmetika in geometrija sta dela matematike.

Matematika = die Mathematik.

Podlaga vseh matematičnih izrekov so *osnovne resnice*, to so resnice, ki so same po sebi razumljive. Matematične osnovne resnice so te-le:

Osnovna resnica = der Grundsatz oder das Axiom.

1. *Enake količine smeš povsod zameniti med seboj.*

Matematične osnovne resnice.

2. *Ako izpremeniš enake količine na isti način, najdeš enake količine.*

3. *Vsaka celota je tolika, kolikršni so vsi deli te celote skupaj; torej je vsaka celota večja ko del te celote.*

Na podlagi matematičnih osnovnih resnic in s pomočjo določenih pojasnil uči algebra pravila, po katerih se mora računati (*računske zakone*), izvaja *lastnosti številnih izrazov* in kaže na *nalogah*, kako se uporabljajo računski zakoni in lastnosti številnih izrazov.

Kaj uči algebra. Računski zakon = das Rechengesetz.

Primerjaj uvod v geometriji!

I. Osnovni računski načini s celimi števili.

A. Računska načina prve stopnje.

§ 2. Seštevanje.

Seštevati = addieren. Seštevanec = der Summand. Vsota = die Summe.

Dve ali več določenih števil **s e š t e t i** se pravi, poiskati novo število, ki ima toliko enot, kolikor jih imajo določena števila skupaj. Števila, ki se seštevajo, se imenujejo **s e š t e v a n c i** ali **s u m a n d i**; število pa, katerega iščeš, se zove **v s o t a**. Znak seštevanja je stoječi križ $+$, ki se čita „več" ali „plus"; stavi se med sumande.

Kako izvršiš seštevanje dveh števil. Nakazano seštevanje. Nakazana in izračunana vsota.

Števili a in b seštevaš, ako poiščeš v naravni številni vrsti prvi sumand a ter šteješ za toliko enot dalje (naprej), kolikor jih ima drugi sumand b. Število $a+b$, do katerega prideš na ta način, je vsota, kojo iščeš. Številni izraz

$$a+b$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba številu a prišteti število b (**n a k a z a n o s e š t e v a n j e**); isti izraz pomeni tudi vsoto števil a in b (**n a k a z a n a v s o t a**). Razen nakazane vsote imamo še **i z r a č u n a n o v s o t o** (navadno pri posebnih številih), t. j. vsota, v kateri so enote sumandov spojene v celoto; v izračunani vsoti ne poznaš več sumandov. N. pr. 17 je izračunana vsota števil 8 in 9, oziroma 10 in 7, 12 in 5 i. t. d. Ako je treba računati z nakazano vsoto, jo oklenemo; oklepaj rabimo tudi, če hočemo vsoto dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Kako izvršiš seštevanje treh ali več števil.

Tri ali več števil seštevaš, ako prišteješ vsoti prvih dveh sumandov tretji sumand, dobljeni vsoti četrti sumand i. t. d. Številni izraz

$$a+b+c+d$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba vsoti števil a in b prišteti število c in tej vsoti prišteti število d;

isti izraz pomeni tudi vsoto števil a, b, c in d. Kar smo poprej omenili glede na rabo in pomen oklepaja, velja tudi tukaj. Kdaj torej pišemo $(a + b + c + d)$?

Sumandi so deli vsote; torej morajo sumandi in vsota biti ali neimenovana števila ali pa števila istega imena, oziroma iste vrste.

Kdaj je vsota imenovano, kdaj neimenovano število.

Ako so vsi sumandi enaki, se da vsota prav kratko zaznamovati. N. pr. vsoto

Glavna količina = die Hauptgröße. Koeficient = der Koeffizient.

$$a + a + a + a + a$$

zaznamujemo krajše s $5a$, t. j. enaki sumand a zapišemo samo enkrat, pred njega pa postavimo število 5, ki pove, kolikokrat se mora sešteti število a. Istotako zaznamujemo tudi vsoto

$$a + a + a + \ldots (m \text{krat})$$

krajše z ma. V izrazih $5a$ in ma imenujemo a **glavno količino**, 5 (oziroma m) pa **koeficient**. Koeficient 1 se ne piše; torej pomeni a toliko kakor $1a$.

Glavna količina v številnem izrazu se mora tolikokrat sešteti, kakor pove koeficient, ki stoji pred glavno količino. Številni izrazi, ki imajo enake glavne količine, se imenujejo **istoimenski**; številni izrazi z različnimi glavnimi količinami so pa **raznoimenski**. Tako sta n. pr. izraza $6a$ in $8a$ istoimenska, izraza $3a$ in $4b$ pa raznoimenska.

Istoimenski in raznoimenski številni izrazi = gleichnamige und ungleichnamige Zahlenausdrücke.

V izrazu $ma + na$ se mora glavna količina a sešteti $m$krat in $n$krat, t. j. skupaj $(m + n)$krat, v znakih

$$ma + na = (m + n)a.$$

Istoimenske izraze torej sešteješ, ako sešteješ njih koeficiente in pridržiš skupno glavno količino.

Kako seštevaš istoimenske, kako raznoimenske izraze.

Raznoimenske izraze sešteješ, ako nakažeš seštevanje. N. pr.

$$4a + 5b + 6c.$$

Zakon o zamenjavi sumandov = das Kommutationsgesetz der Addition.

V vsaki izmed vsot

$$a + b \text{ in } b + a$$

se nahaja toliko enot kakor v sumandih a in b skupaj; torej je

$$a + b = b + a.$$

Če imamo tri ali več sumandov, velja isto. Zato smemo reči:

Isti sumandi dado v vsakem redu isto vsoto.

Zakona o združevanju sumandov = die Assoziationsgesetze der Addition.

V vsaki izmed vsot

$$(a + b) + c, \ (a + c) + b, \ a + (b + c)$$

je toliko enot, kolikor jih imajo števila a, b in c skupaj. Torej je

$$\left.\begin{array}{l} (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c), \\ a + (b + c) = (a + b) + c. \end{array}\right\} \text{t. j.}$$

Vsoti prišteješ število, ako ga prišteješ samo enemu sumandu. N. pr.

$$(2a + 3b) + 4a = 6a + 3b,$$
$$(2a + 3b) + 5b = 2a + 8b.$$

Številu prišteješ vsoto, ako mu prišteješ njene sumande drugega za drugim. N. pr.

$$6a + (7a + 8b) = 13a + 8b,$$
$$9b + (10a + 11b) = 20b + 10a.$$

Zadnji dve pravili sta prav pogostoma spojeni v enem in istem računu. N. pr.

$$(4a + 7b + 2c) + (5a + 3b + c) = 9a + 10b + 3c.$$

Povej, kako se je izvršilo navedeno seštevanje!

Razreševanje oklepajev.

Ako se v računu nahaja oklepaj v oklepaju, izvršiš najprej seštevanje, ki ga nakazuje notranji oklepaj, in potem zaporedoma seštevanja, ki jih nakazujejo naslednji oklepaji. Tako izgine iz računa oklepaj za oklepajem. N. pr.

$$[(5a + 4b) + (2a + b)] + [(3a + 6b) + (a + 7b)] =$$
$$= [7a + 5b] + [4a + 13b] = 11a + 18b.$$

§ 3. Odštevanje.

Naloge kakor

$$b + ? = a \quad \text{ali} \quad ? + b = a$$

se rešujejo po drugem računskem načinu, ki se zove odštevanje. Kaj poznamo in česa iščemo v navedenih nalogah? Odštevati se pravi iz vsote dveh števil (a) in iz enega sumanda (b) poiskati drugega. Določena vsota se imenuje zmanjševanec ali minuend, določeni sumand se zove odštevanec ali subtrahend in sumandu, ki ga iščeš, se pravi razlika (ostanek, diferenca). Znak odštevanja je vodoravna črta —, ki se čita „manj" ali „minus"; stavi se med minuend in subtrahend. Pred znakom odštevanja stoji minuend, za znakom odštevanja pa subtrahend.

Odštevati = subtrahieren. Zmanjševanec = der Minuend. Odštevanec = der Subtrahend. Razlika = die Differenz.

Od števila a odštejeę število b na dva načina. Z ozirom na prvo zgoraj navedeno nalogo je treba od števila b za toliko enot dalje šteti v naravni številni vrsti, da prideš do števila a; število, ki pove, za koliko enot si moral šteti naprej, je razlika. Razlika določa torej razdaljo v naravni številni vrsti od subtrahenda b do minuenda a. — Z ozirom na drugo zgoraj navedeno nalogo najdeš razliko, ako šteješ v naravni številni vrsti od števila a za b enot nazaj. Število, do katerega prideš na ta način, je razlika. Da moraš v prvem in drugem slučaju dobiti isti rezultat, je zaradi zakona o zamenjavi sumandov jasno.

Kako izvršiš odštevanje.

Številni izraz

$$a - b$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba od števila a odšteti število b (nakazano odštevanje); isti izraz pomeni tudi razliko števil a in b (nakazana razlika). Razen nakazane razlike imamo še izračunano razliko (navadno pri posebnih številih); v izračunani razliki ne poznaš niti minuenda niti subtrahenda. N. pr. 5 je izračunana razlika števil 9 in 4, oziroma 12 in 7 i. t. d. Ako je treba računati z nakazano razliko, jo oklenemo; oklepaj služi tudi, če hočemo nakazano razliko dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Nakazano odštevanje. Nakazana in izračunana razlika.

Števila pri odštevanju so ali neimenovana števila ali pa števila istega imena, oziroma iste vrste. Zakaj?

Razlikina lastnost.

Ako sešteješ razliko in subtrahend, dobiš minuend za vsoto, v znakih

$$(a - b) + b = a.$$

Kdaj se število ne izpremeni.

Število se ne izpremeni, ako mu prišteješ in odšteješ (oziroma odšteješ in prišteješ) eno in isto število, v znakih

$$a = (a + b) - b = (a - b) + b.$$

Zakaj jasno je, da se število a ne more izpremeniti, ako šteješ v naravni številni vrsti od števila a za b enot naprej in potem za istotoliko enot nazaj, ali ako šteješ od števila a za b enot nazaj in potem za istotoliko enot naprej.

Kako odštevaš istoimenske, kako raznoimenske izraze.

V izrazu $ma - na$ se mora glavna količina a sešteti $m$krat in potem od te vsote odvzeti $n$krat; torej ostane glavna količina še $(m - n)$krat kakor sumand, v znakih

$$ma - na = (m - n)\,a.$$

Istoimenske izraze odštevaš, ako odšteješ njih koeficiente in pridržiš skupno glavno količino. O resničnosti tega pravila se tudi prepričaš, ako prišteješ razliki subtrahend.

Raznoimenske izraze odštevaš, ako nakažeš odštevanje. N. pr.

$$ma - nb.$$

Računski zakoni.

Od vsote odšteješ število, ako ga odšteješ od enega sumanda, v znakih

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c). \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I.}$$

Zakaj jasno je, da zmanjšaš vsoto $a + b$ za c enot, ako zmanjšaš sumand a ali pa sumand b za c enot. N. pr.

$$(5a + 8b) - 3a = 2a + 8b,$$
$$(5a + 8b) - 5b = 5a + 3b.$$

V enačbi pod I. se nahaja tudi pravilo:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš seštevanje in odštevanje določenih števil, v znakih $(a + b) - c = (a - c) + b$.

Razlika $a - b$ pomeni razdaljo v naravni številni vrsti od subtrahenda b do minuenda a. Primerjaj sliko!

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \; . \; . \; . \; . \quad b, \; b+1 \; . \; . \; . \; . \quad a, \; a+1 \; . \; . \; .$

Če se minuend a poveča, oziroma zmanjša za nekoliko enot, se mora tudi razdalja od b do a povečati, oziroma zmanjšati za istotoliko enot. Če se subtrahend b poveča, oziroma zmanjša za nekoliko enot, se razdalja med b in a zmanjša, oziroma poveča za istotoliko enot. Če se minuend a in subtrahend b obenem povečata ali zmanjšata za istotoliko enot, mora razdalja med b in a ostati ista. Torej smemo reči:

Razliki prišteješ število, ako ga prišteješ minuendu ali pa odšteješ od subtrahenda, v znakih

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c) \quad . \; . \; . \; \text{II.}$$

Zakaj razliko $a - b$ povečaš za c enot, ako povečaš minuend a za c enot ali pa zmanjšaš subtrahend b za c enot. N. pr.

$$(12a - 15b) + 4a = 16a - 15b,$$
$$(12a - 15b) + 6b = 12a - 9b.$$

Od razlike odšteješ število, ako ga odšteješ od minuenda ali pa prišteješ subtrahendu, v znakih

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c) \quad . \; . \; . \; \text{III.}$$

Zakaj razliko $a - b$ zmanjšaš za c enot, ako zmanjšaš minuend a za c enot ali pa povečaš subtrahend b za c enot. N. pr.

$$(23a - 17b) - 14a = 9a - 17b,$$
$$(23a - 17b) - 8b = 23a - 25b.$$

Razlika dveh števil se ne izpremeni, ako prišteješ, oziroma odšteješ od minuenda in subtrahenda eno in isto število, v znakih

$$a - b = (a + m) - (b + m),$$
$$a - b = (a - m) - (b - m).$$

Zakaj razlika $a - b$ ostane neizpremenjena, če povečaš ali zmanjšaš minuend a in subtrahend b obenem za m enot.

V enačbah pod II. in III. se nahajata tudi pravili:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš odštevanje določenih števil, v znakih

$$(a - b) - c = (a - c) - b.$$

Od števila odšteješ dve ali več števil, ako odšteješ od minuenda vsoto vseh subtrahendov, v znakih

$$(a - b) - c = a - (b + c).$$

Ako obrnemo enačbe pod I., II. in III., t. j. ako zamenimo prvi in drugi enačbeni del med seboj, najdemo pravila:

$$\left.\begin{aligned} a + (b - c) &= (a + b) - c, \\ a - (b - c) &= (a - b) + c, \\ a - (b + c) &= (a - b) - c. \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Številu prišteješ razliko, ako mu prišteješ minuend in odšteješ subtrahend. N. pr.

$$4x + (9x - 5y) = 13x - 5y.$$

Številu odšteješ razliko, ako mu odšteješ minuend in prišteješ subtrahend. N. pr.

$$9x - (4x - 3y) = 5x + 3y.$$

Številu odšteješ vsoto, ako mu odšteješ zaporedoma sumand za sumandom. N. pr.

$$7x - (4x + 5y) = 3x - 5y.$$

§ 4. Algebrajska števila.

Razlika $a - b$ pomeni neko število v naravni številni vrsti, dokler je minuend a večji od subtrahenda b. Ko pa postane minuend a enak ali manjši od subtrahenda b, ne moremo razlike $a - b$ določiti s pomočjo naravne številne vrste; kajti ta vrsta se začne s številom 1. Zaraditega je treba naravno številno vrsto podaljšati in obenem prvotni pomen števila primerno razširiti in sicer tako, da ostanejo računski zakoni veljavni tudi za ta slučaj. Razlikin pomen.

Ako je minuend enak subtrahendu, nima razlika $a - a$ nobene enote, v znakih Ničla = die Null. Pomen ničle in njene lastnosti.

$$a - a = 0.$$

Taki razliki pravimo **ničla**. Ničla pomeni torej, da nimamo nobene takšne enote, ki bi bila podlaga računu. Iz tega pomena izvajamo, da se mora ničla nahajati v naravni številni vrsti pred številom 1, in da se število ne izpremeni, ako mu prišteješ, oziroma odšteješ ničlo.

Ako je subtrahend b za c enot večji od minuenda a (torej $b = a + c$), najdeš vrednost razlike $a - b$ po že znanih računskih zakonih tako-le: Negativno število = die negative Zahl. Pomen negativnega števila.

$$a - b = a - (a + c) = (a - a) - c = 0 - c = - c.$$

Takšno razliko kakor $0 - c$ ali krajše $- c$ imenujemo **negativno število**. Negativno število je torej razlika z minuendom 0, ali pa število, ki ima pred seboj znak odštevanja. Ta znak se zove predznak števila in se čita „minus". Negativno število je manjše od ničle.

Ako damo številu c zaporedoma vrednosti 1, 2, 3, 4 i. t. d., najdemo vrsto negativnih števil

$$- 1, - 2, - 3, - 4, - 5 \text{ i. t. d.},$$

ki tvorijo **podaljšek naravne številne vrste**.

Števila naravne številne vrste nimajo nobenega predznaka, dokler se ne oziramo na podaljšek te vrste. Takim številom pravimo **absolutna števila**. Če pa se oziramo na negativna števila, dobivajo števila naravne številne Absolutno število = die absolute Zahl. Pozitivno število = die positive Zahl.

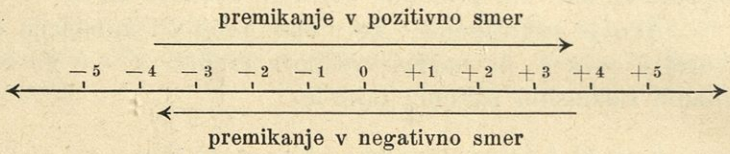
Relativno ali algebrajsko število = die relative oder algebraische Zahl.

vrste predznak + (čitaj: plus) in se imenujejo potem **pozitivna števila**. Pozitivna in negativna števila imajo skupno ime **relativna** ali **algebrajska števila**.

Enota absolutnih števil je 1 in se imenuje prvotna ali absolutna enota; enota pozitivnih števil je + 1 in se zove pozitivna enota; enota negativnih števil je — 1 in se imenuje negativna enota. Absolutna števila so sestavljena iz ene ali več absolutnih enot, pozitivna iz ene ali več pozitivnih enot, negativna pa iz ene ali več negativnih enot. Ali je različna pozitivna enota od absolutne?

Podaljšana številna vrsta = die erweiterte Zahlenreihe.

Ako spojimo naravno številno vrsto s podaljškom te vrste, stvorimo neomejeno številno vrsto, ki jo hočemo imenovati **podaljšano številno vrsto**. To številno vrsto predočujemo na neomejeni premi črti ali na traku, na katerem načrtamo od določene točke enake daljice na vsako stran. Dotična točka predočuje ničlo, vsaka daljica pa enoto; daljice na desno od ničle predstavljajo pozitivne enote, daljice na levo od ničle pa negativne enote. Ena,



dve, tri ali več daljic na desno skupaj predočuje pozitivna števila: + 1, + 2, + 3 i. t. d.; ena, dve, tri ali več daljic na levo skupaj predstavlja negativna števila: — 1, — 2, — 3 i. t. d. Primerjaj sliko!

Premikanje v podaljšani številni vrsti.

V podaljšani številni vrsti ločimo **premikanje v pozitivno in negativno smer**. Če se premikamo od kakega števila v pozitivno smer, pridevamo dotičnemu številu zaporedoma enoto za enoto ali z dotičnim številom spajamo zaporedoma pozitivne enote. Za kolikor enot se pomaknemo na desno, toliko enot prištejemo dotičnemu številu, ali toliko pozitivnih enot spojimo z dotičnim številom. Ako se pa premikamo od kakega števila v negativno smer, jemljemo od dotičnega števila zaporedoma enoto za enoto ali z dotičnim številom spajamo zaporedoma negativne enote. Za kolikor enot se pomaknemo na levo, toliko enot odštejemo od dotičnega števila, ali toliko negativnih enot spojimo z dotičnim številom. Primerjaj sliko! Pri premikanju v pozitivno smer postajajo števila vedno večja, pri premikanju v negativno smer pa vedno manjša. Torej je $0 > -1 > -2 > -3$ i. t. d.

Predznak = das Vorzeichen. Absolutna vrednost = der absolute Wert.

Pri vsakem algebrajskem številu je treba ločiti predznak in množino enot (absolutno vrednost). Predznak pove, kakšne so enote; absolutna vrednost pa, koliko enot je v številu. N. pr. v številu $-a$ je a negativnih enot.

Nasprotna števila = entgegengesetzte Zahlen. Lastnost nasprotnih števil.

Števili $+m = 0 + m$ in $-m = 0 - m$ sta v podaljšani številni vrsti enako oddaljeni od ničle v nasprotno smer. Taki dve števili se imenujeta nasprotni števili. Po dve nasprotni števili imata isto absolutno vrednost, pa različna predznaka. Iz $-m = 0 - m$ izvajamo po pojmu o razliki

$$(-m) + m = 0, \text{ ali tudi } (-m) + (+m) = 0, \text{ t. j.}$$

Vsota dveh nasprotnih števil je $= 0$, ali: dve nasprotni števili se uničujeta pri seštevanju.

Algebrajska števila navadno oklepamo, kadar je treba z njimi računati. Ko izvršimo nakazane računske načine, odpadejo oklepaji.

§ 5. Seštevanje algebrajskih števil.

Kako seštevaš algebrajska števila.

Vsota algebrajskih števil izraža toliko pozitivnih in negativnih enot, kolikor jih je v sumandih skupaj. Algebrajska števila seštevaš, ako spojiš enote vseh sumandov s pomočjo podaljšane številne vrste v celoto.

Algebrajski števili $+a$ in $+b$ sta sestavljeni le iz pozitivnih enot; v vsoti teh števil mora biti $a + b$ pozitivnih enot, v znakih

$$(+a) + (+b) = +(a + b) \quad \ldots\ldots \text{ I.}$$

Algebrajski števili $-a$ in $-b$ sta sestavljeni le iz negativnih enot; v vsoti teh števil mora biti $a + b$ negativnih enot, v znakih

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \quad \ldots\ldots \text{ II.}$$

Algebrajski števili $+a$ in $-b$ sta sestavljeni iz nasprotnih (pozitivnih in negativnih) enot. Ako je absolutna vrednost a večja od b, se b pozitivnih in b negativnih enot uničuje; torej ostane za vsoto toliko pozitivnih enot, za kolikor je absolutna vrednost a večja od b, t. j. $a - b$ pozitivnih enot, v znakih

$$(+a)+(-b) = +(a-b),\ a > b. \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Algebrajski števili $-a$ in $+b$ sta sestavljeni iz nasprotnih enot. Ako je absolutna vrednost a večja od b, se b negativnih in b pozitivnih enot uničuje; torej ostane za vsoto $a - b$ negativnih enot, v znakih

$$(-a)+(+b) = -(a-b),\ a > b \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Ako primerjamo v prvem in drugem, oziroma v tretjem in četrtem slučaju sumande in vsoto glede na predznake in absolutne vrednosti, najdemo za porabno računanje te-le pravili:

Dvoje algebrajskih števil z istim predznakom sešteješ, ako sešteješ njuni absolutni vrednosti in pridržiš skupni predznak.

Dvoje algebrajskih števil z različnim predznakom sešteješ, ako odšteješ njuni absolutni vrednosti in pridržiš predznak večje absolutne vrednosti.

Ako je treba sešteti tri, štiri ali več algebrajskih števil, prišteješ vsoti prvih dveh števil tretje število, tej vsoti četrto število i. t. d. Včasih ravnaš pripravneje, ako sešteješ pozitivne in negativne sumande zase ter spojiš dobljeni vsoti v novo celoto. N. pr.

$$(-14a)+(+15a)+(-17a)+(-16a)+(+19a) =$$
$$= (-47a)+(+34a) = -13a.$$

Ako so sumandi raznoimenski, zapišeš jih drugega poleg drugega z njihovimi predznaki vred; pri tem odpadejo oklepaji in znaki seštevanja. Da zaznamuje dobljeni številni izraz vse pozitivne in negativne sumandske enote, je jasno. N. pr.

$$(+2a)+(-3b)+(-5c)+(+4d)=$$
$$=2a-3b-5c+4d.$$

V vsoti algebrajskih števil se sme predznak $+$ pri prvem členu in za enačajem izpuščati; predznak $-$ se ne sme nikdar izpustiti.

Algebrajska vsota = die algebraische Summe. Mnogočlenik = das Polynom. Člen = das Glied. Dvočlenik = das Binom. Tročlenik = das Trinom. Enočlenik = das Monom.

Vsaka vsota algebrajskih števil, kakor n. pr.

$$(+a)+(-b)+(+c)+(-d)=a-b+c-d$$

se imenuje **algebrajska vsota** ali **mnogočlenik**, posamezni sumandi se zovejo **členi**. Algebrajska vsota dveh členov se zove **dvočlenik** ali **binom**, vsota treh členov pa **tročlenik** ali **trinom**. Izrazom, ki imajo samo en člen, pravimo **enočleniki** ali **monomi**.

V algebrajski vsoti ali mnogočleniku

$$a-b+c-d$$

smemo znake $+$ in $-$ smatrati ali za predznake dotičnih členov ali pa tudi za računske znake. Kajti spajanje pozitivnih, oziroma negativnih enot z določenim številom se ujema popolnoma s prištevanjem, oziroma z odštevanjem absolutnih enot od dotičnega števila.

Skrčevanje v mnogočlenikih.

Po istih pravilih, po katerih seštejemo dvoje algebrajskih števil, spojimo (skrčimo) v celoto tudi istoimenske izraze v mnogočlenikih.

Kako seštevaš mnogočlenike.

Ako je treba številu, oziroma mnogočleniku prišteti mnogočlenik, moramo z dotičnim številom, oziroma s prvim mnogočlenikom spojiti vse pozitivne in negativne enote, ki se nahajajo v drugem mnogočleniku. To pa storimo, ako prištejemo (pripišemo) številu, oziroma prvemu mnogočleniku zaporedoma posamezne člene drugega mnogočlenika. Torej je

$$4a-3b+(-2a-5b+c)=$$
$$=4a-3b-2a-5b+c=2a-8b+c.$$

Mnogočlenike seštevaš, ako zapišeš njihove člene drugega poleg drugega z neizpre-

menjenimi predznaki in skrčiš istoimenske izraze. Da smeš oboje naenkrat storiti, se razume samo po sebi. N. pr.

$$(5a - 7b - 9c) + (3a - 4b + 6c) = 8a - 11b - 3c.$$

§ 6. Odštevanje algebrajskih števil.

Kako odštevaš algebrajska števila.

Algebrajska števila odštevati se pravi, iz vsote dveh algebrajskih števil in iz enega sumanda poiskati drugega. Tudi pri algebrajskih številih je vsota iz razlike in subtrahenda enaka minuendu. Iz te lastnosti izvajamo za odštevanje algebrajskih števil pravilo:

Algebrajsko število odšteješ od algebrajskega števila, ako prišteješ (pripišeš) neizpremenjenemu minuendu subtrahend z nasprotnim predznakom; kajti v vsoti iz razlike in subtrahenda se nahaja minuend in dvoje nasprotnih števil, ki se uničujeta. Torej je:

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b),$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b),$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b),$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b).$$

Prištej v navedenih primerih razliki subtrahend. Kakšno vsoto najdeš?

Kako odštevaš mnogočlenike.

Od števila, oziroma od mnogočlenika odšteješ mnogočlenik, ako odšteješ od minuenda toliko pozitivnih in negativnih enot, kolikor se jih nahaja v posameznih subtrahendovih členih, t. j. ako odšteješ od minuenda zaporedoma vsak subtrahendov člen. Z ozirom na zgoraj navedeno pravilo smemo torej reči:

Mnogočlenike odštevaš, ako pripišeš neizpremenjenemu minuendu subtrahendove člene z nasprotnimi predznaki in skrčiš istoimenske izraze. Da smeš oboje naenkrat storiti, se razume samo po sebi. N. pr.

$$(6a - 7b + 9c) - [(2a - 5b - 8c) - (-a + 3b - 4c)] =$$
$$= (6a - 7b + 9c) - [3a - 8b - 4c] = 3a + b + 13c.$$

§ 7. Seštevanje in odštevanje enačb in neenačb.

Ako izenačimo dva številna izraza, ki imata enaki vrednosti, stvorimo *enačbo*. N. pr. $3x - 8 = 2x + 5$. Izenačena izraza se imenujeta *enačbena dela* (*enačbeni strani*). Vsak teh delov utegne biti sestavljen iz *členov*, ki so spojeni med seboj z znakom seštevanja ali odštevanja. Povej enačbeni strani, enačbene člene in kako so členi združeni med seboj v zgoraj navedeni enačbi!

Enačba = die Gleichung. Enačbena dela = Teile der Gleichung. Enačbeni členi = Glieder der Gleichung.

Važne so tiste enačbe, v katerih se nahajajo znane in neznane količine. Znane količine (*znanke*) zaznamujemo s posebnimi števili, včasih tudi z začetnimi črkami abecede; neznane količine (*neznanke*) pa značimo s končnimi črkami x, y, z, u, v.

Neznanka = die Unbekannte. Znanka.

Tisto število, oziroma tisti številni izraz, ki ustreza enačbi (tvori enačbena dela enaka), se imenuje *enačbeni koren*. Enačbi določiti koren, se pravi enačbo *razrešiti*.

Enačbeni koren = die Wurzel der Gleichung. Razrešiti = auflösen.

Določeno enačbo razrešimo, ako jo pretvorimo tako, da stoji v enem enačbenem delu neznanka sama s koeficientom $+1$, v drugem delu pa stoje znana števila. Razrešena enačba ima torej obliko $x = a$, kjer pomeni a znano število, oziroma znani številni izraz.

Oblika razrešene enačbe.

Ako izrazimo v znakih, da imata dva številna izraza neenaki vrednosti, stvorimo *neenačbo*. Tudi v neenačbi ločimo *neenačbena dela* (*neenačbeni strani*) in *neenačbene člene*.

Neenačba = die Ungleichung.

Enačbe in neenačbe seštevamo in odštevamo po naslednjih pravilih:

a) *Ako prišteješ* (*oziroma odšteješ*) *enakim številnim izrazom enake izraze, najdeš enake zneske*, v znakih

Seštevanje in odštevanje enačb in neenačb.

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \text{sešteto} \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \text{odšteto}$$

$$a + c = b + d, \qquad\qquad a - c = b - d.$$

Navedeni izrek sledi iz matematičnih osnovnih resnic.

b) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) neenakim številnim izrazom enake izraze, najdeš v istem zmislu neenake zneske, v znakih

$$\left.\begin{array}{r} a > b \\ c = d \end{array}\right\} \text{sešteto} \qquad \left.\begin{array}{r} a > b \\ c = d \end{array}\right\} \text{odšteto}$$

$$a + c > b + d, \qquad a - c > b - d.$$

Dokaz. Ako je število a za f enot večje od števila b, je $a - f = b$ ali pa $a = b + f$. Iz

$$\left.\begin{array}{r} a = b + f \\ c = d \quad\; \end{array}\right\} \text{sešteto}$$

sledi $\quad a + c = (b + d) + f,$

in iz

$$\left.\begin{array}{r} a = b + f \\ c = d \quad\; \end{array}\right\} \text{odšteto}$$

sledi $\quad a - c = (b - d) + f;$

torej je po osnovnih resnicah

$$a + c > b + d \text{ in } a - c > b - d.$$

c) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) enakim številnim izrazom neenake izraze, najdeš v istem (oziroma nasprotnem) zmislu neenake zneske, v znakih

$$\left.\begin{array}{r} a = b \\ c > d \end{array}\right\} \text{sešteto} \qquad \left.\begin{array}{r} a = b \\ c > d \end{array}\right\} \text{odšteto}$$

$$a + c > b + d, \qquad a - c < b - d.$$

Dokaz. Iz

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d + f \end{array}\right\} \text{sešteto}$$

sledi $\quad a + c = (b + d) + f,$

in iz

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d + f \end{array}\right\} \text{odšteto}$$

sledi $\quad a - c = (b - d) - f;$

torej je po osnovnih resnicah in po pojasnilih o odštevanju absolutnih števil $a + c > b + d$ in $a - c < b - d$.

d) Ako prišteješ (oziroma odšteješ) neenakim številnim izrazom neenake izraze v istem (oziroma nasprotnem) zmislu, najdeš neenake izraze v zmislu prvih izrazov, v znakih

$$\frac{\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \text{sešteto}}{a + c > b + d,} \qquad \frac{\left.\begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array}\right\} \text{odšteto}}{a - c > b - d.}$$

Dokaz. Iz
$$\left.\begin{array}{l} a = b + f \\ c = d + g \end{array}\right\} \text{sešteto}$$
sledi
$$a + c = (b + d) + (f + g),$$
in iz
$$\left.\begin{array}{l} a = b + f \\ c = d - g \end{array}\right\} \text{odšteto}$$
sledi
$$a - c = (b - d) + (f + g);$$
torej je po osnovnih resnicah

$$a + c > b + d \quad \text{in} \quad a - c > b - d.$$

Naloge.

1. Razreši enačbo $3x - 8 = 2x + 5$. Razreševanje enačb.

Navedeno enačbo razrešiš, ako odpraviš iz prvega enačbenega dela znani člen 8 in iz drugega dela člen $2x$. Prvo dosežeš, ako prišteješ enačbenima deloma število 8, drugo pa, ako odšteješ od enačbenih delov številni izraz $2x$. Primerjaj naslednjo razrešitev.

Razrešitev:	**Preizkus:**
$3x - 8 = 2x + 5$	I. del $= 39 - 8 = 31$,
$3x = 2x + 13$	II. del $= 26 + 5 = 31$.
$x = 13$.	

Iz navedenih pojasnil izvajamo za porabno računanje to-le pravilo:

Vsak člen odpraviš iz enega enačbenega dela, ako ga prestaviš v drugi del z nasprotnim predznakom. Prestavljanje členov = das Transponieren der Glieder.

Preizkus = die Probe.

Preizkus napraviš, ako zameniš v določeni enačbi neznanko z najdenim korenom ter izračunaš vrednosti prvega in drugega dela. Če se ujemata te vrednosti, si prav razrešil enačbo.

2. Razreši enačbo

$$8 - (4 + 5x) = (5 - 6x) + (-4 + 2x).$$

Ako izvršiš nakazana računska načina, najdeš

$$4 - 5x = 1 - 4x.$$

Če prestaviš potem člen $5x$ v drugi enačbeni del in člen 1 v prvi del ter skrčiš izraze kolikor mogoče, dobiš

$$3 = x.$$

Preizkus:

$$\text{I. del} = 8 - (4 + 15) = -11,$$
$$\text{II. del} = (5 - 18) + (-4 + 6) = -11.$$

Pretvarjanje neenačb.

3. Določi mejo za x v neenačbi

$$5a - 3 + 2x > 3x - 1 + 4a.$$

V navedeni neenačbi moraš iz prvega dela odpraviti člen $2x$, iz drugega dela pa člena 1 in $4a$. Prvo doséžeš, ako odšteješ od obeh neenačbenih delov številni izraz $2x$, drugo pa, ako prišteješ (oziroma odšteješ) obema deloma število 1 (oziroma izraz $4a$). Razrešitev je ta-le:

$$\begin{aligned} 5a - 3 + 2x &> 3x - 1 + 4a \\ 5a - 3 &> x - 1 + 4a \\ 5a - 2 &> x + 4a \\ a - 2 &> x. \end{aligned}$$

Iz navedenega sledi, da se tudi v neenačbah odpravi vsak člen iz enega dela, ako se postavi v drugi del z nasprotnim predznakom.

4. Določi meji za x v neenačbi

$$3x + 6a - 8 < 4x + 5a - 7 < 3x + 6a - 6.$$

V navedeni neenačbi, ki je sestavljena iz treh delov, odpraviš člen $3x$ iz zunanjih delov, ako odšteješ od vseh treh delov izraz $3x$; iz srednjega neenačbenega dela pa odpraviš člena $5a$ in 7, ako odštejeÅ¡ (oziroma prištejeÅ¡) vsem trem delom izraz $5a$ (oziroma število 7). Razrešitev je ta-le:

$$3x + 6a - 8 < 4x + 5a - 7 < 3x + 6a - 6$$
$$6a - 8 < x + 5a - 7 < 6a - b$$
$$a - 8 < x - 7 < a - 6$$
$$a - 1 < x < a + 1.$$

Na katere izreke se opirajo razrešitve navedenih enačb in neenačb?

B. Računska načina druge stopnje.

§ 8. Množenje.

Število množiti s številom se pravi, prvo število postaviti tolikokrat kot sumand, kakor kaže drugo število, v znakih

$$a \times b = a + a + a + \ldots b \text{krat}.$$

Število, ki se sešteva, se imenuje množenec ali multiplikand; število, ki pove, kolikokrat se mora postaviti multiplikand kot sumand, se zove množitelj ali multiplikator; število, ki ga iščeš, je zmnožek ali produkt. Multiplikand in multiplikator imata skupno ime zmnožkova činitelja ali produktova faktorja. Znak množenja je poševni križ $\times$ ali pika na črti $\cdot$ in se čita „pomnoženo“, ali „naj se množi“, ali „krat“; stavi se med faktorja. Multiplikand stoji pred množenskim znakom, multiplikator pa za množenskim znakom. Pri občnih številih se množenski znak navadno izpušča; torej se zapiše faktor poleg faktorja brez vsakega znaka, n. pr. ab. Istotako se tudi ravna, ako je eden izmed faktorjev posebno število, n. pr. $4b$. V tem slučaju se zapiše posebno število pred občno število; posebno število se zove koeficient, občno pa glavna količina.

Množiti = multiplizieren. Prvotno pojasnilo o množenju. Množenec = der Multiplikand. Množitelj = der Multiplikator. Zmnožek = das Produkt. Činitelj = der Faktor.

Navedeno pojasnilo o množenju je prvotno in velja, dokler je multiplikator absolutno celo število. Če pa postane multiplikator negativno ali ulomljeno število, nima

Občno pojasnilo o množenju.

navedeno pojasnilo o množenju nobenega pravega zmisla. Zato je treba še drugega in sicer obče veljavnega pojasnila o množenju. To pojasnilo je:

Število množiti s številom se pravi, produkt določiti iz multiplikanda na isti način, kakor nastane multiplikator iz absolutne enote. N. pr. Število a pomnožiš s številom b, ako določiš produkt iz multiplikanda a istotako, kakor nastane multiplikator b iz absolutne enote. Ker dobiš multiplikator b, ako postaviš absolutno enoto $b$krat kot sumand, najdeš torej produkt, ako postaviš multiplikand $b$krat kot sumand. Iz navedenega se vidi, da se ujemata prvotno in občno pojasnilo o množenju.

Katera števila so pri množenju imenovana. Nakazano množenje. Nakazani in izračunani produkt.

Iz pojma o množenju sledi, da utegne multiplikand biti količina, multiplikator pa ne; produkt se ujema z multiplikandom gledé na ime.

Številni izraz ab ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba število a pomnožiti s številom b (nakazano množenje); isti izraz pomeni tudi produkt števil a in b (nakazani produkt). Razen nakazanega produkta imamo še izračunani produkt (navadno pri posebnih številih); v izračunanem produktu ne poznaš niti multiplikanda niti multiplikatorja. N. pr. 24 je izračunani produkt števil 3 in 8.

Produkt več števil.

Produkt treh ali več števil je tisti končni produkt, katerega najdeš, ako pomnožiš produkt prvih dveh števil s tretjim, novi produkt s četrtim številom i. t. d. Številni izraz $abcd$ ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba produkt števil a in b pomnožiti s številom c in ta produkt pomnožiti s številom d; isti izraz pomeni tudi produkt števil a, b, c in d.

Nakazani produkt dveh, treh ali več števil oklenemo, ako ga hočemo zaznamovati kakor določeno število.

Vzmnož = die Potenz.

Produkte enakih faktorjev imenujemo vzmnoži ali potence. N. pr.

$$aa,\ bbb,\ cccc,\ ddddd \text{ i. t. d.},$$

ali krajše:

$$a^2,\ b^3,\ c^4,\ d^5 \text{ i. t. d.}$$

Kakor kažejo navedeni primeri, zaznamujemo potence na okrajšani način tako, da postavimo ponavljajoči se faktor (osnovno število ali potenčno podlogo) samo enkrat ter mu pripišemo na desni zgoraj število (potenčni eksponent), ki naznanja, kolikokrat se mora podloga postaviti kot faktor. V potenci c^4 je c osnovno število ali podloga, 4 pa potenčni eksponent. Druga potenca se imenuje kvadrat, tretja potenca pa kub dotične podloge. Izraze a^2, b^3, c^4 čitaš tako-le: a na drugo (potenco), ali: a na kvadrat; b na tretjo (potenco), ali: b na kub; c na četrto (potenco).

Osnovno število = die Grundzahl. Podloga = die Basis. Potenčni eksponent = der Potenzexponent. Kvadrat = das Quadrat. Kub = der Kubus.

Po pojmu o potencah najdemo:

$$\left.\begin{aligned} a^3 \cdot a^4 &= aaa \cdot aaaa = a^{3+4} = a^7. \\ a^m \cdot a^n &= \underbrace{aaa\ldots a}_{m\,\text{krat}} \cdot \underbrace{aa\ldots a}_{n\,\text{krat}} = a^{m+n}. \end{aligned}\right\}\ \text{t. j.}$$

Kako množiš potence.

Potence iste podloge množiš, ako pridržiš skupno podlogo ter seštevaš potenčne eksponente.

$$a^m \cdot a = \underbrace{aaa\ldots a}_{m\,\text{krat}} \cdot a = a^{m+1}.$$

Ako se nahaja podloga sama kakor faktor, ravnaš z njo istotako, kakor bi imela eksponent 1. Torej pomeni a^1 toliko kakor a, t. j. prva potenca vsakega števila je enaka dotičnemu številu.

Pomen prve potence.

Ako so faktorji algebrajska števila, moraš pri določevanju produkta gledati na predznak in na absolutno vrednost. Ker so pozitivna števila istega pomena kakor absolutna, množiš torej algebrajsko število $+a$ (oziroma $-a$) s pozitivnim številom $+b$, ako postaviš neizpremenjeni multiplikand $+a$ (oziroma $-a$) tolikokrat kot sumand, kakor kaže multiplikator $+b$, v znakih

Kako množiš algebrajska števila.

$$(+a) \cdot (+b) = (+a) + (+a) + \ldots b\text{krat} = +ab\,.\,.\ \text{I.}$$
$$(-a) \cdot (+b) = (-a) + (-a) + \ldots b\text{krat} = -ab\,.\,.\ \text{II.}$$

Da je v prvem slučaju produkt pozitiven, v drugem pa negativen, je jasno. — Če je pa multiplikator negativen, ne moreš produkta določiti po prvotnem pojasnilu o množenju. Algebrajsko število $+a$ (oziroma $-a$) množiš torej z negativnim številom $-b$, ako izvajaš produkt iz multiplikanda na isti način, kakor nastane multiplikator iz prvotne enote. Ker dobiš $-b$, ako vzameš prvotno enoto $(+1)$ nasprotno ter postaviš to nasprotno enoto (t. j. -1) $b$krat kot sumand, določiš torej produkt, ako postaviš nasprotni multiplikand (t. j. $-a$, oziroma $+a$) $b$krat kot sumand, v znakih

$$(+a)\cdot(-b) = (-a)+(-a)+\ldots b\text{krat} = -ab\ldots\text{III.}$$
$$(-a)\cdot(-b) = (+a)+(+a)+\ldots b\text{krat} = +ab\ldots\text{IV.}$$

Ako primerjamo faktorje in produkt v prvem in četrtem, oziroma v drugem in tretjem slučaju, najdemo za porabno računanje ta-le pravila:

Produkt dveh algebrajskih števil je pozitiven, ako imata faktorja enaka predznaka.

Produkt dveh algebrajskih števil je negativen, ako imata faktorja različna predznaka.

Pri algebrajskih številih najdeš absolutno vrednost produkta, ako pomnožiš absolutni vrednosti faktorjev.

Ako je treba tri, štiri ali več algebrajskih števil pomnožiti, določimo predznak in absolutno vrednost končnega produkta, ako porabimo ponavljajoč navedena pravila. Gledé na predznak končnega produkta najdemo na ta način pravilo:

Produkt algebrajskih števil je pozitiven (negativen), ako je število negativnih faktorjev sodo (liho).

Zakon o zamenjavi faktorjev = das Kommutationsgesetz der Multiplikation.

Ako predočimo ab enot tako-le:

$$\left.\begin{array}{l} 1+1+1+\ldots a\text{krat} \\ 1+1+1+\ldots a\text{krat} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+1+1+\ldots a\text{krat} \end{array}\right\} b \text{ vrst,}$$

stvorimo b vodoravnih vrst, vsako po a enot, ali pa a navpičnih vrst, vsako po b enot. Če seštejemo te enote po vodoravnih vrstah, dobimo $b$krat po a enot, t. j. $a\cdot b$; če pa seštejemo iste enote po navpičnih vrstah, dobimo $a$krat po b enot, t. j. $b\cdot a$. Torej je

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

Produktova vrednost se ne izpremeni, ako zameniš faktorja med seboj.

Ta izrek velja za vsako število neimenovanih faktorjev, ker smeš zameniti po dva in dva faktorja.

Po pojmu o množenju je

Zakona o združevanju faktorjev = die Assoziationsgesetze der Multiplikation.

$$(ab)c = ab + ab + ab + \ldots c\text{krat} =$$

$$= \left.\begin{array}{l} a + a + a + \ldots b\text{krat} \\ a + a + a + \ldots b\text{krat} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a + a + a + \ldots b\text{krat} \end{array}\right\} c \text{ vrst.}$$

Ako seštejemo navedena števila po vodoravnih vrstah, dobimo v vsaki vrsti po ab enot in v vseh vrstah skupaj $c$krat po ab enot, t. j. $ab \cdot c$; če pa šeštejemo ista števila po navpičnih vrstah, najdemo v vsaki navpični vrsti po ac enot in v vseh navpičnih vrstah skupaj $b$krat po ac enot, t. j. $ac \cdot b$.

Enote produkta $(ab)\,c$ pa moremo z ozirom na zakon o zamenjavi faktorjev urediti tudi tako-le:

$$(ab)\,c = ba + ba + ba + \cdots c\text{krat} =$$

$$= \left.\begin{array}{l} b + b + b + \cdots a\text{krat} \\ b + b + b + \cdots a\text{krat} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b + b + b + \cdots a\text{krat} \end{array}\right\} c \text{ vrst.}$$

Če seštejemo te enote po navpičnih vrstah, dobimo v vsaki navpični vrsti po bc enot in v vseh navpičnih vrstah skupaj $a$krat po bc enot, t. j. $bc \cdot a = a \cdot bc$. Iz navedenega najdemo torej pravilo:

$$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc), \text{ t. j.}$$

Produkt pomnožiš s številom, ako pomnožiš enega njegovih faktorjev.

Ako obrnemo zadnjo enačbo, najdemo:

$$a \cdot (bc) = (ac) \cdot b = (ab) \cdot c, \text{ t. j.}$$

Število pomnožiš s produktom, ako pomnožiš število z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem.

Kako se množi, če je multiplikator $= 1$, oziroma $= 0$.

Določeno število enkrat, oziroma ničkrat postaviti kot sumand, je brez zmisla. Pomen in rezultat takih množitev določimo po že znanih računskih zakonih, ako smatramo namreč te zakone vobče za veljavne, torej tudi v navedenih slučajih. Po zakonu o zamenjavi faktorjev in po pojmu o množenju najdemo:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 1 &= 1 \cdot a = 1 + 1 \ldots a\text{krat} = a, \\ a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0 + 0 \ldots a\text{krat} = 0. \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Število se ne izpremeni, ako ga pomnožiš z 1.

Produkt je $= 0$, ako je eden izmed faktorjev $= 0$.

Zakoni o delskih produktih = die Distributionsgesetze der Multiplikation.

Po pojmu o množenju in z ozirom na zakon o zamenjavi sumandov je

$$(a + b + c)m = (a + b + c) + (a + b + c) + \ldots m\text{krat} =$$
$$= am + bm + cm, \quad \text{t. j.}$$

Vsoto pomnožiš s številom, ako pomnožiš vsak sumand z dotičnim številom ter seštevaš delske produkte.

Po ravno navedenem pravilu najdemo z ozirom na zakon o zamenjavi faktorjev:

$$m(a + b + c) = (a + b + c)m = am + bm + cm, \quad \text{t. j.}$$

Število pomnožiš z vsoto, ako pomnožiš število z vsakim sumandom ter seštevaš delske produkte.

Ako obrnemo navedena zakona, najdemo:

$$am + bm + cm = (a + b + c)m, \quad \text{t. j.}$$

Produkte s skupnim faktorjem seštevaš, ako seštevaš neskupne faktorje vseh produktov ter pomnožiš to vsoto s skupnim faktorjem.

Z ozirom na zgoraj navedena računska zakona o delskih produktih najdemo dalje:

$$\begin{aligned}\underbrace{(a+b+c)}_{x}(m+n+p) &= xm+xn+xp = \\ &= (a+b+c)m+(a+b+c)n+ \\ &\quad +(a+b+c)p = \\ &= \left\{\begin{array}{l} am+bm+cm \\ an+bn+cn \\ ap+bp+cp. \end{array}\right.\end{aligned}$$

V končnem produktu je vsak multiplikandov člen pomnožen z vsakim multiplikatorjevim členom. Torej smemo reči:

Vsoto pomnožiš z vsoto, ako pomnožiš vsak multiplikandov člen z vsakim multiplikatorjevim členom ter seštevaš delske produkte.

Kako se množijo mnogočleniki.

Ker veljajo pravila o množenju vsot za vsako vsoto, torej tudi za algebrajske vsote ali mnogočlenike, smemo iz navedenega izvajati:

Mnogočlenik pomnožiš s številom, ako pomnožiš vsak člen z dotičnim številom ter algebrajsko seštevaš delske produkte (t. j. zapišeš jih drugega poleg drugega z neizpremenjenimi predznaki).

Število pomnožiš z mnogočlenikom, ako pomnožiš število z vsakim členom ter algebrajsko seštevaš delske produkte.

Mnogočlenik pomnožiš z mnogočlenikom, ako pomnožiš vsak multiplikandov člen z vsakim multiplikatorjevim členom ter algebrajsko seštevaš delske produkte. V končnem produktu skrčiš izraze, kolikor je mogoče. Da to laže izvršiš, urediš pred množenjem oba mnogočlenika na isti način ter pišeš med množenjem istoimenske izraze drugega pod drugega. Mnogočlenik urediš po padajočih (pojemajočih) potencah, ako postaviš na prvo mesto najvišjo potenco in potem nižje in nižje potence; če pa postaviš na prvo mesto člen brez potence ali z najmanjšo potenco in potem višje in višje potence, urediš mnogočlenik po rastočih potencah.

Tako je n. pr. mnogočlenik $5a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - 4b^3$ urejen po padajočih potencah z ozirom na podlogo a in po rastočih potencah z ozirom na podlogo b. N. pr.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{4}{l}{(8x^3 - 11x^2 + 3x - 13)} & \multicolumn{2}{l}{(3x^2 - x - 9)} \\
\hline
24x^5 - 33x^4 + 9x^3 - 39x^2 & & & & & \\
- 8x^4 + 11x^3 - 3x^2 + 13x & & & & & \\
- 72x^3 + 99x^2 - 27x + 117 & & & & & \\
\hline
24x^5 - 41x^4 - 52x^3 + 57x^2 - 14x + 117. & & & & &
\end{array}
$$

Kvadrat in kub binoma.

S pomočjo pojma o potencah in zadnjega zakona najdemo:

$$
\left.\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 = \\
&= a^2 + b^2 + 2ab. \\
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 = \\
&= a^2 + b^2 - 2ab.
\end{aligned}\right\}
$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$
\left.\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \\
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b) = \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}\right\}
$$

Kvadrat vsote (razlike) dveh števil je enak vsoti kvadratov teh števil, povečani (zmanjšani) za dvojni produkt obeh števil.

Produkt iz vsote in razlike dveh števil je enak razliki kvadratov obeh števil.

Kub vsakega binoma je algebrajska vsota: 1. iz kuba prvega člena; 2. iz trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z drugim členom; 3. iz trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom drugega člena; 4. iz kuba drugega člena. Pri vsoti so vsi členi pozitivni, pri razliki pa sta drugi in četrti člen negativna.

§ 9. Deljenje.

Naloge kakor

$$b \times ? = a \text{ ali } ? \times b = a$$

se rešujejo po četrtem računskem načinu, ki se zove deljenje. Kaj poznamo, česa iščemo v navedenih nalogah?

Deliti v širjem pomenu besede = dividieren. Deljenec = der Dividend. Delitelj = der Divisor. Količnik = der Quotient.

Deliti se pravi, iz produkta dveh faktorjev in iz enega faktorja poiskati drugega. Produkt dveh faktorjev se imenuje deljenec ali dividend; določeni faktor se zove delitelj ali divizor; faktorju, katerega iščeš, se pravi količnik ali kvocijent. Deljenje značita dve piki, stoječi druga nad drugo (:) ali pa vodoravna črta (—). Ako rabimo prvi znak, zapišemo dividend pred znak deljenja, divizor pa za znakom deljenja; če pa rabimo drugi znak, stavimo dividend nad črto, divizor pa pod črto. Zgoraj navedeno nalogo zapišemo torej tako-le:

$$a : b = ? \text{ ali pa } \frac{a}{b} = ?$$

(čitaj: a deljeno z b, ali: a naj se deli z b, ali pa tudi: b se nahaja v a).

Kako izvršiš delitev. Merjenje = das Messen. Deljenje v ožjem pomenu besede = das Teilen. Količine pri merjenju in pravem deljenju.

Število a deliš s številom b na dva načina. Z ozirom na prvo zgoraj navedeno nalogo izvršiš deljenje, ako seštevaš število b tolikokrat, da najdeš število a, t. j. divizor b se mora tolikokrat sešteti, kolikorkrat se da odvzeti od dividenda a. Delitev, ki se izvršuje na ta način, se zove merjenje. Pri merjenju se torej preiskuje, kolikokrat se divizor nahaja v dividendu. Dividend in divizor utegneta biti ali neimenovani števili ali pa količini iste vrste; kvocijent je vselej neimenovano število, ki pove, kolikokrat se divizor nahaja v dividendu. — Z ozirom na drugo zgoraj navedeno nalogo izvršiš deljenje, ako poiščeš takšno število, ki ga moraš $b$krat sešteti, da najdeš dividend a. Število, katerega iščeš, je torej toliki del dividenda, kakor kaže divizor. Vsaka delitev v tem zmislu se imenuje pravo deljenje ali deljenje v ožjem pomenu besede. Pri pravem deljenju se torej razdeli dividend na toliko enakih delov, kakor kaže divizor. Dividend utegne biti ali neimenovano število ali pa količina, divizor je vselej neimenovano število; kvocijent je dividendov del in se ravna gledé na ime po dividendu. — Da moraš v prvem in drugem slučaju dobiti isti rezultat, ne oziraje se na njegov pomen, je zaradi zakona o zamenjavi faktorjev jasno.

Nakazano deljenje. Nakazani in izračunani kvocijent.

Številni izraz

$$a : b \text{ ali pa } \frac{a}{b}$$

ima dvojen pomen. Ta izraz pomeni, da je treba število a deliti s številom b (nakazano deljenje); isti izraz pomeni tudi kvocijent števil a in b (nakazani kvocijent). Razen nakazanega kvocijenta imamo še izračunani kvocijent (navadno pri posebnih številih); v izračunanem kvocijentu ne poznaš niti dividenda niti divizorja. N. pr. 7 je izračunani kvocijent števil 63 in 9. Ako je treba z nakazanim kvocijentom računati (posebno, kadar ima obliko $a : b$), ga oklenemo; oklepaj rabimo tudi, če hočemo nakazani kvocijent dveh števil zaznamovati kakor določeno število.

Iz navedenih pojasnil o deljenju izvajamo:

1. Ako pomnožiš kvocijent dveh števil z divizorjem, dobiš dividend kot produkt, v znakih

$$(a : b) \cdot b = a \text{ ali } \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2. Ako sta dividend in divizor enaka, je kvocijent enak 1, v znakih

$$a : a = 1;$$

kajti $1 \cdot a = a$.

3. Kvocijent je enak dividendu, če je divizor $= 1$, v znakih

$$a : 1 = a;$$

kajti $a \cdot 1 = a$.

4. Kvocijent je $= 0$, ako je dividend $= 0$, v znakih

$$0 : a = 0;$$

kajti $0 \cdot a = 0$.

5. Kvocijent se ne da določiti, ako je divizor $= 0$. Kajti za kvocijent $0 : 0$ smeš vzeti vsako

število x, ker je $x \cdot 0 = 0$. Kvocijent $a : 0$ pa je nemogoč, ker ni števila, ki bi z ničlo pomnoženo dalo produkt a.

6. Število se ne izpremeni, ako ga zaporedoma pomnožiš in deliš (oziroma deliš in pomnožiš) z enim in istim številom, v znakih

$$a = am : m \quad \text{ali} \quad a = \frac{a}{m} \cdot m;$$

kajti $a \cdot m = am$. Primerjaj 1.!

Kako deliš algebrajska števila.

Ako sta dividend in divizor algebrajski števili, moraš pri določevanju kvocijenta gledati na dvoje, prvič na predznak, drugič na absolutno vrednost. Ker mora kvocijent, pomnožen z divizorjem, dati v vsakem slučaju dividend za produkt, morata torej kvocijent in divizor (faktorja) imeti enaka predznaka, če je dividend pozitiven; različna predznaka pa, če je dividend negativen. Torej je

$$\left.\begin{aligned}(+a):(+b) &= +\frac{a}{b},\\ (-a):(-b) &= +\frac{a}{b},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(+a):(-b) &= -\frac{a}{b},\\ (-a):(+b) &= -\frac{a}{b}.\end{aligned}\right\}$$

Iz navedenih primerov posnamemo za porabno računanje ta-le pravila:

Kvocijent dveh algebrajskih števil je pozitiven, ako sta dividend in divizor enako zaznamovana.

Kvocijent dveh algebrajskih števil je negativen, ako sta dividend in divizor različno zaznamovana.

Absolutno vrednost kvocijenta izračunaš pri algebrajskih številih istotako kakor pri absolutnih številih.

Kvocijentove izpremembe.

Kvocijent $(a : b)$ pomeni toliki del dividenda a, kakor kaže divizor b. Ako povečaš (zmanjšaš) le dividend a dve-, tri-, ... n krat, mora se očividno tudi kvocijent istotolikokrat povečati (zmanjšati), t. j. ako pomnožiš (deliš) le dividend z določenim številom, pomnožiš (deliš) kvocijent z istim številom in obratno. Ako napraviš iz dividenda a dve-, tri-, ... $n$krat več (manj) enakih delov, morajo ti deli postati istotolikokrat manjši (večji), t. j. ako pomnožiš (deliš) divizor z določenim številom, deliš (pomnožiš) kvocijent z istim številom in obratno. Ako povečaš (zmanjšaš) dividend in divizor obenem istotolikokrat, se mora kvocijent zaporedoma istotolikokrat povečati in zmanjšati (oziroma zmanjšati in povečati), torej ostane neizpremenjen.

Računski zakoni. Iz navedenih pojasnil izvajamo pravila:

Kvocijent pomnožiš s številom, ako pomnožiš le njegov dividend, ali pa deliš le njegov divizor z dotičnim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b : m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{I.}$$

Kvocijent deliš s številom, ako deliš le njegov dividend, ali pa pomnožiš le njegov divizor z dotičnim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b} = \frac{a}{bm} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{II.}$$

Kvocijent se ne izpremeni, ako pomnožiš (deliš) dividend in divizor obenem z istim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}.$$

V enačbah pod I. in II. se nahajata tudi pravili:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš deljenje in množenje določenih števil, v znakih

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$$

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš deljenje določenih števil, v znakih

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}.$$

Ako obrnemo enačbe pod I. in II., najdemo pravila:

$$\left.\begin{aligned} \frac{am}{b} &= \frac{a}{b}\cdot m, \\ \frac{a}{b:m} &= \frac{a}{b}\cdot m, \\ \frac{a}{bm} &= \frac{a}{b}:m. \end{aligned}\right\}\text{ t. j.}$$

Produkt deliš s številom, ako deliš le en faktor z dotičnim številom.

Število deliš s kvocijentom, ako ga deliš z dividendom in znesek pomnožiš z divizorjem.

Število deliš s produktom, ako ga deliš z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem.

Potence iste podloge deliš, ako pridržiš skupno podlogo ter odštejeÅ¡ potenčne eksponente, v znakih

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

kajti $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$.

Vsoto deliš s številom, ako deliš vsak sumand s številom ter sešteješ delske kvocijente, v znakih

$$(a+b+c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m};$$

kajti $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \cdot m = a + b + c.$

Zadnje pravilo velja za vsako vsoto, torej tudi za algebrajsko vsoto ali mnogočlenik. Zato smemo reči:

Mnogočlenik deliš s številom, ako deliš vsak člen z dotičnim številom ter algebrajsko sešteješ delske kvocijente.

Produkt iz divizorja in kvocijenta je v vsakem slučaju enak dividendu. Ako sta divizor in kvocijent urejena mnogočlenika, se mora po pravilih o množenju mnogočlenskih izrazov v dividendu nahajati toliko delskih produktov, kolikor členov ima kvocijent, in prvi dividendov člen je produkt iz prvega divizorjevega in prvega kvocijentovega člena. Prvi kvocijentov člen najdeš torej, ako deliš prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom. Če pomnožiš potem ves divizor s prvim kvocijentovim členom ter odštevaš ta delski produkt od dividenda, najdeš prvi dividendov ostanek, v katerem se nahaja še toliko delskih produktov, kolikor členov še manjka kvocijentu. Ker je prvi člen urejenega dividendovega ostanka produkt iz prvega divizorjevega in drugega kvocijentovega člena, najdeš torej drugi kvocijentov člen, ako deliš prvi člen dividendovega ostanka s prvim divizorjevim členom. Če pomnožiš potem ves divizor z drugim kvocijentovim členom ter odštevaš ta delski produkt od prvega dividendovega ostanka, najdeš drugi dividendov ostanek, v katerem se nahaja še toliko delskih produktov, kolikor členov še manjka kvocijentu. Iz urejenega drugega dividendovega ostanka izračunaš naslednji kvocijentov člen istotako, kakor si določil drugi kvocijentov člen iz prvega dividendovega ostanka (oziroma prvi kvocijentov člen iz popolnega dividenda) i. t. d. Primerjaj navedeni račun:

$$
\begin{array}{l}
(8a^4 - 26a^3b - a^2b^2 - 9ab^3 - 42b^4) : (2a^2 - 5ab - 7b^2) = \\
\underline{\begin{array}{l} 8a^4 - 20a^3b - 28a^2b^2 \\ - \quad\; + \quad\quad\; + \end{array}} \qquad\qquad\quad = 4a^2 - 3ab + 6b^2, \\
\quad\quad \underline{\begin{array}{l} -\ 6a^3b + 27a^2b^2 - 9ab^3 \\ -\ 6a^3b + 15a^2b^2 + 21ab^3 \\ + \quad\quad\quad - \quad\quad\quad - \end{array}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{\begin{array}{l} 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\ 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\ - \quad\quad\quad + \quad\quad\quad + \end{array}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

ali krajše:

$$
\begin{array}{l}
(8a^4 - 26a^3b - a^2b^2 - 9ab^3 - 42b^4) : (2a^2 - 5ab - 7b^2) = \\
\quad -\ 6a^3b + 27a^2b^2 - 9ab^3 \qquad\qquad = 4a^2 - 3ab + 6b^2. \\
\quad\quad\quad\quad 12a^2b^2 - 30ab^3 - 42b^4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Iz navedenega posnamemo za delitev mnogočlenskih izrazov to-le pravilo:

1. Uredi, prej ko začneš deliti, dividend in divizor na isti način.

2. Prvi kvocijentov člen najdeš, ako deliš prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom. Potem pomnožiš ves divizor s prvim kvocijentovim členom ter odštejeŝ ta delski produkt od dividenda. Tako najdeš prvi dividendov ostanek, katerega je treba istotako urediti, kakor si začetkoma uredil dividend in divizor.

3. Iz prvega dividendovega ostanka izračunaš drugi kvocijentov člen na isti način, kakor si našel iz popolnega dividenda prvi kvocijentov člen.

4. Naslednje kvocijentove člene izračunaš iz naslednjih dividendovih ostankov istotako, kakor si našel drugi kvocijentov člen.

Samo po sebi se razume, da zapišeš v dividendove ostanke samo toliko členov, kolikor jih ravno potrebuješ. Pismeni račun si prav zdatno okrajšaš, ako odštejeŝ delske produkte kar pri njih izračunanju od dividenda, oziroma od dividendovih ostankov. Primerjaj navedeni račun! Ako prideš pri deljenju do ostanka, katerega prvi člen ima glavno količino v manjši potenci ko prvi divizorjev člen, pretrgaš delitev. V tem slučaju je kvocijent le približno določen; produkt iz divizorja in kvocijenta je za delitveni ostanek manjši od dividenda.

§ 10. Množenje in deljenje enačb in neenačb.

a) Ako množiš (deliš) enake številne izraze z enakimi izrazi, najdeš enake zneske, v znakih

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \text{pomnoženo} \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \text{deljeno}$$

$$ac = bd, \qquad\qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Navedeni izrek sledi iz matematičnih osnovnih resnic.

b) Ako množiš (deliš) neenake številne izraze z enakimi izrazi, najdeš v istem zmislu neenake zneske, v znakih

$$\frac{\left.\begin{matrix} a > b \\ c = d \end{matrix}\right\} \text{pomnoženo}}{ac > bd,} \qquad \frac{\left.\begin{matrix} a > b \\ c = d \end{matrix}\right\} \text{deljeno}}{\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.}$$

Dokaz. Iz

$$\frac{\left.\begin{matrix} a = b + f \\ c = d \end{matrix}\right\} \text{pomnoženo}}{} \qquad \frac{\left.\begin{matrix} a = b + f \\ c = d \end{matrix}\right\} \text{deljeno}}{}$$

sledi $ac = bd + df$ in $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} + \frac{f}{d}$;

torej je po osnovnih resnicah

$$ac > bd \text{ in } \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

c) Ako množiš enake številne izraze z neenakimi izrazi, najdeš v istem zmislu neenake izraze, v znakih: iz $a = b$ in $c > d$ sledi $ac > bd$.

Dokaz je popolnoma sličen dokazu pod *b)*.

d) Ako množiš večji številni izraz z večjim izrazom, najdeš večji izraz, v znakih: iz $a > b$ in $c > d$ sledi $ac > bd$.

Dokaz. Iz
$$\frac{\left.\begin{matrix} a = b + f \\ c = d + g \end{matrix}\right\} \text{pomnoženo}}{\text{sledi } ac = bd + (df + bg + fg);}$$

torej je po osnovnih resnicah $ac > bd$.

e) Ako deliš enake številne izraze z neenakimi izrazi, najdeš v nasprotnem zmislu neenake izraze, v znakih: iz $a = b$ in $c > d$ sledi $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Dokaz. Če bi bil kvocijent $\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}$ in bi ta kvocijent pomnožili z neenačbo $c > d$, bi dobili $\frac{a}{c} \cdot c > \frac{b}{d} \cdot d$ ali krajše $a > b$, kar nasprotuje pogoju $a = b$. Torej mora biti $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

f) Ako deliš večji številni izraz z manjšim izrazom, najdeš večji izraz, v znakih: iz $a > b$ in $c < d$ sledi $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Dokaz je popolnoma sličen prejšnjemu.

Naloge.

1. Razreši enačbo: Razreševanje oklepajev pri enačbah.

$$(2x + 1)(x - 3) - (3x - 4)(2x + 5) = 74 - (2x - 3)^2.$$

Navedeno enačbo razrešiš, ako izvršiš najprej nakazane računske načine v vsakem enačbenem delu, potem prestaviš člene z neznanko v en del, znane člene pa v drugi del, in končno deliš oba enačbena dela z neznankinim koeficientom.

Razrešitev:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5x - 3) - (6x^2 + 7x - 20) &= 74 - (4x^2 - 12x + 9)\\ -4x^2 - 12x + 17 &= 65 - 4x^2 + 12x\\ -24x &= 48\\ x &= -2.\end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned}&\text{I. del} = (-3)(-5) - (-10)\cdot 1 = 15 + 10 = 25,\\ &\text{II. del} = 74 - (-7)^2 = 74 - 49 = 25.\end{aligned}$$

2. Razreši enačbo:

$$\begin{aligned}(12x^4 - 7x^3 - 38x^2 - 7x + 10) : (3x^2 - 4x - 5) &=\\ = (2x - 3)(2x + 3) + 4.\end{aligned}$$

Navedeno enačbo razrešiš, ako postopaš istotako kakor pri prejšnji enačbi.

Razrešitev:

$$\begin{aligned}4x^2 + 3x - 2 &= 4x^2 - 9 + 4\\ 3x &= -3\\ x &= -1.\end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned}&\text{I. del} = (12 + 7 - 38 + 7 + 10) : (3 + 4 - 5) =\\ &\qquad = (-2) : 2 = -1,\\ &\text{II. del} = (-5)\cdot 1 + 4 = -5 + 4 = -1.\end{aligned}$$

3. Določi tista cela števila, ki ustrezajo neenačbi $5x + 9 < 11x - 21 < 5x - 3$.

Nalogo razrešiš, ako odpraviš iz zunanjih neenačbenih delov člen $5x$, iz srednjega neenačbenega dela pa člen 21, in potem deliš vse tri neenačbene dele z neznankinim koeficientom.

Razrešitev:

$$5x + 9 < 11x - 21 < 5x - 3$$
$$9 < 6x - 21 < -3$$
$$30 < 6x < 18$$
$$5 < x < 3.$$

Z ozirom na pogoj naloge je torej $x = 4$.

Na katere izreke se opirajo razrešitve navedenih enačb in neenačb?

C. Lastnosti celih števil.

§ 11. Številni sestavi.

Številni sestav = das Zahlensystem. Desetiški številni sestav = das dekadische Zahlensystem.

Vsakemu številu se da pridejati enota in z dobljenim številom zopet spojiti enota. Tako postopajoč najdemo neizrečeno veliko števil, ki se imenujejo cela števila. Če hočemo ta števila izraziti v govoru in predočiti pismeno, je treba za vsako število posebnega imena in znaka. Pa teh imen in znakov ne sme biti preveč, da si jih moremo zapomniti in da ne postane njih raba pretežavna. Zato so pregledno razvrstili števila po skupinah in so izumili jako enostavna pravila, po katerih je mogoče s primeroma pičlo množico besed in znakov izraziti v govoru in predočiti pismeno vsa potrebna cela števila natanko in določno. Ta pregledna razvrstitev števil se imenuje številni sestav ali sistem. Vsi omikani narodi rabijo desetiški ali dekadični številni sestav. Število 10 urejuje ta sestav.

Dekadične enote = die dekadischen Einheiten.

V desetiškem številnem sestavu ne štejemo neprestano naprej, temveč prenehamo s štetjem večkrat. Ravnamo tako-le. Ko naštejemo deset prvotnih enot (enic ali **dekadičnih enot brez reda**), pretrgamo štetje ter začnemo šteti od kraja in štejemo zopet do deset. Če ponavljamo na ta način štetje, nastajajo skupine po deset prvotnih enot. Tem skupinam pravimo **dekadične enote prvega reda** ali krajše **desetice** ($10 = 10^1$). Ko naštejemo s prvotnimi enotami deset skupin po deset enot, t. j. deset desetic, pretrgamo zopet štetje ter združimo te skupine (desetice) v novo in večjo celoto, katero imenujemo **dekadično enoto drugega reda** ali **stotico** ($100 = 10^2$). Potem začnemo šteti zopet od kraja, in ko naštejemo deset skupin drugega reda, t. j. deset stotic, spojimo te nove skupine v večjo celoto, ki jo imenujemo **dekadično enoto tretjega reda** ali **tisočico** ($1000 = 10^3$). Če nadaljujemo štetje na ta način, nastajajo vedno nove in večje skupine, katere imenujemo **dekadične enote četrtega, petega, šestega . . . reda** ali **desettisočice, stotisočice, milijonice** i. t. d. ($10000 = 10^4$, $100.000 = 10^5$, $1,000.000 = 10^6, \ldots$).

Iz navedenega spoznamo: deset enic tvori desetico, deset desetic tvori stotico, deset stotic tvori tisočico i. t. d. **Deset dekadičnih enot določenega reda tvori torej dekadično enoto naslednjega višjega reda.** Zakon o tvoritvi dekadičnih enot.

Vsako celo število desetiškega sestava je popolnoma določeno, ako povemo, koliko ima enic, desetic, stotic i. t. d. Kdaj je dekadično število določeno.

Pri pismenem predočevanju celih števil so se dekadičnim enotam odločila posebna mesta, ki se štejejo od desne proti levi. Na prvo mesto pišemo enice, na drugo desetice, na tretje stotice i. t. d. Znano ali določeno množino enot kateregakoli reda zaznamujemo z arabskimi številkami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in z znakom 0, ki pomeni, da na tistem mestu, kjer stoji ničla, ni nobene enote; neznano ali nedoločeno množino enot kateregakoli reda pa zaznamujemo s črkami. Vsaka številka naznanja torej na drugem mestu toliko desetic, na tretjem toliko stotic, na četrtem toliko tisočic i. t. d., kolikor na prvem enic. Pismeno predočevanje dekadičnih števil. Načelo o mestni vrednosti števílk.

Pri vsaki številki določenega reda moramo ločiti **dvojno vrednost** in sicer **številčno vrednost**, Številčna vrednost = der Ziffernwert.

Mestna vrednost = der Stellenwert.

ki naznanja množino enot, in mestno vrednost, ki pove red enot. Prva vrednost je odvisna od podobe dotične številke in je zaradi tega neizpremenljiva; druga vrednost pa je odvisna od mesta, na katero se zapiše številka, in je zato izpremenljiva.

Oblika dekadičnega števila.

Dekadično število N, ki je sestavljeno iz a enic, b desetic, c stotic, d tisočic i. t. d., predočimo pismeno tako-le:

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \ldots,$$

ali pa obratno:

$$N = \ldots + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

Vsako posebno dekadično število se da smatrati za mnogočlenik, ki je urejen po padajočih potencah podloge 10. N. pr.

$$7452 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.$$

Število 10 se imenuje podloga desetiškega številnega sestava.

Podloga številnega sestava = die Basis des Zahlensystems.

Enote številnega sestava vobče.

Če uredimo števila naravne številne vrste po kaki drugi podlogi, n. pr. po podlogi 8 (oziroma po podlogi p), stvorimo številni sestav s podlogo 8 (oziroma s podlogo p). Pri tem postopamo tako-le. Ko naštejemo 8 (p) prvotnih enot, pretrgamo štetje ter začnemo od kraja šteti in štejemo zopet do 8 (p). Če na ta način ponavljamo štetje, nastajajo skupine po 8 (p) prvotnih enot. Tem skupinam pravimo enote prvega reda (8^1, oziroma p^1). Ko naštejemo s prvotnimi enotami 8 (p) skupin po 8 (p) enot, pretrgamo zopet štetje ter združimo te skupine (enote prvega reda) v novo in večjo celoto, katero imenujemo enoto drugega reda (8^2, oziroma p^2). Potem začnemo šteti zopet od kraja, in ko naštejemo 8 (p) skupin drugega reda, spojimo te skupine v večjo celoto, ki jo imenujemo enoto tretjega reda (8^3, oziroma p^3). Če nadaljujemo na ta način štetje, nastajajo vedno nove in večje skupine, ki jih imenujemo enote četrtega, petega, šestega ... reda (8^4, 8^5, $8^6 \ldots$, oziroma p^4, p^5, $p^6 \ldots$).

Vsako celo število številnega sestava s podlogo 8 (p) je popolnoma določeno, ako povemo, koliko ima prvotnih enot (enot brez reda), koliko enot prvega, drugega, tretjega, ... reda.

Pismeno predočevanje celih števil v kakem številnem sestavu.

Pri pismenem predočevanju celih števil številnega sestava s podlogo 8 (p) se odločijo prvotnim in višjim enotam istotako posebna mesta kakor v desetiškem številnem sestavu. Tudi množina enot kateregakoli reda se zaznamuje na isti način. Koliko in katere številke rabimo torej v številnem sestavu s podlogo 8?

Oblika celega števila v kakem številnem sestavu.

Število N številnega sestava s podlogo 8 (p) predočimo tako-le:

$$N = a + b \cdot 8 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8^3 + \ldots,$$

oziroma

$$N = a + b \cdot p + c \cdot p^2 + d \cdot p^3 + \ldots,$$

kjer pomenijo a prvotne enote, b enote prvega reda, c enote drugega reda i. t. d.

Vsako posebno število številnega sestava s podlogo 8 se da smatrati za mnogočlenik, urejen po padajočih potencah podloge 8. N. pr.

$$6572\,[8] = 6 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 2.$$

Vsakemu posebnemu številu, ki ni desetiškega številnega sestava, se mora pripisati podloga dotičnega sestava. Poglej zgoraj navedeni primer!

Računanje s celimi števili.

Pravila, po katerih se izvršujejo osnovni računski načini dekadičnih števil, so znana in se opirajo na računske zakone, ki veljajo o mnogočlenskih izrazih. Popolnoma slično je tudi računanje s števili, ki niso desetiškega sestava.

Naloge.

1. Pretvori število 50432 [8] v desetiški številni sestav!

Po zgoraj navedenih pojasnilih je

$$\begin{aligned} 50432\,[8] &= 5 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 2 = \\ &= 20480 + 256 + 24 + 2 = 20762. \end{aligned}$$

2. Pretvori dekadično število 8734 v številni sestav s podlogo 8!

Nalogo razrešiš, ako izračunaš vrednosti višjih enot številnega sestava [8] ter izmeriš s temi vrednostmi določeno dekadično število.

$$\begin{aligned} 8^1 &= 8 \\ 8^2 &= 64 \\ 8^3 &= 512 \\ 8^4 &= 4096. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8734 : 4096 &= 2 \\ 542 : 512 &= 1 \\ 30 : 8 &= 3 \\ 6 : 1 &= 6. \end{aligned}$$

Torej je 8734 = 21036 [8].

Ako je treba n. pr. določeno število številnega sestava [6] pretvoriti v številni sestav [9], pretvoriš dotično število najprej v desetiški številni sestav in to vrednost potem v številni sestav [9].

3. Določi *a)* vsoto, *b)* razliko števil 7453 in 5671 številnega sestava [8]!

a)
$$\begin{array}{r} 7453 \\ 5671 \\ \hline 15344 \text{ [8].} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 7453 \\ 5671 \\ \hline 1562 \text{ [8].} \end{array}$$

Seštevati se dadó le enote istega reda. Najprej seštevaš enote brez reda in potem zaporedoma enote naslednjih višjih redov. Seštevanje izvršiš s pomočjo desetiškega sestava; vsako dobljeno vsoto pretvoriš potem v številni sestav [8]. N. pr. 7 in 5 da 12, t. j. v številnem sestavu [8] = 1 enota naslednjega višjega reda in 4 enote tistega reda, katerega so sumandi. Primerjaj navedeni račun!

Če je pri odštevanju v številnem sestavu [8] kaka minuendova številka manjša od subtrahendove istega reda, prišteješ dotični minuendovi številki 8 enot in subtrahendovi številki naslednjega višjega reda 1 enoto. Primerjaj navedeni račun!

4. Določi *a)* produkt števil 427 in 536 številnega sestava [8], *b)* kvocijent števil 620776 in 643 številnega sestava [8]!

a)
$$\begin{array}{l} \underline{427 \times 536} \\ 2563 \\ 1505 \\ 3212 \\ \hline 276562 \text{ [8].} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 620776 : 643 = 752 \text{ [8]} \\ \underline{5565} \\ 4227 \\ \underline{4057} \\ 1506 \\ \underline{1506} \\ 0 \end{array}$$

Pri množenju rabiš poštevanko desetiškega številnega sestava. Vsak znesek pretvoriš, prej ko ga zapišeš, v številni sestav [8]. N. pr. Prvi delski produkt zgoraj navedenega računa določiš tako-le: 5 krat 7 je 35, t. j. v številnem sestavu [8] = 4 enote višjega reda in 3 enote tega reda (katerega je znesek 35); 5 krat 2 je 10 in 4 da 14, t. j. v številnem sestavu [8] = 1 enota višjega reda in 6 enot tega reda (katerega je znesek 14); 5 krat 4 je 20 in 1 da 21, t. j. v številnem sestavu [8] = 2 enoti višjega reda in 5 enot tega reda (katerega je znesek 21). Da govoriš pri računanju samo toliko, kolikor je neobhodno potrebno, se razume samo po sebi.

§ 12. Občna pojasnila in znamenja o deljivosti.

Deljiv = teilbar. Mera = das Maß. Mnogokratnik = das Vielfache.

Ako delimo celo število A s celim številom m ter najdemo celo število a kot kvocijent, pravimo, da je število A deljivo s številom m, v znakih $A = am$. Število A imenujemo mnogokratnik števila m, število m pa mero števila A.

Praštevilo = die Primzahl. Sestavljeno število = die zusammengesetzte Zahl.

Vsako celo število, ki je deljivo le z 1 in s samim seboj, se imenuje enostavno število ali praštevilo; vsako celo število pa, ki ni le deljivo samo z 1 in samim seboj, temveč še z drugimi števili, se zove sestavljeno število.

Skupna mera = das gemeinsame Maß.

Ako sta celi števili A in B deljivi z istim številom m, pravimo, da je m skupna mera števil A in B.

Nekatera občna znamenja o deljivosti števil.

Skupna mera dveh števil je tudi mera vsote, oziroma razlike teh števil.

Dokaz. Iz pogojnih enačb $A = am$ in $B = bm$ najdemo:

$$A + B = (a + b)m,$$
$$A - B = (a - b)m,$$

t. j. vsota $A + B$, oziroma razlika $A - B$ je mnogokratnik števila m.

Ako ima določeno število kako mero, ima tudi vsak mnogokratnik dotičnega števila isto mero.

Dokaz. Iz pogojne enačbe $A = am$ najdemo

$$Ax = axm,$$

t. j. Ax je mnogokratnik števila m.

Vsaka skupna mera dividenda in divizorja je tudi mera delitvenega ostanka.

Vsaka skupna mera divizorja in delitvenega ostanka je tudi mera dividendova.

Dokaz. Iz pogoja

$$A : B = k + \frac{r}{B}$$

sledi, da je produkt iz kvocijenta k in divizorja B za delitveni ostanek r manjši od dividenda A, t. j. v znakih

$$A - Bk = r \quad \text{ali pa} \quad A = Bk + r.$$

S pomočjo teh enačb sklepamo: ako imata A in B skupno mero, imata po zgoraj navedenih pravilih tudi Bk in r isto mero; če pa imata B in r skupno mero, imata po istih pravilih tudi Bk in A isto mero.

Nekatera posebna znamenja o deljivosti dekadičnih števil.

Dekadično število

$$N = a + b \cdot 10 + c . 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 + \ldots$$

je deljivo z n, ako je $\frac{N}{n}$ celo število.

1. Če je $n = 2$ (oziroma 5), najdemo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{2} &= \frac{a}{2} + b \cdot 5 + c \cdot 50 + d \cdot 500 + .. \\ \frac{N}{5} &= \frac{a}{5} + b \cdot 2 + c \cdot 20 + d \cdot 200 + .. \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Dekadično število je deljivo z 2 (5), če so njegove enice deljive z 2 (5).

2. Če je $n = 4$ (oziroma 25), najdemo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{4} &= \frac{a + b \cdot 10}{4} + c \cdot 25 + d \cdot 250 + .. \\ \frac{N}{25} &= \frac{a + b \cdot 10}{25} + c \cdot 4 + d \cdot 40 + .. \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Dekadično število je deljivo s 4 (25), če so njegove enice in desetice kakor število deljive s 4 (25).

3. Če je $n = 8$ (oziroma 125), najdemo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{8} &= \frac{a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2}{8} + d \cdot 125 + \ldots \\ \frac{N}{125} &= \frac{a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2}{125} + d \cdot 8 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Dekadično število je deljivo z 8 (125), če so njegove enice, desetice in stotice kakor število deljive z 8 (125).

4. Če je $n = 3$ (oziroma 9), je treba dekadično število N tako-le pretvoriti:

$$N = a + 9b + b + 99c + c + 999d + d + \ldots$$

Potem najdemo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{3} &= \frac{a + b + c + d + \ldots}{3} + 3b + 33c + 333d + \ldots \\ \frac{N}{9} &= \frac{a + b + c + d + \ldots}{9} + b + 11c + 111d + \ldots \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Dekadično število je deljivo s 3 (9), ako je njegova številčna vsota (vsota vseh številk dotičnega števila) deljiva s 3 (9).

5. Če je $n = 11$, je treba dekadično število N tako-le pretvoriti:

$$\begin{aligned} N &= a + 11b - b + 99c + c + 1001d - d + 9999e + \\ &\quad + e + \ldots \\ &= a - b + c - d + e \ldots + 11b + 99c + 1001d + \\ &\quad + 9999e + \ldots \end{aligned}$$

Potem najdemo:

$$\begin{aligned} \frac{N}{11} &= \frac{(a + c + e + \ldots) - (b + d + \ldots)}{11} + b + 9c + \\ &\quad + 91d + 909e + \ldots \quad \text{t. j.} \end{aligned}$$

Dekadično število je deljivo z 11, ako je razlika številčnih vsot lihih in sodih mest deljiva z 11. N. pr. Pri številu 405691 je številčna vsota lihih mest 7 in številčna vsota sodih mest 18; razlika teh dveh vsot znaša 11 in je deljiva z 11, torej je tudi navedeno število deljivo z 11.

Sodo število = gerade Zahl. Liho število = ungerade Zahl.

Z 2 deljiva števila se imenujejo soda števila, z 2 nedeljiva števila pa se zovejo liha števila. Soda števila zaznamujemo z $2n$, liha pa z $2n + 1$ ali tudi z $2n - 1$, kjer pomeni n neko število naravne številne vrste.

§ 13. Razstavljanje sestavljenih števil in številnih izrazov v prafaktorje.

Prafaktorji sestavljenega števila.

Vsako sestavljeno število se da le na en način razstaviti v prafaktorje.

Dokaz. Ker je sestavljeno število A deljivo ne le z 1 in s samim seboj, temveč tudi še z drugimi števili, moremo ga razstaviti na dva faktorja b in c ($A = bc$), izmed katerih je včasih le eden, včasih sta oba, včasih pa ni nobeden praštevilo. Ako ravnamo z vsakim izmed faktorjev b in c, ki ni praštevilo, istotako kakor s sestavljenim številom A, in ako to ponavljamo, najdemo končno praštevila, katera med seboj pomnožena dado sestavljeno število A kot produkt (prafaktorji sestavljenega števila). — Sestavljeno število A pa se da le na en način razstaviti na prafaktorje. Kajti če bi število A bilo sestavljeno iz prafaktorjev a, b, c, d in tudi iz prafaktorjev α, β, γ, δ, ki so različni od prejšnjih, bi morala produkta $abcd$ in $\alpha\beta\gamma\delta$ biti enaka in zato tudi oba deljiva z istim številom. Prvi produkt je n. pr. deljiv z a, drugi pa ne more biti deljiv z a, ker so vsi njegovi faktorji različni od a. Isto velja tudi o vsakem drugem faktorju. Število A se torej ne da razstaviti na dva različna načina v prafaktorje.

Kako določiš praštevila.

Če deliš določeno število (n. pr. 509) zaporedoma s praštevili 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... in sicer tako daleč, da postane kvocijent manjši od divizorja, in če se nobena teh delitev ne konča z ostankom 0, je dotično število praštevilo.

Dokaz. Mislimo si dekadično število N, ki je večje od praštevila a, pa manjše ko kvadrat tega praštevila.

Če ni število N deljivo z nobenim praštevilom od 2 do a, utegne biti deljivo s števili, ki so večja od a. Tako najdemo $N = cd$, kjer je vsak izmed faktorjev c in d večji od a, v znakih $c > a$ in $d > a$. Potem mora očividno produkt $cd = N$ biti večji od a^2, kar pa je zaradi zgoraj navedenega pogoja nemogoče. Število N mora torej biti praštevilo.

Naloge.

Kako razstaviš dekadično število na prafaktorje.

1. **Dekadično število** (n. pr. 360360) **razstaviš na prafaktorje, ako preiščeš in določiš, katero izmed praštevil** 2, 3, 5, 7, 11, 13 i. t. d. **in kolikokrat se nahaja v dotičnem dekadičnem številu.** V ta namen deliš dekadično število z najmanjšim praštevilom (izvzemši 1), s katerim je deljivo; dobljeni kvocijent deliš zopet z najmanjšim praštevilom, s katerim je deljiv, in tako postopaš dalje, dokler ne prideš do kvocijenta 1. Divizorji vseh teh delitev so prafaktorji dotičnega števila. Poglej navedeni primer!

360360	2
180180	2
90090	2
45045	3
15015	3
5005	5
1001	7
143	11
13	13
1	

Kako razstaviš enočlenike na prafaktorje.

2. **Pri enočlenskih številnih izrazih predočuje vsaka črka prafaktor;** zato je treba razstaviti le koeficient na prafaktorje. N. pr.

$$24\,a^2mx^3 = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2mx^3.$$

Kako razstaviš mnogočlenike na prafaktorje.

3. **Vsak mnogočlenski izraz, katerega členi imajo skupno mero, se da razstaviti na dva faktorja, izmed katerih je eden skupna mera, drugi pa mnogočlenik, katerega najdeš, ako deliš prvotni mnogočlenski izraz s skupno mero.** Vsakega izmed dobljenih faktorjev razstaviš zopet na nove faktorje, če je mogoče. N. pr.

$$12\,ax^2 - 24\,bx^2 - 36\,x^2 = 12\,x^2\,(a - 2\,b - 3) =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (a - 2\,b - 3).$$

Včasih razstaviš najprej po dva in dva člena na faktorje in potem šele veś mnogočlenik. N. pr.

$$2ax - 6bx - 3ay + 9by = 2x(a - 3b) - 3y(a - 3b) = \\ = (a - 3b)(2x - 3y).$$

4. Ako ima številni izraz obliko $a^2 - b^2$, sta faktorja vsota in razlika obeh podlog. N. pr.

$$a^4 - y^4 = (a^2 + y^2)(a^2 - y^2) = (a^2 + y^2)(a + y)(a - y).$$

5. Ako ima številni izraz obliko $a^2 \pm 2ab + b^2$, sta faktorja enaka. N. pr.

$$4m^2 + 12mx + 9x^2 = (2m + 3x)^2 = (2m + 3x)(2m + 3x).$$

$$-b^2 + 6bz^4 - 9z^8 = -(b^2 - 6bz^4 + 9z^8) = \\ = -(b - 3z^4)(b - 3z^4).$$

6. Trinom z obliko $x^2 \pm bxy \pm cy^2$ se da razstaviti na dva faktorja, ako moreš izraziti koeficient b srednjega člena kakor vsoto (oziroma razliko) dveh števil, katerih produkt je $= c$. Iz koeficienta b napraviš vsoto (razliko) dveh števil, če je zadnji člen pozitiven (negativen). Faktorja najdeš po pravilu pod 3. N. pr.

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2 = \\ = x(x - 3y) - 2y(x - 3y) = (x - 3y)(x - 2y).$$

$$a^2 - 6a - 7 = a^2 - 7a + a - 7 = a(a - 7) + (a - 7) = \\ = (a - 7)(a + 1).$$

7. Izrazi kakor n. pr.

$a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$, oziroma $x^3 - y^3$, $x^5 - y^5$

so deljivi z $a + b$, oziroma $x - y$. Poišči kvocijente ter si jih zapomni!

Vsota (razlika) dveh potenc z enakima lihima eksponentoma je deljiva z vsoto (razliko) podlog.

8. Izrazi kakor n. pr.

$$a^4 - b^4,\quad a^6 - b^6$$

so deljivi z $a + b$ in $a - b$. Poišči kvocijente ter si jih zapomni!

Razlika dveh potenc z enakima sodima eksponentoma je deljiva z vsoto in razliko podlog.

9. Ako se prafaktorji sestavljenih števil 6, 12, 15 i. t. d. nahajajo v določenem številu, mora dotično število biti deljivo s 6, oziroma z 12, 15 i. t. d. Katera števila so deljiva s 6, 12, 15.

S 6 so torej deljiva tista števila, ki so deljiva z 2 in 3.

Z 12 so deljiva tista števila, ki so deljiva s 4 in 3.

S 15 so deljiva tista števila, ki so deljiva s 3 in 5.

§ 14. Največja skupna mera.

Največja skupna mera dveh ali več števil je tisto največje število, katero se nahaja brez ostanka v vseh določenih številih. Tako je n. pr. 15 največja skupna mera števil 30, 45, 75, v znakih Največja skupna mera = das größte gemeinsame Maß.

$$M\,(30,\,45,\,75) = 15,$$

in $a - b$ največja skupna mera številnih izrazov $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^2 - 2ab + b^2$, v znakih

$$M\,(a^2 - b^2,\; a^3 - b^3,\; a^2 - 2ab + b^2) = a - b.$$

Jasno je, da se morajo v največji skupni meri dveh ali več števil nahajati le tisti prafaktorji, ki so vsem določenim številom skupni. Ako torej razstaviš določena števila, oziroma številne izraze na prafaktorje ter poiščeš in pomnožiš vse skupne prafaktorje (vsak skupni prafaktor se vzame v najnižji potenci, v kateri se nahaja v kakem številu), najdeš Kako najdeš največjo skupno mero na prvi način.

n a j v e č j o skupno mero dotičnih števil, oziroma številnih izrazov. N. pr.

1. $M\,(168\,a^2b^3m,\ 180\,a^3b^5m^2,\ 324\,a^5b^4m^3) = ?$

$$\begin{aligned}168\,a^2b^3m &= 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot a^2b^3m,\\ 180\,a^3b^5m^2 &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot a^3b^5m^2,\\ 324\,a^5b^4m^3 &= 2^2\cdot 3^4\cdot a^5b^4m^3;\end{aligned}$$

torej je $M = 2^2\cdot 3\cdot a^2b^3m = 12\,a^2b^3m.$

2. $M\,(x^2+5x-24,\ x^2+9x+8,\ x^3+512) = ?$

$$\begin{aligned}x^2+5x-24 &= x^2+8x-3x-24 = (x+8)(x-3),\\ x^2+9x+8 &= x^2+8x+x+8 = (x+8)(x+1),\\ x^3+512 &= (x+8)(x^2-8x+64);\end{aligned}$$

torej je $M = x+8.$

Na ta način se določuje največja skupna mera pri manjših številih in številnih izrazih. Včasih se da to izvršiti kar na pamet.

Kako najdeš največjo skupno mero na drugi način. Verižna delitev = die Kettendivision.

Na drugi način najdeš največjo skupno mero dveh števil (številnih izrazov), ako deliš večje število (večji številni izraz) z manjšim, potem divizor z dobljenim delitvenim ostankom in to ponavljaš tako dolgo, da se ena izmed naslednjih delitev konča z ostankom 0 (verižna delitev). Divizor zadnje delitve je največja skupna mera določenih števil (številnih izrazov). To je v znakih:

$$\begin{aligned}A : B &= k_1 + \frac{r_1}{B},\\ B : r_1 &= k_2 + \frac{r_2}{r_1},\\ r_1 : r_2 &= k_3 + \frac{r_3}{r_2},\\ r_2 : r_3 &= k_4.\end{aligned}$$

Dokaz. Ker je vsak delitveni ostanek manjši od divizorja in postane v naslednji delitvi divizor, manjšajo se divizorji naslednjih delitev in ena izmed njih se mora torej končati z ostankom 0. Divizor r_3 zadnje delitve je potem mera zadnjega dividenda r_2. Po izreku, da je vsaka skupna mera divizorja in delitvenega ostanka tudi dividendova mera, je v zgoraj navedenih delitvah zadnji divizor r_3 zaporedoma mera dividendov r_1, B in A. Divizor r_3 je torej skupna mera števil B in A. — Če bi pa števili A in B imeli večjo skupno mero nego r_3, recimo r, bi moralo število r po izreku, da je vsaka skupna mera dividenda in divizorja tudi mera delitvenega ostanka, v zgoraj navedenih delitvah biti zaporedoma mera delitvenih ostankov r_1, r_2 in r_3. Zadnji slučaj pa je nemogoč, ker je po pogoju $r > r_3$. Iz navedenega je torej jasno, da je zadnji divizor r_3 največja skupna mera števil A in B.

Lastnost skupne mere.

S k u p n a m e r a d v e h š t e v i l s e n e i z p r e m e n i, a k o p o m n o ž i š (deliš) e n o i z m e d d o l o č e n i h š t e v i l s f a k t o r j e m, k i n i m e r a d r u g e g a š t e v i l a.

Dokaz. Ker se nahajajo v skupni meri števil A in B le skupni faktorji, je jasno, da se skupna mera ne more izpremeniti, če prideneš (oziroma odvzameš) n. pr. številu A faktor, ki ni mera števila B.

Največjo skupno mero treh ali več števil $A, B, C \ldots$ najdeš s pomočjo verižne delitve, ako poiščeš najprej največjo skupno mero M_1 števil A in B, potem največjo skupno mero M_2 najdene mere M_1 in tretjega števila C i. t. d.

Medsebojna praštevila = relative Primzahlen.

Števila, ki nimajo razen 1 nobene skupne mere, se imenujejo m e d s e b o j n a ali r e l a t i v n a p r a š t e v i l a. Tako so n. pr. števila 4, 9, 25, oziroma številni izrazi $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ medsebojna praštevila.

Naloge.

1. M (2502, 1807) = ?

2502 : 1807 = 1
695
1807 : 695 = 2
417
695 : 417 = 1
278
417 : 278 = 1
139
278 : 139 = 2,
0

ali krajše:

2502	1807	1
695	417	2
278	139	1
0		1
		2

$M = 139$.

2. $M\,(10x^2 - 34xy + 12y^2,\ 2x^2 - 3xy - 9y^2) = ?$

$$(10x^2 - 34xy + 12y^2) : (2x^2 - 3xy - 9y^2) = 5$$
$$- 19xy + 57y^2 = - 19y\,(x - 3y),^{*}$$

$$(2x^2 - 3xy - 9y^2) : (x - 3y) = 2x + 3y,$$
$$3xy - 9y^2$$
$$\emptyset \qquad M = x - 3y.$$

3. $M\,(3x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 8x + 3,\ 2x^3 - 9x^2 + 9x - 7) = ?$

Da bode mogoče, prvi številni izraz deliti z drugim, se pomnoži prvi izraz s faktorjem 2 (oziroma s faktorjem $4 = 2^2$, ker se namreč prvi divizorjev člen nahaja v dveh dividendovih členih). To se sme storiti, ker je 2 (oziroma 4) relativno praštevilo z ozirom na divizor.

$$(12x^4 - 32x^3 + 44x^2 - 32x + 12) : (2x^3 - 9x^2 + 9x - 7) =$$
$$22x^3 - 10x^2 + 10x + 12 \qquad = 6x + 11$$
$$89x^2 - 89x + 89 = 89\,(x^2 - x + 1),$$

$$(2x^2 - 9x^2 + 9x - 7) : (x^2 - x + 1) = 2x - 7,$$
$$- 7x^2 + 7x - 7$$
$$\emptyset \qquad M = x^2 - x + 1.$$

§ 15. Najmanjši skupni mnogokratnik.

Najmanjši skupni mnogokratnik = das kleinste gemeinsame Vielfache.

Najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil je tisto najmanjše število, v katerem se nahajajo vsa določena števila brez ostanka. Tako so n. pr. 120, 240, 360 i. t. d. skupni mnogokratniki števil 8, 12 in 15; najmanjši izmed vseh teh mnogokratnikov pa je 120, v znakih

$$mn\ (8,\ 12,\ 15) = 120.$$

Kako najdeš najmanjši skupni mnogokratnik na prvi način.

V najmanjšem skupnem mnogokratniku dveh ali več števil se mora nahajati vsak prafaktor določenih števil in sicer tolikokrat, kolikorkrat se nahaja v tistem izmed določenih števil, v katerem je največkrat. Z ozirom na to lastnost **najdeš določenim številom najmanjši**

* Iz tega delitvenega ostanka se sme za daljnji račun izpustiti faktor $-19y$, ker ta faktor ni mera divizorja.

skupni mnogokratnik, ako razstaviš vsa določena števila zaporedoma na prafaktorje ter zbereš in pomnožiš vse različne prafaktorje, vsakega v največji potenci, v kateri se nahaja v kakem izmed določenih števil. N. pr.

1. $mn\,(15a^2b,\ 18ab^2x,\ 20abx^3,\ 24x^2y,\ 30xy^2) = ?$
$mn = 3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2\cdot a^2b^2x^3y^2 = 360a^2b^2x^3y^2.$

Pri navedeni nalogi razstaviš najprej vse koeficiente zaporedoma na prafaktorje in potem vzameš od prvega koeficienta vse prafaktorje, od vsakega naslednjega pa le tiste, ki jih še nisi vzel v poštev. Primerjaj izvršitev!

2. $mn\,(x^2 - y^2,\ x^2 - xy - 2y^2,\ x^2 + 2xy - 3y^2) = ?$

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y),\\
x^2 - xy - 2y^2 &= x^2 - 2xy + xy - 2y^2 =\\
&= (x-2y)(x+y),\\
x^2 + 2xy - 3y^2 &= x^2 + 3xy - xy - 3y^2 =\\
&= (x+3y)(x-y);\\
mn &= (x+y)(x-y)(x-2y)(x+3y) =\\
&= x^4 + x^3y - 7x^2y^2 - xy^3 + 6y^4.
\end{aligned}$$

Na ta način se išče najmanjši skupni mnogokratnik pri manjših številih in številnih izrazih, ki se dado lahko razstaviti na prafaktorje.

Kako najdeš najmanjši skupni mnogokratnik na drugi način.

Najmanjši skupni mnogokratnik dveh številnih izrazov najdeš, ako deliš enega izmed teh izrazov z največjo skupno mero ter pomnožiš dobljeni kvocijent z drugim izrazom.

Dokaz. Mislimo si dve števili A in B, ki imata največjo skupno mero M, torej

$$A = aM \text{ in } B = bM;$$

števili a in b nimata potem nobenega skupnega faktorja. Jasno je, da se v najmanjšem skupnem mnogokratniku števil A in B morajo nahajati faktorji a, b in M. Najmanjši skupni mnogokratnik števil A in B je torej $= abM$.

Ako postavimo v ta izraz vrednosti za a in b, najdemo za najmanjši skupni mnogokratnik izraz

$$mn = \frac{A}{M} \cdot \frac{B}{M} \cdot M,$$

ali krajše

$$mn = \frac{AB}{M} = \frac{A}{M} \cdot B = \frac{B}{M} \cdot A.$$

Najmanjši skupni mnogokratnik treh ali več številnih izrazov najdeš, ako poiščeš najprej najmanjši skupni mnogokratnik prvega in drugega številnega izraza, potem najmanjši skupni mnogokratnik najdenega mnogokratnika in tretjega številnega izraza i. t. d.

Naloge.

1. $mn\ (1781,\ 2329) = ?$

$$\begin{array}{r|r|l} 2329 & 1781 & 1 \\ 548 & 137 & 3 \\ \emptyset & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1781 : 137 = 13 \\ 411 \\ \emptyset \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2329 \times 13 \\ 6987 \\ \hline 30277 \end{array}$$

$$mn = 30277.$$

2. $mn\ (6x^2 - 5xy - 6y^2,\ 10x^2 - 9xy - 9y^2) = ?$

$$\begin{array}{l} (10x^2 - 9xy - 9y^2) : (6x^2 - 5xy - 6y^2), \\ (30x^2 - 27xy - 27y^2) : (6x^2 - 5xy - 6y^2) = 5 \\ - 2xy + 3y^2 = -y(2x - 3y), \\ (6x^2 - 5xy - 6y^2) : (2x - 3y) = 3x + 2y, \\ 4xy - 6y^2 \\ \emptyset \qquad M = 2x - 3y; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (10x^2 - 9xy - 9y^2)(3x + 2y) \\ \hline 30x^3 - 27x^2y - 27xy^2 \\ 20x^2y - 18xy^2 - 18y^3 \\ \hline 30x^3 - 7x^2y - 45xy^2 - 18y^3 = mn. \end{array}$$

II. Računanje z ulomljenimi števili.

A. Navadni ulomki.

§ 16. Občna pojasnila in pretvarjanje navadnih ulomkov.

Kvocijent $\frac{a}{b}$ se da določiti s številom naravne, oziroma podaljšane številne vrste le tedaj, kadar je dividend a mnogokratnik divizorja b. Če pa dividend a ni mnogokratnik divizorja b, moreš kvocijent $\frac{a}{b}$ samo omejiti z dvema zaporednima celima številoma. Tako je n. pr. $4 < \frac{35}{8} < 5$ in $-2 > -\frac{18}{7} > -3$.

Pomen nakazanega kvocijenta.

Da bode kvocijent $\frac{a}{b}$ imel v vsakem slučaju določen pomen, je treba številni pojem primerno razširiti. To se zgodi s pomočjo deljive enote. Številni izraz $\frac{a}{b}$ se da namreč po že znanih računskih zakonih tako-le pretvoriti:

Deljiva enota.

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Kvocijent $\frac{a}{b}$ pomeni torej tisto število, ki ga najdemo, ako razdelimo enoto na b enakih delov ter vzamemo enega teh delov $a$krat.

Števila, ki nastajajo na ta način, se imenujejo ulomljena števila ali ulomki; $\frac{1}{b}$ je ulomljena enota. V ulomku $\frac{a}{b}$ se zove a števec, b pa imenovalec. Imenovalec pravi, na koliko enakih delov je treba razdeliti enoto; števec naznanja, koliko enakih enotnih delov se vzame v poštev. Imenovalec torej imenuje enotni del, števec pa šteje enotne dele.

Ulomek = der Bruch, Števec = der Zähler. Imenovalec = der Nenner.

Ulomek, katerega števec je manjši od imenovalca, se imenuje pravi ulomek; ulomek pa, katerega števec je večji od imenovalca, se zove nepravi ulomek. Vrednost pravega ulomka je manjša od enote, vrednost nepravega ulomka pa večja od enote. Vsota iz celega šte-

Pravi ulomek = der echte Bruch. Nepravi ulomek = der unechte Bruch.

2. Okrajšaj sledeče ulomke:

$$\frac{555}{600},\quad \frac{2363}{2919},\quad \frac{x^2+x-30}{x^2+15x+54}!$$

$$\frac{555}{600} \overset{15}{\smile}= \frac{37}{40},\qquad \frac{2363}{2919} \overset{139}{\smile}= \frac{17}{21},$$

$$\frac{x^2+x-30}{x^2+15x+54} = \frac{(x+6)(x-5)}{(x+6)(x+9)} = \frac{x-5}{x+9}.$$

3. Kolika je vrednost ulomka

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-20} \text{ za } x = 4?$$

Ker dobi navedeni ulomek za $x = 4$ nedoločeno obliko $\frac{0}{0}$, je treba ulomek najprej okrajšati. Potem je:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-20} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5} = \frac{7}{9}.$$

§ 17. Seštevanje in odštevanje navadnih ulomkov.

Kako seštevaš in odštevaš ulomke.

Po pojasnilih prejšnjega paragrafa smeš z ulomki enakih imenovalcev ravnati kakor s števili ene in iste ulomljene enote, katero določa skupni imenovalec. Iz tega sledi: Ulomke enakih imenovalcev seštevaš (oziroma odštevaš), ako seštevaš (odštevaš) njih števce, skupni imenovalec pa pridržiš kakor imenovalec, v znakih

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}.$$

Ako imajo ulomki različne imenovalce, pretvoriš jih na ulomke s skupnim imenovalcem in potem seštevaš, oziroma odštevaš.

Naloge.

1. $$\frac{x-1}{x^2+5x+6} - \frac{x+5}{x^2-x-12} + \frac{x+7}{x^2-2x-8} =$$

$$= \frac{x^2-5x+4}{x^3+x^2-14x-24} - \frac{x^2+7x+10}{x^3+x^2-14x-24} +$$

$$+ \frac{x^2+10x+21}{x^3+x^2-14x-24} = \frac{x^2-2x+15}{x^3+x^2-14x-24}.$$

2. $\left(\frac{a}{4}-\frac{2b}{3}\right)+\left(\frac{3a}{5}-\frac{5b}{6}\right)-\left(\frac{a}{2}-\frac{7b}{12}\right)=$

$$=\frac{a}{4}+\frac{3a}{5}-\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}-\frac{5b}{6}+\frac{7b}{12}=\frac{7a}{20}-\frac{11b}{12}.$$

3. $3x-2-\frac{10x^2-3}{3x+2}+\frac{x^2+2}{3x-2}=$

$$=\frac{27x^3-18x^2-12x+8}{9x^2-4}-\frac{30x^3-20x^2-9x+6}{9x^2-4}+$$

$$+\frac{3x^3+2x^2+6x+4}{9x^2-4}=\frac{4x^2+3x+6}{9x^2-4}.$$

Pri drugi nalogi se izvrši najprej seštevanje, oziroma odštevanje dvočlenskih izrazov in obenem se uredijo členi po glavni količini. — Pri tretji nalogi pa je treba številni izraz $3x-2$, ki ima obliko celega števila, pretvoriti na ulomek z imenovalcem $9x^2-4$. Števec tega ulomka najdeš, ako pomnožiš številni izraz $3x-2$ s skupnim imenovalcem.

§ 18. Množenje in deljenje navadnih ulomkov.

Kako množiš ulomek s celim številom.

Ulomek množiš s celim številom, ako pomnožiš števec s celim številom, ali pa deliš imenovalec s celim številom, v znakih

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m}.$$

Dokaz. Po prvotnem pojasnilu o množenju je

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots\ m\,\text{krat}=\frac{am}{b},$$

ali če deliš števec in imenovalec navedenega rezultata z m, najdeš

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m}.$$

Na drugi način izvršiš množenje, kadar je imenovalec deljiv s celim številom.

Ker pride pri množenju na prvi način multiplikator kakor faktor v števec, smeš celo število in imenovalec deliti s skupno mero, prej ko izvršiš množenje.

Kako deliš ulomek s celim številom.

Ulomek deliš s celim številom, ako deliš števec s celim številom, ali pa pomnožiš imenovalec s celim številom, v znakih

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b} = \frac{a}{bm}.$$

Dokaz. Kvocijent, pomnožen z divizorjem, mora dati v vsakem slučaju dividend za produkt. V prvem slučaju je

$$\frac{a : m}{b} \cdot m = \frac{(a : m) \cdot m}{b} = \frac{a}{b}$$

in v drugem

$$\frac{a}{bm} \cdot m = \frac{a}{bm : m} = \frac{a}{b}.$$

Na prvi način izvršiš deljenje, kadar je števec deljiv s celim številom.

Če imata števec in celo število skupno mero, smeš oba deliti s to skupno mero; kajti kvocijent se ne izpremeni, ako deliš dividend in divizor z enim in istim številom.

Kako množiš ulomek z ulomkom.

Ulomek množiš z ulomkom, ako pomnožiš števec s števcem in imenovalec z imenovalcem ter postaviš prvi produkt kakor števec, drugega pa kakor imenovalec.

Dokaz. Po občnem pojasnilu o množenju izvršiš nalogo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d},$$

ako deliš multiplikand $\frac{a}{b}$ z imenovalcem d in znesek pomnožiš s števcem c, ali ako izvršiš omenjena računska načina v obratnem redu. Po prejšnjih pravilih najdeš potem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ker pride pri množenju ulomkov števec kakor faktor v števec in imenovalec kakor faktor v imenovalec, smeš pred množenjem en števec in en imenovalec deliti s skupno mero.

Kakor množiš ulomek z ulomkom, množiš tudi celo število z ulomkom; kajti vsako celo število si smeš misliti kakor ulomek z imenovalcem 1.

Kako množiš celo število z ulomkom.

Ako zameniš števec in imenovalec določenega ulomka med seboj, najdeš nov ulomek, ki se imenuje obratni ulomek z ozirom na prvega. Tako je n. pr. vsak izmed ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{b}{a}$ obratni ulomek z ozirom na drugega; števili a in $\frac{1}{a}$ sta tudi obratni števili.

Obratni ulomek = der reziproke (umgekehrte) Bruch.

Produkt dveh obratnih števil je enak enoti; kajti

Lastnost dveh obratnih števil.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1 \text{ in } a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Ulomek deliš z ulomkom, ako pomnožiš dividend z obratnim divizorjem, v znakih

Kako deliš ulomek z ulomkom.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Ulomek tudi deliš z ulomkom, ako deliš števec s števcem in imenovalec z imenovalcem ter postaviš prvi kvocijent kakor števec, drugega pa kakor imenovalec, v znakih

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}.$$

Dokaz. Kvocijent, pomnožen z divizorjem, mora dati v vsakem slučaju dividend za produkt. V prvem slučaju je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

in v drugem

$$\frac{a : c}{b : d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a : c) \cdot c}{(b : d) \cdot d} = \frac{a}{b}.$$

Na drugi način izvršiš deljenje, kadar sta deljiva števec s števcem in imenovalec z imenovalcem.

Kakor deliš ulomek z ulomkom na prvi način, deliš tudi celo število z ulomkom, v znakih

Kako deliš celo število z ulomkom.

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

Kdaj je ulomkova vrednost $= 0$.

Ulomkova vrednost je $= 0$, ako je števec $= 0$, ali pa imenovalec neizrečeno velik.

Dokaz. Po pojasnilu o ulomku in po računskem zakonu o množenju z 0 je $\frac{0}{b} = \frac{1}{b} \cdot 0 = 0$. — Ako razdelimo enoto na mnogo enakih delov in vsakega teh delov razdelimo zopet na mnogo enakih delov ter ponavljamo tako deljenje zelo velikokrat, se manjšajo posamezni deli in bližajo po svojih vrednostih ničli. Ko postane število enotnih delov neizrečeno veliko, so ti deli enaki ničli in zato je

$$\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Kdaj je ulomkova vrednost $= \infty$

Ulomkova vrednost je neizrečeno velika, če je števec neizrečeno velik, ali pa imenovalec $= 0$.

Dokaz. Če seštejemo ulomljeno enoto $\frac{1}{b}$ neizrečeno velikokrat, je očividno, da mora ulomkova vrednost postati neizrečeno velika, v znakih $\frac{1}{b} \cdot \infty = \frac{\infty}{b} = \infty$. — Jasno je, da morata obratni vrednosti dveh enakih številnih izrazov biti enaki. Če vzamemo pri številnih izrazih v enačbi $0 = \frac{a}{\infty}$ obratni vrednosti, najdemo $\frac{1}{0} = \frac{\infty}{a} = \infty$; torej je tudi $\frac{a}{0} = \infty$.

Naloge.

1. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 8} \cdot \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 2x - 3} =$

$$= \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x+4)} \cdot \frac{(x+4)(x-5)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - x - 2}.$$

Da moreš številne izraze okrajšati kolikor mogoče, je treba jih razstaviti na prafaktorje.

2. $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4ab}{a^2+b^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\right) =$

$$= \left(\frac{4ab}{a^2-b^2} - \frac{4ab}{a^2+b^2}\right) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{8ab^3}{a^4 - b^4} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{8ab^3}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}.$$

V multiplikandu in multiplikatorju izvršiš najprej nakazano odštevanje, oziroma seštevanje. Pri pretvarjanju številnih izrazov na skupni imenovalec je včasih pripravneje, da pretvoriš dotične izraze le zaporedoma (po dva in dva) na skupni imenovalec. Primerjaj navedeno nalogo! — Slične naloge pri deljenju izvršiš istotako.

3. $\left(\frac{5a^2}{9} - \frac{17ac}{6} + \frac{23bc}{5} - \frac{4b^2}{5} - 3c^2\right) : \left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{5} - 2c\right) =$

$$= \frac{5a}{3} - 2b + \frac{3c}{2}.$$

$$\begin{array}{l}
\frac{5a^2}{9} + \frac{2ab}{3} - \frac{10ac}{3} \\
- \quad\;\; - \quad\;\; + \\
\hline
\qquad -\frac{2ab}{3} + \frac{ac}{2} + \frac{23bc}{5} - \frac{4b^2}{5} \\
\qquad -\frac{2ab}{3} - \frac{4b^2}{5} + 4bc \\
\qquad + \quad\;\; + \quad\;\; - \\
\hline
\qquad\qquad\quad \frac{ac}{2} + \frac{3bc}{5} - 3c^2 \\
\qquad\qquad\quad \frac{ac}{2} + \frac{3bc}{5} - 3c^2 \\
\qquad\qquad\; - \quad\;\; - \quad\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Navedeno delitev izvršiš po pravilih za mnogočlenske izraze. — Pri množenju podobnih številnih izrazov postopaš slično.

4. $\dfrac{\frac{x+y}{x^2-y^2}+1}{\frac{2xy}{x^2+y^2}-1} : \dfrac{1+\frac{y^2}{x^2}}{1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}} =$

$$= \frac{(x+y)(x^2+y^2)+(x^4-y^4)}{2xy(x^2-y^2)-(x^4-y^4)} : \frac{x^2+y^2}{x^2-2xy+y^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x+y+x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(2xy-x^2-y^2)} \cdot \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x+y+x^2-y^2}{-(x^2-y^2)} = -\frac{1+x-y}{x-y}.$$

Dvojni ulomek = der Doppelbruch.

V navedeni nalogi se nahajajo v glavnem števcu in glavnem imenovalcu zopet ulomki. Taki ulomki se imenujejo dvojni ulomki. Dvojne ulomke odpraviš, ako pomnožiš glavni števec in glavni imenovalec z najmanjšim skupnim mnogokratnikom tistih imenovalcev, ki se nahajajo v glavnem števcu in imenovalcu.

Odpravljanje ulomkov v enačbah.

5. V enačbi

$$\frac{5x-4}{2x-2}-\frac{2x-3}{x-1}=\frac{7x+1}{3x-3}-\frac{9x-6}{4x-4}$$

odpraviš ulomke, ako pomnožiš vsak enačbeni člen z najmanjšim skupnim imenovalcem. Nadaljno razreševanje izvršiš po že znanih pravilih.

Razrešitev:

$$\frac{5x-4}{2x-2}-\frac{2x-3}{x-1}=\frac{7x+1}{3x-3}-\frac{9x-6}{4x-4} \quad \Big| \times 12(x-1)$$

$$\begin{aligned} 30x-24-24x+36 &= 28x+4-27x+18 \\ 6x+12 &= x+22 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\text{I. del} = \frac{6}{2}-\frac{1}{1}=3-1=2,$$

$$\text{II. del} = \frac{15}{3}-\frac{12}{4}=5-3=2.$$

Ako se nahajajo v enačbi ulomki in oklepaji, razrešiš navadno najprej oklepaje in potem odpraviš ulomke.

B. Decimalni ulomki.

§ 19. Občna pojasnila in računanje z decimalnimi ulomki.

Desetinka = die Dezimale. Desetina = das Zehntel. Stotina = das Hundertel. Tisočina = das Tausendtel. Desettisočina = das Zehntausendtel.

Ako razdelimo enoto na 10, oziroma na 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 . . . enakih delov, stvorimo ulomljene enote: desetino $\left(\frac{1}{10}\right)$, stotino $\left(\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}\right)$, tisočino $\left(\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}\right)$, desettisočino $\left(\frac{1}{10000}=\frac{1}{10^4}\right)$, stotisočino $\left(\frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5}\right)$, milijonino $\left(\frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6}\right)$ i. t. d., ki se imenujejo desetinke ali decimalke. Ako vzamemo te ulomljene enote večkrat (n. pr. a krat) v poštev, dobimo ulomljena števila $\frac{a}{10}, \frac{a}{10^2}, \frac{a}{10^3}, \frac{a}{10^4}, \frac{a}{10^5}, \frac{a}{10^6} \ldots$, katerim je imenovalec 10 ali pa kaka potenca od 10. Taka ulomljena števila se zovejo desetinski ali decimalni ulomki; vsak drugi ulomek pa je navaden ulomek.

Stotisočina = das Hunderttausendtel. Milijonina = das Milliontel.

Desetinski ulomek = der Dezimalbruch. Navadni ulomek = der gemeine Bruch.

Desetinski ulomki so pravi, oziroma nepravi, če je njih vrednost manjša, oziroma večja od enote.

Tvorjenje desetink.

Desetinke tvorimo tudi tako-le. Ako razdelimo enoto na 10 enakih delov, stvorimo desetino; ako razdelimo desetino na deset enakih delov, stvorimo stotino; ako razdelimo stotino na 10 enakih delov, stvorimo tisočino i. t. d. Vsaka naslednja desetinka je torej deseti del prejšnje desetinke.

Ako primerjamo tvorjenje desetink tvorjenju dekadičnih enot (desetic, stotic, tisočic i. t. d.), spoznamo, da je podlaga vsaki izmed teh tvoritev isti zakon; kajti enica je deseti del desetice, desetica deseti del stotice, stotica deseti del tisočice i. t. d. Vsaka dekadična enota je torej deseti del sledeče višje dekadične enote.

Dekadične enote nižjih redov = die niederen dekadischen Einheiten. Dekadične enote višjih redov = die höheren dekadischen Einheiten. Celote = die Ganzen.

Iz navedenega sledi, da se desetinke dado smatrati za naravni podaljšek dekadičnega številnega sestava. Po tem pravimo desetinkam tudi dekadične enote nižjih redov, deseticam, stoticam, tisočicam i. t. d. pa dekadične enote višjih redov; enice so prvotne enote. Enice in dekadične enote višjih redov se zovejo s skupnim imenom celote.

Pismeno predočevanje desetinskih ulomkov.

Desetinske ulomke pišemo ali v obliki navadnih ulomkov, n. pr. $\frac{a}{10^m}$, kjer pove potenčni eksponent m število desetink, ali pa v obliki celih števil. V zadnjem slučaju predočimo množino desetinskih enot z arabskimi številkami in z ničlo, red teh enot pa na ta način, da zapišemo dotično številko na določeno mesto, in sicer desetine na prvo mesto za enicami, stotine na drugo, tisočine na tretje, desettisočine na četrto, stotisočine na peto, milijonine na

Desetinska pika = der Dezimalpunkt.

šesto mesto i. t. d. Celote loči od desetink pika (desetinska ali decimalna pika), ki jo postavimo za enicami na desni strani zgoraj. Če manjka celot, zapišemo na njih mesto ničlo.

Števična in mestna vrednost desetinskih enot.

Kakor pri celotah ločimo tudi pri desetinkah dvojno vrednost in sicer številčno vrednost, ki določa množino desetinskih enot, in mestno vrednost, ki pove red desetinskih enot. Katera teh vrednosti je izpremenljiva in zakaj?

Desetinsko število = die Dezimalzahl.

Vsako število, v katerem se nahajajo desetinke, se imenuje desetinsko ali decimalno število.

Jasno je, da se vrednost desetinskega, oziroma celega števila ne izpremeni, ako mu pripišeš na desni eno ali več ničel kakor decimalke. N. pr. $8 \cdot 7 = 8 \cdot 7000$, $34 = 34 \cdot 00$.

Seštevanje in odštevanje desetinskih števil.

Z decimalnimi števili računaš vobče istotako kakor s celimi števili. Seštevati (odštevati) začneš pri desetinkah najnižjega reda, in ko si seštel (odštel) zaporedoma desetinke vseh redov, postaviš v vsoti (razliki) desetinsko piko ter seštevaš (odšteješ) celote.

Množenje desetinskih števil.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}, \text{ t. j.}$$

Desetinska števila množiš istotako kakor cela števila; med množenjem se ne oziraš na desetinsko piko; v končnem produktu odšteješ (odbiješ) toliko decimalk, kolikor jih je v obeh faktorjih skupaj.

Množenje in deljenje desetinskih števil z dekadičnimi enotami višjih in nižjih redov.

Ako pomakneš v desetinskem številu desetinsko piko za eno, dve, tri ali več mest proti desni, se vrednost vsake številke poveča 10 krat, oziroma 100 krat, 1000 krat i. t. d. Če pa pomakneš v desetinskem številu desetinsko piko za eno, dve, tri ali več mest proti levi, se vrednost vsake številke zmanjša 10 krat, oziroma 100 krat, 1000 krat i. t. d. Iz navedenega sledi:

Desetinsko število množiš (deliš) z dekadičnimi enotami višjih redov (10, 100, 1000 i. t. d.), ako pomakneš desetinsko piko za toliko mest proti desni (levi), kolikor ničel se nahaja v dotični dekadični enoti. Če manjka kje kake številke, jo nadomestiš z ničlo.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot \frac{1}{10^m} = \frac{a}{10^m}, \\ a : \frac{1}{10^m} = a \,.\, 10^m, \end{array}\right\} \text{t. j.}$$

Število (celo ali desetinsko) množiš (deliš) z dekadičnimi enotami nižjih redov (0·1, 0·01, 0·001 i. t. d.) istotako, kakor deliš (množiš) število z dekadičnimi enotami višjih redov, ali:

Število množiš (deliš) z dekadičnimi enotami nižjih redov, ako pomakneš desetinsko piko za toliko mest proti levi (desni), kolikor ničel se nahaja pred veljavno številko v dotični dekadični enoti.

Deljenje desetinskih števil.

Po pravilih, ki veljajo o ulomkih sploh, najdeš:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a : b}{10^{m-n}} \\ \text{in } \frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a \cdot 10^n}{10^m} : b, \end{array}\right\} \text{t. j.}$$

Desetinska števila deliš istotako kakor cela števila; med deljenjem se ne brigaš za desetinsko piko; v kvocijentu postaviš desetinsko piko po tem-le pravilu:

Mestna vrednost prve kvocijentove številke.

Mestna vrednost prve kvocijentove številke se ujema z mestno vrednostjo tistega dividendovega dela (tiste dividendove številke), v katerem (kateri) se nahajajo divizorjeve celote. Če pa nima divizor celot, pomakneš v mislih desetinsko piko v dividendu in divizorju obenem za toliko mest proti desni, da dobi divizor celote, in potem postopaš po zgoraj navedenem pravilu.

§ 20. Pretvarjanje navadnih ulomkov v decimalne in decimalnih v navadne.

Kako pretvoriš navaden ulomek v decimalnega.

Če hočeš navaden ulomek $\frac{a}{b}$, katerega števec in imenovalec sta medsebojni praštevili, pretvoriti v decimalnega, moraš ulomek $\frac{a}{b}$ razširiti tako, da postane iz imenovalca kaka potenca od 10, v znakih

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^m} = \frac{a \cdot 10^m : b}{10^m}, \text{ t. j.}$$

Števec decimalnega ulomka najdeš, ako pripišeš števcu navadnega ulomka toliko ničel, kolikor jih je treba, in potem deliš ta produkt z imenovalcem navadnega ulomka. Imenovalec decimalnega ulomka je tolika potenca od 10, kolikor ničel si moral pripisati števcu navadnega ulomka. — Če pa pišeš decimalni ulomek v obliki celega števila, pretvoriš navadni ulomek v decimalnega, ako deliš števec z imenovalcem ter izračunaš kvocijent v obliki desetinskega števila. V to svrho je treba števcu pripisati v mislih toliko ničel kakor decimalke, kolikor se jih potrebuje. Prej ko vzameš prvo decimalko (ki je v tem slučaju ničla) v račun, postaviš v kvocijentu desetinsko piko. Če manjka celot, zapišeš na njih mesto ničlo.

Končen decimalni ulomek = endlicher Dezimalbruch.

Navadni ulomek $\frac{a}{b}$ se da v decimalnega popolnoma natanko pretvoriti le tedaj, kadar je številni izraz $a \cdot 10^m$ deljiv z b. Ker sta a in b medsebojni praštevili, se morajo vsi prafaktorji števila b nahajati v dekadični enoti 10^m, ki je sestavljena samo iz prafaktorjev 2 in 5. Če je torej imenovalec b navadnega ulomka sestavljen le iz prafaktorjev 2 in 5, najdeš iz navadnega ulomka $\frac{a}{b}$ končen decimalni ulomek.

Brezkončen decimalni ulomek = unendlicher Dezimalbruch.

Če pa sestavljajo imenovalec b prafaktorji, ki so različni od 2 in 5, ali pa prafaktorji 2 in 5 in vrh tega še tudi drugi prafaktorji, se zgoraj navedena delitev ne more nikdar končati z ostankom 0. Po nekoliko delitvah (vsaj po b delitvah) se morajo ostanki ponavljati in istotako tudi številke v kvocijentu (brezkončen decimalni ulomek). V takih slučajih pretrgaš delitev, ko si določil dovolj decimalk. Izračunani decimalni ulomek je le približno enak navadnemu ulomku.

Decimalni ulomek, v katerem se ponavlja ena ali več številk, se imenuje povraten ali periodičen decimalni ulomek; vrsta ponavljajočih se številk se zove povračaj ali perioda. Periodo zapišemo navadno le enkrat ter zaznamujemo nje prvo in zadnjo številko tako, da nad vsako postavimo piko.

Povraten decimalni ulomek = periodischer Dezimalbruch. Povračaj = die Periode.

Tisti decimalni ulomek, v katerem se ponavljajo vse desetinke, se imenuje čisto periodičen decimalni ulomek; decimalni ulomek pa, v katerem se ponavljajo le nekatere desetinke, se zove nečisto periodičen decimalni ulomek. Tako je n. pr. $\frac{59}{111} = 0\cdot\dot{5}3\dot{1}$ čisto periodičen, $\frac{19}{300} = 0\cdot06\dot{3}$ pa nečisto periodičen decimalni ulomek.

Čisto in nečisto povraten decimalni ulomek = rein und gemischt periodischer Dezimalbruch.

Občna oblika čisto periodičnega decimalnega ulomka je

$$\frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \ldots$$

kjer pomeni b periodo in n število desetink, ki se nahajajo v periodi. Občna oblika nečisto periodičnega decimalnega ulomka je

$$\frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots,$$

kjer pomeni a pred periodo stoječe desetinke, m število teh desetink, b periodo in n število desetink v periodi

---

Končen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga zapišeš v obliki navadnega ulomka in potem okrajšaš, če je mogoče. N. pr.

Kako pretvoriš končen decimalni ulomek v navadnega.

$$0\cdot632 = \frac{632}{1000} = \frac{79}{125}.$$

Čisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga pomnožiš s tako dekadično enoto, da pomakneš

Kako pretvoriš čisto povraten decimalni ulomek v navadnega.

desetinsko piko za vso periodo proti desni, in od tega pomnoženega ulomka odštejeÅ¡ prvotnega. N. pr.

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{\cdot}\dot{3}7\dot{5} = 0{\cdot}375375375\ldots \\ 1000x &= 375{\cdot}375375375\ldots \end{aligned}\right\}\text{odšteto}$$

$$\begin{aligned} 999x &= 375 \\ x &= \frac{375}{999} = \frac{125}{333}. \end{aligned}$$

Iz navedenega izvajamo pravilo:

Čisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako vzameš periodo za števec, za imenovalec pa toliko 9, kolikor številk ima perioda.

Kako pretvoriš nečisto povraten decimalni ulomek v navadnega.

Nečisto periodičen decimalni ulomek pretvoriš v navadnega, ako ga pomnožiš s tako dekadično enoto, da postane čisto periodičen, in potem postopaš kakor poprej. N. pr.

$$\begin{aligned} x &= 0{\cdot}12\dot{3}\dot{6} \\ 100x &= 12{\cdot}\dot{3}\dot{6} = 12\tfrac{36}{99} = 12\tfrac{4}{11} \\ x &= 12\tfrac{4}{11} : 100 = \frac{136}{1100} = \frac{34}{275}. \end{aligned}$$

C. Računanje z nepopolnimi števili.

§ 21. Občna pojasnila o nepopolnih številih.

Popolno število = die vollständige Zahl. Nepopolno število = die unvollständige Zahl. Kako zaznamujemo nepopolna števila.

Dekadično število se imenuje popolno, če so znane vse njegove številke. Dekadično število se zove nepopolno, če so od določenega mesta naprej neznane vse naslednje številke ali pa se izpustile iz kateregakoli razloga.

Nepopolno število, ki je določeno najmanj do desetink, zaznamujemo na ta način, da mu pridenemo na desni dve piki; nepopolno število pa, pri katerem niso določena vsa celotna mesta, zaznamujemo tako, da mu pripišemo toliko zmanjšanih ničel, kolikor je celotnih mest nedoločenih. N. pr. Cesta do A do B je približno 8564 m dolga, v znakih 8564..m; trgovec C kupi približno 27·6 stotov blaga, v znakih 27·6 . . *q*; *D* ima okoli 735 tisoč kron premoženja, v znakih 735_{000} K.

Kdaj dobimo nepopolna števila.

Števila, katera nam podaja štetje, so navadno popolna; števila pa, katera nam podaja merjenje, so navadno nepopolna. Računski zneski so včasih popolna, včasih nepopolna števila. Tako so n. pr. zneski pri deljenju, pri pretvarjanju navadnih ulomkov v decimalne i. t. d. prav pogostoma nepopolna števila. Včasih je treba tudi popolne računske zneske pretvoriti v nepopolna števila, da dobijo dotični zneski uporaben pomen. N. pr. Ako velja 1 *kg* nekega blaga 1·21 (1·23, 1·25) K, velja 6·34 *kg* 7·6714 (7·7982, 7·925) K. Ker ne moremo v prometu izplačati vinarskih desetin in stotin, je treba pretvoriti navedene zneske v 7·67 . . (7·80 . ., 7·92 . .) K.

Razloček med popolnimi in nepopolnimi števili.

Popolnim številom smemo pripisati ničle kakor decimalke (ali si misliti pripisane); obratno smemo tudi ničle izpustiti kakor zadnje decimalke. N. pr. 3·5 = 3·5000, 6·800 = 6·8. Nepopolnim številom ne smemo pripisati, pa tudi ne izpustiti nobene ničle kakor decimalke; kajti namesto ničel bi utegnile stati tudi kake druge številke. Zato moramo števili 0·8900 . . in 0·89 . . smatrati za različni; kajti pri prvem številu sta tretja in četrta decimalka znani, pri drugem pa neznani.

Kako okrajšamo število.

Ako izpustimo zadnje številke (decimalke) kateregakoli števila, pravimo, da **okrajšamo** dotično število. Tako smo n. pr. v zgoraj navedeni nalogi zneske 7·6714 (7·7982, 7·925) K okrajšali v 7·67 . . (7·80 . ., 7·92 . .) K. Pogrešek, ki smo ga napravili v prvem slučaju, znaša 0·0014 K = 0·14 h, t. j. manj ko polovica (0·5) enega vinarja ali manj ko polovica zadnje desetinske enote nepopolnega števila 7·67 . . K. V drugem slučaju je nepopolno število nekoliko preveliko, toda pogrešek, ki se nahaja v njem, je manjši ko polovica (0·5) enega vinarja ali manjši ko polovica zadnje desetinske enote nepopolnega števila 7·80 . . K. Če bi pa okrajšanemu številu ne bili povečali zadnje številke za enoto, bi znašal pogrešek več ko pol vinarja ali več ko polovico zadnje desetinske enote nepopolnega števila 7·79 . . K. V tretjem slučaju znaša pogrešek ravno pol vinarja ali polovico zadnje desetinske enote nepopolnega števila 7·92 . . K. Kakor v navedenih primerih postopamo tudi v vsakem drugem slučaju, kadar je treba okrajšati kako število.

Zadnjo številko okrajšanega števila povečaš za enoto, ako je prva številka, ki jo izpustiš, večja od 5 ali pa 5 z naslednjimi veljavnimi številkami; v vsakem drugem slučaju pustiš zadnjo številko okrajšanega števila neizpremenjeno.

Koliko znaša pogrešek pri nepopolnih številih.

Nepopolna števila so včasih nekoliko premajhna, včasih nekoliko prevelika; toda v vsakem slučaju znaša pogrešek manj ko polovico ali ravno polovico zadnje desetinske enote dotičnega števila.

Kako spoznamo nepopolnejše število.

Pri vsakem izmed števil 123·47 . . *m* in 89·56 . . *m* znaša pogrešek pol centimetra ali manj. Ta pogrešek pa nima pri dolgi daljici tolikega pomena kakor pri kratki; torej je število 123·47 . . *m* popolnejše ko število 89·56 . . *m*. Istotako je tudi število 8·7 . . K popolnejše ko 6·9 . . K. Če delimo katerokoli nepopolno število z 10, 100, i. t. d., se zmanjša vrednost dotičnega števila 10 krat, oziroma 100 krat i. t. d. Ker se pa tudi pogrešek zmanjša na isti način, je torej jasno, da je nepopolnost števila odvisna od množine enot najnižjega reda, ki se nahaja v številu. Zato so n. pr. števila 8956 . . *m*, 895·6 . . *m*, 89·56 . . *m* enako nepopolna. Število 89·56 . . *m* pa je popolnejše ko število 8·924 . . *m*, ker je 8956 večje od 8924.

Izmed dveh nepopolnih števil je tisto popolnejše, ki ima več veljavnih številk. Če pa imata obe števili enako veliko veljavnih številk, je tisto popolnejše, v katerem najdeš (od leve proti desni) poprej večjo številko. Vsako popolno število je popolnejše ko katerokoli nepopolno število.

Pri računanju z nepopolnimi števili je treba gledati na to, da se noben znesek ne določi dalje ko do tistega mesta, na katerem se začenja nepopolnost, in da se končni znesek določi ali tako natanko, kakor je sploh mogoče, ali pa tako natanko, kakor je nalogi primerno.

§ 22. Seštevanje in odštevanje nepopolnih števil.

a)	*b)*	*c)*
9·614..	3·56..	17·3046
8·578..	7·129..	8·127..
4·126..	2·937..	7·628
0·326..	4·85..	6·594..
3·567..	0·968..	4·0638..
2·841..	1·4	5·147..
29·05..	20·8..	48·9..

Kako določiš vsoto nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče. Popravek = die Korrektur.

Pri nalogi *a)* so vsi sumandi približno določeni na tri decimalke (na tisočine). Pogrešek v vsakem sumandu znaša pol tisočine ali manj; v vsoti bode pogrešek znašal 6krat pol tisočine = 3 tisočine ali manj, t. j. manj ko polovica ene stotine (kajti 5 tisočin da šele polovico ene stotine). Iz tega se vidi, da ne moreš končne vsote približno določiti na tisočine, ampak le na stotine. Vsota vseh sumandovih tisočin (zadnjih decimalk) se porabi za popravek, t. j. število, katerega je treba prišteti sumandovim stotinam (naslednjim decimalkam). Ker je 32 tisočin bliže 3 ko 4 stotinam, znaša popravek 3. Potem izvršiš seštevanje kakor pri popolnih številih. — Kar se tiče popravka sploh, si je treba zapomniti, da se jemlje 1 za popravek, ako leži vsota iz zadnjih decimalk med 5 in 15; od 15 do 25 se jemlje 2 za popravek; od 25 do 35 je popravek 3, i. t. d.; od 1 do 5 ni nobenega popravka.

Pri nalogi *b)* je treba najprej nekatere sumande okrajšati tako, da imajo vsi enako veliko decimalk. Pri tem se moraš ravnati po tistem sumandu, ki je nepopolno število in ima najmanj decimalk. Od odbitih številk 8, 7 in 9 (t. j. od njih vsote) moraš vzeti popravek, katerega prišteješ naslednjim decimalkam. Potem izvršiš seštevanje kakor pri nalogi *a)*.

Kako določiš vsoto popolnih ali nepopolnih števil tako natanko, kakor se zahteva.

Pri nalogah *a)* in *b)* se je določila vsota tako natanko, kakor je bilo mogoče.

Če hočeš vsoto naloge *c)* določiti tako natanko, kakor se zahteva, n. pr. na desetine, okrajšaš vsak sumand na desetine, vzameš od odbitih številk (t. j. od njih vsote) popravek ter sešteješ okrajšane sumande. Kar se tiče popravka v tem slučaju, ga je treba vzeti dvakrat, t. j. najprej sešteješ tisočine, od dobljene vsote vzameš popravek, ga prišteješ stotinam, in ko sešteješ stotine, vzameš zopet popravek ter ga prišteješ desetinam; kajti drugače se pripeti prav lahko, da ne izračunaš vsote dovolj natanko.

Kako določiš razliko nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

d)	*e)*	*f)*	*g)*
7·428..	4·32	9·65..	8·35 6..
5·83	1·457..	3·14 7	6·89..
1·598..	2·863..	6·50..	1·47..

Pri nalogah *d)* in *e)* se odšteva kakor pri popolnih številih. Pri nalogah *f)* in *g)* se mora okrajšati število s premnogimi decimalkami tako, da imata minuend in subtrahend istotoliko decimalk. Od odbitih številk se vzame popravek za tisto število, ki se je okrajšalo. Potem se izvrši odštevanje kakor pri popolnih številih.

§ 23. Množenje nepopolnih števil.

a) 74·392.. × 8
595·14..

b) 3·874.. × 65·9
23244
1937
348
255·3..

c) 950·837.. × 24·678..
222102
12339
197
7
1
23465..

Kako določiš produkt nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

Če pomnožiš v nalogi *a)* 2 tisočini z 8, dobiš produkt 16 tisočin; v tem produktu znaša pogrešek 8krat pol tisočine = 4 tisočine ali manj. Od tega produkta vzameš popravek, ki ga prišteješ pomnoženim stotinam. Vse drugo napraviš kakor pri popolnih številih.

Pri nalogi *b)* je multiplikand nepopolno, multiplikator pa popolno število. Množitev da tri delske produkte. Prvi delski produkt izračunaš, ako pomnoziš multiplikand s 6, ne oziraje se na decimalno piko. Pri tem delskem produktu ne vzameš nobenega popravka; pogrešek, ki se nahaja v njem, se bode končno popravil pri seštevanju delskih produktov. Da ni treba drugega delskega produkta pomakniti za eno mesto proti desni kakor pri navadnem množenju, okrajšaš multiplikand za eno številko; potem pomnožiš odbito številko 4 s 5, vzameš od tega produkta popravek ter ga prišteješ produktu iz številke 5 in okrajšanega multiplikanda. Tretji delski produkt najdeš, ako okrajšaš multiplikand zopet za eno številko in računaš kakor pri drugem delskem produktu. Pri seštevanju delskih produktov vzameš od vsote zadnjih številk popravek. Mestno vrednost končnega produkta določiš s pomočjo prvega delskega produkta. Pri prvem delskem produktu se pomnoži multiplikand z desetico (t. j. z 10). Ker se v tem slučaju decimalna pika premakne za eno mesto proti desni, ostaneta v multiplikandu še dve decimalki, in toliko decimalk se nahaja v vsakem delskem produktu. Končni produkt mora imeti eno decimalko manj. Zakaj?

Pri nalogi *c)* sta oba faktorja nepopolni števili. Za multiplikand izbereš tisti faktor, ki je nepopolnejši (ki ima manj veljavnih številk); kajti če bi napravil obratno, bi se nahajal pogrešek v vseh številkah zadnjega delskega produkta. Delske produkte izračunaš zaporedoma ravno tako kakor pri nalogi *b)*. Za multiplikatorjevo ničlo moraš v multiplikandu tudi odbiti številko; kajti ničla da tudi svoj delski produkt, samo da se ta produkt ne zapiše, ker je = 0. Ko odbiješ multiplikandu zadnjo številko, izračunaš od nje popravek ter ga zapišeš kakor delski produkt. Mestno vrednost končnega produkta določiš na isti način kakor pri nalogi *b)*.

Okrajšana množitev = die abgekürzte Multiplikation.

Množitev, ki se izvršuje na ta način kakor v navedenih nalogah, se imenuje okrajšana množitev. Glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo je ta, da se pri navadni množitvi pomnoži celi multiplikand z vsako multiplikatorjevo številko in se delski produkti

Glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo.

pomaknejo zaporedoma vsak za eno mesto proti desni, pri okrajšani množitvi pa se pri izračunanju drugega in vsakega naslednjega delskega produkta multiplikand okrajša za eno številko in se delski produkti zapišejo drug pod drugega tako, da stoje njih zadnje številke druga pod drugo.

Na okrajšani način moraš množiti, ako je vsaj eden izmed faktorjev nepopolno število. Za multiplikand izbereš vselej nepopolnejši faktor.

Produkti nalog *a)*, *b)* in *c)* so se določili tako natanko, kakor je bilo mogoče. Ako je pa pri okrajšani množitvi mnogo delskih produktov, se včasih pripeti, da zadnja številka končnega produkta ni dovolj natanko določena. Temu se izogneš, ako vzameš pri računanju tretjega in vsakega naslednjega delskega produkta popravek od zadnjih dveh odbitih številk. N. pr. Pri tretjem delskem produktu naloge *b)* bi za ta slučaj računal popravek tako-le: 9krat 4 je 36, popravek 4; 9krat 7 je 63 in 4 da 67, popravek 7.

Kako določiš produkt dveh popolnih ali nepopolnih števil tako natanko, kakor se zahteva.

Na okrajšani način množiš tudi, ako je treba produkt dveh (popolnih ali nepopolnih) števil določiti tako natanko, kakor se zahteva. N. pr.

d) 14·583.. $\times$ 0·6945 (na 2 decimalki).
e) 9·4164 $\times$ 5·827 (na 1 decimalko).
f) 681357 $\times$ 29435 (na stotisoče).

Pri nalogi *d)* mora imeti končni produkt 2 decimalki, vsak delski produkt pa 3 decimalke. Če pomnožiš multiplikand s 6 (s prvo veljavno multiplikatorjevo številko), dobiš 4 decimalke, torej eno več, ko jih potrebuješ. Multiplikand smeš zato okrajšati za eno številko pred množenjem. Množitev izvršiš na okrajšani način.

Pri nalogi *e)* mora imeti prvi delski produkt 2 decimalki. Če pa pomnožiš multiplikand s 5, dobiš 4 decimalke, torej 2 več, ko jih potrebuješ. Multiplikand smeš zato okrajšati za dve številki pred množenjem.

Pri nalogi *f)* mora končni produkt imeti vrednost stotisočic, prvi delski produkt pa vrednost desettisočic.

Ta pogoj se ravno ujema z nalogo. Prvi delski produkt izračunaš torej na navadni način, naslednje pa na okrajšani način. — Ako bi hotel pri nalogi *f)* produkt določiti na milijone, smel bi okrajšati multiplikand za toliko številk, kolikor jih ima prvi delski produkt preveč (t. j. 1). Če bi pa hotel produkt naloge *f)* določiti na tisoče, moral bi za prvim delskim produktom izračunati na navadni način še toliko delskih produktov, kolikor številk ima prvi delski produkt premalo (t. j. 2).

§ 24. Deljenje nepopolnih števil.

a) $7{\cdot}68_{00} : 8{\cdot}\underline{3}\underline{6}\underline{4}.. = 0{\cdot}9182..$
1524
688
19
2

b) $485{\cdot}7.. : 3\underline{1}{\cdot}\underline{6} = 15{\cdot}37..$
1697
117
22
0

c) $6{\cdot}142|3.. : 2\underline{6}\underline{3}{\cdot}\underline{5}.. = 0{\cdot}02331..$
872   4
81
2
(— 1)

Kako določiš kvocijent nepopolnih števil tako natanko, kakor je mogoče.

V nalogi *a)* je dividend popolno, divizor pa nepopolno število. Da se ni treba brigati med računanjem za decimalno piko, določiš najprej mestno vrednost prve kvocijentove številke. V ta namen poiščeš tisti dividendov del, v katerem se nahajajo divizorjeve celote, in mestna vrednost tega dividendovega dela je tudi mestna vrednost prve kvocijentove številke. V naši nalogi pomeni prva kvocijentova številka desetine; kajti 8 se nahaja v 76 in 76 so desetine. Potem prirediš divizorju prvi delski dividend. V našem slučaju je treba dividendu pripisati dve nični (ali si misliti pripisani). Včasih pa se mora dividendu kaka številka odbiti (če jih ima preveč) in od odbite številke vzeti popravek. Ko si iz prvega delskega dividenda določil prvo kvocijentovo številko, pomnožiš divizor s to številko ter odštejeÅ¡ produkt od prvega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je drugi delski dividend. (Zakaj ne smeš pripisati temu ostanku ničle?) Da je moči nadaljevati delitev, okrajšaš divizor za eno številko ter določiš iz drugega delskega dividenda drugo kvocijentovo številko. Potem izračunaš popravek od odbite divizorjeve številke, pomnožiš okrajšani divizor z drugo kvocijentovo številko, temu produktu prišteješ popravek ter odšteješ ta popravljeni produkt od drugega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je tretji delski dividend. Sledeče kvocijentove številke izračunaš istotako, kakor si izračunal drugo. Delitev se konča, ko je treba odbiti zadnjo (veljavno) divizorjevo številko. Pri zadnji kvocijentovi številki moraš gledati na to, da jo določiš približno. To spoznaš iz zadnjega ostanka; ako je ta ostanek manjši, ko polovica zadnjega divizorja, si določil zadnjo kvocijentovo številko približno.

V nalogi *b)* je dividend nepopolno, divizor pa je popolno število. Mestna vrednost prve kvocijentove številke so desetice; kajti 31 se nahaja v 48 in 48 so desetice. Prvo in drugo kvocijentovo številko izračunaš na navadni način, tretjo in četrto številko pa tako, kakor smo računali pri nalogi *a)*.

V nalogi *c)* sta dividend in divizor nepopolni števili. Mestna vrednost prve veljavne kvocijentove številke so stotine; kajti 263 se nahaja v 614 in 614 so stotine. Potem prirediš dividend in divizor drugega drugemu tako, da se divizor ravno nahaja v dividendu, ter izračunaš kvocijent istotako kakor pri nalogi *a)*.

Okrajšana delitev = die abgekürzte Division.

Vsako deljenje, ki se izvršuje tako kakor pri navedenih nalogah, se imenuje o k r a j š a n o d e l j e n j e. Glavni razloček med navadnim in okrajšanim deljenjem je ta, da ostane divizor pri navadnem deljenju neizpremenjen in da se ostankom pripisujejo zaporedoma dividendove številke ali ničle, pri okrajšanem deljenju pa se divizor pri izračunanju vsake naslednje kvocijentove številke okrajša za eno številko in ostanki so zaporedoma drug za drugim delski dividendi. Na okrajšani način se mora prej ali slej deliti, ako je eno izmed določenih števil nepopolno. Primerjaj nalogi *a)* in *b)*!

Glavni razloček med navadno in okrajšano delitvijo.

Kvocijenti nalog *a)*, *b)* in *c)* so se določili tako natanko, kakor je bilo mogoče.

Na okrajšani način se tudi deli, ako je treba kvocijent dveh (popolnih ali nepopolnih) števil določiti tako natanko, kakor se zahteva. N. pr.

Kako določiš kvocijent popolnih ali nepopolnih števil tako natanko, kakor se zahteva.

d) 74·69432.. : 8·576.. (na 2 decimalki).

e) 9·5867 : 0·75465 (na 1 decimalko).

f) 16·67384 : 4·327 (na 5 decimalk).

V nalogi *d)* ima prva kvocijentova številka mestno vrednost enic. Kvocijent bo imel po vsem tri veljavne številke in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Določeni divizor smeš zato okrajšati za eno številko; potem prirediš okrajšanemu divizorju prvi delski dividend ter izvršiš delitev na okrajšani način.

V nalogi *e)* ima prva kvocijentova številka mestno vrednost desetic. Primerjaj § 19.! Kvocijent bo imel po vsem tri veljavne številke in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Določeni divizor smeš zato okrajšati za dve številki in potem ravnaš kakor v prejšnji nalogi.

V nalogi *f)* ima prva kvocijentova številka mestno vrednost enic. Kvocijent bo imel šest veljavnih številk in najmanj toliko jih mora imeti divizor. Ker pa ima v našem slučaju divizor dve številki premalo, moraš izračunati za prvo kvocijentovo številko še toliko številk na navadni način, kolikor jih ima divizor premalo.

Ker se pri okrajšani delitvi nahaja pogrešek v zadnji številki vsakega delskega dividenda, se pripeti včasih (posebno, če je zadnji delski dividend enoštevilčen), da zadnja kvocijentova številka ni določena dovolj zanesljivo. Temu se izogneš, ako vzameš v okrajšani divizor eno številko več, ko jih potrebuješ, in vsakokratni popravek izračunaš od zadnjih dveh odbitih številk; pri nalogah pa, katerih ne začneš reševati na okrajšani način takoj, ampak šele pozneje, izračunaš na navadni način eno številko več, ko jih je treba.

III. Razmerja in sorazmerja.

§ 25. Razmerja.

Razmerje = das Verhältnis.

Ako preiskavamo, kolikokrat se v številu A nahaja število B, pravimo, da merimo število A s številom B, ali da iščemo razmerje med številoma A in B, v znakih $A:B$ ali $\frac{A}{B}$ (čitaj: A proti B).

Prednji člen = das Vorderglied. Zadnji člen = das Hinterglied. Količnik = der Quotient.

Izraz $A:B$ ali $\frac{A}{B}$ se imenuje razmerje števil A in B ter pomeni, da se število B nahaja nekolikokrat v številu A; A zovemo prednji, B pa zadnji člen. Številu, ki pove, kolikokrat se nahaja zadnji v prednjem členu, pravimo razmerski količnik.

Vsako delitev v zmislu merjenja smemo smatrati za razmerje dotičnih dveh števil.

Obratno razmerje = umgekehrtes oder reziprokes Verhältnis.

Ako zamenimo v razmerju $A:B$ člena med seboj, najdemo razmerje $B:A$, ki se imenuje obratno razmerje števil A in B.

Vrednost razmerja sodimo po njegovem količniku; čim večji je količnik, tem večja je vrednost razmerja. Ako imajo razmerja enake količnike, se imenujejo enaka.

Številno razmerje = Zahlenverhältnis. Količinsko razmerje = Größenverhältnis.

Razmerje med dvema neimenovanima številoma zovemo številno, razmerje med dvema istovrstnima količinama pa količinsko razmerje. Kar se tiče tvorjenja in vrednosti količinskih razmerij, primerjaj § 21. v geometriji.

Ako izpustimo v prednjem in zadnjem členu določenega količinskega razmerja ime, najdemo številno razmerje, ki je enako količinskemu.

Iz pojma o razmerju sledi:

Oblične izpremembe razmerja = Formveränderungen des Verhältnisses.

Razmerje ne izpremeni svoje vrednosti, ako pomnožiš ali deliš prednji in zadnji člen z enim in istim številom, v znakih

$$A:B = mA:mB = \frac{A}{n}:\frac{B}{n}.$$

S pomočjo te lastnosti se da: 1. vsako razmerje, čigar člena sta ulomka, izraziti s celima številoma;

2. vsako razmerje, čigar člena imata skupno mero, izraziti z najmanjšima številoma (okrajšati).

Razmerje treh ali več števil najdeš, ako določiš, kolikokrat se njih skupna mera (če ni druge skupne mere, se smatra številna enota za skupno mero) nahaja v vsakem izmed dotičnih števil. Taka razmerja hočemo imenovati zaporedna razmerja; njih oblika je

Zaporedno razmerje = fortlaufendes Verhältnis.

$$A : B : C : D \text{ i. t. d.}$$

Oblična izpremememba, ki velja o vsakem enostavnem razmerju, velja tudi o zaporednem razmerju; torej je

Oblična izprememba zaporednega razmerja.

$$A : B : C = mA : mB : mC = \frac{A}{n} : \frac{B}{n} : \frac{C}{n}.$$

Členi, ki zavzemajo isto mesto v razmerjih, se zovejo istoležni členi. Tako so n. pr. prednji členi dveh ali več razmerij istoležni.

Istoležni členi = korrespondierende oder homologe Glieder.

Ako pomnožiš istoležne člene dveh ali več enostavnih razmerij med seboj, najdeš sestavljeno razmerje. Tako so n. pr.

Sestavljeno razmerje = zusammengesetztes Verhältnis.

$$\left.\begin{array}{r} a : b \\ c : d \\ e : f \end{array}\right\} \text{enostavna razmerja,}$$

$$\overline{ace : bdf} \text{ pa je sestavljeno razmerje.}$$

§ 26. Sorazmerje.

Ako izenačimo dvoje enakih razmerij, stvorimo sorazmerje. N. pr. Iz razmerij $a : b = k$ in $c : d = k$ izvajamo $a : b = c : d$ (čitaj: števili a in b sta si kakor števili c in d, ali krajše: a proti b, kakor c proti d).

Sorazmerje = die Proportion. Zunanja in notranja člena = äußere und innere Glieder.

Sorazmerje je sestavljeno iz dveh enakih razmerij. Sorazmerje tvoreča števila se imenujejo členi sorazmerja in sicer od leve proti desni prvi, drugi, tretji in četrti člen. Prvi in četrti člen se zoveta zunanja, drugi in tretji člen pa notranja člena; prvi in tretji člen sta prednja, drugi in četrti člen pa zadnja člena sorazmerja; četrtemu členu pravimo četrta geometrijska sorazmernica prvih treh členov. Členi, ki zavzemajo isto mesto v dveh ali več sorazmerjih, so istoležni členi.

Prednja in zadnja člena sorazmerja = Vorder- und Hinterglieder der Proportion. Četrta geometrijska sorazmernica = die vierte geometrische Proportionale. Istoležni členi.

Stalno sorazmerje = stetige Proportion. Srednja geometrijska sorazmernica = mittlere geometrische Proportionale. Številno sorazmerje = Zahlenproportion. Količinsko sorazmerje = Größenproportion.

Vsako sorazmerje, v katerem sta notranja člena enaka, se imenuje stalno sorazmerje, n. pr. $a : b = b : c$. Notranji člen stalnega sorazmerja se zove srednja geometrijska sorazmernica zunanjih členov*, četrti člen pa tretja geometrijska sorazmernica prvega in notranjega člena.

Vsako sorazmerje, katerega členi so neimenovana števila, se imenuje številno sorazmerje; sorazmerju pa, ki je sestavljeno iz dveh količinskih razmerij, se pravi količinsko sorazmerje. V količinskem sorazmerju sta člena vsakega razmerja istoimenska; člena prvega razmerja pa utegneta imeti različno ime od členov drugega razmerja. Ako izpustimo pri vseh členih količinskega sorazmerja imena, stvorimo številno sorazmerje.

Razrešiti = auflösen.

Sorazmerje razrešiti se pravi, iz treh znanih členov izračunati neznani člen. Razreševanje številnih sorazmerij se opira na lastnost:

Lastnost številnega sorazmerja.

V vsakem številnem sorazmerju je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.

Dokaz. Iz enačbe $a : b = c : d$ izvajamo

$$(a : b)\,bd = (c : d)\,bd,$$

t. j. $$ad = bc.$$

Iz dveh enakih produktov stvoriš sorazmerje, ako vzameš faktorja enega produkta za zunanja in faktorja drugega produkta za notranja člena, v znakih: iz $ad = bc$ najdeš $a : b = c : d$.

Razreševanje številnega in količinskega sorazmerja.

Zunanji člen številnega sorazmerja najdeš, ako deliš produkt notranjih členov z znanim zunanjim členom.

Notranji člen številnega sorazmerja najdeš, ako deliš produkt zunanjih členov z znanim notranjim členom. Zakaj iz sorazmerja $a : b = c : d$ sledi enačba $ad = bc$ in iz te enačbe najdeš:

$$a = \frac{bc}{d},\quad d = \frac{bc}{a},\quad b = \frac{ad}{c},\quad c = \frac{ad}{b}.$$

* Srednja geometrijska sorazmernica dveh števil se imenuje tudi geometrična sredina dotičnih dveh števil. Izraz $\frac{a+b}{2}$ se zove aritmetična sredina števil a in b.

Količinsko sorazmerje razrešiš, ako ga najprej pretvoriš na števílno sorazmerje in potem razrešiš. Primerjaj § 21. v geometriji!

Iz navedenih pojasnil in lastnosti o razmerjih in sorazmerjih izvajamo:

V vsakem števílnem sorazmerju smeš zameniti: *a)* notranja člena med seboj, *b)* zunanja člena med seboj, *c)* notranja člena z zunanjima členoma. Oblične izpremembe števílnega sorazmerja.

V vsakem števílnem sorazmerju smeš *a)* vse člene, *b)* en zunanji in en notranji člen pomnožiti, oziroma deliti z enim in istim števílom.

S pomočjo zadnje lastnosti moreš: *a)* vsako števílno sorazmerje, v katerem se nahajajo ulomki, izraziti s celimi števíli; *b)* vsako števílno sorazmerje, v katerem imata en zunanji in en notranji člen skupno mero, okrajšati.

1. V vsakem sorazmerju sta si vsota (razlika) prvih dveh členov in prvi ali drugi člen, kakor sta si vsota (razlika) zadnjih dveh členov in tretji ali četrti člen, v znakih $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ ali $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$. Pretvorbe določenega sorazmerja.

Dokaz. Ako prišteješ, oziroma odšteješ obema deloma enačbe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ enoto, dobiš $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$ ali $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$. Ako deliš zadnjo enačbo s prvo, najdeš $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$.

2. V vsakem sorazmerju sta si vsota in razlika prvih dveh členov, kakor sta si vsota in razlika zadnjih dveh členov, v znakih $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Dokaz. Iz sorazmerja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dobiš po prejšnjem izreku $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ in $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$. Če deliš zadnji enačbi, najdeš $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Ako izenačimo tri ali več enakih razmerij, najdemo zaporedno sorazmerje, v znakih Zaporedno sorazmerje = fortlaufende Proportion.

$$A : a = B : b = C : c = D : d = k,$$

kjer pomeni k količnik vsakega izmed navedenih razmerij. Po pojmu o razmerju je: $A = ak$, $B = bk$, $C = ck$ in $D = dk$. Iz teh enačb sledi, da so si števila A, B, C, D istotako kakor števila a, b, c, d, v znakih

$$A : B : C : D = a : b : c : d.$$

Lastnosti zaporednega sorazmerja.

V vsakem zaporednem sorazmerju so si torej prednji členi istotako kakor zadnji členi.

Zaporedno sorazmerje je sestavljeno iz dveh izenačenih zaporednih razmerij.

Ako seštejemo enačbe $A = ak$, $B = bk$, $C = ck$ in $D = dk$, najdemo

$$A + B + C + D = (a + b + c + d)k;$$

iz tega izraza sledi z ozirom na pomen količnika k

$$\frac{A + B + C + D}{a + b + c + d} = k = A : a = B : b = C : c = D : d, \text{ t. j.}$$

V vsakem zaporednem sorazmerju sta si vsoti vseh prednjih in zadnjih členov istotako kakor vsak prednji člen proti svojemu zadnjemu členu.

Iz pojasnil o zaporednem razmerju in sorazmerju sledi:

V vsakem zaporednem sorazmerju smeš vse prednje, oziroma vse zadnje člene pomnožiti (deliti) z enim in istim številom.

Harmonično sorazmerje = harmonische Proportion.

Ako je število x od a in b tako zavisno, da velja sorazmerje $(a - x) : (x - b) = a : b$, potem pravimo, da je to sorazmerje harmonično in x je harmonična sredina števil a in b. Če razrešimo sorazmerje, dobimo $x = \frac{2ab}{a + b}$.

Harmonična sredina $\frac{2ab}{a + b}$ dveh števil je v ozki zvezi z aritmetično sredino $\frac{a + b}{2}$ in geometrično sredino $\sqrt{ab}$ istih dveh števil. Iz identične enačbe $\sqrt{\frac{a + b}{2} \cdot \frac{2ab}{a + b}} = \sqrt{a \cdot b}$

sledi namreč pravilo: srednja geometrijska sorazmernica med aritmetično in harmonično sredino dveh števil je enaka geometrični sredini istih dveh števil.

Ako pomnožiš istoležne člene dveh ali več sorazmerij med seboj, najdeš novo (sestavljeno) sorazmerje. Tako so n. pr. Tvorjenje sestavljenega sorazmerja.

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a_1 : b_1 = c_1 : d_1 \\ a_2 : b_2 = c_2 : d_2 \end{array}\right\} \text{ enostavna sorazmerja,}$$

$$aa_1a_2 : bb_1b_2 = cc_1c_2 : dd_1d_2 \text{ pa je sestavljeno sorazmerje.}$$

Zakaj ako pomnožiš enake izraze med seboj, najdeš enake produkte.

Ako deliš istoležne člene dveh sorazmerij, najdeš novo (sestavljeno) sorazmerje, v znakih

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a_1 : b_1 = c_1 : d_1 \end{array}\right\}$$

$$\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}.$$

Zakaj ako deliš enake izraze z enakimi izrazi, najdeš enake kvocijente.

Naloge.

1. Izrazi naslednji sorazmerji:

a) $17(m + n) : x = 102(m^2 - n^2) : 93(m - n)$,

b) $1\frac{4}{5} : 2\frac{2}{3} = x : 3\frac{5}{9}$

z najmanjšimi celimi števili!

Izvršitev:

a)
$$\begin{aligned} 17(m + n) : x &= 102(m^2 - n^2) : 93(m - n) \\ 1 : x &= 6(m - n) : 93(m - n) \\ 1 : x &= 2 : 31. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{9}{5} : \tfrac{8}{3} &= x : \tfrac{32}{9} \\ \tfrac{9}{5} : 24 &= x : 32 \\ 9 : 120 &= x : 32 \\ 9 : 15 &= x : 4 \\ 3 : 5 &= x : 4. \end{aligned}$$

2. Določi iz podatkov: *a)* $a:b = 3:5$ in $a:c = 2:3$ vrednost razmerja $b:c$; *b)* $a:b = 4:5$, $c:d = 3:5$ in $c:b = 6:5$ vrednost razmerja $a:d$!

V navedenih nalogah je treba najprej določena razmerja tako urediti, da se prvo razmerje začne s členom, ki je prednji člen zahtevanega razmerja, vsako naslednje razmerje začne s členom, ki se ujema z zadnjim členom prejšnjega razmerja, in zadnje razmerje konča s členom, ki je zadnji člen v zahtevanem razmerju. Potem se pomnožijo istoležni členi urejenih sorazmerij.

Izvršitev: *a)*

$$\left.\begin{array}{l} b:a = 5:3 \\ a:c = 2:3 \end{array}\right\} \text{pomnoženo}$$
$$b:c = 10:9.$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a:b = 4:5 \\ b:c = 5:6 \\ c:d = 3:5 \end{array}\right\} \text{pomnoženo}$$
$$a:d = 2:5.$$

3. Poišči iz podatkov:

a) $a:b = 3:5$, $a:c = 2:3$, $a:d = 4:5$;

b) $a:c = 8:3$, $b:c = 7:6$, $b:d = 14:15$

zaporedno sorazmerje!

V nalogi *a)* se ujemajo prvi členi določenih razmerij. Takšno nalogo razrešiš, ako pretvoriš določena sorazmerja tako, da se ujemajo tudi njih tretji členi (najmanjši skupni mnogokratnik teh členov). — V nalogi *b)* poiščeš najprej iz določenih razmerij takšna razmerja, ki se ujemajo v prednjih členih, potem pa postopaš kakor pri nalogi pod *a)*.

Izvršitev: *a)*

$$\begin{array}{l} a:b = 3:5 = 12:20, \\ a:c = 2:3 = 12:18, \\ a:d = 4:5 = 12:15; \end{array}$$

torej je $a:b:c:d = 12:20:18:15$.

$$b)\quad \left.\begin{aligned} a:c &= 8:3 \\ c:b &= 6:7 \end{aligned}\right\}\text{pomnoženo}$$
$$\overline{a:b = 16:7,}$$

$$\left.\begin{aligned} a:c &= 8:\ 3 \\ c:b &= 6:\ 7 \\ b:d &= 14:15 \end{aligned}\right\}\text{pomnoženo}$$
$$\overline{a:d = 32:15,}$$

$$\begin{aligned} a:b &= 16:\ 7 = 32:14, \\ a:c &= 8:\ 3 = 32:12, \\ a:d &= 32:15 = 32:15; \end{aligned}$$

torej je $a:b:c:d = 32:14:12:15$.

4. Razdeli število 1141 na štiri dele, ki so si kakor $15:40:48:60$!

Deli števila 1141 so x, y, z, u. Po pogojih naloge je $x+y+z+u = 1141$ in $x:y:z:u = 15:40:48:60$. Iz zaporednega sorazmerja najdeš

$$\frac{x+y+z+u}{15+40+48+60} = \frac{x}{15} = \frac{y}{40} = \frac{z}{48} = \frac{u}{60},$$

$$\text{t. j.}\quad 7 = \frac{x}{15} = \frac{y}{40} = \frac{z}{48} = \frac{u}{60},$$

in iz te enačbe je

$$x = 105,\quad y = 280,\quad z = 336,\quad u = 420.$$

5. Enačbo

$$(x+6):(11-x) = (x+69):(67-x)$$

razrešiš, ako izenačiš produkta zunanjih in notranjih členov. Potem najdeš $x = 3$.

§ 27. Sorazmerne količine in uporabne naloge.

Dve količini sta odvisni druga od druge, ako vsaka izprememba ene količine povzroči izpremembo druge količine. N. pr. Določena množina blaga ima določeno ceno; dvakrat (trikrat) toliko istega blaga velja dvakrat (trikrat) Odvisne količine.

toliko denarja. Ali: določeno število delavcev izvrši neko delo v določenem času; dvakrat toliko (enako pridnih) delavcev izvrši isto delo v polovici prvotnega časa.

Premo sorazmerne količine = gerade oder direkt proportionale Größen. Sorazmernostni faktor ali modul = der Proportionalitätsfaktor oder Modulus. Funkcija = die Funktion.

Ako sta količini A in B tako odvisni druga od druge, da se količina A tolikokrat poveča (zmanjša), kolikorkrat se količina B poveča (zmanjša), pravimo, da sta količini A in B premo sorazmerni. Iz tega pojasnila sledi, da mora ostati kvocijent številnih vrednosti izpreminjajočih se količin A in B vedno isti, v znakih $\frac{A}{B} = m$ ali $A = mB$, kjer pomeni m neizpremenljivo število, ki se zove sorazmernostni modul ali faktor. Količini A pravimo funkcija količine B.

Iz enačb $A_1 = mB_1$ in $A_2 = mB_2$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2, \text{ t. j.}$$

Kako stvorimo sorazmerje iz premo sorazmernih količin.

Ako sta dve količini premo sorazmerni, je razmerje med dvema številoma prve količine enako razmerju med pripadajočima številoma druge količine.

Obratno sorazmerne količine = umgekehrt oder invers proportionale Größen.

Ako pa sta količini A in B tako odvisni druga od druge, da se poveča (zmanjša) količina A tolikokrat, kolikorkrat se zmanjša (poveča) količina B, pravimo, da sta količini A in B obratno sorazmerni. Iz tega pojasnila sledi, da mora ostati produkt iz številnih vrednosti izpreminjajočih se količin A in B vedno isti, v znakih $A \cdot B = m$ ali $A = m \cdot \frac{1}{B}$. Količini A pravimo funkcija količine B.

Iz enačb $A_1 = m \cdot \frac{1}{B_1}$ in $A_2 = m \cdot \frac{1}{B_2}$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = \frac{1}{B_1} : \frac{1}{B_2} = B_2 : B_1, \text{ t. j.}$$

Kako stvorimo sorazmerje iz obratno sorazmernih količin.

Ako sta dve količini obratno sorazmerni, je razmerje med dvema številoma prve količine enako obratnemu razmerju med pripadajočima številoma druge količine.

Količina A utegne biti odvisna tudi od dveh, treh ali več drugih količin B, C, D i. t. d., s katerimi je posamič premo, oziroma obratno sorazmerna. Da je n. pr. količina

A s količinama B in C premo, s količino D pa obratno sorazmerna, izrazimo v znakih $A = m \cdot B \cdot C \cdot \frac{1}{D}$. Količina A je funkcija količin B, C in D.

Iz enačb $A_1 = m \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot \frac{1}{D_1}$ in $A_2 = m \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{D_2}$ najdeš sorazmerje

$$A_1 : A_2 = \frac{B_1 C_1}{D_1} : \frac{B_2 C_2}{D_2} = B_1 C_1 D_2 : B_2 C_2 D_1,$$

katero se da predočiti tudi na ta-le način:

$$A_1 : A_2 = \left.\begin{array}{r} B_1 : B_2 \\ C_1 : C_2 \\ D_2 : D_1 \end{array}\right\} \text{pomnoženo.}$$

Tvorjenje sestavljenega sorazmerja iz premo in obratno sorazmernih količin.

A k o j e t o r e j d o l o č e n a k o l i č n a o d v i s n a o d v e č d r u g i h k o l i č i n, s k a t e r i m i j e p o s a m i č p r e m o, o z i r o m a o b r a t n o s o r a z m e r n a, j e r a z m e r j e m e d d v e m a š t e v i l o m a p r v e k o l i č i n e e n a k o s e s t a v l j e n e m u r a z m e r j u i z p r i p a d a j o č i h š t e v i l o s t a l i h k o l i č i n. Posamezni deli tega sestavljenega razmerja se tvorijo po prejšnjih pravilih.

Razen navedenih odvisnosti se nahajajo med količinami še različne druge odvisnosti, na katere se tukaj ne bomo ozirali.

Naloge o premo in obratno sorazmernih količinah.

Naloge, v katerih se nahajajo premo ali obratno sorazmerne količine, so sestavljene iz dveh stavkov, iz pogojnega in vprašalnega stavka, ali se vsaj dado razstaviti na taka dva stavka. V pogojnem stavku so določene vse količine, v vprašalnem stavku pa je ena količina nedoločena. Naloge te vrste rešujemo ali s pomočjo sorazmerij ali pa na sklepovni način. V zadnjem slučaju sklepamo vobče iz določene množine na enoto in iz enote na kako drugo določeno množino iste količine. Razrešitev si nekoliko olajšamo, ako napravimo načrt, t. j. kratek podatek dotične naloge v obliki pogojnega in vprašalnega stavka. Primerjaj naslednje naloge!

Naloge.

1. Rokopis ima 162 strani, vsaka po 50 vrst; koliko strani bi imel rokopis, ako bi bilo na vsaki strani po 45 vrst?

$$\begin{array}{l} 162 \text{ strani } \ldots\ldots 50 \text{ vrst} \\ x \quad " \quad \ldots\ldots 45 \quad " \\ \hline \end{array}$$

$$a) \quad x = \frac{162 \text{ strani} \times 50}{45} = 180 \text{ strani.}$$

$$b) \quad x : 162 = 50 : 45$$
$$x = 180.$$

a) Če razrešiš nalogo na sklepovni način, sklepaš tako-le. Po pogojnem stavku ima rokopis 162 strani; če bi na vsaki strani bila samo 1 vrsta (t. j. 50krat manj vrst kakor v pogojnem stavku), bi moral rokopis imeti 50krat toliko strani kakor v pogojnem stavku. Po vprašalnem stavku pa je na vsaki strani 45 vrst (t. j. 45krat toliko kakor v prejšnjem slučaju), zato bo moral rokopis imeti 45. del prejšnjih strani. Med sklepom nakažeš vsako množenje, oziroma deljenje. Ker ima nakazani rezultat obliko ulomljenega števila, smeš po en faktor v števcu in imenovalcu deliti s skupno mero.

b) Če hočeš nalogo razrešiti s pomočjo sorazmerja, je treba najprej določiti, kako sta količini odvisni druga od druge. Čim več vrst se nahaja na vsaki strani rokopisa, tem manj strani ima rokopis; količini sta torej obratno sorazmerni. Po zgoraj navedenem pravilu stvoriš sorazmerje, katerega je treba razrešiti.

2. Voznik pelje 14 stotov blaga za 10·8 K 7 *km* daleč; kako daleč bo peljal $17\frac{1}{2}$ stota za $16\frac{1}{5}$ K?

$$\begin{array}{l} 14 \text{ stotov } \ldots 10 \cdot 8 \text{ K } \ldots 7\,km \\ 17\tfrac{1}{2} \quad " \quad \ldots 16\tfrac{1}{5} \quad " \ldots x \quad " \\ \hline \end{array}$$

$$a) \quad x = \frac{7\,km \times 14 \times 16\frac{1}{5}}{10 \cdot 8 \times 17\frac{1}{2}} = \frac{7 \times 14 \times 81 \times 2}{10 \cdot 8 \times 35 \times 5} = 8 \cdot 4\,km.$$

$$b) \quad \left.\begin{array}{r} x : 7 = 14 : 17\tfrac{1}{2} \\ 16\tfrac{1}{2} : 10 \cdot 8 \end{array}\right\}$$
$$\overline{\quad x = 8 \cdot 4. \quad}$$

a) Sklepaš zaporedoma najprej na enoto pri vsaki količini pogojnega stavka in potem na tiste množine, ki se nahajajo v vprašalnem stavku. Voznik pelje blago 7 *km* daleč, 1 stot blaga bi peljal 14krat tako daleč; za 1 K bi peljal blago le 10·8. del prejšnje daljave. $17\frac{1}{2}$ stota blaga bo peljal $17\frac{1}{2}$. del prejšnje daljave; za $16\frac{1}{5}$ K bo peljal blago $16\frac{1}{5}$krat tako daleč kakor poprej. — V nakazanem rezultatu se nahajajo dvojni ulomki. Te ulomke odpraviš, ako prestaviš vsak imenovalec, ki se nahaja v glavnem števcu, kakor faktor v glavni imenovalec, vsak imenovalec pa, ki se nahaja v glavnem imenovalcu, kakor faktor v glavni števec; kajti ulomek se ne izpremeni, ako pomnožiš njegov števec in imenovalec z enim in istim številom.

b) Čim več je blaga, tem manjšo daljavo se pelje blago za isti denar; prva in tretja količina sta torej obratno sorazmerni. Čim več se plača voznine, tem dalje se pelje isto blago; druga in tretja količina sta premo sorazmerni. Sestavljeno sorazmerje stvoriš po zgoraj navedenih pravilih.

3. Koliko časa moraš 1863 K kapitala po 5% izposoditi, da dobiš toliko obresti, kakor jih da 3450 K po $4\frac{1}{2}$% v 9 mesecih?

3450 K kapitala . . . $4\frac{1}{2}$% . . . v 9 mesecih
1863 „ „ . . . 5% . . . v x „

$$x : 9 = \left.\begin{matrix} 3450 : 1863 \\ 4\frac{1}{2} : 5 \end{matrix}\right\}$$

$$x = 15.$$

Čim manjši je kapital, tem več časa mora ležati, da nese iste obresti. Čim manjši so procenti, tem več časa mora ležati kapital, da nese iste obresti.

4. Koliko obresti da kapital k naložen po p% *a)* v l letih, *b)* v m mesecih, *c)* v d dnevih?

a) 100 K kapitala . . . v 1 letu . . . p kron obresti
k „ „ . . . v l letih . . . o „ „

$$o = \frac{kpl}{100}, \text{ t. j.}$$

Obresti za leta izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in leti ter deliš produkt s 100.

b) 100 K kapitala . . . v 12 mesecih . . . p kron obresti
k „ „ . . . „ m „ . . . o „ „

$$o = \frac{kpm}{1200}, \text{ t. j.}$$

Obresti za mesece izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in meseci ter deliš produkt s 1200.

c) 100 K kapitala . . . v 360 dneh . . . p kron obresti
k „ „ . . . „ d „ . . . o „ „

$$o = \frac{kpd}{36000}, \text{ t. j.}$$

Obresti za dneve izračunaš, ako pomnožiš kapital s procenti in dnevi ter deliš produkt s 36000.

5. A, B in C so popravljali okrajno cesto in sicer je pošiljal A po 4 delavce 6 dni, B po 3 delavce 9 dni in C po 4 delavce 8 dni; za to delo dobijo skupaj 207·5 K plačila. Koliko dobi vsak?

Zaslužek se mora med A, B in C razdeliti po razmerju delavcev in po razmerju časa; torej je

$$\begin{aligned} x:y:z &= \left.\begin{array}{l} 4:3:4 \\ 6:9:8 \end{array}\right\} \\ \hline x:y:z &= 24:27:32. \end{aligned}$$

Po pravilih, ki veljajo o zaporednem sorazmerju, najdeš

$$x = 60, \quad y = 67{\cdot}5, \quad z = 80.$$

IV. Enačbe prve stopnje.

§ 28. Občna pojasnila in urejevanje enačb.

Enačba. Enačbena dela. Enačbeni členi.

E n a č b a j e i z e n a č e n a d v o j i c a š t e v i l n i h i z r a z o v, k i s t a e n a k e v r e d n o s t i. Izenačena izraza se imenujeta e n a č b e n a d e l a (enačbeni strani). Vsak teh delov utegne biti sestavljen iz č l e n o v, ki so spojeni med seboj z znakom $+$ ali $-$.

Istostna enačba = identische Gleichung.

Enačba, v kateri izenačimo številni izraz s samim seboj ali s kako pretvorbo tega izraza, se imenuje i s t o s t n a ali i d e n t i č n a enačba. N. pr. $a + b = a + b$, ali $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Ako postavimo v identični enačbi namesto občnega števila katerokoli posebno število, imata enačbena dela vsakokrat enaki vrednosti. Identični enačbi ustreza (zadostuje) torej vsako posebno število.

Določilna enačba = Bestimmungsgleichung.

Enačba, kateri ne ustreza vsako, ampak le določena števila, se zove d o l o č i l n a e n a č b a. Tako n. pr. zadostuje enačbi $4x + 7 = 19$ število 3 in nobeno drugo; enačbi $x^2 - 4 = 0$ pa zadostujeta števili $+2$ in -2. V naslednjem se hočemo pečati le z določilnimi enačbami.

Enačbeni koren. Enačbo razrešiti.

Tisto število (oziroma številni izraz), ki ustreza določilni enačbi, se imenuje e n a č b e n i k o r e n. Enačbi določiti koren, se pravi e n a č b o r a z r e š i t i.

Znanke in neznanke v določilnih enačbah.

V določilnih enačbah ločimo znane in neznane količine. Znane količine (z n a n k e) zaznamujemo s posebnimi števili ali pa s prvimi črkami abecede, neznane količine (n e z n a n k e) pa z zadnjimi črkami x, y, z, u, v. Ako se nahaja v enačbi več občnih števil, smatramo včasih zdaj to, zdaj drugo občno število za neznanko. To se zgodi posebno pri obrazcih, t. j. pri enačbah, s katerimi izražamo izreke in pravila, po katerih se določuje n. pr. likom obseg in ploščina, telesom površje in prostornina i. t. d.

Razvrstitev enačb po številu neznank.

Po številu neznank, ki se nahajajo v enačbi, ločimo enačbe z eno, dvema, tremi ... neznankami.

Osnovne resnice o pretvarjanju enačb.

Iz matematičnih osnovnih resnic sledi:

a) Ako prišteješ, oziroma odšteješ enakim številnim izrazom enaka števila, najdeš enake izraze.

b) Ako množiš, oziroma deliš enake številne izraze z enakimi števili, najdeš enake izraze.

S pomočjo teh izrekov se da vsaki enačbi izpremeniti oblika. Važne so tiste izpremembe, po katerih postane oblika enostavna. Na take pretvoritve se hočemo tukaj ozirati.

Enačbo urediti = eine Gleichung ordnen.

Enačbo urediti se pravi, enačbi dati kolikor mogoče enostavno obliko. Iz zgoraj navedenega in iz razrešenih nalog v §§ 7., 10. in 18. izvajamo za urejevanje enačb sledeča pravila:

1. Izvrši računske načine, katere nakazujejo oklepaji!

2. Odpravi ulomke, t. j. pomnoži vse enačbene člene z najmanjšim skupnim imenovalcem dotičnih ulomkov!

3. Prestavi vse člene desnega enačbenega dela v levi del ter skrči in uredi člene v tem delu po padajočih potencah z ozirom na neznanko! Ako prestaviš člen iz enega enačbenega dela v drugega, mu moraš izpremeniti predznak. Dva člena v različnih enačbenih delih se uničujeta, ako se ujemata v predznakih in številnih vrednostih.

4. Deli vse enačbene člene s koeficientom neznanke v najvišji potenci! Vobče smemo reči, da smeš vse enačbene člene deliti z njih skupno mero, če se v tej skupni meri ne nahaja neznanka sama.

Urejene enačbe z eno neznanko imajo torej takšne-le oblike:

$$x + a = 0;\quad x^2 + ax + b = 0;\quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0;$$

i. t. d.

Če ima enačba dve ali več neznank, smatramo jo za urejeno, če ima obliko kakor n. pr.

$$ax + by = c,\quad ax^2 + by^2 + cxy + dx + cy = f,\quad \text{i. t. d.},$$

kjer pomenijo a, b, c . . . cela števila.

Enačbe, ki se dado pretvoriti na eno izmed zgoraj navedenih oblik, se imenujejo algebrajske; vse druge enačbe pa so transcendentne.

Algebrajske in transcendentne enačbe = algebraische und transzendente Gleichungen.

Največji potenčni eksponent, katerega ima neznanka urejene enačbe, ali če je več neznank, največja vsota potenčnih eksponentov, katere imajo neznanke urejene enačbe v enem in istem členu, določa stopnjo dotične enačbe. Enačbe kakor n. pr. $x + a = 0$, $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$ i. t. d. so enačbe prve stopnje.

Stopnja določilne enačbe = der Grad der Bestimmungsgleichung.

§ 29. Razreševanje enačb prve stopnje.

I. Urejena enačba prve stopnje z eno neznanko ima obliko $x + a = 0$. Iz tega sledi $x = -a$. Ker pomeni izraz $-a$ neko določeno število, ima torej enačba prve stopnje z eno neznanko samo en koren.

Kako se razrešujejo enačbe prve stopnje z eno neznanko.

Iz nalog in pojasnil v §§ 7., 10. in 18. posnamemo za razreševanje enačb prve stopnje z eno neznanko ta-le pravila:

1. Izvrši računske načine, katere nakazujejo oklepaji!

2. Odpravi ulomke!

3. Prestavi člene z neznanko v en enačbeni del in znana števila v drugi del ter skrči istoimenske izraze kolikor mogoče!

4. Deli oba enačbena dela s koeficientom neznanke!

Preizkus napraviš, ako zameniš v določeni enačbi neznanko z najdenim korenom ter izračunaš vrednosti prvega in drugega dela. Če se ujemata te vrednosti, si prav razrešil enačbo.

Preizkus.

II. Urejena enačba prve stopnje z dvema neznankama ima obliko

$$ax + by = c.$$

Ako poiščeš iz te enačbe vrednost za x, oziroma za y, najdeš

$$x = \frac{c - by}{a} \text{ in } y = \frac{c - ax}{b},$$

t. j. vsaki posebni številni vrednosti za y (oziroma za x) pripada določena vrednost za x (oziroma za y). Enačba prve stopnje z dvema neznankama ima torej brez števila razrešitev.

Iztrebiti = eliminieren.

Ako imamo dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama, ima sicer vsaka enačba za-se brez števila razrešitev, obe enačbi skupaj pa le eno razrešitev; zakaj iz določenih enačb se da ena neznanka iztrebiti, t. j. iz določenih enačb se da izvesti nova enačba, ki ima le eno neznanko. Ako razrešiš to novo enačbo, najdeš koren ene neznanke. Drugi neznanki določiš koren, ako zameniš v eni izmed določenih enačb dotično neznanko z najdenim korenom ter razrešiš to enačbo.

Iz določenih enačb utegneš eno neznanko iztrebiti na štiri načine.

Primerjalni način = die Komparationsmethode.

a) Primerjalni način. Razreši obe enačbi z ozirom na eno in isto neznanko ter izenači dobljeni vrednosti! N. pr.

$$\begin{array}{l} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \\ \hline x = \dfrac{26 - 5y}{2}, \\ x = \dfrac{1 + 2y}{3}, \end{array} \qquad \begin{aligned} \frac{26 - 5y}{2} &= \frac{1 + 2y}{3} \\ 78 - 15y &= 2 + 4y \\ -19y &= -76 \\ y &= 4. \\ x &= \frac{1 + 8}{3} = 3. \end{aligned}$$

Zamenjalni način = die Substitutionsmethode.

b) Zamenjalni način. Določi eni neznanki vrednost iz ene enačbe ter postavi to vrednost v drugo enačbo namesto dotične neznanke! N. pr.

$$\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 6x - 5y = 14 \\ \hline x = 8 - 2y, \end{array} \qquad \begin{aligned} 6(8 - 2y) - 5y &= 14 \\ 48 - 17y &= 14 \\ -17y &= -34 \\ y &= 2. \\ x &= 8 - 4 = 4. \end{aligned}$$

Način enakih koeficientov = Methode der gleichen Koëffizienten.

c) Način enakih koeficientov. Napravi eni in isti neznanki enaka koeficienta (najmanjši skupni mnogokratnik prvotnih koeficientov) v obeh enačbah ter seštej pretvorjeni enačbi, oziroma odštej eno od druge! Koeficienta napraviš enaka, ako pomnožiš vsako enačbo s primernim faktorjem. Pretvorjeni enačbi seštefeš, ako sta enaka koeficienta različno zaznamovana, drugače pa odšteješ enačbo od enačbe. N. pr.

$$\begin{array}{rl} 7x + 6y = 27 & \times 3 \\ 13x + 9y = 48 & \times 2 \\ \hline 21x + 18y = 81 & \\ 26x + 18y = 96 & \\ \hline -5x = -15 & \\ x = 3. & \end{array} \qquad \begin{aligned} 21 + 6y &= 27 \\ 6y &= 6 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

d) Način nedoločenih koeficientov. Pomnoži eno enačbo z nedoločenim številom m ter jo prištej drugi enačbi! Ako izbereš v novi enačbi vrednost za m tako, da postane koeficient neznanke y enak ničli, dobiš enačbo, iz katere določiš koren za x; če pa izbereš vrednost za m tako, da postane koeficient neznanke x enak ničli, dobiš enačbo, iz katere določiš koren za y. N. pr. Iz enačb

Način nedoločenih koeficientov = Methode der unbestimmten Koëffizienten.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 24 \\ 5x - 3y &= 11 \end{aligned}$$

najdeš na navedeni način

$$(3m + 5)\,x + (4m - 3)\,y = 24m + 11.$$

Ako je $4m - 3 = 0$, torej $m = \frac{3}{4}$, najdeš

$$\begin{aligned} (3 \cdot \tfrac{3}{4} + 5)\,x &= 24 \cdot \tfrac{3}{4} + 11 \\ \tfrac{29}{4}\,x &= 29 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Če je pa $3m + 5 = 0$, torej $m = -\frac{5}{3}$, najdeš

$$\begin{aligned} (-\tfrac{20}{3} - 3)\,y &= -40 + 11 \\ -\tfrac{29}{3}\,y &= -29 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Kateri izmed navedenih načinov je pri določeni nalogi najprimernejši, spoznaš iz koeficientov, katera imata neznanki v urejenih enačbah. Drugi in tretji način se rabita največkrat.

Včasih moraš obratni vrednosti neznank ali kaki drugi številni zvezi smatrati za neznanki. Tako n. pr. je treba v enačbah

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y-1}=13 \text{ in } \frac{5}{x}-\frac{2}{y-1}=4$$

številna izraza $\frac{1}{x}=z$ in $\frac{1}{y-1}=u$ smatrati za neznanki. Vrednosti teh izrazov najdeš tako-le:

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{x}+\frac{6}{y-1}&=26\\ \frac{15}{x}-\frac{6}{y-1}&=12\end{aligned}\right\}\text{sešteto}$$

$$\frac{19}{x}=38$$

$$\frac{1}{x}=2.$$

$$4+\frac{3}{y-1}=13$$

$$\frac{3}{y-1}=9$$

$$\frac{1}{y-1}=3.$$

ali pa:

$$4z+6u=26$$

$$15z-6u=12$$

$$19z=38$$

$$z=2.$$

$$4+3u=13$$

$$3u=9$$

$$u=3.$$

Iz vrednosti $\frac{1}{x}=2$ in $\frac{1}{y-1}=3$ določiš $x=\frac{1}{2}$ in $y=1\frac{1}{3}$.

Kdaj imata dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama samo eno razrešitev.

Ako razrešiš enačbi

$$ax+by=c \quad \text{in} \quad a_1x+b_1y=c_1,$$

najdeš korena

$$x=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b} \text{ in } y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}.$$

Vrednosti za x in y sta določeni števili, ako je imenovalec ab_1-a_1b različen od ničle. Če je pa $ab_1-a_1b=0$, torej $a_1=\frac{ab_1}{b}$, najdeš, če postaviš vrednost za a_1 v drugo zgoraj navedeno enačbo

$$\frac{ab_1}{b}x+b_1y=c_1 \quad \text{ali} \quad ax+by=\frac{bc_1}{b_1}.$$

Ako je $\frac{bc_1}{b_1} = c$, je druga navedena enačba identična s prvo (se da izvesti iz prve) in enačbena korena dobita v tem slučaju nedoločeno obliko $\frac{0}{0}$; če je pa izraz $\frac{bc_1}{b_1}$ različen od c, si nasprotujeta navedeni enačbi, ker je namreč $ax + by = c$ in $ax + by = \frac{bc_1}{b_1}$.

Iz navedenega izvajamo:

Dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama imata eno razrešitev (eno skupno dvojico korenov), če nista odvisni druga od druge ali če si nista nasprotni.

Kako se razrešujejo enačbe prve stopnje s tremi neznankami.

III. Urejena enačba prve stopnje s tremi neznankami ima obliko

$$ax + by + cz = d.$$

Vsaka taka enačba ima brez števila razrešitev; zakaj dvema neznankama smeš izbrati katerakoli korena, tretji neznanki pa izračunaš koren iz določene enačbe. Tudi dve enačbi s tremi neznankami imata brez števila razrešitev, ker smeš eni neznanki izbrati katerikoli koren. Naloga postane popolnoma določena, ako imaš tri enačbe s tremi neznankami. V tem slučaju najdeš vsaki neznanki le en koren, če niso enačbe odvisne, oziroma nasprotne druga drugi.

Tri enačbe s tremi neznankami razrešiš tako-le. Ako iztrebiš iz določenih enačb eno neznanko, dobiš dve novi enačbi z dvema neznankama, katerima najdeš skupno korensko dvojico po prejšnjih pravilih. Ako zameniš potem v eni izmed prvotnih enačb dotični neznanki z najdenima korenoma, dobiš enačbo, iz katere izračunaš koren tretje neznanke. Kar se tiče iztrebljevanja ene neznanke iz treh enačb, služijo nam isti načini, po katerih smo se ravnali pri razreševanju enačb z dvema neznankama. Primerjaj razrešene naloge!

Ako je treba razrešiti štiri ali več enačb s štirimi ali več neznankami, postopaš slično.

Naloge.

a)

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 26 \\ 3x - 4y &= 6 \\ 5y - 6z &= 18 \end{aligned}$$

$$x = \frac{26 - 3z}{2}$$

$$x = \frac{6 + 4y}{3}$$

$$\frac{6 + 4y}{3} = \frac{26 - 3z}{2}$$

$$12 + 8y = 78 - 9z$$

$$8y + 9z = 66$$

$$\begin{aligned} 8y + 9z &= 66 \quad | \times 2 \\ 5y - 6z &= 18 \quad | \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16y + 18z &= 132 \\ 15y - 18z &= 54 \end{aligned}$$

$$31y = 186$$

$$y = 6.$$

$$30 - 6z = 18$$

$$z = 2.$$

$$2x + 6 = 26$$

$$x = 10.$$

b)

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 10 \\ 6x + y + 7z &= 29 \\ x + 5y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$x = 5 - 5y + 2z$$

$$\begin{aligned} 3(5 - 5y + 2z) - 4y + 5z &= 10 \\ 6(5 - 5y + 2z) + y + 7z &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -19y + 11z &= -5 \quad | \times 19 \\ -29y + 19z &= -1 \quad | \times 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -361y + 209z &= -95 \\ -319y + 209z &= -11 \end{aligned}$$

$$-42y = -84$$

$$y = 2.$$

$$-38 + 11z = -5$$

$$11z = 33$$

$$z = 3.$$

$$x = 5 - 10 + 6 = 1.$$

c)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 5 \quad | \times 6 \\ 6x - 7y + 8z &= 9 \quad | \times 3 \\ 10x + 11y + 12z &= 13 \quad | \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x + 18y + 24z &= 30 \\ 18x - 21y + 24z &= 27 \\ 20x + 22y + 24z &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x + 39y &= 3 \\ -2x - 43y &= 1 \quad | \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x + 39y &= 3 \\ -6x - 129y &= 3 \end{aligned}$$

$$168y = 0$$

$$y = 0.$$

$$-6x = 3$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

$$-1 + 4z = 5$$

$$4z = 6$$

$$z = \frac{3}{2}.$$

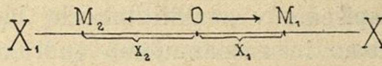
§ 30. Določanje točkine lege in načrtavanje linearne funkcije.

Določanje točkine lege v premici.

I. V vsaki premici z določeno točko O ločimo z ozirom na to točko dvojno smer: 1. smer od točke O na desno (oziroma navzgor) imenujemo pozitivno smer ter jo zaznamujemo z znakom $+$, 2. smer od točke O na levo (oziroma navzdol) pa zovemo negativno smer in jo zaznamujemo z znakom $-$.

Odsečnica in os odsečnic.

Slika I.



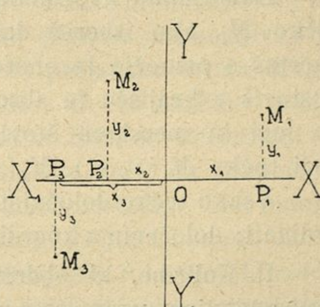
Lego točk M_1, M_2... v premici X_1X (slika I.) z ozirom na točko O določimo popolnoma natanko, ako povemo, kakšno lego imajo daljice OM_1, OM_2... z ozirom na točko O in kolika so njih merska števila. Daljice OM_1, OM_2... se imenujejo odsečnice ali abscise točk M_1, M_2..., premica X_1X se zove os odsečnic ali abscis in točka O je njih izhodišče ali začetek.

Zaznamovanje odsečnic.

Abscise točk M_1, M_2... zaznamujemo z x_1, x_2...; v vsakem teh znamenj se nahaja znak o legi in mersko število dotične daljice. Tako n. pr. izrazimo z absciso x_1 dolgost daljice OM_1 in da je ta daljica pozitivna; z absciso x_2 izrazimo dolgost daljice OM_2 in da je ta daljica negativna. Razdalja točk M_1 in M_2 je torej $= x_1 - x_2$ ali pa $= x_2 - x_1$; prva razdalja je pozitivna, druga negativna.

Določanje točkine lege v ravnini. Pravokotno soredje = das rechtwinklige Koordinatensystem. Os odsečnic ali odsečnična os = die Abszissenachse. Os rednic ali rednična os = die Ordinatenachse. Soredniční osi = die Koordinatenachsen.

Slika II.



Če pa točke M_1, M_2, M_3... ne leže v eni in isti premici, toda v eni in isti ravnini, izberemo si v ravnini teh točk za podlago dve sekajoči se premici X_1X in Y_1Y, ki stojita pravokotno druga na drugi in tvorita skupaj pravokotno soredje (slika II.). Premica X_1X se zove os odsečnic ali abscis (odsečnična ali abscisna os), premica Y_1Y pa os rednic ali ordinat (redničnа ali ordinatna os); obe premici skupaj se imenujeta soredniční ali koordinatni osi. Abscisna os je v smeri od O proti X (na desno) pozitivna, v smeri od O proti X_1 (na levo) pa negativna. Ordinatna os je v smeri od O proti Y (navzgor) pozitivna, v smeri od O proti Y_1 (navzdol) pa negativna.

Sorednici = die Koordinaten. Odsečnica = die Abszisse. Rednica = die Ordinate.

Ako načrtamo od točke M_1 (slika II.) vzporednico z ordinatno osjo do abscisne osi, dobimo daljici M_1P_1 in OP_1, ki določujeta lego točke M_1 in se zoveta sorednici ali koordinati točke M_1. Daljica $OP_1 = x_1$ je odsečnica ali abscisa, daljica $P_1M_1 = y_1$ pa rednica ali ordinata točke M_1. Da sta x_1 in y_1 koordinati točke M_1, zapišemo v znakih tako-le $M_1(x_1, y_1)$. Na isti način najdemo in zaznamujemo tudi koordinate točk M_2, M_3 ..., v znakih $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ ...

Koordinatno izhodišče ali koordinatni začetek = der Koordinatenursprung oder Koordinatenanfang.

Presečišče O koordinatnih osi se imenuje koordinatno izhodišče ali koordinatni začetek.

Predznak koordinat.

Točkini koordinati sta pozitivni, kadar ležita v smeri pozitivnih delov koordinatnih osi (abscisa na desni od koordinatnega začetka, ordinata pa nad abscisno osjo), sicer pa sta negativni. Tako ima n. pr. točka M_1 pozitivno absciso (x_1) in pozitivno ordinato (y_1); točka M_2 ima negativno absciso (x_2) in pozitivno ordinato (y_2); točka M_3 ima negativno absciso (x_3) in negativno ordinato (y_3) i. t. d.

Koordinate znanih ali določenih točk zaznamujemo navadno na ta način, kakor smo zaznamovali koordinate točk M_1, M_2, M_3 ...; koordinate neznanih ali nedoločenih točk M pa zaznamujemo z x in y, v znakih $M(x, y)$.

Kako poiščeš določenima koordinatama pripadajočo točko.

Določenima koordinatama x_1 in y_1 poiščeš pripadajočo točko M_1, ako izbereš daljico za enoto dolgostne mere, načrtaš s pomočjo te enote na abscisni osi absciso x_1 ter postaviš v krajišču te abscise pravokotnico, ki odgovarja po legi in merskem številu ordinati y_1. Istotako najdeš tudi točke $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ ...

Vsako točko določujeta popolnoma natanko njeni koordinati; določenima koordinatama pripada samo ena točka.

Stalnica = die Konstante. Premenljivka = die Variable.

II. Količine, ki obdržijo med računanjem ali kakem preiskavanjem vedno iste vrednosti, se imenujejo nepremenljive ali stalne količine (stalnice); količine pa, ki izpreminjajo svoje vrednosti, se zovejo premenljive količine (premenljivke). Stalnice in premenljivke se zaznamujejo kakor znanke in neznanke v enačbah. Medsebojno zvezo med stalnicami in premenljivkami izražajo enačbe.

Premenljivke so neodvisne in odvisne. Neodvisna je premenljivka, če smemo za njo postaviti vsakršno vrednost, ki se strinja z bistvom premenljivke; odvisna pa je premenljivka, ako določa njeno vrednost kaka druga premenljivka. Tako n. pr. pripada v enačbi $y = 2x - 3$ vsaki posebni vrednosti premenljivke x popolnoma določena vrednost premenljivke y; x je torej neodvisna, y pa odvisna premenljivka. Vsaka odvisna premenljivka se zove tudi funkcija, t. j. v navedenem primeru vrednost izraza $2x - 3$, katerega smo zaznamovali z y. Funkcija se imenuje linearna ali prve stopnje, če se nahaja premenljivka le v prvi potenci. Tako je n. pr. številni izraz $ax + b$ ali $y = ax + b$ cela linearna funkcija premenljivke x. Da je y funkcija premenljivke x, zapišemo kratko tako le: $y = f(x)$ ali $y = \varphi(x)$ ali $y = F(x)$ i. t. d.

Neodvisna in odvisna premenljivka.
Funkcija = die Funktion.
Linearna funkcija = lineare Funktion.

Včasih nima linearna funkcija take razvite oblike kakor $y = ax + b$, ampak se nahaja kakor neznanka v enačbi, iz katere je treba funkcijsko vrednost šele določiti. Tako smemo n. pr. v enačbi $2x + 3y - 5 = 0$ neznanko y smatrati za x-ovo funkcijo. Take funkcije se zovejo nerazvite funkcije.

Razvita in nerazvita funkcija = explizite und implizite Funktion.

Vsaka enačba prve stopnje s premenljivkama x in y ima po prejšnjem paragrafu neizrečeno veliko razrešitev; kajti za vsako posebno vrednost neodvisne premenljivke x se da iz enačbe določiti vrednost za odvisno premenljivko y. Dve taki vrednosti za x in y, ki pripadata druga drugi, tvorita dvojico enačbenih korenov. Če si mislimo vsako dvojico enačbenih korenov kakor točkini koordinati z ozirom na določeno soredje, smemo reči, da predočuje vsaka razrešitev dotične enačbe določeno točko. Čim manje se razlikujejo zaporedne vrednosti, ki jih izberemo za x, tem manjša je tudi razlika pripadajočih funkcijskih vrednosti in tem bliže ležijo točke, ki predočujejo te razrešitve. Če preide ena razrešitev nepretrgoma v drugo, najdemo v sliki nepretrgano vrsto točk, ki tvorijo črto (funkcijsko črto). Funkcijska črta je zelo važna, ker s

Funkcijska črta = die Funktionslinie.

pomočjo te črte najlaže spoznamo in pregledamo funkcijske izpremembe.

Načrtavanje razvite linearne funkcije.

a) Linearno funkcijo $y = 2x - 3$ predočimo s sliko, ako izberemo za premenljivko x nekatere vrednosti, n. pr.

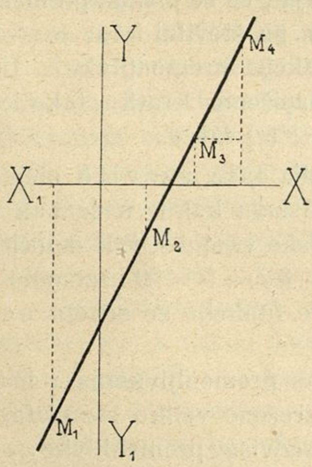
$$x = \ldots -1, 1, 2, 3 \ldots,$$

potem izračunamo pripadajoče funkcijske vrednosti

$$y = \ldots -5, -1, 1, 3 \ldots,$$

nadalje poiščemo navedenim razrešitvam ustrezajoče točke in sicer tako, kakor smo poprej razložili, in končno narišemo skoz te točke funkcijsko črto (slika III.). Čim več točk se določi, tem laže in natančneje se da narisati funkcijska črta.

Slika III.



Izpremembe linearne funkcije.

Če postavimo v funkcijo $y = 2x - 3$ za premenljivko $x = -\infty$, najdemo funkcijsko vrednost $y = -\infty$; ako se premenljivka veča in bliža ničli (n. pr. $x = -20, -15, -8 \ldots$), se veča tudi funkcija ($y = -43, -33, -19 \ldots$); ko je premenljivka $x = 0$, je funkcijska vrednost $= -3$ (to število je drugi člen določene funkcije); ko dobi premenljivka x vrednost, ki je določena po korenu enačbe $2x - 3 = 0$ (torej $x = \frac{3}{2}$), dobi funkcija vrednost $= 0$; ako se vrednosti premenljivke večajo od $\frac{3}{2}$ naprej (n. pr. $x = 5, 9, 11 \ldots$), ostane funkcija pozitivna in dobiva vedno večje in večje vrednosti ($y = 7, 15, 19 \ldots$); ko je $x = +\infty$, je tudi $y = +\infty$. Ker smemo po navedenem za premenljivko x postaviti vsako vrednost od $-\infty$ do $+\infty$ in ker ležijo pripadajoče funkcijske vrednosti med istima mejama, raste torej funkcija $2x - 3$ od $-\infty$ do $+\infty$, če raste premenljivka x od $-\infty$ do $+\infty$; ta funkcija dobi vrednost $= 0$ samo v slučaju, ki je določen po korenu enačbe $2x - 3 = 0$. Predznak funkcijskih vrednosti se izpremeni, ko postane funkcija $= 0$. Vse te funkcijske izpremembe vidimo in spoznamo iz slike, če si natančneje ogledamo funkcijsko črto.

Funkcija $y = 2x - 3$ raste enakomerno. Od točke M_1 do M_2 (slika III.) raste premenljivka za 2 enoti, funkcija pa za 4 enote; razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{4}{2} = 2$ (t. j. funkcijski prirastek na enotnem prirastku premenljivke). Od točke M_2 do M_3, oziroma od točke M_3 do M_4 raste premenljivka po enoti, funkcija pa po 2 enoti; razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= 2$. Če si izberemo ponavljajoč druge točke v funkcijski črti, vsakokrat najdemo, da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke $= 2$. (To število se nahaja v funkciji kot koeficient premenljivke.) Iz navedenega smemo torej sklepati, da se funkcijska črta enakomerno vzdiguje in da mora biti zaraditega prema črta. Kako raste linearna funkcija.

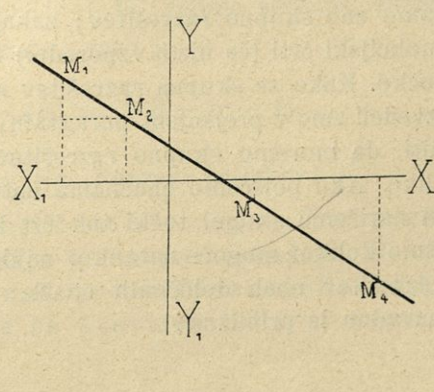
b) Pri linearni funkciji $3y + 2x = 5$ ali v razviti obliki $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ so razmere obratne od prejšnjih. Funkcijsko črto najdemo, ako poiščemo n. pr. razrešitvam: Načrtavanje nerazvite linearne funkcije.

$$x = \ldots -5, -2, \quad 4, \quad 10 \ldots$$
$$y = \ldots \quad 5, \quad 3, -1, -5 \ldots$$

pripadajoče točke in narišemo skoz te točke črto (slika IV.).

Če postavimo v funkciji $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ za premenljivko $x = -\infty$, najdemo funkcijsko vrednost $y = +\infty$; ako se premenljivka veča in bliža ničli (n. pr. $x = -20$, -17, $-11 \ldots$), se manjša funkcija ($y = 15, 13, 9 \ldots$); ko je premenljivka $x = 0$, je funkcija $= \frac{5}{3}$ (ta vrednost je drugi člen določene funkcije); ko dobi premenljivka vrednost, ki je določena po korenu enačbe $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$ (torej $x = \frac{5}{2}$) dobi funkcija vrednost $= 0$; ako se vrednosti premenljivke večajo od $\frac{5}{2}$ Izpremembe linearne funkcije.

Slika IV.



naprej ($x = 16, 22, 31\ldots$), ostane funkcija negativna in dobiva vedno manjše in manjše vrednosti ($y = -9, -13, -19\ldots$); ko je $x = +\infty$, je $y = -\infty$. Navedena funkcija se torej manjša od $+\infty$ do $-\infty$, če se veča premenljivka x od $-\infty$ do $+\infty$, in izpremeni svoj predznak v slučaju, ko postane njena vrednost $= 0$.

Kako pojema linearna funkcija.

Funkcija $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ pojema enakomerno. Od točke M_1 do M_2 (slika IV.) raste premenljivka za 3 enote, funkcija pa se zmanjša za 2 enoti (t. j. negativni prirastek 2 enot); razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$. Od točke M_2 do M_3, oziroma od točke M_3 do M_4 raste premenljivka po 6 enot, funkcijski zmanjšek pa znaša po 4 enote (t. j. negativni prirastek 4 enot); razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke je $= \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$. Če si izberemo ponavljajoč druge točke v funkcijski črti, vsakokrat najdemo, da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke $= -\frac{2}{3}$. (To število se nahaja v funkciji kot koeficient premenljivke.) Iz navedenega smemo torej sklepati, da pada funkcijska črta enakomerno in da mora biti zaraditega prema črta.

Lastnosti linearne funkcije.

Iz linearne funkcije v razviti obliki ($y = ax + b$) spoznamo trojno: 1. da funkcija raste (pojema), če je koeficient premenljivke pozitiven (negativen); 2 da je razmerje med funkcijskim prirastkom in prirastkom premenljivke enako koeficientu premenljivke; 3. da je funkcijska vrednost enaka drugemu funkcijskemu členu, če je premenljivka $x = 0$.

Kako se razrešujejo enačbe prve stopnje s pomočjo funkcijskih črt.

Dve enačbi prve stopnje z dvema neznankama imata samo eno skupno razrešitev; zakaj enačbama pripadajoči funkcijski črti (če nista vzporedni) imata samo eno skupno točko. Kako se skupna razrešitev najde s pomočjo računa, izvedeli smo v prejšnjem paragrafu; tukaj hočemo še omeniti, da moremo skupno razrešitev tudi najti s pomočjo slike. Ako poiščemo enačbama ustrezajoči funkcijski črti in narišemo skupni točki teh črt koordinati ter ju izmerimo kolikor mogoče natanko, najdemo (približno) skupno razrešitev obeh določenih enačb. Zakaj je ta razrešitev navadno le približna?

§ 31. Uporaba enačb prve stopnje.

Marsikatere naloge iz aritmetike, geometrije in vsakdanjega življenja se dadó razrešiti s pomočjo določilnih enačb. V to svrho izbereš občno število, n. pr. x, y ali z, kakor znamenje za tisto število, katerega iščeš, ter napraviš s tem številom vse tiste izpremembe, ki se zahtevajo v nalogi. Na ta način najdeš dva številna izraza, ki sta po pogoju naloge enaka. Ako izenačiš ta izraza, stvoriš enačbo, katero je treba razrešiti. Preizkus napraviš, ako preiščeš, ali ustreza najdeni koren vsem pogojem naloge. Včasih se mora najdeni koren (posebno če je izražen z občnimi števili ali pa negativen) tudi raztolmačiti, t. j. določiti se mora, ali imajo negativni, oziroma ulomljeni koreni v dotičnem slučaju kakšen pomen, ali so brez pomena, in pod katerimi pogoji sploh je naloga mogoča. Kako je treba pri stvarjanju enačbe ravnati v posameznih slučajih, spoznaš iz naslednjih razrešenih nalog. Kako se tvorijo enačbe.

Naloge.

1. Pri katerem številu je polovica, tretjina in četrtina skupaj za toliko večja od 163, za kolikor je dotično število, povečano za 1, manjše od 163? Razmere med števili = Beziehungen zwischen Zahlen.

Razrešitev. Število, katerega iščeš, je x; polovica, tretjina in četrtina tega števila skupaj znaša $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$; za kolikor je ta vsota večja od 163, pove izraz $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-163$; za kolikor je število x, povečano za 1, manjše od 163, pove izraz $163-(x+1)$. Zadnja številna izraza sta po pogoju naloge enaka; zato je

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-163=163-(x+1).$$

Iz te enačbe najdeš $x=156$. Napravi preizkus!

2. Če povečaš določeno število za 7, najdeš mnogokratnik števila 4; če pa zmanjšaš 74 za dotično število, najdeš istotolik mnogokratnik števila 5. Katero je to število?

Razrešitev. Število, katerega iščeš, je x; številna izraza $x+7$ in $74-x$ sta po pogoju naloge istotolika mnogokratnika števil 4 in 5, v znakih $x+7=4n$ in $74-x=5n$. Ako deliš navedeni enačbi drugo z drugo, iztrebiš n in potem najdeš $x=29$.

3. Določi dve števili z lastnostima: če deliš prvo število z drugim, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 7; če pa deliš vsoto obeh števil z njuno razliko, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 5.

Razrešitev. Števili, kateri iščeš, sta x in y. Delitveni ostanek je treba deliti z divizorjem. Po pogoju naloge je torej

$$\frac{x}{y}=2+\frac{7}{y} \text{ in } \frac{x+y}{x-y}=2+\frac{5}{x-y}.$$

Iz teh enačb najdeš $x=31$ in $y=12$.

4. Izrazi ulomek $\frac{5a+13}{a^2+5a+6}$ kakor vsoto dveh ulomkov!

Razrešitev. Ako razstaviš imenovalec a^2+5a+6 določenega ulomka na faktorja, najdeš imenovalca novih ulomkov; števca teh ulomkov sta x in y. Torej je

$$\frac{5a+13}{a^2+5a+6}=\frac{x}{a+2}+\frac{y}{a+3}.$$

Ako odpraviš iz te enačbe ulomke in urediš drugi enačbeni del po isti glavni količini, po kateri je urejen prvi enačbeni del, najdeš pogojno enačbo

$$5a+13=(x+y)a+(3x+2y),$$

iz katere sledi, da mora biti $x+y=5$ in $3x+2y=13$. Iz zadnjih dveh enačb naješ $x=3$ in $y=2$.

5. Ako odbiješ peteroštevilčnemu številu zadnjo številko 4 ter jo postaviš pred ostalo število, najdeš novo število, ki je za 16 večje od dvakratnika prvotnega števila. Katero je to število?

Razrešitev. Peteroštevilčno število ima 4 enice, ostali del tega števila pa je x, ki ima mestno vrednost desetic; torej je peteroštevilčno število $= 10x + 4$. Če postaviš 4 enice pred x, dobijo 4 mestno vrednost desettisočic, x pa mestno vrednost enic; drugo peteroštevilčno število je torej $= 40000 + x$. Po pogoju naloge je $(40000 + x) - 16 = 2(10x + 4)$. Iz te enačbe najdeš $x = 2104$; prvotno peteroštevilčno število je 21044

6. Četveroštevilčno število ima 3 tisočice in 5 desetic; ako zameniš stotice z enicami, najdeš število, ki je za 396 večje od prvotnega; številčna vsota iz tisočic in desetic je enaka številčni vsoti iz stotic in enic. Katero je to število?

Razrešitev. Četveroštevilčno število ima x enic in y stotic; torej je $= 3000 + 100y + 50 + x$. Če zameniš stotice in enice med seboj, najdeš novo četveroštevilčno število $= 3000 + 100x + 50 + y$. Po pogoju naloge je

$$(3000 + 100x + 50 + y) - 396 = 3000 + 100y + 50 + x$$

$$\text{in} \quad x + y = 3 + 5.$$

Iz teh enačb najdeš $x = 6$ in $y = 2$. Prvotno četveroštevilčno število je $= 3256$.

---

7. V desnem žepu imam 3krat toliko denarja kakor v levem; če denem 50 K iz desnega žepa v levega, imam v levem žepu 3krat toliko denarja kakor v desnem. Koliko denarja imam v vsakem žepu?

Razrešitev. V desnem žepu imam $3x$, v levem pa x kron; če denem 50 K iz desnega žepa v levega, imam v desnem $(3x - 50)$, v levem pa $(x + 50)$ kron. Ker imam sedaj v levem žepu 3krat toliko denarja kakor v desnem, mora torej tretji del od $(x + 50)$ kron biti enak $(3x - 50)$ kron, v znakih $\frac{x+50}{3} = 3x - 50$. Iz te enačbe najdeš $x = 25$. V desnem žepu imam 75, v levem 25 kron.

8. A bo čez 10 let $3\frac{1}{2}$ krat toliko star, kakor je bil pred 10 leti; koliko je sedaj star?

Razrešitev. A je sedaj x let star; čez 10 let bo $(x + 10)$ let star; pred 10 leti je bil $(x - 10)$ let star. Po pogoju naloge je $\frac{x + 10}{3\frac{1}{2}} = x - 10$. Iz te enačbe najdeš $x = \overset{20}{18}$.

9. Neka družba hoče nabrati v dobrodelen namen določeno vsoto denarja; če da vsaka oseba 8 K, se nabere 50 K več, nego je treba; če pa da vsaka oseba le 5 K, se nabere 25 K premalo. Koliko oseb je v družbi?

Razrešitev. V družbi je x oseb; vsota, katero je treba nabrati, je v prvem slučaju $= (8x - 50)$ kron, v drugem pa je $(5x + 25)$ kron. Ker sta navedena izraza enaka po pogoju naloge, najdeš $x = 25$.

10. Igralec izgubi v prvi igri tretjino svojega denarja in 1 K; v drugi igri izgubi tretjino ostanka in 1 K; v tretji igri izgubi tretjino novega ostanka in 1 K; če mu ostane po tretji igri še 5 K, koliko je imel sprva?

Razrešitev. Igralec ima sprva x kron. V prvi igri izgubi $\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ krono; torej mu ostane $x - \left(\frac{x}{3} + 1\right) = \left(\frac{2x}{3} - 1\right)$ krona. V drugi igri izgubi $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + 1\right]$ krono; torej mu ostane $\left(\frac{2x}{3} - 1\right) - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + 1\right] = \left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right)$ krone. V tretji igri izgubi $\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) + 1\right]$ krono; torej mu ostane $\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - \frac{5}{3}\right) + 1\right] = \left(\frac{8x}{27} - \frac{19}{9}\right)$ krone. Zadnji ostanek je po pogoju naloge $= 5$ K. Iz enačbe $\frac{8x}{27} - \frac{19}{9} = 5$ najdeš $x = 24$.

Obrestni in odstotni računi = Zinsen- und Prozentrechnungen.

11. Trgovec proda blago s 14% izgubo za 731 K; *a)* za koliko je kupil blago? *b)* za koliko bi moral prodati blago, da bi imel 12% dobička?

Razrešitev. Izguba, oziroma dobiček se računa od kupne cene istotako kakor obresti od določenega kapitala.

a) Trgovec je kupil blago za x kron.

Kupna cena — izguba = prodajalna cena, t. j. v znakih $x - \frac{14x}{100} = 731$; iz te enačbe najdeš $x = 850$.

b) Trgovec bi moral prodati blago za y kron.

Kupna cena + dobiček = prodajalna cena, t. j. v znakih $850 + \frac{850 \cdot 12}{100} = y$; iz te enačbe najdeš $y = 952$.

12. Trgovec kupi za 600 K sukna; od tega sukna proda 50 m s 25% dobičkom in ostanek z 8% izgubo ter ima pri prodaji vsega sukna 1 K 50 h dobička. Koliko metrov sukna je kupil?

Razrešitev. Trgovec je kupil x metrov sukna; za 1 meter je plačal $\frac{600}{x}$ K. Prodal je 50 m sukna z dobičkom, $(x - 50)$ metrov pa v izgubo. Dobiček pri 1 m znaša $\frac{\frac{600}{x} \cdot 25}{100} = \frac{150}{x}$ K; dobiček pri 50 m je $= \frac{150}{x} \cdot 50$ K. Izguba pri 1 m znaša $\frac{\frac{600}{x} \cdot 8}{100} = \frac{48}{x}$ K; izguba pri $(x - 50)$ metrih je $= \frac{48}{x}(x - 50)$ K. Po nalognem pogoju je razlika med dobičkom in izgubo $= 1 \cdot 5$ K, t. j. v znakih $\frac{150}{x} \cdot 50 - \frac{48}{x}(x - 50) = 1 \cdot 5$. Iz te enačbe najdeš $x = 200$.

13. Zaradi slabe kupčije se odpusti v tovarni 140 delavcev in ostalim se zniža dnina za 15%; na ta način se doseže, da znaša dnina za vse delavce le polovico prejšnje dnine. Koliko delavcev je bilo sprva v tovarni?

Razrešitev. Sprva je bilo x delavcev v tovarni; vsak delavec je zaslužil na dan y kron; torej je znašala dnina za vse delavce xy kron. Ko so se nekateri delavci odpustili, je znašala dnina za vsakega delavca $y - \frac{15y}{100} = \frac{85y}{100}$ kron, za vse ostale delavce pa $\frac{85y}{100}(x - 140)$ kron. Po nalognem pogoju je zadnja dnina enaka polovici prejšnje dnine, t. j. v znakih $\frac{85y}{100}(x - 140) = \frac{xy}{2}$. Iz te enačbe najdeš $x = 340$.

14. A in B podedujeta skupaj 16000 K; A naloži svojo dedščino za 2% višje nego B in dobi 30 K več letnih obresti ko B. Če bi A naložil svojo dedščino le za 1% višje nego B, bi dobil 5 K manj obresti ko B. Koliko je podedoval vsak in po koliko odstotkov je naložil svoj denar?

Razrešitev. A je podedoval x kron, B pa $(16000 - x)$ kron; A je naložil svoj denar po $y\%$, B pa po $(y - 2)\%$. Razlika med A-evimi in B-evimi letnimi obrestmi je po nalognem pogoju $= 30$ kron, t. j. v znakih

$$\frac{xy}{100} - \frac{(16000 - x)(y - 2)}{100} = 30.$$

Če bi bil A naložil svoj denar po $(y - 1)\%$, bi bila razlika med B-evimi in A-evimi letnimi obrestmi $= 5$ kron, v znakih

$$\frac{(16000 - x)(y - 2)}{100} - \frac{x(y - 1)}{100} = 5.$$

Ako seštevši navedeni enačbi, najdeš $x = 3500$; potem je $y = 2\frac{4}{9}$. A je torej podedoval 3500 K in naložil svoj denar po $2\frac{4}{9}\%$, B pa je podedoval 12500 K in naložil svoj denar po $\frac{4}{9}\%$.

15. A mora plačati čez 7 mesecev 2000 K in čez 11 mesecev 1000 K; plača pa 500 K kakor prvi obrok, 2 meseca pozneje 600 K, 3 mesece pozneje 800 K in 4 mesece pozneje 1100 K. Kdaj je plačal prvi obrok?

Razrešitev. A plača prvi obrok čez x mesecev, drugega čez $(x + 2)$ meseca, tretjega čez $(x + 5)$ in četrtega čez $(x + 9)$ mesecev. Obresti obrokov po $p\%$ v prvem in drugem slučaju morajo biti enake, t. j. v znakih

$$\frac{2000 \cdot p \cdot 7}{1200} + \frac{1000 \cdot p \cdot 11}{1200} = \frac{500 \cdot p \cdot x}{1200} + \frac{600 \cdot p (x + 2)}{1200} +$$
$$+ \frac{800 \cdot p \cdot (x + 5)}{1200} + \frac{1100 \cdot p \cdot (x + 9)}{1200}.$$

Ta enačba se da okrajšati s $\frac{100 \cdot p}{1200}$; potem najdeš $x = 3 \cdot 3$.

16. A mora plačati čez 1 leto 5000 K; plača pa toliko takoj, da sme ostanek poravnati v dveh enakih obrokih, in sicer prvi obrok čez 14 mesecev, drugega pa čez 18 mesecev. Koliko plača takoj?

Razrešitev. A plača x kron takoj, $\frac{5000-x}{2}$ kron čez 14 mesecev in $\frac{5000-x}{2}$ kron čez 18 mesecev. Kar se plača gotovo, ne da nobenih obresti; torej je

$$\frac{5000 \cdot p \cdot 12}{1200} = \frac{5000-x}{2} \cdot \frac{p}{1200} \cdot 14 + \frac{5000-x}{2} \cdot \frac{p}{1200} \cdot 18.$$

Iz te enačbe najdeš $x = 1250$.

17. Menica, ki doteče 24. junija, se proda 1. majnika z 8% diskontom za 913·9 K; na katero vsoto se glasi menica?

Razrešitev. Dolg na menici znaša x kron; od tega dolga se računa diskont (sicer nepravilno) kakor obresti po pravilu za dneve. Dnevi se štejejo po koledarju; dan, katerega se kupi, oziroma proda menica, se ne šteje; od 1. majnika od 24. junija je torej 54 dni. Dolg — diskont = gotovo plačilo, t. j. v znakih $x - \frac{x \cdot 8 \cdot 54}{36000} = 913 \cdot 9$. Iz te enačbe najdeš $x = 925$.

Delitev po določenih pogojih. Zmesni računi = Mischungsrechnungen.

18. Razdeli 6300 K med štiri osebe tako, da dobi A tolikokrat po 2 K kakor B po 3 K, C tolikokrat po 5 K kakor B po 4 K in D tolikokrat po 7 K kakor C po 6 K; koliko dobi vsaka oseba?

Razrešitev. Deleži posameznih oseb so zaporedoma x, y, z in u. Po pogojih naloge je $x + y + z + u = 6300$, $x : y = 2 : 3$, $z : y = 5 : 4$ in $u : z = 7 : 6$. Iz teh enačb najdeš $x = 960$, $y = 1440$, $z = 1800$, $u = 2100$. (Zamenjalni način je najpripravnejši.)

19. Trgovec zmeša dve vrsti blaga, kilogram po 1 K 20 h in po 80 h, ter napravi 80 kg po 90 h; koliko mora vzeti blaga od vsake vrste?

Razrešitev. Blago, ki se zmeša, je toliko vredno, kolikor velja zmes. Od prve vrste blaga vzameš x kilogramov, od druge pa $(80 - x)$ kilogramov. Blago prve vrste velja $x$krat po 120 h, blago druge vrste $(80 - x)$krat po 80 h, zmes 80krat po 90 h; torej je $120x + 80(80 - x) = 90 \cdot 80$. Iz te enačbe najdeš $x = 20$. Od prve vrste blaga vzameš 20 *kg*, od druge pa 60 *kg*.

20. *A* zmeša 4 hektolitre 80% in 3 hektolitre 60% špirita ter prilije toliko vode, da postane špirit 50%; koliko vode je prilil?

Razrešitev. Če je n. pr. špirit 80% (80procenten), je v vsakem hektolitru (oziroma litru) 80 delov alkohola. Špirit, ki se zmeša, ima skupaj toliko delov alkohola, kolikor jih je v zmesi; v vodi, ki jo priliješ, ni alkohola. Pri navedeni nalogi se prilije x hektolitrov vode. Iz enačbe $80 \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 50(4 + 3 + x)$, ki pove, koliko delov alkohola je v obojnem špiritu, ki se zmeša, in koliko v zmesi, najdeš $x = 3$.

21. Koliko bakra moraš zliti s 13 *kg* srebra, ki ima 0·9 čistine, da napraviš srebro s čistino 0·52?

Razrešitev. Ako ima srebro 0·9 čistine, je v vsakem kilogramu (oziroma gramu) 0·9 *kg* (*g*) čistega srebra. Kovini, kateri zliješ, imata skupaj toliko čistega srebra, kolikor ga je v zlitini; v bakru, ki ga prideneš, ni čistega srebra. Pri navedeni nalogi vzameš x kilogramov bakra; zlitina tehta $(13 + x)$ *kg*. Iz enačbe $0{\cdot}9 \cdot 13 = 0{\cdot}52(13 + x)$, ki pove, koliko kilogramov čistega srebra je v kovinah, ki ju zliješ, in koliko v zlitini, najdeš $x = 9{\cdot}5$.

22. Srebrar potrebuje 50 *kg* srebra po 0·8 čistine. V to svrho zlije 10 *kg* srebra po 0·85 čistine s srebrom po 0·95 in 0·7 čistine; koliko srebra druge in tretje vrste mu je treba?

Razrešitev. Srebrar vzame x kilogramov srebra druge vrste in $50 - 10 - x = (40 - x)$ *kg* srebra tretje vrste. Po prejšnjih pojasnilih stvoriš enačbo

$$0{\cdot}8 \cdot 50 = 0{\cdot}85 \cdot 10 + 0{\cdot}95x + 0{\cdot}7(40 - x),$$

iz katere najdeš $x = 14$.

23. Zlata verižica tehta na zraku 196 g, pod vodo pa 12 g manj; koliko zlata in srebra je v verižici, če je specifična teža zlata 19·25 in specifična teža srebra 10·5?

Razrešitev. V verižici je x gramov zlata in y gramov srebra, torej je $x + y = 196$. Ker tehta verižica pod vodo 12 g manj, mora po prirodoslovnem zakonu (Arhimedovem načelu) zavzemati 12 cm^3 prostornine. Vsak kubični centimeter zlata tehta 19·25 g; x gramov zlata zavzema torej toliko kubičnih centimetrov, kolikorkrat se 19·25 g nahaja v x gramih, t. j. $\frac{x}{19 \cdot 25} cm^3$. Vsak kubični centimeter srebra tehta 10·5 g; y gramov srebra zavzema torej toliko kubičnih centimetrov, kolikorkrat se 10·5 g nahaja v y gramih, t. j. $\frac{y}{10 \cdot 5} cm^3$. Kovini, ki sestavljata zlato verižico, zavzemata skupaj (približno) toliko prostornine kolikor verižica; zato je $\frac{x}{19 \cdot 25} + \frac{y}{10 \cdot 5} = 12$. Iz navedenih enačb najdeš $x = 154$ in $y = 42$.

24. Medninar ima 13 dm^3 rumene medi, ki tehta 105·47 kg; koliko bakra in cinka je v tej zlitini, ako je specifična teža bakra 8·895 in specifična teža cinka 6·862?

Razrešitev. V navedeni zlitini je x kilogramov bakra in y kilogramov cinka. Istotako kakor v prejšnji nalogi stvoriš enačbi

$$x + y = 105 \cdot 47 \text{ in } \frac{x}{8 \cdot 895} + \frac{y}{6 \cdot 862} = 13,$$

iz katerih najdeš $x = 71 \cdot 16$ in $y = 34 \cdot 31$.

25. Zlatar ima tri zlate palice. Prva palica je sestavljena iz 650 delov zlata, 220 delov srebra in 130 delov bakra, druga palica iz 700 delov zlata, 200 delov srebra in 100 delov bakra; tretja palica iz 800 delov zlata, 150 delov srebra in 50 delov bakra. Koliko delov moraš vzeti od vsake palice, da dobiš zlitino, ki ima 685 delov zlata, 205 delov srebra in 110 delov bakra?

Razrešitev. Vsaka prvih treh palic je sestavljena iz 1000 delov. V 1 delu prve palice se nahaja $\frac{650}{1000} = 0{\cdot}65$ delov zlata, v 1 delu druge palice je $\frac{700}{1000} = 0{\cdot}7$ delov zlata, v 1 delu tretje palice je $\frac{800}{1000} = 0{\cdot}8$ delov zlata. Če vzameš za zlitino od prve palice x delov, od druge palice y delov in od tretje palice z delov, imaš povsem $0{\cdot}65x + 0{\cdot}7y + 0{\cdot}8z$ delov zlata; po pogoju naloge mora ta vsota biti $= 685$ delov zlata, ki se nahaja v zlitini. Na isti način stvoriš drugo enačbo za srebro in tretjo enačbo za baker. Potem najdeš $x = 500$, $y = 400$, $z = 100$.

26. Prazen vodnjak se da napolniti po treh cevih; prva cev ga napolni v 10 urah, druga v 12 urah, tretja v 15 urah. V katerem času napolnijo vodnjak vse tri cevi skupaj?

Razrešitev. Vodnjakovo prostornino zaznamujemo s k. Vse tri cevi skupaj napolnijo vodnjak ($= k$) v x urah. V 1 uri napolni prva cev $\frac{k}{10}$, druga $\frac{k}{12}$, tretja $\frac{k}{15}$; v x urah napolni vsaka cev $x$krat toliko kakor v 1 uri. Torej je $\frac{k}{10} \cdot x + \frac{k}{12} \cdot x + \frac{k}{15} \cdot x = k$. Iz te enačbe najdeš $x = 4$.

27. Delavca A in B dovršita neko delo v 18 dneh, A in C v 12 dneh, B in C v 9 dneh; v katerem času dovršijo isto delo vsi trije delavci skupaj?

Razrešitev. Najprej je treba določiti, v katerem času dovrši vsak delavec sam dotično delo, katero hočemo zaznamovati z d. Delavec A dovrši delo d v x dneh, delavec B v y dneh in delavec C v z dneh; v 1 dnevu dovršijo torej ti delavci $\frac{d}{x}$, $\frac{d}{y}$ in $\frac{d}{z}$. Delavca A in B dovršita v 18 dneh 18krat toliko kakor v 1 dnevu; zato je po nalognem pogoju $\frac{d}{x} \cdot 18 + \frac{d}{y} \cdot 18 = d$. Na isti način stvoriš tudi enačbi $\frac{d}{x} \cdot 12 + \frac{d}{z} \cdot 12 = d$ in $\frac{d}{y} \cdot 9 + \frac{d}{z} \cdot 9 = d$. Ako okrajšaš in razrešiš navedene enačbe, najdeš $x = 72$,

$y = 24$ in $z = 14\frac{2}{5}$. — Vsi delavci skupaj dovršijo delo d v t dneh. Istotako kakor pri prejšnji nalogi stvoriš enačbo $\frac{d}{72} \cdot t + \frac{d}{24} \cdot t + \frac{d}{14\frac{2}{5}} \cdot t = d$, iz katere najdeš $t = 8$.

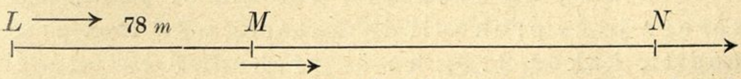
Naloge o premikanju = Bewegungsaufgaben.

Razreševanje nalog o premikanju si jako olajšaš, ako napraviš kratek, pa pregleden načrt položaja. V tem načrtu zaznamuješ in določiš, kje se začneta telesi premikati, kako daleč, kako hitro in koliko časa se premikata. Pot, katero preteče vsako telo v časovni enoti (t. j. v eni sekundi, ali v eni minuti, ali v eni uri i. t. d.), določuje hitrost premikanja. Ako primerjaš poti, kateri pretečeta telesi v določenem času, stvoriš enačbo.

28. Dve telesi, ki sta 78 m narazen, pretečeta vsako sekundo oziroma 4 m in $2\frac{1}{2}$ m; kdaj se snideta telesi, ako se začneta pomikati istodobno *a)* v isto smer, *b)* v nasprotno smer?

Razrešitev.

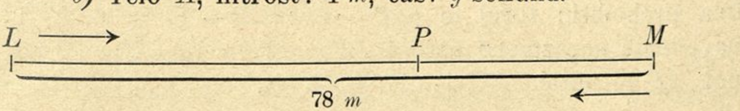
a) Telo A, hitrost: 4 m, čas: x sekund.



Telo B, hitrost: $2\frac{1}{2}$ m, čas: x sekund.

Telo A dohiti telo B v točki N čez x sekund; telo A preteče pot LN, t. j. $x$krat po 4 m; telo B preteče pot MN, t. j. $x$krat po $2\frac{1}{2}$ m. Razlika teh poti je po pogoju naloge $= 78$ m; torej je $4x - 2\frac{1}{2}x = 78$. Iz te enačbe najdeš $x = 52$.

b) Telo A, hitrost: 4 m, čas: y sekund.



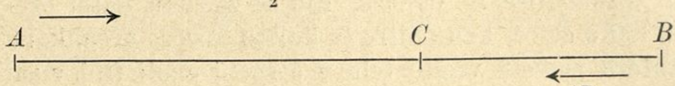
Telo B, hitrost: $2\frac{1}{2}$ m, čas: y sekund.

Telesi se srečata v točki P čez y sekund; telo A preteče pot $LP = 4y$ metrov, telo B pa pot $MP = 2\frac{1}{2}y$ metrov. Po nalognem pogoju je $4y + 2\frac{1}{2}y = 78$; iz te enačbe najdeš $y = 12$.

29. Ob šesti uri gre od kraja A proti kraju B brzovlak, ki porabi za to daljavo $3\frac{1}{2}$ ure; ob sedmi uri gre od kraja B proti A poštni vlak, ki potrebuje za to pot $5\frac{1}{4}$ ure. Kdaj se srečata vlaka?

Razrešitev.

Brzovlak, hitrost: $\frac{AB}{3\frac{1}{2}}$, čas: $(x + 1)$ uro.



Poštni vlak, hitrost: $\frac{AB}{5\frac{1}{4}}$, čas: x ur.

Vlaka se srečata v točki C. Brzovlak preteče pot $AC = \frac{AB}{3\frac{1}{2}}(x + 1)$, poštni vlak pa pot $BC = \frac{AB}{5\frac{1}{4}} \cdot x$. Po nalognem pogoju je $\frac{AB}{3\frac{1}{2}}(x + 1) + \frac{AB}{5\frac{1}{4}}x = AB$; iz te enačbe najdeš $x = 1{\cdot}5$. Vlaka se srečata ob osmi uri trideseti minuti.

30. Sel ima prehoditi razdaljo od kraja A do kraja B; ob dvanajsti uri sta si pota, katerega je že prehodil in katerega še ima prehoditi, kakor $2 : 3$; ko še prehodi 8 *km*, sta si pota, katerega je že prehodil in katerega še ima prehoditi, kakor $6 : 5$. Kako daleč je od A do B?

Razrešitev. Ob dvanajsti uri je sel v točki C; pot AC je že prehodil, pot BC še ima prehoditi. Po pogoju naloge je $AC : CB = 2 : 3$. Nekoliko časa pozneje je po pogoju naloge prehodil pot $(AC + 8)$ *km*, pot $(CB - 8)$ *km* pa še ima prehoditi; torej je $(AC + 8) : (CB - 8) = 6 : 5$. Iz navedenih sorazmerij najdeš $AC = 22$ *km* in $CB = 33$ *km*; pot AB je potem $AC + CB = 55$ *km*.

31. Kurir prehodi razdaljo od A do B v določenem času; če bi napravil vsako minuto po 3 korake več, bi prehodil dotično razdaljo 8 minut prej; če bi pa napravil vsako minuto po 12 korakov manj, bi prišel v kraj B za 36 minut

pozneje, nego bi moral priti. Koliko korakov napravi kurir vsako minuto in kako daleč je od A do B? (3 koraki = 2 metra.)

Razrešitev. Kurir napravi vsako minuto po x korakov in prehodi pot od A do B v y minutah; pot AB je torej $= xy$ korakov. Če bi kurir napravil vsako minuto po $x + 3$ (oziroma po $x - 12$) korakov, bi prehodil isto pot v $y - 8$ (oziroma v $y + 36$) minutah; torej je $AB =$ $= (x + 3)(y - 8)$, oziroma $(x - 12)(y + 36)$ korakov. Iz navedenih izrazov stvoriš enačbi, iz katerih najdeš $x = 132$ in $y = 360$. Pot $AB = 47520$ korakov $= 31680$ metrov.

32. Kdaj pokrijeta kazalca na uri med šesto in sedmo uro drug drugega? Kdaj tvorita med šesto in sedmo uro pravi kot?

Razrešitev. Kazalo na uri je razdeljeno na 60 enakih delov, ki se imenujejo minutne črte. Hitrejši kazalec preteče v 1 uri vseh 60 minutnih črt, v 1 minuti torej 1 minutno črto; počasnejši kazalec preteče v 1 uri 5 minutnih črt, v 1 minuti torej $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ minutne črte.

a) Ob šesti uri kaže hitrejši kazalec na število 12, počasnejši pa na število 6. Čez x minut pokrijeta kazalca drug drugega; med tem preteče hitrejši kazalec $x$krat po 1 minutno črto, počasnejši pa $x$krat po $\frac{1}{12}$ minutne črte. Razlika teh potov znaša toliko minutnih črt, kolikor jih je od števila 12 do števila 6 na urnem kazalu, t. j. 30 minutnih črt. Torej je $x - \frac{x}{12} = 30$; iz te enačbe najdeš $x = 32\frac{8}{11}$. Kazalca pokrijeta drug drugega $32\frac{8}{11}$ minute po šesti uri.

b) Kazalca tvorita y minut po šesti uri pravi kot. Pravi kot obsega 15 minutnih črt na kazalu. Ako prišteješ poti od števila 12 do števila 6 (t. j. 30 minutnim črtam) pot počasnejšega kazalca v y minutah ter odšteješ od te vsote pot hitrejšega kazalca v y minutah, mora razlika znašati 15 minutnih črt, v znakih $\left(30 + \frac{y}{12}\right) - y = 15$. Razliko 15 minutnih črt tudi najdeš, ako odšteješ od poti hitrejšega kazalca v y minutah pot od števila 12 do števila 6 in pot počasnejšega kazalca v y minutah, v znakih $y - \left(30 + \frac{y}{12}\right) = 15$. Iz navedenih enačb najdeš $y = 16\frac{4}{11}$ in $y = 49\frac{1}{11}$. Kazalca tvorita med šesto in sedmo uro torej dvakrat pravi kot, prvokrat $16\frac{4}{11}$ minute in drugokrat $49\frac{1}{11}$ minute po šesti uri.

33. Dve točki se pomičeta po krožnici, ki meri 840 m, v isto smer in se snideta vsakih 35 sekund; če se pa točki pomičeta v nasprotno smer, se srečata vsakih 12 sekund. Kako hitro se pomičeta točki?

Razrešitev. Točka A preteče vsako sekundo x, točka B pa y metrov. V prvem slučaju dohiti točka A točko B; točka A mora torej preteči vso krožnico in še toliko, kolikor preteče točka B; razlika teh poti je = dolgosti krožnice, v znakih $35x - 35y = 840$. V drugem slučaju se srečata točki, ko pretečeta skupaj pot 840 m, v znakih $12x + 12y = 840$. Iz teh enačb najdeš $x = 47$ in $y = 23$.

Geometrijske naloge.

34. Zunanji kot na osnovnici enakokrakega trikotnika in zunanji kot na vrhu sta si kakor 29 : 32; kolik je notranji kot na osnovnici?

Razrešitev. Zunanji kot na osnovnici je sokot notranjega kota β na osnovnici, zunanji kot na vrhu pa je dvakrat tolik kakor notranji kot na osnovnici. Po nalognem pogoju je torej $(180^0 - \beta) : 2\beta = 29 : 32$; iz tega sorazmerja najdeš $\beta = 64^0$.

35. Obsrediščna kota dveh enakih krogovih izsekov, katerima znašata polumera 20 cm in 16 cm, se razlikujeta za 27^0; kolik je manjši teh kotov?

Razrešitev. Če sta dva izseka različnih krogov ploščinsko enaka, sta loka (oziroma pripadajoča obsrediščna kota) obratno sorazmerna s polumeroma; kajti iz pogoja $\frac{lr}{2} = \frac{l_1 r_1}{2}$ sledi $l : l_1 = r_1 : r$.

Pri navedeni nalogi je manjši izmed obsrediščnih kotov α in leži v krogu z večjim polumerom. Ker sta si izsekova ploščina in krožnina kakor pripadajoča obsrediščna kota, veljajo obrazci $p : r^2\pi = (\alpha + 27^0) : 360^0$ in $p : R^2\pi = \alpha : 360^0$. Ako izenačiš vrednosti za p, najdeš $\alpha = 48^0$.

36. Izmed dveh pravilnih mnogokotnikov ima prvi dvakrat toliko stranic kakor drugi in notranji kot prvega mnogokotnika je za 10^0 večji nego notranji kot drugega mnogokotnika. Koliko stranic ima drugi mnogokotnik?

Razrešitev. Notranji kot pravilnega mnogokotnika je določen po obrazcu $\frac{n \cdot 2R - 4R}{n}$, kjer pomeni n število stranic in R pravi kot. Pri navedeni nalogi ima prvi mnogokotnik $2n$, drugi pa n stranic. $n = 18$.

37. Višina pravokotnega trikotnika je za $2 \cdot 7$ *dm* večja ko manjši hipotenuzni odsek in za $3 \cdot 2$ *dm* manjša ko večji hipotenuzni odsek; kolika je hipotenuza?

Razrešitev. Hipotenuza je x, njen manjši odsek je y, njen večji odsek pa $x - y$. Po pogoju naloge je $v - 2 \cdot 7 = y$ in $v + 3 \cdot 2 = x - y$, kjer pomeni v hipotenuzi pripadajočo višino. S pomočjo geometrijskega izreka $v^2 = y(x - y)$ najdeš $v = 17 \cdot 28$ in $x = 35 \cdot 06$.

38. Dva pravokotna trikotnika imata enaki hipotenuzi; ena kateta prvega trikotnika je za 4 *m* manjša, druga pa za 8 *m* večja, nego sta kateti drugega trikotnika. Koliki sta kateti prvega trikotnika, ki je za 34 m^2 večji od drugega?

Razrešitev. Kateti prvega trikotnika sta x in y, drugega pa $x + 4$ in $y - 8$. Po pogoju naloge sta kvadrata nad katetama prvega trikotnika skupaj enaka vsoti kvadratov nad katetama drugega trikotnika, v znakih $x^2 + y^2 = (x + 4)^2 + (y - 8)^2$; gledé na trikotnikovi ploščini je $\frac{xy}{2} - 34 = \frac{(x + 4)(y - 8)}{2}$. Iz navedenih enačb najdeš $x = 9\frac{1}{3}$ in $y = 9\frac{2}{3}$.

V. Računski načini tretje stopnje.

A. Vzmnoževanje.

§ 32. Pojasnila o vzmnoževanju.

Ako postavimo določeno število a $m$krat kot faktor, pravimo, da vzmnožujemo ali potencujemo število a s številom m, v znakih

Vzmnožiti, vzmnoževati = potenzieren. Osnovno število = die Grundzahl. Podloga = die Basis. Potenčni eksponent = der Potenzexponent. Vzmnož = die Potenz.

$$a^m = a \cdot a \cdot a \ldots (m\text{krat}) = A.$$

Število a, ki se mora večkrat postaviti kot faktor, se imenuje osnovno število ali podloga; število m, ki pove, kolikokrat je treba podlogo postaviti kot faktor, se zove potenčni eksponent; število A, katerega najdemo pri vzmnoževanju, je vzmnož ali potenca. Vzmnoži ali potence so torej produkti enakih faktorjev. Potence posebnih števil izračunaš, ako pomnožiš podlogo ponavljajoč s samim seboj.

Kakšnost podloge in potenčnega eksponenta.

Z ozirom na zgoraj navedeno pojasnilo o vzmnoževanju smemo reči, da podloga (a) utegne biti ali celo ali ulomljeno, absolutno ali algebrajsko število, potenčni eksponent (m) pa mora biti absolutno celo število, ki je večje od 1.

Potence s podlogo 1 in 0 in potence algebrajskih števil.

Po pojasnilu o vzmnoževanju in z ozirom na pravila pri množenju najdemo:

a) $1^m = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots = 1.$

Vsaka potenca od 1 je 1.

b) $0^m = 0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots = 0.$

Vsaka potenca od 0 je 0.

c) $(+a)^m = (+a) \cdot (+a) \cdot (+a) \ldots = +a^m.$

Vsaka potenca pozitivne podloge je pozitivna.

d) $(-a)^{2m} = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \ldots = +a^{2m}.$

Soda potenca negativne podloge je pozitivna.

e) $(-a)^{2m-1} = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \ldots = -a^{2m-1}.$

Liha potenca negativne podloge je negativna.

§ 33. Računski zakoni o potencah.

Seštevanje in odštevanje potenc.

I. Istoimenske potence (potence, ki imajo enake podloge in enake eksponente) seštevaš in odštevaš po istih pravilih, po katerih se istoimenski izrazi sploh seštevajo in odštevajo. N. pr.

$$a^m + 7a^m = 8a^m;\quad ax^m - bx^m = (a - b)x^m.$$

Kako množiš potence z enakimi podlogami.

II. Po pojasnilu o vzmnoževanju je:

$$a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \ldots (m\,\text{krat}) \cdot a \cdot a \cdot a \ldots (n\,\text{krat}),\ \text{t. j.}$$

podlogo a je treba $(m + n)$ krat postaviti kot faktor; torej je

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Potence iste podloge množiš, ako pridržiš skupno podlogo ter sešteješ potenčne eksponente. N. pr.

$$(2a - b)^{4x-3y} \cdot (2a - b)^{5y-3x} = (2a - b)^{x+2y}.$$

Ako čitaš enačbo $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ v obratnem redu, najdeš:

Kako vzmnožiš z vsoto.

Število vzmnožiš z vsoto, ako ga vzmnožiš z vsakim sumandom ter pomnožiš dobljene potence. N. pr.

$$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x.$$

Kako deliš potence z enakimi podlogami.

III. Po pojasnilu o potencah je:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m\,\text{krat})}{a \cdot a \cdot a \ldots (n\,\text{krat})}.$$

Ako je $m > n$, se dasta dividend in divizor navedenega kvocijenta $n$krat zaporedoma deliti s številom a; potem stoji število a še $(m - n)$krat kakor faktor. Torej je

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Potence iste podloge deliš, ako skupno podlogo vzmnožiš z diferenco iz dividendovega in divizorjevega eksponenta. N. pr.

$$(a - 1)^{n+3} : (1 - a)^3 = (a - 1)^{n+3} : [-(a - 1)]^3 =$$
$$= (a - 1)^{n+3} : -(a - 1)^3 = -(a - 1)^n.$$

Obratno je:

Število vzmnožiš z razliko, ako vzmnožiš število z minuendom in subtrahendom ter deliš prvo potenco z drugo. N. pr. Kako vzmnožiš z razliko.

$$3^{2x-3} = 3^{2x} : 3^3 = \tfrac{1}{27} \cdot 3^{2x}.$$

IV. Po pojasnilu o vzmnoževanju je: Kako vzmnožiš produkt.

$$(ab)^m = ab \cdot ab \cdot ab \ldots (m\,\text{krat}),$$

ali če zameniš faktorje med seboj, je

$$(ab)^m = a \cdot a \cdot a \ldots (m\,\text{krat}) \cdot b \cdot b \cdot b \ldots (m\,\text{krat});$$

torej $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Produkt vzmnožiš s številom, ako vzmnožiš vsak faktor z dotičnim številom. N. pr.

$$(2ab)^2 \cdot (3ax)^3 = 4a^2b^2 \cdot 27a^3x^3 = 108a^5b^2x^3.$$

Obratno je:

Potence enakih eksponentov množiš, ako vzmnožiš produkt njih podlog s skupnim eksponentom. N. pr. Kako množiš potence z enakimi eksponenti.

$$(2a + 3b)^4 \cdot (2a - 3b)^4 = (4a^2 - 9b^2)^4.$$

V. Po pojasnilu o potencah je: Kako vzmnožiš kvocijent, oziroma ulomek.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (m\,\text{krat}),$$

ali če izvršiš nakazano množenje, je

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m\,\text{krat})}{b \cdot b \cdot b \ldots (m\,\text{krat})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Kvocijent (ulomek) vzmnožiš s številom, ako vzmnožiš dividend (števec) in divizor (imenovalec) z dotičnim številom. N. pr.

$$\left(\frac{3ax}{4by}\right)^2 \cdot \left(\frac{2bx}{3ay}\right)^3 = \frac{9a^2x^2}{16b^2y^2} \cdot \frac{8b^3x^3}{27a^3y^3} = \frac{bx^5}{6ay^5}.$$

Obratno je:

Potence enakih eksponentov deliš, ako vzmnožiš kvocijent njih podlog s skupnim eksponentom. N. pr. Kako deliš potence z enakimi eksponenti.

$$(25a^2 - 16b^2)^5 : (5a - 4b)^5 = \left(\frac{25a^2 - 16b^2}{5a - 4b}\right)^5 = (5a + 4b)^5.$$

Kako vzmnožiš potenco.

VI. Po pojasnilu o vzmnoževanju in z ozirom na računski zakon pod II. je:

$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots (n\text{krat}) = a^{m+m+m+\dots(n\text{krat})} = a^{mn}$.

Potenco vzmnožiš s številom, ako pomnožiš potenčni eksponent z dotičnim številom. N. pr.

$$(-a^4)^3 \cdot (-a^2)^6 + (-a^5)^3 \cdot (-a^3)^3 =$$
$$= (-a^{12}) \cdot a^{12} + (-a^{15}) \cdot (-a^9) = -a^{24} + a^{24} = 0.$$

Obratno je:

Kako vzmnožiš s produktom.

Število vzmnožiš s produktom, ako vzmnožiš dotično število z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem. N. pr.

$$2^{10} = (2^5)^2 = 32^2 = 1024.$$

Pri vzmnoževanju potenc smeš potenčne eksponente zameniti med seboj; zakaj

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

Razširjanje prvotnega pojasnila o potencah.

VII. Po prvotnem pojasnilu o potencah nimajo izrazi a^1, a^0 in a^{-x} nobenega pravega pomena; zakaj število a enkrat, oziroma ničkrat ali minus $x$krat postaviti kot faktor, je brez zmisla. Pomen teh izrazov se da določiti s pomočjo računskih zakonov, ki sta izražena v enačbi $a^{m-n} = a^m : a^n$, če smatramo namreč ta zakona veljavna tudi za slučaje $m - n = 1$, $m - n = 0$ in $m - n = -x$. To pa smemo storiti, ker kvocijent a^{m-n}, pomnožen z divizorjem a^n, da vsakokrat dividend a^m za produkt.

Pomen potence a^1.

Pomen izraza a^1 določiš tako-le:

$$a^1 = a^{m+1-m} = \frac{a^{m+1}}{a^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m+1)\text{krat}}{a \cdot a \cdot a \dots (m\,\text{krat})}.$$

Dividend in divizor navedenega kvocijenta se dasta $m$krat zaporedoma deliti s številom a; če to storiš, dobiš rezultat a. Torej je $a^1 = a$.

Prva potenca vsakega števila ima isto vrednost, katero ima dotično število.

Pomen potence a^0.

Pomen potence z negativnim eksponentom.

Z ozirom na postanek 0 je $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$.

Ako vzmnožiš kako število z 0, je vzmnož vselej enaka 1.

Z ozirom na postanek negativnih števil je

$$a^{-x} = a^{m-(m+x)} = \frac{a^m}{a^{m+x}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^x}.$$

Dividend in divizor navedenega kvocijenta se dasta deliti s številom a^m. Torej je $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Vsaka potenca z negativnim eksponentom je enaka obratni vrednosti dotične potence s pozitivnim eksponentom.

Ker je $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, smemo torej reči:

Določeno število vzmnožiš z negativnim številom, ako vzmnožiš obratno vrednost podloge z dotičnim pozitivnim številom. N. pr.

Kako vzmnožiš z negativnim celim številom.

$$0{\cdot}75^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}.$$

Iz enačbe $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ sledi $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Z ozirom na te enačbi smeš torej vsako potenco, ki je faktor celega števca, prestaviti kakor faktor v imenovalec, in vsako potenco, ki je faktor celega imenovalca, prestaviti kakor faktor v števec, ako izpremeniš eksponentov predznak. N. pr.

$$\frac{2^{-1}\,a^{-2}\,b^3}{3^{-1}\,x^2\,y^{-3}} = \frac{3b^3\,y^3}{2a^2\,x^2}.$$

S pomočjo enačb $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ in $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ moreš vsako potenco izraziti kakor potenco s pozitivnim, oziroma negativnim eksponentom. Ker se dado torej potence z negativnimi eksponenti smatrati kakor neka pretvorba potenc s pozitivnimi eksponenti, je jasno, da se računa s potencami, ki imajo negativne eksponente, po istih računskih zakonih, kateri veljajo za potence s pozitivnimi eksponenti. N. pr.

Kako računaš s potencami negativnih eksponentov.

$$(a^{-1}b^{-3})^3 \cdot (a^2b^{-4})^{-2} : (-\,a^{-4}b^{-5})^4 =$$
$$= a^{-3}b^{-9} \cdot a^{-4}b^8 : a^{-16}b^{-20} =$$
$$= a^{-7}b^{-1} : a^{-16}b^{-20} = a^9b^{19}.$$

§ 34. Kvadrat in kub.

Kako kvadruješ dvočlenik.

I. Druga potenca se imenuje kvadrat. Določeno število povišati na drugo potenco se pravi kvadrovati. Kvadrat binoma izračunaš po obrazcu

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

katerega najdeš, ako pomnožiš binom $a + b$ s samim seboj. Navedeni obrazec velja tudi za binom $a - b$ (algebrajsko vsoto); zakaj

$$(a - b)^2 = [a + (- b)]^2 = a^2 + 2a(- b) + (- b)^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

Kvadrat vsakega binoma je torej algebrajska vsota iz kvadrata prvega člena, iz dvojnega produkta obeh členov in iz kvadrata drugega člena.

Kako kvadruješ mnogočlenik.

Kvadrat mnogočlenskega izraza najdeš, ako porabiš pravilo za binom ponavljajoč. N. pr. Kvadrat mnogočlenika $a + b + c$ izračunaš, ako smatraš izraz $a + b$ za določeno število in potem računaš po pravilu za binom, v znakih

$$(\underbrace{a + b} + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 =$$
$$= a^2 + \underbrace{2ab + b^2} + \underbrace{2(a + b)c + c^2}.$$

Istotako postopaš tudi pri kvadrovanju mnogočlenika $a + b + c + d$ ali kateregakoli drugega mnogočlenika, v znakih

$$(\underbrace{a + b + c} + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 =$$
$$= a^2 + \underbrace{2ab + b^2} + \underbrace{2(a + b)c + c^2} + \underbrace{2(a + b + c)d + d^2}.$$

Iz navedenega posnamemo za kvadrovanje mnogočlenskih izrazov to-le pravilo:

1. Od prvega člena dobiš kvadrat.

2. Od drugega in vsakega naslednjega člena dobiš dve sestavini in sicer dvojno algebrajsko vsoto predstoječih členov, pomnoženo z dotičnim členom, in kvadrat tega člena.

3. Navedene sestavine seštevaš algebrajsko.

Ker je $2ab + b^2 = (2a + b)b$,
$2(a + b)c + c^2 = [2(a + b) + c]c$, i. t. d.,

združiš pri kvadrovanju mnogočlenika sestavine drugega in vsakega naslednjega člena v eno sestavino, ako dvojni algebrajski vsoti predstoječih členov prišteješ dotični člen (ga pripišeš z neizpremenjenim predznakom) in dobljeni znesek pomnožiš s tem členom.

Kako kvadruješ dekadično število.

Vsako dekadično število je vsota iz določene množine dekadičnih enot. N. pr. 4769 je vsota iz 4 tisočic, 7 stotic, 6 desetic in 9 enic, v znakih

$$4769 = 4T + 7S + 6D + 9E.$$

Kvadrat dekadičnega števila najdeš torej po istem pravilu, po katerem kvadruješ mnogočlenik. Ker se pri dekadičnem številu mestna vrednost vsake naslednje kvadratove sestavine zmanjša za en red, se pri napisavanju pomakne vsaka naslednja sestavina za eno mesto proti desni. Primerjaj navedeno kvadrovanje!

4769^2	
4^2	16
$2 \cdot 4 \cdot 7$	56
7^2	49
$2 \cdot 47 \cdot 6$	564
6^2	36
$2 \cdot 476 \cdot 9$	8568
9^2 ...	81
	22743361

ali krajše:

4769^2	= 16
$87 \cdot 7$	609
$946 \cdot 6$ ...	5676
$9529 \cdot 9$ ..	85761
	22743361

Pravilo za kvadrovanje dekadičnih števil izražamo tako-le:

1. Od prve številke dobiš kvadrat.

2. Od druge in vsake naslednje številke dobiš dve sestavini in sicer dvojni produkt predstoječega števila, pomnožen z dotično številko, in kvadrat te številke.

3. Navedene sestavine pišeš zaporedoma drugo pod drugo, pomakneš vsako naslednjo za eno mesto proti desni ter jih sešteješ.

Kvadratove sestavine dvoštevilčnega števila izračunaš in sešteješ obenem, ako izračunaš najprej kvadrat enic, potem dvojni produkt iz enic in desetic in končno kvadrat desetic.

Ako se nahaja v dekadičnem številu kaka ničla, jo preskočiš med kvadrovanjem, naslednjo sestavino pa pomakneš za tri mesta proti desni; zakaj kakor vsaka številka da tudi ničla pri kvadrovanju dve sestavini, ki sta posamič $= 0$.

Sestavine druge in vsake naslednje številke spojiš v eno sestavino, ako dvojnemu predstoječemu številu prišteješ dotično številko (jo pripišeš) in dobljeno vsoto pomnožiš s to številko. Da se mora v tem slučaju vsaka naslednja kvadratova sestavina pomakniti za dve mesti proti desni, je jasno.

Kako kvadruješ desetinsko, kako nepopolno število.

Desetinsko število kvadruješ istotako kakor celo število. Med kvadrovanjem se ne brigaš za desetinsko piko. V kvadratu odšteješ dvakrat toliko desetink, kolikor jih je v podlogi; zakaj produkt ima toliko decimalk, kolikor jih imata oba faktorja skupaj.

Nepopolno število kvadruješ, ako ga pomnožiš na okrajšani način s samim seboj.

Opomnja: Mnogoštevilčni izraz kvadruješ na tale način; Izračunaj najprej kvadrate vseh členov, ti so vsi pozitivni. Potem poišči vse dvojne produkte dveh členov pričenši s prvim in drugim, prvim in tretjim i. t. d., potem z drugim in tretjim, drugim in četrtim i. t. d. do predzadnjega z zadnjim in dodaj dotičnim produktom prave predznake. N. pr.

$$(a + 2b - 3c - d)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + d^2 + 4ab - 6ac - 2ad - 12bc - 4bd + 6cd.$$

II. Tretja potenca se imenuje kub. Določeno število povišati na tretjo potenco se pravi kubovati.

Kako kubuješ dvočlenik.

Kub binoma izračunaš po obrazcu

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

katerega najdeš, ako pomnožiš kvadrat binoma $a + b$ s tem binonom. Navedeni obrazec velja tudi za binom $a - b$; zakaj

$$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Kub vsakega binoma je torej algebrajska vsota: *a)* iz kuba prvega člena; *b)* iz trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z drugim členom; *c)* iz trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom drugega člena; *d)* iz kuba drugega člena.

Kako kubuješ mnogočlenik.

Kub mnogočlenskega izraza najdeš, ako porabiš pravilo za binom ponavljajoč. N. pr. Kub mnogočlenika $a+b+c$ izračunaš, ako smatraš izraz $a+b$ za določeno število in potem računaš po pravilu za binom, v znakih

$$(\underbrace{a+b}+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=$$
$$=a^3+\underbrace{3a^2b+3ab^2+b^3}+\underbrace{3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3}.$$

Istotako postopaš tudi pri kubovanju mnogočlenika $a+b+c+d$ ali kateregakoli drugega mnogočlenika, v znakih

$$(\underbrace{a+b+c}+d)^3=(a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+$$
$$+3(a+b+c)d^2+d^3=a^3+\underbrace{3a^2b+3ab^2+b^3}+$$
$$+\underbrace{3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3}+$$
$$+\underbrace{3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3}.$$

Iz navedenega posnamemo za kubovanje mnogočlenskih izrazov to-le pravilo:

1. Od prvega člena dobiš kub.
2. Od drugega in vsakega naslednjega člena dobiš tri sestavine in sicer: *a)* trojni kvadrat predstoječe algebrajske vsote, pomnožen z dotičnim členom; *b)* trojno predstoječo algebrajsko vsoto, pomnoženo s kvadratom dotičnega člena; *c)* kub dotičnega člena.
3. Navedene sestavine sešteješ algebrajsko.

Kako kubuješ dekadično število.

Ker je vsako dekadično število vsota iz določene množine dekadičnih enot, ga kubuješ po pravilu za mnogočlenske izraze. Primerjaj kvadrovanje dekadičnih števil!

Pravilo za kubovanje dekadičnih števil izražamo navadno tako-le:

1. Od prve številke dobiš kub.
2. Od druge in vsake naslednje številke dobiš tri sestavine, in sicer: *a)* trojni kvadrat predstoječega števila, pomnožen z dotično številko; *b)* trojno predstoječe število, pomnoženo s kvadratom dotične številke; *c)* kub dotične številke.
3. Navedene sestavine pišeš zaporedoma drugo pod drugo, vsako naslednjo pomakneš za eno mesto proti desni ter jih sešteješ.

Ako se nahaja v dekadičnem številu kaka ničla, jo preskočiš med kubovanjem, naslednjo sestavino pa pomakneš za štiri mesta proti desni.

Kako kubuješ desetinsko, kako nepopolno število.

586^3	
5^3......	125
$3 \cdot 5^2 \cdot 8$....	600
$3 \cdot 5 \cdot 8^2$....	960
8^3....	512
$3 \cdot 58^2 \cdot 6$...	60552
$3 \cdot 58 \cdot 6^2$...	6264
6^3...	216
	201230056

Desetinsko število kubuješ istotako kakor celo število. Med kubovanjem se ne brigaš za desetinsko piko; v kubu pa odšteješ trikrat toliko desetink, kolikor jih je v podlogi.

Nepopolno število kubuješ, ako ga postaviš trikrat kakor faktor ter izvršiš množenje na okrajšani način.

§ 35. Vzmnoževanje enačb in neenačb. Razreševanje eksponentnih enačb.

Enako visoke potence enakih in neenakih podlog.

1. Ako vzmnožiš enaka števila z enakimi števili, dobiš enake vzmnoži.

Dokaz. Iz
$$\left.\begin{array}{c} a = b \\ a = b \\ a = b \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{pomnoženo}$$
sledi $a^m = b^m$.

Ako vzmnožiš vse člene določenega sorazmerja z istim številom, dobiš zopet sorazmerje; zakaj iz $a : b = c : d$ najdeš $(a : b)^m = (c : d)^m$ in $a^m : b^m = c^m : d^m$.

2. Enako visoke potence neenakih absolutnih števil so neenake in sicer je tista večja, ki ima večjo podlogo.

Dokaz. Iz
$$\left.\begin{array}{c} a > b \\ a > b \\ a > b \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{pomnoženo}$$
sledi $a^m > b^m$.

3. Vsaka pozitivna (cela) potenca pravega ulomka je zopet pravi ulomek, ki je tem manjši, čim večji je potenčni eksponent. Potence pravega ulomka.

Dokaz. Ako pomeni a vrednost pravega ulomka, je $1 > a$ in

$$\frac{\left.\begin{array}{r}1 > a\\ a = a\end{array}\right\}\text{pomnoženo,}}{a > a^2} \qquad \frac{\left.\begin{array}{r}1 > a\\ a^2 = a^2\end{array}\right\}\text{pomnoženo, i. t. d.;}}{a^2 > a^3}$$

torej je $1 > a > a^2 > a^3 \ldots$ Iz navedenega sledi, da se zaporedne potence pravega ulomka manjšajo in bližajo vrednosti $= 0$, če se potenčni eksponent veča in bliža vrednosti $= \infty$.

4. Vsaka pozitivna (cela) potenca nepravega ulomka je zopet nepravi ulomek, ki je tem večji, čim večji je potenčni eksponent. Potence nepravega ulomka.

Dokaz. Ako pomeni a vrednost nepravega ulomka, je $1 < a$ in

$$\frac{\left.\begin{array}{r}1 < a\\ a = a\end{array}\right\}\text{pomnoženo,}}{a < a^2} \qquad \frac{\left.\begin{array}{r}1 < a\\ a^2 = a^2\end{array}\right\}\text{pomnoženo, i. t. d.;}}{a^2 < a^3}$$

torej je $1 < a < a^2 < a^3 \ldots$ Iz navedenega sledi, da se zaporedne potence nepravega ulomka večajo in bližajo vrednosti $= \infty$, če se veča potenčni eksponent in bliža vrednosti $= \infty$.

5. Enake potence z enakimi podlogami imajo enake eksponente; zakaj iz $a^x = a^y$ sledi $x = y$. Eksponentna enačba = Exponentialgleichung.

Ta izrek uporabljamo pri razreševanju eksponentnih enačb, to so enačbe, v katerih se neznanka nahaja v eksponentu.

Razreševanje dvočlenskih in mnogočlenskih eksponentnih enačb.

a) Dvočlensko eksponentno enačbo $2^{3x+2} = 32$ razrešiš, ako izraziš oba enačbena dela kakor potenci iste podloge in potem izenačiš potenčna eksponenta.

Razrešitev:

$$\begin{aligned} 2^{3x+2} &= 32 \\ 2^{3x+2} &= 2^5 \\ 3x + 2 &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

b) Pri razreševanju eksponentne enačbe $6 \cdot 25^{x-1} = 0 \cdot 4^{x-7}$ postopaš istotako kakor pri prejšnji enačbi. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$6 \cdot 25^{x-1} = 0 \cdot 4^{x-7}$$

$$\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2(x-1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+7}$$

$$2x - 2 = -x + 7$$

$$x = 3$$

c) Mnogočlensko eksponentno enačbo $7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^{x} + 3 \cdot 2^{x+3}$ razrešiš, ako izvršiš nakazana vzmnoževanja, potem prestaviš in skrčiš istoimenske izraze, nadalje pa ravnaš kakor pri prejšnjih enačbah. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^{x} + 3 \cdot 2^{x+3}$$

$$7 \cdot 7^{x} - \frac{2^{x}}{2} = 5 \cdot 7^{x} + 3 \cdot 2^{3} \cdot 2^{x}$$

$$7 \cdot 7^{x} - 5 \cdot 7^{x} = 24 \cdot 2^{x} + \frac{2^{x}}{2}$$

$$2 \cdot 7^{x} = \frac{49}{2} \cdot 2^{x}$$

$$\frac{7^{x}}{2^{x}} = \frac{49}{4}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2}$$

$$x = 2$$

Mnogočlensko eksponentno enačbo tudi razrešiš, ako prestaviš člene tako, da se nahajajo v vsakem enačbenem delu le potence iste podloge, potem razstaviš dotične izraze na faktorje in skrčiš kolikor mogoče, nadalje pa postopaš kakor pri dvočlenskih eksponentnih enačbah. Primerjaj navedeno razrešitev!

Razrešitev:

$$9^{2x-3} + 3^{3x+1} = 9^{2x-2} + 3^{3x-1}$$
$$9^{2x-3} - 9^{2x-2} = 3^{3x-1} - 3^{3x+1}$$
$$9^{2x}\left(\frac{1}{729} - \frac{1}{81}\right) = 3^{3x}\left(\frac{1}{3} - 3\right)$$
$$9^{2x}\left(-\frac{8}{729}\right) = 3^{3x}\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$\frac{9^{2x}}{3^{3x}} = \frac{729}{3}$$
$$\left(\frac{81}{27}\right)^{x} = 243$$
$$3^{x} = 3^{5}$$
$$x = 5$$

B. Korenjenje.

§ 36. Pojasnila o korenjenju.

Ako razstavimo določeno število A na m enakih faktorjev ter določimo enega izmed teh faktorjev (a), pravimo, da korenimo število A s številom m, v znakih $\sqrt[m]{A} = a$ (čitaj: $m$ti koren iz A je $= a$). Število A, ki se mora razstaviti na enake faktorje, se imenuje radikand ali korenovec; število m, ki pove, na koliko enakih faktorjev je treba razstaviti radikand, se zove korenski eksponent; številu a pa, katerega iščemo, pravimo koren.

Koreniti = radizieren. Korenovec = der Radikand. Korenski eksponent = der Wurzelexponent. Koren = die Wurzel.

Korensko znamenje ($\sqrt{}$) je nastalo iz začetne črke latinske besede „radix“. Drugi koren se zove tudi kvadratni koren, tretji pa kubični koren. Korenski eksponent se piše nad korensko znamenje. Korenski eksponent 2 se izjemoma ne piše; torej pomeni $\sqrt{}$ toliko kakor $\sqrt[2]{}$.

Korensko znamenje.

Izraza enačbe $\sqrt[m]{A} = a$ se razlikujeta v tem, da predočuje izraz a izračunani, izraz $\sqrt[m]{A}$ pa nakazani koren. Nakazane korene imenujemo tudi korenske izraze. Ako vzmnožimo izračunani ali nakazani koren s

Bistvena lastnost vsakega korena ali korenskega izraza.

korenskim eksponentom m, moramo po pojasnilu o korenjenju dobiti radikand za rezultat, v znakih

$$a^m = A \quad \text{ali} \quad \left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A.$$

Ako korenimo potenco A^m s številom m, je koren po zgoraj navedenem pojasnilu enak podlogi A, v znakih $\sqrt[m]{A^m} = A$.

Iz enačb $\left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A$ in $\sqrt[m]{A^m} = A$ izvajamo:

Število se ne izpremeni, ako ga v kateremkoli redu vzmnožiš in koreniš z enim in istim številom.

S pomočjo navedenih pojasnil najdemo:

Prvi koren in korena iz 1 in 0.

1. Prvi koren iz vsakega števila je enak dotičnemu številu, v znakih $\sqrt[1]{A} = A$; zakaj $A^1 = A$.

2. Vsak koren iz enote je enak 1, v znakih $\sqrt[m]{1} = 1$; zakaj $1^m = 1$.

3. Vsak koren iz ničle je enak 0, v znakih $\sqrt[m]{0} = 0$; zakaj $0^m = 0$.

Koreni algebrajskih števil.

4. Sodi koren iz pozitivnega radikanda utegne biti pozitiven ali negativen, v znakih $\sqrt[2m]{+A} = \pm a$; zakaj $(\pm a)^{2m} = +A$.

5. Lihi koren iz pozitivnega radikanda je pozitiven, v znakih $\sqrt[2m-1]{+A} = +a$; zakaj $(+a)^{2m-1} = +A$.

6. Lihi koren iz negativnega radikanda je negativen, v znakih $\sqrt[2m-1]{-A} = -a$; zakaj $(-a)^{2m-1} = -A$.

Kakšnost radikanda in korenskega eksponenta.

Z ozirom na navedena pojasnila smemo reči, da utegne radikand A biti ali celo ali ulomljeno, absolutno ali algebrajsko število, korenski eksponent m pa mora biti absolutno celo število. Kakšna je absolutna vrednost korena a, bomo spoznali iz naslednjega.

Kakšnost absolutne korenove vrednosti.

Mislimo si, da je radikand A neko absolutno celo število. Ako vzmnožimo števila naravne številne vrste z m ter primerjamo radikand A s to potenčno vrsto, namreč z

$$1,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m, \ldots \quad a^m,\ (a+1)^m,\ (a+2)^m, \ldots,$$

sta dva slučaja mogoča:

1. Radikand A se nahaja v tej potenčni vrsti, n. pr. $A = a^m$; potem je $\sqrt[m]{A}$ = celemu številu a.

2. Radikand A leži med dvema zaporednima potencama navedene potenčne vrste, n. pr. med a^m in $(a+1)^m$; potem mora $\sqrt[m]{A}$ ležati med zaporednima celima številoma a in $(a+1)$ in zategadelj ne more biti celo število. $\sqrt[m]{A}$ pa v tem slučaju tudi ne more biti ulomek; zakaj če bi $\sqrt[m]{A}$ bil enak ulomku $\frac{p}{q}$, bi morala potenca $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ biti enaka radikandu A. To pa je nemogoče, ker sta števec p in imenovalec q, torej tudi potenci p^m in q^m medsebojni praštevili. — Da je mogoče $\sqrt[m]{A}$ približno izraziti s pomočjo ulomka in sicer s tako natančnostjo, kakoršna se zahteva, uvidimo tako-le. Ako razdelimo enoto na toliko enakih delov (n. pr. na q), da so posamezni deli $\left(\frac{1}{q}\right)$ neizrečeno majhni, in ako zberemo vedno več in več izmed teh delov v ulomljena števila ter jih vzmnožimo z m, najdemo potenčno vrsto

$$\left(\frac{1}{q}\right)^m, \left(\frac{2}{q}\right)^m, \left(\frac{3}{q}\right)^m, \ldots \left(\frac{p}{q}\right)^m, \left(\frac{p+1}{q}\right)^m, \left(\frac{p+2}{q}\right)^m, \ldots$$

Vrednost radikanda A leži gotovo med dvema zaporednima potencama te številne vrste, n. pr. med $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ in $\left(\frac{p+1}{q}\right)^m$; potem leži vrednost $\sqrt[m]{A}$ med ulomkoma $\frac{p}{q}$ in $\frac{p+1}{q}$, katerih razlika $\left(\frac{1}{q}\right)$ je neizrečeno majhna. Vrednost korenskega izraza $\sqrt[m]{A}$ je torej približno enaka ulomku $\frac{p}{q}$ ali pa ulomku $\frac{p+1}{q}$.

Števila, katerih vrednost leži med dvema zaporednima ulomljenima številoma in se da s pomočjo ulomkov le približno določiti, toda tako natanko, kakor želimo, se imenujejo n e r a z l o ž n a ali i r a c i j o n a l n a š t e v i l a; cela in ulomljena števila pa se zovejo r a z l o ž n a ali r a c i j o n a l n a š t e v i l a. Prva števila se ne dado popolnoma natanko razložiti na enote ali enotne dele, pri zadnjih številih pa je to mogoče. Primerjaj razmerja nesoizmerljivih količin v geometriji § 21.!

Nerazložno število = irrationale Zahl.
Razložno število = rationale Zahl.

Iz navedenega izvajamo:

Koreni iz absolutnih celih števil so ali cela ali pa nerazložna števila.

Na isti način kakor navedeno lastnost najdemo tudi:

Koreni iz ulomkov so ali ulomki ali pa nerazložna števila.

Nerazložna ali iracijonalna števila ležijo med zaporednimi ulomki in napravijo številno vrsto nepretrgano ali stalno.

Predočevanje iracijonalnih števil.

Iracijonalna števila se dado po primernih slikah predočiti kakor določene daljice. N. pr. Ako načrtaš kvadrat, katerega stranica je $= 1$, predočuje diagonala iracijonalno število $\sqrt{2}$; ali ako načrtaš enakostraničen trikotnik, katerega stranica je $= 2$, predstavlja višina iracijonalno število $\sqrt{3}$; ali ako načrtaš pravokoten trikotnik, katerega kateti merita oziroma 1 in 2 dolgostni enoti, predočuje hipotenuza iracijonalno število $\sqrt{5}$ i. t. d.

§ 37. Računski zakoni o korenskih izrazih.

Seštevanje in odštevanje korenskih izrazov.

Korenski izrazi, ki se ujemajo v radikandih in v korenskih eksponentih, so istoimenski. Istoimenske korenske izraze seštevaš (oziroma odštevaš), ako seštevaš (oziroma odštevaš) njih koeficiente ter pridržiš skupni korenski izraz. N. pr.

$$a\sqrt[m]{x} \pm b\sqrt[m]{x} = (a \pm b)\sqrt[m]{x}.$$

Ako sta n. pr. števili A in B enaki, je $\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{B}$; zakaj ako razstaviš enaka števila na istotoliko enakih delov, morajo vsi ti deli biti enaki med seboj.

Pretvarjanje korenskih izrazov.

I. Recimo, da je $\sqrt[m]{A} = a$; potem je $a^m = A$. Ako vzmnožimo to enačbo s številom p, dobimo $a^{mp} = A^p$; in če korenimo števili zadnje enačbe s številom mp, najdemo $a = \sqrt[mp]{A^p}$, ali če postavimo namesto a njegovo vrednost, je

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}.$$

Ako čitamo zadnjo enačbo od leve proti desni in obratno, najdemo izrek:

Korenski izraz ne izpremeni svoje vrednosti, ako množiš, oziroma deliš korenski in potenčni eksponent z enim in istim številom. Kjer ni potenčnega eksponenta, si je treba misliti eksponent 1.

S pomočjo tega izreka se dado korenski izrazi, ki imajo različne korenske eksponente, pretvoriti na izraze z enakimi korenskimi eksponenti, in korenski izrazi, katerih korenski in potenčni eksponent imata skupno mero, se dado pretvoriti na enostavnejšo obliko. N. pr.

a) Izrazi $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[m]{x^n}$ se dado pretvoriti na izraze $\sqrt[6m]{a^{3m}}$, $\sqrt[6m]{b^{4m}}$, $\sqrt[6m]{x^{6n}}$.

b) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[6m+3n]{a^{4m+2n}} = \sqrt[3(2m+n)]{a^{2(2m+n)}} =$
$= \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$.

II. Produkt koreniš s številom, ako koreniš vsak faktor z dotičnim številom ter pomnožiš dobljene korene, v znakih

Kako koreniš produkt.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b};$$

zakaj po pojasnilih o korenjenju in računskih zakonih o potencah najdeš

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = ab.$$

Ako obrnemo zgoraj navedeno enačbo, najdemo:

Korenske izraze z enakimi korenskimi eksponenti množiš, ako pomnožiš njih radikande ter koreniš ta produkt s skupnim korenskim eksponentom, v znakih

Kako množiš korenske izraze.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

Če pa imajo korenski izrazi različne korenske eksponente, jih je treba najprej pretvoriti po pravilu pod I. na izraze z enakimi korenskimi eksponenti in potem se izvrši množenje po navedenem pravilu. N. pr.

a) $\sqrt[3]{54a^4b^5} = \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot a^3\cdot a\cdot b^3\cdot b^2} = 3ab\sqrt[3]{2ab^2}$;

b) $\sqrt{147} + 2\sqrt[3]{128} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} =$

$= \sqrt{49\cdot 3} + 2\sqrt[3]{64\cdot 2} - 3\sqrt{4\cdot 3} - 2\sqrt[3]{8\cdot 2} - \sqrt[3]{27\cdot 2} =$

$= 7\sqrt{3} + 8\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3+b^3} + \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^3+b^3} - \sqrt{a^3}} =$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{a^3+b^3} + \sqrt{a^3})(\sqrt{a^3+b^3} - \sqrt{a^3})} =$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{a^3+b^3})^2 - (\sqrt{a^3})^2} = \sqrt[3]{a^3+b^3-a^3} =$

$= \sqrt[3]{b^3} = b$;

d) $\sqrt{\frac{ax}{y}} \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{a^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{ay}{x^2}} = \sqrt[12]{\frac{a^6x^6}{y^6}} \cdot \sqrt[12]{\frac{x^4y^4}{a^8}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^3y^3}{x^6}} = \sqrt[12]{ax^4y}$;

e) $(2x+3y)\cdot\sqrt{\frac{2x-3y}{2x+3y}} = \sqrt{(2x+3y)^2}\cdot\sqrt{\frac{2x-3y}{2x+3y}} =$

$= \sqrt{(2x+3y)(2x-3y)} = \sqrt{4x^2-9y^2}$;

f) $(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$

$= \sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{40-8\sqrt{5}} =$

$= 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

Kako koreniš kvocijent (ulomek).

III. Kvocijent (ulomek) koreniš s številom, ako koreniš dividend (števec) in divizor (imenovalec) z dotičnim številom ter deliš dobljena korena, v znakih

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

zakaj po pojasnilih o korenjenju in računskih zakonih o potencah najdeš

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}.$$

Obratno najdemo:

Kako deliš korenske izraze.

Korenske izraze z enakimi korenskimi eksponenti deliš, ako deliš njih radikande ter

koreniš ta kvocijent s skupnim korenskim eksponentom, v znakih

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}.$$

Če pa imajo korenski izrazi različne korenske eksponente, jih je treba najprej pretvoriti po pravilu pod I. na izraze z enakimi korenskimi eksponenti in potem se izvrši deljenje po navedenem pravilu.

Kako vzmnožiš korenski izraz.

IV. Po pojasnilu o vzmnoževanju in z ozirom na pravilo pod II. najdemo

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \ldots (n\,\text{krat}) =$$

$$= \sqrt[m]{a \cdot a \cdot a \ldots} = \sqrt[m]{a^n};$$

torej

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}, \text{ t. j.}$$

Korenski izraz vzmnožiš s številom, ako vzmnožiš njegov radikand z dotičnim številom.

Iz enačbe $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$ izvajamo tudi:

Za rezultat je vseeno, v katerem redu vzmnožiš in koreniš določeno število.

N. pr.

a) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{25a^2b^4}}\right)^3 = \sqrt{\left(\sqrt[3]{25a^2b^4}\right)^3} = \sqrt{25a^2b^4} = 5ab^2.$

b) $\sqrt{\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)^3} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$

c) $\left(\sqrt[x]{a}\right)^{3y-2} \cdot \left(\sqrt[x]{a}\right)^{2x-3y} \cdot \left(\sqrt[x]{a}\right)^{2-x} =$

$$= \left(\sqrt[x]{a}\right)^{3y-2+2x-3y+2-x} = \left(\sqrt[x]{a}\right)^x = a.$$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^4 = \sqrt[3]{a^4b^2} \cdot \sqrt[3]{a^4b^8} = \sqrt[3]{a^8b^{10}} = a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}.$

Kako koreniš potenco.

V. Po pravilu pod I. najdemo

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[1]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}}, \text{ t. j.}$$

Potenco koreniš s številom, ako deliš potenčni eksponent s korenskim eksponentom.

Korenski izraz se pri tem izpremeni v potenčni izraz $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)$, ki ima po pojasnilih o vzmnoževanju le tedaj določen pomen, kadar je $\frac{n}{m}$ celo število. N. pr.

$$a)\quad \sqrt[m]{a^{mx+m}} = a^{\frac{mx+m}{m}} = a^{x+1}.$$

$$b)\quad \sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}} = \sqrt[n]{a^{2n}\cdot a\cdot b^{3n}\cdot b^2} = a^2b^3\sqrt[n]{ab^2}.$$

Kako koreniš korenski izraz.

VI. Ako razstavimo število a na n enakih faktorjev in potem še vsakega izmed teh faktorjev na m enakih faktorjev, dobimo iz števila a povsem mn enakih faktorjev, t. j. v znakih

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Korenske izraze koreniš, ako pomnožiš korenske eksponente med seboj.

Obratno je:

Kako koreniš število s produktom.

Število koreniš s produktom, ako ga koreniš z enim faktorjem in znesek z drugim faktorjem, v znakih

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Po navedenem je torej

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}},\ \text{t. j.}$$

Za rezultat je vseeno, v katerem redu izvršiš korenjenje določenega števila. N. pr.

$$a)\quad \sqrt{\sqrt[6]{81}} = \sqrt[6]{\sqrt{81}} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3}.$$

$$b)\quad \sqrt{\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{27}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{216}{125}\cdot\frac{25}{27}}} = \sqrt[6]{\frac{8}{5}}.$$

$$c)\quad \sqrt[6]{a^5\sqrt[4]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3\sqrt[6]{a^5}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{20}\cdot a}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^{18}\cdot a^5}} =$$

$$\sqrt[24]{a^{21}}\cdot\sqrt[24]{a^{23}} = \sqrt[24]{a^{44}} = \sqrt[6]{a^{11}} = a\sqrt[6]{a^5}.$$

Pomen korena z negativnim eksponentom.

VII. Korenski izraz $\sqrt[-n]{a}$ nima po prvotnem pojasnilu o korenjenju nobenega pravega pomena; zakaj radikand a na minus n enakih faktorjev razstaviti, je brez zmisla. Pomen tega korenskega izraza določimo s pomočjo pravila, ki je izraženo v enačbi $\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}$, če smatramo namreč to pravilo o pretvarjanju korenskih izrazov veljavno za vsak korenski izraz. Potem najdemo z ozirom na pomen potence z negativnim eksponentom

Kako koreniš z negativnim celim številom.

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[(-n).(-1)]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \text{ t. j.}$$

Določeno število koreniš z negativnim številom, ako koreniš obratno vrednost radikanda z dotičnim pozitivnim številom, v znakih

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Korenski izraz z negativnim eksponentom je enak obratni vrednosti dotičnega korenskega izraza s pozitivnim eksponentom, v znakih

$$\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

S pomočjo pravila o pretvarjanju korenskih izrazov se da tudi določiti pomen potenc in korenov z ulomljenimi eksponenti. Zakaj iz korenskega izraza $\sqrt[m]{a^n}$ najdemo po omenjenem pravilu:

Kako vzmnožiš, kako koreniš z ulomkom.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[1]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}},$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^1} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a};$$

$$\text{torej je } \sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Iz navedenega izvajamo pravili:

Določeno število vzmnožiš z ulomkom, ako ga vzmnožiš s števcem in znesek koreniš z imenovalcem, v znakih $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Določeno število koreniš z ulomkom, ako ga vzmnožiš z obratnim ulomkom, v znakih

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Kako računaš s potencami ulomljenih eksponentov.

Da veljajo za potence z ulomljenimi eksponenti isti računski zakoni kakor za potence s celimi eksponenti, uvidimo iz naslednjega:

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} =$

$= a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}};$

2. $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}};$

3. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} : \sqrt[ns]{a^{nr}} =$

$= \sqrt[ns]{a^{ms-nr}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}};$

4. $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m : b^m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$

5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = \sqrt[s]{a^{\frac{mr}{n}}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} =$

$= \sqrt[ns]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}}.$

Kako računaš s koreni ulomljenih eksponentov.

S korenskimi izrazi, ki imajo ulomljene eksponente, se računa po istih pravilih kakor s potencami, ki imajo ulomljene eksponente; zakaj

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Če je v potenčnem izrazu eksponent negativno ulomljeno število, je treba negativni predznak spojiti s števcem. N. pr.

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}}.$$

§ 38. Kvadratni in kubični koren.

Kvadratni koren mnogočlenskega izraza.

I. Iz pojasnil in pravil § 34. sledi, da najdeš urejenemu mnogočleniku kvadratni koren na ta-le način:

1. V prvem členu urejenega radikanda se nahaja kvadrat prvega korenovega člena. Prvi korenov člen najdeš torej, ako poiščeš prvemu radikandovemu členu kvadratni koren. Kvadrat prvega korenovega člena odšteješ od radikanda.

2. V prvih členih radikandovega ostanka se nahajata sestavini, ki ju dobiš pri kvadrovanju od drugega korenovega člena, in sicer v prvem členu tega ostanka je dvojni produkt iz prvega in drugega korenovega člena. Drugi korenov člen najdeš torej, ako deliš prvi člen radikandovega ostanka z dvojnim že znanim korenom. Potem izračunaš kvadratovi sestavini drugega korenovega člena (ali vsako sestavino posebej ali pa obe sestavini skupaj) ter ju odšteješ od radikandovega ostanka.

3. Naslednje korenove člene izračunaš na isti način, kakor si našel drugi člen. N. pr.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\sqrt{9x^4} & -24x^3 & -14x^2 & +40x & +25 & = 3x^2 - 4x - 5 \\
-\,9x^4 & & & & & \\
\hline
 & -24x^3 & -14x^2 & & & : (6x^2 - 4x)\cdot(-4x) \\
 & -24x^3 & +16x^2 & & & \\
 & + & - & & & \\
\hline
 & & -30x^2 & +40x & +25 & : (6x^2 - 8x - 5)\cdot(-5) \\
 & & -30x^2 & +40x & +25 & \\
 & & + & - & - & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

Ali krajše:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\sqrt{9x^4} & -24x^3 & -14x^2 & +40x & +25 & = 3x^2 - 4x - 5 \\
 & -24x^3 & -14x^2 & & & : 6x^2 - 4x \\
 & & -30x^2 & +40x & +25 & : 6x^2 - 8x - 5 \\
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

Iz § 34. sledi nadalje, da najdeš dekadičnemu številu kvadratni koren tako-le: Kvadratni koren dekadičnega števila.

1. Razdeli določeno število od desne proti levi na oddelke, vsak oddelek po dve številki; prvi oddelek na levi utegne imeti tudi le eno številko.

2. Prvo korenovo številko najdeš, ako poiščeš število, katerega kvadrat se nahaja v prvem oddelku. Kvadrat prve korenove številke odšteješ od prvega oddelka in ostanek spojiš z drugim oddelkom.

3. Ako odbiješ popolnemu drugemu oddelku zadnjo številko ter deliš to, kar ostane, z dvojnim že znanim

korenom, dobiš drugo korenovo številko. Potem izračunaš kvadratovi sestavini druge korenove številke ter ju odštevaš od popolnega drugega oddelka. Ostanek spojiš s tretjim oddelkom.

4. Naslednje korenove številke izračunaš istotako, kakor si našel drugo številko.

5. Ko si vzel vse radikandove oddelke v račun, najdeš ostanek = 0, ako je radikand popoln kvadrat.

Kvadratni koren ulomkov.

Desetinsko število koreniš z 2 na isti način kakor celo število. Zapomniti si je treba samo to, da razdeliš desetinsko število na oddelke od desetinske pike in sicer celote na levo, desetinke pa na desno, in da postaviš v korenu desetinsko piko, prej ko vzameš prvi oddelek desetink v račun. N. pr.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{9|40\cdot64|89} = 30\cdot67 & \\
40 & :6 \\
4064 & :606 \\
42889 & :6127 \\
\emptyset &
\end{array}
$$

Navadnemu ulomku poiščeš kvadratni koren, ako koreniš števec in imenovalec z 2.

Ako je radikand mešano število, ga pretvoriš na nepravi ulomek in potem postopaš kakor pri ulomku.

Kvadratni koren nepopolnega kvadrata.

Ako radikand ni popoln kvadrat, ne moreš kvadratnega korena določiti popolnoma natanko, temveč le približno na toliko decimalk, kolikor jih potrebuješ. Primerjaj § 36.! V to svrho pripišeš radikandu toliko ničel kakor decimalke (ali si jih misliš pripisane)*, kolikor jih je treba, ter računaš z njimi kakor z veljavnimi številkami.

Istotako postopaš tudi pri desetinskih številih, ki niso popolni kvadrati. Pri periodičnih decimalnih ulomkih porabiš namesto ničel tiste številke, ki se ponavljajo.

Navadnemu ulomku, katerega števec in imenovalec nista popolna kvadrata, določiš kvadratni koren, ako razširiš dotični ulomek tako, da postane imenovalec popoln

* Pri računanju ravnaš navadno tako, da pripišeš vsakemu naslednjemu ostanku po dve ničli.

kvadrat, in potem koreniš števec in imenovalec z 2, ali pa ako pretvoriš dotični navadni ulomek v desetinskega in koreniš zadnji ulomek z 2.

Ako računaš kvadratni koren števila, ki ni popoln kvadrat, na več decimalk, postaja račun vedno bolj težaven in dolgočasen. Takšen račun smeš okrajšati tako-le. Ko si določil na navadni način n veljavnih števílk kvadratnega korena, deliš zadnji ostanek z dvojnim že znanim korenom na okrajšani način (pri tem odbiješ takoj divizorju zadnjo številko) in najdeš na ta način še $(n-1)$ zanesljivo števílko kvadratnega korena.

Dokaz. Recimo, da je A radikand, a že izračunani in x še neznani del kvadratnega korena, torej $\sqrt{A} = a + x$. Iz te enačbe najdemo $A = a^2 + 2ax + x^2$, torej $2ax = A - a^2 - x^2$ in $x = \frac{A-a^2}{2a} - \frac{x^2}{2a}$. Ako vzamemo za x vrednost, ki jo izraža kvocijent $\frac{A-a^2}{2a}$, napravimo pogrešek, katerega absolutna vrednost je $= \frac{x^2}{2a}$. Ker se s tem, da premaknemo v radikandu A desetinsko piko za 2, oziroma za 4, 6 ... mest, izpremeni samo mestna, ne pa številčna vrednost korenovih števílk, si smemo zaradi lažjega dokaza misliti, da ima korenov del a mestno vrednost enic. Potem je $x < 1$ in tudi $x^2 < 1$. Če se znani korenov del a piše z n števílkami, je $a \gtreqless 10^{n-1}$. Iz

$$\left.\begin{array}{l} x^2 < 1 \\ 2a \gtreqless 2\cdot 10^{n-1} \end{array}\right\} \text{deljeno}$$

sledi $$\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}, \text{ t. j.}$$

absolutna vrednost pogreška $\frac{x^2}{2a}$ znaša manj ko $\frac{1}{2}$ od $(n-1)$. decimalke (čitaj: n manj prve decimalke). Iz kvocijenta $\frac{A-a^2}{2a}$, kjer pomeni $A - a^2$ zadnji ostanek in $2a$ dvojni že znani koren, se da torej $(n-1)$ decimalka določiti s pomočjo okrajšane delitve.

Ako je treba n. pr. številu 125 določiti kvadratni koren na 5 decimalk, izračunati moraš povsem 7 korenovih številk, torej 4 na navadni način, 3 pa s pomočjo okrajšane delitve. Primerjaj izvršeno nalogo!

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{1|25} & = 11{\cdot}18034\,.. \\
2\underline{5} & : 21 \\
40\underline{0} & : 221 \\
1790\underline{0} & : 2228 \\
76 & : \underline{2236} \\
9 & \\
\emptyset &
\end{array}
$$

Kvadratni koren nepopolnega števila.

Ako je treba n. pr. nepopolnemu številu 3·1416.. določiti kvadratni koren tako natanko kakor mogoče, moreš na navadni način najti le 3 korenove številke; s pomočjo okrajšane delitve določiš še potem 2 korenovi številki.

Kubični koren mnogočlenskega izraza.

II. Iz pojasnil in pravil § 34. sledi, da najdeš urejenemu mnogočleniku kubični koren na ta-le način:

1. Prvi korenov člen najdeš, ako poiščeš prvemu radikandovemu členu kubični koren. Kub prvega korenovega člena odšteješ od radikanda.

2. Drugi korenov člen najdeš, ako deliš prvi člen radikandovega ostanka s trojnim kvadratom že znanega korena. Potem izračunaš kubove sestavine drugega korenovega člena ter jih odšteješ od radikandovega ostanka.

3. Naslednje korenove člene najdeš na isti način, kakor si našel drugi korenov člen. N. pr.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 28x^3 - 9x^2 - 54x - 27} = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{\underset{-}{x^6}} \\
\quad - 6x^5 + 3x^4 + 28x \qquad\qquad\qquad : 3x^4 \\
\quad - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 \\
\quad \underline{+ \quad - \quad +} \\
\qquad\quad - 9x^4 + 36x^3 - 9x^2 - 54x - 27 \qquad : 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 \\
\qquad\quad - 9x^4 + 36x^3 - 36x^2 \\
\qquad\quad + \quad - \quad + \\
\qquad\qquad\qquad\quad 27x^2 - 54x - 27 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- \quad + \quad +} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \emptyset
\end{array}
$$

Dekadičnemu številu poiščeš kubični koren tako-le:

Kubični koren dekadičnega števila.

1. Razdeli določeno število od desne proti levi na oddelke, vsak oddelek po tri številke; prvi oddelek na levi utegne imeti tudi manj številk.

2. Prvo korenovo številko najdeš, ako poiščeš število, katerega kub se nahaja v prvem oddelku. Kub prve korenove številke odšteješ od prvega oddelka in ostanek spojiš z drugim oddelkom.

3. Ako odbiješ popolnemu drugemu oddelku zadnji dve številki ter deliš to, kar ostane, s trojnim kvadratom že znanega korena, dobiš drugo korenovo številko. Potem izračunaš kubove sestavine druge korenove številke ter jih odšteješ od popolnega drugega oddelka. Ostanek spojiš s tretjim oddelkom.

4. Naslednje korenove številke izračunaš istotako, kakor si našel drugo številko.

5. Ko si vzel vse radikandove oddelke v račun, najdeš ostanek = 0, ako je radikand popoln kub.

Desetinsko število koreniš s 3 na isti način kakor celo število. Zapomniti si je treba samo to, da razdeliš desetinsko število na oddelke od desetinske pike in sicer celote na levo, desetinke pa na desno, in da postaviš v korenu desetinsko piko, prej ko vzameš prvi oddelek desetink v račun. N. pr.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{78{\cdot}953|589} = 4{\cdot}29 & \\
14\,9\underline{53} \qquad & : 48 \\
\left.\begin{array}{r} 9\,6 \\ 488 \end{array}\right\} & \\
\hline
4\,8655\underline{89} & : 5292 \\
\left.\begin{array}{r} 4\,7628 \\ 10206 \\ 729 \end{array}\right\} & \\
\hline
\emptyset &
\end{array}
$$

Ako radikand ni popoln kub, moreš tretji koren določiti le približno. V to svrho pripišeš radikandu toliko ničel kakor decimalke (ali si jih misliš pripisane), kolikor jih potrebuješ, ter računaš z njimi kakor z veljavnimi

Kubični koren nepopolnega kuba.

številkami. Ker postaja takšen račun vedno bolj težaven in dolgočasen, smeš ga okrajšati tako-le. Ko si določil na navadni način n veljavnih številk kubičnega korena, deliš zadnji ostanek s trojnim kvadratom že znanega korena na okrajšani način in najdeš tako postopajoč še $(n - 1)$ zanesljivo številko kubičnega korena.

Primerjaj, kar se je zgoraj omenilo pri kvadratnem korenu.

§ 39. Pretvarjanje korenskih izrazov.

Včasih se dado korenski izrazi pretvoriti na obliko, ki je enostavnejša in za uporabno računanje pripravnejša od prvotne. Na take pretvoritve se hočemo tukaj ozirati.

Pretvarjanje ulomka z iracijonalnim imenovalcem.

I. Ulomek, katerega imenovalec je iracijonalen monom ali binom, se da pretvoriti na ulomek, kateremu je imenovalec racijonalen. Tu sem spadajoči primeri imajo eno izmed oblik:

$$\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad \frac{s}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad \frac{s}{\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}},$$

kjer pomeni s ulomkov števec.

a) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}}$ stvoriš imenovalec racijonalen, ako pomnožiš števec in imenovalec z izrazom $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Potem je:

$$\frac{s}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{s\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{s\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{s\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

b) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ stvoriš imenovalec racijonalen, ako pomnožiš števec in imenovalec z izrazom $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Potem je

$$\frac{s}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{s(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{s(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Istotako postopaš tudi pri naslednjih primerih:

$$\frac{s}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{s(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{s(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b},$$

$$\frac{s}{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{s(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{s(\sqrt[4]{a} \mp \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

Če je imenovalec trinom, se vzameta dva člena skupaj za število in potem se postopa kakor pri binomu. N. pr.

$$\frac{s}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})}{2\sqrt{6} - 1} = \frac{s(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{6} + 1)}{23} =$$

$$= \frac{s(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{6} - 12)}{23}.$$

Včasih sta slučaja pod *a)* in *b)* združena. N. pr.

$$\frac{s}{\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} = \frac{s\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{s\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} =$$

$$= \frac{s\sqrt{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}}{a - b}.$$

c) Pri ulomku $\frac{s}{\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}}$ stvoriš imenovalec racijonalen, ako pomnožiš števec in imenovalec z izrazom, ki ga najdeš pri delitvi $(a \pm b) : \left(\sqrt[2n+1]{a} \pm \sqrt[2n+1]{b}\right)$. N. pr.

$$\frac{s}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{s(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} =$$

$$= \frac{s(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}.$$

Pretvarjanje vsote (razlike) dveh korenskih izrazov v en korenski izraz.

II. Iracijonalnemu izrazu

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

daš novo obliko, ako kvadruješ navedeni izraz in dobljenemu znesku poiščeš kvadratni koren.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}\,.$$

Tako pretvarjanje je primerno, kadar je $a^2 - b$ popoln kvadrat.

Pretvarjanje iracijonalnega korenskega izraza na enostavnejšo obliko.

III. Iracijonalni izraz $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ pretvoriš v slučaju, da je $a^2 - b$ popoln kvadrat, na enostavnejšo obliko tako-le. Če ravnaš z izrazoma $\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}$ in $\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}$ tako kakor pod II., dobiš

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a+b} \;-\; \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2-b}};$$

in ako seštevaš, oziroma odštevaš te enačbi, najdeš

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2-b}} \pm \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2-b}}}{2}.$$

Tako n. pr. sledi iz enačb

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} &= \sqrt{22+2\sqrt{121-72}} = \sqrt{36} = 6 \\ \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} &= \sqrt{22-2\sqrt{121-72}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\sqrt{11 \pm 6\sqrt{2}} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

§ 40. Korenjenje enačb in neenačb. Razreševanje iracijonalnih in eksponentnih enačb.

Enako visoki koreni enakih in neenakih radikandov.

1. Ako koreniš enaka števila z enakimi števili, dobiš enake korene; zakaj ako razstaviš enaka števila na istotoliko enakih delov, morajo vsi ti deli biti enaki med seboj, v znakih

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}, \text{ če je } a = b.$$

Ako koreniš vse člene določenega sorazmerja z istim številom, dobiš zopet sorazmerje; zakaj iz sorazmerja $a:b = c:d$ najdeš $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{c:d}$ in $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$.

Srednja geometrijska sorazmernica med dvema številoma je enaka kvadratnemu korenu iz produkta dotičnih dveh števil; zakaj iz stalnega sorazmerja $a:b = b:c$ sledi $b^2 = ac$ in $b = \sqrt{ac}$.

2. Ako koreniš neenaka števila ($a > b$) z enakimi števili, so koreni tem večji, čim večja je radikandova vrednost, v znakih $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; zakaj jasno je, da so faktorji, na katere razstaviš radikand, tem večji, čim večji je radikand.

3. Ako koreniš nepravi (pravi) ulomek z neenakimi števili, je koren tem manjši (večji), čim večji je korenski eksponent.

Razno visoki koreni enega in istega ulomka.

Dokaz. *a)* Ako je radikand večji od enote ($a > 1$), so faktorji, na katere razstaviš radikand, očividno tem manjši, čim več jih napraviš, v znakih $\sqrt[n]{a} > \sqrt[2n]{a}$.

b) Iz

$$\left.\begin{array}{c} 1 = 1 \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[2n]{a} \end{array}\right\} \text{deljeno}$$

sledi

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} < \sqrt[2n]{\frac{1}{a}}.$$

4. Enačba, v kateri se nahaja neznanka v radikandu, se zove iracijonalna. Tako enačbo razrešiš, ako ji odpraviš korene in potem postopaš kakor pri racijonalnih enačbah. V to svrho prestaviš člene tako, da stoji korenski izraz z neznanko sam v enem enačbenem delu; potem vzmnožiš oba enačbena dela s korenskim eksponentom. Ako se nahaja v enačbi več korenskih izrazov z neznanko, se ponavlja navedeno pretvarjanje. Primerjaj naslednje razrešene enačbe!

Iracijonalna enačba = irrationale Gleichung. Razreševanje iracijonalnih enačb.

$a)$ $\sqrt{2x+3} = 5$

$2x+3 = 25$

$2x = 22$

$x = 11.$

$b)$ $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1$

$\sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x+6}$

$x+13 = 1 + x + 6 + 2\sqrt{x+6}$

$6 = 2\sqrt{x+6}$

$3 = \sqrt{x+6}$

$9 = x+6$

$x = 3.$

$c)$ Enačbi

$$3\sqrt{x+5} - 2\sqrt{y-3} = 5$$
$$5\sqrt{x+5} + 3\sqrt{y-3} = 21$$

razrešiš, ako določiš najprej vrednosti korenskih izrazov (smatraš ta izraza kakor neznanki) in potem še-le vrednosti neznank.

$$9\sqrt{x+5} - 6\sqrt{y-3} = 15$$
$$\underline{10\sqrt{x+5} + 6\sqrt{y-3} = 42}$$
$$19\sqrt{x+5} = 57$$
$$\sqrt{x+5} = 3$$
$$x+5 = 9$$
$$x = 4,$$

$$9 - 2\sqrt{y-3} = 5$$
$$-2\sqrt{y-3} = -4$$
$$\sqrt{y-3} = 2$$
$$y-3 = 4$$
$$y = 7.$$

Razreševanje eksponentnih enačb.

5. Pri razreševanju eksponentnih enačb uporabljaš računske zakone o potencah in korenih in se ravnaš po pojasnilih § 35. N. pr.

$a)$ $$\sqrt[x+5]{2^{x-5}} = \frac{1}{4}\sqrt[x-5]{8^{x+5}}$$

$$2^{\frac{x-5}{x+5}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{3x+15}{x-5}}$$

$$2^{\frac{x-5}{x+5}} = 2^{-2+\frac{3x+15}{x-5}}$$

$$\frac{x-5}{x+5} = -2 + \frac{3x+15}{x-5}$$

$$x = -2\tfrac{1}{2}.$$

$$b)\quad a^{1-x}\cdot\sqrt{a^{x+1}}\cdot\sqrt[4]{a^{x-3}}=1$$

$$a^{1-x}\cdot a^{\frac{x+1}{2}}\cdot a^{\frac{x-3}{4}}=a^0$$

$$a^{1-x+\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{4}}=a^0$$

$$1-x+\frac{x+1}{2}+\frac{x-3}{4}=0$$

$$x=3.$$

$$c)\quad \frac{2^{3x}}{\sqrt{2^9}}+3^{2x-4}=\frac{2^{3x}}{\sqrt{2^{13}}}+3^{2x-3}$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}}-2^{3x-\frac{13}{2}}=3^{2x-3}-3^{2x-4}$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}}(1-2^{-2})=3^{2x-3}(1-3^{-1})$$

$$2^{3x-\frac{9}{2}}\cdot\frac{3}{4}=3^{2x-3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{3x}}{2^{\frac{9}{2}}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3^{2x}}{3^3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{2x}}=\frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}=\frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^{\frac{10}{2}}}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^x=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{\frac{5}{2}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{5}{2}.$$

§ 41. Umišljena ali imaginarna in skupna ali kompleksna števila.

I. Sodi koren iz negativnega števila (v znakih $\sqrt[2n]{-A}$) se ne da določiti s pomočjo algebrajskih celih, ulomljenih in iracijonalnih števil; zakaj ni najti števila, katero vzmnoženo s korenskim eksponentom $2n$ bi dalo rezultat $= -A$. Zato moramo sode korene iz negativnih števil smatrati za neko novo vrsto števil. Ta števila se zovejo **umišljena** ali **imaginarna števila**, ker nimajo stvarne podlage; cela, ulomljena in iracijonalna števila pa se imenujejo **stvarna** ali **realna števila**. V naslednjem se hočemo

Umišljeno število = imaginäre Zahl.
Stvarno število = reelle Zahl.

le na obliki $\sqrt{-A}$ in $\sqrt{-1}$ imaginarnih števil ozirati. Številni izraz $\sqrt{-1}$ se imenuje imaginarna enota in se zaznamuje navadno s črko i.

Pojasnilo imaginarnega števila in imaginarne enote.

Občno pojasnilo o korenih je: Vsak koren $(\sqrt[n]{A})$, vzmnožen s korenskim eksponentom, da radikand za rezultat, v znakih $(\sqrt[n]{A})^n = A$. To pojasnilo velja tudi pri imaginarnih številih; torej je

$$(\sqrt{-A})^2 = -A \text{ in } (\sqrt{-1})^2 = -1, \text{ t. j.}$$

Imaginarno število je tisto, katerega kvadrat je enak negativnemu realnemu številu.

Imaginarna enota je tista, katere kvadrat je enak negativni realni enoti.

Kako se računa z imaginarnimi števili. Navadna oblika imaginarnega števila pri računanju.

Ker imajo računski zakoni o korenih zgoraj navedeno pojasnilo za podlago, zato veljajo vsi ti zakoni tudi pri imaginarnih številih.

Vsako imaginarno število se da smatrati za produkt iz realnega števila in imaginarne enote; zakaj po računskih zakonih najdemo

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A\cdot(-1)} = \sqrt{A}\cdot\sqrt{-1} = ai,$$

ker je $a = \sqrt{A}$ in $i = \sqrt{-1}$.

Kadar je treba računati z imaginarnimi števili, se ta števila najprej pretvorijo na obliko ai in potem se z njimi računa kakor z realnimi števili; številni znak i se smatra kakor občno število ali kakor faktor, pri katerem si je treba zapomniti, da je $i^2 = -1$, $i^3 = i^2\cdot i = -i$, $i^4 = i^2\cdot i^2 = +1$, i. t. d. N. pr.

a) $3\sqrt{-64} - 7\sqrt{-9} + \sqrt{-12\frac{1}{4}} - 2\sqrt{-2\frac{1}{4}} =$
$= 24i - 21i + \frac{7}{2}i - 3i = \frac{7}{2}i.$

b) $(2\sqrt{-27} + \sqrt{-75} - 5\sqrt{-8})\cdot 2\sqrt{-6} =$
$= (6i\sqrt{3} + 5i\sqrt{3} - 10i\sqrt{2})\cdot 2i\sqrt{6} =$
$= (11i\sqrt{3} - 10i\sqrt{2})\cdot 2i\sqrt{6} = -66\sqrt{2} + 40\sqrt{3}.$

c) $(26\sqrt{-20} + 39\sqrt{-35} - 65\sqrt{-45}) : 13\sqrt{-5} =$
$= (52i\sqrt{5} + 39i\sqrt{35} - 195i\sqrt{5}) : 13i\sqrt{5} =$
$= (39i\sqrt{35} - 143i\sqrt{5}) : 13i\sqrt{5} = 3\sqrt{7} - 11.$

d) $(-5\sqrt{28}) : (-3\sqrt{-7})) = (-10\sqrt{7}) : (-3i\sqrt{7}) =$
$= (-10i\sqrt{7}) : (-3i^2\sqrt{7}) = (-10i\sqrt{7}) : 3\sqrt{7} = -\frac{10}{3}i.$

II. Vsota iz realnega in imaginarnega števila se imenuje skupno ali kompleksno število, v znakih $a + bi$, kjer pomeni a realni, bi pa imaginarni del kompleksnega števila $a + bi$.

Skupno število = komplexe Zahl.

Številni izraz $a + bi$ je obča oblika vsakega mogočega števila; zakaj ta izraz predstavlja za $b = 0$ vsa mogoča realna števila, za $a = 0$ vsa čisto imaginarna števila, za $a = 0$ in $b = 0$ ničlo (začetek štetja) in za slučaj, da sta a in b različna od ničle, vsa kompleksna števila.

Realnim in imaginarnim številom je ničla skupna.

Kompleksni števili $a + bi$ in $a - bi$, ki se razlikujeta le v predznaku imaginarnega dela, se imenujeta spojeno kompleksni.

Spojeno kompleksni števili = konjugiert komplexe Zahlen.

Dve kompleksni števili $a + bi$ in $c + di$ sta enaki, ako sta njuna realna (a in c) in imaginarna dela (bi in di) med seboj enaka.

Iz zgoraj navedenih pojasnil sledi, da se s kompleksnimi števili računa istotako kakor z realnimi števili; s številnim znakom i se ravna kakor z realnim faktorjem in namesto i^2 se postavi -1. Račun s kompleksnimi števili je izvršen, če ima rezultat obliko kompleksnega števila. Primerjaj naslednje izvršene račune!

Kako se računa s kompleksnimi števili.

a) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

b) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

c) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$

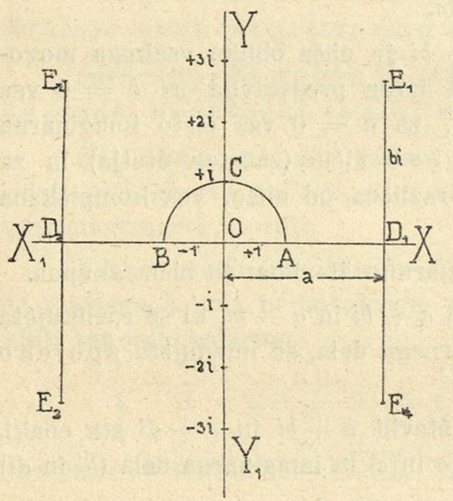
d) $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$

Računski rezultati kompleksnih števil so navadno kompleksna števila. Vsota in produkt dveh spojeno kompleksnih števil sta realni števili. N. pr.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Kako predočujemo s sliko imaginarna in kompleksna števila.

Imaginarna števila in njih zvezo z realnimi števili predočujemo v sliki tako-le. Iz enačbe $i^2 = -1$ sledi sorazmerje $(+1) : i = i : (-1)$, t. j. imaginarna enota je srednja geometrijska sorazmernica med pozitivno in negativno (realno) enoto.



Če predstavlja OA pozitivno, OB negativno enoto in ako narišemo nad daljico BA polukrog in $OC \perp BA$, je $OA : OC = OC : OB$, torej $OC = i$. Ako načrtamo daljico OC večkrat na premici YY_1 v smer OY in OY_1, dobimo v smeri OY pozitivna imaginarna števila $+i$, $+2i$, $+ +3i, \ldots$, v smeri OY_1 pa negativna imaginarna števila $-i$, $- -2i$, $-3i, \ldots$ Vrsta imaginarnih števil stoji torej pravokotno z ozirom na vrsto realnih števil.

Kompleksno število $a + bi$ predočimo v sliki, ako predočimo realni del $a = OD_1$ in imaginarni del $bi = D_1E_1$. Točke sekajočih se premic XX_1 in YY_1 predstavljajo nepretrgani vrsti oziroma realnih in imaginarnih števil in določujejo ravnino, v kateri predstavlja n. pr. točka E_1 kompleksno število $a + bi$. Kakor točka E_1 predočuje tudi vsaka druga točka te ravnine neko kompleksno število, n. pr. točka E_2 predstavlja kompleksno število $-a + bi$, točka E_3 kompleksno število $-a - bi$ in točka E_4 kompleksno število $a - bi$.

VI. Enačbe druge stopnje. Enačbe višjih stopenj, ki se dado pretvoriti na enačbe druge stopnje. Logaritmovanje. Kvadratne funkcije. Diferencijalni kvocijent in integral.

§ 42. Razreševanje enačb druge stopnje z eno neznanko in njih lastnosti.

I. Urejena enačba druge stopnje (kvadratna enačba) ima vobče obliko

Kvadratna enačba = quadratische Gleichung.

$$x^2 + ax + b = 0$$

in utegne biti ali čisto ali nečisto kvadratna. Čisto kvadratna je tista enačba, pri kateri se nahaja neznanka samo v drugi potenci, v znakih $x^2 + b = 0$; nečisto kvadratna pa je enačba, če se nahaja neznanka v drugi in prvi potenci, v znakih $x^2 + ax + b = 0$ ali $x^2 + ax = 0$.

a) Čisto kvadratno enačbo $x^2 + b = 0$ razrešiš, ako prestaviš znani člen v drugi enačbeni del in potem poiščeš vsaki enačbeni strani kvadratni koren, v znakih

Čisto kvadratna enačba = rein quadratische Gleichung.

$$x^2 + b = 0$$
$$x^2 = -b$$
$$x = \pm\sqrt{-b},$$
$$\text{ali} \quad x_1 = +\sqrt{-b} \quad \text{in} \quad x_2 = -\sqrt{-b}.$$

Čisto kvadratna enačba ima dva nasprotna realna ali imaginarna korena. Zakaj številni izraz $\sqrt{-b}$ predstavlja realno število, če ima b negativno vrednost; če pa ima b pozitivno vrednost, je $\sqrt{-b}$ imaginarno število.

b) Nečisto kvadratno enačbo $x^2 + ax + b = 0$ razrešiš, ako prestaviš znani člen v drugi enačbeni del, prišteješ obema deloma izraz $\frac{a^2}{4}$, potem koreniš novo enačbo z 2 in poiščeš vrednost za x po že znanih pravilih, v znakih

Nečisto kvadratna enačba = gemischt quadratische Gleichung.

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$
$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

ali $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ in $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

Neznanko urejene kvadratne enačbe $x^2 + ax + b = 0$ najdeš torej po obrazcu

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Izraz $\frac{a^2}{4} - b$ je za kvadratno enačbo zelo važen; zakaj predznak tega izraza določa kakovost enačbenih korenov. Ako je izraz $\frac{a^2}{4} - b$ pozitiven, ima enačba dva različna realna korena; ako je $\frac{a^2}{4} - b$ enak ničli, sta enačbena korena realna in enaka; če je pa $\frac{a^2}{4} - b$ negativen, sta korena spojeno kompleksni števili.

c) Enačbo $x^2 + ax = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo, v znakih

$$x^2 + ax = 0$$
$$x(x + a) = 0,$$

torej $x = 0$ ali $x + a = 0$; iz tega sledi $x_1 = 0$ in $x_2 = -a$.

Urejevanje kvadratnih enačb.

Ako je treba razrešiti kvadratno enačbo, ki nima nobene izmed navedenih oblik, moraš dotično enačbo najprej urediti, t. j. pretvoriti jo moraš na eno izmed navedenih oblik, in potem postopaš kakor zgoraj. Urejevanje enačb se izvršuje po že znanih pravilih, katera hočemo tukaj kratko ponoviti in popolniti.

1. Izvrši računske načine, katere nakazujejo oklepaji.

2. Odpravi ulomke, oziroma korene ter skrči in okrajšaj dobljene izraze kolikor mogoče.

3. Prestavi vse enačbene člene v levi enačbeni del ter jih uredi po padajočih potencah z ozirom na neznanko.

4. Deli vse enačbene člene s koeficientom neznanke v najvišji potenci.

Samo po sebi se razume, da red omenjenih pretvarjanj ni v vsakem slučaju isti, ki je tukaj naveden; ampak pretvarjanja se izvršujejo v tistem redu, ki je dotični nalogi najbolj primeren.

Enačbo $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$ urediš, ako jo kubuješ po obrazcu

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2=a^3-b^3-3ab(a-b),$$

potem porabiš znano vrednost za $a-b$ in nadalje postopaš po že znanih pravilih.

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$$

$$x+2-(x-5)-3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-5}\cdot\underbrace{(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5})}_{=1}=1$$

$$-3\sqrt[3]{x^2-3x-10}=-6$$

$$\sqrt[3]{x^2-3x-10}=2$$

$$x^2-3x-18=0.$$

Enačbo $\sqrt{2x+2}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$ urediš, ako pustiš v vsakem enačbenem delu po dva korenska izraza, potem kvadruješ enačbo in nadalje postopaš po že znanih pravilih.

$$\sqrt{2x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-5}$$

$$3x-1+2\sqrt{2x^2-4x-6}=3x-3+2\sqrt{2x^2-x-10}$$

$$\sqrt{2x^2-4x-6}=-1+\sqrt{2x^2-x-10}$$

$$2x^2-4x-6=2x^2-x-9-2\sqrt{2x^2-x-10}$$

$$2\sqrt{2x^2-x-10}=3x-3$$

$$x^2-14x+49=0.$$

Pri iracijonalnih enačbah je treba vsakokrat poskusiti, ali ustrezajo najdeni koreni dotični enačbi.

Kaj da vsota, kaj produkt obeh korenov kvadratne enačbe.

II. Urejeni kvadratni enačbi $x^2 + ax + b = 0$ sta korena $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ in $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Iz teh izrazov sledi, da je

$$x_1 + x_2 = -a \text{ in } x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b.$$

Vsota obeh korenov urejene kvadratne enačbe je enaka nasprotnemu koeficientu drugega člena; produkt obeh korenov je enak tretjemu členu.

S pomočjo tega izreka stvoriš prav lahko kvadratno enačbo, če poznaš oba korena. Ako sta n. pr. $\frac{3}{4}$ in $-\frac{1}{4}$ korena, je $-a = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}$ in kvadratna enačba $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$.

Enačbeni trinom = das Gleichungstrinom. Korenski faktor = der Wurzelfaktor.

Levi del urejene kvadratne enačbe, t. j. izraz $x^2 + ax + b$ se imenuje enačbeni trinom. Razlika med enačbeno neznanko in onačbenim korenom se zove korenski faktor. Če sta n. pr. $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ in $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ korena enačbe $x^2 + ax + b = 0$, sta $x - x_1$ in $x - x_2$ korenska faktorja te enačbe.

Lastnost enačbenega trinoma.

Enačbeni trinom urejene kvadratne enačbe je enak produktu obeh korenskih faktorjev. Zakaj z ozirom na prejšnji izrek najdeš

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + ax + b.$$

Iz te lastnosti sledi, da je enačbeni trinom deljiv z vsakim njegovih korenskih faktorjev.

§ 43. Enačbe višjih stopenj, ki se dado pretvoriti na kvadratne enačbe.

Binomske enačbe = binomische Gleichungen.

Enačba, v kateri se nahaja samo ena potenca neznanke, se imenuje binomska. Urejena binomska enačba ima obliko $x^n + a = 0$. Kako se urejene binomske enačbe tretje in četrte stopnje razrešujejo, kažejo naslednji primeri.

a) Enačbo $x^3 + 8 = 0$ razrešiš, ako razstaviš levo stran te enačbe na faktorja po obrazcu $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo. Iz $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$ sledi $x + 2 = 0$ ali pa $x^2 - 2x + 4 = 0$; torej je $x_1 = -2$, $x_2 = 1 + \sqrt{-3}$ in $x_3 = 1 - \sqrt{-3}$.

Razreševanje binomskih enačb tretje stopnje.

b) Enačbo $x^3 - 27 = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja po obrazcu $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ in potem postopaš kakor v prejšnjem primeru. Iz $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$ sledi $x - 3 = 0$ ali pa $x^2 + 3x + 9 = 0$; torej je $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ in $x_3 = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{-3}.)$

c) Enačbo $x^4 - 4 = 0$ razrešiš, ako razstaviš levi del te enačbe na faktorja po obrazcu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo. Iz $(x^2 + 2)(x^2 - 2) = 0$ sledi $x^2 + 2 = 0$ ali pa $x^2 - 2 = 0$; torej je $x_1 = \sqrt{-2}$, $x_2 = -\sqrt{-2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ in $x_4 = -\sqrt{2}$.

Razreševanje binomskih enačb četrte stopnje.

d) Enačbo $x^4 + 16 = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja po obrazcu $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a + bi)(a - bi)$ in potem postopaš kakor v prejšnjem primeru. Iz $(x^2 + 4i)(x^2 - 4i)$ sledi $x^2 + 4i = 0$ ali pa $x^2 - 4i = 0$; torej je $x_1 = 2\sqrt{-i}$, $x_2 = -2\sqrt{-i}$, $x_3 = 2\sqrt{i}$ in $x_4 = -2\sqrt{i}$. Vrednostima $\sqrt{i}$ in $\sqrt{-i}$ najdeš drugo obliko, ako vzmnožiš in koreniš izraza $\sqrt{0 + i} + \sqrt{0 - i}$ in $\sqrt{0 + i} - \sqrt{0 - i}$ z 2 ter sešteješ, oziroma odšteješ dobljeni identični enačbi, v znakih

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{0+i} + \sqrt{0-i} &= \sqrt{2\sqrt{0-i^2}} = \sqrt{2} \\ \sqrt{0+i} - \sqrt{0-i} &= \sqrt{-2\sqrt{0-i^2}} = \sqrt{-2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{sešteto,}\\ \text{oziroma}\\ \text{odšteto}\end{array}$$

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{-2}}{2} \text{ in } \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{-2}}{2}.$$

Iz navedenih primerov izvajamo, da ima vsaka binomska enačba tretje in četrte stopnje toliko korenov, kolikor znaša potenčni eksponent neznanke. Istotako je tudi pri binomskih enačbah višjih stopenj.

Način razreševanja binomskih enačb tretje in četrte stopnje se uporablja tudi pri drugih enačbah, ki niso binomske. N. pr.

e) Enačbo $(x - 3)^3 - (5 - x)^3 = 0$ razstaviš na faktorja kakor binomsko enačbo pod *b)*. Iz $[(x - 3) - (5 - x)][(x - 3)^2 + (x - 3)(5 - x) + (5 - x)^2] = 0$ najdeš korene $x_1 = 4$, $x_2 = 4 + \sqrt{-3}$ in $x_3 = 4 - \sqrt{-3}$.

f) Enačbo $x^4 - 625 = 26x(25 - x^2)$ razrešiš, ako razstaviš levo stran te enačbe na faktorja kakor binomsko enačbo pod *c)*, potem prestaviš člen desne strani na levo stran in razstaviš dobljena izraza zopet na faktorja. Iz $(x^2 + 25)(x^2 - 25) + 26x(x^2 - 25) = (x^2 - 25)(x^2 + 25 + + 26x) = 0$ najdeš korene $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1$ in $x_4 = -25$.

g) Enačbo $(3 - x)^3 = x - 3$ pretvoriš na enostavnejšo obliko, ako prestaviš člena desne strani na levo stran in potem razstaviš enačbo na faktorja. Iz $(3 - x)^3 + + (3 - x) = (3 - x)[(3 - x)^2 + 1] = 0$ najdeš korene $x_1 = 3$, $x_2 = 3 + \sqrt{-1}$ in $x_3 = 3 - \sqrt{-1}$.

h) Pri enačbi $\frac{x + 3}{x - 3} = \frac{x^2 - 9}{4}$ postopaš istotako kakor pri prejšnjem primeru. Iz $\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 9}{4} = = (x + 3)\left(\frac{1}{x - 3} - \frac{x - 3}{4}\right) = 0$ najdeš korene $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ in $x_3 = 1$.

Trinomske enačbe = trinomische Gleichungen.

II. Ako ima urejena enačba obliko $x^m + ax^n + b = 0$, se zove **trinomska**. V trinomski enačbi se nahaja neznanka v dveh različnih potencah. Trinomske enačbe se dadó na tej učni stopnji razrešiti, če jih je mogoče pretvoriti na kvadratne enačbe. To se da izvršiti, ako je potenčni eksponent m dvakrat tolik kakor potenčni eksponent n. V naslednjem se hočemo torej ozirati le na take trinomske enačbe, ki imajo obliko $x^{2n} + ax^n + b = 0$ ali $x^{\frac{1}{n}} + ax^{\frac{1}{2n}} + b = 0$.

Trinomska enačba $x^{2n} + ax^n + b = 0$ je kvadratna z ozirom na neznanko x^n; zakaj ako postaviš $x^n = y$ (torej $x^{2n} = y^2$), dobi navedena enačba obliko $y^2 + ay + b = 0$. Iz te kvadratne enačbe najdeš

Razreševanje trinomskih enačb.

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

in če postaviš namesto y vrednost x^n, dobiš binomsko enačbo

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

katero razrešiš po pravilih za binomske enačbe.

Trinomska enačba $x^{\frac{1}{n}} + ax^{\frac{1}{2n}} + b = 0$ (ali $\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} + b = 0$) je kvadratna z ozirom na neznanko $x^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{x}$; zakaj ako postaviš $x^{\frac{1}{2n}} = y$ (torej $x^{\frac{1}{n}} = y^2$), dobi navedena enačba obliko $y^2 + ay + b = 0$. Iz te kvadratne enačbe najdeš

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

ali če postaviš namesto y vrednost $x^{\frac{1}{2n}}$, je

$$x^{\frac{1}{2n}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \text{ in } x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n}.$$

N. pr.:

a) Iz enačbe $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ali iz $y^2 - 3y - 4 = 0$ (če postaviš $x^2 = y$) najdeš $y = x^2 = 4, -1$; torej je $x = \pm 2, \pm i$.

b) Iz enačbe $\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 14 = 0$ ali iz $y^2 + 5y - 14 = 0$ (če postaviš $\sqrt[6]{x} = y$) najdeš $y = \sqrt[6]{x} = 2$; torej je $x = 64$. Drugi koren, ki se najde pri razrešitvi, velja za enačbo $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} - 14 = 0$.

c) Iz enačbe $(x^2 - 6x + 11)^2 - 4(x^2 - 6x + 11) + 3 = 0$ ali iz $y^2 - 4y + 3 = 0$ (če postaviš $x^2 - 6x + 11 = y$) najdeš $y = x^2 - 6x + 11 = 3, 1$; torej je $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3 + i$ in $x_4 = 3 - i$.

d) Iz enačbe $x^2 + 15x - \sqrt{x^2 + 15x} = 90$ ali iz $y^2 - y = 90$ (če postaviš $\sqrt{x^2 + 15x} = y$) najdeš $y = \sqrt{x^2 + 15x} = 10$ ali -9; torej je $x^2 + 15x = 100$ in $x = 5$ ali -20. Druga dva korena sta iracijonalna.

e) Iz enačbe $2x^2 - 3x + 1 = \sqrt{22x^2 - 33x + 1}$ ali iz $y + 1 = \sqrt{11y + 1}$ (če postaviš $2x^2 - 3x = y$) najdeš $y = 2x^2 - 3x = 0, 9$; torej je $x = 0, \frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}$.

f) Enačbo $\sqrt[3]{\frac{52 + x}{4 - x}} - \sqrt[3]{\frac{4 - x}{52 + x}} = \frac{8}{3}$ razrešiš, ako postaviš $\sqrt[3]{\frac{52 + x}{4 - x}} = y$. Iz $y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$ najdeš potem $y = \sqrt[3]{\frac{52 + x}{4 - x}} = 3, -\frac{1}{3}$; torej je $x_1 = 2$ in $x_2 = -54\frac{2}{13}$

Obratne enačbe = reziproke Gleichungen.

III. Ako imajo pri urejeni enačbi členi, ki so enako oddaljeni od začetka in konca enačbe, enake ali pa nasprotne koeficiente, se imenuje dotična enačba obratna. Občna oblika obratne enačbe je

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0.$$

Lastnost obratnih enačb.

Obratna enačba ima lastnost, da je obratna vrednost vsakega korena te enačbe zopet koren dotične enačbe.

Dokaz. Če je število k koren obratne enačbe $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + bx^2 + ax + 1 = 0$, t. j. v znakih $k^n + ak^{n-1} + bk^{n-2} + \ldots + bk^2 + ak + 1 = 0$, je tudi število $\frac{1}{k}$ koren iste enačbe; zakaj če postaviš v levi del navedene enačbe namesto x vrednost $\frac{1}{k}$ in pretvoriš vse člene na skupni imenovalec, najdeš izraz

$$\frac{1 + ak + bk^2 + \ldots + bk^{n-2} + ak^{n-1} + k^n}{k^n},$$

katerega števec je po izrekovem pogoju $= 0$. Število $\frac{1}{k}$ zadostuje torej navedeni enačbi in je zato koren te enačbe.

Dokaz za drugo obliko obratne enačbe je navedenemu sličen.

Razreševanje obratnih enačb tretje stopnje.

a) Obratno enačbo tretje stopnje $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ razrešiš, ako razstaviš najprej po dva člena z enakim koeficientom in potem ves levi del enačbe na faktorja ter izenačiš vsakega izmed končnih faktorjev z ničlo. Iz $x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) + ax(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 + ax) = 0$ sledi $x + 1 = 0$.

ali pa $x^2 + (a-1)x + 1 = 0$; torej je $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{a-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - 1}$ in $x_3 = -\frac{a-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - 1}$.

Prav tako postopaš tudi pri razreševanju obratne enačbe $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0$.

Po istem načinu kakor obratne enačbe tretje stopnje razrešujejo se tudi enačbe, ki imajo obliko

$$x^3 + ax^2 \pm abx \pm b^3 = 0,$$

$$x^3 - ax^2 + abx - b^3 = 0.$$

Razreševanje obratnih enačb četrte stopnje.

b) Ako deliš obratno enačbo četrte stopnje $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ s faktorjem x^2 in zbereš po dva člena z enakim koeficientom, najdeš

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Če postaviš $x + \frac{1}{x} = y$, je $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$, torej $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Navedena enačba dobi potem obliko

$$y^2 + ay + b - 2 = 0.$$

Iz te kvadratne enačbe najdeš

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2},$$

in potem dobiš iz enačbe

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2}$$

štiri korene za neznanko x.

Na isti način razrešujejo se tudi enačbe, ki imajo obliko

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + amx + m^2 = 0.$$

Če pa ima obratna enačba četrte stopnje obliko $x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0$, kateri manjka člen z drugo potenco neznanke, se da prav lahko razstaviti na faktorja. Iz

$$x^4 + ax^3 - ax - 1 = (x^2+1)(x^2-1) + ax(x^2-1) =$$
$$= (x^2-1)(x^2+1+ax) = 0$$

sledi $x^2 - 1 = 0$ in $x^2 + ax + 1 = 0$; torej je $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$ in $x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$.

§ 44. Kvadratne enačbe z dvema in več neznankami.

Občna pojasnila o razreševanju kvadratnih enačb z dvema neznankama.

Ako imajo kvadratne enačbe po več neznank, moreš jim korene natanko določiti le tedaj, kadar imaš toliko neodvisnih in nenasprotnih enačb, kolikor je neznank. Tudi tukaj se razreševanje izvršuje vobče po istih načinih, ki se uporabljajo pri enačbah prve stopnje. To velja posebno o enačbah z obliko $ax^2 + by^2 = c$. Sicer pa primerjaj naslednje podatke!

Ena izmed določenih enačb je linearna.

I. Ako je ena izmed določenih enačb kvadratna, druga pa linearna, se uporablja navadno zamenjalni način, t. j. iz linearne enačbe se določi vrednost ene neznanke in ta vrednost se postavi v kvadratno enačbo, katera se potem razreši po pravilih prejšnjih odstavkov. Zamenjalni način se tudi uporablja, kadar sta določeni enačbi kvadratni z obliko $ax^2 - by^2 = c$ in $xy = d$.

Iz določenih enačb se izvede linearna enačba.

II. Iz določenih enačb se izvede po računskih zakonih najprej linearna enačba, ako je mogoče. Iz te nove enačbe in ene izmed določenih enačb najdeš potem korene kakor v prejšnjem slučaju. N. pr.

a) Iz enačb $xy + x = 4$ in $xy + y = 3$ najdeš linearno enačbo, ako odštěješ eno od druge. $x = 2, -2$ in $y = 1, -3$.

b) Iz enačb $x^2 + xy = 21$ in $xy + y^2 = 28$ najdeš linearno enačbo, ako deliš eno z drugo. $x = \pm 3$ in $y = \pm 4$.

c) Iz enačb $(x - 2)(y + 2) = 18$ in $(7 - x)(y - 3) = 2$ najdeš linearno enačbo, ako izvršiš nakazane računske načine in potem seštěješ enačbi. $x = 8, 5$ in $y = 1, 4$.

Iz določenih enačb se določi kaka zveza med neznankama.

III. Iz določenih enačb izračunaš najprej ali vsoto, ali razliko, ali produkt, ali kvocijent, ali kako drugo zvezo neznank, in potem postopaš kakor poprej. N. pr.

a) Iz enačb $x^2 + y^2 = 52$ in $xy = 12(x - y)$ najdeš razliko naznank, ako odštěješ dvakratno drugo enačbo od prve in iz dobljenega zneska izračunaš $x - y$ kakor neznanko iz kvadratne enačbe. $x = 6, -4, -13 \pm \sqrt{-143}$ in $y = 4, -6, 13 \pm \sqrt{-143}$.

b) Iz enačb $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ in $x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2$ najdeš produkt neznank, ako odštěješ drugo enačbo od prve. Ako potem prištěješ dobljeni produkt neznank prvi določeni enačbi, oziroma ga odšteješ od druge, dobiš enačbi, iz katerih se da vsota, oziroma razlika neznank izračunati. Iz teh rezultatov najdeš $x = \pm (a + b)$ in $y = \pm (a - b)$.

c) Ako je treba enačbi $\frac{3}{4}(x - y) - \sqrt{x - y} = 1$ in $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 5$ razrešiti, izračunaš iz prve enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{x - y}$ kakor neznanko iz kvadratne enačbe in potem najdeš iz druge enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{x + y}$. Iz teh rezultatov dobiš $x = \frac{13}{2}$ in $y = \frac{5}{2}$.

d) Enačbi $\sqrt{\frac{y+1}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{y+1}} = 5$ in $x^2 + y^2 = x + 15y$ razrešiš, ako določiš iz prve enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{\frac{y+1}{x}}$ in potem najdeš iz tega rezultata in druge enačbe $x = 1, 8, 1$ in $y = 15, 7, 0$.

e) Ako je treba enačbi $2x^2 + xy - 4y^2 = 8$ in $4x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$ razrešiti, določiš najprej iz druge enačbe vrednost kvocijenta $\frac{x}{y}$; zakaj ako deliš drugo enačbo s številom y^2, postane kvadratna z ozirom na neznanko $\frac{x}{y}$. Potem najdeš iz dobljenega rezultata in prve enačbe $x = \pm 3, \mp \frac{1}{2}\sqrt{-2}$ in $y = \pm 2, \pm \sqrt{-2}$.

f) Enačbi $x^2 + 2xy - 3y^2 = 5$ in $2x^2 - 3xy + y^2 = 3$ razrešiš, ako postaviš $y = tx$, potem deliš eno enačbo z drugo in iz dobljene nove enačbe poiščeš vrednost neznanke t. Nadalje postopaš kakor v prejšnjih slučajih. $x = \pm 2$ in $y = \pm 1$.

g) Enačbi $x + y - xy = 1$ in $x^2y + xy^2 = 30$ razrešiš, ako postaviš $x + y = u$ in $xy = z$ ter določiš najprej vrednosti za u in z. Potem najdeš $x = 1, 5, -6$ in $y = 5, 1, 1$.

h) Iz enačb $x - y = 2$ in $x^3 - y^3 = 98$ najdeš produkt neznank, ako kubuješ prvo enačbo ter porabiš v dobljenem rezultatu določeni vrednosti za $x - y$ in $x^3 - y^3$. Potem najdeš $x = 5, -3$ in $y = 3, -5$.

i) Iz enačb $x + y = 8$ in $x^4 + y^4 = 706$ najdeš produkt neznank, ako kvadruješ prvo enačbo, v dobljenem znesku prestaviš člen $2xy$ v drugi enačbeni del, potem kvadruješ to enačbo ter porabiš določeno vrednost za $x^4 + y^4$. Koreni so $x = 3, 5, 4 \mp \sqrt{-97}$ in $y = 5, 3, 4 \pm \sqrt{-97}$.

k)
$$x : y = u : z$$
$$x + y + u + z = 21$$
$$xz = 24$$
$$x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = 125.$$

Ako kvadruješ drugo enačbo ter porabiš $xz = yu = 24$ in $x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = 125$, najdeš novo enačbo, iz katere se dasta s pomočjo druge določene enačbe določiti vrednosti za $x + z$ in $y + u$. Potem je: $x = 3, 8, 6, 4$; $y = 6, 4, 8, 3$; $u = 4, 6, 3, 8$; $z = 8, 3, 4, 6$.

§ 45. Občna pojasnila o logaritmih.

Logaritmovati = logarithmieren. Logaritmand = der Logarithmand. Osnovno število ali podloga = die Grundzahl oder Basis. Logaritem = der Logarithmus.

Ako razstavimo določeno število A na enake faktorje a ter določimo, koliko je teh faktorjev, pravimo, da **logaritmujemo** število A z ozirom na število a, v znakih $A = a^x$. Določeno število A se zove logaritmand ali krajše „**število**“ sploh, znani faktor a se imenuje **osnovno** število ali **podloga**, neznano število x pa **logaritem**. Da je x logaritem števila A z ozirom na podlogo a, zapišemo tako-le: $x = {}^a\log A$, ali kadar je podloga znana, tudi tako-le $x = \log A$.

Logaritem določenega števila je torej tisti potenčni eksponent, s katerim se mora znana podloga vzmnožiti, da dobimo dotično število za rezultat, v znakih ${}^a\log A = x$ in $a^x = A$.

Logaritem števila 1 in katerekoli podloge.

Logaritem števila 1 je za vsako podlogo enak 0; zakaj $a^0 = 1$.

Logaritem katerekoli podloge je enak 1; zakaj $a^1 = a$.

Logaritmi enega in istega števila z ozirom na različne podloge so različni; zakaj če bi v enačbi $A = a^x = b^y$ bila eksponenta x in y enaka, bi morali tudi podlogi a in b biti enaki.

Iz $2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16, \ldots$
$3^0 = 1,\ 3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81, \ldots$
i. t. d.

sledi, da si moremo misliti števila ležeča med 2, 4, 8, 16, ... oziroma med 1, 3, 9, 27, 81, ... tudi kakor potence podloge 2, oziroma kakor potence podloge 3, i. t. d. Števila naravne številne vrste se torej dado izraziti kakor potence ene in iste podloge. Če to storimo in pregledno sestavimo dotične eksponente, dobimo **logaritemski sestav.** Logaritemski sestav je pregledna razvrstitev tistih potenčnih eksponentov, s katerimi moramo določeno podlogo vzmnoževati, da dobimo števila naravne številne vrste za rezultate.

Logaritemski sestav = das logarithmische System.

Ker ne moremo z vzmnoževanjem negativnega števila dobiti vsakega pozitivnega števila in ker je vsaka potenca od 1 zopet 1, smemo za podlogo logaritemskega sestava vzeti le pozitivno število, ki je različno od 1. V rabi sta dva logaritemska sestava. Pri računanju s posebnimi števili rabimo večinoma **navadni, dekadični** ali **Briggov logaritemski sestav**, ki ima za podlogo število 10. Za višjo matematiko je posebno važen **naravni, hiperbolični** ali **Neperjev logaritemski sestav**, ki mu je podloga iracijonalno število 2·71828..., katero zaznamujemo s črko e in ga dobimo, ako seštejemo brezkončno številno vrsto:

Briggov logaritemski sestav = das Briggs'sche logarithmische System.

Neperjev logaritemski sestav = das Neper'sche logarithmische System.

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

§ 46. Računski zakoni o logaritmih.

1. **Logaritem produkta je enak vsoti logaritmov vseh faktorjev**, v znakih

Kako logaritmuješ produkt.

$$\log ABC = \log A + \log B + \log C.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$, $\log B = n$ in $\log C = p$; torej $A = a^m$, $B = a^n$ in $C = a^p$. Potem je $ABC = a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$ in $\log ABC = m + n + p$; ali če namesto m, n, p postavimo njih vrednosti, najdemo

$$\log ABC = \log A + \log B + \log C.$$

Kako logaritmuješ kvocijent, oziroma ulomek.

2. **Logaritem kvocijenta (ulomka) je enak razliki logaritmov dividenda in divizorja (števca in imenovalca)**, v znakih

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$ in $\log B = n$, torej $A = a^m$ in $B = a^n$. Potem je $\frac{A}{B} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ in $\log \frac{A}{B} = m - n$; ali če postavimo namesto m in n navedeni vrednosti, najdemo

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

Kako logaritmuješ potenco.

3. **Logaritem potence je enak logaritmu podloge, pomnoženemu s potenčnim eksponentom**, v znakih

$$\log A^p = p \log A.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$, torej $A = a^m$. Potem je $A^p = (a^m)^p = a^{pm}$ in $\log A^p = pm$; ali če postavimo namesto m njegovo vrednost, najdemo

$$\log A^p = p \log A.$$

Kako logaritmuješ korenski izraz.

4. **Logaritem korenskega izraza je enak logaritmu radikanda, deljenemu s korenskim eksponentom**, v znakih

$$\log \sqrt[p]{A} = \frac{\log A}{p} = \frac{1}{p} \log A.$$

Dokaz. Ker je po računskih zakonih $\sqrt[p]{A} = A^{\frac{1}{p}}$, najdemo po prejšnjem izreku

$$\log \sqrt[p]{A} = \log A^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log A.$$

§ 47. O Briggovih logaritmih.

I. Z ozirom na navadni, dekadični ali Briggov logaritemski sestav si je treba števila naravne številne vrste misliti kakor potence podloge 10.

Logaritmi dekadičnih enot višjih redov in dekadičnih števil sploh.

Briggovi logaritmi dekadičnih enot višjih redov so pozitivna cela števila.

Dokaz. Iz $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, i. t. d. sledi, da je $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, i. t. d.

Briggov logaritem vsakega celega števila, ki ni dekadična enota, je iracijonalno število.

Dokaz. Recimo, da je A celo število, ki ni dekadična enota višjih redov. Če bi bil logaritem od A racijonalno število $\frac{m}{n}$, bi morala veljati enačba $10^{\frac{m}{n}} = A$ ali $10^m = A^n$. Ta enačba pa je le mogoča, če sta števili 10^m in A^n sestavljeni iz enakih prafaktorjev, t. j. iz prafaktorjev 2 in 5 in sicer iz vsakega teh faktorjev istotolikokrat. Število A bi bilo potem enako dekadični enoti višjih redov, kar pa nasprotuje izrekovemu pogoju. Torej mora $\log A$ ležati med dvema zaporednima racijonalnima številoma in je zato iracijonalno število.

Briggovi logaritmi dekadičnih števil,
ležečih med 1 in 10, so večji od 0, pa manjši od 1,
„ „ 10 „ 100, „ „ „ 1, „ „ „ 2,
„ „ 100 „ 1000, „ „ „ 2, „ „ „ 3,
i. t. d.

Logaritmi dekadičnih števil so torej sestavljeni iz celega števila in nepopolnega decimalnega ulomka; celote se imenujejo značilka ali karakteristika, pridejani decimalni ulomek pa se zove pridavek ali mantisa.

Značilka = die Charakteristik. Pridavek = die Mantisse.

Iz zgoraj navedenega sledi, da je karakteristika pri enoštevilčnih številih enaka 0, pri dvoštevilčnih enaka 1, pri troštevilčnih enaka 2, pri četveroštevilčnih enaka 3, i. t. d. Vobče smemo reči, da je karakteristika za enoto manjša od števila številk, s katerimi se pišejo celote dotičnega števila.

Kako določiš karakteristiko celih števil.

Ako pomnožiš, oziroma deliš določeno dekadično število s kako potenco od 10, se izpremeni le karakteristika dotičnega števila.

Kdaj se izpremeni karakteristika.

Dokaz. Ako je A dekadično število, je po računskih zakonih

$$\log A \cdot 10^n = \log A + n,$$

$$\log \frac{A}{10^n} = \log A - n.$$

Kdaj imajo števila isto mantiso. Logaritmovnik = die Logarithmentafel oder das Logarithmenbuch. Logaritmi dekadičnih enot nižjih redov in decimalnih števil.

V prvem slučaju se logaritem števila A poveča, v drugem zmanjša za n enot, t. j. izpremeni se le karakteristika, mantisa pa ostane ista.

Briggovi logaritmi takih števil, ki se ujemajo v zaporednosti številk, se ujemajo v mantisi, razlikujejo pa v karakteristiki.

Mantise dekadičnih števil so se pregledno sestavile v logaritemske tablice, ki se zovejo logaritmovnik.

II. Briggovi logaritmi dekadičnih enot nižjih redov so negativna cela števila.

Dokaz. Iz $10^{-1} = 0{\cdot}1$, $10^{-2} = 0{\cdot}01$, $10^{-3} = 0{\cdot}001$, i. t. d. sledi, da je $\log 0{\cdot}1 = -1$, $\log 0{\cdot}01 = -2$, $\log 0{\cdot}001 = -3$, i. t. d.

Ako delimo števila naravne številne vrste s potencami od 10, dobimo desetinska ali decimalna števila, ki imajo po zgoraj navedenem iste mantise kakor cela števila.

Mantise vseh decimalnih števil, torej tudi pravih decimalnih ulomkov, so pozitivne in odvisne le od zaporednosti številk.

Kako določiš karakteristiko pravih decimalnih ulomkov.

Kar se tiče karakteristike pri decimalnih številih, si je treba sledeče zapomniti. Dokler se nahajajo v decimalnih številih celote, določimo karakteristiko kakor pri celih številih. Pri pravih decimalnih ulomkih pa je karakteristika negativna in znaša toliko enot, kolikor ničel stoji pred prvo veljavno številko dotičnega decimalnega ulomka. Ničla, ki nadomestuje celote, se pri tem tudi vzame v poštev. Resničnost navedenega pravila uvidimo iz naslednjih primerov.

$$\log 0{\cdot}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - 1 = 0{\cdot}30103 - 1,$$

$$\log 0{\cdot}03 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - 2 = 0{\cdot}47712 - 2,$$

$$\log 0{\cdot}007 = \log \frac{7}{1000} = \log 7 - 3 = 0{\cdot}84510 - 3,$$

$$\log 0{\cdot}000351 = \log \frac{3{\cdot}51}{10000} = \log 3{\cdot}51 - 4 = 0{\cdot}54531 - 4,$$

i. t. d.

Negativna karakteristika se postavlja za pozitivno mantiso. Če sta v logaritmu dve karakteristiki, se skrčita v eno. N. pr.

$$1{\cdot}30103 - 2 = 0{\cdot}30103 - 1.$$

Vsak negativni logaritem pretvoriš na obliko s pozitivno mantiso, če mu toliko enot prišteješ in odšteješ, kolikor jih je ravno treba. N. pr.

$$-2{\cdot}34467 = 3 - 2{\cdot}34467 - 3 = 0{\cdot}65533 - 3.$$

Ako določimo pri kateremkoli celem ali desetinskem številu red njegove prve (na najvišjem mestu stoječe) številke ter ga primerjamo s karakteristiko, vidimo, da se ujemata te dve števili.

Kako se poišče s pomočjo logaritmovnika določenemu številu pripadajoči logaritem in kako določenemu logaritmu pripadajoče število, uči navodilo v logaritmovniku.

Logaritmi nekaterih decimalnih števil.

Ako izračunamo številu 10 ponavljajoč kvadratni koren, najdemo logaritme nekaterih decimalnih števil, ležečih med 1 in 10. N. pr.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{\cdot}16228, \text{ torej je } \log 3{\cdot}16228 = \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}5;$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3{\cdot}16228} = 1{\cdot}77828, \text{ torej je } \log 1{\cdot}77828 = \tfrac{1}{4} = 0{\cdot}25;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{1{\cdot}77828} = 1{\cdot}33352, \text{ torej je } \log 1{\cdot}33352 = \tfrac{1}{8} = 0{\cdot}125; \text{ i. t. d.}$$

Rezultati teh računov so sestavljeni v naslednji tablici:

štev.	log.	štev.	log.
10	1	1·00451	0·00195
3·16228	0·5	1·00225	0·00098
1·77828	0·25	1·00112	0·00049
1·33352	0·125	1·00056	0·00024
1·15478	0·0625	1·00028	0·00012
1·07461	0·03125	1·00014	0·00006
1·03663	0 01562	1·00007	0·00003
1·01815	0·00781	1·00004	0·00002
1·00904	0·00391	1·00002	0·00001

Kako izračunaš logaritem števila, ležečega med 1 in 10.

S pomočjo te tablice izračunaš logaritem števila, ležečega med 1 in 10, n. pr. števila 3·7, tako-le. Število 3·7 razstaviš na take faktorje, ki se nahajajo kakor števila v omenjeni tablici, in potem seštevaš logaritme vseh dotičnih faktorjev. Faktorje števila 3·7 pa najdeš, ako deliš 3·7 s številom 3·16228, ki se nahaja v tablici in je manjše od 3·7; dobljeni kvocijent 1·17004 deliš z naslednjim manjšim številom tablice (t. j. z 1·15478); novi kvocijent deliš zopet z naslednjim manjšim številom tablice, i. t. d. Število 3·7 je potem enako produktu vseh zaporednih divizorjev in zadnjega kvocijenta, ki se bliža enoti in se sme zato izpustiti.

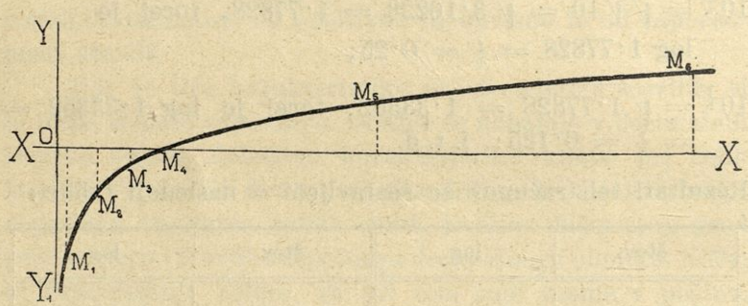
Kako najdeš logaritem števila, večjega od 10.

Če je pa število, kateremu je treba izračunati logaritem, večje od 10, razstaviš dotično število najprej na dva faktorja, izmed katerih je eden manjši od 10, drugi pa neka potenca od 10, in potem postopaš slično kakor v prejšnjem slučaju. N. pr.

$$157 = 1{\cdot}57 \cdot 10^2 \text{ in } \log 157 = \log 1{\cdot}57 + 2.$$

Logaritem ničle.

Ker se vrednost 10^{-n} bliža ničli, če postaja n vedno večji, smemo sklepati, da je $10^{-\infty} = 0$ in $\log 0 = -\infty$.



Logaritemska funkcija in logaritemska črta.

Kako so logaritmi odvisni od logaritmanda in kako se z njim izpreminjajo, spoznamo najbolje, ako načrtamo funkciji $y = \log x$ funkcijsko črto. Po pojasnilih o logaritmih sme premenljivka x imeti le pozitivne vrednosti. Za $x = 0$ je funkcija $y = -\infty$. Za vrednosti od $x = 0$ do $x = 1$ je funkcija y nega-

x	y	Točke
0·1	— 1	M_1
0·4	— 0·40..	M_2
0·7	— 0·15..	M_3
1	0	M_4
3	0·48..	M_5
6	0·78..	M_6
10	1	M_7
20	1·30..	M_8
30	1·48..	M_9

tivna in se veča. Za $x = 1$ je funkcija $y = 0$. Za vrednosti od $x = 1$ do $x = \infty$ so funkcijske vrednosti pozitivne in se večajo. Pridejana slika predočuje črto (logaritemsko črto), ki pripada funkciji $y = \log x$. Posamezne točke M_1, M_2, $M_3 \ldots$ te črte najdeš s pomočjo navedenih podatkov. Logaritemska črta izide od negativne ordinatne osi v neskončni daljavi, se vzdiguje sprva prav hitro, pozneje pa polagoma, preseče pozitivni del abscisne osi in se razteza ob tej osi v pozitivno smer.

§ 48. Uporaba Briggovih logaritmov.

Računanje z logaritmi.

S pomočjo Briggovih logaritmov se dado računski načini druge in tretje stopnje zelo okrajšati in včasih izvršiti tudi v takih slučajih, kjer nam manjka potrebnih pravil. V ta namen smatramo rezultat računa za neznano število, kateremu se da iz podatka določiti logaritem po računskih zakonih. Primerjaj naslednje naloge!

1. Logaritmi določenih izrazov:

a) $14 \cdot 568 \times 1 \cdot 293 \times 0 \cdot 037429 = x$,

$$\begin{array}{rl}
\log x = & \log 14 \cdot 568 + \log 1 \cdot 293 + \log 0 \cdot 037429 = \\
 & = \left.\begin{array}{l} 1 \cdot 16340 \\ 0 \cdot 11160 \\ 0 \cdot 57321 - 2 \end{array}\right\} \\
\hline
\log x = & 0 \cdot 84821 - 1 \\
x = & 0 \cdot 70503 .
\end{array}$$

b) $\left(-\frac{43}{65}\right)^3 = -x$. Ako se nahaja v računu negativno število kakor podloga ali radikand, se smatra med računanjem to število za absolutno in po končanem računu se določi rezultatov predznak po računskih zakonih.

$$\begin{array}{rl}
\log x = & 3(\log 43 - \log 65) \\
 & = \left.\begin{array}{l} \overset{+1}{1} \cdot 63347^{\,-1} \\ 1 \cdot 81291 \end{array}\right\} \times 3 \\
\hline
 & (0 \cdot 82056 - 1) \times 3 \\
\hline
 & 2 \cdot 46168 - 3 \\
\log x = & 0 \cdot 46168 - 1 \\
x = & 0 \cdot 28952 \quad \text{in} \quad \left(-\frac{43}{65}\right)^3 = -0 \cdot 28952 .
\end{array}$$

Ako je pri odštevanju logaritmov minuend manjši od subtrahenda, se prvemu toliko enot prišteje in odšteje, da postane razlikna mantisa pozitivna.

c) $$\sqrt[5]{\frac{0{\cdot}23047}{4{\cdot}9648}} = x,$$

$$\log x = \tfrac{1}{5}(\log 0{\cdot}23047 - \log 4{\cdot}9648)$$

$$\left.\begin{array}{l} = \overset{+4}{0}{\cdot}36261 - \overset{-4}{1} \\ \ 0{\cdot}69590 \end{array}\right\} : 5$$

$$(3{\cdot}66671 - 5) \quad : 5$$

$$\log x = 0{\cdot}73334 - 1$$

$$x = 0{\cdot}54117.$$

Pri odštevanju logaritmov se je minuendu toliko enot prištelo in odštelo, da je postala razlikna karakteristika deljiva s 5.

d) $$\sqrt[3]{\sqrt{18{\cdot}7} - \sqrt[3]{9{\cdot}2}} = x.$$

Pri navedeni nalogi se mora vrednost vsakega radikandovega dela posebej določiti, da je mogoče nakazano odštevanje izvršiti.

$$\log \sqrt{18{\cdot}7} = \tfrac{1}{2}\log 18{\cdot}7 = 1{\cdot}27184 : 2 = 0{\cdot}63592,$$

$$\sqrt{18{\cdot}7} = 4{\cdot}3243.$$

$$\log \sqrt[3]{9{\cdot}2} = \tfrac{1}{3}\log 9{\cdot}2 = 0{\cdot}96379 : 3 = 0{\cdot}32126,$$

$$\sqrt[3]{9{\cdot}2} = 2{\cdot}0954.$$

$$x = \sqrt[3]{4{\cdot}3243 - 2{\cdot}0954} = \sqrt[3]{2{\cdot}2289},$$

$$\log x = \tfrac{1}{3}\log 2{\cdot}2289 = 0{\cdot}34809 : 3 = 0{\cdot}11603$$

$$x = 1{\cdot}30626.$$

2. Eksponentne enačbe:

Razreševanje eksponentnih enačb.

Dvočlensko eksponentno enačbo razrešiš, ako izraziš oba enačbena dela kakor potenci iste podloge in potem izenačiš potenčna eksponenta; ali pa, ako logaritmuješ dotično enačbo in potem poiščeš po že znanih pravilih vrednost za neznanko. Mnogočlensko eksponentno enačbo razrešiš, ako prestaviš člene tako, da se nahajajo v vsakem enačbenem delu le potence iste podloge, potem razstaviš dotične izraze na faktorje in skrčiš kolikor mogoče, nadalje pa postopaš kakor pri dvočlenskih eksponentnih enačbah. Mnogočlenska eksponentna enačba se torej pretvori v dvočlensko s pomočjo računskih zakonov. Izmed ostalih eksponentnih enačb moremo razrešiti nadalje le take, ki imajo obliko kvadratnih enačb ali se dadó pretvoriti na to obliko. N. pr.

a) Tročlensko eksponentno enačbo $a^{2x} + ba^x + c = 0$ razrešiš, ako postaviš $a^x = y$ (torej $a^{2x} = y^2$) in določiš iz kvadratne enačbe $y^2 + by + c = 0$ vrednost za y. Potem najdeš iz dvočlenske eksponentne enačbe

$$a^x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

vrednost za x.

b) Pri tročlenski eksponentni enačbi $\sqrt[x]{a} + b\sqrt[2x]{a} + c = 0$ postopaš istotako kakor v prejšnjem primeru.

c) Po računskih zakonih o potencah pretvoriš eksponentni enačbi $25^x - 3 \cdot 5^x = 10$ in $3^{1+z} + 3^{2-z} = 28$ na obliko kvadratnih enačb in sicer obliki $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 10$ in $3^{2z} - \frac{28}{3} \cdot 3^z = -3$. Iz teh enačb najdeš potem na isti način kakor pod *a)* vrednosti $x = 1$ in $z = 2, -1$.

d) Dvočlensko eksponentno enačbo $3^{2x} \cdot 4^{x-1} = 5^x$ razrešiš, ako jo logaritmuješ in potem poiščeš po že znanih pravilih vrednost za x.

$$2x \log 3 + (x - 1) \log 4 = x \log 5$$

$$x(2 \log 3 + \log 4 - \log 5) = \log 4$$

$$x = \frac{\log 4}{2 \log 3 + \log 4 - \log 5} = \frac{\log 4}{\log 36 - \log 5} = \frac{\log 4}{\log 7 \cdot 2}$$

$$x = \frac{0 \cdot 60206}{0 \cdot 85733} = 0 \cdot 7023.$$

Po računskih zakonih se je skrčilo: $2 \log 3 + \log 4 = \log 9 + \log 4 = \log 36$ in $\log 36 - \log 5 = \log \frac{36}{5} = \log 7 \cdot 2$.

e) Mnogočlensko eksponentno enačbo $2^x - 11^x = 2^{x+4} - 11^{x+1}$ razrešiš, ako jo najprej pretvoriš v dvočlensko in potem postopaš kakor pri prejšnji nalogi.

$$
\begin{aligned}
11^{x+1} - 11^x &= 2^{x+4} - 2^x \\
11^x(11-1) &= 2^x(2^4-1) \\
11^x \cdot 10 &= 2^x \cdot 15 \\
11^x \cdot 2 &= 2^x \cdot 3 \\
x(\log 11 - \log 2) &= \log 3 - \log 2 \\
x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 11 - \log 2} &= \frac{\log 1\cdot 5}{\log 5\cdot 5} = 0\cdot 2378.
\end{aligned}
$$

3. Logaritemske enačbe:

Logaritemska enačba = logarithmische Gleichung. Razreševanje logaritemskih enačb.

Enačba, pri kateri se nahaja neznanka v logaritmandu, se zove **logaritemska**. Logaritemsko enačbo razrešiš, ako jo najprej s pomočjo računskih zakonov pretvoriš v dvočlensko z obliko $\log A = \log B$, potem izenačiš logaritmanda in nadalje postopaš po že znanih pravilih. N. pr.

a) Logaritemsko enačbo $\frac{1}{6 - \log x} + \frac{2}{\log x} = 1$ razrešiš, ako postaviš $\log x = y$ in izračunaš najprej vrednost za y. Iz $\log x = 4, 3$ najdeš $x = 10000, 1000$.

b) Enačbo $x^{\log x - 1} = 100$ razrešiš, ako jo logaritmuješ in potem postaviš $\log x = y$. Iz $\log x = 2, -1$ najdeš $x = 100, \frac{1}{10}$.

c)
$$
\begin{aligned}
\log x + \log(x+1) &= 2\log(x-1) \\
\log[x(x+1)] &= \log(x-1)^2 \\
x(x+1) &= (x-1)^2 \\
x &= \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\log(4x+1) &= \log 3 + \tfrac{1}{2}(\log 50 + \log x) - 1 \\
\log\sqrt{4x+1} &= \log 3 + \log\sqrt{50x} - \log 10 \\
\log\sqrt{4x+1} &= \log\frac{3\sqrt{50x}}{10} \\
\sqrt{4x+1} &= \frac{3\sqrt{50x}}{10} \\
x &= 2.
\end{aligned}
$$

§ 49. Lastnosti kvadratne funkcije.

Oblika kvadratne funkcije.

Cela funkcija druge stopnje ali kvadratna funkcija ima vobče obliko $y = ax^2 + bx + c$ in se uničuje v slučajih, ki sta določena po korenih enačbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Kvadratna funkcija je sestavljena iz linearnih funkcij.

Kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ je enaka produktu dveh linearnih funkcij.

Dokaz. Navedena funkcija se da pretvoriti na obliko

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

v kateri se sme faktor $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ smatrati za enačbeni trinom, ki je po § 5. enak produktu korenskih faktorjev, t. j. dveh linearnih funkcij, v znakih

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

N. pr. $3x^2 + 4x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) =$

$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 1) = (3x + 1)(x + 1).$$

Predznak kvadratne funkcije.

Ako se kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ uničuje za vrednosti x_1 in x_2, je po prejšnjem

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz te identične enačbe sledi, da je funkcija $ax^2 + bx + c$ negativna (pozitivna) za vse med x_1 in x_2 ležeče x-ove vrednosti, če je a pozitiven (negativen), sicer pa se predznak funkcijske vrednosti ujema s predznakom stalnice a.

Največja in najmanjša vrednost kvadratne funkcije.

Kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ najmanjšo vrednost, če je a pozitiven; največjo vrednost pa, če je a negativen.

Dokaz. Navedena funkcija se da tako-le pretvoriti:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

V tej algebrajski vsoti se izpreminja prvi sumand, če se x izpreminja; drugi sumand pa ima stalno vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$. Za pozitiven a je prvi sumand pozitiven in dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ najmanjšo vrednost $= 0$; v tem slučaju ima torej tudi funkcija $ax^2 + bx + c$ najmanjšo vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$. Za negativen a je prvi sumand negativen in dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ največjo vrednost $= 0$; v tem slučaju ima tudi funkcija $ax^2 + bx + c$ največjo vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$.

N. pr.

$$3x^2 + 4x + 2 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3},$$

$$-3x^2 + 6x - 2 = -3\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right) = 1 - 3(x-1)^2.$$

Prva funkcija dobi za $x = -\frac{2}{3}$ najmanjšo vrednost $= \frac{2}{3}$, druga pa za $x = 1$ največjo vrednost $= 1$.

Funkciji $x + \frac{a}{x}$ določiš najmanjšo absolutno vrednost, ako jo pretvoriš na obliko

$$x + \frac{a}{x} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{x}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 4a}.$$

Iz te oblike sledi, da dobi funkcija $x + \frac{a}{x}$ najmanjšo absolutno vrednost, če ima prvi radikandov člen najmanjšo vrednost. Torej je $x = \sqrt{a}$ in $x + \frac{a}{x} = 2\sqrt{a}$.

Da se najde največja, oziroma najmanjša vrednost kvadratnih funkcij tudi še na drug način, spoznali bomo iz naslednjega odstavka.

Uporabne naloge.

1. Osnovnica nekega trikotnika je a in vsota ostalih stranic m; koliki morata biti stranici b in c, da ima trikotnik največjo ploščino?

Razrešitev. Ako postaviš v obrazec za ploščino $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ vrednosti $s = \frac{a+m}{2}$ in $c = m - b$, najdeš izraz

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{(m^2 - a^2)[a^2 - (2b - m)^2]},$$

kateri dobi največjo vrednost $\left(p = \frac{a}{4}\sqrt{m^2 - a^2}\right)$, če je $2b - m = 0$; potem je $b = \frac{m}{2}$ in $c = \frac{m}{2}$.

2. Iz neke točke D na hipotenuzi določenega pravokotnega trikotnika se spustita pravokotnici na kateti. Kje mora ležati točka D, da je ploščina nastalega pravokotnika največja?

Razrešitev. Kateti pravokotnega trikotnika sta a in b, hipotenuza je c. Napravi primerno sliko! Če pomeni x hipotenuzni odsek, ki je po točki D določen in kateti a priležen, in če sta y in z pravokotnici iz točke D na kateti, najdeš iz podobnih trikotnikov vrednosti za y in z. Potem je ploščina nastalega pravokotnika

$$p = yz = \frac{ab(cx - x^2)}{c^2} = ab\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{c^2}\right) = \frac{ab}{4} - ab\left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ta izraz dobi največjo vrednost $\left(p = \frac{ab}{4}\right)$, če je $\frac{x}{c} - \frac{1}{2} = 0$, torej $x = \frac{c}{2}$, t. j. točka D mora ležati v središču hipotenuze.

3. Očrtaj določenemu kvadratu najmanjši enakokraki trikotnik tako, da leži ena kvadratova stranica na trikotnikovi osnovnici!

Razrešitev. Kvadratova stranica je a. Vrh očrtanega enakokrakega trikotnika mora ležati na somernici kvadratove osnovnice. Napravi primerno sliko! Če pomeni x razdaljo trikotnikovega vrha od določenega kvadrata, najdeš iz podobnih trikotnikov vrednost za trikotnikovo osnovnico, namreč $y = \frac{a(a+x)}{x}$. Ploščina enakokrakega trikotnika je potem

$$p = \frac{y(a+x)}{2} = \frac{a(a+x)^2}{2x} = \frac{a}{2}\left(2a + x + \frac{a^2}{x}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left[2a + \sqrt{\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2}\right] = \frac{a}{2}\left[2a + \sqrt{\left(x - \frac{a^2}{x}\right)^2 + 4a^2}\right].$$

Ta izraz dobi najmanjšo vrednost ($p = 2a^2$), če je $x - \frac{a^2}{x} = 0$, torej $x = a$.

§ 50. Načrtavanje kvadratne funkcije in njen diferencijalni kvocijent.

Funkcijska črta kvadratne funkcije.

Geometrijsko podobo kvadratne funkcije $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ najdemo, ako poiščemo n. pr. razrešitvam:

$x = \cdots -4$	-2	0	2	4	6	8	10...
$y = \cdots -7$	0	5	8	9	8	5	0...

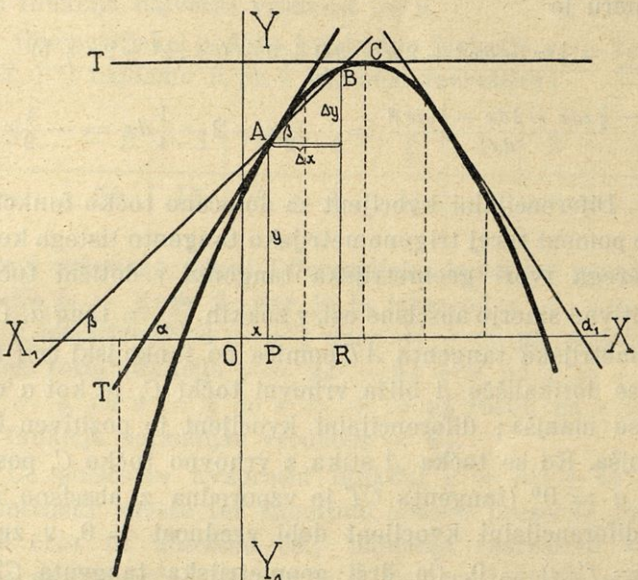
pripadajoče točke ter narišemo skoz te točke funkcijsko črto. Primerjaj sliko! Če pridenemo navedenim razrešitvam še naslednje:

$x = -\infty$	-40	-30	-20	...	16	20	30	∞
$y = -\infty$	-475	-280	-135	...	-27	-55	-160	$-\infty$,

vidimo, da raste funkcija $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ od $-\infty$ do 9 in potem pojema od 9 do $-\infty$, če raste premenljivka od $-\infty$ do $+\infty$. Za $x = 4$ dobi funkcija največjo vrednost $= 9$. Ker pripadajo enakim prirastkom premenljivke različni funkcijski prirastki, oziroma zmanjški, mora funkcijska črta biti kriva (k r i v u l j a). Iz funkcijske črte spoznamo, kje in kako raste (pojema) funkcija in kje dobi največjo, oziroma najmanjšo vrednost. Da je mogoče iz prirastka premenljivke in iz funkcijskega prirastka (zmanjška) izračunati trigonometrijsko tangento tistega kota, katerega tvori sekanta, oziroma tangenta funkcijske črte s pozitivno smerjo abscisne osi, bomo videli iz naslednjega.

Krivulja = die Kurve.

Recimo, da pripada določeni vrednosti $x = OP$ funkcijska vrednost $y = PA$. Če se x poveča za Δx, se funkcijska vrednost poveča za Δy, torej je v sliki $OR = x + \Delta x$ in $RB = y + \Delta y$. Sekanta AB, ki gre skoz točki A in B, tvori s pozitivno smerjo abscisne osi kot β, katerega trigonometrijska tangenta je določena po prirastkih Δx in Δy, v znakih tang $\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Če zavrtimo sekanto AB okoli točke A tako, da se točka B bliža točki A, se manjšata prirastka Δx in Δy. Ko se točka B stika s točko A, preide sekanta AB v tangento AT; kot β preide v kot α,



katerega tvori tangenta AT s pozitivno smerjo abscisne osi; izmerljiva prirastka Δx in Δy preideta v neizmerno majhna prirastka dx in dy, ki se zoveta diferencijala; in diferenčni kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = tang β preide v diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ = tang α, v znakih lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ (lim = limes = meja ali mejna vrednost).

Diferenčni kvocijent = Differenzenquotient. Diferencijal = das Differential. Diferencijalni kvocijent = Differentialquotient.

Diferencijalni kvocijent funkcije $y = f(x)$ z ozirom na premenljivko x zaznamujemo tako-le

Kako zaznamujemo in izračunamo diferencijalni kvocijent.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

ter izračunamo njegovo vrednost po pojasnilu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y + dy) - y}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx},$$

t. j. ako postavimo v določeno funkcijo namesto x izraz $x + dx$ in odštejemo od tega izračunanega zneska vrednost prvotne funkcije ter delimo dobljeno razliko z dx, najdemo kvocijent, v katerem je člen s faktorjem dx neizmerno majhen ($= 0$) in se sme zategadelj izpustiti. V našem primeru je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{4}(x + dx)^2 + 2(x + dx) + 5 - (-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5)}{dx} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}xdx + 2dx - \frac{1}{4}(dx)^2}{dx} = -\frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{4}dx = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Pomen diferencijalnega kvocijenta.

Diferencijalni kvocijent za določeno točko funkcijske črte pomeni torej trigonometrijsko tangento tistega kota α, katerega tvori geometrijska tangenta v dotični točki s pozitivno smerjo abscisne osi, v znakih $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\ \alpha$. Če se geometrijska tangenta AT pomiče po funkcijski črti tako, da se dotikališče A bliža vrhovni točki C, je kot α oster in se manjša; diferencijalni kvocijent je pozitiven in se manjša. Ko se točka A stika z vrhovno točko C, postane kot $\alpha = 0^0$ (tangenta CT je vzporedna z abscisno osjo) in diferencijalni kvocijent dobi vrednost $= 0$, v znakih $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$. Če drči geometrijska tangenta CT po funkcijski črti dalje na desno, postane kot α top ($= \alpha_1$) in diferencijalni kvocijent negativen.

Kako spoznamo, da kvadratna funkcija raste, oziroma pojema. Kdaj dobi kvadratna funkcija največjo, oziroma najmanjšo vrednost.

Dokler se vzdiguje funkcijska črta, raste funkcija in prirastek dy je pozitiven; torej je tudi diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ pozitiven, ker smatramo namreč prirastek dx vedno za pozitivno količino. Če pa pada funkcijska črta, pojema funkcija in prirastek dy in diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ sta negativna. Obratno smemo sklepati, da raste določena funkcija tako dolgo, dokler je njen diferencijalni kvocijent pozitiven; če pa postane diferencijalni kvocijent negativen, začne funkcija pojemati. Ko je diferencijalni kvocijent $= 0$, je funkcija največja (najmanjša). Iz enačbe $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ določiš torej tisto vrednost premenljivke x, za katero dobi funkcija največjo, oziroma najmanjšo vrednost. Prvi slučaj se nahaja pri funkcijah, ki rastejo, drugi pa pri funkcijah, ki pojemajo do dotične premenljivkine vrednosti. V našem primeru je diferencijalni kvocijent $= -\frac{1}{2}x + 2$, ki je pozitiven od $x = -\infty$ do $x = 4$; negativen pa od $x = 4$ do $x = +\infty$. Iz enačbe $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$ najdeš vrednost $x = 4$, za katero dobi navedena funkcija največjo vrednost $= 9$.

Primer za tolmačenje kvadratne funkcije.

Geometrijsko podobo kvadratne funkcije $y = 2x^2 - 6x + 9$ najdemo n. pr. s pomočjo razrešitev:

$x = \ldots -2$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\ldots$	
$y = \ldots 29$	17	9	5	$4\frac{1}{2}$	5	9	$\ldots$	,

Napravi primerno sliko! Diferencijalni kvocijent navedene funkcije je $= 4x - 6$. Ker je ta izraz od $x = -\infty$ do $x = \frac{3}{2}$ negativen, od $x = \frac{3}{2}$ do $x = +\infty$ pa pozitiven, pojema torej funkcija $y = 2x^2 - 6x + 9$ od $x = -\infty$ do $x = \frac{3}{2}$, od $x = \frac{3}{2}$ do $x = +\infty$ pa raste. Za $x = \frac{3}{2}$ dobi funkcija najmanjšo vrednost $= 4\frac{1}{2}$.

Kako se razrešujejo enačbe s pomočjo funkcijskih črt.

Če poiščemo kvadratni funkciji $y = ax^2 + bx + c$ geometrijsko mesto ter izmerimo abscise presečišč funkcijske črte in abscisne osi, najdemo razrešitve kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Če ima funkcijska črta z abscisno osjo dve, oziroma eno skupno točko, ima navedena kvadratna enačba dve, oziroma eno realno razrešitev; če pa nima funkcijska črta z abscisno osjo nobene skupne točke, nima omenjena kvadratna enačba nobene realne razrešitve. Primerjaj § 5!

Ako poiščemo dvema kvadratnima funkcijama (oziroma kvadratni in linearni funkciji) geometrijski mesti ter izmerimo koordinate skupnih točk, najdemo skupne razrešitve dotičnih dveh enačb. Če imata funkcijski črti skupne točke, imata dotični enačbi realne razrešitve; če pa nimata funkcijski črti nobene skupne točke, nimata omenjeni enačbi nobene realne razrešitve.

Drugi diferencijalni kvocijent. Ako prvi diferencijalni kvocijent še enkrat diferencujemo, dobimo drugi diferencijalni kvocijent. Ako je $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, potem je

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

Na isti način pišemo $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ in splošno $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$. Drugi diferencijalni kvocijent $f''(x)$ ima za $f'(x)$ isti pomen, kakor prvi diferencijalni kvocijent $f'(x)$ za funkcijo $f(x)$. Če je $f''(x)$ pozitiven, potem raste $f'(x)$, če je pa negativen, se $f'(x)$ zmanjšuje. Ako pomeni torej $f(x)$ določeno funkcijo, potem pove negativni kvocijent $f''(x)$, da se zmanjšuje $f'(x)$, da se zmanjšuje torej naklonski kot tangente dotične funkcijske črte. Ako postane za gotovo vrednost premenljivke x funkcija $f'(x) = 0$, potem je tangenta vzporedna z abscisno osjo in na istem mestu ima $f(x)$ svojo največjo ali pa najmanjšo vrednost. Ako je drugi diferencijalni kvocijent negativen, t. j. $f''(x) < 0$, potem se $f'(x)$ zmanjšuje, torej tudi naklonski kot. (Primerjaj sliko v začetku § 50, kjer postaja kot α vedno manjši, ako se pomika točka A čez B proti C.) V tem slučaju kaže funkcijska črta svojo konkavno stran abscisni osi in v točki C ima $f(x)$ svojo največjo vrednost. V nasprotnem slučaju je $f'(x) = 0$ in $f''(x) > 0$ in naklonski kot raste, funkcijska črta pa kaže svojo konveksno stran abscisni osi in funkcija $y = f(x)$ ima tu svojo najmanjšo vrednost. (Načrtaj dotično sliko.)

Največja in najmanjša vrednost funkcije = Maximum und Minimum der Funktion.

Iz navedenega izvajamo pravilo: Funkcija $y = f(x)$ doseže svojo najmanjšo vrednost (minimum), če je $f'(x) = 0$ in $f''(x) > 0$, in svojo največjo vrednost (maksimum), če je $f'(x) = 0$ in $f''(x) < 0$.

Opomnja: Izpeljava višjih diferencijalnih kvocijentov ne spada v obseg te knjige.

Naloga.

Poišči najmanjšo in največjo vrednost kvadratične funkcije $y = ax^2 + bx + c$.

Razrešitev. Prvi diferencijalni kvocijent je $y' = 2ax + b = 0$, iz tega dobiš $x = -\frac{b}{2a}$ in $y = c - \frac{b^2}{4a}$. Drugi diferencijalni kvocijent je $y'' = 2a$ in je pozitiven, če je a pozitiven, potem pa je $y = c - \frac{b^2}{4a}$ najmanjša vrednost funkcije y. Če je a negativen, ima $y = c - \frac{b^2}{4a}$ največjo vrednost. (Do istega sklepa smo prišli na drug način v § 49.)

Dostavek. Ako preleti neko telo v času t pot $\overline{OA} = s$ in v času t_1 pot $\overline{OA_1} = s_1$, potem je $\overline{AA_1} = s_1 - s$ odvisna od časa $t_1 - t$ in je torej funkcija časa. Ako je dalje razlika $t_1 - t = \Delta t$ izredno majhna, je tudi pot $s_1 - s = \Delta s$ primeroma majhna. Diferenčni kvocijent $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nam potem služi za merilo hitrosti (v) gibanja, ali matematično izraženo $v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, to se pravi: prvi diferencijalni kvocijent pota z ozirom na čas je enak hitrosti gibanja dotičnega telesa. Pri enakomernem gibanju je hitrost stalna in zato $\frac{dv}{dt} = 0$ ali po zamenjavi $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$. Pri neenakomernem gibanju pa se hitrost izpreminja, zato je $\frac{d^2s}{dt^2} \gtrless 0$. Izraz $\frac{dv}{dt}$ ali $\frac{d^2s}{vt^2}$ pomeni ipremembo hitrosti v časovni enoti in se zove pospešba (g). Če je pospešba $g > 0$ in stalna, potem je gibanje enakomerno pospeševalno, če je $g < 0$, je gibanje pojemalno.

Primer.

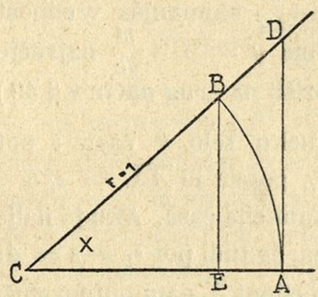
Pri metu navzgor je n. pr. pot $s = 60t - 4 \cdot 9t^2$. Iz tega sledi $v = \frac{ds}{dt} = 60 - 9 \cdot 8t$ in $g = \frac{dv}{dt} = -9 \cdot 8$. Pospešba je stalna in negativna, gibanje je torej enakomerno pojemalno.

§ 51. Diferencijalni kvocijenti nekaterih najnavadnejših funkcij.

Mejno vrednost funkcije $\frac{\sin x}{x}$ za $x = 0$ najdemo tako-le. Mera določenega kota $ACB = x$ (primerjaj sliko!) je pripadajoči lok $AB = x$, katerega polumer je $r = CB = 1$. Če narišemo $BE \perp AC$ in $AD \perp AC$, vidimo iz slike, da je

Mejna vrednost funkcije $\frac{\sin x}{x}$.

$BE < \widehat{AB} < AD$ ali pa z ozirom na pojasnila o trigonometrijskih funkcijah $\sin x < x < \operatorname{tang} x$. Iz te neenačbe sledi, da je $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$ ali $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Če se premenljivka x manjša in bliža ničli, se $\cos x$ bliža 1. Ko postane $x = 0$, sta obe meji funkcije $\frac{\sin x}{x}$ enaki; torej je $\frac{\sin x}{x} = 1$ za $x = 0$.



Diferencijalni kvocijent potence. Diferencovati = differenzieren.

1. Diferencijalni kvocijent funkcije $y = x^m$ najdemo tako-le. Ako porabimo deljivost

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1},$$

ki velja za cele pozitivne m, dobimo v našem slučaju izraz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^m - x^m}{(x + dx) - x} = (x + dx)^{m-1} + (x + dx)^{m-2}x + \\ + \ldots + (x + dx)x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Ker je $dx = 0$, je vsak izmed m sumandov navedenega kvocijenta enak x^{m-1}; torej je

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \text{ ali } \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Po tem pravilu se diferencujejo (se išče diferencijalni kvocijent) potence, katerih eksponent je celo pozitivno število. Da smemo po istem pravilu diferencovati tudi take potence, katerih eksponent je ali negativno ali ulomljeno število, bomo pozneje spoznali.

Diferencijalni kvocijent sinusa.

2. Diferencijalni kvocijent funkcije $y = \sin x$ najdemo tako-le. S pomočjo goniometrijskega obrazca, po katerem se sinusi odštevajo, dobimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x + dx) - \sin x}{dx} = \frac{2\cos\left(x + \frac{dx}{2}\right)\sin\frac{dx}{2}}{dx} = \\ = \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}};$$

torej je z ozirom na zgoraj navedeno mejno vrednost

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ ali } \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

3. Na isti način kakor poprej najdemo tudi diferencijalni kvocijent funkcije $y = \cos x$.

Diferencijalni kvocijent kosinusa.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x + dx) - \cos x}{dx} = -\frac{2 \sin\left(x + \frac{dx}{2}\right)\sin\frac{dx}{2}}{dx} =$$

$$= -\sin\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}};$$

torej je

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \text{ ali } \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

4. Ako poiščemo diferencijalni kvocijent funkcije $y = f(x) + k$, kjer pomeni k stalnico, najdemo

Diferencijalni kvocijent stalnice.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) + k - [f(x) + k]}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(x).$$

Ker se ta rezultat popolnoma ujema z rezultatom, ki ga dobimo, če diferencujemo funkcijo $y = f(x)$, smemo sklepati, da je diferencijalni kvocijent vsake stalnice $= 0$, v znakih

$$\frac{d(k)}{dx} = 0.$$

Če diferencujemo funkcijo $y = k \cdot f(x)$, kjer pomeni k stalnico, najdemo

Stalni faktor pri diferencovanju.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \cdot f(x + dx) - k \cdot f(x)}{dx} = k \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} =$$

$$= k \cdot f'(x).$$

Stalni faktor ostane torej pri diferencovanju neizpremenjen, v znakih

$$\frac{d[k \cdot f(x)]}{dx} = k \cdot f'(x).$$

Diferencijalni kvocijent algebrajske vsote.

5. Ako poiščemo diferencijalni kvocijent funkcije $y = f(x) \pm \varphi(x)$, dobimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) \pm \varphi(x+dx) - [f(x) \pm \varphi(x)]}{dx} =$$

$$= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \pm \frac{\varphi(x+dx) - \varphi(x)}{dx} =$$

$$= f'(x) \pm \varphi'(x).$$

Diferencijalni kvocijent algebrajske vsote dveh ali več funkcij najdemo, ako algebrajsko seštejemo diferencijalne kvocijente vseh sumandov.

Kako se diferencuje nerazvita funkcija.

6. Nerazvito funkcijo $f(x) + \varphi(y) = 0$, n. pr. $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ diferencujemo tako-le. Če raste neodvisna premenljivka x za dx, se odvisna premenljivka y izpremeni za dy; torej je tudi $f(x+dx) + \varphi(y+dy) = 0$. Iz enačb

$$\left.\begin{aligned} f(x+dx) + \varphi(y+dy) &= 0 \\ f(x) + \varphi(y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

najdemo

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{\varphi(y+dy) - \varphi(y)}{dx} = 0$$

ali

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{\varphi(y+dy) - \varphi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

to je

$$f'(x) + \varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Iz zadnje enačbe izračunamo diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ in sicer je $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{\varphi'(y)}$. V zgoraj navedenem primeru dobimo na ta način

$$2b^2x + 2a^2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Da velja zgoraj navedeno pravilo za diferencovanje potenc tudi v slučajih, ko je potenčni eksponent ali negativno ali ulomljeno število, spoznamo tako-le.

Iz enačb $y = \frac{1}{x}$ in $y + dy = \frac{1}{x + dx}$ sledi

Diferencovanje potenc z negativnimi in ulomljenimi eksponenti.

$$dy = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + dx)}{(x + dx)\,x} = -\frac{dx}{(x + dx)\,x}.$$

Potem je
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x + dx)\,x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ako pretvorimo funkcijo $y = x^{-m}$ na obliko $x^m - \frac{1}{y} = 0$, najdemo po prejšnjem

$$mx^{m-1} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in}$$

$$\frac{dy}{dx} = -mx^{m-1} \cdot y^2 = -mx^{m-1} \cdot x^{-2m} = -mx^{-m-1}.$$

Če damo funkciji $y = x^{\frac{m}{n}}$ obliko $x^m - y^n = 0$, dobimo po prejšnjem

$$mx^{m-1} - ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Naloge.

1. Določi diferencijalni kvocijent funkcij:

a) $y = \sqrt{2ax - x^2}$, *b)* $y = \sin(x^2 - a^2)$.

Razrešitev. *a)* Po pravilih o diferencovanju potence, algebrajske vsote, stalnega faktorja in zopet potence najdeš

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(2ax - x^2)}{dx} = \frac{2a - 2x}{2\sqrt{2ax - x^2}} =$$
$$= \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Isti rezultat tudi dobiš, ako postaviš $2ax - x^2 = z$. Potem je $y = \sqrt{z}$ in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{z})}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (2a - 2x) = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

b) Po pravilih o diferencovanju sinusa, algebrajske vsote in potence najdeš

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 - a^2) \cdot \frac{d(x^2 - a^2)}{dx} = 2x \cos(x^2 - a^2).$$

Isti rezultat tudi dobiš, ako postaviš $x^2 - a^2 = z$. Potem je $y = \sin z$ in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cos(x^2 - a^2).$$

2. Včrtaj določenemu krogu največji enakokraki trikotnik!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ako je v višina enakokrakega trikotnika, je po lastnostih pravokotnega trikotnika polovica osnovnice enaka geometrični sredini med daljicama v in $2r - v$, v znakih $\frac{o}{2} = \sqrt{v(2r - v)}$. Trikotnikova ploščina je potem $p = v\sqrt{v(2r - v)} = \sqrt{2rv^3 - v^4}$. Če ima p največjo vrednost, velja isto tudi za $p^2 = 2rv^3 - v^4$. Ako diferencujemo to funkcijo z ozirom na premenljivko v in dobljeni diferencijalni kvocijent izenačimo z ničlo, najdemo $6rv^2 - 4v^3 = 0$ in $v = \frac{3}{2}r$. Potem je trikotnikova osnovnica $= r\sqrt{3}$ in krak $= r\sqrt{3}$, t. j. zahtevani trikotnik je enakostraničen.

3. Določi tisti pokončni valj, kateremu je površje P in kateremu se da očrtati najmanjša krogla!

Razrešitev. Obrazec za valjevo površje je $P = 2r\pi(r + s)$. Središče očrtane krogle leži v presečišču diagonal osjega preseka. Polumer R očrtane krogle je določen po enačbi $R^2 = r^2 + \frac{s^2}{4}$ in prostornina te krogle po obrazcu

$$k = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(r^2 + \frac{s^2}{4}\right)^3} = \frac{\pi}{6} \sqrt{(4r^2 + s^2)^3},$$

ali če postaviš $s = \frac{P}{2r\pi} - r$, najdeš

$$k = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{4r^2 + \left(\frac{P}{2r\pi} - r\right)^2}\right]^3 = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{5r^2 + \frac{P^2}{4r^2\pi^2} - \frac{P}{\pi}}\right]^3.$$

Prostornina k je najmanjša, če dobi funkcija $5r^2 + \frac{P^2}{4r^2\pi^2} - \frac{P}{\pi}$ najmanjšo vrednost. Potem je

$$10r - \frac{P^2}{2r^3\pi^2} = 0;$$

torej je

$$r = \sqrt[4]{\frac{P^2}{20\pi^2}} = \sqrt{\frac{P}{2\pi\sqrt{5}}}$$

in

$$s = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{\frac{P}{2\pi\sqrt{5}}}.$$

4. Včrtaj določeni krogli pokončen valj z najmanjšim plaščem!

Razrešitev. Valjev plašč je določen po obrazcu $p = 2r\pi s$ in stranica po enačbi $s = 2\sqrt{R^2 - r^2}$; torej je $p = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{R^2r^2 - r^4}$. Plašč p je najmanjši, če dobi funkcija $\sqrt{R^2r^2 - r^4}$ najmanjšo vrednost. Potem je

$$\frac{2R^2r - 4r^3}{2\sqrt{R^2r^2 - r^4}} = 0;$$

torej $r = \frac{R}{2}\sqrt{2}$ in $s = R\sqrt{2}$, t. j. valj je enakostraničen.

Isti rezultat tudi najdemo, ako sklepamo tako-le. Plašč p je najmanjši, ako dobi funkcija $R^2r^2 - r^4$ najmanjšo vrednost i. t. d.

5. Odprava nedoločenega izraza $\frac{0}{0}$ s pomočjo diferencijalnega kvocijenta.

Ako dobi funkcija $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ za $x = m$ nedoločno obliko $\frac{0}{0}$, ker je $f(x) = 0$ in $\varphi(x) = 0$ za $x = m$, najdemo pravo vrednost funkcije, ako diferencujemo števec zase in imenovalec zase.

Dokaz. Ako se števec in imenovalec funkciji $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ stalno izpreminjata, potem je $y + \Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{\varphi(x + \Delta x)}$ ali tudi $y + \Delta y = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}$, ker je v našem slučaju za

$x = m$ tako $f(x) = 0$ kakor $\varphi(x) = 0$. Ako števec in imenovalec delimo z Δx, dobimo:

$$y + \Delta y = \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}}.$$

Če se bliža prirastek Δx ničli, stori isto tudi Δy in enačba dobi obliko

$$y = \frac{\dfrac{df(x)}{dx}}{\dfrac{d\varphi(x)}{dx}} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ako ima ulomek $y = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ še vedno obliko $\frac{0}{0}$, potem je treba števec in imenovalec še enkrat ali tudi večkrat diferencovati.

Primeri.

1. $y = \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$, če je $x = 0$. Ako pa diferencuješ števec in imenovalec, dobiš $y = \frac{\cos x}{1} = 1$ za $x = 0$. (Primerjaj nalogo v začetku § 51.)

2. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{0}{0}$, če je $x = 0$. S pomočjo diferencovanja pa dobiš $y = \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$ za $x = 0$.

3. $y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$ za $x = 1$. Z diferencovanjem dobiš $y = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3} = \frac{0}{0}$ za $x = 1$, ako pa še enkrat diferencuješ, potem je $y = \frac{6x - 2}{6x} = \frac{2}{3}$ za $x = 1$.

§ 52. Pojem o integralu.

Diferencovati. Integrovati = integrieren. Integral = das Integral. Integralni znak = das Integralzeichen.

I. Če poiščemo določeni funkciji $y = f(x)$ diferencijalni kvocijent $y' = f'(x)$ ali pa diferencijal $y'dx = f'(x)\,dx$, pravimo, da diferencujemo določeno funkcijo. N. pr. Funkcija x^3 ima diferencijalni kvocijent $3x^2$ in diferencijal $3x^2\,dx$. Ako poiščemo obratno določenemu diferencijalnemu kvocijentu $f'(x)$ ali pa določenemu diferencijalu $f'(x)\,dx$

prvotno funkcijo $f(x)$, pravimo, da integrujemo določeni diferencijalni kvocijent ali določeni diferencijal, v znakih $\int f'(x)\,dx = f(x)$. Znak $\int$ se imenuje integralni znak in se čita „integral“; prvotna funkcija $f(x)$ se zove integral. Vsak integral ima to lastnost, da je njegov diferencijal enak izrazu, ki stoji pod integralnim znakom; torej je $d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx$. Tako n. pr. pripada diferencijalu $3x^2dx$ integral x^3; kajti diferencijal funkcije x^3 je $3x^2dx$.

Obči ali nedoločeni integral = allgemeines oder unbestimmtes Integral.

Funkciji $f(x)$ in $f(x) + k$ se razlikujeta po stalni količini k in imata isti diferencijal $f'(x)\,dx$. Obratno smemo sklepati, da pripadata diferencijalu $f'(x)\,dx$ integrala $f(x)$ in $f(x) + k$. Ker je zadnji teh izrazov splošnejši in preide v prvega za $k = 0$, ga smatramo navadno za zahtevani integral ter ga imenujemo obči ali nedoločeni integral. Torej je vobče

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + k.$$

Nekateri nedoločeni integrali.

Naslednji nedoločeni integrali so posebno važni:

1. $\int dx = x + k$; 2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k$;

3. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + k$; 4. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + k$.

O resničnosti teh integralov se prepričaš, ako jim poiščeš diferencijale ter primerjaš te diferencijale z izrazi pod integralnim znakom.

Stalni faktor pri integrovanju.

Vsak stalni faktor diferencijala se sme postaviti pred integralni znak, v znakih

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$$

Integral algebrajske vsote.

Integral algebrajske vsote najdeš, ako algebrajsko sešteješ integrale vseh sumandov, v znakih

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.$$

O resničnosti teh dveh pravil se prepričaš, ako primerjaš diferencijal desnega dela navedenih enačb z izrazom pod integralnim znakom v levem enačbenem delu.

Kako se integruje.

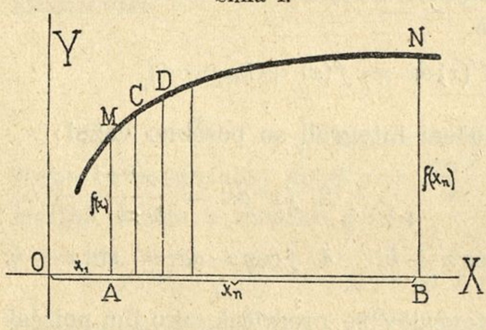
Občnega pravila za integrovanje nimamo. Integrale enostavnih diferencijalov si je treba zapomniti. S pomočjo te podlage integrujemo potem, da pretvorimo dotične diferencijale na takšno obliko, da je mogoče njih integrale spoznati. N. pr. Integral $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ določimo, ako zamenimo $\sqrt{a^2+x^2} = z$; potem je $a^2+x^2 = z^2$, $xdx = zdz$ in

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{zdz}{z} = \int dz = z+k = \sqrt{a^2+x^2}+k.$$

Določeni integral = bestimmtes Integral.

II. Recimo, da nam slika I. predočuje funkcijo $y = f(x)$. V funkcijski črti sta točki M in N z abscisama x_1 in x_n; kolika je ploskev med pripadajočima ordinatama $f(x_1)$ in $f(x_n)$ in med abscisno osjo in funkcijsko črto?

Slika I.



Ako razdelimo daljico $x_n - x_1$ na neizmerno veliko enakih delov ter narišemo skoz razdelišča x_2, x_3, x_4... vzporednice z ordinato AM, razpade ploskev $ABNM$ na pravokotnike, katerih osnovnice so neizmerno majhne ($= dx$) in katerih višine so zaporedoma funkcijske vrednosti $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$... $f(x_n)$ Ploskev $ABNM$ je torej

$$f(x_1)\,dx + f(x_2)\,dx + f(x_3)\,dx + \ldots + f(x_n)\,dx.$$

Takšna vsota se imenuje določeni integral funkcije $f(x)$ med mejama x_1 in x_n ter se zapiše krajše tako-le

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Kako izračunamo določeni integral.

Vrednost navedene vsote določimo tako-le. Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije (fx), veljajo po pojmu o diferencijalnem kvocijentu za točke M, C, D... naslednje enačbe:

$$f(x_1) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{dx},$$

$$f(x_2) = \frac{F(x_3) - F(x_2)}{dx},$$

$$f(x_3) = \frac{F(x_4) - F(x_3)}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_n) = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{dx}.$$

Ako pomnožimo vsako teh enačb z diferencijalom dx ter seštejemo zneske, najdemo

$$f(x_1)\,dx + f(x_2)\,dx + f(x_3)\,dx \ldots + f(x_n)\,dx = F(x_n) - F(x_1)$$

ali krajše izraženo

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx = F(x_n) - F(x_1).$$

Določeni integral funkcije $f(x)$ med mejama x_1 in x_n je enak $F(x_n) - F(x_1)$, kjer pomeni $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.

Uporabne naloge.

1. Kolika je ploskev, ki leži med funkcijsko črto $y = \sqrt{6x}$ in abscisno osjo od $x = 0$ do $x = 6$?

Razrešitev. Po prejšnjih pojasnilih je zahtevana ploskev

$$p = \int_0^6 y dx = \int_0^6 \sqrt{6x} \cdot dx = \sqrt{6} \int_0^6 x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \sqrt{6} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6 = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6^{\frac{3}{2}} = 24.$$

2. Kolika je ploskev, katero oklepata sinusova črta $y = \sin x$ in abscisna os od $x = 0$ do $x = \pi$?

Razrešitev. Primerjaj sinusovo črto v geometriji!

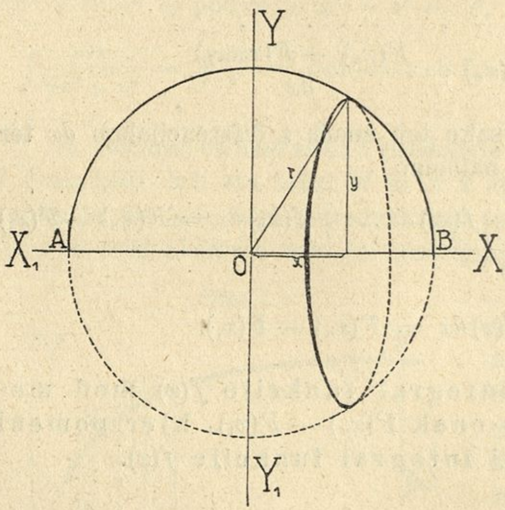
$$p = \int_0^\pi y dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\left[\cos x\right]_0^\pi =$$

$$= -(\cos \pi - \cos o) = +2.$$

3. Določi prostornino krogle!

Razrešitev. Ako položimo skoz središče določenega polukroga (slika II.) pravokotno soredje, velja med koordinatama (x, y) vsake točke polukrogovega oboda in med stalnico r enačba $x^2 + y^2 = r^2$. Če zavrtimo polukrog okoli premera AB za 360^0, nastane krogla. Pri tem vrtenju nariše vsaka polukrogova ordinata krožnico. Ako razdelimo premer $AB = 2r$ na neizmerno veliko enakih delov ter napravimo skoz vsako razdelišče presek, ki stoji pravokotno na AB, razpade krogla na neizmerno veliko valjastih plošč, katerih polumeri so zaporedne polukrogove ordinate in katerih višine so neizmerno majhne ($= dx$). Vsota vseh teh plošč tvori kroglino prostornino, to je v znakih

Slika II.



$$k = \int_{-r}^{+r} y^2 \pi \cdot dx = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\right]_{-r}^{+r} = \pi [r^3 - \tfrac{1}{3} r^3 + r^3 - \tfrac{1}{3} r^3] = \tfrac{4}{3} r^3 \pi.$$

VII. Postopice.

§ 53. Aritmetične postopice.

Aritmetična postopica = arithmetische Reihe oder Progression. Pojasnila.

Vsaka izmed številnih vrst:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17 i. t. d.,

b) 36, $33\frac{3}{5}$, $31\frac{1}{5}$, $28\frac{4}{5}$ i. t. d.

ima lastnost, da je razlika po dveh zaporednih števil (prejšnje število vzeto za subtrahend) vedno ista. Vsaka taka številna vrsta se imenuje **aritmetična postopica**, njena posamezna števila se zovejo členi in sicer prvi, drugi, tretji ... člen, in stalni razliki po dveh zaporednih členov se pravi **postopična razlika**. Če zaznamujemo z a_1, a_2, a_3, a_4 i. t. d. zaporedne člene, zapišemo pogoj za aritmetično postopico v znakih tako-le:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = d.$$

Aritmetično postopico imenujemo rastočo (padajočo ali pojemajočo), če se njeni zaporedni členi večajo (manjšajo). V prvem slučaju je postopična razlika pozitivna, v drugem negativna. Primerjaj zgoraj navedeni postopici ter določi pri vsaki razliko!

Tvorbeni zakon aritmetične postopice.

Vsak naslednji člen aritmetične postopice najdeš, ako prišteješ prejšnjemu členu razliko. Iz prvega člena izračunaš torej vse naslednje člene, ako prišteješ prvemu členu ponavljajoč razliko, t. j. v znakih

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 = d = a_1 + 3d, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

Občni člen aritmetične postopice.

Izraz $a_n = a_1 + (n-1)d$ se imenuje **občni člen aritmetične postopice**; on določa, kako izračunaš iz prvega člena in razlike katerikoli člen aritmetične postopice.

Ako odštaješ od zadnjega člena aritmetične postopice ponavljajoč razliko, najdeš zaporedoma vse prejšnje člene, t. j. v znakih

$$a_{n-1} = a_n - d,$$
$$a_{n-2} = a_n - 2d,$$
$$a_{n-3} = a_n - 3d,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d.$$

Vsota aritmetične postopice.

Ako izrazimo člene aritmetične postopice po zgoraj navedenih načinih, dobi vsota iz n členov obliko

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d],$$

ali pa

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d].$$

Če seštejemo te enačbi, najdemo

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots n\text{-krat}$$
$$\text{in } s_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Izraz $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ se imenuje **vsota aritmetične postopice**; on določa, kako moreš iz prvega in zadnjega člena in iz števila členov izračunati vsoto.

Vriniti = interpolieren.

Ako je treba med določeni števili a in b postaviti (vriniti) n števil tako, da tvorijo vsa ta števila z a in b skupaj aritmetično postopico, morajo števila, katera iščeš, imeti obliko

$$a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots a + nd,$$

kjer je razlika d še neznana. Za členom $a + nd$ pride število b, za katero velja isti tvorbeni zakon; torej je $b = a + (n+1)d$. Iz te enačbe določiš razliko za aritmetično postopico in sicer je

$$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

Naloge.

1. **Prvi člen aritmetične postopice je** $= 5$, **razlika** $= 8$ **in vsota** $= 1463$; **koliko členov šteje postopica?**

Razrešitev. Ako porabiš obrazca za občni člen in vsoto, dobiš enačbi $a_n = 5 + (n - 1)8 = -3 + 8n$ in $1463 = \frac{n}{2}(5 + a_n)$, iz katerih najdeš po zamenjalnem načinu $n = 19$.

2. Pri aritmetični postopici je produkt iz 7. in 15. člena $= 630$ in vsota med tema členoma ležečih členov znaša $185\frac{1}{2}$; kolik je prvi člen in kolika razlika (kako se glasi postopica)?

Razrešitev. Po pogoju naloge je $a_7 \cdot a_{15} = 630$ in $a_8 + a_9 + a_{10} + \ldots + a_{14} = 185\frac{1}{2}$. Iz teh podatkov dobiš s pomočjo obrazca za občni člen dve enačbi z neznankama a_1 in d. Potem najdeš $a_1 = 5\frac{1}{4}, 47\frac{3}{4}$ in $d = \pm 2\frac{1}{8}$.

3. Vrini med 16 in 250 toliko členov, da dobiš aritmetično postopico z vsoto 1995. Kolika je razlika te postopice?

Razrešitev. Če se vrine n členov, šteje postopica $(n + 2)$ člena; prvi člen je 16 in zadnji 250. Iz obrazca za vsoto najdeš $n = 13$. Členi postopice so: $16, 16 + d, 16 + 2d, \ldots 16 + 13d, 250 = 16 + 14d$. Iz pogoja $250 = 16 + 14d$ najdeš $d = 16\frac{5}{7}$.

4. Razdeli število 225 na več delov tako, da je vsak naslednji del za 2 večji od prejšnjega in da je zadnji del $= 29$. Kolik je prvi del in koliko je delov?

Razrešitev. Zahtevani deli tvorijo aritmetično postopico, pri kateri je razlika $= 2$, zadnji člen $= 29$ in vsota $= 225$. Obrazca za občni člen in vsoto dasta enačbi $29 = a_1 + 2(n - 1)$ in $225 = \frac{n}{2}(a_1 + 29)$, iz katerih najdeš $n = 15$ in $a_1 = 1$.

5. Štiri števila tvorijo aritmetično postopico; vsota vseh štirih števil je $= 58$ in vsota njihovih kvadratov $= 966$. Katera so števila?

Razrešitev. Zahtevana števila so: $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$. Iz pogojev naloge najdeš $x = 14\frac{1}{2}$ in $d = \pm 2\frac{1}{2}$. Števila, katera iščeš so: 7, 12, 17, 22 ali obratno: 22, 17, 12, 7.

6. Koliko troštevilčnih celih števil je deljivih s 17, in kolika je njihova vsota?

Razrešitev. Troštevilčna števila, ki so deljiva s 17, tvorijo aritmetično postopico, kateri je razlika 17. Oblika teh števil je $17n$, kjer pomeni n neko celo število. Po pogoju naloge mora biti $100 < 17n < 1000$, torej $\frac{100}{17} < n < \frac{1000}{17}$ ali drugače izraženo $5\frac{15}{17} < n < 58\frac{14}{17}$. Iz zadnje neenačbe sledi, da more n vsako izmed vrednosti

$$6, 7, 8 \ldots 56, 57, 58$$

imeti. 53 števil torej zadostuje navedeni nalogi; prvo teh števil je $17 \cdot 6 = 102$ in zadnje $17 \cdot 58 = 986$. Vsota vseh zahtevanih števil znaša $s = \frac{53}{2}(102 + 986) = 28832$.

§ 54. Geometrijske postopice.

Geometrijska postopica = geometrische Reihe oder Progression. Pojasnila.

Vsaka izmed številnih vrst:

a) 3, 9, 27, 81, 243 i. t. d.,

b) 8, $\frac{16}{5}$, $\frac{32}{25}$, $\frac{64}{125}$, $\frac{128}{625}$ i. t. d.

ima lastnost, da je kvocijent po dveh zaporednih števil (prejšnje število vzeto za divizor) vedno isti. Vsaka taka številna vrsta se imenuje geometrijska postopica, njena posamezna števila se zovejo členi in stalnemu kvocijentu po dveh zaporednih členov se pravi postopični kvocijent. Če zaznamujemo z a_1, a_2, a_3 i. t. d. zaporedne člene, izrazimo pogoj za geometrijsko postopico v znakih tako-le:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = k.$$

Geometrijsko postopico imenujemo rastočo (padajočo ali pojemajočo), če se njeni zaporedni členi večajo (manjšajo); v prvem slučaju je postopični kvocijent večji od enote, v drugem pa pravi ulomek. Primerjaj zgoraj navedeni postopici ter določi pri vsaki kvocijent!

Tvorbeni zakon geometrijske postopice.

Vsak naslednji člen geometrijske postopice najdeš, ako pomnožiš prejšnji člen s kvocijentom. Iz prvega člena izračunaš torej vse naslednje člene, ako pomnožiš prvi člen ponavljajoč s kvocijentom, t. j. v znakih

$$a_2 = a_1 k,$$
$$a_3 = a_2 k = a_1 k^2,$$
$$a_4 = a_3 k = a_1 k^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_1 k^{n-1}.$$

Izraz $a_n = a_1 k^{n-1}$ se imenuje **občni člen geometrijske postopice**; on določa, kako izračunaš iz prvega člena in kvocijenta katerikoli člen geometrijske postopice.

Občni člen geometrijske postopice.

Vsota iz n členov geometrijske postopice je po navedenem

Vsota geometrijske postopice.

$$s_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots + a_1 k^{n-1}.$$

Če pomnožiš to enačbo s kvocijentom k, dobiš

$$k s_n = a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \ldots + a_1 k^n,$$

in ako odšteješ od te enačbe prvo, najdeš

$$s_n (k-1) = a_1 k^n - a_1 \text{ in } s_n = \frac{a_1 (k^n - 1)}{k-1}.$$

Izraz $s_n = \frac{a_1 (k^n - 1)}{k-1}$ se imenuje **vsota geometrijske postopice**; on določa, kako moreš iz prvega člena, kvocijenta in števila členov izračunati vsoto.

Pri padajočih geometrijskih postopicah pojemajo (se manjšajo) zaporedni členi. Čim večje je število členov, tem bolj se bliža vrednost zadnjih členov ničli. Na isti način kakor zgoraj najdemo vsoto takih brezkončnih postopic in sicer

Vsota padajoče brezkončne geometrijske postopice.

$$\left.\begin{aligned} s &= a_1 + a_1 k + ak^2 + \ldots \text{ brez konca} \\ ks &= a_1 k + ak^2 + ak^3 + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{odšteto}$$

$$s(1-k) = a_1; \text{ torej } s = \frac{a_1}{1-k}.$$

Izraz $s = \frac{a_1}{1-k}$ **določa vsoto padajočih brezkončnih geometrijskih postopic.**

Kako se med določeni števili vrinejo novi členi.

Ako je treba med določeni števili a in b vriniti n takih števil, ki tvorijo z a in b skupaj geometrijsko postopico, morajo števila, katera iščeš, imeti obliko

$$ak,\ ak^2,\ ak^3, \ldots ak^n,$$

kjer pomeni k še neznani kvocijent geometrijske postopice. Za ak^n pride število b, za katero velja isti tvorbeni zakon; torej je $b = ak^{n+1}$. Iz te enačbe dobiš kvocijent za geometrijsko postopico in sicer je

$$k = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Naloge.

1. Določi vsoto naslednje postopice:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \ldots$$

Razrešitev. Ako urediš navedeno postopico tako-le:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \ldots,$$

dobiš dve brezkončni geometrijski postopici, katerima se dasta vsoti določiti.

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$

2. Vsota iz 1. in 3. člena geometrijske postopice je $9\frac{3}{4}$ in vsota iz 2. in 4. člena $14\frac{5}{8}$; kako se glasi postopica?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 + a_3 = 9\tfrac{3}{4} \text{ in } a_2 + a_4 = 14\tfrac{5}{8}.$$

Če porabiš pri teh podatkih obrazec za občni člen ponavljajoč in razstaviš dobljena zneska na faktorje, najdeš

$$a_1(1 + k^2) = \tfrac{39}{4} \text{ in } a_1k(1 + k^2) = \tfrac{117}{8}.$$

Ako deliš zadnji enačbi eno z drugo, dobiš $k = \frac{3}{2}$. Potem najdeš $a_1 = 3$.

3. Produkt iz 1. in 8. člena geometrijske postopice znaša 4374 in vsota iz 4. in 5. člena 135; kolika je vsota 8 členov?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 \cdot a_8 = 4374 \text{ in } a_4 + a_5 = 135.$$

Ako porabiš obrazec za občni člen, dobiš

$$a_1^2 k^7 = 4374 \text{ in } a_1 k^3 (1 + k) = 135.$$

Če deliš kvadrat druge enačbe s prvo, najdeš kvadratno enačbo, iz katere dobiš $k = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. Potem je $a_1 = 16, 273\frac{3}{8}$ in $s_8 = 788\frac{1}{8}$.

4. Vsota treh števil, ki tvorijo geometrijsko postopico, znaša 21; vsota njihovih kvadratov je 189. Katera so števila?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21 \text{ in } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 189$$

ali drugače izraženo

$$a_1(1 + k + k^2) = 21 \text{ in } a_1^2(1 + k^2 + k^4) = 189.$$

Ako deliš kvadrat prve enačbe z drugo, najdeš obratno enačbo četrte stopnje, iz katere dobiš $k = \frac{1}{2}, 2$. Potem je $a_1 = 12, 3$. Zahtevana števila so: 12, 6, 3 ali 3, 6, 12.

Druga razrešitev. Ako odštevaš od kvadrata prve enačbe drugo in dobljeni znesek deliš s prvo enačbo, najdeš vrednost produkta $a_1 k$. Iz te vrednosti dobiš s pomočjo prve enačbe iste rezultate kakor zgoraj.

5. Prvi, drugi, peti in zadnji člen aritmetične postopice tvorijo štiri zaporedne člene geometrijske postopice. Če znaša vsota te četveročlenske postopice 80, kolika je vsota aritmetične postopice?

Razrešitev. Če tvorijo členi a, $a + d$, $a + 4d$ in $a + (n - 1)d$ aritmetične postopice štiri zaporedne člene geometrijske postopice, je

$$\frac{a+d}{a} = \frac{a+4d}{a+d} = \frac{a+(n-1)d}{a+4d}.$$

V tem izrazu se nahajata dve enačbi. Nadalje je po pogoju naloge $4a + (n + 4)d = 80$. Iz navedenih enačb najdeš: $n = 14$, $a = 2$, $d = 4$. Vsota aritmetične postopice je 392.

6. Kvadratu s stranico a se včrta drugi kvadrat tako, da njegova oglišča razpolavljajo stranice prvega kvadrata; drugemu kvadratu se včrta na isti način tretji kvadrat i. t. d. Koliko znašajo *a)* obsegi, *b)* ploščine vseh teh kvadratov?

Razrešitev. Stranica prvega kvadrata je $= a$. Stranico drugega kvadrata najdeš po Pitagorovem izreku in sicer je $a_2 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Stranica tretjega kvadrata je $a_3 = $ $= a_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$, stranica četrtega kvadrata je $a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$, i. t. d. Ako primerjamo navedene rezultate, vidimo, da tvorijo stranice zaporednih kvadratov geometrijsko postopico, katere prvi člen je $= a$ in kvocijent $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Obsegi vseh kvadratov znašajo

$$s = 4a + 4a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 4a \cdot (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \ldots =$$
$$= \frac{4a}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 4a(2 + \sqrt{2}).$$

Ploščine vseh kvadratov znašajo

$$S = a^2 + a^2 \cdot (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + a^2 \cdot (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^4 + \ldots =$$
$$= \frac{a^2}{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 2a^2.$$

§ 55. Obrestno obrestni računi.

Obrestno obrestni račun = Zinseszinsrechnung.

Dostikrat se nalože glavnice ali kapitali tako na obresti, da se pridenejo obresti koncem vsake dobe (navadno koncem vsakega leta ali poluletja) h kapitalu ter se s tem vred zopet nalože na obresti. V takem slučaju pravimo: kapital je naložen na obrestne obresti.

Pri obrestno obrestnih računih pride v poštev: 1. glavnica ali kapital, 2. čas, 3. odstotek ali procent (obrestna mera), 4. obresti.

Obrestovalni faktor = Verzinsungsfaktor.

Če naložiš kapital po $p\,\%$, naraste 100 K kapitala z obrestmi vred v 1 letu na $(100 + p)$ kron, 1 K kapitala torej na $\frac{100+p}{100}$ kron $= (1 + \frac{p}{100})$ kron. Vrednost $1 + \frac{p}{100} = k$, na katero naraste kapitalova enota z obrestmi vred v 1 letu, imenujemo obrestovalni faktor.

Ker je vrednost kapitalove enote čez eno leto enaka k, ima kapital a čez 1 leto vrednost $a_1 = ak$, t. j. **kapitalovo vrednost čez 1 leto najdeš, ako pomnožiš prvotni kapital z obrestovalnim faktorjem.** Prvotni kapital za drugo leto je a_1 in naraste z obrestmi vred koncem tega leta na vrednost $a_2 = a_1 k = ak^2$. Kapital tretjega leta je a_2 in dobi koncem tega leta vrednost $a_3 = a_2 k = ak^3$ i. t. d. Čez n let ima torej kapital a vrednost $a_n = ak^n$.

Kako izračunaš vrednost kapitala po določenem času.

Enačba $a_n = ak^n$ določuje vrednost kapitala, naloženega na obrestne obresti, čez n let. Iz te enačbe se da določiti tudi vsaka izmed količin a, k, n; iz pogoja za obrestovalni faktor $k = 1 + \frac{p}{100}$ najdeš procente. Kadar se obresti kapitalizujejo (pridenejo h kapitalu) poluletno, je obrestovalni faktor $k = 1 + \frac{p}{200}$ in namesto n se postavi $2n$.

Enačba $a_n = ak^n$ ne velja samo za kapitale, naložene na obrestne obresti, temveč tudi za količine sploh, ki se večajo po stalnem razmerju kakor n. pr. prebivalci kake dežele, množina lesa v gozdu i. t. d.

Ako naložiš v začetku ali koncem vsakega leta isti znesek r na obrestne obresti, najdeš vrednost vseh teh zneskov v začetku, oziroma koncem n-tega leta tako-le. Prvi znesek je naložen $(n-1)$ leto na obrestne obresti; vsak naslednji znesek pa 1 leto manj ko prejšnji. Torej je

Kako izračunaš vrednost letnih zneskov po določenem času.

vrednost 1. zneska ob času zadnjega vplačila $= rk^{n-1}$,
„ 2. „ „ „ „ „ $= rk^{n-2}$,
„ 3. „ „ „ „ „ $= rk^{n-3}$,
. . . .
„ $(n-1)$. „ „ „ „ „ $= rk$,
„ n. „ „ „ „ „ $= r$

in vsota vrednosti vseh n zneskov je

$$s_n = r(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-2} + k^{n-1})$$

ali skrčeno po pravilu prejšnjega paragrafa

$$s_n = r\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Enačba $s_n = r\frac{k^n - 1}{k - 1}$ določuje vrednost vseh skoz n let vplačanih zneskov r in sicer ob času zadnjega vplačila. Iz te enačbe se dasta določiti tudi količini r in n; z ozirom na količino k se ne da enačba razrešiti na tej stopnji.

Na obrestne obresti naloženi kapital a, ki se koncem vsakega leta poveča, oziroma zmanjša za znesek r, ima po zgoraj navedenem na koncu n-tega leta vrednost

$$b = ak^n \pm r\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Iz te enačbe moreš določiti tudi količine a, r in n.

Renta = die Rente.

Znesek, ki se komu skoz nekatera leta izplačuje, se imenuje renta. Renta je ali vsako leto enako velika (stalna) ali včasih tudi po določenem zakonu izpremenljiva; izplačuje se navadno koncem (redkokdaj v začetku) vsakega leta, oziroma poluletja. Renta se mora kupiti, t. j. za rento se mora poprej neka vsota (vloga) ali enkrat ali ob določenih obrokih plačati.

Enačbi za rente.

Pri vsaki renti je važna njena gotova vrednost, t. j. tisti znesek, ki bi se moral v začetku onega leta, v katerem se prvokrat izplača renta, zanjo plačati. Ako naložiš gotovo vrednost (a) rente na obrestne obresti, dobiš za časa zadnje rente isti znesek, kakor če bi naložil vsako rento r takoj, ko jo dobiš, na obrestne obresti, t. j. v znakih

$$ak^n = r\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Iz te enačbe se da izračunati vsaka izmed količin a, r in n.

Če bi se renta dobivala skoz n let in sicer v začetku vsakega leta, bi zanjo veljala ta-le enačba

$$ak^{n-1} = r\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Vrednosti določenih kapitalov, ki jih je treba izplačati ob različnih obrokih, se dado med seboj primerjati le po njih gotovih vrednostih ali po tistih končnih vrednostih, katere dobijo posamezni kapitali za časa zadnjega obroka, ki se jemlje v poštev v dotičnem slučaju.

Naloge.

1. Sedanji vrednosti dveh kapitalov se razlikujeta za 1000 K. Večji kapital je naložen po 4%, manjši po $4\frac{1}{2}$%; čez 20 let bo prvi kapital dvakrat tolik ko drugi. Kolik je vsak kapital?

Razrešitev. Večji kapital je x, manjši $x - 1000$. Vrednosti teh kapitalov čez 20 let sta $x \cdot 1{\cdot}04^{20}$ in $(x - 1000) \cdot 1{\cdot}045^{20}$. Po pogoju naloge je

$$x \cdot 1{\cdot}04^{20} = 2(x - 1000) \cdot 1{\cdot}045^{20}.$$

Iz te enačbe najdeš $x = \frac{2000 \cdot 1{\cdot}045^{20}}{2 \cdot 1{\cdot}045^{20} - 1{\cdot}04^{20}} = 1831{\cdot}92$ K.

2. Kapital 30000 K je 15 let in sicer v začetku po 5%, pozneje po 4% naložen na obrestne obresti in naraste v tem času na 58327 K; koliko časa je bil naložen po 5%?

Razrešitev. Kapital je n let po 5% in $(15 - n)$ let po 4% naložen. Iz enačbe

$$58327 = 30000 \cdot 1{\cdot}05^{n} \cdot 1{\cdot}04^{15-n}$$

najdeš $n = \frac{\log 58327 - \log 30000 - 15 \log 1{\cdot}04}{\log 1{\cdot}05 - \log 1{\cdot}04} = 8$ let.

3. Nekdo si izposodi 2400 K po $3\frac{1}{2}$% in posodi ta denar drugemu po 5%; koliko ima dobička v 9 letih?

Razrešitev. Dobiček znaša vsako leto $1\frac{1}{2}$% od kapitala 2400 K, t. j. 36 K. Ti zneski se obrestujejo po 5% in narastejo v 9 letih na

$$s_9 = 36 \cdot \frac{1{\cdot}05^9 - 1}{0{\cdot}05} = 396{\cdot}98 \text{ K}.$$

4. Od nekega dolga se plača koncem vsakega leta 250 K. Če znaša dolg čez 15 let še 1300 K in se obresti računajo po $4\frac{1}{2}$%, *a)* kolik je bil prvotni dolg, *b)* čez koliko let bi bil dolg popolnoma poravnan?

Razrešitev. *a)* Iz enačbe

$$a \cdot 1{\cdot}045^{15} - 250 \cdot \frac{1{\cdot}045^{15} - 1}{0{\cdot}045} = 1300$$

najdeš prvotni dolg $a = 3356{\cdot}85$ K.

b) Iz enačbe

$$3356{\cdot}85 \cdot 1{\cdot}045^n = 250 \cdot \frac{1{\cdot}045^n - 1}{0{\cdot}045}$$

najdeš $$n = \frac{\log 10000 - \log 3957{\cdot}67}{\log 1{\cdot}045} = 21{\cdot}05 \text{ let},$$

t. j. dolg bo poravnan čez 21 let, če bo zadnji obrok nekoliko večji od prejšnjih.

5. Parni stroj velja 17.000 K, popravljalni stroški znašajo poprečno na leto 1160 K in vsakih 25 let je treba kupiti nov stroj. S katerim kapitalom se dado vsi ti stroški enkrat za vselej poravnati, če se je stroj ravno kupil in se obresti računajo po 4%?

Razrešitev. Obrestne obresti dotičnega kapitala čez 25 let morajo biti enake kupni ceni parnega stroja, povečani za oni znesek, na katerega narastejo popravljalni stroški v 25 letih, t. j. v znakih

$$a \cdot 1{\cdot}045^{25} - a = 17000 + 1160 \cdot \frac{1{\cdot}04^{25} - 1}{0{\cdot}04}.$$

Iz te enačbe najdeš $a = 39208{\cdot}4$ K.

6. Kdaj se plača 24000 K za rento 1000 K, ki se dobiva skoz 24 let, če se obresti računajo po $3\frac{3}{4}\%$?

Razrešitev. Gotovi vrednosti rente in kapitala, ki se plača za rento, sta enaki. Torej veljata enačbi

$$a \cdot 1{\cdot}0375^{24} = 1000 \cdot \frac{1{\cdot}0375^{24} - 1}{0{\cdot}0375},$$

$$a \cdot 1{\cdot}0375^n = 24000,$$

iz katerih je treba gotovo vrednost a iztrebiti. Potem najdeš

$$1{\cdot}0375^n = \frac{0{\cdot}9 \cdot 1{\cdot}0375^{24}}{1{\cdot}0375^{24} - 1} \text{ in } n = 11{\cdot}62 \text{ let}.$$

7. Koliko moraš skoz 20 let in sicer v začetku vsakega leta vložiti pri zavarovalnem društvu, da dobivaš potem skoz 12 naslednjih let rento 600 K, če se računajo obresti po 4%?

Razrešitev. Gotova vrednost vseh vlog je enaka gotovi vrednosti 12letne rente. Torej veljata enačbi

$$a \cdot 1{\cdot}04^{19} = x \cdot \frac{1{\cdot}04^{20} - 1}{0{\cdot}04}, \qquad a \cdot 1{\cdot}04^{32} = 600 \cdot \frac{1{\cdot}04^{12} - 1}{0{\cdot}04}.$$

Ako iztrebiš iz teh enačb gotovo vrednost a, najdeš

$$x = \frac{600}{1{\cdot}04^{13}} \cdot \frac{1{\cdot}04^{12} - 1}{1{\cdot}04^{20} - 1} = 181{\cdot}85 \text{ K}.$$

Rente so lahko časovne ali pa dosmrtne. Časovne rente se izplačujejo določeno število let, dosmrtne rente pa se izplačujejo do smrti dotične osebe. Računi o dosmrtnih rentah se opirajo na verjetnost dolgosti življenja in so v knjigi uvrščeni vsled tega za računi o verjetnosti.

VIII. Sestavbe ali kombinacije.

Sestavljati = kombinieren. Sestavba = die Kombination. Prvek = das Element. Skupina = die Komplexion. Kazalo = der Zeiger oder Index. Pojasnila.

Določene stvari ali določena znamenja sestavljamo ali kombinujemo (v širšem pomenu besede), ako jih pravilno uredimo, oziroma razporedimo, ali ako napravimo iz njih oddelke, ki ustrezajo določenim pogojem. Stvari ali znamenja, ki se kombinujejo, se zovejo prveki ali elementi, vsak spoj več elementov pa se imenuje skupina ali kompleksija. Posamezne elemente zaznamujemo ali s črkami ali s števili naravne številne vrste (s kazali) ali pa tudi tako, da si izberemo neko črko, kateri pridenemo kazala, n. pr. a_1, a_2, a_3, a_4 . . . Izmed dveh elementov je tisti višji (nižji), ki stoji pozneje (poprej) v abecedi, ali ki ima večje (manjše) kazalo. Tako je n. pr. element 5 višji od elementa 3 in element c nižji od elementa d. Izmed dveh skupin je tista višja, v kateri najdeš od leve proti desni poprej višji element, n. pr. skupina $adbc$ je višja od skupine $acbd$. Najnižja skupina je tista, v kateri ni višjega elementa pred nižjim, najvišja pa tista, v kateri ni nižjega elementa pred višjim. V najnižji skupini so elementi naravno urejeni od najnižjega do najvišjega, v najvišji skupini pa sledijo elementi drug drugemu v obratnem redu. Tako je n. pr. $abcde$ najnižja in $edcba$ najvišja skupina.

§ 56. Permutacije.

Premeščati = permutieren. Premeščaj = die Permutation.

Ako prestavljamo določene elemente na vse mogoče načine in sicer tako, da se nahajajo v vsaki skupini vsi elementi, pravimo, da premeščamo elemente. Posamezne skupine se imenujejo premeščaji ali permutacije. Število premeščajev iz n elementov zaznamujemo z znakom P_n.

Kako se tvorijo premeščaji in koliko je njih število iz določenih elementov.

En element ima samo en premeščaj, v znakih $P_1 = 1$. Dva elementa a in b imata dva premeščaja in sicer ab in ba, v znakih $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Premeščaje iz treh elementov a, b, c stvorimo, ako združimo element a s premeščajema elementov b in c, potem element b s premeščajema elementov a in c, končno element c s premeščajema elementov a in b, t. j. abc, acb, bac, bca, cab, cba. Število premeščajev je v tem slučaju: $P_3 = 3 \cdot P_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Premeščaje iz štirih elementov a, b, c, d stvorimo, ako združimo najprej element a s premeščaji ostalih elementov b, c in d, potem element b s premeščaji ostalih elementov a, c in d, nadalje element c s premeščaji ostalih elementov a, b in d, končno element d s premeščaji ostalih elementov a, b in c, t. j.

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$.

Število premeščajev je v tem slučaju

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Na isti način, kakor smo zgoraj navedli, stvorimo tudi premeščaje iz 5, 6, ... n elementov; število premeščajev v teh slučajih je določeno po izrazih

$$P_5 = 5 \cdot P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$
$$P_6 = 6 \cdot P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n = n \cdot P_{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots n.$$

Za produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ rabimo znamenje $n!$ in ga čitamo faktorjelni n. Torej je $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n = n!$ Število premeščajev iz določenih elementov je enako produktu naravnih števil od 1 do števila, katero pove, koliko je elementov.

Iz zgoraj navedenega izvajamo, da najdemo vse premeščaje določenih elementov po tem-le pravilu. Ako zapišeš elemente v naravnem redu od najnižjega do najvišjega, stvoriš najnižji premeščaj. Iz vsakega prejšnjega premeščaja najdeš naslednji višji premeščaj, ako greš v zadnjem premeščaju od desne proti levi, dokler ne prideš do elementa, na čigar mesto je moči postaviti višji element izmed onih, ki mu sledijo na desni; ta element zapišeš na dotično mesto; elementi pred njim ostanejo neizpremenjeni, ostali pa pridejo za njim v naravnem redu.

Ako se nahaja med določenimi elementi več enakih, postopaš pri tvorjenju vseh mogočih premeščajev istotako, kakor če so vsi elementi različni. N. pr.

abbbc	*babbc*	*bbbca*	*cabbb*
abbcb	*babcb*	*bbcab*	*cbabb*
abcbb	*bacbb*	*bbcba*	*cbbab*
acbbb	*bbabc*	*bcabb*	*cbbba*.
	bbacb	*bcbab*	
	bbbac	*bcbba*	

Ako se nahaja med določenimi n elementi p enakih, določiš število vseh mogočih in med seboj različnih premeščajev tako-le. Pridenemo li enakim p elementom kazala (t. j. pri zgoraj navedenem primeru b_1, b_2, b_3), postanejo vsi elementi različni in število premeščajev je potem določeno po izrazu $n!$. Če razvrstimo vse te premeščaje v oddelke tako, da se premeščaji vsakega oddelka razločujejo med seboj samo po različnih razporedbah elementov s kazali (n. pr. $ab_1cb_2b_3$, $ab_1cb_3b_2$, $ab_2cb_1b_3$, $ab_2cb_3b_1$, $ab_3cb_1b_2$, $ab_3cb_2b_1$), dobimo v vsakem oddelku po toliko premeščajev, kolikor jih dado elementi s kazali, v znakih $p!$, in oddelkov je toliko, kolikorkrat se nahajajo premeščaji enega oddelka v vseh premeščajih, t. j. v znakih $n!:p!$. Ako izpustimo potem kazala (smatramo elemente s kazali za enake), dobimo v vsakem oddelku po en premeščaj, in število vseh različnih premeščajev se ujema s številom vseh oddelkov.

Število premeščajev iz n elementov, med katerimi je p enakih, je torej $\frac{n!}{p!}$.

Ako se nahaja med n elementi p enakih in izmed ostalih zopet r enakih elementov, najdemo na isti način kakor zgoraj, da je število vseh različnih premeščajev določeno po izrazu

$$\frac{n!}{p!r!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots r}.$$

Naloge.

1. Koliko četveroštevilčnih števil moreš iz elementov 3, 0, 7, 4 napraviti tako, da se nahajajo v vsakem premeščaju vsi ti elementi?

Razrešitev. Ker ne moreš pri zahtevanih četveroštevilčnih številih elementa 0 postaviti na najvišje mesto, dobiš povsem tri skupine števil, izmed katerih ima prva element 3, druga element 4 in tretja element 7 na najvišjem mestu. Vseh teh števil je 3 krat $P_3 = 3 \cdot 3! = 18$.

2. Kolika je vsota vseh četveroštevilčnih števil stvorjenih iz elementov 1, 2, 3, 4 in sicer tako, da se nahajajo v vsakem številu vsi navedeni elementi?

Razrešitev. Element 4 more oziroma na mestu enic, desetic, stotic in tisočic stati tolikokrat, kolikor premeščajev je mogočih iz ostalih elementov, t. j. $P_3 = 3! = 6$. Množina enot, katere izražamo z elementom 4, je torej

$$6 \cdot 4 + 6 \cdot 40 + 6 \cdot 400 + 6 \cdot 4000 = 26664.$$

Na isti način najdemo, da predočujemo z elementi 3, 2, 1 oziroma 19998, 13332, 6666 enot. Vsota števil stvorjenih iz elementov 1, 2, 3, 4 znaša 66660.

3. Koliki premeščaj je *cdaeb* od *abcde*?

Razrešitev. Premeščaj *cdaeb* ima tretji element *c* na prvem mestu in se nahaja zato v tretji skupini. Pred to skupino sta še dve, vsaka po 24 premeščajev. Prvi premeščaj tretje skupine je torej 49. in ima element *a* na drugem mestu. Takih premeščajev je 6; potem sledi 6 premeščajev z elementom b na drugem mestu; sedaj se začnejo premeščaji z elementom d na drugem mestu in drugi premeščaj izmed teh zadnjih je v nalogi naveden. To da skupaj 62 premeščajev.

§ 57. Kombinacije.

Kombinacija = die Kombination.

Določene elemente sestavljamo ali kombinujemo, ako napravimo iz njih vse mogoče skupine po dva, po tri, po štiri ... elemente tako, da niso v dveh skupinah isti elementi. Skupine po dva elementa se zovejo *ambe* ali *dvojice* ali *kombinacije drugega razreda*, skupine po tri elemente so *terne* ali *trojice* ali *kombinacije tretjega razreda*, skupine po štiri elemente se imenujejo *kvaterne* ali *četverice* ali *kombinacije četrtega razreda*, skupine po pet elementov so *kvinterne* ali *peterice* ali *kombinacije petega razreda* i. t. d. Elementi se smejo smatrati za kombinacije prvega razreda in se zovejo potem *unije* ali *samice*.

Kombinacije so dvojne: *a)* brez ponavljanja, *b)* s ponavljanjem; pri prvih sme imeti skupina en in isti element le enkrat, pri drugih tudi večkrat. Število vseh mogočih kombinacij r-tega razreda brez ponavljanja, oziroma s ponavljanjem iz n elementov zaznamujemo s K_n^r oziroma s $K_n^{p,r}$.

Kako stvorimo iz določenih elementov kombinacije brez ponavljanja in kako določimo njih število.

I. Iz n določenih elementov stvorimo vse ambe brez ponavljanja, ako združimo vsak element z vsakim višjim elementom. N. pr. iz elementov a, b, c, d dobimo te-le ambe: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Vse mogoče ambe in sicer vsako po dvakrat bi pa tudi dobili, če bi združili vsak element z vsakim izmed ostalih elementov; zakaj ako združimo elementa b in d med seboj, dobimo ambi bd in db, ki sta enaki. Število vseh različnih amb iz n elementov je torej

$$K_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2}.$$

Iz n določenih elementov stvorimo vse terne, ako napravimo iz teh elementov najprej vse ambe brez ponavljanja in potem združimo vsako ambo z vsakim višjim elementom, katerega ni v ambi. N. pr. Iz elementov a, b, *c*, *d* dobimo te-le terne: *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*. Vse mogoče terne in sicer vsako terno po trikrat bi pa tudi dobili, če bi združili vsako ambo z vsakim elementom, katerega ni v ambi; zakaj ako združimo n. pr. ambe *ab*, *ac*, *bc* oziroma z elementi *c*, *b*, *a*, dobimo terne *abc*, *acb*, *bca*, ki so enake med seboj. Število vseh različnih tern brez ponavljanja iz n elementov je torej

$$K_n^3 = K_n^2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{n}{3}.$$

Iz n določenih elementov stvorimo vse kvaterne brez ponavljanja, ako napravimo iz teh elementov najprej vse ambe in terne brez ponavljanja in potem združimo vsako terno z vsakim višjim elementom, katerega ni v terni. N. pr. Iz elementov *a*, *b*, *c*, *d* najdemo to-le kvaterno: *abcd*. Vse mogoče kvaterne in sicer vsako kvaterno po štirikrat bi pa tudi dobili, če bi združili vsako terno z vsakim elementom, katerega ni v terni; zakaj če združimo n. pr. terne: *abc*, *abd*, *acd*, *bcd* oziroma z elemeti *d*, *c*, *b*, *a*, najdemo kvaterne *abcd*, *abdc*, *acdb*, *bcda*, ki so enake med seboj. Število vseh različnih kvatern brez ponavljanja iz n elementov je torej

$$K_n^4 = K_n^3 \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \binom{n}{4}.$$

Na isti način, kakor smo stvorili kombinacije tretjega in četrtega razreda ter določili njih število, stvorimo tudi kombinacije višjih razredov ter določimo njih število. Število vseh kombinacij r-tega razreda brez ponavljanja iz n elementov je torej

$$K_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r} = \binom{n}{r}.$$

Znamenje $\binom{n}{r}$ se čita „n nad r“ in je po obliki nepravi ulomek, katerega števec in imenovalec imata istotoliko faktorjev; prvi faktor v števcu je enak številu vseh elementov, vsak naslednji pa je za 1 manjši od prejšnjega; faktorji v imenovalcu so števila naravne številne vrste od 1 do tistega števila, ki izraža red kombinacije (pove, koliko elementov je v kombinaciji).

II. Iz n določenih elementov stvorimo vse ambe s ponavljanjem, ako združimo vsak element s samim seboj in z vsakim višjim elementom. N. pr. Iz elementov a, b, c, d dobimo te-le ambe: *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *bb*, *bc*, *bd*, *cc*, *cd*, *dd*. Število vseh amb s ponavljanjem iz n elementov najdemo tako-le. Če bi združili vsak element s samim seboj in z vsemi določenimi elementi, bi dobili vsako ambo po dvakrat. Število vseh različnih amb s ponavljanjem je torej

Kako stvorimo iz določenih elementov kombinacije s ponavljanjem in kako določimo njih število.

$$K_n^{p,\,2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Iz n določenih elementov stvorimo vse terne s ponavljanjem, ako napravimo iz teh elementov najprej vse ambe s ponavljanjem in potem združimo vsako ambo z najvišjim elementom, ki se nahaja v ambi, in še z v s a k i m višjim elementom, katerega ni v ambi. N. pr. Iz elementov a, b, c, d dobimo te-le terne: *aaa*, *aab*, *aac*, *aad*, *abb*, *abc*, *abd*, *acc*, *acd*, *add*, *bbb*, *bbc*, *bbd*, *bcc*, *bcd*, *bdd*, *ccc*, *ccd*, *cdd*, *ddd*. Število vseh tern s ponavljanjem najdemo tako-le. Če bi združili vsako ambo najprej z elementoma, ki se nahajata v dotični ambi, in potem še z vsemi določenimi elementi, bi dobili vsako terno po trikrat. Število vseh različnih tern s ponavljanjem je torej

$$K_n^{p,\,3} = K_n^{p,\,2} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Iz določenih elementov stvorimo vse kvatérne s ponavljanjem, ako napravimo iz teh elementov najprej vse ambe in terne s ponavljanjem in potem združimo vsako terno z najvišjim elementom, ki se nahaja v dotični terni, in še z vsakim višjim elementom, katerega ni v terni. N. pr. Iz elementov a, b, c, d dobimo te-le kvaterne: *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *aaad*, *aabb*, *aabc*, *aabd*, *aacc*, *aacd*, *aadd*, *abbb*, *abbc*, *abbd*, *abcc*, *abcd*, *abdd*, *accc*, *accd*, *acdd*, *addd*, *bbbb*, *bbbc*, *bbbd*, *bbcc*, *bbcd*, *bbdd*, *bccc*, *bccd*, *bcdd*, *bddd*, *cccc*, *cccd*, *ccdd*, *cddd*, *dddd*. Število vseh kvatern s ponavljanjem najdemo tako-le: Če bi združili vsako terno najprej z elementi, ki se nahajajo v dotični terni, in potem še z vsemi določenimi elementi, bi dobili vsako kvaterno po štirikrat. Število vseh različnih kvatern s ponavljanjem je torej

$$K_n^{p,4} = K_n^{p,3} \cdot \frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Na isti način, kakor smo stvorili kombinacije tretjega in četrtega razreda s ponavljanjem ter določili njih število, stvorimo tudi kombinacije višjih razredov s ponavljanjem ter določimo njih število. Število vseh kombinacij r-tega razreda s ponavljanjem iz n elementov je torej

$$K_n^{p,r} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}.$$

Iz navedenega je razvidno, da se število vseh kombinacij kateregakoli razreda s ponavljanjem razločuje od števila vseh kombinacij istega razreda brez ponavljanja le v tem, da pri prvih kombinacijah zaporedni faktorji v števcu za 1 rastejo, pri drugih pa za 1 pojemajo.

Naloge.

1. V koliko točkah se seče n premic, *a)* če je p vzporednih, *b)* če jih gre p skoz isto točko?

Razrešitev. *a)* n premic določuje toliko presečišč, kolikor amb brez ponavljanja moreš napraviti iz n premic. Vzporedne premice se sečejo v neskončni daljavi; p vzporednih premic ima $\binom{p}{2}$ presečišč v neskončni daljavi. V naši nalogi je torej $\binom{n}{2} - \binom{p}{2}$ točk določenih. — *b)* Ker se presečišča p premic stikajo v eni točki, je v tem slučaju rezultat $= \binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$.

2. Na koliko načinov moreš 12 kart med tri osebe tako razdeliti, da dobi prva po 3, druga po 4 in tretja po 5 kart?

Razrešitev. Prva oseba dobi vse kombinacije tretjega razreda brez ponavljanja, t. j. v znakih $K_{12}^3 = \binom{12}{3} = 220$. Pri vsaki teh kombinacij ostane še 9 kart, katere je treba kot kombinacije četrtega, oziroma petega razreda brez ponavljanja ($K_9^4 = K_9^5 = 126$) razdeliti med drugo in tretjo osebo. Torej odgovarja vsaki izmed 220 razdelitev za prvo osebo po 126 razdelitev za drugo in tretjo osebo.

3. Pri kolikih elementih se razlikujeta števili tern s ponavljanjem in brez ponavljanja za 36?

Razrešitev. Iz pogoja naloge $K_n^{p,3} - K_n^3 = 36$ najdeš $n = 6$.

§ 58. Premene.

Določene elemente premenjavamo, ako napravimo iz njih vse mogoče skupine po dva, po tri, po štiri ... elemente, in sicer tako, da smejo nekatere skupine imeti iste elemente, toda v različnem redu. Skupine po dva elementa se zoveje premene (variacije) drugega razreda, skupine po tri elemente so premene (variacije) tretjega razreda i. t. d. Ako se v premenah ne sme, oziroma sme ponavljati en in isti element, se imenujejo premene brez ponavljanja, oziroma s ponavljanjem. Število vseh mogočih premen (variacij) r-tega razreda brez ponavljanja, oziroma s ponavljanjem iz n elementov zaznamujemo z V_n^r, oziroma z $V_n^{p,r}$.

Premena = die Variation.

Ako napravimo iz določenih elementov vse mogoče kombinacije brez ponavljanja in premestimo elemente vsake kombinacije, dobimo vse mogoče premene. Premene r-tega razreda brez ponavljanja so torej premeščane kombinacije r-tega razreda brez ponavljanja in njih število je izraženo z

Kako stvorimo iz določenih elementov premene brez ponavljanja in kako določimo njih število.

$$V_n^r = \binom{n}{r} \cdot r! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Iz določenih elementov stvoriš premene brez ponavljanja tudi tako-le: Ako združiš vsak element z vsakim drugim elementom, stvoriš premene drugega razreda. Premene tretjega razreda najdeš, ako združiš vsako premeno drugega razreda z vsakim elementom, katerega ni v dotični premeni. Premene višjih razredov brez ponavljanja stvoriš na isti način kakor premene tretjega razreda.

Iz n določenih elementov stvoriš premene s ponavljanjem tako-le: Ako združiš vsak element z vsakim določenim elementom, dobiš premene drugega razreda s ponavljanjem; njih število je $V_n^{p,2} = n \cdot n = n^2$. Premene tretjega razreda s ponavljanjem najdeš, ako

Kako stvorimo iz določenih elementov premene s ponavljanjem in kako določimo njih število.

združiš vsako premeno drugega razreda z vsakim določenim elementom; njih število je $V_n^{p,3} = n^2 \cdot n = n^3$. Premene višjih razredov s ponavljanjem stvoriš na isti način kakor premene tretjega razreda. Število vseh premen r-tega razreda s ponavljanjem iz n elementov je torej $V_n^{p,r} = n^r$.

Naloge.

1. Koliko je četveroštevilčnih števil, v katerih se *a)* nobena številka ne ponavlja, *b)* se številke ponavljajo?

Razrešitev. Četveroštevilčna števila so premene četrtega razreda brez ponavljanja (s ponavljanjem) iz 10 številnih znakov, samo da se ne dado rabiti tiste premene, ki imajo element 0 na najvišjem mestu. Takih premen pa je toliko, kolikor je mogočih premen tretjega razreda brez ponavljanja (s ponavljanjem) iz 9 (10) številnih znakov.

$$a)\ \binom{10}{4}\cdot 4! - \binom{9}{3}\cdot 3! = 4536.$$

$$b)\ 10^4 - 10^3 = 9000.$$

2. Ploskve kock za igro so zaznamovane s pikami od 1 do 6. Kateri meti s tremi kockami dado vsoto 16?

Razrešitev. Vsi različni meti s tremi kockami tvorijo premene tretjega razreda s ponavljanjem. Izmed teh metov so v našem slučaju porabni samo tisti, ki dado vsoto 16, to sta meta $6+6+4$ in $6+5+5$ (ali krajše zaznamovano: 664, 655) in vsi njiju premeščaji. Nalogi zadostujejo torej meti: 466, 646, 664, 556, 565, 655.

§ 59. Binomske potence.

Kako se množijo binomi, ki se ujemajo v prvih členih.

Ako hočemo najti pravilo, kako se vzmnožujejo binomi, je treba več takih binomov, ki se ujemajo v prvih členih, zaporedoma pomnožiti drugega z drugim in dobljene produkte primerjati med seboj. N. pr.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 +$$
$$+ (ab+ac+bc)x + abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+ \\ +(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+ \\ +(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

i. t. d.

Iz navedenih primerov vidimo:

a) Prvi člen vsakega produkta je tolika potenca od x, kolikor binomov se je pomnožilo; v naslednjih členih se manjšajo potence od x po enoti; v zadnjem členu ni nobene potence od x, t. j. x^0.

b) Koeficient prvega člena je 1; koeficient drugega, tretjega, četrtega ... člena je oziroma vsota vseh kombinacij prvega, drugega, tretjega ... razreda brez ponavljanja iz drugih binomskih členov in sicer vsaka kombinacija vzeta kakor produkt tistih elementov, ki se nahajajo v njej.

c) Število produktovih členov je za 1 večje od števila binomskih faktorjev.

Če se binomi, katere je treba pomnožiti, ne ujemajo samo v prvih, ampak tudi v drugih členih, torej $a=b=c=d=\ldots$, se navedeni primeri spremenijo v — Kako se vzmnožujejo binomi.

$$(x+a)^2 = x^2+\binom{2}{1}ax+a^2.$$

$$(x+a)^3 = x^3+\binom{3}{1}ax^2+\binom{3}{2}a^2x+a^3.$$

$$(x+a)^4 = x^4+\binom{4}{1}ax^3+\binom{4}{2}a^2x^2+\binom{4}{3}a^3x+a^4.$$

. . . .

$$(x+a)^n = x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\binom{n}{3}a^3x^{n-3}+ \\ +\ldots+\binom{n}{n-3}a^{n-3}x^3+\binom{n}{n-2}a^{n-2}x^2+ \\ +\binom{n}{n-1}a^{n-1}x+a^n.$$

Zadnja enačba izraža pravilo, po katerem se vzmnožujejo binomi. V tem pravilu je:

1. Ako vzmnožiš binom s številom n, dobiš $(n+1)$ člen. Potence prvega binomskega člena padajo od n do 0, potence drugega binomskega člena pa rastejo od 0 do n. V vsakem členu je vsota potenčnih eksponentov enaka n.

Binomski koeficient = der Binomialkoeffizient.

2. Koeficienta prvega in zadnjega člena sta enaka enoti. Koeficienta srednjih členov (binomski koeficienti) imajo vobče obliko $\binom{n}{r}$; zgornje kazalo n je stalno, spodnje kazalo r pa se izpreminja in se ujema z eksponentom drugega binomskega člena.

3. Ako je drugi člen a negativen, se smatra binom za algebrajsko vsoto, v znakih $x - a = x + (-a)$, in potem se vzmnožuje po zgoraj navedenem obrazcu.

Če zaznamujemo koeficient prvega člena z $\binom{n}{0}$ in koeficient zadnjega člena z $\binom{n}{n}$, pripadajo n-ti potenci naslednji binomski koeficienti:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} \ldots \binom{n}{n-3}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Lastnosti binomskih koeficientov so:

Lastnosti binomskih koeficientov.

a) Po dva binomska koeficienta, ki sta v zgoraj navedeni vrsti enako oddaljena od začetka in konca, sta enaka. Zakaj iz

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;r}\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\text{in } \binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;(n-r)}\cdot\frac{r!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

sledi, da je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

b) Vsota dveh zaporednih binomskih koeficientov neke potence da binomski koeficient naslednje višje potence. Zakaj ako seštejemo izraza

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;r}$$

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;(r+1)}$$

najdemo

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;r}\left(1 + \frac{n-r}{r+1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;(r+1)} = \binom{n+1}{r+1}.$$

S pomočjo te lastnosti se dado iz binomskih koeficientov neke potence izračunati binomski koeficienti naslednje višje potence in sicer je

Paskalov trikotnik = Pascalsches Dreieck.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

i. t. d.

c) Absolutna vsota vseh binomskih koeficientov določene potence je $= 2^n$. Zakaj ako postavimo v izrazu $(x + a)^n$ in njegovemu rezultatu $x = a = 1$, dobimo

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

d) Algebrajska vsota vseh binomskih koeficientov, ki zaporedoma menjavajo predznak, je pri vsaki potenci $= 0$. Zakaj ako postavimo v izrazu $(x - a)^n$ in njegovem rezultatu $x = a = 1$, dobimo

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Naloge.

1. $(2a - 3b)^4 = (2a)^4 + \binom{4}{1}(2a)^3(-3b) + \binom{4}{2}(2a)^2(-3b)^2 + \binom{4}{3}2a(-3b)^3 + (-3b)^4 = 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4.$

2. Šesti člen od $\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)^9$ je $= \binom{9}{5}\left(\frac{a}{3}\right)^4\left(-\frac{b}{2}\right)^5 = -\frac{7a^4b^5}{144}$.

3. Določi v rezultatu od $\left(\frac{3x^2}{5a} - \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$ tisti člen, v katerem se nahaja x^9!

Razrešitev. Iz $\binom{12}{r}\left(x^2\right)^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{12}{r}x^{24-3r}$ sledi, da mora biti $24 - 3r = 9$; torej je $r = 5$. Zahtevani člen je $= \binom{12}{5}\left(\frac{3x^2}{5a}\right)^7\left(-\frac{5a^2}{3x}\right)^5 = -\frac{7128a^3x^9}{25}$.

IX. Matematična verjetnost.

§ 60. Absolutna in relativna verjetnost.

Matematična verjetnost = mathematische Wahrscheinlichkeit.

O verjetnosti kakega dogodka govorimo v mnogih oblikah. Dogodek je lahko mogoč ali nemogoč, verjeten ali neverjeten, malo verjeten ali zelo verjeten ali tudi gotov. O matematični verjetnosti je mogoče govoriti le tedaj, ako so vsi dogodki, ki se primerjajo, istovredni, t. j. enako mogoči, enako verjetni. Tako n. pr. niso istovredni dogodki pri kockah, ki so na eni strani obtežene; pri kroglah razne velikosti ali teže; pri igralnih kartah, ki se na hrbtu poznajo; pri prosilcih za isto službo i. t. d. Matematična verjetnost je lahko dvojna: enostavna in sestavljena. Enostavna matematična verjetnost se zopet loči v absolutno in relativno. Matematični izraz za absolutno verjetnost kakega dogodka je razmerje med številom ugodnih in številom mogočih slučajev. Da je račun natančen, je treba vedeti vse ugodne in vse mogoče slučaje istega dogodka. Ako znači torej u število ugodnih, m število mogočih slučajev in v verjetnost dogodka, potem je

Absolutna verjetnost = absolute Wahrscheinlichkeit.

$$v = \frac{u}{m}.$$

Pri tem je lahko $u = 0$ ali $u < m$ ali $u = m$. V prvem slučaju je dogodek nemogoč in $v = 0$, v drugem slučaju je dogodek več ali manj verjeten in $v < 1$, v tretjem slučaju pa je dogodek gotov in $v = 1$. Izraz za matematično gotovost je torej $v = 1$. Dogodek je malo verjeten, če je $v < \frac{1}{2}$; precej verjeten, če je $v > \frac{1}{2}$, in negotov, če je $v = \frac{1}{2}$.

Verjetnosti nasprotna je neverjetnost. Ako znači kakor poprej m število mogočih in u število ugodnih slučajev, potem je $m - u$ število neugodnih slučajev. Matematična verjetnost, da se dogodek ne primeri, je $v_1 = \frac{m-u}{m} = 1 - \frac{u}{m} = 1 - v$. Iz enačbe $v_1 = 1 - v$ pa sledi $v_1 + v = 1$, t. j. vsota matematične verjetnosti in neverjetnosti je enaka gotovosti.

Naloge.

1. **Vvrečici so enake ploščice z loterijskimi števili od 1 do 90. Kolika je verjetnost, da potegneš enoštevilčno število?**

Razrešitev. Enoštevilčnih števil je devet, dvoštevilčnih pa 81 (od 10 do 90). Verjetnost $v = \frac{u}{m} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$, to se pravi: v desetih slučajih potegneš povprečno le enkrat enoštevilčno število.

2. **Dve kocki imata svoje ploskve zaznamovane s pikami 1 do 6. Kolika je verjetnost, da dobiš pri enem metu obeh kock skupno 8 pik?**

Razrešitev. Vsota pik obeh kock je najmanj 2 in največ 12, enako mogoče pa so tudi vsote med 2 in 12. Vsoto 8 dobiš v sledečih slučajih: $2 + 6$, $6 + 2$, $3 + 5$, $5 + 3$, $4 + 4$. Ugodnih slučajev je torej 5, mogočih pa je $6 \cdot 6 = 36$, ker se lahko vsaka ploskev ene kocke zveže z vsako ploskvijo druge kocke. $v = \frac{5}{36}$.

3. **Vneki žari je 9 belih, 8 rdečih in 5 modrih krogel. Kolika je verjetnost, da ne potegneš bele krogle?**

Razrešitev I. Za belo kroglo neugodnih slučajev je $8 + 5 = 13$, vseh mogočih pa je $9 + 8 + 5 = 22$. $v = \frac{13}{22}$.

Razrešitev II. Verjetnost, da potegneš belo kroglo, je $v = \frac{9}{22}$, in verjetnost, da je ne potegneš, je $v_1 = 1 - v = 1 - \frac{9}{22} = \frac{13}{22}$.

Ako primerjamo verjetnosti dveh dogodkov, nastane **relativna verjetnost**, t. j. verjetnost, da se določeni dogodek prej zgodi od drugega dogodka.

Relativna verjetnost = relative Wahrscheinlichkeit.

Ako je za dogodek A_1 ugodnih u_1 slučajev, za A_2 ugodnih u_2 slučajev i. t. d., in skupno m slučajev mogočih, tedaj se lahko izračuna verjetnost, da se n. pr. dogodek A_1 prej zgodi kakor A_2. Za oba dogodka je $u_1 + u_2$ mogočih slučajev, torej je verjetnost, da se A_1 prej zgodi kakor A_2, enaka $v = \frac{u_1}{u_1 + u_2}$. Ako delimo števec in imenovalec s številom m, dobimo

$$v = \frac{\frac{u_1}{m}}{\frac{u_1}{m} + \frac{u_2}{m}} = \frac{v_1}{v_1 + v_2},$$

kjer pomenita v_1 in v_2 absolutni verjetnosti za dogodek A_1 in A_2. Iz tega računa sledi splošno pravilo: relativna verjetnost, da se določeni dogodek prej primeri kakor drugi, je enaka razmerju med absolutno verjetnostjo prvega dogodka in vsoto absolutnih verjetnosti obeh dogodkov.

Opomnja. Ako sta samo dve vrsti dogodkov mogoči, postane relativna verjetnost enaka absolutni.

Naloge.

1. Kolika je verjetnost, da z dvema kockama prej vržeš dve enaki števili kakor pa neenaki?

Razrešitev. Mogočih slučajev je $6 \cdot 6 = 36$, za enaki števili ugodnih je 6 (in sicer 11, 22, 33, 44, 55, 66), torej za neenaki 30. Potem je

$$v = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{30} + \frac{30}{36}} = \frac{1}{6}$$

in tolika je tudi absolutna verjetnost za enaki števili.

2. V neki žari je 10 belih, 7 črnih in 8 zelenih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš prej belo kakor zeleno kroglo?

Razrešitev. Absolutna verjetnost za belo kroglo je $v_1 = \frac{10}{25}$, za zeleno kroglo $v_2 = \frac{8}{25}$, torej relativna verjetnost za belo kroglo $v = \frac{5}{9}$. (Relativna verjetnost za zeleno kroglo bi bila $v = \frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{4}{9}$.)

§ 61. Sestavljena verjetnost.

Sestavljena verjetnost = abgeleitete Wahrscheinlichkeit.

Sestavljena verjetnost se kaže v več oblikah.

a) Verjetnost dveh ali več dogodkov, ki se izključujejo. Verjetnost, da se zgodi izmed dogodkov $A_1\ A_2\ A_3 \ldots$ ali A_1 ali A_2, je enaka $v = v_1 + v_2$, kjer pomenita v_1 in v_2 absolutni verjetnosti za A_1 in A_2. V dokaz temu si mislimo število vseh mogočih slučajev m in od teh za A_1 ugodnih u_1, za A_2 pa u_2. Potem je $v_1 = \frac{u_1}{m}$ in $v_2 = \frac{u_2}{m}$. Slučajev, ki so ugodni za A_1 in A_2, je $u_1 + u_2$; torej je verjetnost, da se primeri ali A_1 ali A_2, enaka $v = \frac{u_1 + u_2}{m} = \frac{u_1}{m} + \frac{u_2}{m} = v_1 + v_2$.

Opomnja. Pravilo velja seveda tudi za več določenih dogodkov $A_1\ A_2\ A_3 \ldots$ Ako vzamemo vse mogoče slučaje, potem je seveda $v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = 1$, to se pravi: en dogodek se gotovo pripeti.

Naloge.

1. V neki žari je 7 belih, 8 rumenih, 9 rdečih in 10 modrih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš belo ali rdečo kroglo?

Razrešitev. Absolutna verjetnost za belo kroglo je $v_1 = \frac{7}{34}$, za rdečo kroglo $v_2 = \frac{9}{34}$, torej verjetnost za belo ali rdečo kroglo $v = v_1 + v_2 = \frac{8}{17}$.

2. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama več kakor pet pik?

Razrešitev. Vsote, ki znašajo več kakor 5, so 6 do 12 in treba bi bilo izračunati verjetnost za vsako vsoto posebej. Račun bi dal $v = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{18}$. Hitreje pa dobiš znesek $\frac{13}{18}$, ako izračunaš verjetnost za števila 2, 3, 4, 5. Vsoto 2 dobiš enkrat (11), vsoto 3 dvakrat (12, 21), vsoto 4 trikrat (13, 31, 22) in vsoto 5 štirikrat (14, 41, 23, 32), torej je $v = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{5}{18}$, in verjetnost, da ne dobiš teh vsot 2 do 5 je $v_1 = 1 - v = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

b) Verjetnost zaporednih dogodkov, t. j. verjetnost, da se določeni, med seboj neodvisni dogodki zaporedno vrše. Sestavljena verjetnost je v tem slučaju enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov, ali v znakih:

$$v = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \ldots v_n.$$

Dokaz. Vzemimo iz vrste dogodkov $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ samo dva n. pr. A_1 in A_2. Za prvi dogodek je ugodnih u_1 slučajev in mogočih m_1, za drugi dogodek odnosno u_2 in m_2 slučajev. Število ugodnih slučajev, da nastopita oba dogodka zaporedno, je $u_1 \cdot u_2$, ker se lahko vsak slučaj prvega dogodka spoji z vsakim slučajem drugega dogodka. Isto velja za mogoče slučaje obeh dogodkov, katerih je torej $m_1 \cdot m_2$. Verjetnost, da nastopita oba dogodka zaporedno, je $v = \frac{u_1 u_2}{m_1 m_2} = \frac{u_1}{m_1} \cdot \frac{u_2}{m_2} = v_1 \cdot v_2$. Na isti način dokažemo tudi obrazec za več dogodkov.

c) Verjetnost ponovitve istega dogodka, t. j. verjetnost, da se določeni dogodek večkrat zapored ponovi. Ta verjetnost se izpeljuje iz prejšnje. Ako se namreč ponovi isti dogodek, potem je $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_n$. Iz tega sledi obrazec:

$$v = v_1^n.$$

Naloge.

1. Nekdo zapiše trikrat zapored vselej drugo dvoštevilčno število. Kolika je verjetnost, da zapiše trikrat zapored liho število?

Razrešitev. Dvoštevilčnih števil je 90 (od 10 do 99), od teh je 45 sodih in 45 lihih števil. Verjetnost za liho število je prvič $v_1 = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$, drugič $v_2 = \frac{44}{89}$ in tretjič $v_3 = \frac{43}{88}$. Verjetnost, da se zapiše trikrat zapored liho število, je torej $v = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = \frac{45}{90} \cdot \frac{44}{89} \cdot \frac{43}{88}$. Kakor kaže dobljeni produkt, se da ta naloga rešiti tudi brez sestavljene verjetnosti. Tri dvoštevilčna števila zapišemo lahko $\binom{90}{3}$ krat, tri liha dvoštevilčna števila pa $\binom{45}{3}$ krat, torej je verjetnost

$$v = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{\frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot \cdot 3}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{43}{356}.$$

2. V žari je 9 belih in 6 črnih enakih krogel. Kolika je verjetnost, da vzamemo najprej dve beli in potem dve črni krogli, *a)* ako vržemo beli krogli nazaj, *b)* ako obdržimo beli krogli?

a) 15 krogel se da sestaviti po 2 v eno skupino $\binom{15}{2}$ krat, dve beli $\binom{9}{2}$ krat. Verjetnost za beli krogli je $v_1 = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}}$, verjetnost za dve črni krogli na sličen način $v_2 = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}}$. Verjetnost, da vzamemo dve beli in potem dve črni, je $v = v_1 \cdot v_2 = = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}} \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{12}{245}$. Ravnotolika je tudi verjetnost, da vzamemo dve črni krogli in potem dve beli.

b) Verjetnost za beli krogli ostane ista: $v_1 = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}}$; verjetnost za črni krogli je sedaj drugačna. V žari je namreč samo še 13 krogel, 7 belih in 6 črnih. Verjetnost za dve črni krogli je $v_2 = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}}$. Verjetnost za dve beli krogli in potem za dve črni je $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}} \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}} = = \frac{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{6}{91}$. Verjetnost za dve črni in potem za dve beli krogli bi bila $v = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} \cdot \frac{\binom{9}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{6}{91}$, torej ravnoista.

3. Deset oseb srečka za neko nagrado. V to svrho vzame vsaka oseba iz žare, v kateri je 9 belih krogel in 1 rdeča, po eno kroglo ter jo obdrži. Kolika je verjetnost, da potegne tretja oseba rdečo kroglo?

Razrešitev. Ko pride tretja oseba na vrsto, je v žari še 8 krogel in med njimi mora biti tudi rdeča krogla. Verjetnost, da je rdeča krogla še v posodi, t. j. verjetnost, da sta prvi dve osebi dobili beli krogli, je $v_1 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{10}$. Verjetnost, da potegne tretja oseba rdečo kroglo, je $v_2 = \frac{1}{8}$. Verjetnost obeh zaporednih dogodkov je zato $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{10}$. Isti rezultat dobimo tudi za vsako drugo osebo; torej je vseeno, v kateri vrsti iščejo osebe rdečo kroglo.

4. Kolika je verjetnost, da z eno kocko v treh metih vsaj enkrat vržeš 6 pik?

Razrešitev. Verjetnost, da ne vržeš 6 pik, je $v_1 = \frac{5}{6}$. Verjetnost, da trikrat zapored ne vržeš šest pik, je $v_2 = \left(\frac{5}{5}\right)^3$. Verjetnost, da v treh metih vsaj enkrat vržeš 6 pik, je nasprotna verjetnosti v_2, torej $v = 1 - v_2$ in $v = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$.

§ 62. Matematično upanje.

Matematično upanje = mathematische Hoffnung.

Pogosto so nakazani gotovi dobitki, ako se ugane določeni dogodek. To se dogaja zlasti pri stavah in igrah, pri srečkanju in zavarovanju. Upanje na tak dobitek je seveda odvisno od velikosti dobitka in od verjetnosti dotičnega dogodka ter raste sorazmerno z dobitkom in z verjetnostjo. Ako sta dobitek in verjetnost dvakrat, trikrat, ...$n$krat večja, je tudi upanje na dobitek dvakrat, trikrat, ...$n$krat večje. Izraz za matematično upanje je produkt dobitka in verjetnosti, v znakih

$$U = d \cdot v,$$

kjer pomeni U upanje, d dobitek in v verjetnost. Da bolje spoznamo pomen matematičnega upanja, pretvorimo navedeno enačbo v drugo obliko. V obliki sorazmerja se glasi obrazec tako-le: $U : d = v : 1$, z besedami: matematično upanje in dobitek sta v istem razmerju kakor verjetnost in gotovost. Ako zamenimo $v = \frac{u}{m}$, dobimo $U : d = v : m$, t. j. matematično upanje in dobitek sta v v istem razmerju kakor število ugodnih in število mogočih slučajev.

Obrazec za matematično upanje se lahko neposredno uporablja pri stavah. Čim večja je verjetnost kakega dogodka, tem več se sme staviti na isti dogodek. Pri vsaki pravilni stavi je torej stava (ali pravzaprav vložka stave) enaka matematičnemu upanju. Ako pomeni s stavo; d dobitek, v verjetnost in U matematično upanje, potem je $s = U$ in $s = d \cdot v$ ali $s : d = u : m$.

Stava = die Wette, der Einsatz.

Pri medsebojnih stavah je verjetnost dobitka navadno različna, zato morajo biti vložke stave tudi različne, da so stave pravilne. Ako je za prvo osebo $s_1 = d \cdot v_1$ in za nasprotnika pri istem dobitku $s_2 = d \cdot v_2$, potem sledi iz obeh enačb $s_1 : s_2 = v_1 : v_2$, z besedami: stave posameznikov morajo biti sorazmerne z verjetnostjo, da se dobitek zadene. Iz tega sorazmerja pa sledi tudi $v_1 \cdot s_2 = v_2 \cdot s_1$, z besedami: pri pravilni stavi je matematično upanje za oba igralca isto.

Naloge.

1. Nekdo dobi 6 K, ako vrže s tremi kockami dve enaki števili. Koliko mora vložiti, da bo stava pravilna?

Razrešitev. Za dobitek ugodni slučaji so sledeči: 112, 113, 114, 115, 116; 221, 223, 224, 225, 226; 331, 332, 334, 335, 336; 441, 442, 443, 445, 446; 551, 552, 553, 554, 556; 661, 662, 663, 664, 665. Vsega skupaj je $30 \cdot 3 = 90$ ugodnih slučajev, ker se vsaka skupina lahko na tri načine pokaže, n. pr. 112, 121, 211. Mogočih slučajev $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, kolikor je premen šestih elementov tretjega razreda s ponavljanjem. Verjetnost je torej $v = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$ in stava $s = d \cdot v = 6\,\text{K} \cdot \frac{5}{12} = 2{\cdot}5\,\text{K}$.

2. A stavi proti B 2 K, da potegne iz žare, kjer je 10 belih in 5 črnih krogel, ravno dve črni. B pa stavi nasprotno 20 K. Ali je stava pravilna?

Razrešitev I. Verjetnost za osebo A je $v_1 = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{21}$, za osebo B pa je $v_2 = 1 - v_1 = \frac{19}{21}$. Iz sorazmerja $s_1 : s_2 = v_1 : v_2$ sledi torej $2 : s_2 = \frac{2}{21} : \frac{19}{21}$ in iz tega $s_2 = 19$. B bi moral staviti 19 K, stava je torej nepravilna in sicer za B neugodna.

Razrešitev II. s pomočjo enačbe $s = d \cdot v$. Dobitek stave je to, kar sta obe osebi pri stavi vložili, torej $d = s_1 + s_2 = 22$ K. Verjetnost dobitka za osebo A je $v_1 = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{2}{21}$, torej mora biti stava za osebo A enaka $s_1 = 22\,\text{K} \cdot \frac{2}{21} = \frac{44}{21}\,\text{K} = 2\frac{2}{21}\,\text{K}$. Ker je A vložil samo 2 K, je stava nepravilna in sicer za A ugodna.

§ 63. Matematična nevarnost.

Matematična nevarnost = mathematisches Risiko.

Z upanjem na dobitek je vedno združena nevarnost izgube. Čim več se stavi, tem večja je nevarnost. Čim večje upanje, tem manjša nevarnost. **Matematična nevarnost izgube (riziko)** je torej tem večja, čim večja je verjetnost izgube in čim večja je izguba sama. Matematični izraz za nevarnost izgube je produkt izgube in verjetnosti izgube. Ako pomeni N nevarnost izgube, s stavo, ki se lahko izgubi, v verjetnost dobitka, potem je

$$N = s \cdot (1 - v).$$

Ako je namreč v verjetnost dobitka, potem je $(1 - v)$ verjetnost izgube.

Pri pravilni stavi je nevarnost izgube pri obeh igralcih ista.

Naloga.

Nekdo stavi 30 h, da vrže z dvema kockama vsaj deset pik. Kolika je matematična nevarnost izgube? Kolik mora biti dobitek, da je stava pravilna?

Razrešitev. Verjetnost, da vrže 10, 11 ali 12 pik, je sestavljena in sicer je enaka $v = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$. Verjetnost, da ne vrže toliko pik, je enaka $v_1 = 1 - v = \frac{5}{6}$. Nevarnost izgube je potem $N = 30 \cdot \frac{5}{6} = 25$, torej 25 h. Da je stava pravilna, mora biti $s = d \cdot v$. Iz tega se dobi dobitek $d = \frac{s}{v} = \frac{30}{\frac{1}{6}} = 180$. Dobitek znaša torej 180 h.

Opomnja. Pri računih o matematičnem upanju in o nevarnosti je treba osebne ozire in koristi posameznikov izključiti. Za bogatina je izguba 100 K malenkost, za siromaka dobitek 100 K premoženje! Osebni ali moralični riziko je pač za posameznika velikega pomena, splošnim računom pa se nekako upira.

§ 64. Verjetnost dolgosti človeškega življenja.

Iz splošne statistike o življenju in smrti ljudi enega rodu ali ene generacije, t. j. ljudi, ki so bili v istem letu rojeni, dobimo nekak pregled umrljivosti ljudi in dolgosti življenja. Na ta način si lahko sestavimo pregledne tablice, koliko izmed določenega števila novorojencev je doživelo eno leto, dve leti, tri leta i. t. d. Take tablice zovemo navadno tablice umrljivosti ali bolje tablice še živečih ljudi.

Tablica umrljivosti = die Sterbetafel.

Sledeča tablica umrljivosti je posneta po oni, ki jo je sestavil Deparcieux. Predelana je v toliko, da je število novorojencev označeno s 1000, prvotna tablica pa ima pri tretjeletnikih število 10.000.

Leto	Število še živečih	Leto	Število še živečih	Leto	Število še živečih	Leto	Število še živečih	Leto	Število še živečih
0	1000	20	555	40	448	60	316	80	80
1	745	21	550	41	443	61	307	81	69
2	709	22	543	42	439	62	298	82	58
3	682	23	539	43	434	63	288	83	48
4	662	24	533	44	429	64	279	84	40
5	647	25	528	45	424	65	269	85	33
6	634	26	523	46	420	66	259	86	26
7	624	27	517	47	414	67	248	87	20
8	615	28	512	48	409	68	237	88	15
9	607	29	506	49	402	69	224	89	11
10	600	30	501	50	396	70	211	90	8
11	595	31	495	51	389	71	198	91	5
12	591	32	490	52	382	72	185	92	3
13	587	33	484	53	374	73	171	93	1
14	583	34	479	54	367	74	158	94	0
15	578	35	473	55	359	75	144		
16	574	36	468	56	351	76	131		
17	570	37	462	57	342	77	118		
18	565	38	457	58	334	78	105		
19	560	39	453	59	325	79	93		

Umrljivost ni v vseh letih ista. V prvem letu jih povprečno umrje 255, v sedmem 10, 37. letu 6, v 71. letu 13, v 88. letu 5 i. t. d. Še bolje se kaže izpremememba umrljivosti, ako jo izrazimo v odstotkih. Umrljivost znaša v prvem letu 25·5 %, v sedmem 1·57 %, v 37. letu 1·28 %, v 71. letu 6·16 %, v 88. letu 25 % in v 94. letu 100 %. Umrljivost je pri novorojenih zelo velika, potem pa hitro pojema in pozneje zopet raste in sicer vedno hitreje.

Verjetnost življenja in verjetnost smrti. Ako pomeni A_n število ljudi, ki so stari n let, A_{n+x} pa število ljudi, ki doživè $n+x$ let, potem je verjetnost, da učaka kaka n-letna oseba še x let, enaka

$$v = \frac{A_{n+x}}{A_n}.$$

Ako pomeni nadalje $B_{n+x} = A_n - A_{n+x}$ število n-letnih ljudi, ki so v teku x let umrli, potem je verjetnost, da umrje n-letna oseba v teku x let, enaka

$$v_1 = \frac{B_{n+x}}{A_n} = \frac{A_n - A_{n+x}}{A_n} = 1 - \frac{A_{n+x}}{A_n} = 1 - v.$$

Iz tega sledi $v + v_1 = 1 =$ gotovost, ker je prav gotovo, da bo dotičnik doživel še x let ali pa ne.

Verjetna starost = wahrscheinliche Lebensdauer.

Verjetna starost n-letne osebe je doba, v kateri umrje polovica vseh n-letnih oseb. Verjetno starost 15 letne osebe dobiš, ako v tablici umrljivosti poiščeš $A_{15} = 578$, to število deliš z dvema in dobljeni znesek 289 iščeš v istem razpredelku dalje. Na ta način dobiš približno leto 63 (natančneje po interpolaciji 62·9). Dotična oseba utegne živeti še 48 let.

Naloge.

1. Kolika je verjetnost, da učaka 25 letna oseba 50. leto?

Razrešitev. Iz tablic umrljivosti dobiš $A_{25} = 528$ in $A_{50} = 396$, torej je verjetnost $v = \frac{A_{50}}{A_{25}} = \frac{396}{528} = \frac{3}{4} = 0·75$.

2. Kolika je verjetnost, da umrje 35 letna oseba med 50. in 60. letom?

Razrešitev I. Med 50. in 60. letom umrje $A_{50} - A_{60}$ oseb, torej je verjetnost $v = \frac{A_{50} - A_{60}}{A_{35}} = \frac{396 - 316}{473} = \frac{80}{473} = 0·169\ldots$

Razrešitev II. Verjetnost, da učaka 35 letna oseba 50. leto, je $v_1 = \frac{A_{50}}{A_{35}}$; verjetnost, da umrje ta oseba v sledečih 10 letih, je $v_2 = \frac{A_{50} - A_{60}}{A_{50}}$. Sestavljena verjetnost za oba zaporedna dogodka je $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{A_{50}}{A_{35}} \cdot \frac{A_{50} - A_{60}}{A_{50}}$ in $v = \frac{A_{50} - A_{60}}{A_{50}}$ kakor poprej.

3. Koliko od m (200) oseb v starosti n (40) let živi še t (30) let?

Razrešitev. Število še živečih pojema, kakor kažejo tablice umrljivosti, zato je $m : x = A_n : A_{n+t}$. Iz tega dobiš $x = m \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n} = 200 \cdot \frac{A_{70}}{A_{40}} = 200 \cdot \frac{211}{448} = 94·19\ldots$ Od 200 oseb v starosti 40 let doživi 70. leto 94 oseb.

X. Zavarovanje na življenje in smrt.

§ 65. Osnovni pojmi.

Zavarovanje na življenje in smrt je zelo mnogovrstno. Posamezni slučaji pa se dajo splošno uvrstiti v dve glavni skupini: 1. zavarovanje na dosmrtno rento in 2. zavarovanje na smrt. Dosmrtno rento dobiva zavarovana oseba, kolikor časa živi. Pri zavarovanju na smrt pa izplača zavarovalna družba po smrti zavarovane osebe določenim dedičem gotovo vsoto ali kapital. V obeh slučajih pa mora oseba, ki se zavaruje, zavarovalnici plačevati določene zneske, ki se zovejo zavarščine ali premije. Premije so ali enkratne, ali časovne, če se plačujejo določeno število let, ali pa dosmrtne. Premije so odvisne od velikosti zavarovanega kapitala oziroma rente, od obrestne mere in pa od starosti dotične osebe. Izračunanje premij se vrši vsled tega na podlagi tablic umrljivosti. Teh tablic pa zavarovalne družbe ne jemljo iz splošne statistike (kakor Deparcieux), marveč iz lastnih izkušenj iz umrljivosti oseb, ki so se zavarovale. Izkušnje so namreč pokazale, da je umrljivost pri zavarovancih na smrt večja kakor pri onih na dosmrtno rento. Nasprotno pa je v korist zavarovalne družbe, da zavarovanci na smrt dolgo žive, zavarovanci na dosmrtno rento pa kmalu umrjejo. Vsled tega zahtevajo zavarovalnice od prvih zdravniško izpričevalo, od drugih pa ne. Na ta način sta se udomačili polagoma dve vrsti tablic umrljivosti: 1. za zavarovanje na smrt in 2. za zavarovanje na dosmrtno rento. Prve tablice kažejo večjo umrljivost.

Zavarovanje na življenje in smrt = die Lebensversicherung, Todesfallversicherung.

Zavarščina = die Prämie.

V knjigi natisnjena tablica za zavarovanje na rento se zove „Tablica 17 angleških družb“, katero sta sestavila Laudi in Lazarus za moške osebe. To tablico uporabljajo tudi nekatere avstrijske zavarovalnice. Za količine D_n, M_n in N_n je v knjigi vzeta obrestna mera 3%.

Druga tablica za zavarovanje na smrt je znana pod imenom „Tablica 23 nemških družb“, katero so v

Berlinu sestavili po podatkih in izkušnjah nemških in avstrijskih zavarovalnic in sicer za moške in ženske. Za količine D_n, M_n in N_n je v knjigi vzeta obrestna mera 4%.

Čiste premije = Nettoprämien, nečiste premije = Bruttoprämien.

Iz tablic umrljivosti izračunane premije so matematične ali čiste premije. Zavarovalnice pa zahtevajo nekoliko večje premije, takozvane nečiste ali tarifne premije. Prirastek se menja po starosti zavarovanca in znaša 10% do 30%. S to doklado si pokrijejo zavarovalnice upravne stroške in nagrade zavarovalnih potnikov in ž njimi si tudi ojačijo takozvane premijske reserve, da se ubranijo prevelikim izgubam ob času epidemij i. t. d.

Premijske reserve = Prämienreserven.

Premijske reserve nastanejo na sledeči način: Ako se n. pr. zavaruje vseh 91.578 oseb v starosti 30 let za 1000 K vsaka na smrt, potem plača vsaka dosmrtno čisto premijo 17·91 K, torej skupaj 1,640.161·98 K. Čez eno leto plača zavarovalnica za vseh 808 umrlih oseb znesek 808.000 K, torej preostane še družbi 832.161·98 K. Na koncu drugega leta preostane družbi 90.770·17·91 — 818·1000 = 807.690·70 K. Ti preostanki se vedno manjšajo in v poznejših letih mora družba več zavarovalnine izplačevati, kakor pa dobi premij od še živečih ljudi. Preostanki prvih let tvorijo premijsko reservo zavarovalne družbe in se porabijo za izplačevanje zavarovalnine v zadnjih letih. Premijske reserve so potemtakem podlaga in bistvo zavarovanja sploh.

§ 66. Zavarovanje na dosmrtno rento.

Naloge.

1. Neka n-letna oseba se zavaruje na dosmrtno rento r kron, ki naj se ji izplačuje na koncu vsakega leta. Koliko mora plačati zavarščine v začetku prvega leta? (Enkratna premija.)

Razrešitev. V rentni tablici umrljivosti pomeni A_n število še živečih n-letnih oseb. Ako se vse te n-letne osebe enako zavarujejo, izplača zavarovalnica na koncu prvega leta rento r vsem A_{n+1} še živečim osebam; na koncu drugega leta izplača družba isto rento vsem A_{n+2} še živečim osebam i. t. d. Zavarovalna družba izplača torej na koncu prvega leta znesek $r \cdot A_{n+1}$, na koncu drugega leta $r \cdot A_{n+2}$, potem $r \cdot A_{n+3}$ i. t. d. do tistega leta, ko izmed A_n oseb ni nobena več živa. Sedanja vrednost posameznih zneskov je

$$S = \frac{r \cdot A_{n+1}}{k} + \frac{r \cdot A_{n+2}}{k^2} + \frac{r \cdot A_{n+3}}{k^3} + \frac{r \cdot A_{n+4}}{k^4} + \ldots + \frac{r \cdot A_{n+x}}{k^x}.$$

V tej vsoti pomeni k obrestovalni faktor ter znaša v naših tablicah 1·03, x pa pomeni število let, ki jih preživi še zadnja izmed A_n oseb. Ta sedanja vrednost se razdeli na vse A_n osebe enako, torej pride na eno osebo znesek

$$P_n = \frac{S}{A_n} \text{ ali } P_n = \frac{r}{A_n}\left(\frac{A_{n+1}}{k} + \frac{A_{n+2}}{k^2} + \frac{A_{n+3}}{k^3} + \ldots + \frac{A_{n+x}}{k^x}\right).$$

Dobljeni izraz P_n je iskana enkratna premija za n-letno osebo. Navadno pa damo temu obrazcu drugo obliko. Ako množimo namreč števec in imenovalec posameznih ulomkov s faktorjem k^n, dobimo

$$P = \frac{k^n . r}{A_n}\left(\frac{A_{n+1}}{k^{n+1}} + \frac{A^{n+2}}{k^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{k^{n+3}} + \ldots + \frac{A_{n+x}}{k^{n+x}}\right).$$

Ulomki $\frac{A_n}{k_n} = D_n$, $\frac{A_{n+1}}{k^{n+1}} = D_{n+1}$, $\frac{A_{n+2}}{k^{n+2}} = D_{n+2}$ i. t. d. se zovejo po I. N. Tetensu: „D i s k o n t o v a n a š t e v i l a š e ž i v e č i h“. Vsota teh ulomkov je

Diskontovana števila še živečih = diskontierte Zahlen der Lebenden.

$$N_n = D_{n+1} + D_{n+2} + D_{n+3} + \ldots + D_{n+x},$$

katera je odvisna od starosti zavarovanca in od obrestne mere ter v rentnih tablicah že izračunana za 3 %.

Enkratna premija n-letne osebe za dosmrtno rento se torej dobi po skrčenem obrazcu

$$P_n = r \cdot \frac{N_n}{D_n}.$$

Primer: $r = 1000$ K, $k = 1·03$, $n = 30$. Iz rentnih tablic umrljivosti dobiš $D_{30} = 25502$ in $N_{30} = 528870$ in po računu $P_{30} = 20.738$ K.

Opomnja. Ako bi se renta izplačala v začetku leta, potem bi bila enkratna premija P_n^1 za eno rento r večja, torej $P_n^1 = P_n + r$.

Odložena renta = aufgeschobene Rente.

2. Neka n-letna oseba se zavaruje na dosmrtno rento r kron, ki naj se ji izplača prvikrat čez m let, ako v tem času še živi. Koliko znaša enkratna premija? (Odložena renta.)

Razrešitev. Ker se izplačevanje začne šele čez m let, odpadejo v vsoti N_n vsi členi prvih m let, torej členi $D_{n+1} + D_{n+2} + \ldots + D_{n+m}$, in ostanejo še členi $D_{n+m+1} + D_{n+m+2} + \ldots + D_{n+x} = N_{n+m}$.

Obrazec za enkratno premijo ima sedaj obliko

$$P_{n,m} = r \cdot \frac{N_{n+m}}{D_n}.$$

Primer: $n = 30$, $m = 10$, $k = 1{\cdot}03$, $r = 800$ K. Iz rentnih tablic umrljivosti dobiš $D_{30} = 25502$ in $N_{40} = 313001$ in po računu $P_{30,10} = 9819$ K.

Zavarovanje na doživetje = Erlebensversicherung.

3. Neka n-letna oseba se zavaruje za znesek z kron, ki naj se ji izplača, ko doživi še m let, če pa prej umrje, ne izplača zavarovalnica nič. Koliko znaša enkratna premija? (Zavarovanje na doživetje.)

Razrešitev. Ako se zavarujejo vse n-letne osebe A_n za isti znesek z kron, izplača družba čez m let vsem A_{n+m} osebam, ki takrat še žive, po z kron, torej skupaj $z \cdot A_{n+m}$ kron. Sedanja vrednost tega zneska je $S = \frac{z \cdot A_{n+m}}{k^m}$, kjer pomeni zopet k obrestovalni faktor. Ta sedanja vrednost se razdeli na vse osebe A_n enako. Enkratna premija za eno osebo je potem

$$P_n = \frac{S}{A_n} = \frac{z \cdot A_{n+m}}{A_n \cdot k^m} = \frac{z \cdot k^n \cdot A_{n+m}}{A_n \cdot k^{n+m}}.$$

Ako pomenita ulomka $\frac{A_n}{k^n} = D_n$ in $\frac{A_{n+m}}{k^{n+m}} = D_{n+m}$ zopet diskontovani števili še živečih oseb, dobimo za P_n obrazec:

$$P_n = z \cdot \frac{D_{n+m}}{D_n}.$$

Primer: $n = 35$, $m = 20$, $z = 3000$ K, $k = 1{\cdot}03$. Iz rentnih tablic umrljivosti dobiš $D_{35} = 21061$ in $D_{55} = 8941{\cdot}3$ in po računu $P_{35} = 127\underline{4}$ K.

Opomnja. Ta način zavarovanja se redkeje primeri, važen pa je za mešano zavarovanje „na doživetje ali na smrt“, ki je sedaj najbolj v navadi.

§ 67. Zavarovanje na smrt.

Naloge.

1. Neka n-letna oseba se zavaruje za znesek z kron, ki naj se po njeni smrti na koncu leta izplača določenim dedičem. Koliko znaša *a)* enkratna premija P_n, *b)* dosmrtna premija p_n?

Zavarovanje na smrt = Todesfallversicherung.

Razrešitev *a)*. Ako se zavarujejo vse n-letne osebe A_n za isti znesek z kron, mora zavarovalnica izplačati na koncu prvega leta znesek z kron za vse osebe, ki umrjejo v prvem letu. V prvem letu umrje $A_n - A_{n+1} = B_{n+1}$ oseb, v drugem letu $A_{n+1} - A_{n+2} = B_{n+2}$ oseb, v tretjem $A_{n+2} - A_{n+3} = B_{n+3}$ i. t. d. Zavarovalnica izplača v zaporednih letih vsoto

$$z \cdot B_{n+1} + z \cdot B_{n+2} + z \cdot B_{n+3} + \ldots + z \cdot B_{n+x},$$

ako čez x let ni nobena od A_n oseb več živa. Sedanja vrednost teh zneskov je

$$S = z \cdot \left(\frac{B_{n+1}}{k} + \frac{B_{n+2}}{k^2} + \frac{B_{n+3}}{k^3} + \ldots + \frac{B_{n+x}}{k^x}\right)$$

ali $$S = z \cdot k^n \left(\frac{B_{n+1}}{k^{n+1}} + \frac{B_{n+2}}{k^{n+2}} + \frac{B_{n+3}}{k^{n+3}} + \ldots + \frac{B_{n+x}}{k^{n+x}}\right)$$

Enkratna premija za eno osebo znaša potem

$$P_n = \frac{S}{A_n} = \frac{z \cdot k^n}{A_n} \left(\frac{B_{n+1}}{k^{n+1}} + \frac{B_{n+2}}{k^{n+2}} + \ldots + \frac{B_{n+x}}{k^{n+x}}\right)$$

Ulomki $\frac{B_{n+1}}{k^{n+1}} = C_{n+1}$, $\frac{B_{n+2}}{k^{n+2}} = C_{n+2}$ i. t. d. se zovejo „Diskontovana števila umrlih“ in so odvisna od starosti zavarovancev in od obrestne mere. Ako uvedemo še okrajšavo

Diskontovana števila umrlih = diskontierte Zahlen der Toten.

$$M_n = C_{n+1} + C_{n+2} + C_{n+3} + \ldots + C_{n+x},$$

dobimo za enkratno premijo obrazec $P_n = z \cdot \frac{k^n}{A_n} \cdot M_n$ ali

$$P_n = z \cdot \frac{M_n}{D_n}.$$

Izračunana števila D_n in M_n je treba vzeti iz tablice umrljivosti za zavarovanje na smrt. V naši tablici je obrestna mera 4%.

Primer: $n = 35$, $z = 2000$ K, $k = 1{\cdot}04$. Iz tablice poiščeš $D_{35} = 22155$ in $M_{35} = 7820{\cdot}33$ in po računu $P_{35} = 70\underline{6}$ K.

Opomnja. Enkratna premija je za zavarovanca navadno prevelika, zato si dotičnik razdeli plačevanje na več let (časovna premija) ali pa na vse življenje (dosmrtna premija).

Razrešitev *b).* Enkratna premija P_n mora biti enaka sedanji vrednosti vseh dosmrtnih premij p_n. To vrednost pa lahko izračunamo po obrazcu za dosmrtno rento: $P_n = r \cdot \frac{N_n}{D_n}$, ako izenačimo $r = p_n$. Tako dobimo za P_n dve enačbi $P_n = p_n \cdot \frac{N_n}{D_n}$ in $P_n = z \cdot \frac{M_n}{D_n}$. Iz obeh enačb pa sledi dalje

$$p_n = z \cdot \frac{M_n}{N_n}.$$

Primer: Ako vzameš ista števila kakor pri prvem vprašanju *a)*, dobiš iz tablice za zavarovanje na smrt $M_{35} = 7820 \cdot 33$ in $N_{35} = 369107$ in po računu $p_{35} = 42 \cdot 37$ K.

Opomnja. Ako zavarovalnica v prvih treh letih v slučaju smrti ne izplača še nikake zavarovalnine, izračuna se premija po obrazcu $P_n = z \cdot \frac{M_{n+3}}{D_n}$ oziroma $p_n = z \cdot \frac{M_{n+3}}{N_n}$. (Zavarovanje s poskušnjo treh let.)

2. Neka n-letna oseba se zavaruje na smrt za znesek z kron, ki naj se izplača določenim dedičem po njeni smrti. Koliko mora zato plačevati v začetku vsakega leta skozi m let, ako jih doživi? (Časovne premije.)

Razrešitev. Ker se tu čez m let ne plačujejo nobene premije več, odpadejo v obrazcu $p_n = z \frac{M_n}{N_n}$ vsi členi čez m let dalje, torej členi $D_{n+m+1} + D_{n+m+2} + \ldots + D_{n+x} = N_{n+m}$. Imenovalec N_n se potem zmanjša za N_{n+m}. Za m-letno časovno premijo n-letne osebe dobimo potem obrazec

$$p_{n,m} = z \cdot \frac{M_n}{N_n - N_{n+m}}.$$

Primer: $n = 30$, $m = 15$, $k = 1 \cdot 04$, $z = 400.00$ K. Iz tablice dobiš $M_{30} = 8944 \cdot 17$, $N_{30} = 497588$, $N_{45} = 190476$ in iz tega $p_{30,15} = 1165$ K.

Mešano zavarovanje = gemischte Versicherung.

3. Neka n-letna oseba se zavaruje za znesek z kron, ki naj se ji izplača, ko doživi še m let, ali pa določenim dedičem, ako umrje pred tem časom.

Kolika je *a)* enkratna premija, *b)* časovna premija? (Mešano zavarovanje na doživetje ali na smrt.)

Razrešitev *a).* Enkratna premija $P_{n,m}$ se tukaj sestavlja iz dveh delov, iz premije za zavarovanje na doživetje po obrazcu $P_n = z \cdot \frac{D_{n+m}}{D_n}$ in iz premije za zavarovanje na smrt $P_n^1 = z \cdot \frac{M_n}{D_n}$, kjer pa je treba v števcu M_n odbiti vse člene po m letih, ker takrat plačevanje na vsak način preneha. Druga premija dobi torej obrazec $P_n^1 = z \cdot \frac{M_n - M_{n+m}}{D_n}$. Skupna premija je potem

$$P_{n,m} = P_n + P_n^1 = z \cdot \frac{D_{n+m} + M_n - M_{n+m}}{D_n}.$$

Razrešitev *b).* Časovna premija $p_{n,m}$ se plačuje kvečjemu m let. Enkratna premija $P_{n,m}$ mora biti enaka sedanji vrednosti vseh časovnih premij $p_{n,m}$. To vrednost pa dobimo iz obrazca premije za dosmrtno rento $P_n = r \cdot \frac{N_n}{D_n}$. V tem obrazcu je treba le še izenačiti $r = p_{n,m}$ in v števcu odbiti vse člene od m let dalje, ker takrat plačila prenehajo. Iz tega sledi $P_n = p_{n,m} \cdot \frac{N_n - N_{n+m}}{D_n}$. Ker pa je v našem slučaju $P_n = P_{n,m} = = z \cdot \frac{D_{n+m} + M_n - M_{n+m}}{D_n}$, potem sledi iz navedenih enačb

$$p_{n,m} = z \cdot \frac{D_{n+m} + M_n - M_{n+m}}{N_n - N_{n+m}}.$$

Primer: $n = 40$, $m = 20$, $k = 1{\cdot}04$, $z = 20.000$ K. Iz tablice umrljivosti dobiš $D_{40} = 17263$, $D_{60} = 5313{\cdot}1$, $M_{40} = 6817{\cdot}36$, $M_{60} = 3295{\cdot}76$, $N_{40} = 268539$, $N_{60} = 52640{\cdot}5$, iz teh podatkov pa izračunaš potem $P_{40,20} = 10.235$ K in $p_{40,20} = 818{\cdot}4$ K.

Opomnja. Zavarovalnice izplačajo navadno osebi, ki je doživela 90 let, že celo zavarovalnino, četudi se je zavarovala samo na smrt in ne tudi na doživetje 90 let. Zato pa tudi 4% tablica za zavarovanje na smrt pri 90. letu preneha. Vsled tega odpadejo v obrazcih $P_{n,m}$ in $p_{n,m}$ vsi členi D_{n+m}, M_{n+m} in N_{n+m} in obrazca za premijo v nalogi 3. preideta v krajša obrazca naloge 1.

3% tablica
za zavarovanje na dosmrtno rento.

n	A_n	D_n	M_n	N_n
0	100000	100000	41833·8	2896905
1	85175	82693	27440·8	1896905
2	79539	74970	22128·5	1814212
3	77060	70522	19859·76	1739242
4	75764	67317	18708·26	1668720
5	74930	64637	17988·83	1601403
6	74279	62207	17443·63	1536766
7	73701	59927	16973·66	1474559
8	73155	57749	16542·65	1414632
9	72623	55661	16134·91	1356883
10	72097	53648	15743·51	1301222
11	71576	51709	15367·13	1247574
12	71058	49838	15003·82	1195865
13	70542	48037	14652·44	1146027
14	70028	46297	14312·63	1097990
15	69516	44620	13984·00	1051693
16	69006	43005	13666·19	1007073
17	68497	41423	13358·24	964068
18	67990	39937	13060·43	922645
19	67484	38485	12771·80	882708
20	66978	37084	12491·64	844223
21	66473	35733	12220·18	807139
22	65968	34428	11956·63	771406
23	65464	33169	11701·26	736978
24	64959	31956	11452·83	703809
25	64453	30783	11211·16	671853
26	63946	29651	10976·01	641070
27	63438	28559	10747·32	611419
28	62928	27504	10524·41	582860
29	62416	26486	10307·14	555356
30	61901	25502	10094·97	528870
31	61382	24552	9887·38	503368
32	60860	23633	9684·68	478816
33	60333	22747	9485·99	455183
34	59801	21889	9291·26	432436
35	59262	21061	9099·71	410547
36	58717	20260	8911·67	389486
37	58164	19484	8726·42	369226
38	57603	18733	8543·96	349742
39	57032	18008	8363·66	331009
40	56450	17305	8185·24	313001
41	55856	16624	8008·45	295696
42	55249	15964	7833·05	279072
43	54628	15325	7658·83	263108
44	53991	14706	7485·33	247783
45	53337	14104	7312·36	233077
46	52663	13520	7139·33	218973
47	51969	12954	6966·35	204453
48	51253	12403	6793·09	192599
49	50512	11868	6618·99	180196

n	A_n	D_n	M_n	N_n
50	49745	11347	6444·03	168328
51	48950	10841	6267·97	156981
52	48124	10347	6090·37	146140
53	47266	9866·6	5911·27	135793·0
54	46372	9398·3	5730·08	125926·4
55	45442	8941·3	5547·09	116528·1
56	44471	8495·6	5361·64	107586·8
57	43459	8060·2	5173·94	99091·2
58	42403	7635·3	4983·79	91031·0
59	41301	7220·3	4791·14	83395·7
60	40151	6814·9	4595·95	76175·4
61	38951	6418·6	4398·21	69360·5
62	37700	6031·3	4198·07	62941·9
63	36397	5653·5	3995·68	56910·6
64	35042	5284·4	3791·34	51257·1
65	33634	4924·5	3585·19	45972·7
66	32175	4573·6	3377·79	41048·2
67	30665	4232·0	3169·40	36474·6
68	29109	3900·2	2960·92	32242·6
69	27508	3578·4	2752·65	28342·4
70	25869	3267·2	2545·65	24764·0
71	24197	2967·0	2340·63	21496·8
72	22500	2678·5	2138·61	18529·8
73	20787	2402·5	1940·62	15851·3
74	19067	2139·6	1747·62	13448·8
75	17354	1890·6	1561·00	11309·2
76	15659	1656·2	1381·72	9418·6
77	13996	1437·3	1210·94	7762·4
78	12381	1234·5	1049·93	6325·1
79	10828	1048·1	899·61	5090·7
80	9352	878·84	760·90	4042·62
81	7966	726·82	634·44	3163·78
82	6684	592·08	520·88	2436·96
83	5515	474·30	420·347	1844·88
84	4468	373·06	332·925	1370·58
85	3548	287·61	258·345	997·52
86	2756	216·91	196·012	709·91
87	2090	159·70	145·123	493·00
88	1543	114·47	104·544	333·30
89	1106	79·660	73·285	218·834
90	768	53·703	49·650	139·174
91	515	34·963	32·474	85·471
92	332	21·882	20·4132	50·508
93	205	13·118	12·2862	28·626
94	121	7·5177	7·0674	15·5082
95	68	4·1017	3·8704	7·9905
96	36	2·1574	1·9964	3·8888
97	18	1·0234	0·97299	1·7314
98	8	0·44160	0·42099	0·70801
99	4	0·21438	0·20661	0·26641
100	1	0·05203	0·05051	0·05203
101	0			

4% tablica

za zavarovanje na smrt.

n	A_n	D_n	M_n	N_n
20	100000	45639	12135·70	868545
21	99881	43480	11722·32	822906
22	98173	41424	11334·55	779426
23	97286	39471	10966·15	738002
24	96425	37618	10620·12	698531
25	95590	35858	10297·14	660913
26	94774	34184	9995·96	625055
27	93970	32591	9712·96	590871
28	93173	31071	9444·85	558280
29	92378	29621	9189·29	527209
30	91578	28236	8944·17	497588
31	90770	26910	8707·00	469352
32	89952	25641	8476·67	442442
33	89121	24428	8252·47	416801
34	88280	23266	8033·46	392373
35	87424	22155	7820·33	369107
36	86551	21090	7611·75	346952
37	85662	20070	7407·21	325862
38	84756	19094	7206·92	305792
39	83828	18159	7010·66	286698
40	82878	17263	6817·36	268539
41	81903	16403	6627·10	251276
42	80897	15579	6439·34	234873
43	79862	14788	6253·06	219294
44	78799	14030	6068·78	204506
45	77707	13303	5886·80	190476
46	78590	12607	5707·05	177173
47	75450	11942	5530·25	164566
48	74281	11305	5356·75	152624
49	73077	10694	5185·68	141319
50	71831	10108	5016·26	130625
51	70528	9542·5	4847·68	120517·0
52	69166	8998·0	4678·17	110974·5
53	67741	8474·0	4507·79	101977·5
54	66251	7959·0	4336·39	93503·5
55	64695	7482·3	4164·06	85544·5
56	63074	7014·2	3991·02	78062·2
57	61383	6563·7	3817·67	71048·0
58	59624	6130·3	3643·81	64484·3
59	57792	5713·5	3469·91	58354·0
60	55892	5313·1	3295·76	52640·5
61	53916	4928·2	3122·09	47327·4
62	51878	4559·4	2948·42	42399·2
63	49781	4206·9	2776 19	37839·8
64	47632	3870·5	2605·79	33632·9
65	45435	3550·0	2437·88	29762·4
66	43189	3244·7	2272·82	26212·4
67	40887	2953·6	2110·58	22967·7
68	38532	2676·4	1950·68	20014·1
69	36133	2413·3	1793·40	17337·1

n	A_n	D_n	M_n	N_n
70	33701	2164·3	1639·34	14924·4
71	31249	1929·6	1489·17	12760·1
72	28794	1709·6	1343·58	10830·5
73	26358	1504·8	1203·42	9120·9
74	23952	1314·8	1069·70	7616·1
75	21592	1139·7	942·70	6301·3
76	19293	979·18	822·95	5161·60
77	17083	833·68	710·76	4182·42
78	14980	702·93	607·055	3348·74
79	12998	586·46	512·167	2645·81
80	11150	483·73	426·179	2059·35
81	9420	392·96	349·089	1575·62
82	7821	313·71	279·698	1182·66
83	6378	245·98	218·027	868·95
84	5114	189·65	164·515	622·97
85	4034	143·85	119·442	433·32
86	3138	107·59	82·412	289·47
87	2423	79·882	52·872	181·880
88	1857	58·867	30·206	101·998
89	1415	43·131	12·954	43·131

Vadbe in naloge.

K § 1.

Ako je a neko število naravne številne vrste, kako se glasi naslednje število? Kako se glasi število, ki je za 2, 3, 5, b enot večje od a?

K § 2.

1. Kakšen pomen imajo izrazi $x + y + z$, $(x + y) + z$, $x + (y + z)$?

2. Izračunaj na pamet po računskih zakonih:

a) $37 + 52$; *b)* $86 + 79$; *c)* $217 + 47 + 58$.

3. Izračunaj na najkrajši način:

a) $73 + 49 + 7$; *b)* $73 + 49 + 1$; *c)* $237 + 992 + 8$;
d) $96 + 65 + 4 + 35$; *e)* $9994 + 893 + 7 + 6$;
f) $115 + 286 + 97 + 3 + 14 + 85$.

4. Pojasni s pomočjo računskih zakonov seštevanje mnogoimenskih števil! N. pr.

a) $8^0\,17' + 90^0\,28'$; *b)* $27^0\,31'\,45'' + 54^0\,28'\,36''$.

5. $2a + 7a + 13a + 8b$. **6.** $3a + 4b + 5a + 8b + 9a + 10b$.
7. $a + 2b + 3c + 4a + 6b + 8c + 5a + 7b + c$.
8. $(2a + 3b + 4c) + 3a$. **9.** $[(7m + 8n) + 3m] + 5n$.
10. $9m + (8m + 4n)$. **11.** $6n + (4m + 5n + 2p)$.
12. $3a + [7b + (5a + b)]$.
13. $(7a + 8b) + (9a + 6b) + (2a + 4b)$.
14. $\{15a + [5a + (7b + a)]\} + 2b$.
15. $[3x + 4y + 2z] + [6x + 4y + 5z] + [2x + 3y + 7z]$.
16. $[(2a + 3b) + (5a + 2b)] + \{[4a + (5a + b)] + 6b\}$.
17. Zameni $a = 4$ in $b = 5$ v 16. nalogi.

K § 3.

1. Ako je m število naravne številne vrste, kako se glasi potem število, ki je za 1, 5, n enot manjše od m?

2. Katero število je za $3x$ večje od $2a - 3x$?

Izvrši na različne načine:

3. $32a - 9a - 14a$. **4.** $304b - 176b - 37b - 58b$.

5. $26a - 25b - b - a$. **6.** $45a - 7x - 37x - 8a$.

7. $27 - (15 + 10)$. **8.** $9a - (6a + 2a)$.

9. $65 + (47 - 36)$. **10.** $17a + (15a - 8a)$.

11. $246 - (146 - 58)$. **12.** $25x - (17x - 15x)$.

Razreši po računskih zakonih:

13. $(9m + 2n) - 6m$. **14.** $[(3x + 5) + 2x] - 4$.

15. $(7m - 3a) + 2a$. **16.** $(8x - 4y) + 7x$.

17. $[(5z - 7) + 3z] + 4$. **18.** $(3a - 4) - 6$.

19. $(16y - 8x) - 8y$. **20.** $[(5x - 2) - 2x] - 3$.

21. $7a + (3a - 2b)$. **22.** $15m + [(4m - 3) + 2]$.

23. $(6x + 4y) - (3x + 2y)$. **24.** $5m - [(2m + 3a) + 2m]$.

25. $5y - (8z - 3y)$. **26.** $(8a + 4b) - (4a - 5b)$.

27. $(2x - 4) - (x - 1)$. **28.** $3a - [4b - (4a - 5b)]$.

29. $(78a + 52b + 37c) + (48b - 39c) - (58a - 60c)$.

30. $(7a + 5b) - [4a - (3b + 2a)]$.

31. $8a - \{4a - [3b - (2a - b)]\}$.

32. $(8a - 7b) - [(5a - 4b) - (2a - b)]$.

33. $8a + (7b - 5a) - [(4b - 2a) - b]$.

34. $8a - (7b - 5a) - [4b - (2a - b)]$.

35. $(8a + 7b) - [5a - (4b - 2a) - b]$.

36. Zameni $a = 4$ in $b = 3$ v nalogah 34. in 35.!

37. Pojasni s pomočjo računskih zakonov odštevanje mnogoimenskih števil. N. pr.

a) $18^0\,47'\,53'' - 16^0\,18'\,25''$; *b)* $52^0\,17'\,38'' - 45^0\,33'\,51''$.

38. Katero število je treba $7a - (3b - 1)$ prišteti, da dobiš $5a + 5b$?

39. Katero število moraš od števila $8x - 4y$ odšteti, da dobiš $2x - (2y + 2)$?

40. Od katerega števila moraš $8a - 4b$ odšteti, da dobiš $2a - (2b + 2)$?

41. Pretvori $3a - (b + c)$ v razliko z minuendom *a)* $4a$, *b)* $2a$, *c)* $3a + b$, *d)* $3a - 1$, *e)* $5a - 2$!

K § 4.

1. Kaj dobiš, ako spojiš s številom $+12$ (oziroma -12) osem pozitivnih (negativnih) enot?

2. Do katerega števila prideš v podaljšani številni vrsti, ako šteješ od števila $+5$ (oziroma -5) za 7 enot *a)* naprej, *b)* nazaj?

3. Kako se moraš pomikati in za koliko enot, da prideš v podaljšani številni vrsti od števila $+6$ (oziroma -6) do števila $+15$, -14?

4. Koliko in kakšne enote moraš spojiti s številom $+3$ (oziroma -3), da dobiš -11, $+9$?

K § 5.

1. $(-27) + (-56) + (+116) + (+89) + (-173)$.
2. $(+48a) + (-25b) + (+7a) + (-55a) + (+37b)$.
3. $(+3a) + (-7b) + (-13c) + (+9b) + (-8c) + (+11a)$.
4. $35a - 46b + 59c + 16b + 21c - 33a - 44c + 28b - 5a$.
5. $(-4a + 7b) + (19a - 13b) + (-38a + 20b)$.
6. $(13a - 25b + 16c) + (-14a - 19b + 25c) +$
$+ (29a - 31b - 40c)$.
7. $(403x - 621y + 59z - 108) + (-317x + 501y + 69z - 92)$.

K § 6.

1. $25 - (-13)$. 2. $(-25) - (+13)$. 3. $(-25) - (-13)$.
4. $7a - (-4a)$. 5. $(-5a) - (-3a)$. 6. $(-12a) - (+6a)$.
7. $(+18) - (-17) - (+25) + (-9) + (-16)$.
8. $(-4x) + (-2x) - (-x) + (+9x) - (+8x)$.
9. Izračunaj vrednost številnega izraza:

$$x - (x - 2) + (x - 4) - (x + 6) - (x + 8) + (x - 10)$$

za $x = -4$!

10. $(7a - 18b) - (10a + 7b) + (-3a + 5b)$.

11. $(3x + 2y) - (6x - 8y) - (-2x + 5y) + (-4x + 3y)$.

12. $2a - [14 - (3 - 7a)] + [9 - (-2 + 8a)]$.

13. $45 - [18 - (m - 2)] - [15 - (5 - 4m)]$.

14. $(8x - 6y) + (2x - 4y) - [(4x + 3y) - (8x - 5y) - (-x + 2y)]$.

15. $(5a - 7b) - [(3a - b) - (-2a + 3b)] - [(7a - 2b) - (3a + b)]$.

16. $2m - 3n - \{2m - [-2m + 3n - (2m + 2n) - (-2m + 3n)]\}$.

17. $6x - 7y - \{-6x + 7y - [(6x - 7y) - (-6x + 7y) - 6x)]\}$.

18. $832x - \{417y + [469x - (315y - 178x) + (-305x + 408y)]\}$.

19. Izračunaj

a) $A + (B - C - D)$; *b)* $A - (B - C - D)$;

c) $A - (B - C) - D$; *d)* $A + B - (C - D)$

za: $A = 7x - 8y + 9z$, $B = 6x + 5y - 6z$,

$C = -12x + 13y - 11z$, $D = 2x - 3y - 4z$,

K § 7.

Razreši naslednje enačbe:

1. $x + 5 = 12$. **2.** $x + a = 0$. **3.** $x - 5a = a$.

4. $36 - x = 10$. **5.** $6a - x = 4a$. **6.** $a - b - x = 0$.

7. $4 + 3x = 6 + 2x$. **8.** $6x - 9 = 9 + 5x$.

9. $4 - 7x = 10 - 8x$. **10.** $9a - 7x = 4a - 6x$.

11. $30 - (x + 4) = 10$. **12.** $(x - 4) - 30 = 10$.

13. $9 - (5 - 2x) = 3x + 1$. **14.** $(5x - 10) - 2x = 2x - 3$.

15. $20 - (5 - y) = 6y - (20 + 4y)$.

16. $(5 - x) - (4 - x) = (2x - 6) - (8 + x)$.

17. $20 + [23 - (11 + y)] = 46$.

18. $4a - [(3a - 2x) - (4a - x)] = (5a - 6x) - (7a - 8x)$.

19. Pretvori naslednje neenačbe na najpreprostejšo obliko:

a) $3x - 7 > 2x + 1$; *b)* $6x + 8 < 7x + 5$;

c) $2x - 3a + 5 < 3x - 4a - 2$;

d) $4a - 5x - 6 > 5a - 6x - 4$.

20. Katera cela števila zadostujejo naslednjim pogojem:

a) $2x + 3 < 3x + 5 < 6 + 2x$; *b)* $5x - 6 < 6x - 3 < 5x - 3$;
c) $4x < 5x + 8 < 4x + 3$; *d)* $x - 2 < 2x - 1 < x + 1$.

K § 8.

1. $9x^2 \cdot 8a^3 \cdot 3a^4$. **2.** $5a^2 \cdot 6b \cdot 7ab$. **3.** $9x^2 \cdot 6y \cdot 3xy^2$.
4. $5xy^2 \cdot 4ax^2 \cdot 2ay$. **5.** $(+3) \cdot (+7)$. **6.** $(-5) \cdot (+9)$.
7. $(+1) \cdot (-6)$. **8.** $(-4) \cdot (-13)$. **9.** $(-15ax^2)(-4ax^2y)$.
10. $(-4x^2y^3) \cdot 13ax^4y^2$. **11.** $2m^2(-3am^2)(-4ab)(+abc^2)$.
12. $(-a^3x^4)(+4ab^3y^2)(-5b^2x^2y^3)(-6a^2bx^3y^4)$.
13. Izračunaj vrednosti izrazov:

α) $(a - 2b)(a + b)(a - 4b)(a + 3b)$, ako je $a = b$;
β) $(31a - 21b)(17a - 28b)(12a - 16b)$,
ako je $a = 5$ in $b = 7$.

14. $(a^2 - 2ab + b^2)7a^3b$. **15.** $5a^4(9a^3 - 7a^2 - 3a + 5)$.
16. $(5a^2 - 3ab + b^2) \cdot (-3ab)$. **17.** $(-2xy^2)(3x^2 - 5xy + 7y^2)$.
18. $[(2m - 3n)m^2 + (4m - 5n)n^2]7mn^2$.
19. $[x^2y^3(5x - 7y^4) + 2xy^2(-3x^2y + 5xy^5)]9x^3y$.
20. $[2ab(-4a + 5b) - 3ab(a - 7b)] \cdot (-6a^2b)$.
21. $[3xy^2(-x^2 + 2xy - 5y^2) - x^2y(4x^2 - 5xy - y^2)](-2xy^3)$.
22. $(5x - 2y)(3x - 2y)$. **23.** $(2x^2 - 5y)(7x^2 + y)$.
24. $(3x + 5x^2 + 6x^3)(5 - 2x)$.
25. $(-2a^2 + 3ab - 4b^2)(-5a + 7b)$.
26. $(6x - 7y + 8)(6x + 10y - 8)$.
27. $(5x^2 - x + 4)(2x^2 - 5x - 3)$.
28. $(5a + 3b)(7a + 5b)(3a + 4b)$.
29. $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)$.
30. $(3x + 5)(2x - 3)(x - 1) - (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.
31. $(2y + 1)(3y + 5)(y + 1) + (y - 1)(y - 2)(-y + 3)$.
32. $(3a^4 - 2a^3b + 5a^2b^2 - ab^3 + 4b^4)(9a^2 - 6a + 5)$.
33. $(a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2)(a^3b - 2a^2b^2 + 2ab^3)$.
34. $(7a + 8n)^2 + (4a - 5n)^2 - (8a - 9n)^2$.
35. $(9x - 7y)^2 + (11y - 6x)^2 - (14x - 9y)^2$.

36. $(3a + 2b)^3 - (2a - 3b)^3 + (a - 4b)^3$.
37. $(4x + 5y)^3 + (2x - 7y)^3 - (3x - 8y)^3$.
38. $(5a - 1)(5a + 1)(25a^2 + 1)$.
39. $(3a + 4b)(3a - 4b)(9a^2 + 16b^2)$.
40. $(xy + z)(xy - z)(x^4y^4 + z^4)(x^2y^2 + z^2)$.
41. $(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)(x + y)$.
42. $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$.
43. $(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)(x + y)$.
44. $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$.
45. $(x^{m+3} - 2x^{m+2}y + 3x^{m+1}y^2 - 4x^my^3)(x^2 + xy + y^2)$.
46. $(5a^4x^m - 7a^3bx^{m-1}y^n + 9a^2b^2x^{m-2}y^{2n} - 11ab^3x^{m-3}y^{3n} +$
$+ 13b^4x^{m-4}y^{4n}) \cdot (3a^2x^3 + 2abx^4y^n + b^2x^5y^{2n})$.
47. $[x^2 + (a + b)x + (a^2 + b^2)][x^2 - (a - b)x + (a^2 - b^2)]$.
48. $6x\{x - x[3x - (x - 1)^2] - x(x + 1)(x - 1)\} - x$.
49. $(a^{4m} + 3a^{3m}b^n + 5a^{2m}b^{2n} + 7a^mb^{3n} + 9b^{4n})(a^m - b^n)$.
50. Zameni $A = 5x - 3y$, $B = 2x - 1$ in $C = 1 - 2y$ v naslednjih izrazih ter izračunaj njih vrednosti:
a) $2AB - 3AC - BC$; *b)* $(A^2 - 2BC)(B - C)$;
c) $AB - C^2$; *d)* $(A^2 - B^2)C - (B^2 + C^2)A$.

K § 9.

1. $35abc : 7ac$.
2. $81mn : 27n$.
3. $48a^3x^5 : 6a^2x^3$.
4. $72x^2y^3 : 8xy^2$.
5. $63abx^3y^4 : 7ax^3y^4$.
6. $144a^5b^3m : 16a^3b$.
7. $80a^{m+3}b^{n+2}x^2 : 16a^3b^2x$.
8. $27a^4b^2x^{m+5}y^{2n} : 9abx^4y^n$.
9. $45a^{m+5}x^{n+6} : 3a^3x^5$.
10. $20a^mb^nx^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$.
11. $(-24xy) : (-8y)$.
12. $(-27a^5b^3c^4) : 9a^3b^2c$.
13. $18a^4x^2y^3 : (-2a^2x^2y)$.
14. $(-91a^{2m}b^{3n}) : (-13a^{m+2}b^{2n-2})$.
15. $(5a^3b^2 : ab^2) \cdot 6a^3b^2$.
16. $(21a^2x^5 : 3ax^4) \cdot (-6a^2b^3x)$.
17. $[(-18x^2y^3z) : 2xy] \cdot (-8x^2y^2z^3)$.
18. $(25a^2b^3x : 5ab) : b^2x$.
19. $[21m^3n^2 : (-7m^2)] : (-3mn)$.
20. $(45a^6b^4x^3 : 15a^2b^3x) \cdot (15a^3b^2 : 3a^2b)$.
21. $[(-48x^3y^4z^5) : 6xy^2z^3] \cdot [18x^5y^4z^3 : (-3xy^2z^3)]$.

22. $[27a^7b^4x^{m+n+3}:(-3a^3x^n)]:(-3a^3b^2x^3)$.

23. $(24a^{m+2}b^nx^{m+4}y^{n+3}:4a^mx^4y^3):3b^ny^n$.

24. $[75a^{m+5}b^{n+5}x^{p+4}:(-5a^4b^3x)]:(-3ab^2x^3)$.

25. $\{[85a^5b^7c^9:(-17a^3b^2c)]:(-5ab^2c^3)\}:(-b^2c^3)$.

26. $\frac{a+b}{c^2-d^2}\cdot(c+d)$.

27. $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot(x+y)$.

28. $\frac{5a}{12(a-b)}\cdot 6(a-b)$.

29. $\frac{a^2-b^2}{3(a+b)^2}\cdot 3(a+b)$.

30. $\frac{x+y}{x^2+y^2}\cdot(x-y)$.

31. $\frac{5(x^2+y^2)}{x^2-y^2}\cdot 2(x^2+y^2)$.

32. $42x^2y^5z^4:\frac{6z^2}{7y}$.

33. $18a^3c^4d^5:\frac{3a^3d}{7c^2}$.

34. $128a^7b^4:\frac{16a^3b^3}{5x^2}$.

35. $2m(m+1):\frac{2m}{m-1}$.

36. $\frac{15a^3b^2}{4mn}:5a^2b$.

37. $\frac{6a^2x^4}{5by}:3ax^2$.

38. $\frac{4m^2n^3}{5ab^2}:3a^2b$.

39. $\frac{5ab}{3(a+b)}:2(a-b)$.

40. $b+\left[(b^2+c^2):\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\right]:(a+b)$.

41. $[128a^7b^4:(16a^3b^2:4a^2b)]-[(128a^7b^4:16a^3b^2):4a^2b]$.

42. $\{(x^2-y^2):[(x-y):(x+y)]\}-\{[x^2-y^2):(x-y)]:(x+y)\}$.

43. $\frac{15a^2b+25ab^2}{5ab}$.

44. $\frac{24a^5b^4x^3-16a^3b^2x^2}{8a^2b^2x^2}$.

45. $\frac{7(a^2-b^2)+8(a+b)^2-9(a+b)}{a+b}$.

46. $\frac{90a(x^2-y^2)+15b(x-y)^2-45(x-y)}{15(x-y)}$.

47. $(128a^8b^3+224a^7b^4-288a^6b^5+96a^5b^6):(-8a^4b^2)$.

48. $(125x^3y^4+250x^4y^5-325x^5y^6-400x^6y^7+625x^7y^8):$
$:(-25x^3y^4)$.

49. $(3x^4+5x^3+x^2-10x-14):(3x^2+5x+7)$.

50. $(2-7x+16x^2-25x^3+24x^4-16x^5):(2-3x+4x^2)$.

51. $(9x^2-16y^2):(3x+4y)$.

52. $(81m^4x^2-64y^2):(9m^2x-8y)$.

53. $(27x^3-343y^3):(3x-7y)$.

54. $(16a^8-81b^4):(2a^2-3b)$.

55. $(a^3-b^3):(a-b)$.

56. $(a^5+b^5):(a+b)$.

57. $(a^4-b^4):(a-b)$.

58. $(a^6-b^6):(a+b)$.

59. $(5a^5+2a^4b-7a^3b^2-a^2b^3+2ab^4-b^5):(5a^2-3ab+b^2)$.

60. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4) : (-3 + 8x + 6x^2)$.

61. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5) : (-1 + 6x + 9x^2)$.

62. $(4m^6n^4 - 3m^5n^6 - 16m^4n^8 - 27m^3n^{10} - 18m^2n^{12}) :$
$: (m^3n^2 - 2m^2n^4 - 3mn^6)$.

63. $(113a^2b^2 - 136a^3b + 35a^4 + 12b^4 - 64ab^3) : (5a^3 + 11ab^2 -$
$+ 18a^2b - 6b^3)$.

64. $(-4x^4 + 9x^5 + 9x^6 + 18x - 14 - 27x^3 - 21x^2) :$
$: (5x^3 - 10x + x^2 - 14 + 3x^4)$.

65. $(9m^{10} + 2m^6n^4 - 12m^4n^6 - 7m^2n^8 - 4n^{10}) : (3m^6 - 2m^4n^2 +$
$+ m^2n^4 - 4n^6)$.

66. $(36x^2 - 25y^4 + 10y^2z^3 - z^6) : (6x - 5y^2 + z^3)$.

67. $(2x^5 + 6x^4 - 41x^3 + 47x^2 - 21x + 22) : (x^2 + 5x - 11)$.

68. $(a^9 - 24a^6x^3 + 192a^3x^6 - 512x^9) : (a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8x^3)$.

69. $(-48a^5x^7 - 87a^9x^3 + 12a^{11}x + 147a^7x^5) : (2a^5x - 3a^4x^2 -$
$- 5a^3x^3 + 4a^2x^4)$.

70. $x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n}) : (x^{2m} - y^{3n})$.

71. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} + x^{2n+2}y^{m+1} - x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2)$.

72. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2)$.

73. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5)$.

74. $[(120 - 326a + 329a^2 - 146a^3 + 24a^4) : (4 - 3a)] :$
$: (6 - 7a + 2a^2)$.

75. $(12x^4 - 17x^3 + 16x^2 - 7x + 2) : [(-9x^3 + 12x^2 - 7x + 2) :$
$: (-3x + 2)]$.

K § 10.

1. $(2 - x)(3 - x) = (4 + x)(3 - x)$.

2. $(2 + x)(2x + 1) + (2 - x)(2x - 1) = 0$.

3. $(3x - 6)(7x - 13) = (3x - 2)(7x - 19)$.

4. $(x + 2)(x + 3) - 4 = (x + 4)(5 + x) - 10$.

5. $(5 - 6x)(2 - 3x) = 3[(4 - 5x) - 6x(1 - x)]$.

6. $[3(y - 2) - 5]5 - 4(2y - 6) = y - 19$.

7. $5(y + 10) - 4[160 - 3(3y - 2) + 2y] = 2 - y$.

8. $3[4(3 - y) - y] - 70 = 5[3 + (2y - 7)] - 7(y + 5) + 3$.

9. $3x - \{6x - 3[3x - (4x - 5)]\} = 3$.

10. $2x - 2\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} = 0$.

11. $(y+8)^2+(y+3)^2=(y+12)^2+(y-5)^2$.
12. $(13x+3)^2-(5x+10)^2=(12x-3)^2$.
13. $a^2(x-b)-b^2(x-a)=a^2(a-x)-b^2(b-x)$.
14. $x(x-2a)-(b-x)^2=3b^2-4a^2$.
15. $(x-a)^2-(x-b)^2+3(a-b)^2=0$.
16. $7(y-ab)=(a+b)^2+3(y+b^2)+a(3a-b)$.
17. $(3x-4)^3-(2x-3)^3=19x^3-8x(9x-10)+3$.
18. $2(x+1)^3+7(x-4)^2+2(25x-1)=$
$=(x+2)(x+5)(x+6)+x^3$.
19. $(16x^2-9):(4x+3)=3x+4$.
20. $(9y^2-12y+4):(3y-2)=5y-8$.
21. $(8y^3-27):(2y-3)=(2y-6)(2y+1)-1$.
22. $(6y^4-5y^3+4y^2+11y-4):(2y^2-3y+4)=$
$=3y^2-5y+13$.
23. $(x^4-8x^2+16):(x^2+4x+4)=(x+2)(x-2)$.
24. $(8x^4-22x^3+19x^2-2x-24):(4x^2-5x-6)=$
$=2(x-3)(x+4)-2$.

25. Katera cela števila ustrezajo naslednjim neenačbam:

a) $3x+29<6x+5<3x+23$;
b) $8x-5<12x+15<8x+3$;
c) $6-9x<21-6x<15-9x$;
d) $5x+12>9x-12>5x-4$.

K § 11.

1. Pretvori števila *a)* 35624[7], *b)* 32045[6], *c)* 72085]9] v dekadična števila!

2. Pretvori dekadična števila *a)* 9958, *b)* 14195, *c)* 68520 v številni sestav [6], oziroma [9]!

3. Pretvori:

a) 460213[7] v številni sestav [4];
b) 510423[6] „ „ „ [5];
c) 627534[8] „ „ „ [9]!

4. $3146 + 213 + 31324 + 50421 + 42135$ [7].

5. $57016 + 124560 + 36425 + 61433 + 225347$ [8].

6. $41203 - 22412$ [5]. 7. $532104 - 243255$ [6].

8. $83767 - 21875$ [9]. 9. $706435 - 416723$ [8].

10. $3124 \cdot 234$ [5]. 11. $2033 \cdot 3012$ [4].

12. $5372 \cdot 458$ [9]. 13. $4531 \cdot 6543$ [7].

14. $6043 \cdot 7507$ [8]. 15. $231013 : 543$ [6].

16. $384010 : 368$ [9]. 17. $1522730 : 330$ [8].

18. $24420220 : 2204$ [5]. 19. $56432103 : 6005$ [7].

K § 12.

1. Določi, s katerimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25 in 125 so deljiva sledeča števila:

a) 312, 6225, 17280, 71016, 948656;
b) 720, 6472, 76450, 484572, 567000;
c) 534, 8625, 10692, 734520, 350496.

2. Določi praštevila naravne številne vrste od 1 do 100!

K § 13.

1. Določi, ali so naslednja števila praštevila: 763, 829, 1003, 1739!

2. Razstavi na prafaktorje: 2268, 3075, 5376, 3828, $72a^3b^2$, $60ax^2z^4$!

Razstavi na prafaktorje:

3. $18ab - 15ac$. 4. $9x^2 - 24xy$. 5. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$.

6. $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$. 7. $x^2 + 2x^2 - x - 2$.

8. $a^3 + 2a^2b - ab - 2b^3$. 9. $x^3 - 5x^2 + 9x - 45$.

10. $2a^2x - 6abx - a + 3b$.

11. $10ax - 15bx - 20cx - 12ay + 18by + 24cy$.

12. $4x^2 - 1$. 13. $9a^2 - 16b^2$. 14. $6x^2 - 54a^2$.

15. $75a^3b^3 - 3ab$. 16. $27a^3b - 48ab^3$. 17. $(b + c)^2 - a^2$.

18. $a^2 - (b - c)^2$. 19. $9a^2 - (2a - 3b)^2$. 20. $9b^2 - 12b + 4$.

21. $9x^2 + 6x + 1$. 22. $16a^2 - 48ab + 36b^2$.

23. $2a^4 - 4a^3 + 2a^2$. 24. $5x^3 + 10x^2 + 5x$.

25. $4a^3b - 24a^2b^2 + 36ab^3$. 26. $b^2 + 4ab + 3a^2$.
27. $x^2 + 19x + 70$. 28. $x^2 - 7x + 12$. 29. $a^2 - 9ab + 20b^2$.
30. $5b^2 - 6ab + a^2$. 31. $7x^2 + 8xy + y^2$. 32. $x^2 + 4x - 5$.
33. $a^2 + 5ab - 24b^2$. 34. $x^2 - 2x - 15$. 35. $b^2 - 4bc - 5c^2$.
36. $3x^2 + 3x - 36$. 37. $4a^2 + 36ab + 80b^2$.
38. $2x^2 - 12x - 32$. 39. $5x^2 - 15xy + 10y^2$.
40. $x^3 + 1$. 41. $x^3 - 1$. 42. $x^4 - 1$.
43. $x^5 + y^5$. 44. $x^5 - y^5$. 45. $x^6 - y^6$.
46. $1 - 8x^3$. 47. $1 + 27a^3$. 48. $8 + 27x^3$.
49. $x^6 + y^6$.

K § 14.

Razstavi naslednje številne izraze na prafaktorje ter poišči njih največjo skupno mero:

1. 840, 576. 2. 336, 432, 528.
3. 561, 1155, 13864. 4. 693, 819, 9450.
5. $15a^3b$, $54a^2b^4$. 6. $12acx$, $16abx^2$, $20a^2x^2$.
7. $2ax + 4bx$, $6a^2b + 12ab^2$, $a^2 - 4b^2$.
8. $4a^2 + 4ab$, $5ab + 5b^2$, $8a^2b + 8ab^2$.
9. $a^2 + 3a - 10$, $a^2 + 8a + 15$.
10. $a^2 - 10ab + 16b^2$, $a^2 + 2ab - 80b^2$.
11. $x^2 - 2xy - 8y^2$, $x^2 + 2xy - 3xy^2 - 6y^3$.
12. $8x^5y^2 - 8x^3y^4$, $4x^4y^2 - 8x^3y^3 + 4x^2y^4$.
13. $12x^3y^2 - 12x^2y^3$, $18x^4y^2 - 18x^2y^4$, $24x^3y - 48x^2y^2 + 24xy^3$.

Poišči največjo skupno mero naslednjih številnih izrazov s pomočjo verižne delitve:

14. 20295, 13735. 15. 14539, 25728.
16. 15548, 18590. 17. 24955, 338625.
18. 1701, 6426, 10521. 19. 78375, 65835, 13432.
20. $2x^4 - 9x^3 + 17x - 48$, $x^4 - 3x^3 + 7x - 15$.
21. $m^2 + 6m + 8$, $m^3 - 3m^2 - 4m + 12$.
22. $4m^3 - 16m^2 + 23m - 20$, $6m^2 - 7m - 20$.

23. $6x^3 + 16x^2 - 22x + 40,\ 9x^3 - 27x^2 + 35x - 25.$

24. $3x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 8x + 3,\ 2x^3 - 9x^2 + 9x - 7.$

25. $6a^3 - a^2 - 22a + 15,\ 21a^4 + 25a^3 - 27a^2 + 21a - 20.$

26. $12a^3 - 2a^2b - 5ab^2 - b^3,\ 9a^3 + 5ab^2 + 2b^3.$

27. $5x^3 - 18x^2y + 11xy^2 - 6y^3,\ 7x^2 - 23xy + 6y^2.$

28. $2a^2 - 2,\ 5a^3 - 4a - 1,\ 6a^4 - 5a^2 - 1.$

29. $a^2 + 2ab - 3b^2,\ a^2 + 6ab - 7b^2,\ a^2 - 5ab + 4b^2.$

30. $x^2 + 3xy + 2y^2,\ x^2 + xy - 2y^2,\ 2x^2 + 7xy + 6y^2.$

K § 15.

Razstavi naslednje številne izraze na prafaktorje ter jim poišči najmanjši skupni mnogokratnik:

1. 120, 168, 182.

2. 105, 144. 270.

3. 315, 441, 567, 378.

4. 720, 864, 1008, 1296.

5. 2, 14, 21, 49, 90, 91.

6. 4, 5, 6, 10, 25, 28.

7. 26, 35, 42, 52, 56, 60.

8. 16, 24, 32, 36, 40, 72.

9. $12b^2,\ 15a^2,\ 24ab^2,\ 10b^3,\ 18ab.$

10. $8x^2,\ 54xy,\ 64xy^2,\ 80y^2,\ 81x^2y.$

11. $5x + 10,\ 20x^2 - 80,\ 6x^2 + 24x + 24.$

12. $a^2 - b^2,\ a^2 + 2ab + b^2,\ a^2 - 2ab + b^2.$

13. $3x^3y - 3x^2y,\ 2x^2y^2 + 2xy^2,\ 4x^4 - 8x^3 + 4x^2.$

14. $6x^2 - 3x,\ 24x^4 - 6x^2,\ 12x^5 - 12x^4 + 3x^3.$

Poišči naslednjim številnim izrazom najmanjši skupni mnogokratnik s pomočjo največje skupne mere:

15. 874, 943.

16. 6987, 8083.

17. 816, 765, 697.

18. 259, 3219, 7548,

19. $a^3 - 49a - 120,\ a^2 + 10a + 25.$

20. $6x^3 - 13x^2 - 45x - 25,\ x^3 + 2x^2 - 20x - 25.$

21. $a^3 - a^2b - 5ab^2 - 3b^3,\ a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3.$

22. $5a^4 + 7a^3b - ab^3 + b^4,\ a^3 + a^2b - ab^2 - b^3.$

23. $4a^5 + 11a^4 + 8a^3 - 2a^2 - 4a - 1,$
$3a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 4a + 1.$

24. $x^3 - y^3$, $x^2 + xy + y^2$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$.

25. $2x^2 + x - 3$, $10x^2 + 19x + 6$, $4x^2 + 12x + 9$.

26. $8x^2 - 6xy - 5y^2$, $8x^2 - 14xy + 5y^2$, $4x^2 + 7xy - 15y^2$.

K § 16.

Uredi sledeče ulomke po njih kolikosti:

1. $\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{13}{20}, \frac{19}{24}, \frac{29}{36}$.

2. $\frac{4}{5}, \frac{11}{15}, \frac{9}{16}, \frac{37}{40}, \frac{23}{48}, \frac{49}{60}$.

3. $\frac{3}{4}, \frac{4}{15}, \frac{8}{21}, \frac{17}{30}, \frac{6}{35}, \frac{13}{42}$.

Pretvori sledeče ulomke na najmanjši skupni imenovalec:

4. $\frac{a}{b}, \frac{5a}{3b^2m}, \frac{3bc}{4m^2}, \frac{4ac}{5mx}, \frac{5cd}{12b^2m^2}, \frac{7acd}{18bmx}$.

5. $\frac{ab^2}{6x^3}, \frac{3ab}{10xy^2}, \frac{11a^2}{15x^2y}, \frac{7a^2b}{20xy}, \frac{13a}{24y^3}$.

6. $\frac{x}{x-1}, \frac{x^2}{x^3-3x+2}, \frac{x^3}{x-2}$.

7. $\frac{x+y}{x^2-xy}, \frac{x-y}{xy+y^2}, \frac{xy}{x^2-y^2}$.

8. $\frac{x+5}{x^2+x-2}, \frac{x+4}{x^2-4}, \frac{x+3}{x^3-x^2-4x+4}$.

9. $\frac{x}{x-1}, \frac{1}{x+1}, \frac{3x}{x^2-1}, \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$.

10. $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1+a}{1-a}, \frac{1+a^2}{1-a^2}, \frac{1-2a+a^2}{1+2a+a^2}, \frac{1+2a+a^2}{1-2a+a^2}$.

Okrajšaj sledeče ulomke:

11. $\frac{126}{644}$.

12. $\frac{168}{540}$.

13. $\frac{391}{989}$.

14. $\frac{637}{819}$.

15. $\frac{2079}{7029}$.

16. $\frac{33017}{53293}$.

17. $\frac{12a^2x}{28ax^2}$.

18. $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$.

19. $\frac{121a^3b^2c^3}{132a^2b^4c^2}$.

20. $\frac{6a^2+9ab}{10a^2b+15ab^2}$.

21. $\frac{28a+21ab}{7a^2-14ab}$.

22. $\frac{15ax^2-10a^2x}{21bxy-14aby}$.

23. $\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$.

24. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$.

25. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}$.

26. $\dfrac{a^2-8a+15}{a^2-10a+21}$. 27. $\dfrac{a^2-7ab+12b^2}{a^2+ab-20b^2}$ 28. $\dfrac{a^2+6a-16}{a^2+5a-24}$.

29. $\dfrac{(a+b)^2-4c^2}{a^2-(b+2c)^2}$. 30. $\dfrac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

31. $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$. 32. $\dfrac{x^3+x^2-3x-3}{x^3+x^2-4x-4}$.

33. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-7x^2+15x-9}$. 34. $\dfrac{3x^3-10x^2-18x-35}{3x^3+17x^2+27x+28}$.

Izračunaj:

35. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ za $x=2$.

36. $\dfrac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$ za $x=a$.

37. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}$ za $x=-2$.

38. $\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-x^2-21x+45}$ za $x=3$.

39. $\dfrac{x^4+2x^3-18x^2-6x+45}{x^4+3x^3-21x^2-9x+54}$ za $x=3$.

40. $\dfrac{x^4+x^3-x^2-4x-12}{x^4-2x^2-8}$ za $x=-2$.

K § 17.

1. $\dfrac{3a+4}{3}-\dfrac{7a+5}{4}-\dfrac{8-7a}{6}-\dfrac{5-3a}{8}-\dfrac{3-7a}{12}$.

2. $\dfrac{3x-5y}{5}-\dfrac{2x-3y}{10}-\dfrac{2y-5x}{15}+\dfrac{3y-x}{20}+\dfrac{x-y}{4}$.

3. $\left(\dfrac{5a^2}{4}-\dfrac{4ab}{3}+\dfrac{3b^2}{2}\right)-\left(\dfrac{4a^2}{5}-\dfrac{3ab}{4}-\dfrac{2b^2}{3}\right)$.

4. $\left(\dfrac{4x}{9}-\dfrac{5y}{8}\right)+\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4y}{5}\right)-\left(\dfrac{5x}{6}-\dfrac{7y}{20}\right)$.

5. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$. 6. $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}$.

7. $a-b+\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$. 8. $x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

9. $a^2+b^2-\dfrac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}$. 10. $x^2-y^2-\dfrac{x^4-2x^2y^2-y^4}{x^2+y^2}$.

11. $\dfrac{2x+3y}{12x^2-18xy}-\dfrac{2x-3y}{12x^2+18xy}$. 12. $\dfrac{x^2+5xy-y^2}{x^2+4xy+4y^2}-\dfrac{x-y}{x+2y}$.

13. $\dfrac{x^2-2xy-4y^2}{x^5-16xy^4}-\dfrac{x-2y}{x^4+4x^2y^2}$.

14. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$.

15. $\dfrac{x^2-6x-27}{x^2-5x-36}-\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+10x+16}$.

16. $\dfrac{x+2}{x^2+9x+20}+\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x-24}$.

17. $\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{5}{3x-1}+\dfrac{4}{2x-3}$. 18. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-2}-\dfrac{4x-3}{x-3}$.

19. $\dfrac{2x-5y}{9x+3y}-\dfrac{6x+5y}{12x+4y}+\dfrac{3x+4y}{3x+y}$.

20. $\dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}-\dfrac{3x+1}{x^2+4x+3}+\dfrac{4x+1}{x^2+5x+6}$.

21. $\dfrac{3a+b}{3a^2-ab}-\dfrac{2a+3b}{12ab-4b^2}+\dfrac{3b^2-ab-6a^2}{18a^2b-6ab^2}$.

22. $\dfrac{a-b}{a^2+3ab+2b^2}+\dfrac{a+b}{a^2+ab-2b^2}-\dfrac{4ab}{2b^3+ab^2-2a^2b-a^3}$.

23. $\dfrac{5a-8b}{a+b}+\dfrac{3a-b}{a-b}-\dfrac{a-4b}{a+b}+\dfrac{a+5b}{a-b}$.

24. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2b}{a^2-b^2}-\dfrac{2a}{a^2+2ab+b^2}$.

25. $\dfrac{a+3}{a^2+3a+2}+\dfrac{a+1}{a^2+a-2}-\dfrac{a-1}{a^3+a^2-4a-4}-\dfrac{a-2}{a^3+2a^2-a-2}$.

26. $1-\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{a^2-a+1}{a^2+1}-\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a^2+a+1}{a^2-1}-\dfrac{2a-4}{a^4-1}$.

27. $z-\dfrac{y^2z-5xy^2z+x^3}{y^2-yz}+2xy-\dfrac{2xy^2-z^2}{y-z}-3xz$.

28. $\dfrac{5x^2}{18x^2-6y}-\dfrac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2}+\dfrac{x^2+6y}{6y}-\dfrac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}$.

K § 18.

1. $\dfrac{15ab}{16x^2y}\cdot 3a^2b$. 2. $\dfrac{24a^2b^3}{25x^4y^2}\cdot 5x^3y$.

3. $\dfrac{2a+5}{a^2-4}\cdot(a+2)$. 4. $\dfrac{c-b}{bc}\cdot(b+c)$.

5. $\frac{ab}{a^2 - b^2} \cdot (a + b)^2.$ 6. $\frac{a - 3}{a^2 - 2a + 1} \cdot 3(a - 1).$

7. $\frac{x - y}{xy} \cdot (-2xy).$ 8. $\left(-\frac{5x}{8y}\right) \cdot 6xy^2.$

9. $250ab^3 \cdot \frac{2x + 3}{625ab^2}.$ 10. $(x^2 - 4) \cdot \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 4}.$

11. $(a^2 - 4b^2) \cdot \frac{a + 2b}{a^2 - 3ab + 2b^2}.$ 12. $(1 + a) \cdot \left(1 + \frac{1 - a}{1 + a}\right).$

13. $\frac{27a^3b^2}{25x^2y^3} \cdot \frac{15xy^2}{a^2b}.$ 14. $\frac{2ab}{cd} \cdot \left(-\frac{3acx}{2dm}\right).$

15. $\left(-\frac{33m^3}{4a^3x^3}\right) \cdot \left(-\frac{6a^4x^2}{11my^2}\right).$ 16. $\frac{a^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab}.$

17. $\frac{x^2 + 4x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x + 1}.$ 18. $\frac{a^2 + 3a + 2}{a^4 - 16} \cdot \frac{a^2 - 4}{a + 1}.$

19. $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x + 5} \cdot \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x - 5}.$ 20. $\frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 + 2a - 3} \cdot \frac{a^2 + 4a + 3}{a^2 - 4a + 3}.$

21. $\left(1 + \frac{9 - x}{x^2 - 5x - 6}\right) \cdot \left(1 - \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6}\right).$

22. $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n - 1} - \frac{2n}{n^2 - 1}\right)\left(n + 1\right).$

23. $\left(\frac{y^2 + a^2}{a^3 - a^2} - \frac{1}{a - 1}\right)(a - 1).$

24. $\left(\frac{3m}{m - 1} - \frac{2m}{m + 1} - \frac{m^2}{m^2 - 1}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right).$

25. $\left(\frac{y^2}{x^2 + xy} + \frac{x^2}{xy - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{xy}\right)\left(1 - \frac{2y}{x + y}\right).$

26. $\left(a + \frac{ab - 2}{a - b}\right)\left(a - \frac{ab - 2}{a + b}\right) \cdot \frac{a - b}{a^2 - 2}.$

27. $\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x}\right)^2.$ 28. $\left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)^2.$

29. $\left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3.$ 30. $\left(\frac{x}{2y} - \frac{3y}{x}\right)^3.$

31. $\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a^2}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a}{a + b} + \frac{a^2}{a^2 - 2ab + b^2}\right)\left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}\right).$

32. $\left[\frac{1}{x - y}\left(1 + \frac{2}{x + y}\right) - \frac{1}{x + y}\left(1 + \frac{3}{x - y}\right)\right] \cdot \frac{1}{2y - 1}.$

33. $\left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{5a}{6} - \frac{2b}{5} + \frac{4b^2}{5a}\right) \cdot \frac{2a}{3b^2}.$

34. $\left(\frac{5x^2}{4y^2} - \frac{3x}{2y} - \frac{7}{12} + \frac{3y}{8x} + \frac{2y^2}{3x^2}\right) \cdot 24x^2y^2$.

35. $\left(\frac{x}{2y} - \frac{2x^2}{3y^2} + \frac{3x^3}{4y^3} - \frac{4x^4}{5y^4}\right)(x^2 + xy + y^2)$.

36. $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{7x^2}{10} - \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right)$.

37. $\left(\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{3a}{4b^2} - \frac{3}{5b} + \frac{3}{a}\right)\left(\frac{5a^2}{4b^2} - \frac{4a}{3b} + \frac{3}{2}\right)$.

38. $\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2ax}{3} + \frac{3x^2}{4}\right)\left(\frac{2a^2}{3} + \frac{3ax}{4} - \frac{4x^2}{5}\right)$.

---

39. $\frac{105a^2b^3}{7xy^2} : 15ab^2$.

40. $\frac{2xy}{x+y} : (x - y)$.

41. $\frac{57x^3y^2z}{16mn^2} : \frac{19x^2y}{8mn}$.

42. $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3} : \frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}$.

43. $(x + y) : \frac{x+y}{x-y}$.

44. $\left(a - \frac{a^2}{a-1}\right) : (a + 1)$.

45. $\left(2 - \frac{y}{x+2y}\right) : (2x + 3y)$.

46. $\left(1 + \frac{2ab}{a^2 - 2ab + b^2}\right) : (a^2 + b^2)$.

47. $\left(a + b - \frac{a^2 + b^2}{a+b}\right) : (a + b)$.

48. $(x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

49. $\left(4x^2 - \frac{1}{y^2}\right) : \left(2x + \frac{1}{y}\right)$.

50. $\frac{6a^2 + 5ab - 6b^2}{2a + 3b} : (3a - 2b)$.

51. $\left(1 - \frac{a - 2b}{a + 2b}\right) : \left(\frac{a}{a - 2b} - \frac{2b}{a + 2b}\right)$.

52. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} + 5\right) : \left(\frac{1}{x} + 1\right)$.

53. $\left(a^2 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab}\right) : \left(a + \frac{1}{b}\right)$.

54. $\left(1 - \frac{x - 3y}{x + y}\right) : \left(\frac{3x + y}{x - y} - 3\right) : (x^2 - y^2)$.

55. $(x + 3) : \left(1 - \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6}\right)$.

56. $\left(\frac{x-2}{6} - \frac{x-1}{8}\right)\left(\frac{x+1}{2} - x\right) : \left(2 - \frac{x+1}{3}\right)$.

57. $\frac{8a^3b}{27c} : \left(\frac{6a^2}{b^3} : 4b^2c^2\right)$.

58. $(a^2 - b^2) : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a - b} : (a^3 - b^3)$.

59. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{25} - \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$.

60. $\left(\frac{12a^2x}{5b^3y} - \frac{6ax^2}{7b^2y^2} - \frac{18x^3}{11by^3} + \frac{24x^4}{13ay^4}\right) : 6a^2bx^2y$.

61. $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right)$. **62.** $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$.

63. $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.

64. $\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right)$.

65. $\left(\frac{8a^6}{x^3y^3} - \frac{6a^4}{b^2y^2} + \frac{3a^2x^3}{2b^4y} - \frac{x^6}{8b^6}\right) : \left(\frac{4a^4}{x^2y^2} - \frac{2a^2x}{b^2y} + \frac{x^4}{4b^4}\right)$.

66. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right)$.

67. $\left(7a^4 - \frac{46}{3}a^3b + 27a^2b^2 - \frac{56}{3}ab^3 + 10b^4\right) : \left(\frac{a^2}{8} - \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{4}\right)$.

68. $\left(\frac{16}{25}x^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{3}{8}y - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}\right)$.

69. $\left(\frac{xy}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^3}{12y} - \frac{43x^4}{60y^2} - \frac{x^5}{20y^3} - \frac{4x^6}{5y^4}\right) :$

$: \left(\frac{x}{2y} - \frac{2x^2}{3y^2} + \frac{3x^3}{4y^3} - \frac{4x^4}{5y^4}\right)$.

---

70. $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{8}}{1 - \frac{15}{32}}$. **71.** $\dfrac{\frac{2xy}{3} - \frac{3y^2}{4}}{\frac{8x}{9} - y}$. **72.** $\dfrac{\frac{a^2+b}{a^2} - \frac{a+b^2}{b^2}}{\frac{b-a}{ab}}$.

73. $\dfrac{\frac{am}{a-m} + m}{3m + \frac{am}{a-m}} - \dfrac{\frac{am}{a-m} + 2a}{\frac{am}{a-m} + 4a}$. **74.** $\dfrac{\left(\frac{x+y}{3} - \frac{y}{4}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{y}{3x}\right)}{\left(4x - \frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{x+y}{x}\right)}$.

75. $\dfrac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \dfrac{4x + \frac{4x^2}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$. **76.** $\dfrac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} : \dfrac{a+b}{a-b}$.

77. $\dfrac{\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a - b}}{\dfrac{a - b}{a + b}} : \dfrac{a}{a - \dfrac{b^2}{a}}$. 78. $\dfrac{\dfrac{a - b}{a + b} - \dfrac{a - 2b}{3a + 4b}}{\dfrac{2a + 3b}{3a + 4b}} : \dfrac{1}{a + \dfrac{3b}{2}}$.

79. $\dfrac{\dfrac{a^2}{4} + b}{\dfrac{a - b}{a + b} - 2} : \left(\dfrac{3a - 4}{3 + \dfrac{a}{b}} - a\right)$.

Razreši sledeče enačbe:

80. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} - 9 = x - \frac{x}{11} + \frac{23}{66}$.

81. $\frac{x}{2} + \frac{x + 1}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{7}{4} - \frac{x - 1}{4}$.

82. $\frac{x}{10} + \frac{x + 5}{15} - \frac{5x + 4}{18} + \frac{5x - 2}{24} = 2$.

83. $\frac{x - 5}{5} - \frac{4 - x}{4} + \frac{x - 2}{2} = 50 + \frac{3 - x}{3}$.

84. $3 - \frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{2x}\right) = \frac{3x}{4}\left(2 - \frac{3}{x}\right) - 34\frac{1}{2}$.

85. $\frac{3x - 8}{16} + 7\left(\frac{x - 4}{5} - \frac{x - 6}{9}\right) = 4 + \frac{3x - 16}{4}$.

86. $\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{5x}{4} + 10\right) = 4$.

87. $\frac{4}{5}(3x - 7) - 22 = \frac{3}{7}\left[\frac{7}{9}(8x - 63) - (2x + 3)\right]$.

88. $\frac{x - 20}{11} - 3\left[\frac{x - 30}{7} - \frac{x - 40}{8} + 2\left(\frac{x - 60}{9} - \frac{x - 80}{8}\right)\right] = 5$.

89. $\frac{3}{x + 2} - \frac{5}{x - 2} + \frac{6}{x^2 - 4} = 0$.

90. $\frac{7}{x - 1} - \frac{3}{x - 3} = \frac{10}{x - 2}$.

91. $\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x - 4}{x - 3} = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$.

92. $\frac{x - 1}{6x^2 + 2x} - \frac{3x - 6}{18x^2 - 2} = \frac{5}{42x^2 - 14x}$.

93. $\frac{3x+1}{12x-8} - \frac{2x-5}{9x-6} = \frac{5x-3}{6x-4} - \frac{1-7x}{18x-12}$.

94. $\frac{5x-2}{x^2-x-2} - \frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{2x-11}{x^2-5x+6}$.

95. $\frac{5y-3a}{4a} - 3 = 2a - \frac{3y+a}{5}$.

96. $\frac{y-m}{m+n} + \frac{y-n}{m-n} = \frac{y+m}{m+n}$. **97.** $\frac{y-a}{y-b} = \frac{2a}{b} - \frac{y+a}{y-b}$.

98. $\frac{a-b}{y-a} + \frac{b-c}{y-b} = \frac{a-b}{b-y} + \frac{c-a}{a-y}$.

99. $\frac{y-a^2}{a+b} - a - \frac{2ab^2}{b^2-a^2} = b - \frac{y-b^2}{a-b}$.

100. $\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)y - 1 = \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)y$.

101. $a - x\left(a+\frac{2a}{x}\right) = (a-x)\left(a-\frac{2a}{x}\right) - a$.

102. $\frac{1-x}{1-a} - \frac{1+x}{1+a} + \frac{1-x}{1+2a+a^2} = 0$.

103. $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}} + \frac{1}{3} = 3$. **104.** $\frac{\frac{3x^2-2}{5}+6x}{x} = \frac{3x}{5} + 4$.

105. $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}$. **106.** $\frac{\frac{x+1}{3}-2}{4} = \frac{\frac{2x-7}{3}-3}{6}$.

107. $\frac{2x+1}{x-\frac{1}{3}} - 3 = \frac{3x-1}{x-\frac{1}{3}}$. **108.** $\frac{a+\frac{x}{a-b}}{a-\frac{x}{a+b}} = \frac{a+b}{a-b}$.

K § 19.

1. $628{\cdot}34 - (75{\cdot}894 + 91{\cdot}34 + 87{\cdot}256 + 156{\cdot}7)$.

2. *a)* $65{\cdot}382 \cdot 74{\cdot}9$; *b)* $0{\cdot}1964 \cdot 0{\cdot}273$;
c) $168 \cdot 0{\cdot}795$; *d)* $3{\cdot}9268 \cdot 478$.

3. *a)* $26{\cdot}21429 : 283$; *b)* $376{\cdot}094 : 51{\cdot}64$;
c) $32145678 : 378{\cdot}23$; *d)* $2{\cdot}621429 : 0{\cdot}09263$.

4. $a)$ $17\cdot64 \cdot 8\frac{7}{25}$; $b)$ $3\cdot985 \cdot 6\frac{3}{7}$; $c)$ $20\cdot13 : 7\frac{5}{8}$;
$d)$ $418\cdot59 : 16\frac{2}{3}$; $e)$ $512\frac{5}{8} : 13\cdot67$; $f)$ $604\frac{4}{15} : 11\cdot33$.

5. Razreši naslednje enačbe:

$a)$ $\frac{3\cdot07x}{16} + \frac{x - 0\cdot08}{5} = \frac{3x}{8} - 0\cdot00925$;

$b)$ $\frac{8\cdot4}{x} - \frac{5\cdot4}{3x} + \frac{2}{5x} = \frac{0\cdot94}{x} + 27$;

$c)$ $(x - 0\cdot1)^2 - 3x(x - 2\cdot1) = 8\cdot8 - (2x + 6\cdot8)(x - 0\cdot6)$.

K § 20.

Pretvori naslednje navadne ulomke v decimalne:

1. $\frac{15}{16}, \frac{37}{50}, \frac{67}{80}, \frac{117}{125}$. 2. $\frac{29}{33}, \frac{26}{41}, \frac{8}{111}, \frac{1000}{909}$.

3. $\frac{13}{14}, \frac{37}{135}, \frac{92}{205}, \frac{3121}{404}$.

Pretvori naslednje decimalne ulomke v navadne:

4. $0\cdot072$, $0\cdot9518$, $7\cdot750$, $17\cdot525$.
5. $0\cdot\dot{0}\dot{6}$, $26\cdot\dot{7}5\dot{2}$, $8\cdot\dot{5}6\dot{7}$, $0\cdot\dot{4}37\dot{8}$.
6. $0\cdot7\dot{3}$, $15\cdot\dot{3}5\dot{1}$, $0\cdot79\dot{3}2\dot{4}$, $0\cdot01\dot{9}2\dot{6}$.

7. Izračunaj:

$a)$ $6\cdot\dot{4} \cdot 5\cdot\dot{2}\dot{7}$, $2\cdot\dot{1}\dot{3} \cdot 0\cdot\dot{6}$, $0\cdot8 \cdot 04\dot{8}$;
$b)$ $1\cdot\dot{0}3\dot{7} : 2\cdot\dot{1}\dot{5}$, $2\cdot\dot{4} : 1\cdot1\dot{5}$, $1\cdot0\dot{6} : 0\cdot42\dot{6}$.

K § 21.

Uredi naslednja števila po njih popolnosti: 8·3.., 17·456.., 8·12.., 174·56.., 82·4.., 0·75.., 0·73.., 10·7823.., 875·6.., 0·0092..!

K § 22.

1. Določi naslednje vsote tako natanko, kakor je mogoče:

$a)$ $3\cdot58.. + 6\frac{5}{9} + 13\frac{11}{12} + 23\frac{7}{8} + 4\frac{9}{16}$.
$b)$ $4\frac{2}{3} + 7\frac{11}{21} + 6\cdot4835.. + 18\frac{4}{15} + 31\frac{3}{4}$.
$c)$ $9\frac{5}{6} + 4\frac{1}{2} + 16\frac{2}{7} + 20\frac{3}{11} + 47\cdot264...$

2. Določi naslednje vsote na dve decimalki:

a) $1\frac{7}{20} + 8{\cdot}538\ldots + 34\frac{5}{24} + 3{\cdot}\dot{6}\dot{5} + 12\frac{4}{13}$.
b) $7\frac{1}{3} + 5\frac{3}{4} + 9\frac{4}{7} + 11\frac{5}{9} + 15\frac{7}{18}$.
c) $0{\cdot}\dot{9}5\dot{6} + 28\frac{8}{15} + 45\frac{9}{32} + 50\frac{23}{40} + 4\frac{5}{11}$.

3. Določi razliko po dveh vsot v nalogah 1. in 2.!

K § 23.

1. Izračunaj naslednje produkte tako natanko, kakor je mogoče:

a) $5{\cdot}693\ldots \times 8{\cdot}24$, *b)* $974{\cdot}623\ldots \times 584$,
c) $7{\cdot}645 \times 9{\cdot}783\ldots$, *d)* $695 \times 78{\cdot}642\ldots$,
e) $76{\cdot}54\ldots \times 93{\cdot}257\ldots$, *f)* $48{\cdot}536\ldots \times 8{\cdot}724\ldots$,
g) $3{\cdot}546\ldots \times 4{\cdot}297\ldots \times 6{\cdot}825\ldots$,
h) $15{\cdot}2346\ldots \times 15{\cdot}2346\ldots \times 15{\cdot}2346\ldots$

2. Izračunaj naslednje produkte tako natanko, kakor se zahteva:

a) $7{\cdot}4619 \times 3{\cdot}258$ (na 2 decimalki).
b) $18{\cdot}5789 \times 52{\cdot}483$ (na celote).
c) $82{\cdot}5134\ldots \times 37{\cdot}089\ldots$ (na 1 decimalko).
d) $1521{\cdot}34 \times 265{\cdot}87$ (na desetice).
e) 73264×8956 (na tisoče).
f) $603{\cdot}3284\ldots \times 0{\cdot}9576$ (na 3 decimalke).
g) $860{\cdot}72 \times 7965{\cdot}34$ (na 2 decimalki).

K § 24.

1. Določi naslednje kvocijente tako natanko, kakor je mogoče:

a) $8{\cdot}345\ldots : 35{\cdot}4$, *b)* $53{\cdot}2498\ldots : 0{\cdot}9564$,
c) $203{\cdot}04 : 624{\cdot}57\ldots$, *d)* $348{\cdot}72 : 694{\cdot}83\ldots$,
e) $534{\cdot}52\ldots : 39{\cdot}58\ldots$, *f)* $4{\cdot}8193\ldots : 765{\cdot}8\ldots$,
g) $85{\cdot}97\ldots : 146{\cdot}38$, *h)* $901{\cdot}854 : 97{\cdot}8\ldots$,
i) $0{\cdot}038406\ldots : 62{\cdot}87\ldots$, *k)* $73{\cdot}92\ldots : 85{\cdot}74\ldots$

2. Določi naslednje kvocijente tako natanko, kakor se zahteva:

a) $63 \cdot 58321 \ldots : 8 \cdot 6759 \ldots$ (na 2 decimalki).

b) $8 \cdot 56437 : 0 \cdot 64352$ (na 2 decimalki),

c) $9 \cdot 74625 : 6 \cdot 428$ (na 5 decimalk).

d) $76 \cdot 43 : 8 \cdot 93572$ (na 5 decimalk).

e) $5638 : 3845$ (na 4 decimalke).

f) $2346382 : 683 \cdot 945$ (na desetice).

g) $860376 : 43 \cdot 685$ (na stotice).

3. $\frac{6 \cdot 456 \times 0 \cdot 8157 \ldots}{7 \cdot 63 \ldots}$.   4. $\frac{0 \cdot 6318 \ldots \times 0 \cdot \dot{8}}{8 \cdot \dot{5}\dot{3} \times 2 \cdot 637 \ldots}$.

5. $\frac{3 \cdot 08 \times 1 \cdot 4273}{31 \cdot 85}$ (na 3 decimalke).

6. $\frac{36 \cdot 7 \times 4 \cdot 95}{3 \cdot 54 \times 70 \cdot 89}$ (na 4 decimalke).

7. $1\,dm^3$ živega srebra tehta $13 \cdot 5959 \ldots kg$; koliko prostornino zavzema $1\,kg$ živega srebra?

8. 1^0 zemeljskega ravnika meri $111 \cdot 3066 \ldots km = 15$ zemljepisnih milj; 1^0 na 45. vzporedniku pa meri $0 \cdot 7071$ krat toliko. Koliko znaša razdalja dveh krajev *a)* na ravniku, *b)* na 45. vzporedniku, če je razdalja njiju zemljepisnih dolžin $28^0\,45'\,36''$?

9. Pomorščaki imenujejo dolgost $1'$ zemeljskega poludnevnika morsko miljo. Če meri 1^0 poludnevnikova $111 \cdot 1111 \ldots km$, koliko morskih milj znaša zemljepisna milja po $7420\,m$?

K § 25.

Izrazi naslednja razmerja z najmanjšimi celimi števili:

1. $3780 : 4105$.   2. $10(a^2 + ab) : 15(a^2 - b^2)$.

3. $(a^2 + 4a - 27) : (a^2 + 5a - 14)$.

4. $(x^3 - 1) : (x^3 - 2x^2 + 2x - 1)$.

5. $1\frac{1}{35} : \frac{24}{91}$.   6. $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$.

7. $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$.   8. $15\frac{1}{5} : 4\frac{2}{9}$.

9. $17 \cdot 85 : 26 \cdot 25$.   10. $0 \cdot 75 : 0 \cdot 625$.

11. $0 \cdot \dot{7} : 0 \cdot 4\dot{6}$.

12. $4 : 6 \cdot \dot{6}$.

13. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$.

14. $8\frac{1}{4} : 9\frac{1}{6} : 7\frac{7}{10}$.

15. $1 \cdot 25 : 3 \cdot 75 : 5$.

16. $0 \cdot \dot{1}\dot{8} : 0 \cdot \dot{2}\dot{7} : 0 \cdot 3\dot{1}\dot{8}$.

17. $7^0\, 31'\, 12'' : 7^0\, 53'\, 8''$.

18. 43 dni 6 ur 53 minut : 29 dni 19 ur 11 minut.

K § 26.

1. Določi iz naslednjih podatkov prava sorazmerja:

a) $5\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3} = 3\frac{7}{8} : 5\frac{1}{6}$;

b) $\left(1 + \frac{1}{a}\right) : \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{b}{a} : \frac{b+1}{a+1}$;

c) $(a + b) : (a - b) = (a^2 + 2ab + b^2) : (a^2 - b^2)$;

d) $(a^3 + b^3) : (a^2 + b^2) = (a^2 - b^2) : (a - b)$.

2. Razreši naslednja sorazmerja:

a) $3\frac{3}{4} : 12\frac{3}{8} = x : 20$; *b)* $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : x$;

c) $x : 0 \cdot 35 = 2 \cdot 38 : 1 \cdot 25$; *d)* $4 \cdot 58\dot{3} : 0 \cdot 8\dot{3} = \frac{11}{14} : x$;

e) $\frac{3}{x - \frac{1}{8}} : \frac{1}{4} = 1\frac{7}{9} : \frac{2}{9}$; *f)* $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \left(1 - \frac{b}{a}\right) : x$;

g) $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$;

h) $\left(1 + \frac{2b}{a - b}\right) : \left(1 - \frac{2b}{a + b}\right) = x : \frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$.

3. Poišči številom: *a)* $17\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, 9; *b)* $a^2 - b^2$, $3ab$, $a + b$ četrto geometrijsko sorazmernico!

4. Poišči številoma: *a)* $2\frac{1}{4}$ in $1\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{a+b}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ in $\frac{a+b}{a-b}$ tretjo geometrijsko sorazmernico!

5. Poišči številoma: *a)* $2\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{5}$; *b)* $\frac{a-b}{a+b}$ in $\frac{a+b}{a-b}$ srednjo geometrijsko sorazmernico!

6. Pretvori naslednje produkte v sorazmerja:

a) $ab = mn$; *b)* $x^2 = ab$; *c)* $a^2 - b^2 = mx$;

d) $a^2 + 5ab + 6b^2 = (2a + b)x$; *e)* $a^3 - b^3 = (a + b)x$.

7. Izrazi naslednja sorazmerja z najmanjšimi celimi števili:

a) $x : 7\frac{1}{3} = 3\frac{7}{8} : 5\frac{1}{6}$; *b)* $14{\cdot}35 : 218{\cdot}275 = 9{\cdot}18 : x$;

c) $17\frac{1}{2} : 8\frac{3}{4} = 9 : x$; *d)* $3\frac{4}{5} : 76 = x : 5\frac{1}{7}$;

e) $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x$;

f) $(m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3) : x = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : (m - n)$;

g) $\left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}$.

8. Napravi iz naslednjih podatkov zaporedna sorazmerja:

a) $a : b = 10 : 9$, $a : c = 7 : 8$, $a : d = 4 : 3$;

b) $a : b = 6 : 5$, $b : c = 4 : 5$, $b : d = 7 : 8$;

c) $a : b = 1 : 2$, $c : d = 4 : 5$, $b : e = 6 : 7$, $e : d = 4 : 3$;

d) $a : b = \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$, $c : d = \frac{2}{3} : 1$, $b : c = \frac{2}{5} : \frac{1}{2}$;

e) $a : d = \frac{1}{5} : \frac{2}{3}$, $c : e = \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, $e : b = 1 : \frac{2}{5}$, $d : b = \frac{5}{6} : \frac{4}{9}$.

9. Poišči aritmetično, geometrično in harmonično sredino števil *a)* 4, 16; *b)* 1·2, 2·7; *c)* $2\frac{4}{5}$, $35\frac{5}{7}$; *d)* m^2, n^2; *e)* $m + n$, $m - n$; *f)* $\frac{1}{m}$, m.

10. Harmonična sredina med 8 in x je 5; koliko znaša x?

11. Poišči na isti način x, če je prvo število a in harmonična sredina c (n. pr. $a = 0{\cdot}4$, $c = 0{\cdot}6$)!

12. Dokaži, da je aritmetična sredina dveh različnih števil a in b večja ko geometrična sredina!

Iz $(a - b)^2 > 0$ sledi $(a - b)^2 + 4ab > 4ab$ ali $(a + b)^2 > 4ab$ i. t. d.

13. Razdeli število 60 (270) na tri (štiri) dele, ki so si kakor 3 : 4 : 5 (6 : 7 : 8 : 9)!

14. Razdeli število 3710 v razmerju $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$!

15. Poišči neznanke iz naslednjih podatkov:

a) $x : y = 2 : 5$
$y : z = 2 : 3$
$y : u = 5 : 9$
$x + y + z + u = 705$;

b) $x : z = 5 : 6$
$y : u = 2 : 3$
$z : u = 4 : 3$
$x + y + z + u = 555$.

(Poišči najprej zaporedno sorazmerje!)

16. Razdeli število 9150 na tri dele x, y, z tako, da so si $x:y = 5:3$ in $z:y = 3:4$!

17. Razreši naslednje enačbe:

a) $13:(13-y) = 39:30$; *b)* $(25-y):3 = \frac{y}{2}:11$;

c) $(a-x):(x-b) = a:b$;

d) $(1+x):(1-x) = (1+a^2):2a$;

e) $(x-200):(x+100) = (x-72):(x+394)$;

f) $(7x-3):(14x-3) = (5x+3):(10x+9)$;

g) $1:(x+\frac{2}{3}) = (x-2a):(a+x)(x-2)$;

h) $\frac{a+b}{a+1}:\frac{a-1}{x-1} = \frac{a-b}{a-1}:\frac{a+1}{x+1}$.

K § 27.

1. $17\frac{1}{2}\,m$ sukna velja 131 K 25 h; koliko velja $9\frac{3}{8}\,m$ istega blaga?

2. A pride od kraja M do kraja N v $8\frac{2}{5}$ ure, če prehodi vsako uro po $4500\,m$; koliko časa potrebuje B, ki prehodi vsako uro po $3600\,m$, za isto pot?

3. Posadka 7500 mož ima živeža za 48 tednov; čez koliko časa se sme posadka povečati za 500 mož, da se bo shajalo z ostalim živežem od te dobe še 255 dni?

4. 10 delavcev napravi prekop v 15 dneh; sprva dela samo 6 delavcev; čez 5 dni se najmeta še 2 delavca in 3 dni pozneje se najmejo še 4 delavci. V koliko dneh se dovrši delo?

5. Iz 16 kg preje se napravi 70 m platna, ki je po 78 cm široko; koliko metrov po 116 cm širokega platna se napravi iz 36 kg preje?

6. Stavbišče, ki je $15\frac{1}{2}\,m$ dolgo in $12\frac{1}{4}\,m$ široko, velja 3797·5 K; koliko velja drugo stavbišče, ki je $27\,m$ dolgo in $18\frac{1}{2}\,m$ široko?

7. 36 zidarjev dozida stavbo v 90 dneh, če delajo po 10 ur na dan; koliko zidarjev se mora čez 40 dni še najeti, da se ostalo delo izvrši v 30 dneh, če delajo vsi delavci na dan po 12 ur?

8. V katerem času da določena glavnica po $5\frac{1}{4}\,\%$ naložena iste obresti kakor po $4\frac{2}{3}\,\%$ naložena v 45 dneh?

9. Po koliko procentov moraš naložiti kapital, da dobiš v 5 letih 1533 K obresti, ako dá isti kapital po 5% v 4 letih 876 K obresti?

10. Koliko obresti da 5240 K glavnice naložene po $4\frac{1}{2}$% *a)* v 3 letih 5 mesecih, *b)* v 2 mesecih 18 dneh?

11. Kateri kapital da po $5\frac{1}{4}$% naložen v 7 mesecih $220\frac{1}{2}$ K obresti?

12. Po koliko procentov moraš 2424 K naložiti, da dobiš v 225 dneh 136·35 K obresti?

13. V katerem času da 5844 K glavnice po $4\frac{3}{4}$% naložene $744\frac{4}{5}$ K obresti?

14. *A* si izposodi 780 K; koliko mu je plačati s $4\frac{1}{2}$% obrestmi vred čez 2 leti 3 mesece?

15. Koliko kapitala moraš naložiti po $4\frac{1}{2}$%, da dobiš čez 2 leti 3 mesece z obrestmi vred 704·8 K nazaj?

Prvotni kapital + obresti tega kapitala = končni kapital z obrestmi vred.

16. Po koliko procentov moraš naložiti glavnico 4530 K na $2\frac{1}{3}$ leta, da dobiš za 165·82 K manj obresti ko od 3450 K glavnice naložene po $3\frac{1}{2}$% v $5\frac{1}{4}$ leta?

17. *A* kupi železniško delnico 400 K imenovane vrednosti, ki nese 5% obresti, za 344 K; po koliko procentov je naložil svoj denar?

Delnica nese obresti od njene imenovane vrednosti.

18. Trgovec prodaja kilogram nekega blaga z 20% dobičkom po 1·44 K; kolika je kupna cena? Po čem bi moral kilogram prodajati, da bi imel $27\frac{1}{2}$% dobička?

100 K kupne cene da 120 K prodajalne cene, če se prodaja blago z 20% dobičkom.

19. Ako se prodaja meter sukna po 4 K 86 h, znaša dobiček 8%; koliko procentov znaša dobiček ali izguba, če se prodaja meter po 4 K 32 h?

20. *A* ima dolg 524·4 K plačati čez 3 mesece; koliko znaša gotovo plačilo, če se mu dovoli 5% letnega diskonta?

Gotovo plačilo + diskont = dolg. — Diskont se računa pravilno od gotovega plačila kakor obresti. Pri trgovskih dolgih, posebno pri menicah, se računa diskont (sicer nepravilno) od dolga.

21. Nekdo plača za dolg 7258·05 K, ki bi ga moral poravnati čez 2 leti 9 mesecev, 6350 K gotovo; po koliko procentov se je računal diskont?

22. Menica na 1720 K, ki se je 15. novembra izdala za 2 meseca, se proda 10. decembra s $5\frac{1}{2}\%$ diskontom; koliko se plača za menico?

Dan, katerega se menica proda, se ne jemlje v poštev pri izračunanju diskonta, sicer pa se štejejo dnevi po koledarju.

23. Menica na 800 K, ki doteče 2. avgusta, se proda 29. junija za 796·11 K; po koliko procentov se je računal diskont!

24. Razdeli 1004·5 K med štiri osebe tako, da dobi A tolikokrat po 3 K kakor B po 4 K, C tolikokrat po 9 K kakor B po 10 K in D tolikokrat po 25 K kakor C po 24 K; koliko dobi vsaka oseba?

25. K skupni kupčiji, pri kateri je 400 K izgube, dá A 400 K na 5 mesecev, B 1000 K na 2 meseca, C 600 K na 4 mesece in D 1200 K na 3 mesece. Koliko izgubi vsak?

26. Kosmata teža nekega blaga znaša 540 *kg*, tara $6\frac{1}{2}\%$, 17 *kg* čiste teže se kupi za 3·1 K; kako drago se mora prodati vse blago, da se zasluži 18%?

K § 28.

Uredi naslednje enačbe:

1. $3x = \frac{4-x}{3+x} + 8.$ **2.** $\frac{x}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3-x}{3+x} = 0.$

3. $\frac{2x-1}{x+3} - (x-3) = \frac{1}{x-3}.$ **4.** $\frac{a+x}{2a3x} = \frac{a-x}{4a+3x}.$

5. $(3x-4)(2x-1) - (4x-3)(x+5) = 2x^2 + 5x - 4.$

6. $(10x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 7x - 6):(5x^2 - 3x - 2) =$
$= 2x^2 + x - 3.$

7. $\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3} - 5\right)^2 = \left(\frac{5}{6}x\right)^2.$

8. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=ax+\frac{x}{a^2-x^2}$.

9. $\frac{2}{2-y}+\frac{1}{2+y}-\frac{4}{y^2-4}=3$. **10.** $\frac{7}{8}-\frac{45}{64y+24}=\frac{6+9y}{4y-6}$.

11. $\frac{2}{y-1}+5=\frac{4}{y^2-4y+3}+\frac{7}{2}$.

12. $\frac{y-5}{y^2-7y+12}+\frac{y+2}{y^2-9}=2y-1$.

13. $\frac{y+3a}{y+4a}-\frac{y-2a}{y+3a}=\frac{y+2a}{y^2+7ay+12a^2}$.

K § 29.

Razreši naslednje enačbe:

1. $(3x-4)(5x+2)-5(3x-1)(x-1)=5$.

2. $(15x^3-22x^2+3x+4):(5x-4)=3(x^2-x+1)$.

3. $x-2[2(2-x)-x]=16-x$.

4. $4-2[5(3x+4)+3]=-72$.

5. $2x-3\{2x-3[2x-3(2x-3)]\}=1$.

6. $\frac{5x}{2}-\frac{26}{7}=\frac{13x}{14}+\frac{89}{21}-\frac{x}{3}$.

7. $\frac{5x}{12}-\frac{5x}{24}-\frac{15}{2}=\frac{5x}{18}-\frac{20}{3}-\frac{5x}{36}$.

8. $22-\left[\frac{5x}{4}-\left(\frac{2x}{9}+\frac{2}{3}\right)\right]=x-\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{9}\right)$.

9. $16\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{x+5}{4}-11\right)+5\right]=3\frac{1}{2}$.

10. $\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}(x-4)\right]\right\}-20\frac{2}{3}=\frac{x}{30}$.

11. $921\cdot6:\left(100-\frac{2x}{3}\right)=916\cdot8:\left(100-\frac{3x}{4}\right)$.

12. $\left(\frac{3\cdot4}{3}-\frac{2\cdot1}{4}\right)0\cdot8x-\left(\frac{2\cdot6}{2}-\frac{3\cdot4}{3}\right)0\cdot5x=6\cdot05$.

13. $\frac{6-3y}{5}-\frac{5-7y}{3}=\frac{3+2y}{2}-\frac{4y-6}{4}$.

14. $\frac{2y+3}{5}-\frac{3(3-2y)}{2}-\frac{13y-3}{6}=\frac{5y+2}{8}$.

15. $\frac{3y+1}{4y-10}+\frac{5y-1}{6y-15}-\frac{7y+4}{10y-25}=4\frac{2}{3}.$

16. $\frac{9y-0{\cdot}1}{20y+6}+\frac{5y-2}{y+0{\cdot}3}-\frac{0{\cdot}8y+7}{9y+2{\cdot}7}=0{\cdot}97.$

17. $\frac{y-3}{y-4}+\frac{y-4}{y+3}-\frac{2y}{y+7}=0.$

18. $(a-y)(a+b)-(a+y)(a-b)=a(3b-y).$

19. $a^2(y-b)-b^2(y-a)=a(y+a)-b(y+b).$

20. $\frac{a(y-a)}{a+2b}+\frac{b(y-b)}{2a+b}=\frac{y}{5}.$

21. $\frac{a+b}{2b}-\frac{(a-b)c}{2by}=\frac{bc}{(a+b)y}+\frac{a}{a+b}.$

22. $\frac{a(3y-2a)}{a+3b}+\frac{b(3y-2b)}{3a+b}=y.$

23. $\frac{y-a}{y+a}+\frac{y-b}{y+b}=1+\frac{y-a-b}{y+a+b}.$

Razreši naslednje enačbe po primerjalnem načinu:

24. $3x-2y=5$
$2x+3y=12.$

25. $5x+4y=2$
$3x+5y=-4.$

26. $2x+5y=31$
$7x-2y=11.$

Razreši naslednje enačbe po zamenjalnem načinu:

27. $4x+5y=23$
$3x-y=3.$

28. $3x-10y=12$
$0{\cdot}4x+y=3.$

29. $x:y=11:19$
$2x-3y=10.$

Razreši naslednje enačbe po načinu enakih koeficientov:

30. $4x+9y=51$
$8x-13y=9.$

31. $3x+5y=93$
$4x+7y=128.$

32. $8x+9y=77$
$7x-12y=-32.$

Razreši naslednje enačbe po načinu nedoločenih koeficientov:

33. $8x - 5y = 25$
$3x + 7y = 36.$

34. $3x - 4y = 4$
$4x + 3y = 72.$

35. $3x - 15y = -2$
$4x - 9y = -1.$

Razreši naslednje enačbe:

36. $\frac{24}{x} + \frac{33}{y} = 15$
$\frac{36}{x} - \frac{9}{y} = 3.$

37. $\frac{9}{2x} - \frac{10}{3y} = \frac{13}{6}$
$\frac{10}{3x} - \frac{9}{2y} = \frac{181}{90}.$

38. $\frac{4}{x-1} + \frac{3}{y+1} = \frac{3}{2}$
$\frac{5}{x-1} - \frac{2}{y+1} = \frac{11}{12}.$

39. $\frac{6}{x-1} + \frac{5}{y-1} = 1$
$\frac{4}{x-1} + \frac{7}{y-1} = 2.$

40. $\frac{8}{2x-3y} + \frac{9}{4x+y} = 1$
$-\frac{5}{2x-3y} + \frac{6}{4x+y} = \frac{1}{48}.$

41. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab}$
$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2-b^2}{ab}.$

Uredi sledeče enačbe ter jih razreši po načinu, ki je nalogi najprimernejši:

42. $x - y = \frac{1}{4}(5x - 6y)$
$x - y + 48 = 5(6x - 7y).$

43. $(3x + 2y):(2x + 3y) = 8:7$
$7x - 8y = 24.$

44. $\frac{5x}{4} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{4}\right) = y - 5$
$\frac{4y}{3} - \frac{1}{4}\left(y + \frac{y}{3}\right) = x + 3.$

45. $(x - 5y + 1):(3x - 7y + 3) = 7:9$
$(2x - y - 6):(7x + 9y + 6) = 1:5.$

46. $\frac{x-6}{y} = \frac{x}{y+5}$
$(x + 12):y = x:(y - 8).$

47. $\frac{2x+3y}{x+2y} + 1 = \frac{25}{(x-y)+3y}$
$\frac{4x+y}{x-3y} + 2 = \frac{20}{(x+y)-4y}.$

48. $1+\frac{y}{x-y}=3\left(\frac{1}{y-x}-2\right)$ **49.** $2x+\frac{y(2x-5)}{1-y}=\frac{2}{3(y-1)}$

$\frac{3}{4x}\left(3-\frac{1}{x-y}\right)=\frac{1}{y-x}.$ $5+\frac{2(4x-15y)}{1+6y}=\frac{4x+1}{3y}.$

50. $x-\frac{4x+3y}{7}=6-\frac{9y+33}{14}$

$y-\frac{5x-4y+6}{2}=x-\frac{11y-9}{4}.$

51. $x+17-\frac{3x+5y}{17}=\frac{4x+15y+7}{3}$

$\frac{8y+5}{18}-\frac{x+12y-43}{6}-\frac{5x-7}{11}=0.$

52. $\frac{5x+13}{2}-\frac{8y-3x-5}{6}=\frac{7x-3y+28}{3}$

$\frac{x+7}{3}:\left(\frac{3y-8}{4}+4x\right)=4:21.$

53. $\frac{2x+y}{9}+\frac{7y+6x+11}{18}=\frac{19}{2}-\frac{5x-17}{6}$

$\frac{3y+2}{2}=\frac{5x+3y+2}{7}.$

54. $(14x+3):\left(7y-\frac{1}{3}\right)=(4x+3):\left(2y+\frac{1}{3}\right)$

$(8x+5):(6y+1)=(4x+1):3y.$

55. $7x+\frac{84x-5(7xy+3)}{5y-7}=45+\frac{5(14x-90y)}{1+10y}$

$\left(3-\frac{12x-2y}{1+4x}\right):(3y+2)=1:(6x-1).$

56. $x-(a+b)y=\frac{b^2-a^2}{b}$ **57.** $\frac{2x-b}{a}-\frac{2y-a}{b}=2$

$(b-a)x+aby=b^2.$ $\frac{2x-a}{b^2}+\frac{2y+b}{a^2}=\frac{a+b}{ab}.$

58. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2$

$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$

59. $\frac{a(x-a)}{a+b}+\frac{b(y+b)}{a-b}=\frac{a^2-b^3}{2ab^2}.$

$\frac{b(x-b)}{a-b}+\frac{a(y-a)}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{2a^2b}.$

60.
$$y + 3z = 39$$
$$3y + 2x = 48$$
$$4z - 3x = 18.$$

61.
$$3z - 4y = 6$$
$$2z + 3x = 26$$
$$5y - 6x = 18.$$

62.
$$4x - y + 3z = 20$$
$$2x + 3y + 11z = 55$$
$$16x + 3y + 31z = 170.$$

63.
$$\frac{2x + 3y}{4z} = 2$$
$$\frac{4x - 3y}{2z} = 2$$
$$6x + 9y - 16z = 2.$$

64.
$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 2$$
$$\frac{10}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 30$$
$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{5}{z} = 0.$$

65.
$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 9$$
$$-\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 10$$
$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = 20.$$

66.
$$\frac{4}{x} - \frac{5}{2y} = \frac{11}{20}$$
$$\frac{25}{2y} + \frac{2}{3z} = \frac{77}{60}$$
$$\frac{24}{z} - \frac{4}{3x} = \frac{14}{15}.$$

67.
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 19$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 32$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 31.$$

68.
$$(x + 1) : (y + 1) : (z + 1) = 1 : 2 : 3$$
$$4x + 3y + 2z = 55.$$

69.
$$4x - 3y + 2z - u = 19$$
$$5x + 4y - 3z - 2u = 39$$
$$6x + 2y - 5z - 3u = 26$$
$$3x - 5y + 6z - 4u = 12.$$

70.
$$2x + 3y = 22$$
$$4y + 5z = 31$$
$$6z + 7u = 32$$
$$8u + 9x = 61.$$

71.
$$3x : 4y = 6 : 5$$
$$4x : 6z = 4 : 3$$
$$3x : 8u = 3 : 1$$
$$7x - 6y + 8z - 10u = 40.$$

72.
$$-4x + 2y + 3u = 5$$
$$-3x - 2z + 4u = 4$$
$$y - 5z + 2u = 3$$
$$3x - 4y + z = 2.$$

K § 30.

1. Načrtaj točke $M_1(3, 0)$, $M_2(5, 2)$, $M_3(0, 4)$, $M_4(-6, -2)$, $M_5(-4, 7)$, $M_6(7, -4)$ ter določi razdaljo njih vzmetov *a)* v abscisni, *b)* v ordinatni osi.

2. Načrtaj naslednje linearne funkcije:

a) $y = -4x + 5$, *b)* $y = 6x - 8$,

c) $2x - 3y = 1$, *d)* $5y - 7x = 13$,

e) $4x + 5y = 0$, *f)* $\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = 0$.

K § 31.

1. Pri katerem številu je tretji del za 7 manjši ko četrti in peti del skupaj?

2. Katero število smeš z 10 (11) pomnožiti, da najdeš isti rezultat, kakor če prišteješ dotičnemu številu 10 (11)?

3. Katero število je za toliko manjše ko 160, za kolikor je njegov 3kratnik večji od 160?

4. Katero število moraš za 2, 8, 18 povečati, da tvorijo zneski stalno sorazmerje?

5. Za koliko moraš povečati število 339 in zmanjšati število 355, da sta si zneska kakor 21 : 22?

6. Katerega števila kvadrat je za 120 večji od kvadrata za 10 zmanjšanega števila?

7. Ako prišteješ določenemu številu 4, najdeš mnogokratnik števila 100; ako pa odšteješ dotično število od 801, najdeš istotolik mnogokratnik števila 15. Katero je to število?

8. Razdeli 60 na dva dela tako, da najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 3, če deliš večji del z manjšim!

9. Katero število moraš števcu ulomka $\frac{17}{40}$ prišteti in od imenovalca odšteti, da najdeš obratni ulomek?

10. Poišči dve števili, ki imata te-le lastnosti: ako povečaš prvo številko za 3 in zmanjšaš drugo za 3, znaša njun kvocijent 3; če pa povečaš vsako izmed števil za 2, je njun kvocijent 2.

11. Kvocijent dveh števil znaša 5 in delitveni ostanek 5; ako povečaš prvo število za 9 in drugo za 1, je njun kvocijent 6. Kateri sta števili?

12. Ako prišteješ ševiloma 5 in 8 določeni števili, najdeš vsoti, ki sta si kakor 2 : 3; če pa odšteješ isti dve števili od 5 in 8, najdeš razliki, ki sta v razmerju 1 : 2. Kateri sta dotični števili?

13. Vsota dveh števil je za toliko večja od 150, za kolikor je polovica razlike istih dveh števil manjša od 150; če deliš večje teh števil z manjšim, najdeš kvocijent 4 in delitveni ostanek 2. Kateri sta števili?

14. Ako prišteješ števcu in imenovalcu določenega ulomka 7, najdeš ulomek $\frac{4}{5}$; če pa odšteješ od števca in imenovalca istega ulomka 2, najdeš ulomek $\frac{1}{2}$. Kolik je dotični ulomek?

15. Produkt dveh števil znaša 25425 in postane za 565 večji, če povečaš en faktor za 5. Katera sta faktorja?

16. Učenec množi dve števili in najde zmnožek, ki je za 454 premajhen; ta znesek bi bil prav, če bi zmanjšal prvo število za 5 in drugo za 1. Pri drugem množenju najde učenec znesek, ki je za 750 prevelik; ta znesek bi pa bil prav, ako bi povečal prvi faktor za 1 in drugega za 3. Kateri števili je množil učenec?

17. Izrazi ulomek $\frac{a-5}{a^2-5a+6}$ kakor razliko dveh ulomkov!

18. Razdeli 67 na tri dele tako, da sta si prvi in drugi del kakor 3 : 4 in da je tretji del za 3 manjši od drugega!

19. Določi tri števila z naslednjimi lastnostmi: ako deliš vsoto prvega in drugega števila s tretjim številom, najdeš kvocijent 3 in delitveni ostanek 3; ako deliš vsoto prvega in tretjega števila z drugim številom, najdeš kvocijent 2 in delitveni ostanek 1; če pa deliš vsoto drugega in tretjega števila s prvim številom, najdeš kvocijent 1 in delitveni ostanek 1.

20. Izrazi naslednje ulomke kakor vsoto dveh ali več ulomkov, katerih imenovalci so faktorji določenega ulomka!

a) $\frac{39+a}{(2+3a)(5-4a)}$; *b)* $\frac{15+88a+124a^2}{(1+2a)(1+3a)(1+4a)}$;

c) $\frac{1-a+a^2}{a-a^3}$; *d)* $\frac{7+2a-14a^2}{1-a-20a^2}$.

21. Ako odbiješ četveroštevilčnemu številu začetno številko 5 ter pripišeš ostalemu številu na desni ničlo, najdeš za 4 večje število; katero je to število?

22. Ako odbiješ peteroštevilčnemu številu začetno števiko 1 ter jo pripišeš ostalemu številu na desni, najdeš število, ki je za 2384 manjše od 3 kratnika prvotnega števila; katero je to število?

23. Katero šesteroštevilčno število se podvoji, ako mu odbiješ začetni številki 28 ter ju pripišeš ostalemu številu na desni?

24. Številčna vsota dvoštevilčnega števila je 6; ako zameniš številki med seboj, najdeš število, ki je za 6 večje od trikratnika prvotnega števila. Katero je to število?

25. Dve dvoštevilčni števili se pišeta z istima številkama. Če postaviš prvo teh števil pred drugo ter deliš to novo število z drugim številom, najdeš kvocijent 64 in delitveni ostanek 38; če pa postaviš drugo število pred prvo ter deliš to novo število s prvim številom, najdeš kvocijent 158 in delitveni ostanek 21. Kateri sta števili?

26. Dve števili, ki se pišeta z istima številkama, sta si kakor 13 : 31; njiju vsota znaša 88. Kateri sta števili?

27. Troštevilčnemu številu je številčna vsota 17; prva številka na levi je četrti del naslednjega dvoštevilčnega števila, prva številka na desni pa je deveti del pred njo stoječega dvoštevilčnega števila. Katero je to število?

28. Ako zameniš pri troštevilčnem številu, katerega številčna vsota znaša 11, stotice z enicami, najdeš število, ki je za 29 manjše od dvojnega prvotnega števila; če pa zameniš desetice z enicami, najdeš za 36 večje število od prvotnega. Katero je to število?

---

29. Izmed treh bratov je prvi 22, drugi 15 in tretji 12 let star; čez koliko let bo prvi brat toliko star kakor njegova mlajša brata skupaj?

30. Oče je star 83 let, sin 55 let in hči 39 let. *a)* Pred kolikimi leti je bil oče 3 krat toliko star kakor sin? *b)* Čez koliko let bo oče 2 krat toliko star kakor hči?

31. Sin pravi: pred $5\frac{1}{2}$ leta je bil moj oče $5\frac{1}{2}$ krat toliko star kakor jaz in čez $5\frac{1}{2}$ leta bo oče $2\frac{3}{4}$ krat toliko star kakor jaz; koliko sem star jaz in koliko moj oče?

32. V dveh sosednjih sobah je skupaj 44 oseb; če gre iz druge sobe v prvo sobo toliko oseb, kolikor jih je v prvi sobi, je v vsaki sobi enako veliko oseb. Koliko oseb je bilo v vsaki sobi?

33. V družbi je 3 krat toliko gospodov kakor gospa; ko so 4 gospodje odšli s svojimi gospemi, je bilo v družbi 4 krat toliko gospodov kakor gospa. Koliko gospodov in gospa je bilo v družbi?

34. Pri nekem zborovanju je glasovalo 8 oseb več ko tretjina izmed navzočih za predlog, 4 osebe manj ko četrtina pa proti predlogu; če 26 oseb ni glasovalo, koliko oseb je bilo pri zborovanju?

35. Neka družba naroči skupen obed v gostilni. Če bi bili vsi udje prišli k obedu, bi plačal vsak tolikokrat po 10 h, kakor je imela družba udov; ker pa 5 udov ni prišlo k obedu, je moral vsak izmed navzočih razen prejšnjega deleža še 60 h plačati po vrhu. Koliko udov je imela družba?

36. Neki igralec napravi dve igri; v prvi igri izgubi polovico svojega premoženja in $\frac{1}{2}$ K, v drugi igri izgubi polovico ostanka in $\frac{1}{2}$ K. Če mu ostane še 5 K, koliko denarja je imel sprva?

37. Vrtnar zasluži vsak dan, kadar dela, hrano in $1\frac{3}{5}$ K; za vsak dan pa, kadar ne dela, mora plačati gospodarju $\frac{2}{5}$ K za hrano. Čez 30 dni znaša vrtnarjev zaslužek 36 K; koliko dni je delal vrtnar?

38. Dva soda držita skupaj 351 *l* vina; ako vzameš iz prvega soda šesti del, iz drugega pa tretji del, ostane v obeh sodih enako veliko vina. Koliko drži vsak sod?

39. V nekem razredu sedi v vsaki klopi po 6 učencev, v zadnji klopi pa le 1 učenec; če bi pa sedelo v vsaki klopi po 5 učencev, bi morala 2 učenca stati. Koliko klopi in koliko učencev je v razredu?

40. V tovarni dela 62 delavcev, mojstrov in pomagačev; vsak mojster zasluži na dan 4 K, vsak pomagač pa le polovico toliko; če bi vsakemu mojstru znižal dnino za 0·8 K in vsakemu pomagaču povečal dnino za istotoliko, bi postal dnevni zaslužek vseh delavcev za 25·6 K večji. Koliko mojstrov in koliko pomagačev je v tovarni?

41. V vsakem izmed dveh sodov je nekoliko vina; iz prvega soda ga preliješ v drugega toliko, kolikor ga je v tem sodu; potem ga preliješ iz drugega soda v prvega toliko, kolikor ga je ostalo v tem sodu; končno ga preliješ iz prvega soda v drugega toliko, kolikor ga je še ostalo v tem sodu. Če je sedaj v vsakem sodu 72 *l* vina, koliko ga je bilo sprva?

42. Ako denem iz levega žepa v desnega 10 h, je v tem žepu 3 krat toliko denarja kakor v levem; če pa denem iz desnega žepa v levega 10 h, je v tem žepu 7 krat toliko denarja kakor v desnem. Koliko denarja je bilo sprva v vsakem žepu?

43. Trije igralci napravijo tri igre. V prvi igri izgubi *A* in mora *B*-u in *C*-u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju; v drugi igri izgubi *B* in mora *A*-u in *C*-u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju; v tretji igri izgubi *C* in mora *A*-u in *B*-u toliko plačati, kolikor ima vsak izmed njiju. Če ima po tretji igri vsak igralec 32 K, koliko je imel sprva?

44. *A* pravi *B*-u: če mi daš 700 h, imam 2 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi; *B* pravi *C*-u: če mi daš 1400 h, imam 3 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi; *C* pravi *A*-u: če mi daš 420 h, imam 5 krat toliko denarja, kakor ga ostane tebi. Koliko denarja je imel vsak?

45. *A* kupi 4 *m* modrega, 6 *m* črnega in 11 *m* sivega sukna za 175 K. Če bi bil meter modrega sukna za $\frac{1}{4}$ K cenejši in meter sivega sukna za $\frac{1}{4}$ K dražji, bi bile cene modrega, črnega in sivega sukna v razmerju 7 : 6 : 5. Koliko velja 1 *m* sukna vsake vrste?

---

46. Trgovec proda blago s 3 % izgubo za 356 K 96 h; kolika je kupna cena?

47. *A* proda stot blaga za 55 K 20 h in ima 15 % dobička; po čem je kupil stot?

48. Če proda trgovec kilogram blaga po 1 K 35 h, ima 8 % dobička; koliko procentov dobička ali izgube ima, če proda kilogram po 1 K 16 h?

49 *A* plača čez 1 leto 5 mesecev za izposojeni kapital in $4\frac{1}{2}$ % obresti 6382 K 50 h; kolik je bil kapital?

50. Pri katerem kapitalu, ki je po 5% naložen, se zmanjšajo letne obresti za 125 K, če ga naložiš po $4\frac{3}{8}\%$?

51. V katerem času dasta glavnici 4400 K po 5% in 5500 K po $4\frac{1}{2}\%$ naloženi skupaj 1870 K obresti?

52. A ima $\frac{1}{4}$ svojega premoženja po $4\frac{3}{10}\%$ naloženega v državnih papirjih, $\frac{2}{3}$ po 4% na posestvih, ostanek po $3\frac{1}{2}\%$ v hranilnici ter dobi skupaj 7060 K letnih obresti; koliko premoženja ima A?

53. 60 delavcev, katerim se je dnina zvišala za 15%, zasluži skupaj na dan 124 K 20 h; koliko je zaslužil vsak delavec na dan prej, ko se je zvišala dnina?

54. A posodi B-u določeni kapital po $4\frac{3}{4}\%$ na 9 mesecev in C-u drugi kapital po $5\frac{1}{4}\%$ na 8 mesecev ter dobi od obeh skupaj 297 K obresti; če bi zamenil kapitala med seboj, bi postale letne obresti za $\frac{3}{4}$ K manjše. Koliko je posodil vsakemu?

55. Dva kapitala, izmed katerih je prvi za 400 K večji od drugega, dasta enake letne obresti, ker je naložen prvi kapital po $\frac{1}{2}\%$ nižje; če bi zamenil pri teh kapitalih odstotke, bi bile letne obresti prvega kapitala za 30 K večje nego drugega. Kolika sta kapitala in po koliko procentov sta naložena?

56. A si prihrani nekega leta $\frac{1}{3}$ in v naslednjem letu $\frac{1}{4}$ svojih v obeh letih enako velikih dohodkov in ima koncem drugega leta 2100 K prihranjenega denarja; koliki so bili letni dohodki, če je prihranek prvega leta naložil po 5%?

57. Trgovec proda 65 *m* sukna z 12% dobičkom in 35 *m* istega sukna, ki je bilo nekoliko poškodovano, s 6% izgubo ter ima pri vsem tem suknu 34 K 20 h dobička. Po čem je kupil meter sukna?

58. Oče zapusti svojima otrokoma, sinu in hčerki, svoje premoženje ter določi, da ima sin od svoje dedščine izplačati staremu služabniku 8%, hčerka pa od svoje dedščine stari služabnici 5%. Če je služabnik dobil 700 K manj ko trikrat toliko kakor služabnica in sin 17500 K več nego hčerka, koliko je podedoval vsak otrok?

59. Trgovec kupi kos sukna, meter po 5 K 20 h, in ima pri prodaji vsega sukna 40 K dobička; če bi pa bil prodal meter

po 40 h ceneje, bi imel le 20 K dobička. Koliko metrov je meril kos in po čem je prodal meter?

60. Za dolg 2880 (1560) K, ki bi se moral plačati čez 4 leta (8 mesecev) brezobrestno, se plača takoj 2400 (1508) K; po koliko odstotkov se je računal diskont?

·**61.** *A* mora plačati 15000 K čez 2 leti; plača pa 3000 K takoj in ostanek v 4 enakih obrokih, ki so enako daleč narazen. Kdaj se mora plačati prvi obrok?

62. Nekdo mora plačati 450 K čez 4 mesece, 560 K čez 5 mesecev in ostanek čez 8 mesecev; kolik je ostanek, če bi moral ves dolg poravnati čez $5\frac{1}{2}$ meseca?

63. *A* mora plačati 1200 K čez 4 mesece in 1500 K čez 7 mesecev; plača pa čez 5 mesecev toliko, da sme ostanek obdržati 9 mesecev. Kolika sta zadnja obroka?

64. Nekdo proda državne papirje, ki jih je prevzel po njih imenovani vrednosti, z $2\frac{1}{2}\%$ izgubo za 2437·5 K; kolika je imenovana vrednost teh papirjev?

65. Menica se za 21 (54) dni prej, ko doteče, proda z $9\frac{1}{3}$ (9) % diskontom za 900 (5327·1) K; na koliko se glasi menica?

66. *A* ima 1. julija plačati dve menici, izmed katerih je druga za 600 K večja od prve. Dne 1. junija plača za obe menici skupaj 7935 K. Na kateri vrednosti se glasita menici, če se diskont računa pri prvi menici po $3\frac{1}{2}\%$ in pri drugi po 4%?

---

67. Razdeli 452 K med *A*, *B* in *C* tako, da dobi *A* tolikokrat po 1 K kakor *B* po 70 h, in *C* tolikokrat po 80 h kakor *B* po 1 K. Koliko dobi vsak?

68. Razdeli določeno vsoto denarja tako, da dobi *A* $\frac{1}{3}$ dotične vsote manj 2 K, *B* $\frac{1}{4}$ dotične vsote in še 8 K po vrhu, *C* pa ostanek, ki je za 1 K večji od *A*-evega deleža. Kolika je dotična vsota in koliko dobi vsaka oseba?

69. Razdeli določeno vsoto tako, da dobi *A* 1000 K in $\frac{1}{3}$ ostanka, *B* $\frac{1}{2}$ novega ostanka in še 500 K, *C* pa ostalih 2500 K. Koliko pride na vsako osebo?

70. Koliko litrov vina po 96 h in po 1 K 28 h moraš zmešati, da dobiš 160 *l* vina po 1 K 8 h?

71. Koliko litrov 80% špirita moraš priliti 25 *l* vode, da postane špirit 60%?

72. Koliko vode mora trgovec priliti 15·5 *hl* kisa po 20 K, da bode hektoliter veljal 16 K?

73. Koliko kilogramov srebra po 0·72 in po 0·6 čistine moraš zliti, da dobiš $4\frac{1}{2}$ *kg* srebra po 0·65 čistine?

74. Koliko bakra moraš pridejati 500 *g* srebra po 0·93 čistine, da ima zlitina 0·75 čistine?

75. Ako zliješ 24 *kg* srebra s čistino 0·8 in 12 *kg* srebra druge vrste, najdeš srebro s čistino 0·75; koliko čistino ima srebro druge vrste?

76. Ako zliješ $6\frac{1}{2}$ *kg* srebra z $19\frac{1}{2}$ *kg* srebra druge vrste, najdeš srebro, ki ima 0·8125 čistine; če pa zliješ $6\frac{3}{4}$ *kg* srebra prve vrste in $2\frac{1}{4}$ *kg* srebra druge vrste, ima zlitina 0·6875 čistine; kolika je čistina vsake vrste?

77. Srebrar zlije dvojno srebro, ki ima 0·9 in 0·75 čistine, z 10 *kg* bakra ter napravi srebro, ki ima 0·6 čistine. Koliko srebra vsake vrste mora vzeti, da bode zlitina tehtala 40 *kg*?

78. *A* ima tri srebrne palčice po 0·9, 0·8 in 0·72 čistine, ki tehtajo skupaj 2000 *g*; ako zlije prvo in drugo palčico, dobi čistino 0·84; če pa zlije drugo in tretjo palčico, dobi čistino 0·75. Koliko tehta vsaka palčica?

79. Specifična teža dveh snovi je 11·4 in 0·24; koliko gramov vsake snovi moraš spojiti, da dobiš 1 *kg* sestavljene snovi, ki je tako težka kakor voda?

80. Koliko kilogramov snovi s specifično težo 0·45 moraš spojiti z 10 *kg* snovi, kateri je specifična teža $3\frac{3}{4}$, da ima sestavljena snov specifično težo = 1?

81. Koliko zlata in srebra je bilo v kroni kralja Hierona sirakuškega, če je krona tehtala na zraku 20 funtov, pod vodo pa $18\frac{3}{4}$ funta?

82. Koliko kubičnih metrov smrekovega lesa, ki ima specifično težo 0·65, moraš zvezati z granitno kocko, ki ima

2·85 specifične teže in 10 m^3 prostornine, da plavata spojeni telesi popolnoma v vodi?

83. Zlatar ima tri kovinske palice. Prva palica je sestavljena iz 4 *dkg* zlata, 8 *dkg* srebra in 12 *dkg* bakra; druga iz 8 *dkg* zlata, 10 *dkg* srebra in 2 *dkg* bakra; tretja iz 10 *dkg* zlata, 6 *dkg* srebra in 14 *dkg* bakra. Koliko vsake palice moraš vzeti, da napraviš zlitino, ki ima 10 *dkg* zlata, 10 *dkg* srebra in 11 *dkg* bakra?

84. *A* mora iz dveh zlitin, izmed katerih je prva sestavljena iz 27 delov bakra, 15 delov kositra in 8 delov svinca, druga pa iz 11 delov bakra, 9 delov kositra in 5 delov svinca, napraviti novo zlitino, ki ima 250 *kg* bakra in 188 *kg* kositra. Koliko svinca ima nova zlitina in koliko kilogramov moraš vzeti od prve in druge zlitine?

85. Vodnjak, ki drži 9117 m^3 vode, se da napolniti po treh ceveh; po prvi cevi priteče v 3 urah 144 m^3 vode, po drugi v 4 urah 231 m^3 in po tretji v 5 urah toliko, kolikor po drugi cevi v 4 urah. V katerem času napolnijo vse tri cevi skupaj vodnjak?

86. Vodnjak napolni cev *A* sama v 3 urah in cev *B* sama v $4\frac{1}{2}$ urah; v katerem času napolnita obe cevi skupaj vodnjak?

87. Vodnjak napolni cev *A* sama v 4 urah in cev *B* sama v 8 urah; cev *C* pa izprazni polni vodnjak v 6 urah. V katerem času se napolni vodnjak, ako odpreš vse tri cevi obenem?

88. Cevi *A* in *B* skupaj napolnita vodnjak v 24 minutah; vodnjak se tudi napolni, ako teče voda po cevi *A* 20 in po cevi *B* 27 minut. V katerem času napolni vodnjak vsaka cev sama?

89. Ako priteče v vsakih 3 minutah 20 *l* vode v vodnjak, manjka po določenem času še 40 *l*, da ni vodnjak poln; če pa priteče v vsakih 5 minutah 52 *l*, je v istem času 72 *l* vode več priteklo, nego drži vodnjak. Koliko drži vodnjak?

90. Vodnjak napolnita cevi *A* in *B* v 70 minutah, cevi *A* in *C* v 84 minutah, cevi *B* in *C* v 140 minutah. V katerem času napolnijo vse tri cevi skupaj vodnjak?

91. A in B dovršita delo v 20 dneh; čez 9 dni zboli A in B dovrši ostalo delo v $24\frac{3}{4}$ dneva. Koliko časa bi potreboval vsak sam za isto delo?

92. 2 drvarja posekata določeni kos gozda v $8\frac{4}{7}$ dneva. Prvi drvar dela 2 dni, drugi pa 4 dni; tako sta dovršila $\frac{1}{3}$ svojega dela. V katerem času bi izvršil vse delo vsak drvar sam?

93. 8 zidarjev napravi zid v 6 dneh, 9 drugih zidarjev pa v 4 dneh; če najmeš 6 zidarjev prve vrste in 3 zidarje druge vrste, v koliko dneh dovršijo ti delavci isto delo?

94. Ako povečaš posadko neke trdnjave za 2000 mož, porabijo živež 15 dni prej; če pa zmanjšaš posadko za 3000 mož, shajajo z živežem 24 dni dalje. Kolika je posadka in koliko časa shaja z živežem?

Posadka ima x mož in shaja z živežem y dni. Če bi bil samo 1 mož za posadko, bi shajal z živežem x krat y dni; $(x + 2000)$ mož shaja z istim živežem $(x + 2000)$ti del od xy dni in to je po pogoju naloge $= y - 15$, i. t. d.

---

95. Dve telesi, ki sta 847 m narazen, se pomičeta drugo proti drugemu in pretečeta vsako minuto oziroma po 4 m in 7 m; čez koliko minut znaša razdalja med telesoma 110 m?

96. Telo A se pomiče po neki premici in preteče vsako sekundo $4 \cdot 6$ m; 40 sekund pozneje se začne pomikati od iste točke v isto smer telo B, ki preteče vsako sekundo $4 \cdot 8$ m. Kdaj se snideta telesi?

97. Od kraja A gre sel, ki prehodi vsako uro po 6 km, proti kraju B; $\frac{3}{4}$ ure pozneje gre od kraja A kurir, ki prehodi vsako uro 11 km, proti kraju B. *a)* Kdaj doteče kurir sela? *b)* Čez koliko časa prehiti kurir sela za toliko pota, za kolikor je bil sprva za njim?

98. Postaji A in B sta 153 km narazen. Od postaje A gre proti B vlak, ki preteče vsako sekundo po 8 m; $1\frac{1}{2}$ ure pozneje gre od postaje B proti A drugi vlak, ki preteče vsako sekundo po 10 m. Kdaj in kje se srečata vlaka?

99. Od točk A in B, ki sta 42 m narazen, se pomičeta telesi M in N v isto smer; telo M preteče vsako sekundo po 4 m, telo N pa po 2·8 m. Kdaj in v kateri razdalji od B se snideta telesi, če se začne pomikati telo M 15 sekund pozneje ko telo N?

100. Razdalja krajev A in B znaša 135 km. Od kraja A gre ob 6. uri zjutraj tovorni vlak proti B; ob 7. uri zjutraj gre od kraja B proti A brzovlak, ki prevozi vsako uro 45 km. Ko je prevozil brzovlak $\frac{3}{4}$ razdalje od B do A, se srečata vlaka. Koliko prevozi tovorni vlak v 1 uri? Ob koliki uri se srečata vlaka? Kdaj pride brzovlak v kraj A in tovorni vlak v kraj B?

101. A in B potujeta od kraja M do kraja N. A prehodi v 5 urah 66 km, B pa v 3 urah 22 km. Ko je B prehodil že $16\frac{1}{2}$ km, se poda A na pot in pride $2\frac{1}{3}$ ure prej do kraja N ko pa B. Koliko časa je rabil A za pot in kako daleč je od M do N?

102. Kdaj se pokrijeta urna kazalca med četrto in peto uro?

103. Koliko časa preteče med tem, da se urna kazalca pokrijeta dvakrat zaporedoma?

104. Dve telesi se pomičeta po krožnici od iste točke v nasprotno smer in pretečeta vsako sekundo loka po $3^0\,12'\,30''$ in po $1^0\,17'\,30''$; kdaj se srečata telesi? (Krožnica, katero telesi pretečeta, meri 360^0.)

105. Na dveh istosrediščnih krogih se pomičeta telesi A in B v isto smer; telo A preteče svoj krog v 27·322.. dneh, telo B pa svojega v 365·24.. dneh. Čez koliko časa sta telesi istodobno dvakrat zaporedoma na istem polumeru?

Kolik pot (koliki del od 360^0) preteče telo A, oziroma telo B v 1 dnevu? Koliko pot v x dnevih? Razlika teh poti (lokov) je $= 360^0$.

106. Dve telesi sta 420 m narazen; ako se telesi pomičeta drugo proti drugemu, se srečata čez 70 sekund; če se pa telesi pomičeta drugo za drugim, se snideta čez 5 minut 50 sekund. Kako hitro se pomičeta telesi?

107. Od krajev A in B, ki sta 66 km narazen, gresta sela drug drugemu nasproti. Ako gre sel iz kraja A za 5 ur poprej, sreča sela iz kraja *B* čez 7 ur; če pa gre sel iz kraja *B* za 2 uri poprej, sreča sela iz kraja *A* čez 8 ur. Koliko kilometrov prehodi vsak sel v 1 uri?

108. Na okroglem drsališču, ki meri 380 *m*, dohiti boljši drsalec slabejšega vsakih 76 sekund, če drsata drug za drugim; če pa drsata drug proti drugemu, se srečata vsakih 20 sekund. Koliko pot preteče vsak drsalec v 1 sekundi?

109. Dve točki se pomikata po krožnici, ki meri 180 *m*, v isto (nasprotno) smer s hitrostima po 18 *m* in 12 *m*; koliko časa preteče, da se točki snideta dvakrat zaporedoma?

110. Dve telesi se pomikata po krogovem obodu, ki ima 80 *m* v premeru, v nasprotno smer in se srečata vsakih 16 sekund; če se pa telesi pomikata v isto smer, se snideta vsakih 64 sekund. Kako hitro se pomikata telesi?

111. Dve telesi sta 80 *m* narazen. Ako se telesi pomikata drugo proti drugemu, sta čez 8 minut še 4 *m* narazen; če se pa telesi pomikata drugo za drugim, sta čez 50 minut 40 sekund še tudi 4 *m* narazen. Koliko pot preteče vsako telo v 1 minuti?

112. Od krajev *A* in *B* gresta sela drug drugemu nasproti. Sel iz kraja *A* se poda 3 dni pozneje na pot in prehodi na dan 8 *km* več ko sel iz kraja *B*. Ko se srečata sela, sta si pota, katera sta prehodila, kakor 5 : 6 in njuni hitrosti sta si kakor 4 : 3. Koliko kilometrov prehodi vsak sel na dan in kako daleč je od *A* do *B*?

113. Kolesar se pelje ob 8. uri od kraja *A* do kraja *B*, ki je 15 *km* oddaljen, in nazaj do kraja *A*. Pešec gre ob 8. uri 20. minuti od *B* proti *A*. Kolesar sreča pešca ob 9. uri in ga potem dohiti ob 9. uri 48. minuti. Koliko prehodi pešec in koliko prevozi kolesar v 1 minuti?

114. Kolesarja *A* in *B* se odpeljeta od dveh krajev, ki sta 2 *km* narazen, istodobno v isto smer in se snideta čez 50 minut; če se pa *B* odpelje 5 minut prej ko *A*, dohiti kolesar *A* kolesarja *B* čez 75 minut. Koliko prevozi vsak kolesar v 1 minuti?

115. Popotniku je prehoditi pot od kraja *A* do kraja *B* v določenem času. Ko je že hodil polovico dotičnega časa, spozna, da bi prišel v kraj B za 2 uri prepozno; zato se podviza, prehodi vsako uro po 2 *km* več ko do sedaj in pride v pravem času v kraj B. Če bi bil takoj od začetka prehodil vsako uro po 3 *km* več, bi bil prišel v kraj B za 2 uri prezgodaj. Kako daleč je od A do B in koliko je popotnik sprva prehodil vsako uro?

---

116. Izračunaj trikotnikove kote, če je kot β za $17^0\,25'$ večji od kota α in kot γ za $2^0\,47'$ večji od kota β!

117. V enakokrakem trikotniku je kot na vrhu 3krat tolik kakor vsak kot na osnovnici; koliki so notranji koti?

118. Vsota dveh trikotnikovih kotov, ki sta v razmerju $2:3$, znaša $3\frac{1}{2}$krat toliko kakor tretji kot; koliki so trikotnikovi koti?

119. Ako povečaš trikotnikov kot α za 1^0 in kot β za 11^0, so si trikotnikovi koti kakor $3:8:4$; koliki so koti?

120. V paralelogramu je deveti del enega kota za 12^0 manjši ko sedmi del priležnega kota; koliki so paralelogramovi koti?

121. Zunanja kota na hipotenuzi pravokotnega trikotnika sta si kakor $13:17$; koliki so notranji koti?

122. Koliko stranic ima mnogokotnik, katerega koti merijo 2880^0?

123. V katerem pravilnem mnogokotniku je razlika med notranjim in zunanjim kotom 150^0?

124. Ena kateta pravokotnega trikotnika je za 4·4 *dm* večja ko njen vzmet na hipotenuzo; vzmet druge katete na hipotenuzo znaša 16·9 *dm*. Kolika je hipotenuza?

125. Vsota obeh katet pravokotnega trikotnika znaša 223 *m*; če povečaš krajšo kateto za 60 *m* in zmanjšaš večjo za 90 *m*, postane ploščina za 1950 m^2 večja. Koliki sta kateti?

126. Ako povečaš eno kateto pravokotnega trikotnika za 8 *cm* in drugo za 2 *cm*, se poveča hipotenuzni kvadrat za 144 cm^2 in ploščina trikotnikova za 24 cm^2; kolike so trikotnikove stranice?

127. Vsota iz osnovnice in višine nekega trikotnika znaša 40 *cm*; če povečaš osnovnico za 6 *cm* in zmanjšaš višino za istotoliko, se ploščina poveča za 42 cm^2. Kolika je osnovnica in kolika višina?

128. Trikotnikova osnovnica in višina sta si kakor 6 : 5; ako povečaš vsako teh daljic za 9 *cm*, se ploščina poveča za 189 cm^2. Izračunaj osnovnico in višino prvotnega trikotnika!

129. Ako zmanjšaš stranico določenega kvadrata za 0·5 *m*, se ploščina zmanjša za 31 m^2; kolika je stranica?

130. Pravokotnikovi stranici sta v razmerju 3 : 5; ako zmanjšaš manjšo stranico za 1 *m* in povečaš večjo stranico za istotoliko, se ploščina zmanjša za 7 m^2. Koliki sta stranici?

131. Romb se poveča za 324 m^2, če povečaš vsako prekotnico za 6 *cm*; če pa povečaš eno prekotnico za 6 *cm*, drugo pa za 4 *cm*, se rombova ploščina poveča za 54 cm^2. Koliki sta prekotnici?

132. Ako načrtaš iz točke ležeče zunaj določenega kroga tangento in sekanto, je tangenta za 16 *cm* manjša od sekante in za 8 *cm* večja nego zunanji sekantni odsek; kolika je tangenta?

133. Neka tetiva določenega kroga razpolavlja drugo tetivo; izmed odsekov prve tetive je eden za 3 *cm* večji, drugi pa za 2 *cm* manjši nego polovica druge tetive. Koliki sta tetivi?

134. Na ravnini stojita dva stolpa 60 *m* narazen in sta oziroma 50 *m* in 40 *m* visoka; med tema stolpoma leži vodnjak, ki je enako oddaljen od obeh stolpnih vrhov. Kako daleč je od vodnjaka do vsakega stolpa?

135. Na sredi okroglega ribnika, katerega premer znaša 10 *m*, raste trstika, ki sega 1 *m* nad vodo; če nagneš trstiko, sega ravno do brega. Kako globok je ribnik?

K § 32.

1. $(-a)^5+(-a)^4-(-a)^3-(-a)^2$.

2. $4(-b)^5-3(-b)^4+2(-b)^3-3(-b)^2$.

3. $5\cdot(-1)^5+4\cdot(-1)^4+3\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2$.

4. $(-2)^5+(-2)^4+(-2)^3+(-2)^2$.

5. $(-3)^5-(-3)^4+(-3)^3-(-3)^2$.

6. $3\cdot(-2)^4-4\cdot(-3)^2+5\cdot(-2)^3-3\cdot(-3)^3$.

7. $(-3)^2\cdot(-2)^3-(-3)^3\cdot(-2)^2+(-2)^4\cdot(-3)^2-$
$-(-3)^3\cdot(-2)^3$.

8. Zameni $a=-2$ v izrazu:

$$2a^5-3a^4+4a^3-5a^2+6a-7.$$

9. Zameni $b=-1$ v izrazu:

$$(b-1)^5-(b+1)^4+\frac{1}{(b+2)^3}-\frac{1}{(b-1)^2}.$$

10. Zameni $x=-5$ in $y=4$ v izrazih:

a) $\frac{2(x-y^2)+3(y-x^2)}{x^2-y^2}$; *b)* $\frac{2(x-y)^2-3(x+y)^2}{x^2-y^2}$.

K § 33.

1. Skrči naslednje izraze:

a) $12a^5-13b^6+14a^5-15b^6+24b^6$;

b) $\frac{4}{5}a^{2n}-0{\cdot}75a^n-\frac{3}{8}a^{2n}-0{\cdot}645a^n+\frac{3}{40}a^{2n}-0{\cdot}395a^n$;

c) $3a^2-\{5b^2-[-5a^2-(7a^2-3b^2)]\}$.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

2. $a^{4x-5y+3z}\cdot a^{2x+4y-5z}\cdot a^{2y+4z-5x}$.

3. $(-b)^{2x+3y}\cdot(-b)^{3x-2y}\cdot(-b)^{y-4x}$.

4. $2^{4n-3}\cdot 2^{8-3n}\cdot 2^{n+1}\cdot 2^{9-2n}$.

5. $(-3)^{5m-7}\cdot(-3)^{9-4m}\cdot(-3)^{4-m}\cdot(-3)$.

6. $a^4b(-x)^3\cdot a^nb^{n-2}(-x)^n\cdot a^{n-2}b^5(-x)^{5n}$.

7. $(m+2n)^{6x-2y+3}\cdot(m+2n)^{5y-4x+2}\cdot(m+2n)^{x+y-1}$.

8. $4(2a^2-3b)^5 \cdot 3(2a^2-3b)^{3x-4} \cdot 2(2a^2-3b)^{1+2x} \cdot (2a^2-3b)^{x-2}$.

9. $(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3) \cdot (x^3-2x^2y+2xy^2-y^3)$.

10. $(a^{3x+5}+a^{2x+3}+a^{x+1}) \cdot (a^{2x-3}-a^{x-1}-a)$.

11. $(a^x-5a^{x-1}+6a^{x-2}-8a^{x-3}-9a^{x-4}) \cdot (2a^{x+3}-$
$-3a^{x+2}+4a^{x+1}-5a^x)$.

12. $\dfrac{5x^{m-4}y^{2n+1}}{6a^{2+3m}} \cdot \dfrac{2x^{7+2m}y^{4n-5}}{9a^{2m-3}} \cdot \dfrac{4x^{5-m}y^{8-3n}}{5a^{7-m}}$.

13. $(\frac{4}{9}a^{2x-y}-\frac{3}{2}a^{2y}-\frac{2}{3}a^{5y-2x}) \cdot \frac{6}{5}a^{3x-2y}$.

14. $(\frac{3}{4}y^{5n-4}-\frac{2}{5}y^{3n-2}+\frac{5}{4}y^n) \cdot (\frac{2}{3}y^{3n-2}-\frac{6}{5}y^{2n-1}+10y^n)$.

15. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

a) $x^{3n}+x^{2n}+x^n$; *b)* $x^{m+4}+x^{m+3}+x^{m+2}$;

c) $a^{2m}-a^{3m+1}+a^{4m+2}$; *d)* $a^{2n+3}b^{m+1}-a^{3n}b^{2m+1}$;

e) $3^{3x+3}+3^{2x+2}+3^{x+1}$; *f)* $5^{x+3}-5^{x+2}-5^{x+1}$.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

16. $a^{x+y-4} : a^{x-y+4}$. 17. $(-a)^{7-2x} : (-a)^{5-2x}$.

18. $(-35a^{2x-3y-4z}) : 7a^{x-4y+5z}$.

19. $a^9(x-y)^5 : (-a)^3(y-x)^2$.

20. $a^xb^y(a-1)^3 : a^{x-1}b^{y-2}(1-a)^2$.

21. $(a-1)^3(b-1)^4 : (1-a)^2(1-b)^3$.

22. $(-135x^{14}+270x^{11}-108x^8) : (-27x^7)$.

23. $(a^{2x-y}+a^{3y-2x}-a^{4y-3x}) : a^{y-5x}$.

24. $(9x^{2m+3}y^{m+1}-12x^{m+n}y^{m-2}) : 3x^{m+3}y^{m-n}$.

25. $(a^8-b^8) : (a^5+a^4b+ab^4+b^5)$.

26. $(-49a^{12}-6a^{10}+51a^8+25a^6) : (-7a^5+6a^4-3a^3+5a^2)$.

27. $(x^{3n}-2x^{2n}+4x^n-8) : (x^n-2)$.

28. $(x^{3m}-y^{3n}) : (x^{2m}+x^my^n+y^{2n})$.

29. $(27a^{4x+8y}-6a^{2x+4y}+\frac{1}{3}) : (3a^{2x+4y}+2a^{x+2y}+\frac{1}{3})$.

30. $(6x^{4n}-8x^{3n}-\frac{5}{6}x^{2n}+\frac{5}{6}x^n+\frac{1}{6}) : (3x^{2n}-x^n-\frac{1}{3})$.

31. $\left(\dfrac{3a^4}{b^4}-\dfrac{19a^3}{b^3}+\dfrac{21a^2}{5b^2}-\dfrac{9a}{10b}+1\right) : \left(\dfrac{3a^2}{x^2}-\dfrac{2a}{5x}+1\right)$.

32. Okrajšaj naslednje ulomke:

a) $\frac{a^3}{a^{x+4}}$; *b)* $\frac{a^{x-y}}{a^{x+y}}$; *c)* $\frac{a^{2x-3y}}{a^{4x+y}}$;

d) $\frac{a^{m+3}}{a^{n+3}}$; *e)* $\frac{a^{m-2n}}{a^{m+n}+a^{2m-3n}}$ *f)* $\frac{a^{n+1}-a^{n-1}}{a^{2n+1}-a^{2n-3}}$.

33. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

a) $a^n - a^{n-1} + a^{n-2}$; *b)* $a^{n-1}b - 2a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3$;

c) $a^{2n-1}b^{2n-3} - a^{2n-3}b^{2n-5}$;

d) $5a^{2n+3}b^{n-1} - 20a^{n-1}b^{3n+1}$;

e) $2^{x-4} + 2^{x-3} - 2^{x-2}$; *f)* $4^{3x-3} - 4^{2x-2} + 4^{x-1}$.

34. $\frac{5ax^4}{6by^3} \cdot \frac{3b^2x^2}{2ay} \cdot \frac{4a^2y^4}{5b^3x^3}$. **35.** $\frac{5a^{m-1}b^{m-2}}{3x^{n+1}y^{n+2}} : \frac{3a^{m-2}x^{5-n}}{2b^3y^{n-3}}$.

36. $\frac{7a^{3x-y}b^{4y-2x}}{22a^{2x+2y}b^{3x-y}} : \frac{21a^{9x-8y}b^{6y-10x}}{11a^{6y+3x}b^{9x-7y}}$.

37. Izvrši odštevanje v naslednjih izrazih:

a) $\frac{x^2y}{(x+y)^{m+1}} - \frac{y}{(x+y)^{m-1}}$;

b) $\frac{1-2x^4}{x^n} - \frac{1-3x^2}{x^{n-2}} - \frac{4}{x^{n-4}}$.

38. Poišči največjo skupno mero in najmanjši skupni mnogokratnik naslednjim izrazom:

a) $x^{3n} - 64y^{6m}$ in $x^{2n}y^{3m} - 16y^{7m}$;

b) $a^{2x+z} + a^z b^{3y}$ in $a^{4x}b^z - b^{6y+z}$.

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

39. $(3ax)^2 \cdot (2ay)^3 \cdot (2axy)^4$.

40. $(-3ab)^2 \cdot (-5ac)^3 \cdot (-2bc)^4 \cdot (-abc)^5$.

41. $(1\frac{3}{7})^2 \cdot (1\frac{2}{5})^2 + (2\frac{2}{3})^3 \cdot (3\frac{3}{4})^3$.

42. $(3\frac{3}{5})^4 \cdot (\frac{10}{11})^4 \cdot (3\frac{2}{3})^4 - (-3\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{3}{14})^3 \cdot (-\frac{4}{3})^3$.

43. $\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^5 \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^5 \cdot \left(\frac{b}{a-b}\right)^5 + \left(\frac{a^4-b^4}{c^2-d^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{c+d}{a^2+b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{c-d}{a^2-b^2}\right)^3$.

44. $(\frac{1}{2})^5 - (-\frac{1}{10})^3 + (-\frac{1}{5})^4 - (-\frac{1}{4})^3$.

45. $(-1\frac{1}{2})^4 - (-3\frac{1}{3})^3 + (2\frac{3}{4})^2$.

46. $\left(\frac{2ax-3by}{3b} + y\right)^3 + \left(1 - \frac{2bx-3a}{2bx}\right)^2$.

47. $\left(\frac{xy}{5ab}\right)^2 \cdot \left(\frac{3xy}{4ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ab}{3xy}\right)^4$.

48. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}$.

49. $[(-4\tfrac{2}{5})^3 : (2\tfrac{1}{5})^3] + [(-3\tfrac{3}{5})^2 : (-1\tfrac{1}{5})^2]$.

50. $\left(\frac{a^3-b^3}{x^2-y^2}\right)^2 : \left(\frac{a^2+ab+b^2}{x+y}\right)^2$.

51. $\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^n : \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n : \left(\frac{x-y}{a+b}\right)^n$.

52. $\left(\frac{2a^2+3ab+b^2}{3a+b}\right)^3 : \left[\left(\frac{2a+b}{3a-b}\right)^3 : \left(\frac{a+b}{3a+b}\right)^3\right]$.

53. $\left[\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m\right] - \left[\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^m : \left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)^m\right]$.

54. $(a^3-3a^2+3a-1)^m : (a^2-2a+1)^m$.

55. $(\tfrac{4}{9}x^4 - x^2y^2 + \tfrac{9}{16}y^4)^n : (\tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{3}{4}y^2)^n$.

56. $[(32^x-1) : (2^x-1)] - [(8^x-1) : (2^x-1)]$.

57. Koliko vrednost ima:

a) kvocijent $\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^3+2x^2+4x+8}$ za $x = -\frac{1}{2}$;

b) „ $\frac{a^{10}-b^{10}}{a^4-b^4}$ za $a = b$;

c) „ $\frac{16a^2-8ab+b^2}{32a^2-2b^2}$ za $b = 4a$.

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

58. $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$.

59. $7(a^{12})^3 - 8(-a^4)^9 + 5(-a^6)^6 - 10(-a^2)^{18}$.

60. $[(a^2)^3]^5 \cdot (a^5)^6 \cdot (a^6)^3 : [(a^3)^4]^2$.

61. $(-a^2)^{2n-1} \cdot (-a^{2n-1})^2 \cdot (-a^{2n-1})^3 \cdot (-a^{7-3n})^4$.

62. $\left[\left(\frac{5x^3}{4y^2}\right)^2\right]^m \cdot 3\left[\left(\frac{8y}{x^2}\right)^m\right]^2 + 2\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^m\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{15}{y}\right)^m\right]^2$.

63. $\left(\frac{4a^{n-1}b^4c^{3-x}}{9x^2y^{3n}z^5}\right)^2 : \left(\frac{2a^{n-2}bc^{2-x}}{3x^2y^{2n}z}\right)^3$.

64. $\left(\frac{2a^2x^3}{3by^3}\right)^3 : \left(\frac{5b^2y}{6ax^2}\right)^2 : \left(\frac{4a^2}{3b^2}\right)^4$. 65. $[(4a)^x + (5b)^x][(4a)^x - (5b)^x]$.

66. $[(3a)^y + (6b)^y][(3a)^y - (5b)^y]$.

67. $[(3a^2-5ab-2b^2)^{10x}]^{3y} : [(a-2b)^{5x}]^{6y}$.

68. $(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b)^m \cdot (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}b)^m \cdot (\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{9}b^2)^m$.

$$a^0 = 1;\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

69. Določi vrednost naslednjih izrazov:

a) 6^{-2}; *b)* 4^{-3}; *c)* $0{\cdot}4^{-1}$; *d)* $0{\cdot}125^{-3}$;

e) $9\cdot 3^{-2}$; *f)* $\frac{1}{3^{-4}}$; *g)* $\left(5\frac{1}{4}\right)^{-2}$; *h)* $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$;

i) $(-2)^5\cdot(-5)^{-2}\cdot(-3)^0\cdot(-6)^{-1}$.

70. Odpravi v naslednjih izrazih negativne eksponente:

a) $2^{-1}a^2x^{-3}y^4$; *b)* $\frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{2b^2n^{-2}x^{-4}}$; *c)* $\frac{a^{-1}x^{-m}}{b^{-2}y^{-n}}$.

71. Pretvori naslednje izraze na obliko celih števil:

a) $\frac{5a}{b}$; *b)* $\frac{2ax^{-2}}{b^{-1}y}$; *c)* $\frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}$.

72. Skrči naslednje izraze kolikor mogoče:

a) $\frac{2}{3}a^{-5}+\frac{5}{6}a^{-5}-\frac{5}{8}a^{-5}-\frac{1}{2}a^{-5}$;

b) $9a^{-3}b^2+13a^4b^{-4}+\frac{27b^2}{a^3}-\frac{12a^4}{b^4}$;

c) $\frac{3x^{-n}}{4y^{-m}}+\frac{2y^m}{x^n}-\frac{5x^{-n}}{12y^{-m}}$.

73. Določi naslednje produkte:

a) $(-5a^{-6}b^3)\cdot(-a^4b^{-3})$; *b)* $(-5\frac{1}{2}a^{-5}b^2)\cdot(-8a^3b^{-5})$;

c) $(-6a^{-3}b^{-2})\cdot(-4a^2b^{-1})\cdot(-2a^2b^{-2})$;

d) $(\frac{3}{4}a^{-5}+\frac{2}{5}a^{-4}-\frac{3}{8}a^{-3}+\frac{1}{2}a^{-2}+a^{-1})\cdot(-20a^5)$;

e) $(8a^{-4}-5a^{-2}-3)\cdot(4a^{-4}-2a^{-2}+1)$.

74. Določi naslednje kvocijente:

a) $a^{-20}:a^{-12}:a^{-3}$; *b)* $(x-y)^n:(y-x)^{-3}$;

c) $(16a^{-3}-12a^{-2}-24a^{-1}+6):6a^{-4}$;

d) $(a^{-7}-a^{-3}+16a):(a^{-4}+3a^{-2}+4)$;

e) $(9x^2+2+x^{-2}):(3x-2+x^{-1})$.

75. Določi naslednjim izrazom rezultate:

a) $(-a^{2n-1})^{-2}$; *b)* $\left(-\frac{4a^{-2}b^3}{c^{-4}}\right)^{-2}$; *c)* $\left(-\frac{a^{-2}b^3}{c^{-1}d^{-4}}\right)^{-3}$;

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$; *e)* $\frac{[3(4a^2b)^2]^{-1}}{[(3^{-1}ab^3)^{-2}]^3}$;

f) $3[(a^{-2})^{-6}]^3 + 4[(a^9)^{-1}]^{-4} - 6[(a^{-4})^3]^{-3} + 5[(a^{-1})^{-2}]^{18}$;
g) $(-\frac{1}{3})^{-3} \cdot (a^{-4}b^{-5})^{-5} \cdot (a^{-4}b^5)^{-5} : 9a^{-3}b^{-4}$;
h) $(\frac{1}{2}a^{-2})^{-3} \cdot (\frac{2}{3}a^{11})^{-2} \cdot a^{-13} : (-a^{-4})^5 \cdot (2a^3x)^{-3}$.

K § 34.

1. $(5a^2 - 4x^2)^2 + (5a^2 + 4x^2)^2$. **2.** $(5x^3 + 6y^3)^2 - (5x^3 - 6y^3)^2$.
3. $(2a + 5b^2)^2 - (3a - 7b^2)^2 + (4a - 9b^2)^2$.
4. $\left(\frac{3a}{4b} + \frac{2b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2b} - \frac{3b}{a}\right)^2$. **5.** $\left(\frac{6x^2}{5y} - \frac{7y^2}{8x}\right)^2 - \left(\frac{4x^2}{y} + \frac{3y^2}{2x}\right)^2$.
6. *a)* $(4 + 2a - a^2)^2$; *b)* $(3x^2 - 4xy - 2y^2)^2$.
7. $(8x^2 - 5xy + 6y^2)^2 - (7x^2 - 9xy - 4y^2)^2$.
8. *a)* $\left(a^2 - \frac{a}{3} + \frac{1}{2}\right)^2$; *b)* $\left(4x - \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{2x^3}\right)^2$.
9. $\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(a^2 + \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$.
10. $\left(\frac{3x^2}{4y} - \frac{2x}{3} - \frac{5y}{2x}\right)^2 + \left(\frac{2x^2}{3y} + \frac{x}{2} - \frac{4y}{x}\right)^2$.
11. *a)* $(6a^3 - 5a^2 + 4a - 3)^2$; *b)* $(9a^6 - 6a^4 + 7a^2 - 8)^2$.
12. $(4 + 3x + 2x^2 + 5x^3)^2 - (4 - 3x + 2x^2 - 5x^3)^2$.
13. $(2x - 3y)^4 = [(2x - 3y)^2]^2$.
14. $(3a + 2b)^8 = \{[(3a + 2b)^2]^2\}^2$.
15. $(7x - 3y)^4 - (5x - 4y)^4$. **16.** $(3x + 2)^8 - (2x - 3)^8$.
17. $(5x^2 - 6y^{-2})^2 - (2x - 3y^{-1})^4$.
18. $(3x^{-1}y^2 - 4xy^{-2})^4 - (3xy^{-2} - 5x^{-1}y^2)^4$.
19. $(\frac{1}{2}xy^{-1} - \frac{2}{3}x^2y^{-2})^4 + (\frac{1}{2}xy^{-1} + \frac{1}{3}x^2y^{-2})^4$.
20. *a)* 568^2; *b)* 4796^2; *c)* 85973^2.
21. *a)* 4087^2; *b)* 610809^2; *c)* 94008^2.
22. *a)* $7 \cdot 29^2$; *b)* $0 \cdot 837^2$; *c)* $0 \cdot 1485^2$.
23. *a)* 307^4; *b)* 628^4; *c)* $0 \cdot 175^4$.
24. *a)* $(\frac{32}{65})^2$; *b)* $(1\frac{13}{37})^2$; *c)* $(2\frac{25}{36})^{-2}$.
25. *a)* $(1\frac{4}{5})^4$; *b)* $(2\frac{5}{6})^8$; *c)* $(10\frac{5}{9})^{-4}$.
26. *a)* π^2; *b)* $1 \cdot 73205..^2$; *c)* $1 \cdot 41421..^4$.
27. *a)* $0 \cdot 59371..^4$; *b)* $0 \cdot 1234..^4$; *c)* $4 \cdot 6038..^4$.

28. $(3a + 4b)^3 + (3a - 4b)^3$. **29.** $(5x^2 + 6x)^3 - (5x^2 - 6x)^3$.

30. $(7a^2b - 8ab^2)^3 - (6a^2b - 9ab^2)^3$.

31. $(\tfrac{2}{3}a + \tfrac{3}{2}b)^3 + (\tfrac{1}{3}a - \tfrac{1}{2}b)^3$.

32. $(\tfrac{1}{3}ab^{-1} + \tfrac{3}{4}a^{-2}b^2)^3 + (\tfrac{2}{3}ab^{-1} - \tfrac{1}{4}a^{-2}b^2)^3$.

33. $\left(\frac{6a^2x^3}{5by^2} - \frac{5b^3y^2}{3ax^2}\right)^3 - \left(\frac{3a^2x^3}{5by^2} + \frac{b^3y^2}{3ax^2}\right)^3$.

34. $\left(\frac{4a^3x^2}{3b^{-2}y^{-3}} + \frac{5by^3}{2a^{-1}x^{-2}}\right)^3 - \left(\frac{5a^3x^2}{6b^{-2}y^{-3}} - \frac{7by^3}{4a^{-1}x^{-2}}\right)^3$.

35. *a)* $(a^2 + 2a - 3)^3$; *b)* $(4x^2 - 5x - 6)^3$.

36. $(4a^2 - 5a + 6)^3 - (3a^2 - 8a - 5)^3$.

37. *a)* $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3$; *b)* $\left(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.

38. $(5x^3y^{-2} - 4x^{-1}y^2 + 3x^{-5}y^6)^3$.

39. $(2a - 3b)^5 = (2a - 3b)^3(2a - 3b)^2$.

40. $(3x - 2y)^6 = [(3x - 2y)^3]^2$.

41. *a)* $(3x - 4y)^5$; *b)* $\left(\frac{5a}{3b} + \frac{6b}{5a}\right)^5$.

42. *a)* $(3a^2 + 5x^3)^6$; *b)* $\left(\frac{x}{2a} - \frac{y}{3b}\right)^6$.

43. *a)* 28^3; *b)* 45^3; *c)* 87^3; *d)* 495^3.

44. *a)* 567^3; *b)* 708^3; *c)* $80 \cdot 09^3$.

45. *a)* $1 \cdot 075^3$; *b)* $0 \cdot 7083^3$; *c)* $4 \cdot 986^3$.

46. *a)* 67^{-3}; *b)* $(-9\tfrac{4}{9})^{-3}$; *c)* $(-5\tfrac{3}{11})^3$.

47. *a)* $(\tfrac{5}{6})^6$; *b)* $1 \cdot 03^6$; *c)* $(1\tfrac{5}{9})^9$.

48. *a)* $0 \cdot 8079\,..^3$; *b)* $0 \cdot 658\,..^3$; *c)* $12 \cdot 3456\,..^3$.

49. *a)* $(0 \cdot \dot{8}\dot{1} : 0 \cdot \dot{1}\dot{8})^3$; *b)* $0 \cdot \dot{7}\dot{5}^3 : 0 \cdot 2\dot{7}^3$.

K § 35.

Razreši naslednje eksponentne enačbe:

1. $a^{x+1} \cdot a^{3x-4} = a^x \cdot a^{7x-11}$. **2.** $a^{2x+3} \cdot a^{3x-4} = a^5 : a^{6-4x}$.

3. $a^{2x-1} : a^{x+3} = a^{4x-3} : a^{x+5}$. **4.** $(a^{x-5})^3 = (a^{x-4})^2$.

5. $(a^{x-4})^{x-1} = (a^{5-x})^{4-x}$. **6.** $(-2)^{-x} = -32$.

7. $2^{-x} = 32$. **8.** $(-2)^x = 16$.

9. $(-2)^x = 64$. **10.** $10^x = 0 \cdot 01$.

11. $100^{2x} = 0 \cdot 0001$. **12.** $4 \cdot 2^{x+1} = 8^{x-1}$.

13. $8^x \cdot 4^{3x} = 16^{x+5}$. 14. $8^{2x+1} = 0{\cdot}125^{4-3x}$.

15. $0{\cdot}5^{10x-9} = 2^{3-13x}$. 16. $(\frac{3}{5})^{2x} = \frac{25}{9}$.

17. $(1\frac{1}{3})^7 = 0{\cdot}75^{x-3}$. 18. $8^{-x} = \frac{4x}{32}$.

19. $2^{x+3} + 2^x = 144$. 20. $3^x = 270 - 3^{x-2}$.

21. $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$.

22. $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-3} + 3^{x-4}$.

23. $8^x = 7^{x-1} + 7^x$. 24. $7^x + 8 \cdot 7^{x-1} = 735$.

25 $5^{2x+4} - 2 \cdot 5^{2x+3} = 15^{x+2}$.

26. $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$.

27. $9 \cdot 5^x + 8 \cdot 5^{x+1} = 1225$.

28. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

29. $4^{x+3} + 2^{x+2} = 36 \cdot 2^x$.

30. $3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2} - 4 \cdot 3^{2x-1} = 27$.

31. $a^x \cdot a^y = a^5$
$a^x : a^y = 1 : a$.

32. $4^{2x-3} \cdot 2^{3y-2} = 1024$
$3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = \frac{1}{9}$.

33. $a^{4x-y} : a^{y-x} = a$
$a^{x+y} : a^{8x-2y} = 1$.

34. $3^{3x-4y} : 3^{y-x-1} = 1$
$2^{2x-3} \cdot 2^{5-3y} = 0{\cdot}5$.

35. $17^x = 17^{y+1} \cdot 289$
$2^{x+y} = 128$.

36. $4^{4x-3} \cdot 2^{2y-10} = 64$
$9^{2x-4} : 3^{y-2} = \frac{1}{3}$.

K § 36.

1. Razstavi: *a)* število $64\,(x^6)$ na 2, 3, 6 enakih faktorjev; *b)* število $81\,(y^4)$ na 2 in 4 enake faktorje; *c)* število a^{36} na 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 enakih faktorjev!

2. Določi kvadratne korene naslednjim številom: 4, + 9, + 16, 25, 36, 49, + 64, + 81, + 100!

3. Koreni s 3 naslednja števila: 8, — 27, + 64, 125, + 216, — 343, — 512, + 729, 1000!

4. Kakšno število je: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$?

5. Ali moreš določiti kvadratni koren številom: — 4, — 9, — 16?

6. Kolika je vrednost naslednjih izrazov:

a) $\sqrt[1]{6}$, $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[x]{1}$, $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[x]{0}$; *b)* $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$;

c) $\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}$; *d)* $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$?

K § 37.

$$a\sqrt[m]{x}\pm b\sqrt[m]{x}=(a\pm b)\sqrt[m]{x}.$$

1. $a\sqrt[m]{b}-2b\sqrt[n]{a}-2a\sqrt[m]{b}+8b\sqrt[n]{a}-5b\sqrt[n]{a}+6a\sqrt[m]{b}$.

2. $6\sqrt[m]{a-2b}-8\sqrt[m]{a-2b}-5\sqrt[m]{a-2b}+7\sqrt[m]{a-2b}$.

3. $8\sqrt[m]{a}-12\sqrt[m]{b}-(7\sqrt[m]{b}-3\sqrt[m]{a})-(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b})$.

4. $8\sqrt{2}-[7\sqrt[3]{2}-(3\sqrt{2}-2\sqrt[3]{2})-(5\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})]$.

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mp]{a^p}.$$

5. Pretvori naslednje korenske izraze tako, da dobijo enake korenske eksponente:

a) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{x^3}$; *b)* $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{b^3}$, $\sqrt[6]{ab^2}$;

c) $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[8]{a^2b^3}$, $\sqrt[12]{a^5b^7}$; *d)* $\sqrt[n]{a^4b^5}$, $\sqrt[2n]{a^6b^7}$, $\sqrt[3n]{a^5b^5}$.

6. Pretvori naslednje korenske izraze na enostavnejšo obliko:

a) $\sqrt[4]{x^2}$. $\sqrt[6]{y^{15}}$, $\sqrt[18]{a^{12}}$, $\sqrt[mn]{x^{mp}}$, $\sqrt[15]{a^5}$, $\sqrt[4]{36}$;

b) $\sqrt[mp]{a^m}$, $\sqrt[ax+bx]{m^{a+b}}$, $\sqrt[8x+12y]{a^{6x+9y}}$, $\sqrt[10]{32}$;

c) $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[8]{81}$, $\sqrt[8]{64}$, $\sqrt[12]{125}$.

$$\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}.$$

7. *a)* $\sqrt{9\cdot 49\cdot 64}$; *b)* $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; *c)* $\sqrt[3]{27a^3b^3}$;

d) $\sqrt[5]{32a^5b^5}$; *e)* $\sqrt{\sqrt[3]{16^3\cdot 81^3}}$; *f)* $\sqrt[3]{\sqrt{64\cdot 27^2}}$;

g) $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m\cdot 27^m}}$.

8. a) $\sqrt{x^3}$; b) $\sqrt{4a^3b}$; c) $\sqrt{75}$; d) $\sqrt{32}$; e) $\sqrt{80}$;
f) $\sqrt[3]{a^6b^5c^4}$; g) $\sqrt[3]{81}$; h) $\sqrt[3]{48}$; i) $\sqrt[3]{54}$; k) $\sqrt{147}$;
l) $\sqrt[3]{128}$; m) $\sqrt[m]{x^{m+n}}$; n) $\sqrt{1200}$; o) $\sqrt[3]{243}$;
p) $\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+2}}$.

9. Skrči naslednje izraze kolikor mogoče:

a) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} - \sqrt{96} + \sqrt{150}$;

b) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - \sqrt{108}$;

c) $2\sqrt{63} + 3\sqrt{700} - 4\sqrt{175} + 5\sqrt{28} - \sqrt{112}$;

d) $\sqrt{18x} + \sqrt{147x} - 2\sqrt{32x} - \sqrt{192x} + \sqrt{72x}$;

e) $13a^2x\sqrt{5ax^5} - 3ax^3\sqrt{45a^2x} - 2a^2\sqrt{80ax^7} +$
$+ 2ax\sqrt{245a^3x^5}$;

f) $\sqrt{4a + 4b} - \sqrt{16a^3 + 16a^2b} + \sqrt{25ab^4 + 25b^5}$;

g) $4\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{9 + 9a^2} - x\sqrt{x^2 + a^2x^2} + \sqrt{x^4(1 + a^2)}$;

h) $5\sqrt[3]{54} - 7\sqrt[3]{16} + 13\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{128}$;

i) $7\sqrt[3]{250} - 9\sqrt[3]{432} + 5\sqrt[3]{686} - 8\sqrt[3]{1024}$;

k) $3\sqrt[3]{48} - 2\sqrt[3]{750} + 3\sqrt[3]{135} - 7\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{625}$;

l) $\sqrt[3]{54a^4b^4c} - \sqrt[3]{16a^4bc^4} + \sqrt[3]{128ab^4c^4} - \sqrt[3]{250a^4b^4c^4}$;

m) $2\sqrt[3]{a^3 + a^3x} - 5\sqrt[3]{8 + 8x} + a\sqrt[3]{27 + 27x} - \sqrt[3]{64 + 64x}$.

10. Izvrši naslednje množitve:

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$; c) $\sqrt{6a} \cdot \sqrt{8b} \cdot \sqrt{3ab}$;

d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt{10a^3b} \cdot \sqrt{20a^4b^5} \cdot \sqrt{50ab^4}$;

f) $\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy}$; g) $\sqrt[3]{\frac{4a}{9b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{3a}}$;

h) $\sqrt{\frac{21a^5b^5}{8c^3}} \cdot \sqrt{\frac{24ac^5}{7b}}$; i) $\sqrt{a + x} \cdot \sqrt{a - x}$;

k) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$; l) $\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$;

m) $\sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^6 - b^6}} \cdot \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a^6 - b^6}}$;

n) $\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}}$; *o)* $\sqrt[3]{x^2-y^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}$;

p) $\sqrt[4]{x^2-1}\cdot\sqrt{\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}}$.

11. $(2\sqrt{8}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}+4\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$.

12. $(5\sqrt{8}-2\sqrt{18}+3\sqrt{50}-3\sqrt{72}-5\sqrt{200})\cdot 3\sqrt{6}$.

13. $(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})-(4-2\sqrt{6})(2+3\sqrt{6})$.

14. $(8\sqrt{6}-2\sqrt{12}-\sqrt{8})(2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

15. $(3\sqrt{10}-5\sqrt{3}+\sqrt{15})(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{15})$.

16. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}\cdot\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}\,-$

$-\sqrt{\sqrt{a+2x^2}+\sqrt{a-2x^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{a+2x^2}-\sqrt{a-2x^2}}$.

17. $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+(5-2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$.

18. $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}-\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^2+\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2$.

19. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

20. Izvrši naslednje množitve:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{5}$; *b)* $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3}\cdot\sqrt[6]{z^5}$;

c) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b}$; *d)* $\sqrt[12]{a^{11}}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4}$;

e) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}}\cdot\sqrt[12]{\frac{b^{10}}{a^9}}$;

f) $(2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a^2b}+4\sqrt[4]{ab^2})\cdot\sqrt{ab}$;

g) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b}+3\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{6}+4a\sqrt[4]{b^3})\cdot\sqrt[4]{b^2}\cdot\sqrt[6]{a}$;

h) $(4\sqrt{5}-2\sqrt[3]{3})(3\sqrt{5}+8\sqrt[3]{3})$;

i) $(3\sqrt{7}+4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7}-2\sqrt[4]{3})$;

k) $(\sqrt[3]{ab}+3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt{ab}+4\sqrt{xy})$;

l) $(2-\sqrt{3}+\sqrt[3]{5})(2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{5})$.

21. Izvrši naslednje množitve:

a) $2 \cdot \sqrt{3}$; *b)* $3 \cdot \sqrt[3]{2}$; *c)* $2 \cdot \sqrt[4]{\tfrac{1}{8}}$; *d)* $5 \cdot \sqrt{0 \cdot 2}$;

e) $x \cdot \sqrt{\frac{a}{x}}$; *f)* $\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$; *g)* $\frac{ax}{by} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$;

h) $(a+b) \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; *i)* $\frac{a+1}{a-1} \cdot \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$;

k) $(x-y) \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}}$; *l)* $\frac{1}{x+y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{x-y}}$;

m) $(5-3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}$; *n)* $(2\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

o) $(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; *p)* $(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

22. *a)* $\sqrt{\frac{49}{64}}$; *b)* $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; *c)* $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$; *d)* $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27c^3}}$;

e) $\sqrt{\frac{8a^4b}{27c^4}}$; *f)* $5\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$; *g)* $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}}$.

23. $\sqrt{2\frac{1}{4}} + 3\sqrt{1\frac{7}{9}} - 2\sqrt{1\frac{9}{16}} + 2\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$.

24. $\sqrt[3]{\frac{120}{5}} + \sqrt[5]{\frac{224}{7}} - \sqrt{\frac{3}{2} : \frac{32}{3}} + \sqrt{1000 : \frac{5}{2}}$.

25. Izvrši naslednje delitve:

a) $15\sqrt[3]{81a^4b^5} : 5\sqrt[3]{3ab^2}$; *b)* $(10\sqrt{12} : 2\sqrt{18}) : 4\sqrt{1\tfrac{1}{2}}$;

c) $\sqrt[x]{a^{3x+2}} : \sqrt[x]{a^{2x+2}}$; *d)* $\sqrt{a^3-b^3} : \sqrt{a-b}$;

e) $\sqrt{a^2-a^2b^2} : \sqrt{1-b^2}$; *f)* $\sqrt[n]{\frac{x^{m+n}}{y^{m-n}}} : \sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^m}$;

g) $\sqrt[n]{\frac{x^{1-n}y^{2n-3}}{a^3b^4}} : \sqrt[n]{\frac{a^{2n-3}b^{n-4}}{x^{2n-1}y^{n+3}}}$;

h) $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b^{2n-1}}{a^2b^3}} : \sqrt[n]{\frac{b^{n-1}}{a^3}}$;

i) $\sqrt{\frac{2}{3}(9-m^2)} : \sqrt{\frac{27}{32}(3+m)}$;

k) $(\sqrt{30}-\sqrt{6}+\sqrt{3}):\sqrt{3}$;

l) $(6\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{2}+12\sqrt[3]{250}-15\sqrt[3]{128}):3\sqrt[3]{2}$;

m) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}-2\sqrt[3]{b^2}):(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b})$;

n) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}):(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$.

26. Izvrši naslednje delitve:

a) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}$; *b)* $\sqrt[6]{a^{2n+3}}:\sqrt[9]{a^{3n+2}}$;

c) $\sqrt[12]{\frac{ab^2}{c}}:\sqrt[8]{\frac{a^3b^5}{c^6}}:\sqrt[6]{\frac{c^5}{ab^2}}$; *d)* $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}):(\sqrt[4]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^7})$;

e) $\left(\sqrt{\frac{a^2x}{by^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ay}{bx^3}}\right):\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{by}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^2y}{ax^2}}\right)$;

f) $(14a\sqrt[6]{a^5}-10a^3\sqrt[4]{a}):2\sqrt{a^3}$;

g) $(4\sqrt[5]{a^6}-6\sqrt[6]{a^7}+8\sqrt{a^3}):2\sqrt[10]{a^7}$;

h) $(25\sqrt[3]{a^4}-9\sqrt[5]{a^6}):(5\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[5]{a^3})$;

i) $(2\sqrt[12]{b^{13}}-2\sqrt[4]{a^2b^3}-\sqrt[6]{a^{15}b^2}+\sqrt[3]{a^9}):(\sqrt[3]{b}-\sqrt{a})$;

k) $(6\sqrt{8}+8\sqrt[6]{9}-9\sqrt[6]{288}-6\sqrt[3]{18}):(3\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3})$.

27. Izvrši naslednje delitve:

a) $x:\sqrt{x}$; *b)* $a:\sqrt[3]{a}$; *c)* $16:\sqrt{2}$; *d)* $3:\sqrt[3]{3}$;

e) $(a+x):\sqrt{a^2-x^2}$; *f)* $(x+y):\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$;

g) $(x-y):\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}}$; *h)* $1:\sqrt{\frac{2a+b}{2a^3-3a^2b+b^3}}$;

i) $(a-b):(\sqrt{a}+\sqrt{b}$; *k)* $(x-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$;

l) $(x-y):(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$; *m)* $(3-5\sqrt[3]{25}):(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})$;

n) $(x+4\sqrt{xy}+3y):(\sqrt{x}+\sqrt{y})$;

o) $\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$;

p) $(a+\sqrt{a}+1):(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)$.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

28. *a)* $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{27a^3b^3}}\right)^5$; *b)* $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{32}}}\right)^3$;

c) $(\sqrt[5]{a^2b})^2 \cdot (\sqrt[5]{ab^2})^3$; *d)* $(2\sqrt[3]{2})^5 + (2\sqrt[6]{2^5})^2$;

e) $(\sqrt[x]{a^{x-2}})^n \cdot (\sqrt[x]{a^{2x+2}})^n$; *f)* $\sqrt{\left(\frac{a^2-4a+4}{a^2+4a+4}\right)^3}$;

g) $\sqrt[n]{a} \cdot (\sqrt[n]{a})^{5m-3n} \cdot (\sqrt[n]{a})^{4n-5m+1}$; *h)* $(\sqrt[7]{ab^2c^3})^4 \cdot (\sqrt[7]{a^2b^4c^6})^5$;

i) $b^2 \cdot \sqrt[m]{b} \cdot (\sqrt[m]{b})^{5x-4m} \cdot (\sqrt[m]{b})^{3m-5x-1}$;

k) $\left(\sqrt[13]{\frac{a^5b^8}{x^{11}y^{12}}}\right)^3 : \left(\sqrt[13]{\frac{a^3b^6}{x^5y^7}}\right)^2$.

29. $\sqrt{9^3} + \sqrt[3]{8^2} + \sqrt{(5\tfrac{4}{9})^3} + \sqrt[3]{(2\tfrac{10}{27})^2}$.

30. $(\sqrt[5]{210})^3 \cdot (\sqrt[5]{210})^2 + (\sqrt[17]{280})^9 \cdot (\sqrt[17]{280})^{-2} \cdot (\sqrt[17]{280})^{10}$.

31. *a)* $\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2$;

c) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2})^2$; *d)* $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} - \sqrt[6]{ab^2})^2$;

e) $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^4$; *f)* $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^3$;

g) $(a - 3\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a})^3$.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

32. *a)* $\sqrt[6]{a^{30}}$; *b)* $\sqrt[7]{a^{14}b^{35}}$; *c)* $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^{15}y^{20}}}$;

d) $\sqrt{a^{15}b^{21}}$; *e)* $\sqrt[3]{a^{16}b^{20}}$; *f)* $\sqrt[4]{x^{17}y^{25}z^{30}}$;

g) $\sqrt[6]{\frac{a^{16}b^{14}}{c^{27}}}$; *h)* $\sqrt[3]{a^{6x+9y}}$; *i)* $\sqrt[4]{\frac{a^{4x-8y}b^{12x-4}}{c^{4+16y}}}$;

k) $\sqrt[m+n]{a^{mx+nx}}$; *l)* $\sqrt[n]{a^{nx+y}}$; *m)* $\sqrt[2m]{a^{4m}x}$;

n) $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-1}c^{x-1}}}$; *o)* $\sqrt[m]{\frac{a^{2m+1}b^{3m+2}}{c^{4m-3}}}$; *p)* $\sqrt[n]{\frac{a^{1-n}b^{2-2n}}{c^{3-3n}}}$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

33. *a)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$; *b)* $\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}}$; *c)* $\sqrt{\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{125}}}$;

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5b^7}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{ab^{11}}}$; *e)* $3\sqrt{\sqrt[12]{a}} - 4\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}} + 5\sqrt[3]{\sqrt[8]{a}}$;

f) $\sqrt{a\sqrt{2a}}$; *g)* $\sqrt{m\sqrt[3]{3m}}$; *h)* $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; *i)* $\sqrt[7]{a\sqrt[5]{a^2}}$;

k) $3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; *l)* $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$; *m)* $\sqrt[6]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}}$;

n) $\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$; *o)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{1000}} + 2\sqrt{2\sqrt{2\frac{1}{2}}}$;

p) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} + 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$; *r)* $\sqrt[m]{a\sqrt{a^2}} \cdot (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt{a^3})$;

s) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; *t)* $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}} \cdot \sqrt{\frac{b\sqrt[3]{ab}}{a\sqrt{ab}}}$.

u) $\sqrt{\frac{1}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}}} \cdot \frac{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt[6]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}$.

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

34. Izračunaj vrednosti naslednjih korenskih izrazov:

a) $\sqrt[-3]{27}$; *b)* $\sqrt[-4]{16}$; *c)* $\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}$; *d)* $\sqrt[-2]{0 \cdot 25}$;

e) $\sqrt[-n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$; *f)* $\sqrt{a^3} : \sqrt[-2]{a}$; *g)* $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a}$;

h) $\sqrt[-n]{a} : \sqrt[n]{a}$; *i)* $\sqrt{a} : \sqrt[-1]{a}$; *k)* $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{9}}{x^{-6}y^3}}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

35. Izračunaj vrednosti naslednjih izrazov:

a) $8^{\frac{2}{3}}$; *b)* $25^{\frac{1}{2}}$; *c)* $27^{-\frac{4}{3}}$; *d)* $49^{0 \cdot 5}$; *e)* $64^{1 \cdot 5}$;

f) $(-0 \cdot 125)^{-\frac{2}{3}}$; *g)* $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$; *h)* $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49}$; *i)* $\sqrt[0 \cdot 4]{9}$;

k) $\sqrt[-0 \cdot 2]{2}$.

36. Izvrši naslednje račune:

a) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}$; *b)* $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{4}} + 9^{-\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}} \cdot 9$; *c)* $15a^{-\frac{3}{4}} : 3a^{\frac{5}{6}}$;

d) $6a^{\frac{3}{4}} \cdot 5a^{\frac{5}{6}} : 15a^{\frac{7}{12}}$; *e)* $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} + (a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$;

f) $\sqrt[\frac{1}{2}]{7} + \sqrt[\frac{3}{4}]{512}$; *g)* $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{1}{36}} + \sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}}$; *h)* $(x^{-\frac{2}{3}} : y^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}$.

37. *a)* $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}})$; *b)* $(2a - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}})$.

38. $(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - 2a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{3}{5}}b)$.

39. $(30x - 33x^{\frac{4}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}} + 25x^{\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{5}{3}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}})$.

40. $(x^{\frac{3}{2}} - 81y^{10}) : (x^{\frac{3}{8}} - 3y^{\frac{5}{2}})$.

K § 38.

1. Poišči naslednjim mnogočlenikom kvadratni koren:

a) $\frac{4}{9}x^4 + \frac{28}{33}x^2y + \frac{49}{121}y^2$. *b)* $\frac{x^2y^2}{16} - \frac{x^2yz}{10} + \frac{x^2z^2}{25}$.

c) $4a^4 - 12a^3 + 25a^2 - 24a + 16$.

d) $121x^6 - 198x^5 + 235x^4 - 236x^3 + 139x^2 - 70x + 25$.

e) $9x^{12} - 12x^{10} + 34x^8 - 26x^6 + 29x^4 - 10x^2 + 1$.

f) $0{\cdot}16x^4 - 2{\cdot}4x^3 - 0{\cdot}16x^2y + 9x^2 + 1{\cdot}2xy + 0{\cdot}04y^2$.

g) $a^4 - a^3b + \frac{19}{12}a^2b^2 - \frac{2}{3}ab^3 + \frac{4}{9}b^4$.

h) $5\frac{4}{9}x^2 - 7xy - 15\frac{1}{6}xz + 2\frac{1}{4}y^2 + 9\frac{3}{4}yz + 10\frac{9}{16}z^2$.

i) $\frac{4x^2}{9y^4} - \frac{4xz}{3y^2} + 5z^2 + \frac{27y^6z^5}{x^3} + \frac{81y^8z^6}{4x^4}$.

k) $\frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25$.

l) $25x^{2n-4} - 60x^{2n-2} + 106x^{2n} - 84x^{2n+2} + 49x^{2n+4}$.

m) $4a^2b^{-6} - 12ab^{-5} + 25b^{-4} - 24a^{-1}b^{-3} + 16a^{-2}b^{-2}$.

n) $a^{4m-1} - 4a^{3m-3}b^{-m} + 2a^{2m-2}b^{-2m} + 4a^{m-1}b^{-3m} + b^{-4m}$.

o) $a^2 - 4a\sqrt{ab} - 2ab + 12b\sqrt{ab} + 9b^2$.

p) $\sqrt[5]{a^4} - 4\sqrt[15]{a^{11}} + 4\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[5]{a^2} - 4\sqrt[3]{a} + 1$.

r) $a^3 - 4a^2b^{\frac{1}{4}} + 4ab^{\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}} + 12a^{\frac{1}{2}}b + 9b^{\frac{3}{2}}$.

2. Koreni naslednja dekadična števila z 2:

a) 5041, *b)* 49284, *c)* 163216, *d)* 820836.
e) 53993104, *f)* 1406·25, *g)* 532·2249,
h) 0·97535376, *i)* 0·00178929, *k)* 0·06091024.

3. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. **4.** $\sqrt[4]{362673936}$. **5.** $\sqrt[8]{1475789056}$.

6. $\sqrt{\frac{76176}{20484676}}$. **7.** $\sqrt{1031\frac{10}{81}}$. **8.** $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.

9. Izračunaj naslednjim številom kvadratni koren na 6 veljavnih številk:

a) 2·63, *b)* 6·584, *c)* 1735, *d)* $\frac{2}{3}$, *e)* $18\frac{6}{7}$,
f) $4\frac{1}{12}$, *g)* 2, *h)* 3, *i)* 5.

10. Določi naslednje korene na 5 veljavnih številk:

a) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *b)* $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, *c)* $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

11. Določi naslednjim številom kvadratne korene tako natanko kakor mogoče:

a) 0·1907.., *b)* 335·779.., *c)* 1·84235..

12. Poišči naslednjim mnogočlenikom tretji koren:

a) $\frac{x^6}{8} - \frac{3}{2}x^4y^2 + 6x^2y^4 - 8y^6$.

b) $\frac{27}{64}x^3 - \frac{45}{32}x^2y + \frac{25}{16}xy^2 - \frac{125}{216}y^3$.

c) $8a^6 - 12a^5 + 18a^4 - 13a^3 + 9a^2 - 3a + 1$.

d) $343 - 735x + 819x^2 - 545x^3 + 234x^4 - 60x^5 + 8x^6$.

e) $64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 +$
$+ 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6$.

f) $\frac{a^3}{64} + \frac{3a^2}{8} + \frac{45a}{16} + 5 - \frac{45}{4a} + \frac{6}{a^2} - \frac{1}{a^3}$.

g) $\frac{27x^6}{8a^6} - \frac{27x^5}{2a^5} + \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{10x^3}{a^3} - \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{6x}{a} - 1$.

h) $8x^3 - 36x^2 + 66x - 63 + 33x^{-1} - 9x^{-2} + x^{-3}$.

i) $x^{6m} - x^{5m} + \frac{5}{27}x^{3m} - \frac{1}{81}x^m - \frac{1}{729}$.

k) $a^{-6m+12} - 6a^{-7m+3} + 12a^{-8m-6} - 8a^{-9m-15}$.

l) $8a - 60\sqrt[3]{a^2b} + 150\sqrt[3]{ab^2} - 125b$.

m) $x^3 - 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{2}{3}} - 7 + 6x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2}$.

13. Koreni naslednja dekadična števila s 3:

a) 9261, *b)* 12167, *c)* 50653, *d)* 357911,
e) 614125, *f)* 4492125, *g)* 347428927,
h) 14·348907, *i)* 0·087528384, *k)* 78·402752.

14. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$. **15.** $\sqrt[6]{1126162419264}$.

16. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. **17.** $\sqrt[3]{21\frac{119}{125}}$. **18.** $\sqrt[3]{5207\frac{19}{27}}$.

19. Izračunaj naslednjim številom kubični koren na štiri veljavne številke:

a) 2, *b)* 3, *c)* 2136, *d)* 1·190275,
e) $\frac{5}{6}$, *f)* $\frac{37}{70}$, *g)* $8\frac{7}{12}$, *h)* $15\frac{4}{9}$.

20. Določi naslednjim številom kubične korene tako natanko kakor mogoče:

a) 13·279.., *b)* 2·618379.., *c)* $\frac{4\pi}{3}$.

K § 39.

1. Izrazi naslednje ulomke z racijonalnim imenovalcem:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{5}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{a^2b}}, \quad \frac{\sqrt[4]{8x}}{\sqrt{2\sqrt{2x}}};$

b) $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}, \quad \frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}}, \quad \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{8}}, \quad \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}};$

c) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}, \quad \frac{4x^2-1}{\sqrt{2x+1}}, \quad \frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2-x^2}};$

d) $\frac{1}{2\sqrt{2a}\cdot\sqrt[3]{2b}}, \quad \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}, \quad \frac{a^4-b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}};$

e) $\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{a-b}}, \quad \frac{a-b}{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}, \quad \frac{ab}{\sqrt[n]{a^{n-2}b^{n-4}}}.$

2. Odpravi v naslednjih ulomkih iracijonalni imenovalec:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}+5}$, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

b) $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$, $\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b}$, $\frac{\sqrt{xy}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$, $\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}$;

c) $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$;

$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$, $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$, $\sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}}$;

e) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}}$, $\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}$, $\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}}$,

$\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}$.

3. Odpravi korene v imenovalcih naslednjih izrazov:

a) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{4-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$;

b) $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$,

$\frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}$, $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}$, $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$;

d) $\frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$, $\frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}$, $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$, $\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}$.

4. Pretvori naslednje binome v samo en korenski izraz:

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$, $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$;

b) $\sqrt{8+\sqrt{39}}-\sqrt{8-\sqrt{39}}$, $\sqrt{8+\sqrt{28}}+\sqrt{8-\sqrt{28}}$;

c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$,

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}\pm\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

d) $\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7}}\pm\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$,

$\sqrt{\frac{4+\sqrt{10}}{2}}\pm\sqrt{\frac{4-\sqrt{10}}{2}}$;

e) $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}\pm\sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$,

$\sqrt{x+\sqrt{ax-\frac{a^2}{4}}}\pm\sqrt{x-\sqrt{ax-\frac{a^2}{4}}}$;

f) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\pm\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$,

$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$.

5. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $\sqrt{12-8\sqrt{2}}$, $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$;

b) $\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}$, $\sqrt{18\pm8\sqrt{2}}$, $\sqrt{7\sqrt{2}\pm4\sqrt{6}}$,

$\sqrt{2\sqrt{5}\pm\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{4a-2\sqrt{4a^2-9b^2}}$, $\sqrt{2a+3b+\sqrt{24ab}}$,

$\sqrt{8a^2-b^2+4a\sqrt{4a^2-b^2}}$;

d) $\sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}$, $\sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\sqrt{a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}}$.

K § 40.

Razreši naslednje iracijonalne enačbe:

1. $5-\sqrt{31-2x}=0.$ 2. $19-4\sqrt{2x+3}=7.$

3. $3\sqrt{\frac{4x-2}{3x+2}}=4.$ 4. $\sqrt{41-20\sqrt{\frac{9x+1}{4x-3}}}=3.$

5. $\sqrt[3]{20-3\sqrt{5x+1}}=2.$ 6. $2\sqrt[3]{x-3}=3\sqrt[3]{x-27}.$

7. $2\sqrt[3]{25+\sqrt{x}}=\sqrt[3]{200+6\sqrt{5x-29}}.$

8. $\sqrt[4]{x-0{\cdot}9375}=0{\cdot}5.$ 9. $\sqrt{x+1}-\frac{2x-4}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}.$

10. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+17}=\frac{60}{\sqrt{x+17}}.$

11. $\sqrt{27x+1}-\sqrt{3x-3}=\frac{18x+5}{\sqrt{27x+1}}.$

12. $\sqrt{8x-7}-\frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+3}.$

13. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-4)=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2).$

14. $(\sqrt{x}+1):(\sqrt{x}+4)=(\sqrt{x}+3):(\sqrt{x}+8).$

15. $(7-2\sqrt{x}):(10+\sqrt{x})=(9-4\sqrt{x}):2\sqrt{x}.$

16. $\sqrt{x^2+3x+7}=1+\sqrt{x^2+x+4}.$

17. $\sqrt{2x-3}=8-\sqrt{2x+13}.$

18. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}-\sqrt{4x+5}=0.$

19. $\sqrt{16x+9}-\sqrt{x-1}-\sqrt{9x+10}=0.$

20. $\sqrt{4x+2}=2\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x-10}.$

21. $2\sqrt{x+6}+\sqrt{x+33}=3\sqrt{x+13}.$

22. $\sqrt{2x-3+\sqrt{5x+14}}+\sqrt{2x-3-\sqrt{5x+14}}=8.$

23. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}.$

24. $\sqrt{ax+b}=\sqrt{ax-b}+\sqrt{2b}.$

25. $\sqrt{x-3b}-\sqrt{x-3a}=\sqrt{a-b}.$

26. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}.$

27. $x - 2a - \sqrt{x^2 - b^2} = (x - a)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right)$.

28. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 13$
$7\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 2.$

29. $2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3$
$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5.$

30. $\sqrt{x-y} + \sqrt{2y-x} = 8.$
$3\sqrt{x-y} - 2\sqrt{2y-x} = -1.$

31. $8\sqrt{2x-3y} - 3\sqrt{3x+7y} = -10.$
$7\sqrt{2x-3y} + 5\sqrt{3x+7y} = 37.$

32. $\frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2$
$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1.$

33. $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6$
$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1.$

34. $\frac{11}{3\sqrt{x+5}} + \frac{1}{4\sqrt{y+4}} = 1$
$\frac{5}{\sqrt{x+5}} - \frac{13}{3\sqrt{y+4}} = -\frac{7}{36}.$

35. $\sqrt{\frac{x}{y} + 1} = 1 + \sqrt{\frac{x}{y} - 1}$
$2\sqrt{x+y} = \sqrt{3x + 4y + 5}.$

Razreši naslednje eksponentne enačbe:

36. $\sqrt[4]{a^{3x+1}} = \sqrt{a^{x+1}}$.

37. $a^{2x} : \sqrt[3]{a^{x-1}} = a^{x-1} \cdot \sqrt{a^{3x-4}}$.

38. $a^{1-x} \cdot \sqrt{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{x-3}} \cdot \sqrt[6]{a^{5x}} = 1.$

39. $\sqrt[x+1]{a^{20}} : a^2 = a^2.$

40. $\sqrt{a^{5-3x}} : \sqrt[3]{a^{5-6x}} = a.$

41. $4096^x \cdot 0{\cdot}5 = 4^{x+\frac{1}{6}}$.

42. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x+1}{7}}$.

43. $0{\cdot}25^{23} = \sqrt[3]{4^{5x-3}} \cdot 0{\cdot}125^{6x}$.

44. $64^{\frac{x+2}{8x-5}} = \sqrt[4]{0{\cdot}5} \cdot \sqrt[x+3]{2^{x+24}}$.

45. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6.$

46. $2^{3x-4\frac{1}{2}} + 3^{2x-4} = 3^{2x-3} + 2^{3x-6\frac{1}{2}}$.

47. $a^{2x-2} - a^{2x-3} = (a-1)^{x-\frac{1}{2}}$.

48. $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[y]{8} = \frac{1}{2}$
$\sqrt[4x]{3} \cdot \sqrt[2y]{27} = 1.$

49. $\sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1$
$\sqrt[4]{m^{3x-3}} \cdot \sqrt[3]{m^{5y-1}} = \sqrt[3]{m^{23}}.$

50. $\sqrt[3x]{a} \cdot \sqrt[2y]{a} = 1 : \sqrt{a}$
$\sqrt[x]{b^2} = \sqrt[4y]{b^7} \cdot b^{13} \cdot \sqrt[4]{b^3}.$

51. $a^x : a^3 = \sqrt[3]{(a^y \cdot a^2)^2}$
$(a^x \cdot a)^2 = (a^y : a^2)^3.$

K § 41.

1. Skrči naslednje številne izraze:

a) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-16} - 2\sqrt{-36} + \sqrt{-100} - 5\sqrt{-49}$,

b) $2\sqrt{-2} + 3\sqrt{-8} - \sqrt{-18} - 4\sqrt{-50} + 5\sqrt{-72} -$
$- 2\sqrt{-98}$,

c) $3\sqrt{-64} - 7\sqrt{-25} + \sqrt{-12\tfrac{1}{4}} - 2\sqrt{-2\tfrac{1}{4}} + \sqrt{-\tfrac{25}{36}}$,

d) $3\sqrt{-4\tfrac{1}{6}} + 2\sqrt{-7\tfrac{1}{5}} - 5\sqrt{-\tfrac{3}{2}} - 6\sqrt{-\tfrac{1}{5}} + \tfrac{3}{4}\sqrt{-54} +$
$+ \tfrac{2}{3}\sqrt{-75}$,

e) $6a\sqrt{-63ab^3} + 3\sqrt{-112a^3b^3} + 2ab\sqrt{-343ab} -$
$- 5\sqrt{-28a^3b}$,

f) $3a^3\sqrt{-12ab^5} + 2a^2b^2\sqrt{-27a^3b} - 5\sqrt{-48a^7b^5} -$
$- 4a^2b\sqrt{-75a^3b^3}$.

2. $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-40} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-4}$.

3. $(2\sqrt{-27} + \sqrt{-75} - 5\sqrt{-8}) \cdot 2\sqrt{-6}$.

4. $(-3\sqrt{-5} + 4\sqrt{-8} - 3\sqrt{-7} + 5\sqrt{-9}) \cdot (-4\sqrt{-3})$.

5. $(2\sqrt{-3} + \sqrt{-5})(-2\sqrt{-3} - \sqrt{-5})$.

6. $(3\sqrt{-3} + 5\sqrt{-5})(5\sqrt{-5} + 3\sqrt{-3})$.

7. $(6\sqrt{-7} - 3\sqrt{-9})(6\sqrt{-7} + 3\sqrt{-9})$.

8. $(5\sqrt{-2} + 6\sqrt{-3})^2 + (2\sqrt{-8} - 5\sqrt{-3})^2$.

9. $(5\sqrt{-2} + 4\sqrt{-3})^2 - (2\sqrt{-6} - 3\sqrt{-4})^2$.

10. $(5\sqrt{-2} + 2\sqrt{-3})^3 \pm (2\sqrt{-3} - 3\sqrt{-2})^3$.

11. $\tfrac{3}{4}\sqrt{-15} : \tfrac{4}{5}\sqrt{3}$.

12. $\tfrac{7}{2}\sqrt{6} : \tfrac{2}{3}\sqrt{-5}$.

13. $\tfrac{4}{3}\sqrt{-15} : \tfrac{3}{2}\sqrt{-5}$.

14. $\tfrac{2}{3}\sqrt{-48} : \tfrac{4}{3}\sqrt{-3}$.

15. $(12\sqrt{-6} - 3\sqrt{-3} + 15\sqrt{-9} - 21\sqrt{-15}) : 3\sqrt{-3}$.

16. $(26\sqrt{-20} + 39\sqrt{-35} - 65\sqrt{-45}) : 13\sqrt{-5}$.

17. $\left(15\sqrt{-\frac{a^2x}{by^2}} - 12\sqrt{-\frac{ax^2}{by^2}} + 18\sqrt{-\frac{a^2x}{b^2y}} - \right.$
$\left. - 21\sqrt{-\frac{ax^2}{b^2y}}\right) : 12\sqrt{-\frac{ax}{by}}$.

---

18. $(1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-49})$.

19. $(\sqrt{-6} + i\sqrt{5} - 7) \pm (2\sqrt{-24} - \sqrt{-75} + 11)$.

20. $(3 + 2i)(3 - 2i) + (8 + \sqrt{-3})(8 - \sqrt{-3})$.

21. $(5 - 2\sqrt{-3})(5 + 2\sqrt{-3}) - (4 + \sqrt{-2})(4 - \sqrt{-2})$.

22. $(2\sqrt{3} - \sqrt{-5})(4\sqrt{3} - \sqrt{-4})(14 + 8\sqrt{-15})$.

23. $(6\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} - 4\sqrt{5})(6\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} + 4\sqrt{5})$.

24. $(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}) - (x - \sqrt{-2})(x + \sqrt{-2})$.

25. $(3\sqrt{-4} - 2\sqrt{-12} + \sqrt{6} - 9) : (-3\sqrt{-2})$.

26. $(12 - 2\sqrt{-3} + \sqrt{6}) : (4 - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-3})$.

27. $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3$. 28. $(-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3})^3$.

29. $\left(\frac{2 + \sqrt{-3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{2 - \sqrt{-3}}{3}\right)^4$.

30. $\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{1 - 2\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}\right) \cdot 6i$.

31. Izrazi naslednje ulomke z racijonalnim imenovalcem:

a) $\frac{5}{2i}$, *b)* $\frac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}$, *c)* $\frac{10}{\sqrt{-25}}$, *d)* $\frac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}$,

e) $\frac{28\sqrt{-12}}{3\sqrt{-7}}$, *f)* $\frac{\sqrt{-3} + \sqrt{-2}}{\sqrt{-3} - \sqrt{-2}}$, *g)* $\frac{4\sqrt{-3} - 2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-4} - 4\sqrt{-2}}$,

h) $\frac{10}{2 - \sqrt{-8}}$, *i)* $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{-2}}$, *k)* $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{-3}}{\sqrt{3} - \sqrt{-2}}$.

32. Pretvori naslednje binome v en korenski izraz:

a) $\sqrt{3+\sqrt{-16}} \pm \sqrt{3-\sqrt{-16}}$,

b) $\sqrt{2+\sqrt{-5}} \pm \sqrt{2-\sqrt{-5}}$,

c) $\sqrt{-3+4i} \pm \sqrt{-3-4i}$,

d) $\sqrt{7+\sqrt{-15}} + \sqrt{7-\sqrt{-15}}$.

33. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

a) $\sqrt{11-60i}$, b) $\sqrt{-3+4i}$, c) $\sqrt{6+8\sqrt{-10}}$,

d) $\sqrt{-16+30i}$, e) $\sqrt{-2 \pm 4\sqrt{-6}}$, f) $\sqrt{9-2i\sqrt{3}}$,

g) $\sqrt{\pm i} = \sqrt{0 \pm i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{-2})$.

K § 42.

Uredi naslednje enačbe:

1. $(9+x)(7-x)+(9-x)(7+x) = 76$.

2. $(5x^2-1)^2-(2+3x^2)^2 = (3-4x^2)^2$.

3. $\frac{x+2}{10x^2-5x} = \frac{3}{x} + \frac{16x}{4x^2-1}$. 4. $\frac{5x+4}{2x+1} + \frac{x-1}{3x-4} - 3 = 0$.

5. $\frac{2}{x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{33}{x^3-8}$.

6. $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{2}{15x} - \frac{1}{x^2+x}$.

7. $\frac{2x^4+3x^2}{2x^2-1} - 1 = \frac{10x^4-4}{6x^2-3} - \frac{2x^2-1}{3}$.

8. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{2ax}{a^2-x^2}$. 9. $\frac{a-x}{b+x} - \frac{b+x}{a-x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.

10. $\frac{3a+5b}{2(a+b)} - \frac{a-b}{a-x} = \frac{b-x}{a+b}$. 11. $\frac{x-a}{2b} - \frac{x-2b}{x-b} = \frac{b}{a+b}$.

12. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-7} = 1$.

13. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a}$. 14. $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2x}$.

15. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$.

16. $\sqrt{x+\sqrt{10}} + \sqrt{x-\sqrt{10}} - \sqrt{6x-11} = 0$.

17. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-6}+\sqrt{2x-6}=0.$

18. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-3a}=0.$

19. $\sqrt{a(x-b)}-\sqrt{b(x-a)}-\sqrt{(a-b)(x-2b)}=0.$

20. $\sqrt{3(x-2)}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3(x+1)}.$

21. $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}.$

22. $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}.$

23. $\dfrac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\dfrac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x.$

24. $\sqrt{x^2+a^2-2a\sqrt{x^2-b^2}}+x=\dfrac{ax}{\sqrt{x^2-b^2}}.$

Razreši naslednje enačbe:

25. $x^2+15x+56=0.$ 26. $x^2-13x-140=0.$

27. $5x^2+7x=24.$ 28. $12x^2=20x-3.$

29. $16x^2-24x+11=0.$ 30. $24x^2-14x=3.$

31. $(12+x)(x-3)=(12-x)(x+3).$

32. $(x+3)^2-4x^2=(x+1)(4x-5).$

33. $(5+x)^2-11(5+x)(4-x)+24(4-x)^2=0.$

34. $(x+1):(x+3)=(x+11):(3x-3).$

35. $(x+\frac{3}{4})(x+\frac{1}{2})-(4x+\frac{1}{2})(4x-\frac{1}{2})+1=0.$

36. $\dfrac{3x-4}{x-4}-9=\dfrac{2-x}{2}.$ 37. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{8}{3}.$

38. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{5}{2}.$ 39. $\dfrac{5}{x}-\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{12}{x+2}.$

40. $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2x-3}{3x-4}=\dfrac{1}{5}.$ 41. $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{10}{x-2}=\dfrac{7}{x-3}.$

42. $\dfrac{3x^2-3}{x+9}+\dfrac{6x^2-4}{2x-1}=6x-6.$

43. $\dfrac{8x+5}{x^3-1}=\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}.$

44. $\dfrac{4x+2}{x^2-2x+4}-\dfrac{11x+7}{x^2+4x+4}=\dfrac{77-7x^2}{x^3+8}.$

45. $\left(\dfrac{8+x}{4-x}\right)^2=8\left(\dfrac{8+x}{4-x}\right)-15.$ 46. $\left(\dfrac{3+4x}{5x}\right)^2+\dfrac{6(3+4x)}{5x}=7.$

47. $\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)^2 - \frac{9(4-3x)}{2-x} + 20 = 0.$

48. $\left(\frac{6x}{4-x}\right)^2 + \frac{15x}{x-4} + 1 = 0.$ 49. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$

50. $x(x + 2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}.$ 51. $x + 7\sqrt{x} = 30.$

52. $2x - 3\sqrt{x-1} = 4.$ 53. $x - 10 - 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 0.$

54. $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4.$ 55. $2 + \sqrt{2x+8} = 2\sqrt{x+5}.$

56. $\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-25} = 2.$

57. $2\sqrt{3x+1} - 3\sqrt{2x-1} = 1.$ 58. $\sqrt{7x-13} - \sqrt{5x+1} = 12.$

59. $\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+2} = x.$ 60. $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{x}.$

61. $\sqrt{x + \sqrt{10}} + \sqrt{x - \sqrt{10}} = \sqrt{6x-11}.$

62. $3\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2\sqrt{2x+2}.$

63. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 0.$

64. $\sqrt{5 + \sqrt{x}} + \sqrt{7 + \sqrt{x}} = \sqrt{2(6 + \sqrt{x})}.$

65. $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}.$

66. $\sqrt{3x+6} - \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 0.$

67. $\sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x} = 2.$

68. $\sqrt[3]{x + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{x - \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$ 69. $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1.$

70. $\sqrt[4]{(1+x)^2} - \sqrt[4]{(1-x)^2} = \sqrt[4]{1-x^2}.$

---

71. $x^2 + 2ax - 2ab - b^2 = 0.$

72. $x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4.$

73. $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$ 74. $x^2 - (a-b)x - ab = 0.$

75. $x^2 - (a^2+b^2)x + a^3b - ab^3 = 0.$

76. $(a-x)^2 + (b-x)^2 = (a-b)^2.$

77. $abx^2 - (a^2+b^2)x + 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0.$

78. $10abx^2 - (25a^2 + 4b^2)x + 25a^2 - 4b^2 = 0.$

79. $(ax+b)^2 + (a-bx)(ax-b) = x(a+b)^2.$

80. $2(x^2+1)(a^2-b^2) - 5x(a^2-b^2) + 3ab(x^2-1) = 0.$

81. $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=0.$ 82. $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}.$

83. $\frac{a^2-b^2}{2x}=\frac{a^2+b^2}{x^2+1}.$ 84. $\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$

85. $\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{a}{b}.$ 86. $\frac{2x-a}{4x+5a}=\frac{x+6a}{2x}+7.$

87. $\frac{a+b}{x-a+b}+(a-b)(a-b-x)=0.$

88. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}.$

89. $a\sqrt{x+b^2}+b\sqrt{x+a^2}=2ab.$

90. $\sqrt{a^2+x\sqrt{2x^2-a^2}}=a+x.$

91. $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{8a}{3\sqrt{x}}.$

92. $\sqrt{\frac{b+x}{b}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{a-x}{a}}.$ 93. $\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}+\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}=1.$

94. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}=0.$

95. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{a}{b}.$

96. $\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}.$

97. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}.$

98. $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{3(a+b)}.$

Uporabne naloge.

99. Produkt iz tretjega in četrtega dela nekega števila znaša 108; koliko je število?

100. Katero število je treba za 5 povečati in za 5 zmanjšati, da znašata kvadrata dobljenih zneskov 178?

101. Poišči tri števila, ki so si kakor $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$ in katerih kvadrati znašajo skupaj 4525!

102. Poišči število, katerega dvanajsterokratnik je za 45 manjši od kvadrata dotičnega števila!

103. Pri dvoštevilčnem številu je številka na desni za 3 manjša od številke na levi; če pomnožiš to število s številko na levi, dobiš 42kratno številčno vsoto dotičnega števila. Katero je to število?

104. Ako zameniš pri dvoštevilčnem številu, katerega številčna vsota znaša 5, številki med seboj ter pomnožiš obe števili, najdeš produkt 574. Katero je število?

105. Številčna vsota dvoštevilčnega števila znaša 13; ako deliš to število s produktom obeh številk, dobiš kvocijent 2 in ostanek 5. Katero je to število?

106. Vrednost nekega ulomka znaša $\frac{1}{3}$. Če povečaš števec in imenovalec za 12, dobiš ulomek, ki je 5krat večji od onega ulomka, ki ga najdeš, če zmanjšaš števec in imenovalec za 6. Kako se glasi ulomek?

107. Dve pozitivni celi števili sta si kakor 3 : 2; če zmanjšaš prvo število za 1 in povečaš drugo za 2, znaša vsota njunih kvadratov 2581. Kateri sta dotični števili?

108. Več oseb napravi skupno potovanje, za katero je treba 432 K plačati. Ker sta bili 2 osebi prosti vseh stroškov, je morala vsaka izmed ostalih oseb za 3 K več plačati. Koliko je bilo oseb?

109. Oče zapusti svojim otrokom 14400 K, katere je treba razdeliti na enake deleže. Kmalu po očetovi smrti umrjeta 2 otroka in vsak izmed ostalih otrok dobi potem za 1200 K več, nego bi bil dobil sprva. Koliko otrok je bilo?

110. *A* proda blago za 96 K in ima toliko odstotkov dobička, kolikor kron je plačal za blago. Za koliko je kupil blago?

111. Nekdo ima 5600 K kapitala; od obresti prvega leta porabi 152 K in ostanek priklopi h kapitalu. V drugem letu dobi 256·5 K obresti. Po koliko procentov je naložen kapital?

112. Zidarja *A* in *B* sezidata zid v 18 dneh. V koliko dneh bi dovršil *A* sam delo, če *B* potrebuje za isto delo 15 dni več nego *A*?

113. Cevi *A* in *B* napolnita neko posodo v $2\frac{2}{3}$ ure; cev *A* sama napolni posodo 4 ure poprej ko cev *B*. V katerem času napolni vsaka cev sama dotično posodo?

114. Dve telesi se pomikata enako hitro po krakih pravega kota od vrha proč. Prvo telo se je začelo pomikati 7 sekund poprej ko drugo telo in je po 12 sekundah 65 *m* oddaljeno od drugega telesa. Kako hitro se pomikata telesi?

115. Dve telesi se začneta istodobno pomikati po krakih pravega kota od vrha proč in pretečeta oziroma po 4·8 *m* in 1·4 *m* vsako sekundo. Po koliko sekundah sta telesi 100 *m* narazen?

116. Po krakih pravega kota se pomikata dve telesi proti vrhu in pretečeta oziroma po 5 *m* in 3·6 *m* vsako sekundo. Po koliko sekundah sta telesi 26 *m* narazen, če sta bili v začetku po 60 *m* oddaljeni od kotovega vrha?

117. Od krajev A in B, ki sta 152 *km* narazen, se peljata istodobno voza drug proti drugemu in se srečata po 12 urah. V koliko minutah preteče prvi voz 1 *km*, če rabi drugi voz za 1 *km* eno minuto manj ko prvi?

118. Dva kolesarja se peljata istodobno od krajev A in B drug proti drugemu. Ko se po 78 minutah srečata, je prvi kolesar 1560 *m* več prevozil ko drugi in pride $12\frac{1}{2}$ minute poprej v kraj B ko drugi kolesar v kraj A. Kako daleč sta kraja A in B narazen?

119. Na 3000 *m* dolgi cesti se zavrti zadnje kolo nekega voza 200 krat manj ko sprednje kolo, katerega obseg je za $\frac{1}{2}$ *m* manjši od obsega zadnjega kolesa; kolik je obseg zadnjega kolesa?

120. Ako podaljšaš eno stranico nekega kvadrata za $a = 11\frac{1}{2}$ *cm* in zmanjšaš stikajočo se stranico za istotoliko, dobiš pravokotnik s ploščino $p = 860$ cm^2; kolika je kvadratova stranica?

121. Pri pravokotniku meri osnovnica 118 *cm* in višina 59 *cm*. Ako zmanjšaš višino za nekoliko centimetrov in podaljšaš osnovnico za dvakrat toliko centimetrov, se zmanjša ploščina za 3698 cm^2. Kolike so stranice novega pravokotnika?

122. V pravokotniku se osnovnica in višina razlikujeta za 23 *m* in diagonala meri 65 *m*; kolike so stranice?

123. V pravokotnem trikotniku meri ena kateta $4\frac{4}{9}$ krat toliko ko druga kateta, hipotenuza pa 82 *m*; kolika je vsaka kateta?

124. V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 25 m in njej pripadajoča višina 6·72 m; kolika sta hipotenuzna odseka in koliki kateti?

125. Ploščina poševnokotnega trikotnika znaša $p = 360\ cm^2$ in dve stranici merita 29 cm in 25 cm; kolika je tretja stranica?

126. Kolik je polumer kroga, če je neka tetiva za 2 cm manjša od premera in njena središčna razdalja $= \frac{5}{13}$ polumera?

127. Za koliko je treba krogov polumer $r = 7\ cm$ podaljšati, da bode tangenta, katero narišeš iz krajišča tega podaljška na krog, enaka $t = 24\ cm$?

128. Površje pokončnega valja znaša $P = 706·86..\ cm^2$ in višina $v = 8\ cm$; kolik je polumer osnovne ploskve?

129. Prostornina 7 cm visokega valja se poveča za 2552 cm^3, če povečaš polumer osnovne ploskve za 2 cm in višino za 3·5 cm; kolik je polumer osnovne ploskve? ($\pi = \frac{22}{7}$.)

130. Površje pokončnega stožca znaša $P = 1385·44..\ cm^2$ in stranica $s = 40\ cm$; kolik je polumer osnovne ploskve?

131. Prostornina stožca postane $2\frac{1}{2}$ krat večja, če povečaš polumer osnovne ploskve za 8 cm; kolik je prvotni polumer?

132. Ako povečaš polumer krogle za $10\frac{1}{2}$ cm, se prostornina poveča za 92169 cm^3; kolik je prvotni kroglin polumer? ($\pi = \frac{22}{7}$).

133. Določi enačbe, ki imajo naslednje korene:

a) $+\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$; *b)* $+3\sqrt{2}$ in $-3\sqrt{2}$;

c) 10 in -1; *d)* -9 in -13;

e) $2\frac{1}{3}$ in $-\frac{2}{3}$; *f)* 0·7 in $-2·4$;

g) $1+\sqrt{2}$ in $1-\sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ in $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$;

i) $2a+3b\sqrt{2}$ in $2a-3b\sqrt{2}$; *k)* $\frac{a+b}{2}$ in $\frac{a-b}{2}$;

l) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ in $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$;

m) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$ in $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$.

K § 43.

1. $x^3 = 1.$ **2.** $x^3 = -1.$ **3.** $x^3 + a^3 = 0.$

4. $x^3 - a^3 = 0.$ **5.** $8x^3 + 27 = 0.$ **6.** $64x^3 - 125 = 0.$

7. $x^6 - 1 = 0.$ **8.** $3x^6 - 2187 = 0.$ **9.** $64x^6 = 15625.$

10. $(7 - x)^3 - (7 + x)^3 = 0.$ **11.** $(2x - 5)^3 + (5x - 2)^3 = 0.$

12. $(2x - 3)^3 + (x + 9)^3 = 0.$

13. $(x - a)^3 - (b - x)^3 = 0.$ **14.** $x(x^2 - 8) = 8(1 - x).$

15. $x^3 - 3x^2 = 10x.$ **16.** $x^3 + 3x^2 - (x + 3)(2x + 15) = 0.$

17. $x^3 - 8x^2 + (x - 8)^2 + 6x(x - 8) = 0.$

18. $x^3 - a^3 = a^2(a - x).$ **19.** $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 240.$

20. $x^4 - 81 = 0.$ **21.** $x^4 + 64 = 0.$

22. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = 9(x^2 - 1)^2 - 65.$ **23.** $\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{36}.$

---

24. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$ **25.** $6x^4 - 11x^2 = 35.$

26. $\frac{4x^4}{3} - \frac{2x^2}{3} = \frac{3}{64}.$ **27.** $(9x^2)^2 - 41(3x)^2 + 400 = 0.$

28. $x^6 + 23x^3 - 108 = 0.$ **29.** $x^6 + 27 = 28x^3.$

30. $3x^6 - 7x^3 = 6.$ **31.** $2x^3 - 5x\sqrt{x} = 1323.$

32. $3x^3 - 4x\sqrt{x} = 160.$ **33.** $6x^{-4} - 5x^{-2} + 1 = 0.$

34. $(x - 2)^2 + \left(\frac{1}{x - 2}\right)^2 = \frac{82}{9}.$

35. $(3 + x)^2 + \left(\frac{1}{3 + x}\right)^2 = 100{\cdot}01.$

36. $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 4.$ **37.** $\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \frac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \frac{26}{5}.$

38. $\frac{x^2 + 3}{17 - x^2} = \frac{1}{x^2 + 3}.$ **39.** $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

40. $(x^2 - 3)^2 - 7(x^2 - 3) + 6 = 0.$ **41.** $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$

42. $(x + \sqrt{x})^4 + (x + \sqrt{x})^2 = 1332.$ **43.** $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

44. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$ **45.** $2\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{4x^2} = 2.$

46. $4x + 5\sqrt[5]{x} = 21\sqrt[5]{x^3}.$ **47.** $\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$

48. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$

49. $2x^2 + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 3.$

50. $(x^2 + 3x + 1)^2 - 12(x^2 + 3x) = 1.$
51. $(x^2 + 6x + 8)^2 - 3x^2 - 18x = 24.$
52. $(3x^2 + x - 2)^2 - 30x^2 - 10x + 36 = 0.$
53. $\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 3x - 3} = 11.$
54. $4x^2 + 6x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 60.$
55. $(x - 5)^2 + \sqrt{x^2 - 10x + 32} = 13.$
56. $(x - 4)^2 + \sqrt{x^2 - 8x + 31} = 5.$
57. $\sqrt{x^2 + 24} = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}.$
58. $\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$ **59.** $9\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[3]{x} = 10.$

---

60. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ **61.** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$
62. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$ **63.** $x^3 - 3\tfrac{1}{2}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x - 1 = 0.$
64. $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0.$
65. $20x^3 + 31x^2 - 31x - 20 = 0.$
66. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0.$ **67.** $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0.$
68. $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0.$
69. $8x^3 + 10x^2 + 15x + 27 = 0.$
70. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$
71. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0.$
72. $3x^4 - x^3 - 24x^2 - x + 3 = 0.$
73. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$
74. $24x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 50x + 24 = 0.$
75. $10x^4 + 27x^3 - 110x^2 + 27x + 10 = 0.$
76. $6x^4 - 13x^3 + 13x - 6 = 0.$
77. $x^4 - 16x^3 + 16x - 1 = 0.$
78. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0.$ **79.** $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$
80. $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0.$
81. $x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 15x + 25 = 0.$
82. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0.$
83. $x^4 - 7x^3 + 28x - 16 = 0.$

---

84. $3^{x-1} = \sqrt[x]{9}$.
85. $8^{2x+2} = \sqrt[x]{32^{2-x}}$.
86. $(3^{1-x})^{1-x} = 1$.
87. $10^{x(x-1)} = 100^{2(3-x)}$.
88. $10^{x^2-5x+6} = 100$.
89. $\sqrt[x+2]{2} = 4^{x+3}$.
90. $2^{x+1} = \sqrt[x+1]{5}$.
91. $3 \cdot 2^x = 4\sqrt[x]{9}$.
92. $3 \cdot 4^{x+2} = 4\sqrt[x]{3^{2x+1}}$.
93. $\sqrt[x-1]{2} \cdot \sqrt[x]{5} \cdot \sqrt[x+1]{10} = 1$.
94. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$.
95. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x + \frac{25}{2} = 0$.
96. $2^x + 2^{-x} = \frac{26}{5}$.
97. $6^{1+x} + 6^{1-x} = 13$.
98. $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$.
99. $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$.
100. $3^{2x} = 100(3^{x-1} - 1)$.
101. $3\sqrt[x]{12} = 360 + 6\sqrt[2x]{12}$.
102. $\sqrt[x]{128} + \sqrt[2x]{128} = 20$.
103. $\sqrt[x]{16^8} + \sqrt[x]{16^4} = 272$.
104. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10$.
105. $12\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25$.
106. $\sqrt{2 \cdot 3^{3x} + 10} = 3 + \sqrt{3^{3x} - 2}$.
107. $\frac{1}{2}\log(x+1) + \log\sqrt{x-1} = 2 - \log 2$.
108. $\log(x-1) + \log(x + \frac{19}{2}) = 2\log 5$.
109. $\log(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \log(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = \log 3 + \log 5$.
110. $\log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+\frac{2}{3}} = 1{\cdot}5 - \log 2$.
111. $x^{\log x} = 578$.
112. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$.
113. $x^{\log x} = \frac{x^4}{1000}$.
114. $x^{2\log x - 5} = 0{\cdot}01$.
115. $2\log x + \frac{1}{\log x} = 3$.
116. $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{1+\log x} = 1$.
117. $3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 40$.
118. $x^{\log x} - 4x^{-\log x} = 3$.
119. $x^{2\log x - 6} + 12 = 7x^{\log x - 3}$.
120. $x^{\log x} - 96x^{\log\sqrt{x}} = 400$.

K § 44.

1. $2x^2 - 3y^2 = 71$
$3x^2 + 2y^2 = 165$.

2. $12x^2 + 5y^2 = 233$
$3x^2 + 7y^2 = 202$.

3. $4x^2 + y^2 = 5$
$3y^2 - 20x^2 = 7$.

4. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
$x^2 + y^2 = r^2$.

5. $x^2 - y^2 = 32$
$x - 3y = 0.$

6. $2y - 3x = xy$
$x + y = 4.$

7. $x^2 + xy + y^2 = 63$
$x - y + 3 = 0.$

8. $4x^2 + 6y^2 = 4x - y$
$6y - 2x = 1.$

9. $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 48$
$3x - y = 11.$

10. $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = 80$
$4x - 5y = 5.$

11. $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 100$
$x + y = 14.$

12. $(x - 4) + (y - 3) = 6$
$(x - 4)(y - 3) = 8.$

13. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 32$
$(x + 2) - (y + 3) = 0.$

14. $x^2 - y^2 = 11$
$xy = 30.$

15. $7x^2 - 5y^2 = 163$
$\frac{2}{3}xy = 28.$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$
$x + y = 74.$

17. $x : y = 3 : 2$
$\sqrt{x - 2} - \sqrt{y - 3} = 1.$

18. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{y + 1} = 1$
$5x - 3y = 16.$

---

19. $xy + x = 18$
$xy - y = 10.$

20. $2xy - y = 21$
$xy - 2x = 4.$

21. $(x + 1)(y - 2) = 30$
$(x - 2)(y + 1) = 24.$

22. $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 44$
$(x - 1)^2 - (y - 5)^2 = 17.$

23. $x + \sqrt{xy} + y = 14$
$xy = 16.$

24. $x^2 - 3xy + y^2 = 17\frac{3}{4}$
$2xy = 5.$

25. $x^2 + y^2 + xy = 52 \cdot 75$
$2xy = 7.$

26. $x^2 + xy + y^2 = 49$
$x^2 - xy + y^2 = 19.$

27. $x^2 + y^2 + x + y = 510$
$x^2 + y^2 - x - y = 490.$

28. $x^2 + xy = 170$
$y^2 + xy = 119.$

29. $x^2 - xy = 76$
$xy - y^2 = 60.$

30. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$
$\sqrt{xy} = 16.$

31. $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 4$
$2x - 3y = 88.$

32. $(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 = 26$
$(x + 2y)(2x - y) = 5.$

33. $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 20$
$(x - 5)(y - 3) = 8.$

34. $(x + y)^2 - 3(x + y) = 270$
$xy = 80.$

35. $x^2+y^2+x+y=8$
$xy=2.$

36. $x^2+y^2+x-y=182$
$xy+x-y=85.$

37. $x^2+y^2-x-y=12$
$xy=9.$

38. $x-y-\frac{2}{x-y}=1$
$xy-\frac{3}{xy}=2.$

39. $2x+3y-\frac{76}{2x+3y}=15$
$2x-3y+\frac{3}{2x-3y}=4.$

40. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}$
$y^2+y^2=34.$

41. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$
$x^2y+xy^2=30.$

42. $x^2y^2-52xy+576=0$
$(x-y)^2+100\sqrt{xy}=625.$

43. $\frac{4}{25}\sqrt{x+y}=1-\frac{1}{\sqrt{x+y}}$
$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6.$

44. $xy-\sqrt{xy}=132$
$(x-y)^2-3x+3y=70.$

45. $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{10}{3}$
$x^2-y^2=81.$

46. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2$
$x^2-8=2x(2y-3).$

---

47. $3x^2-7xy+4y^2=0$
$5x^2-3xy-y^2=35.$

48. $x^2+xy+y^2=3$
$2x^2+3xy+4y^2=12.$

49. $2x^2-2xy-y^2=39$
$x^2+2xy+4y^2=39.$

50. $2x^2-3xy+4y^2=144$
$5x^2+6xy-7y^2=477.$

51. $x^2-y^2=9$
$(2x+y)(x+2y)=182.$

52. $3(x^2+xy+y^2)=7(x^2-xy+y^2)$
$x^2+2y^2=9.$

---

53. $x+y=14$
$x^3+y^3=854.$

54. $x-y=3$
$x^3-y^3=819.$

55. $3x-2y=4$
$27x^3-8y^2=104xy.$

56. $x+y+\sqrt{x+y}=2$
$x^3+y^3=19.$

57. $x^3 + y^3 = 1512$
$x^2y + xy^2 = 1440.$

58. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 12$
$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 104.$

59. $x - y = 1$
$x^4 + y^4 = 1921.$

60. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
$x^2 + y^2 = 97.$

61. $x + y + z = 12$
$xy + xz + yz = 47$
$x^2 + y^2 = z^2.$

62. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$
$xy + xz + yz = 36$
$x + y = 9.$

63. $x + y + z = 14$
$x^2 + y^2 + z^2 = 94$
$x(y + z) = 45.$

64. $x : y = y : z$
$x + y + z = 26$
$x^2 + y^2 + z^2 = 364.$

65. $x : y = z : u$
$x + u = 13$
$y + z = 20$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 425.$

66. $x : y = z : u$
$x - u = 6$
$y - z = 2$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 164.$

67. $x : y = z : u$
$x + u = 9$
$y + z = 6$
$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 585.$

---

68. $xy = 0{\cdot}2$
$x^{\log y} = 0{\cdot}5.$

69. $y^x = 10^4$
$\sqrt[x]{y} = 10.$

70. $2^y \sqrt[x]{9} = 24$
$3^y \sqrt[x]{25} = 135.$

71. $2^{y+2} = \sqrt[x]{4^{x+4}}$
$3^{y-2} = \sqrt[x+1]{9^{2x-1}}.$

72. $2^{x+3} + 2^{y+3} = 40$
$2^{x+y} = 4.$

73. $y^{2x} = 9y^x + 10$
$y = 10^{2x-1}.$

74. $3^{2x} - 4 \cdot 2^{-2y} = 80$
$3^x + 2^{-y} = 9{\cdot}5.$

75. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$
$y^x = 9.$

76. $12\sqrt[x]{y} - \sqrt[x]{y^2} = 20$
$y^x = 10^4.$

77. $y^x + 4y^{-x} = 16\frac{1}{4}$
$3\sqrt[x]{y} + 5\sqrt[x]{y^{-1}} = 8\frac{1}{2}.$

78. $\sqrt[y]{x^2} = 11\sqrt[y]{x} - 10$
$y = 1 - \log x.$

79. $y^{\frac{1}{x}} = 7y^{\frac{1}{2x}} + 12$
$\log y = x - 1.$

---

80. Določi dve števili, katerih produkt znaša 200 in kvocijent 8.

81. Razstavi 360 na dva faktorja, katerih kvadrata znašata skupaj 801.

82. Poišči dve števili, katerih vsota, produkt in razlika njunih kvadratov so si enaki.

83. Ako povečaš števec nekega ulomka za 1 in zmanjšaš imenovalec za 1, dobiš obratni ulomek. Če pa zmanjšaš števec za 1 in povečaš imenovalec za 1, je novi ulomek za $1\frac{1}{4}$ manjši od zgoraj omenjenega obratnega ulomka. Kateri je ulomek?

84. Razlika dveh dvoštevilčnih števil z istima številkama znaša 54 in produkt teh števil je 3627. Kateri sta števili?

85. Določi tri števila tako, da tvorijo stalno sorazmerje in da znaša njih vsota 19 in produkt 216.

86. V katerem sorazmerju znaša vsota zunanjih členov 18, vsota notranjih 17 in vsota kvadratov vseh členov 325?

87. Neki kapital nese na leto 64 K obresti. Drugi kapital, ki je za 200 K manjši in po 1% više naložen, nese na leto 70 K obresti. Kolik je vsak teh kapitalov?

88. Delavci neke tovarne so enako plačani in zaslužijo 108 K na dan. Če bi tovarna najela še 4 delavce in vsakemu delavcu zvišala zaslužek za 1 K, bi morala delavcem 160 K izplačati na dan. Koliko delavcev je v tovarni?

89. Vodnjak polnita dve cevi. Druga cev ga napolni sama za $3\frac{1}{3}$ ure poprej ko prva in za $2\frac{2}{3}$ ure pozneje ko obe cevi skupaj. V katerem času napolni vsaka cev sama vodnjak in v katerem času obe cevi skupaj?

90. *A* in *B* prodasta skupaj 100 *m* blaga in sicer eden več ko drugi, skupita pa enako veliko denarja. Ako bi bil imel *A* toliko blaga kakor *B*, bi bil zanj skupil 63 K; če bi bil pa imel *B* toliko blaga kakor *A*, bi bil zanj skupil le 28 K. Koliko metrov blaga je imel vsak?

91. Potovalec *A* rabi za pot 520 *km* 3 dni več ko potovalec *B*, ki prehodi na dan 12 *km* več nego *A*. Koliko časa potrebuje vsak potovalec za omenjeno pot?

92. Dve točki se pomičeta po krakih pravega kota od vrha proč in sta v začetku svojega premikanja oziroma 4 *m* in $3\frac{2}{3}$ *m* oddaljeni od vrha. Po 1 sekundi sta točki 13 m in po $2\frac{1}{2}$ sekundah 25 m narazen. Kako hitro se pomika vsaka točka?

93. Kolike so stranice pravokotnika, katerega ploščina znaša 60 m^2 in katerega obseg in diagonala sta si kakor 34 : 13?

94. Krogu s polumerom 39 cm je včrtan pravokotnik, katerega stranice so v razmerju 12 : 5. Kolike so stranice?

95. Kolike so stranice enakokrakega trikotnika, katerega višina je za 2 cm manjša od kraka in katerega obseg znaša 50 cm?

96. Kolika je ploščina pravokotnega trikotnika, če znaša vsota obeh katet 7 m in hipotenuzi pripadajoča višina 2·4 m?

97. Koliki sta diagonali romba, katerega stranica meri 65 cm in ploščina 3696 cm?

98. Kolik je rob kocke, katere prostornina se poveča za 1951 cm^3, če postane vsak rob za 1 cm daljši?

99. Določi robe pravokotnega paralelepipeda, če meri osnovna ploskev 48 cm^2, površje 768 cm^2 in diagonala 26 cm.

100. Prostornina pravilne četverostranične piramide znaša 1280 cm^3 in površje 800 cm^2. Kolik je osnovni rob in kolika višina?

101. Pravilna četverostranična prikrajšana piramida je 15 m visoka in ima 855 m^3 prostornine. Koliki so osnovni robi, ki so v razmerju 3 : 2?

102. Kolik je polumer pokončnega valja, ki je 5 cm visok in ima 48π cm^2 površja?

103. Prostornina pokončnega prikrajšanega stožca znaša 6695π cm^3, stranica 17 cm in višina 15 cm. Kolika sta polumera osnovnih ploskev?

K § 45.

1. Zapiši naslednje enačbe tako, da je x potenčni eksponent, ter določi potem vrednost za x:

a) ${}^{5}\log 625 = x$, *b)* ${}^{2}\log \frac{1}{64} = x$, *c)* ${}^{3}\log \sqrt[3]{9} = x$.

2. Določi številom 2, 4, 8, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ logaritem z ozirom na podlogo 2.

3. Kolik je logaritem števil:

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64 z ozirom na podlogo 64;

b) 9, 729, 1, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ „ „ „ „ 3;

c) 2, 4, 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ „ „ „ „ 8;

d) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 2, 4, 8 „ „ „ „ $\frac{1}{2}$;

e) 10, 100, 1000, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ „ „ „ „ 10.

4. Določi naslednjim enačbam logaritmand:

a) ${}^{4}\log x = 0$, *b)* ${}^{4}\log x = -1$, *c)* ${}^{4}\log x = -\frac{1}{2}$,

d) ${}^{3}\log x = 4$, *e)* ${}^{5}\log x = 1$, *f)* ${}^{6}\log x = \frac{2}{3}$,

g) ${}^{10}\log x = -1$, *h)* ${}^{10}\log x = \frac{1}{2}$, *i)* ${}^{10}\log x = -\frac{2}{3}$.

5. Določi naslednjim enačbam podlogo:

a) ${}^{x}\log 10 = 2$, *b)* ${}^{x}\log 10 = -1$, *c)* ${}^{x}\log 10 = \frac{1}{3}$,

d) ${}^{x}\log 8 = -\frac{3}{4}$, *e)* ${}^{x}\log 2 = 3$, *f)* ${}^{x}\log 2 = -2$,

g) ${}^{x}\log 343 = 3$, *h)* ${}^{x}\log 0{\cdot}1 = -1$, *i)* ${}^{x}\log 0{\cdot}01 = 2$.

K § 46.

1. $\log (7ab)$. 2. $\log [5(a - 3b)]$. 3. $\log (a + b)(m + n)$.

4. $\log (a^2 - b^2)$. 5. $\log (4x^2 - 9y^2)$. 6. $\log a(x^2 - 1)$.

7. $\log \frac{2ax}{3b}$. 8. $\log \frac{5x}{3(a - b)}$. 9. $\log \frac{5mx}{1 - a^2}$.

10. $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy}$. 11. $\log \frac{4a^2 - 9b^2}{25x^4 - 36y^4}$. 12. $\log \frac{63a^4 - 28b^4}{18a^2 - 8b^2}$.

13. $\log ab^2c^3$. 14. $\log (abx)^2$. 15. $\log \frac{5a^2x^3}{4by^4}$.

16. $\log \frac{36a^2x^4}{125b^3y}$. 17. $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3\right]$. 18. $\log \left(\frac{1}{ab^2x^3}\right)^2$.

19. $\log \left(\frac{2}{3 \cdot 7}\right)^5$. 20. $\log \left[\left(\frac{3}{11}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^4\right]$. 21. $\log \sqrt{ab}$.

22. $\log \sqrt{xy^2z^3}$. 23. $\log 8a^2\sqrt{b^3x}$. 24. $\log \frac{2\sqrt{x}}{a\sqrt[3]{y}}$.

25. $\log \frac{x^2\sqrt[3]{a}}{5by^3}$. 26. $\log \sqrt{a^2 - b^2}$. 27. $\log \sqrt{\frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c}}$.

28. $\log\left(3\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}\right)$. 29. $\log\left(a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)$.

30. $\log\frac{\sqrt{2a}\cdot\sqrt[3]{3b^2}}{\sqrt[4]{x^3}}$. 31. $\log\sqrt{\frac{2ab\sqrt{ab}}{3\sqrt{ax}}}$.

32. $\log\left[\sqrt{\frac{2a\sqrt[3]{b}}{3b^2\sqrt{a}}}:\sqrt[3]{\frac{3a^2\sqrt{ab}}{2b\sqrt[3]{a^2}}}\right]$.

33. Izrazi naslednje logaritme s pomočjo računskih zakonov z logaritmi praštevil:

a) $\log 96$, *b)* $\log 75$, *c)* $\log\frac{16}{27}$, *d)* $\log 0\cdot75$,

e) $\log\sqrt{72}$, *f)* $\log\sqrt[3]{\frac{35}{36}}$.

34. Pretvori naslednje mnogočlenike v enočlenske izraze, t. j. poišči izraz, katerega logaritem so naslednji podatki:

a) $\log x + \log y - \log z$; *b)* $\log a - (\log b + \log c)$;

c) $3\log a + 2\log b - 4\log c$; *d)* $\log x - 2\log y - 3\log z$;

e) $\frac{1}{5}\log a - \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{4}\log c$; *f)* $\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z$;

g) $\frac{1}{4}(2\log a + 3\log b) - \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)]$;

h) $\log 3 + \log 5 + \log 7 - \frac{2}{3}\log 3 + 3\log a - \frac{3}{4}\log b$;

i) $\log(a+b) + 2\log a - \frac{1}{2}[\log(a-b) + 3\log b]$;

k) $2\log 3 - \frac{1}{3}(2\log 5 + \frac{1}{2}\log 7) + \frac{2}{3}\log 11$;

l) $2\log(x-y) - \frac{1}{2}\log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x^2 - xy + y^2)$;

m) $\frac{1}{4}[\log 3 + 5\log a + \frac{2}{5}\log(a-b) - \frac{3}{7}(\log x + \log y)]$.

K § 47.

1. Izračunaj po računskih zakonih Briggove logaritme števil:

a) 6, 14, 20, 25; *b)* $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{81}{64}$;

c) $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{2\frac{6}{7}}$

če je $\log 2 = 0\cdot30103$, $\log 3 = 0\cdot47712$, $\log 5 = 0\cdot69897$ in $\log 7 = 0\cdot84510$.

2. Poišči naslednjim številom Briggove logaritme:

a) 83, *b)* 113, *c)* 837, *d)* 1008,

e) 3807, *f)* 6025, *g)* 8·476, *h)* 83·95,

i) 7648·3, *k)* 4509·8, *l)* 37·4968, *m)* 2·53694,
n) 1·04736, *o)* 46358, *p)* 179265, *r)* 310486,
s) 114257, *t)* 0·69583, *u)* 0·036728, *v)* 0·00416953.

3. Poišči naslednjim logaritmom pripadajoča števila:

a) 0·24055, *b)* 1·57287, *c)* 2·61278, *d)* 3·02816,
e) 0·66058 — 1, *f)* 0·27161 — 2, *g)* 0·89009 — 3,
h) 2·01396, *i)* 1·46370, *k)* 0·40016,
l) 0·55342 — 2, *m)* 0·25893 — 1, *n)* 0·68102 — 3.

K § 48.

Izračunaj s pomočjo logaritmov naslednje izraze:

1. $13 \cdot 794 \cdot 7 \cdot 2495$. 2. $0 \cdot 27306 \cdot 15 \cdot 796$.

3. $3 \cdot 1593 \cdot 0 \cdot 0237 \cdot 6 \cdot 8345 \cdot 0 \cdot 45792$.

4. $0 \cdot 36 : 2 \cdot 7453$. 5. $1 : 0 \cdot 94276$. 6. $35 : \frac{0 \cdot 47236}{5 \cdot 9731}$.

7. $17 \cdot 963 : \frac{38 \cdot 402}{4 \cdot 2756}$. 8. $\frac{-13 \cdot 179}{4 \cdot 256 \cdot 0 \cdot 27965}$. 9. $\frac{2488 \cdot (-1926)}{521347}$.

10. $1 \cdot 035^{25}$. 11. $7 \cdot 1414^2$. 12. $0 \cdot 61734^3$.

13. $\frac{4\pi \cdot 0 \cdot 29674^3}{3}$. 14. $\left(-\frac{2}{7}\right)^5$. 15. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$. 16. $\sqrt{15}$.

17. $\sqrt[3]{0 \cdot 97315}$. 18. $\sqrt[7]{78 \cdot 125 \cdot 0 \cdot 34963}$. 19. $\sqrt[3]{-10}$.

20. $\sqrt[5]{2 \cdot 7961^2}$. 21. $\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1734^2}{0 \cdot 9641^5}}$. 22. $\sqrt[3]{\frac{38 \cdot 922}{13\pi}}$.

23. $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}}$. 24. $\sqrt[4]{\frac{87\sqrt{8105}}{93 \cdot 24^2}}$. 25. $\frac{3\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{4\sqrt{124}}}$.

26. $\sqrt{340} \cdot \sqrt[3]{\frac{24 \cdot 105 \cdot 58 \cdot 937}{1 \cdot 4793^4}}$. 27. $\frac{\log 2 \cdot 0255}{\log 1 \cdot 04}$. 28. $\frac{25 \cdot 348}{\log 33 \cdot 607}$.

29. $\frac{\log 0 \cdot 98765}{\log 0 \cdot 03893}$. 30. $\frac{\log 0 \cdot 071289}{\log 0 \cdot 267}$. 31. $\frac{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}$.

32. $\sqrt[5]{\frac{52 - 3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8 \cdot 7}}}$. 33. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. 34. $\sqrt{10 + \sqrt{10}}$.

35. $\sqrt[3]{\sqrt{18 \cdot 7} - \sqrt[3]{9 \cdot 2}}$. 36. $(1 \cdot 04 - \sqrt[5]{0 \cdot 3})^3$.

37. $\sqrt{8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 12^2}$. 38. $\sqrt{58 \cdot 81^2 - 53 \cdot 69^2}$.

Razreši nasledne eksponentne enačbe:

39. $3^x = 0{\cdot}5$. 40. $10^x = 2{\cdot}71828$. 41. $25^{-x} = 11$.

42. $2^{3x+4} \cdot 2^{2+x} = 5$. 43. $2^{2x} \cdot 3^{3x} = 2{\cdot}0477$.

44. $3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} \cdot 11^{2-x}$. 45. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 4^{x-2} = 5$.

46. $6^{3-4x} = 0{\cdot}006^{7-4x}$. 47. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 5{\cdot}301^{x+1}$.

48. $\left(\frac{123}{234}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{345}{456}$. 49. $\sqrt[x]{10} = 2$.

50. $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5$. 51. $\sqrt[x]{2^{x-1}} = \sqrt[3x]{5^{x-4}}$.

52. $\sqrt{20^{2x-5}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+8}} = \sqrt[5]{\left(\frac{13}{8}\right)^{x-6}}$.

53. $3^{x+1} - 3^{x-1} = 3 \cdot 2^3$. 54. $3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2}$.

55. $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}$.

56. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$.

57. $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$.

58. $2^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 1$
$3^{2x} : 3^{y+3} = 1$.

59. $3^x \cdot 5^y = 405$
$2^x \cdot 7^y = 112$.

60. $\sqrt[4]{x+7y} = 3$
$(x+7y) \cdot 2^x = 1296$.

61. $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[4]{3^y} = 12$
$\sqrt{2^{-x}} : \sqrt[4]{3^{-3y}} = 3{\cdot}375$.

62. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^y} = 12$
$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x} : \sqrt[3]{4^y} = \frac{1}{64}$.

63. $\sqrt[x]{4} \cdot \sqrt[y]{8} = 1$
$\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[y]{2} = 1{\cdot}41421$.

64. $5^y \cdot \sqrt[x]{4} = 400$
$2^{y+1} \cdot \sqrt[x]{3} = 72$.

65. $\sqrt[6]{x^{5y}} = 1024$
$3\sqrt{x} = 2\sqrt[y]{729}$.

Razreši nasledne logaritemske enačbe:

66. $2 \log x = 3 \log 4$. 67. $\frac{1}{3} \log x = 2 \log 3$.

68. $\frac{1}{2} \log (x-1) = 1 - \log 5$.

69. $\log x + \log (x+1) = 2 \log (1-x)$.

70. $\log (x+5) - \log (x-5) = 2$.

71. $\log (x+2) - \log (x-2) = 0{\cdot}43512$.

72. $\log (x+2) - \log (x+1) = 0{\cdot}02345$.

73. $\log (2x-1) - \log (x+9) = -1$.

74. $\log(x-1)-\log(2x-4)=\log(x+2)-\log(2x+11)$.

75. $\log(5x)+\log(2x+3)=1+2\log(3-x)$.

76. $\log(16x)-\log(2x)+\log(3x)=\log 9+\log 4-\log 6$.

77. $\log 5+\frac{1}{2}\log(3x+4)=\log 7+\log\sqrt{2x-5}$.

78. $\log(\sqrt{x}-5)-\log(\sqrt{x}-3)=\log(\sqrt{x}-2)-\log(\sqrt{x}-4)$.

79. $\log 3+\frac{1}{2}\log(4x-2)-\log\sqrt{3x+2}=2\log 2$.

80. $\log(4-x)-\frac{1}{2}\log(x-2)=\log\sqrt{x+2}$.

81. $2^{\log x}=8$. 82. $5^{\log(2x)}=625$. 83. $3^{\log x}=10$.

84. $2^{\log x}=3$.

K § 49.

1. Razstavi naslednje trinome na faktorje:

a) $x^2-17x+70$; *b)* $x^2+3x-88$; *c)* $3x^2-14x+8$;

d) $3x^2+10x-153$; *e)* $6x^2+x-1$; *f)* $20x^2+17x-24$;

g) $acx^2-(a^2+bc)x+ab$; *h)* $acx^2-(3ab-bc)x-3b^2$;

i) $abx^2+(a+b)x+1$; *k)* $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$.

2. Za katere vrednosti premenljivke x so naslednji izrazi pozitivni in za katere negativni:

a) $x^2-14x+45$; *b)* x^2-3x-4; *c)* $x^2+8x+15$;

d) $2x^2-x-2$; *e)* $8x^2+4x-1$; *f)* $-2x^2-x+10$.

3. Določi naslednjim izrazom največjo, oziroma najmanjšo vrednost ter povej obenem vrednost premenljivke za ta slučaj:

a) x^2+x+1; *b)* x^2-x+1; *c)* $3x^2-8x+6$;

d) ax^2-bx-c; *e)* $ax+\frac{b}{x}$; *f)* $\frac{x^2+x+1}{x^2}$;

g) $x-a+\frac{1}{x-a}$; *h)* $\frac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}$; *i)* $x\sqrt{9-x^2}$;

k) $x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2$;

l) $x^2+(a-b)x-a^2-ab-b^2$.

4. Razstavi število a na dva sumanda tako, da dobi njun produkt največjo vrednost.

5. Razstavi število a na dva faktorja tako, da dobi njuna vsota največjo vrednost.

6. Razdeli daljico a na dva dela tako, da dobi vsota kvadratov napravljenih iz teh delov najmanjšo vrednost.

7. Včrtaj določenemu trikotniku največji pravokotnik tako, da leži dvoje pravokotnikovih oglišč v eni trikotnikovi stranici, tretje in četrto oglišče pa v ostalih trikotnikovih stranicah.

8. Včrtaj določenemu kvadratu (krogu) največji pravokotnik.

9. Včrtaj določenemu pokončnemu stožcu pokončni valj z največjim plaščem.

10. Včrtaj določeni krogli pravilno četverostranično prizmo z največjim plaščem (površjem).

11. Kateri pokončni valj (stožec) ima največji plašč, če je obseg osjega preseka določene velikosti.

12. Včrtaj določeni krogli pokončni val z največjim plaščem.

K § 50.

Načrtaj funkcije:

a) $y = 1 + 6x + 8x^2$, *b)* $y = 12 - x - 6x^2$,

c) $y = x^2 - 2x - 15$, *d)* $y = x^2 + 2x - 3$

ter določi presečišča funkcijskih črt z abscisno osjo!

K § 51.

Določi diferencijalne kvocijente naslednjim funkcijam:

1. $y = ax + b$. 2. $y = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

3. $y = ax^2 + bx + c$. 4. $y = (a + bx)(c - dx)$.

5. $y = ax + \frac{b}{x}$. 6. $y = a \sin x + b \cos x + c$.

7. $ax + by = c$. 8. $x^2 + y^2 = r^2$.

9. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. 10. $y^2 = 2px$.

11. $y = 2px + \frac{p^2}{a}x^2$. 12. $y^2 = \sin x$.

13. $y = ax^2 + \frac{b}{x^2}$. 14. $y = (a + bx)^2$.

15. $y = \frac{m}{(a + bx)^2}$. 16. $y = \frac{m}{(a + bx^2)^2}$.

17. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. 18. $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$.

19. $y = \sqrt{a + bx}$. 20. $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$.

21. $y = a \sin ax$. 22. $y = a \sin(\beta - ax)$.

23. $y = \cos(x^2 - a^2)$. 24. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

25. Določi, za katere vrednosti premenljivke rastejo, oziroma pojemajo naslednje funkcije:

a) $y = x^2 + 7x + 12$, *b)* $y = 2x^2 - 3x - 9$,

c) $y = x^2 - 6x + 13$, *d)* $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{x}{6} - 1$.

26. Določi, za katere vrednosti premenljivke so naslednje funkcije pozitivne, oziroma negativne.

a) $y = x^2 - x - 2$, *b)* $y = -x^2 - 2x + 3$,

c) $y = 4x^2 + 8x + 3$, *d)* $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{10}x + 2$.

27. Načrtaj funkcijo $y = 2 + 3x + 4x^2$ ter določi kot, katerega tvori geometrijska tangenta v točki $x = 3$ funkcijske črte s pozitivno abscisno osjo.

28. V kateri točki funkcijske črte $y = 2 + 2x + x^2$ tvori geometrijska tangenta s pozitivno abscisno osjo kot 45^0 (60^0)?

29. Določi funkcijam pod 26. največjo, oziroma najmanjšo vrednost!

30. Načrtaj iz točke M, ki ima od središča O nekega kroga razdaljo a, tangenti na krog ter spoji dotikališči A in B med seboj in s točko O. Kolik mora biti krogov polumer, da je trikotnik AOB največji?

31. Kateri pokončni stožec s stranico a ima največjo prostornino?

32. Določi izmed pokončnih stožcev s prostornino k tistega, ki ima najmanjši plašč.

33. Določi najmanjši pokončni valj, če je diagonala osjega preseka $= d$.

34. Včrtaj (očrtaj) določeni krogli pokončen stožec z največjo (najmanjšo) prostornino.

K § 52.

Določi naslednje integrale:

1. $\int x\,dx$. 2. $\int x^2 dx$. 3. $\int x^{-3} dx$.

4. $\int \frac{dx}{x^2}$. 5. $\int x^{\frac{1}{4}} dx$. 6. $\int \sqrt{x} \cdot dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 9. $\int (ax^2 - bx - c)\,dx$.

10. $\int (ax + b)^2 dx$. 11. $\int (x + a)(x - a)\,dx$.

12. $\int \left(3x^3 + 4x^{-3} + 2\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$.

13. $\int (a \sin x + b \cos x)\,dx$. 14. $\int \frac{dx}{a - bx}$.

15. $\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2}$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}}$.

17. $\int x\sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx$. 18. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1 + x}}$. 19. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. 21. $\int \sin(ax + \beta)\,dx$. 22. $\int \cos(ax + \beta)\,dx$.

23. $\int_0^5 3x\,dx$. 24. $\int_0^1 (a + bx)\,dx$. 25. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$.

26. $\int_1^3 \sqrt{x} \cdot dx$. 27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$. 28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax\,dx$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\,dx$. 30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x\,dx$.

31. Zavrti funkcijsko črto $y = \sqrt{8x}$ okoli abscisne osi do njene prvotne lege ter izračunaj prostornino nastalega telesa od $x = 0$ do $x = 6$.

K § 53.

1. Določi pri naslednjih aritmetičnih postopicah občni člen in vsoto iz n členov:

a) $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n} \ldots,$ *b)* $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n} \ldots,$

c) $n, \frac{3n-1}{2}, 2n - 1 \ldots,$ *d)* $\frac{1}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \frac{2n^2+1}{n} \ldots$

2. Pri aritmetični postopici 12 členov znaša zadnji člen $7\frac{1}{4}$ in vsota 54; kolik je prvi člen in kolika razlika?

3. Aritmetična postopica šteje 6 členov; kolik je prvi člen in kolika vsota, če je zadnji člen $= 0$ in razlika $= -2$?

4. Kolik je prvi in kolik zadnji člen aritmetične postopice, ki šteje 16 členov, če je razlika $= 0 \cdot 27$ in vsota $= 52 \cdot 08$?

5. Koliko členov aritmetične postopice da vsoto 2808, če znaša prvi člen 2 in razlika 10?

6. Koliko členov postopice 9, 13, 17... je treba sešteti, da dobiš vsoto 8640?

7. Vrini med člene postopice 1, 5, 9... po 8 novih členov tako, da dobiš zopet aritmetično postopico!

8. Koliko členov moraš med $8\frac{3}{4}$ in $10\frac{1}{2}$ vriniti, da dobiš aritmetično postopico z vsoto $211\frac{3}{4}$?

9. Določi pri postopici 50, 48, 46... tisti člen, ki je enak 27. delu vsote vseh prejšnjih členov!

10. Pri aritmetični postopici znaša vsota iz 9. in 20. člena 21, vsota iz 10., 16. in 28. člena pa 28; kako se glasi postopica?

11. Peti in drugi člen aritmetične postopice se razlikujeta za 18 in vsota prvih 5 členov znaša 75; kolik je prvi člen in kolika razlika?

12. Peti člen aritmetične postopice znaša 15, vsota prvih treh členov je $= 22\frac{1}{2}$ in vsota zadnjih treh členov $= 75$; koliko členov šteje postopica in kolika je njena vsota?

13. Vsota iz drugega in 16. člena aritmetične postopice znaša $6\frac{1}{2}$ in produkt istih dveh členov je $= 7\frac{1}{2}$; kolika je vsota prvih 16 členov?

14. Razdeli število 400 na 25 delov tako, da tvorijo ti deli aritmetično postopico in da je deveti del $= 11$!

15. Kolika je vsota sodih števil naravne številne vrste od 37 do 73?

16. Koliko znaša vsota četveroštevilčnih števil, ki so deljiva z 29?

17. Dolg 4350 K, ki ne nosi nobenih obresti, se poravna tako, da se plača prvo leto 600 K in vsako naslednje leto za 50 K manj; v koliko letih je dolg poravnan?

18. Okoli točke v ravnini leži 6 kotov tako, da se dotikajo zaporedoma drug drugega in da je vsak naslednji za $9^0 12'$ večji od prejšnjega. Koliki so posamezni koti?

19. *A* izkoplje vodnjak, ki je 12 *m* globok, in dobi za prvi meter 9 K 60 h in za vsak naslednji meter po 2 K 40 h več. Koliko znaša ves zaslužek?

20. Ploščina pravokotnega trikotnika, katerega stranice tvorijo aritmetično postopico, znaša 294 dm^2; kolike so stranice?

21. Večja kateta pravokotnega trikotnika, katerega stranice tvorijo aritmetično postopico, meri 24 *dm*; koliki sta ostali stranici?

22. Številke troštevilčnega števila tvorijo aritmetično postopico. Ako deliš to število z njegovo številčno vsoto, dobiš 26 za kvocijent; če pa prišteješ dotičnemu številu 198, dobiš število, v katerem se nahajajo iste številke v obratnem redu. Katero je to število?

23. Dve telesi se začneta pomikati istodobno v isto smer od ene in iste točke. Prvo telo preteče vsako sekundo po 20 *m*, drugo telo pa v prvi sekundi 12 *m* in v vsaki naslednji sekundi po 2 *m* več. Kdaj dohiti drugo telo prvo?

24. Po obodu nekega kroga se pomikata dve telesi istodobno od ene in iste točke v nasprotno smer. Prvo telo preteče v prvi sekundi 3^0 in v vsaki naslednji sekundi po 1^0 več; drugo telo preteče v prvi sekundi $1\frac{1}{2}^0$ in v vsaki naslednji sekundi po 6^0 več. Kdaj se srečata telesi prvokrat in kdaj drugokrat?

25. Popotnik gre od kraja A in prehodi prvi dan 40 *km* in vsak naslednji dan po 2 *km* manj. Od kraja B, ki leži 40 *km* za krajem A, gre en dan pozneje kurir, ki prehodi prvi dan 40 *km* in vsak naslednji dan po 5 *km* več. V koliko dneh dohiti kurir popotnika?

K § 54.

1. Določi vsote naslednjih geometrijskih postopic:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}$,

b) $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$,

c) $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$.

2. Določi vsote naslednjih brezkončnih geometrijskih postopic:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

b) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \ldots$

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{9}{50} + \ldots$

d) $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4} + \ldots \quad (a > b)$

e) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{11}} + \ldots$

f) $\frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{2}{8^3} + \frac{5}{8^4} + \frac{2}{8^5} + \frac{5}{8^6} + \ldots$

3. Kolik je prvi člen geometrijske postopice, katere količnik je $= 1\frac{1}{2}$ in sedmi člen $= 68\frac{11}{32}$?

4. Kolik je realni količnik geometrijske postopice, pri kateri je *a)* prvi člen $= 2$ in dvanajsti člen $= 4096$; *b)* peti člen $= 648$ in sedmi člen $= 1458$?

5. Koliko členov postopice 1, 3, 9, 27... moraš sešteti, da dobiš vsoto 3280?

6. Prvi člen geometrijske postopice je 6, količnik $\frac{3}{4}$ in zadnji člen $1\frac{217}{512}$; koliko členov šteje postopica in kolika je njena vsota?

7. Koliko členov ima geometrijska postopica in kolik je njen zadnji člen, če je prvi člen $= 4$, količnik $= 3$ in vsota $= 118096$?

8. Prvi člen geometrijske postopice je 7 (3200), zadnji člen 15309 (25) in vsota 22960 (6375); kolik je količnik in koliko členov šteje postopica?

9. Kolik je količnik brezkončne geometrijske postopice, katere prvi člen je $= 1$ in vsota $= 3$?

10. Določi peti člen brezkončne geometrijske postopice, katere količnik je $\frac{3}{4}$ in vsota 20.

11. Vrini med števili 5 (16) in 405 (4096) tri člene tako, da tvori vseh pet členov geometrijsko postopico!

12. Vrini med števili x^8 in y^8 sedem členov tako, da dobiš geometrijsko postopico!

13. Vrini med 16 in $\frac{1}{4}$ toliko členov, da dobiš geometrijsko postopico z vsoto $31\frac{3}{4}$!

14. Med členoma 17496 in 1024 geometrijske postopice se nahaja šest členov; kolik je količnik?

15. Razlika med 4. in 6. členom geometrijske postopice je 756, razlika med 4. in 5. členom pa 432; kako se glasi postopica?

16. Vsota iz 6. in 10. člena geometrijske postopice znaša $27\frac{1}{3}$, razlika med 12. in 4. členom je $242\frac{26}{27}$; kolik je prvi člen in kolik količnik?

17. Osem števil tvori geometrijsko postopico; vsota prvih štirih števil je 15 (85) in vsota ostalih števil 240 (21760); katera so števila?

18. Razdeli vsak člen postopice 3, 48, 768... na 4 dele tako, da tvorijo vsi ti deli geometrijsko postopico!

19. Tri števila, katerih vsota znaša 117, tvorijo geometrijsko postopico; če pomnožiš srednje teh števil z vsoto ostalih števil, dobiš 2430. Katera so števila?

20. Štiri števila tvorijo geometrijsko postopico; prvo število je za 36 večje od drugega, tretje za 4 večje od četrtega. Katera so števila?

21. Šest števil tvori geometrijsko postopico; vsota prvih 5 števil je 484, vsota zadnjih 5 števil pa 1452. Kako se glasi postopica?

22. Ako prišteješ 4 členom aritmetične postopice zaporedoma števila 1, 4, 11, 24, dobiš geometrijsko postopico; kako se glasi aritmetična postopica?

23. Ako odšteješ prvim 4 členom geometrijske postopice zaporedoma števila 3, 4, $5\frac{1}{2}$, 8, dobiš aritmetično postopico; kako se glasi geometrijska postopica?

24. Aritmetična in geometrijska postopica se ujemata v prvem členu; druga člena teh postopic sta si kakor $3:2$ in tretja člena kakor $5:4$. Vsota iz prvega in četrtega člena geometrijske postopice znaša 81. Kako se glasita postopici?

25. Razdeli 248 K med 5 oseb tako, da dobi vsaka naslednja oseba dvakrat toliko ko prejšnja!

26. Nekdo si prihrani meseca januarja 1 h in vsak naslednji mesec trikrat toliko ko prejšnji mesec. Koliko si prihrani v 1 letu?

27. Številke troštevilčnega števila tvorijo geometrijsko postopico; število in njegova številčna vsota sta si kakor $124:7$, če prišteješ dotičnemu številu 594, dobiš novo število, v katerem se nahajajo iste številke v obratnem redu. Katero je število?

28. Iz soda, v katerem je 100 l vina, se vzame 1 l vina in vlije 1 l vode vanj; ko se vino in voda zmešata, se vzame iz soda 1 l te zmesi in vlije 1 l vode vanj i. t. d. Kolikokrat je treba navedeno mešanje ponoviti, da ostane v sodu še 40 l vina?

29. Recimo, da imamo neizrečeno veliko takih enakostraničnih trikotnikov, pri katerih je stranica vsakega naslednjega trikotnika enaka višini prejšnjega. Kolika je vsota vseh teh trikotnikov, če je stranica prvega trikotnika $= a$?

30. Včrtaj določenemu kvadratu (enakostraničnemu trikotniku) krog; temu krogu včrtaj kvadrat (enakostranični trikotnik), temu kvadratu (enakostraničnemu trikotniku) zopet krog i. t. d. Koliko znašajo *a)* obsegi, *b)* ploščine vseh kvadratov (enakostraničnih trikotnikov, krogov)?

K § 55.

1. Kolika je vrednost kapitala 4567 K, naloženega po $4\frac{1}{2}\%$, čez 15 let?

2. Kapital 4050 K se po 5% obrestuje; kolika je njegova vrednost čez 20 let, če se obresti kapitalizujejo *a)* celoletno, *b)* poluletno?

3. Neko mesto ima 105842 prebivalcev; koliko prebivalcev bode imelo čez 11 let, če se prebivalstvo množi po 2%?

4. Kapital 2710 K je 10 let po 4%, potem 5 let po $3\frac{3}{4}\%$ in 7 let po $3\frac{1}{2}\%$ naložen na obrestne obresti; kolika je njegova končna vrednost?

5. Dva kapitala znašata skupaj 5500 K in narasteta v 8 letih na 7977·57 K. Eden teh kapitalov je naložen po $4\frac{1}{2}\%$ in njegove obresti se kapitalizujejo celoletno, drugi kapital pa je naložen po 5% in njegove obresti se kapitalizujejo poluletno. Kolik je vsak kapital?

6. Gozd ima 75000 m^3 lesa; koliko lesa je bilo v gozdu pred 24 leti, če se računa letni prirastek po $1\frac{1}{2}\%$?

7. Nekdo ima čez 10 let dolg 4000 K plačati; kolika je gotova vrednost tega dolga, če se računajo obresti po $4\frac{1}{2}\%$ in kapitalizujejo poluletno?

8. Kateri kapital naložen po 4% naraste v 14 letih na isto vrednost, katero dobi kapital 1980 K po $4\frac{1}{2}\%$ v 18 letih?

9. *A* ponudi za hišo 32000 K takoj, *B* 35000 K po dveh letih in *C* 38400 K po 4 letih; katera ponudba je za prodajalca najugodnejša, če se računajo obresti po $4\frac{3}{4}\%$?

10. Izmed dveh kapitalov je eden trikrat tolik ko drugi. Manjši kapital je naložen po 5%, večji za $4\frac{1}{2}\%$. Če se vrednosti teh kapitalov čez 12 let razlikujeta za 6000 K, kolik je vsak kapital?

11. V katerem času naraste kapital 7500 K na 16000 K, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$ in kapitalizujejo *a)* celoletno, *b)* poluletno?

12. V katerem času se podvoji določen kapital naložen na obrestne obresti po 4% (5%)?

13. Koliko časa mora kapital 15324 K po 5% naložen biti, da se poveča za 8431 K?

14. Po koliko odstotkov je kapital 5450 K naložen, če naraste v 23 letih na 12023·3 K?

15. Prebivalstvo nekega okraja je naraslo v 11 letih od 19332 oseb na 29761 oseb; za koliko odstotkov se poveča prebivalstvo v 1 letu?

16. Po koliko odstotkov je kapital 3000 K naložen, če znašajo obresti v $2\frac{1}{2}$ leta 1408 K in se kapitalizujejo poluletno?

17. Kapital 3500 K, ki je po 4% naložen, se poveča koncem vsakega leta za 410 K; kolik je kapital čez 10 let?

18. Koliko moraš skoz 20 let in sicer v začetku vsakega leta po 5% naložiti na obrestne obresti, da dobiš po 20 letih 20000 K?

19. Koliko moraš skoz 15 let in sicer koncem vsakega leta plačati v hranilnico, ki računa obresti po 5% in jih kapitalizuje poluletno, da imaš čez 15 let 3292·71 K premoženja?

20. Pri prodaji nekega posestva ponudi kupec *A* 20000 K takoj in skoz osem let po 400 K koncem vsakega leta, kupec *B* ponudi skoz 20 let po 1400 K v začetku vsakega leta. Katera ponudba je ugodnejša?

21. Kapital 1000 K je po $3\frac{3}{4}\%$ naložen na obrestne obresti. Koliko moraš temu kapitalu koncem vsakega leta pridejati, da se kapital podvoji čez 10 let?

22. Nekdo naloži določen kapital in skoz 30 let koncem vsakega leta 450 K po $4\frac{3}{4}\%$ na obrestne obresti. Če ima čez 30 let 45000 K premoženja, kolik je bil prvotni kapital?

23. Čez koliko let naraste kapital 5760 K, ki se koncem vsakega leta poveča za 575 K, na vrednost 24.825 K, če se računajo obresti po 4%?

24. Nekdo je v 22 letih vse svoje premoženje, ki se je obrestovalo po 5%, izdal in sicer tako, da je vsako leto porabil 6000 K. Koliko je bilo premoženje?

25. Gozd ima sedaj 30810 m^3 lesa; koliko lesa bo v gozdu čez 13 let, ako se koncem vsakega leta izseka po 1280 m^3 in se prirastek računa po 2 %?

26. Nekdo ima plačati 2000 K čez 5 let, 3000 K čez 7 let in 5000 K čez 10 let. S katerim kapitalom se da ves dolg takoj poravnati, če se računajo obresti po 4 %?

27. Neka občina mora za popravljanje mosta plačati vsako leto po 200 K. S katerim kapitalom se da ta služnost odkupiti?

---

28. S kolikim kapitalom si kupiš rento 1240 K, ki jo boš dobival skoz 25 let, če se računajo obresti po 3 %?

29. Koliko moraš plačati za rento 1000 K, ki jo boš dobival poluletno skoz 12 let, če se obresti računajo po $3\frac{1}{2}$ %?

30. Nekdo naloži 27000 K po 5 % na obrestne obresti s tem pogojem, da bi od petega leta naprej skoz 14 let in sicer koncem vsakega leta dobival rento. Kolika je renta?

31. Kapital 20000 K je 20 let po 5 % naložen na obrestne obresti. Kolika renta se dobi od tega kapitala skoz 10 naslednjih let?

32. Koliko let se dobiva letna renta 200 K od kapitala 3074·5 K, ki je po 5 % naložen na obrestne obresti?

33. Nekdo si kupi poluletno rento 800 K s kapitalom 30000 K; koliko časa bo dobival rento, ako se obresti računajo po 4 %?

34. *A* ima skoz 14 let koncem vsakega leta 3675 K plačati; koliko mora *a)* za vsakega teh obrokov, *b)* za vse obroke skupaj plačati 10 let pozneje, če se računajo obresti po 4 %?

35. *B* ima rento 1600 K dobivati skoz 15 let; ako prvih 4 rent ne vzdigne, koliko znaša potem vsaka izmed naslednjih 11 rent, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}$ %?

36. Nekdo plača skoz 12 let in sicer v začetku vsakega leta po 1500 K zavarovalnemu društvu, da bi potem od 18. leta naprej skoz 15 let dobival rento koncem vsakega leta. Kolika je renta, če se računajo obresti po $4\frac{1}{2}$ %?

37. Renta 2400 K, ki se dobiva skoz 20 let, se zamenja za rento, ki bi se dobivala skoz 30 let; kolika je zadnja renta, če se računajo obresti po 5 %?

38. Koliko poluletno rento dobiš skoz 20 let za celoletno rento 18000 K, ki traja skoz 12 let, če se računajo obresti po 5%?

K § 56.

1. Koliko in katere premeščaje dobiš *a)* od besede „miza“, *b)* od besede „roma“, *c)* od besede „leten“?

2. Koliko premeščajev napraviš iz elementov 1, 2, 3, 4, 5, 6 in sicer takih, ki se začnejo *a)* s 5, *b)* s 54, *c)* s 546?

3. Koliko peteroštevilčnih števil napraviš iz elementov *a)* 1, 3, 5, 7, 9, *b)* 2, 4, 6, 8, 0?

4. Koliko in katera peteroštevilčna števila napraviš iz številk 3, 3, 5, 6, 6?

5. Kolikokrat moreš premestiti faktorje produktov: $abcdef$, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^2y^2z^4$, $a^{m-n}b^n$?

6. Kako se glasi *a)* 14. premeščaj iz elementov „*aimt*“, *b)* 32. premeščaj iz elementov „*ablot*“, *c)* 114. premeščaj iz elementov „*adkoš*“?

7. Koliko različnih razporedeb dado ena bela, dve črni in tri rdeče krogle?

8. Kolikokrat more 7 gostov svoja mesta pri mizi zamenjati, dokler niso sedeli v vsakem mogočem redu?

9. Koliko različnih elementov moraš imeti, da se število premeščajev 42krat zmanjša, če se število elementov za 2 zmanjša?

K § 57.

1. Napravi vse kombinacije drugega, tretjega in četrtega razreda *a)* brez ponavljanja, *b)* s ponavljanjem iz elementov 1, 2, 3, 4!

2. Na koliko načinov se da: *a)* produkt $abcde$ razstaviti na dva dela, izmed katerih ima eden po 2 in drugi po 3 faktorje; *b)* produkt $abcdef$ razstaviti na dva dela, izmed katerih ima vsak po 3 faktorje?

3. Koliko amb, tern, kvatern in kvintern dobiš *a)* od vseh 90 števil naše loterije, *b)* od 5 števil, ki se enkrat izžrebajo?

4. Na koliko načinov se da: *a)* 12 kart med dve osebe tako razdeliti, da dobi ena po 3 in druga po 9 kart; *b)* 12 kart med tri osebe tako razdeliti, da dobi prva po 3, druga po 4 in

tretja po 5 kart; *c)* 32 kart med 4 osebe tako razdeliti, da dobi vsaka oseba po 8 kart?

5. Koliko premic in koliko trikotnikov določuje n točk, izmed katerih ne leže po 3 v eni in isti premici?

6. Koliko presečišč tvori: *a)* n premic v obče; *b)* 7 premic, izmed katerih so 3 vzporedne; *c)* 9 premic, izmed katerih se 4 sečejo v eni in isti točki?

(Vzporedne premice imajo presečišča v neskončni daljavi.)

7. Iz koliko elementov se da napraviti 435 amb brez ponavljanja?

8. Pri koliko elementih je število kvatern brez ponavljanja 6 krat toliko ko število amb brez ponavljanja?

9. Koliko elementov mora biti, da sta si števili tern s ponavljanjem in brez ponavljanja kakor 15 : 7?

K § 58.

1. Napravi vse premene drugega, tretjega in četrtega razreda *a)* brez ponavljanja, *b)* s ponavljanjem iz elementov 1, 2, 3, 4!

2. Koliko premen drugega, tretjega in četrtega razreda da 10 elementov in sicer *a)* brez ponavljanja, *b)* s ponavljanjem?

3. Koliko dvo-, tro- in četveroštevilčnih števil je mogoče napisati s številkami 3, 4, 5?

4. Koliko peteroštevilčnih števil se da napisati š številkami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in sicer tako, da se v enem in istem številu ne ponavlja nobena številka?

5. Kako se spremeni rezultat prejšnje naloge, če se tudi ničla jemlje v poštev?

6. Koliko premen prvega, drugega, tretjega in četrtega razreda s ponavljanjem napraviš iz elementov „·, —“ (pika, črta)?

7. Koliko različnih metov je mogočih *a)* z dvema kockama, *b)* s tremi kockami?

8. Kateri različni meti dveh (treh) kock dado vsoto 8 (12)?

9. Iz koliko elementov napraviš 380 premen drugega razreda brez ponavljanja?

10. Pri koliko elementih sta si števili premen tretjega razreda brez ponavljanja in s ponavljanjem kakor 5 : 9?

11. Pri koliko elementih je število premen drugega razreda brez ponavljanja 20 krat manjše od števila premen tretjega razreda?

K § 59.

Izračunaj naslednje potence:

1. $(1+a)^6$. 2. $(1-a)^7$. 3. $(x+a)^5$.

4. $(x-a)^8$. 5. $(a-3)^4$. 6. $(a+5)^5$.

7. $(2a-3b)^6$. 8. $(3a+4b)^5$. 9. $(3x^2-4y^3)^4$.

10. $\left(\frac{a}{3}+1\right)^5$. 11. $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^6$. 12. $\left(\frac{4}{x}+\frac{x}{2}\right)^7$.

13. $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4a}\right)^5$. 14. $\left(\frac{4x}{3y}-\frac{9y}{4x}\right)^6$.

15. Določi:

a) osmi člen od $(3a-2)^{12}$, *b)* šesti člen od $(5x^2+4a^3)^{10}$,

c) sedmi člen od $\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{3}\right)^9$,

d) peti člen od $\left(\frac{ax^2}{4by^2}+\frac{4b^2y}{a^2x}\right)^7$.

16. Določi:

a) v rezultatu od $\left(\frac{4a}{5b}-\frac{2b}{4c}\right)^6$ tisti člen, v katerem se nahaja a^4;

b) v rezultatu od $\left(\frac{5ax^2}{6by^2}+\frac{3by}{5ax}\right)^{10}$ tisti člen, v katerem se nahaja x^2.

17. $(x^2+3)^5-(x^2-3)^5$. 18. $(\sqrt{3}+1)^8+(\sqrt{3}-1)^8$.

19. $(2+\sqrt{2})^7-(2-\sqrt{2})^7$. 20. $(\sqrt{-4}+\sqrt{-2})^6$.

21. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$. 22. $\left(\frac{3+i\sqrt{2}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-i\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

K § 60.

1. Nekdo ima v vrečici 10 avstrijskih in 10 ogrskih kron. Kolika je verjetnost, da vzame iz vreče avstrijsko krono?

2. V neki žari je 6 belih in 8 rdečih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš *a)* eno belo in eno rdečo kroglo, *b)* dve rdeči krogli, *c)* dve beli krogli?

3. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama dve enaki števili?

4. Kolika je verjetnost, da vržeš s tremi kockami tri različna števila, ki tvorijo aritmetično progresijo?

5. Kolika je verjetnost, da vržeš s tremi kockami tri enaka števila?

6. Med 32 igralnimi kartami je polovica črnih in polovica rdečih. Kolika je verjetnost, da potegneš ravno štiri rdeče?

7. Katera verjetnost je večja, da vržeš z dvema kockama vsoto 5 ali pa s tremi kockami vsoto 7?

8. Iz neke žare, v kateri je 5 belih, 6 modrih in 9 rdečih krogel, potegni štiri krogle. Kolika je verjetnost, da bodo med temi *a)* dve beli, ena modra in ena rdeča krogla, *b)* dve rdeči in dve modri, *c)* štiri rdeče?

9. Nekdo kupi v gledališču na slepo srečo vstopnico za sedež v pritličju, v katerem je 10 vrst po 20 sedežev. Kolika je verjetnost, da dobi ravno sedež na kraju, ako so dohodi na dveh straneh in tudi po sredi?

10. Neka miza je dolga 2 *m* in široka 1 *m* in je razdeljena v enake kvadrate s stranico 2 *dm*. Na to mizo se vrže okrogla plošča s polumerom 4 *cm*. Kolika je verjetnost, da plošča ne pade na noben rob kvadratov?

Navodilo. Da plošča ne pade na rob, mora središče plošče biti vsaj 4 *cm* od vsakega roba oddaljeno. Ugodne slučaje tvorijo vse točke, ki leže v kvadratih, kojih stranice so 4 *cm* oddaljene od stranic kvadratov na mizi, in ki merijo 2 *dm* — 8 *cm* = 12 *cm*. Mogoči slučaji so vse točke v prvotnih kvadratih. Verjetnost je potem enaka razmerju vsote ploščin zmanjšanih kvadratov in vsote prvotnih kvadratov.

11. V takozvani mali loteriji se dvigne pri vsakem srečkanju izmed števil 1 do 90 pet števil. Kolika je verjetnost, da se zadene *a)* eno število, *b)* dve števili (ambo), *c)* tri števila (terno)?

12. Kolika je verjetnost, da se izmed petih že stavljenih števil v mali loteriji zadene *a)* eno število, *b)* dve števili, *c)* tri števila?

Navodilo: $v_a = \dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}$, $v_b = \dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$, $v_c = \dfrac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$.

13. Pri nekem srečkanju se je izdalo 500 srečk in se je določilo 10 dobitkov. Kolika je verjetnost, da zadene vsaj en dobitek oni, ki ima 20 srečk?

Navodilo. Išči najprej verjetnost, da ne zadene nobenega dobitka.

14. Kolika je verjetnost, da je v mali loteriji med petimi dvignjenimi števili vsaj eno enoštevilčno?

15. Kolika je verjetnost, da z dvema kockama vržeš prej dve neenaki števili kakor pa enaki?

16. V posodi je 10 belih, 7 črnih in 8 zelenih krogel. Kolika je verjetnost, *a)* da potegneš prej belo kakor pa zeleno kroglo, *b)* prej eno belo in eno zeleno kakor pa dve črni?

K § 61.

1. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama vsoto 4 ali 6?

2. Kolika je verjetnost, da vržeš z eno kocko v treh metih vsaj enkrat število 5?

3. V žari je 5 belih in 7 rdečih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš trikrat zapored rdečo kroglo, *a)* ako deneš vsakokrat kroglo nazaj, *b)* ako jo obdržiš?

4. Nekdo drži na pol zakrito v roki 12 enakih šibic in eno krajšo. Kolika je verjetnost, da potegneš štirikrat daljšo šibico in je ne vrneš?

5. Izmed 15 oseb plača ona neko stavo, ki potegne krajšo šibico. Kolika je verjetnost, da dobi četrta (sedma) krajšo šibico?

6. Kolika je verjetnost, da dobiš izmed 54 tarok-kart v treh dvigih vsaj enkrat tarok, ki je višji kakor 17? V koliko dvigih doseže verjetnost vrednost $\frac{1}{2}$? (Tarokov je 22.)

7. Nekdo ima v žepu 20 novcev po 10 vinarjev in sicer 10 iz leta 1906 in 10 iz leta 1907. Kolika je verjetnost, da vzame trikrat zapored novec iz leta 1906 in četrtič šele iz leta 1907?

8. Koliko metov je treba, da postane verjetnost pri treh kockah vselej dobiti vsoto 3 enaka $\frac{1}{2}$?

9. Kolika je verjetnost z eno kocko trikrat število 5 vreči in potem dvakrat kako drugo?

10. Nekdo iztrga iz knjige, ki ima 200 lističev, trikrat zapored šop zaporednih lističev. Kolika je verjetnost, da jih vsakokrat ravno deset iztrga? (Aritmetične postopice.)

K § 62.

1. Nekdo dobi 3 K, ako vrže s kocko 4 pike. Koliko je matematično upanje?

2. Pri neki loteriji se je izdalo 50.000 srečk. Koliko je matematično upanje glavnega dobitka, če znaša isti 1000 K?

3. V žari so med 15 belimi kroglami 3 rdeče. Nekdo stavi 20 vinarjev in dobi 1 K, ako potegne rdečo kroglo. Ali je stava pravilna?

4. Igra piké ima 32 kart, med njimi je 12 podob. Oseba A stavi z osebo B 20 h proti 30 h, da dvigne iz kupa teh kart podobo. Kdo je na boljšem pri stavi?

5. Kdor v mali loteriji zadene ambo, dobi 240kratni znesek stave, pri terni pa 4800kratni znesek. Kolikere zneske bi morala uprava loterije plačati, ko bi ne zaračunila upravnih stroškov in bi ne iskala sama nič dobička?

6. A stavi proti B 22 h, da vrže z dvema kockama v enem lučaju dve števili, izmed katerih je vsaj ena 6. Koliko mora B staviti?

7. A se zaveže plačati B-u dve kroni, ako vrže B novec, ki ima na eni strani podobo na drugi pa številko, in se pokaže podoba; 4 K, če vrže dvakrat zapored podobo; 8 K če vrže trikrat zapored podobo, in tako naprej. Koliko mora staviti B, ako hoče 5krat (n-krat) ponoviti igro? (Peterburška naloga.)

K § 63.

1. Nekdo stavi 2 K, da ugane izmed 5 danih imen ravno pravo ime. Kolika je matematična nevarnost?

2. A stavi proti B 30 h, da potegne iz žare, v kateri je 6 belih in 9 rdečih krogel, ravno belo kroglo. Kolika je nevarnost za vsako osebo, ako stavi B 45 h?

3. Nekdo stavi 1 K, da ugane v dveh poskusih določeno število med 10 in 20. Kolika je nevarnost izgube?

4. Oseba A se zaveže plačati osebi B toliko kron, kolikor pik vrže B z eno kocko. Koliko mora staviti B? Kolika je nevarnost izgube za vsako osebo? (I. N. Tetensova naloga.)

Navodilo. Verjetnost je za vsako število pik isto (namreč $\frac{1}{6}$). Matematično upanje za B se sestavlja iz matematičnega upanja posameznih dobitkov (ter znaša 3·5 K). Izguba za B je torej pri eni piki 2·5 K, pri dveh 1·5 K, pri treh 0·5 K, pri več pikah pa je že dobiček. Enako se izračunajo izgube za A pri 6, 5, 4 pikah.

5. Na koncu leta 1909 je bilo še 66.305 neizžrebanih 40kronskih ljubljanskih srečk iz leta 1878. Dne 2. januarja 1910 so bili izžrebani sledeči dobitki: po 1 dobitek za 50.000 K, 3000 K in 2000 K, 5 dobitkov po 1000 K, 4 dobitki po 600 K in 788 dobitkov po 60 K. Koliko je bilo takrat matematično upanje zadeti en dobitek? Kolika je bila nevarnost izgube, če je veljala srečka 50 K?

6. Nekdo kupi za 4 K srečko državne loterije. Koliko je upanje na kak dobitek sploh in kolika nevarnost izgube?

Navodilo. Po igralnem načrtu iz leta 1909 je bilo vseh srečk 400.000. Dobitkov je bilo 18.399 in sicer: po 1 dobitek za 200.000 K, 40.000 K, 20.000 K, 10.000 K, 5000 K, 4000 K, 3000 K, 2000 K, 1600 K, 1400 K, 3 dobitki po 1000 K, 6 dobitkov po 500 K, 9 dobitkov po 400 K, 10 dobitkov po 300 K, 16 dobitkov po 200 K, 15 dobitkov po 180 K, 22 dobitkov po 150 K, 108 dobitkov po 100 K, 1200 dobitkov po 20 K in 17.000 dobitkov po 10 K.

K § 64.

1. Kolika je verjetnost, da učaka 20letna oseba 30. leto? (Pri teh nalogah naj se uporablja Deparcieuxova tablica.)

2. Kolika je verjetnost, da umrje 35letna oseba med 60. in 70. letom?

3. Kolika je verjetnost, da učakata dva novoporočenca petindvajsetletnico poroke, ako ima ženin 33 let in nevesta 22 let? Kolika je verjetnost, da čez 25 let nobeden več ne živi?

4. Izmed dveh bratov je eden 20 let star in drugi 15 let. Kolika je verjetnost, *a)* da oba še 30 let živita, *b)* da samo mlajši še 30 let živi?

5. Kolika je verjetna starost *a)* 40letne, *b)* 65letne, *c)* 70letne osebe?

K § 66.

1. Izračunaj iz rentnih tablic umrljivosti (za poskušnjo) diskontovano število D_n za *a)* 5 letne, *b)* 18 letne, *c)* 65 letne osebe. Obrestna mera je $k = 1·03$.

2. Izračunaj iz istih tablic diskontovano število umrlih (C_n) za *a)* 50 letne, *b)* 75 letne, *c)* 86 letne osebe. ($k = 1{\cdot}03$.)

3. Koliko je treba založiti za 28 letno osebo, da bo uživala od 29. leta dalje dosmrtno rento letnih 900 K? Koliko je treba v resnici plačati, ako zahteva zavarovalnica 15% doklado na čisto premijo?

4. Neka 50 letna oseba ima pravico do dosmrtne rente letnih 600 K. Koliko je renta sedaj vredna?

5. Neka 50 letna oseba plača 14.333 K za svojo dosmrtno rento letnih 1000 K, ki se izplačujejo na koncu vsakega leta. Čez koliko let je zavarovalnica že na škodi, ako je obrestna mera 3%?

Navodilo. Sedanja vrednost že izplačanih rent mora biti večja kakor 14.333 K.

6. Za 30 letno osebo je nekdo založil 20.000 K. Kakšno rento bo uživala dotična oseba do svoje smrti, če se renta plačuje v začetku vsakega leta? (Glej opomnjo v § 66 pri nalogi 1.)

7. Neka 25 letna oseba je zavarovana na dosmrtno rento letnih 800 K, ki naj se ji prvikrat izplačajo čez 15 let, ako je takrat še živa. Koliko znaša *a)* enkratna čista premija, *b)* enkratna tarifna premija z 10% doklado?

8. Koliko mora plačevati 30 letna oseba skozi deset let v začetku vsakega leta, da si pridobi pravico do dosmrtne rente letnih 1000 K, ki se prvikrat izplačajo čez 15 let? (Časovne premije.)

9. Neki oče zavaruje svojo novorojeno hčerko za doto 3000 kron, ki naj se ji izplačajo, ko doživi 20. leto, ako pa hčerka prej umrje, ne izplača zavarovalnica nič. Koliko mora oče založiti? (Zavarovanje na doživetje s pomočjo 3% tablice.)

10. Neki oče zavaruje svojega novorojenega sina za 1200 K, ki naj se mu izplačajo za prostovoljsko leto, ako doživi 21 let. Koliko mora oče založiti za sina?

K § 67.

1. Neka 28 letna oseba se zavaruje na smrt za 2000 K, ki naj se po njeni smrti (na koncu leta) izplačajo določenim dedičem. Koliko znaša *a)* enkratna premija, *b)* dosmrtna premija?

2. Neka 34 letna oseba se zavaruje na smrt z zneskom 3000 K. Koliko dobijo dediči po njeni smrti, ako zavarovalnica odbije pri izplačanju za upravne stroške i. t. d. 16 %?

3. Koliko znaša dosmrtna premija za 42 letno osebo, ki se zavaruje na smrt za 4000 K, ako zavarovalnica v prvih treh letih ne izplača še nobene zavarovalnine?

4. Neka 36 letna oseba se zaveže plačevati skozi 10 let, če jih doživi, v začetku vsakega leta premijo 600 K. Koliko dobijo dediči po njeni smrti?

5. Neki 40 letni oče hoče zapustiti svojim otrokom 30.000 K premoženja. Koliko mora skozi 20 let, če jih doživi, plačevati v začetku vsakega leta?

6. Neka 25 letna oseba se zavaruje na doživetje ali na smrt za znesek 10.000 K, ki naj se izplača, ko doživi 65. leto, ali po njeni smrti dedičem, ako prej umrje. Kolika je *a)* enkratna premija, *b)* časovna premija?

7. Neki 28 letni oče zavaruje za slučaj svoje smrti svojo prvorojeno hčerko za 2000 K, ki naj se ji izplačajo, ko dopolni 20 let. Koliko mora plačevati letne premije do 20. leta ali pa do morebitne svoje prezgodnje smrti? Čez koliko let bo zavarovalnica že na dobrem?

Ponavljalne naloge.

1. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

a) $x^2 - y^2 - (x + y)^2$; *b)* $a^3 - 1 - (a - 1)^3$;
c) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$; *d)* $8a^3 + 27b^3 - 2a - 3b$;
e) $x^4 - 625 - 26x(x^2 - 25)$;
f) $16x^2 + 48xy + 36y^2 - 25z^2$;
g) $2x^2 + 7x - 5$; *h)* $4x^2 + 4ax + a^2 - b^2$.

2. Poišči naslednjim izrazom največjo skupno mero:

a) $2x^3 - 2xy^2 + x^2 + xy$, $4x^4 + 4xy^3$;
b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3$, $2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3$, $2x^4y - 16xy^4$;
c) $4a^3 + 17a^2 + 23a + 10$, $8a^3 - 2a^2 - 23a - 10$;
d) $6x^3 + 4x^2y - 6xy^2 - 4y^3$, $9x^2 + 18xy + 8y^2$;
e) $2a^3 + 7a^2 + 7a + 2$, $3a^3 + 4a^2 - 5a - 2$,
$4a^3 + 7a^2 - 3a - 2$.

3. Poišči naslednjim izrazom najmanjši skupni mnogokratnik:

a) $2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3$, $3x^4y + 6x^3y^2 + 3x^2y^3$, $5x^3y^2 - 5xy^4$;

b) $2x^3 + 2y^3$, $3x^3 - 3x^2y + 3xy^2$, $4x^3 + 4x^2y$;

c) $a^3 + 4a^2 + 5a + 2$, $a^3 + 5a^2 + 8a + 4$;

d) $9a^4 + 9a^3 + 14a^2 - 9a + 7$, $3a^4 + 5a^3 + a^2 - 10a - 14$.

4. Določi ulomkoma $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10}$ in $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ vrednost za $x = 2$.

5. Okrajšaj naslednja ulomka:

a) $\frac{a^{n+2} - 2a^n + a^{n-2}}{a^{n+2} + a^{n+1} + a^n + a^{n-1}}$, *b)* $\frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^6 - b^6}$.

Določi naslednjim računom rezultate:

6. $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$.

7. $(2a^2b^{x+1} - 3a^nb^3 + 4a^{2n-2}b^{5-x}) \cdot (5ab^x + 6a^{n-1}b^2)$.

8. $\left(\frac{2a^{3x-4}}{3b^{2m-3}} - \frac{4a^{2x-3}}{b^{m-1}} - \frac{3a^{x-2}}{2b}\right) \cdot \left(\frac{a^{2x-3}}{2b^m} - \frac{3a^{x-2}}{b^2}\right)$.

9. $\left[\frac{a^2 - b^2}{(x - y)^n}\right]^m \cdot \left[\frac{a - b}{(x + y)^n}\right]^m \cdot \frac{(x^2 - y^2)^{mn}}{(a + b)^m}$.

10. $(x^{-1}y^{-5} - 2xy^{-3} + 3x^3y^{-1}) \cdot (x^{-1}y^{-5} + 2xy^{-3} - 3x^3y^{-1})$.

11. $(4a^{2x+6}b^{6y} + 16a^6b^{3y}c^{3y} + 16a^{6-2x}c^{6y}) : (2a^{x+3}b^{3y} + 4a^{3-x}c^{3y})$.

12. $\left(6a^{12} - \frac{85a^9}{21} + \frac{251a^6}{84} - \frac{75}{8}\right) : \left(\frac{12a^6}{7} - \frac{2a^3}{3} + \frac{5}{2}\right)$.

13. $\left(\frac{2x^2 + 3xy + y^2}{3x + y}\right)^3 : \left(\frac{2x + y}{3x - y}\right)^3 : \left(\frac{x + y}{3x + y}\right)^3$.

14. $(-4x^{-2} + 15x^{-1} - 24 + 9x + 4x^2) : (-4x^{-4} + 3x^{-3} + x^{-2})$.

15. $\left(\frac{a^3 + b^3}{a - b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a - b}{a^2 - ab + b^2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{a - c}\right)^3 \cdot \left(\frac{b - c}{b - a}\right)^3 \cdot \left(\frac{c - a}{c - b}\right)^3$.

16. $\left[\left(8\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(1\frac{5}{7}\right)^3 : \left(12\frac{1}{2}\right)^3\right] - \left[\left(9\frac{3}{5}\right)^4 : \left(1\frac{11}{25}\right)^4 : \left(6\frac{2}{3}\right)^4\right]$.

17. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^2 : \left(-\frac{1}{8}\right)^2 : \frac{1}{25}\right] - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]$.

18. $(16a^2 + 40ab + 25b^2)^2 \cdot (4a - 5b)^4 : (16a^2 - 25b^2)^3$.

19. $5^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot(-a^2)^{-5}+(1\tfrac{1}{2})^2\cdot(-a^5)^{-2}$.

20. $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)$.

21. $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{2a}\right)^3-\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{2a}\right)^3$.

22. $\left(n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)^2-\left(n^2+\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$.

23. $\left(a^2+\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)^3-\left(a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)^3$.

24. Pretvori naslednje izraze na enostavnejšo obliko ter jih skrči kolikor mogoče:

a) $2\sqrt{275}-3\sqrt{99}-7\sqrt{88}+3\sqrt{198}-\sqrt{704}$;

b) $2\sqrt[3]{0\cdot875}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2\frac{2}{27}}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{189}-\frac{5}{21}\sqrt[3]{3\frac{73}{125}}$;

c) $\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+2(1-2a\sqrt{a^2-1})$;

d) $2\sqrt{xy^2+y^3}-\sqrt{(x+y)^3}+\sqrt{(x^2-y^2)(x-y)}$;

e) $3\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{192}+3\sqrt[3]{375}-2\sqrt[3]{1029}$;

f) $4\sqrt{2\frac{13}{16}}-2\sqrt{20}-\frac{3}{7}\sqrt{1\frac{31}{49}}+\frac{3}{8}\sqrt{35\frac{5}{9}}$;

g) $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\frac{3\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{3a+\sqrt{a}}{1-a}$;

h) $10\sqrt{288}+3\sqrt[3]{81}-5\sqrt{242}-\sqrt{128}+2\sqrt[3]{648}-4\sqrt[3]{375}$;

i) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9^6}{16^3}}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^4}{27^2}}}+\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{27^4}{64^4}}}$;

k) $\sqrt{6\sqrt{28}}-\sqrt{12\sqrt{7}}+2\sqrt{3\sqrt{7}}-2\sqrt[4]{63}$.

25. Izvrši naslednje množitve:

a) $(2\sqrt{30}-3\sqrt{5}+5\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$;

b) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^2\cdot(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})-(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\cdot(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2$;

c) $(\sqrt[6]{a^5}+2\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}+4\sqrt{a})$;

d) $(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

e) $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; *f)* $(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

g) $\sqrt{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{15}}$;

h) $(3-\sqrt{5})\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$;

i) $\left(a+a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\right)$;

k) $\left(4a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{5}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-2a^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{5}{12}}\right)$;

26. Izvrši naslednje delitve:

a) $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\sqrt{\frac{y}{x}}\right):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

b) $(a+\sqrt{ab}+b):(\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b})$;

c) $(12-6\sqrt{6}+6\sqrt{15}-9\sqrt{10}):(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$;

d) $\left(24a^{\frac{4}{3}}+\frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}\right):\left(6a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\right)$;

e) $\left(6x^{\frac{7}{6}}-8x^{\frac{5}{4}}+3x^{\frac{29}{30}}-4x^{\frac{21}{20}}\right):\left(3x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{3}{4}}\right)$.

27. Določi rezultate naslednjih računov:

a) $\sqrt[6]{(x^2-2xy+y^2)^3}$; *b)* $\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^{-1}\sqrt[3]{a^{-7}}}}$;

c) $\sqrt{x^2\sqrt[3]{xy^2}}:\sqrt{y\sqrt{xy}}$; *d)* $\left(\sqrt[m]{x^2\sqrt[n]{x^3}}:\sqrt[n]{x^2\sqrt[m]{x^3}}\right)\cdot\sqrt[n]{x^2}$;

e) $\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{c}{b}}}\right)^2$; *f)* $\left(\sqrt[4]{\frac{2x^3\sqrt[3]{ax^2}}{5a^2\sqrt[4]{a^3x}}}\right)^3$.

28. Določi vrednosti naslednjih izrazov:

a) $32^{\frac{3}{5}}$; *b)* $16^{1\cdot75}$; *c)* $81^{0\cdot25}$; *d)* $0\cdot027^{-\frac{2}{3}}$;

e) $(-0\cdot008)^{-\frac{1}{3}}$; *f)* $\sqrt[\frac{2}{3}]{49}$; *g)* $\sqrt[-\frac{4}{5}]{\frac{16}{81}}$; *h)* $\sqrt[0\cdot8]{5\frac{1}{16}}$.

29. Izrazi naslednje ulomke z racijonalnim imenovalcem:

a) $\dfrac{\sqrt{2x^2+3x\sqrt{y}}}{\sqrt{2x^2-3x\sqrt{y}}}$; *b)* $\dfrac{12(1+\sqrt{2})}{3+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; *d)* $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$;

e) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}$; *f)* $\dfrac{9}{1+\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}$;

g) $\dfrac{2+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-4}}$; *h)* $\dfrac{(1+i)^{-2}}{(1-i)^{-3}}$; *i)* $\dfrac{1+i^3}{1-i^3}$;

k) $\frac{2+\sqrt{-3}}{2-\sqrt{-3}}-\frac{2-\sqrt{-3}}{2+\sqrt{-3}}$;

l) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}$.

30. Pretvori naslednje binome v monome:

a) $\sqrt{9+2\sqrt{8}}-\sqrt{9-2\sqrt{8}}$;

b) $\sqrt{6+\sqrt{20}}+\sqrt{6-\sqrt{20}}$;

c) $\sqrt{7+\sqrt{-15}}+\sqrt{7-\sqrt{-15}}$;

d) $\sqrt{\frac{6}{7}+\frac{5}{2}i}-\sqrt{\frac{6}{7}-\frac{5}{2}i}$;

e) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$;

f) $\sqrt{x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}}+\sqrt{x-\sqrt{x-\frac{1}{4}}}$.

31. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

a) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; *b)* $\sqrt{43-15\sqrt{8}}$; *c)* $\sqrt{11-60i}$;

d) $\sqrt{-3-4i}$; *e)* $\sqrt{-3+2i\sqrt{10}}$; *f)* $\sqrt{-2+4\sqrt{-6}}$.

32. $\sqrt{(16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1)}$.

33. $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}a^3-\frac{5}{36}a^4+\frac{1}{6}a^5+\frac{1}{16}a^6)}$.

34. $\sqrt[3]{(a^6-6a^5b+21a^4b^2-44a^3b^3+63a^2b^4-54ab^5+27b^6)}$.

35. $\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}-\frac{12}{x^2}+\frac{10}{x}-5+\frac{5x}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27}}$.

36. Izračunaj s pomočjo logaritmov naslednje izraze:

a) $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{49{\cdot}18^2\sqrt{0{\cdot}0485}}{\sqrt[3]{0{\cdot}8465}}}$;

c) $(\sqrt{181{\cdot}4}-\sqrt[3]{0{\cdot}973})^3$; *d)* $\sqrt[3]{\sqrt{81{\cdot}43}-\sqrt{21{\cdot}72}}$.

37. Izračunaj $(\frac{1}{2}+\sqrt{-4})^8$.

38. Določi sedmi člen od $\left(\frac{2}{3}\sqrt{-a}+\frac{3}{4}\sqrt{b}\right)^{12}$.

39. Določi v rezultatu od $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{10}$ tisti člen, v katerem se nahaja $\frac{y}{x}$.

Razreši naslednje racijonalne enačbe z eno neznanko:

40. $\frac{(2x+3)(3x+2)}{5} - \frac{7(x+3)(x-1)}{10} - \frac{(3x+1)(x+1)}{6} = 3\frac{2}{3}$.

41. $\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}x + 1\right)^2 - \frac{33}{8}x$.

42. $\frac{3}{14+2x} + \frac{22}{49-x^2} = \frac{1}{14-2x}$.

43. $\frac{7}{x^2-11x+30} + \frac{2}{x^2-9x+18} = \frac{9}{x^2-5x}$.

44. $\frac{2x+3}{x^2-x} - \frac{3x-2}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{1}{8x}$.

45. $\frac{x}{4x^2+4x+1} + \frac{x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{2x+3}{4x^2-1}$.

46. $\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right)^2 + 7\cdot\frac{3x+4}{2x-5} + 12 = 0$.

47. $\frac{2x+3}{3x-4} + \frac{3x-4}{2x+3} = 5\cdot 2$.

48. $\frac{x^4-8x^3+16x^2}{9} - \frac{29}{9}(x^2-4x) = \frac{44}{3}$.

49. $(x^2 - 5x)^2 + 55x = 11x^2 - 30$.

50. $x^2(x^2 - 4x + 4) = 8x(x-2) - 15$.

51. $x^3 - 27 + 37(3 - x) = 0$.

52. $(2x+1)^3 - (3x - \frac{7}{8}) = 0$.

53. $x^4 - 256 + 41(16 - x^2) = 0$.

54. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.

55. $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$.

56. $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$.

57. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

58. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 12x + 16 = 0$.

Razreši naslednje iracijonalne enačbe z eno neznanko:

59. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{3}} = 2$.

60. $\frac{\sqrt[3]{x+6n}+\sqrt[3]{x-13n}}{\sqrt[3]{x+6n}-\sqrt[3]{x-13n}} = 5$.

61. $\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x+9}$.

62. $\sqrt{8x+25} - \sqrt{\frac{x-1}{2}} = \sqrt{\frac{9x}{2}+19}$.

63. $\sqrt{\frac{x-1}{2}} + \sqrt{\frac{x+1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2(x+1)}}$.

64. $\sqrt{\frac{a^2+x}{a-b}}+\sqrt{\frac{x-b^2}{a-b}}=\sqrt{a+b}.$

65. $\sqrt{4x-7}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{15x-11}.$

66. $\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+3}=\sqrt{8x+1}.$

67. $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=\sqrt{\frac{4x+3}{x-1}}.$

68. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{17}{4}.$

69. $\frac{x+a}{x-a}-4\sqrt{\frac{a(x+a)}{x-a}}+3a=0.$

70. $(x-4)^2+\sqrt{x^2-8x+40}=6.$

71. $x+4-2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{3}{x-4}.$

72. $\sqrt{x+2a}+\frac{a}{\sqrt{x+2a}}=\sqrt{a(a+4)}.$

73. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=\sqrt{x+31}+\sqrt{x-4}.$

74. $\sqrt{4x-1}+2\sqrt{x+16}-\sqrt{4x+71}=2\sqrt{x-2}.$

75. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-6}=\sqrt{3x-6}.$

76. $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17}=6.$

77. $\sqrt[3]{x^2-1}+\frac{2}{3}\sqrt[6]{x^2-1}=\frac{1}{3}.$ 78. $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{15}{4}.$

79. $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$

80. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x-29}=0.$

Razreši naslednje enačbe z dvema in več neznankami:

81. $\frac{x+4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}}+\frac{y-2\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2}}=\frac{35}{12}$ in $\frac{2x-1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}}+\frac{3y+4\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}}=17\frac{1}{2}$

82. $\frac{2x+3\frac{1}{2}}{4}=\frac{3y-4\frac{1}{2}}{3}+\frac{3}{8}$ in $\frac{2\frac{1}{2}x-3}{4}=\frac{2\frac{1}{3}y+5}{6}-1\frac{1}{2}.$

83. $\sqrt{\frac{x+y}{x}}=3-\sqrt{\frac{y}{x}}$ in $2x+3y=66.$

84. $\sqrt{2x}-\sqrt{3y}=3$ in $3\sqrt{x}+\sqrt{6y}=7\sqrt{2}.$

85. $x-1=\sqrt{x^2+2x-7y+7}$ in

$y+4=\sqrt{y^2+2y+3x+25}.$

86. $10\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{61}{16}} = 13 + \sqrt{\frac{3}{5}y+\frac{19}{25}}$ in

$7\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{61}{16}} + 6\sqrt{\frac{3}{5}y+\frac{19}{25}} = 20.$

87. $\frac{11}{3\sqrt{x+5}} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{y+4}}$ in $\frac{5}{\sqrt{x+5}} + \frac{7}{36} = \frac{13}{3\sqrt{y+4}}.$

88. $\sqrt{x+6} + \sqrt{y-1} = 6$ in $4x + 3y = 42.$

89. $xy^2 + y + 1 = 0$ in $x^2y^2 + x + y = 3.$

90. $x^2 - 9xy + 7y^2 = 13$ in $7xy - 6y^2 + 12 = 0.$

91. $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ in $5y^2 + 6x + 7y = 18.$

92. $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 24$ in $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 15 = 0.$

93. $x^2 - y^2 + x - y = 2\sqrt{a}$ in $(x^2 - y^2)(x - y) = a.$

94. $2xy - \sqrt{xy} = 66$ in $2(x-y)^2 - 3(x-y) = 35.$

95. $x^2 + xy = 78$ in $y^2 + xy = 91.$

96. $x^2 + y\sqrt{xy} = 9$ in $y^2 + x\sqrt{xy} = 18.$

97. $\sqrt{x-y} - 5 = \frac{6}{\sqrt{x-y}}$ in $\sqrt{x+y} + \frac{1}{6}\sqrt{x-y} = 3.$

98. $\sqrt{\frac{5x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{5x-2y}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ in $x^2 + y^2 = 5.$

99. $x + y - 4\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{5}{x-y}$ in $x^2 + y^2 = 25.$

100. $x - y = 61$ in $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1.$

101. $x^3 - y^3 = \frac{218}{35}xy$ in $x - y = 2.$

102. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133$ in $x + y = 5.$

103. $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + 42$ in $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

104. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 12$ in $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 104.$

105. $\sqrt{\frac{x+y}{3x}} + \sqrt{\frac{3x}{x+y}} = 2$ in $xy - x - y = 54.$

106. $x + y - z = 6$

$x^2 + y^2 + z^2 = 50$

$xy + xz + yz = 47.$

107. $x + y + z = 42$

$x : y = y : z$

$y(x + z) = 272.$

108. $x:y = z:u$
$x - u = 3$
$y - z = 1$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 41.$

109. $(x+z)^2 + (y+u)^2 = 208$
$zy + u(x+z) = 48$
$x + y + z + u = 20$
$x + y = 14.$

Razreši naslednje eksponentne in logaritemske enačbe:

110. $2^{x(x-2)} \cdot 4^{x-2} \cdot 0{\cdot}5^{x+2} = 1.$ **111.** $\sqrt[x-1]{4^x} \cdot 3^{x-1} = 72.$

112. $2 \cdot 9^{x+1} - 3 \cdot 4^x = 6 \cdot 4^{x+1} + 6 \cdot 9^x.$

113. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7^{x-2} + 7^{x-1}.$

114. $5^{2x-\frac{2}{3}} - 3^{x-\frac{1}{3}} = 3^{x+\frac{5}{3}} - 5^{2x-\frac{5}{3}}.$

115. $7^{2x+1} - 3 \cdot 2^{3x-1} = 9 \cdot 2^{3x-2} + 5 \cdot 7^{2x-1}.$

116. $3\sqrt[3]{4^{3x+1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{9^{3x+4}} = 6\sqrt[3]{4^{3x+4}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{9^{3x+7}}.$

117. $3\sqrt{9^{x+3}} - 9\sqrt{2^x} = 6 \cdot 2^{x+3} + 8\sqrt{9^{x+1}}.$

118. $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x}+3} = 5.$

119. $\sqrt{3^{2x}+4} + \sqrt{6 - 3^{2x}} = 4.$ **120.** $4^{2x} + 5 \cdot 4^x = 36.$

121. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2 = 0.$ **122.** $\frac{10(3^x+100)}{3^x} = 15 \cdot 3^x + 2.$

123. $2^{x+3} + 2^{3-x} = \frac{208}{5}.$ **124.** $4^{2x+\frac{1}{2}} - 4^{x+\frac{1}{2}} = 144.$

125. $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8.$ **126.** $\sqrt[x]{9} - 12\sqrt[x]{3} + 27 = 0.$

127. $\sqrt[3x]{4} - \frac{3}{4}\sqrt[3x]{2} + \frac{1}{8} = 0.$

128. $3^{y+2} = \sqrt[x+1]{9^{8-x}}$ in $2^{y+2} = \sqrt[3x-3]{8^{10-3x}}.$

129. $3^{y+1} \cdot \sqrt[x^2-3]{2^{x^2-2}} = 36$ in $7^{y-1} \cdot \sqrt[5]{5^{x^2+1}} = 5.$

130. $3^x + 4^y = 265$ in $3^x \cdot 4^y = 2304.$

131. $2^x + 3^y = 13$ in $4^x + 9^y = 97.$

132. $2y^x + 3y^{-x} = \frac{515}{16}$ in $4\sqrt[x]{y} + 5\sqrt[x]{\frac{1}{y}} = \frac{21}{2}.$

133. $\log(x-3) = 0{\cdot}90309 + \log x - \log(x+3).$

134. $2\log(4x-3) = \log(x+3) + \log(2x+1).$

135. $\frac{1}{2}\log(x-1) + \log(3x+2) - \log 3 = \frac{3}{2} - \log 2.$

136. $\frac{1}{3-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=\frac{5}{3}$. 137. $x^{3+\log x}=10000$.

138. $3x^{\log x}+100x^{-\log x}=35$.

139. $x^{\log y}=4$ in $xy=200$.

140. $2^{\log x}+3^{\log y}=11$ in $2^{\log x}\cdot 3^{\log y}=18$.

141. $5^{3\log x}+3^{3\log y}=854$ in $5^{\log x}\cdot 3^{\log y}=45$.

142. $y^x+16y^{-x}=17$ in $\sqrt[x]{y}+\sqrt[x]{y^{-1}}=2\cdot 5$.

143. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}}+\frac{1}{100}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}}=\frac{2}{10^4}$ in $y=3-\log x$.

Uporabne naloge o enačbah.

144. Razstavi ulomek $\frac{27+34x}{(3+4x)(6+7x)}$ na vsoto dveh ulomkov!

145. Razstavi ulomek $\frac{18a^2+106a+150}{(a+2)(a+3)(a+4)}$ na vsoto treh ulomkov!

146. Razstavi trinom $15x^2+11x-12$ na faktorje!

147. V katerem številnem sestavu se je množitev $26\cdot 35=888$ izvršila?

148. Neko dekadično število se piše v dveh številnih sestavih s številkami 532 in 365; ako je podloga drugega številnega sestava za 2 večja od prvega, kolika je podloga prvega številnega sestava in koliko je dekadično število?

149. V katerem številnem sestavu se piše dekadično število 39698 s številkami 60408?

150. Razstavi število m na dva faktorja tako, da dobi vsota njunih kvadratov največjo vrednost!

151. Vrednost nekega ulomka je $\frac{1}{2}$. Če povečaš števec za 8 in zmanjšaš imenovalec za 8, dobiš ulomek, ki je za $1\frac{1}{8}$ večji od onega ulomka, ki nastane, če zmanjšaš števec za 8 in povečaš imenovalec za 8. Kako se glasi ulomek?

152. Če pomnožiš dvoštevilčno število s številom, ki ima isti številki v obratnem redu, dobiš produkt 1729. Če pa deliš prvo število z drugim, dobiš kvocijent 4 in ostanek 15. Katero je to število?

153. Očrtaj določeni krogli pokončen stožec *a)* z najmanjšo prostornino, *b)* z najmanjšim površjem!

154. Včrtaj določeni polukrogli pokončen valj z največjim plaščem!

155. *A* kupi za 400 K sukna; če bi plačal za vsak meter sukna 1 K manj, bi dobil za isti denar 20 metrov več. Koliko metrov sukna je kupil?

156. *A* in *B* imata pri skupni kupčiji 340 K dobička. *B* je 400 K več vložil ko *A*. Če dobi *A* na kapitalu in dobičku 3360 K nazaj, koliko je vložil?

157. Dve točki sta določeni po $M_1(x_1, y_1)$ in $M_2(x_2, y_2)$. Poišči v abscisni osi tisto točko M, za katero je izraz $\overline{MM}_1^2 + \overline{MM}_2^2$ najmanjši.

158. V trapezu so tri stranice enake in sicer je vsaka $= a$. Kolika mora biti četrta stranica, da je trapezova ploščina največja?

159. Tri števila, katerih vsota znaša 28, tvorijo stalno sorazmerje. Ako pomnožiš notranji člen tega sorazmerja z vsoto zunanjih členov, dobiš produkt 160. Katera so števila?

160. V katerem sorazmerju je vsota vseh štirih členov 72, produkt notranjih členov 140 in vsota kvadratov vseh členov 2050?

161. *B* proda njivo za 513 K; za koliko je kupil njivo, če je imel pri prodaji tretjino toliko odstotkov dobička, kakor je zanjo plačal?

162. *A* ima 24000 K kapitala in porabi od obresti vsako leto 800 K, ostanek pa priklopi h kapitalu. V začetku tretjega leta ima 24820 K kapitala. Po koliko odstotkov je bil naložen kapital?

163. Koliko časa in po koliko odstotkov moraš 2400 K kapitala naložiti, da dobiš 288 K obresti in to tudi tedaj, če naložiš isti kapital za 1 leto manj in po 2 % više?

164. Cev *A* napolni neko prazno posodo v 2 urah poprej, ko izprazni cev *B* isto polno posodo. Ako odpreš obe cevi 20 ur, je posoda le do polovice napolnjena. V katerem času napolni prva cev prazno posodo in v katerem času izprazni druga cev polno posodo?

165. A potrebuje za neko delo 2 dni več in B $4\frac{1}{2}$ dneva več nego A in B skupaj. V katerem času izvršita A in B skupaj dotično delo?

166. Delavci neke tovarne so enako plačani in zaslužijo 65 K na dan. Če bi tovarna 7 delavcev odpustila in vsakemu izmed ostalih delavcev dnevni zaslužek za 40 h znižala, bi znašal dnevni zaslužek 39 K 60 h. Koliko delavcev je bilo sprva in koliko je vsak zaslužil?

167. Načrtaj skoz točko C določenega kroga tangento in s to tangento vzporedno tetivo AB. Kolika mora biti razdalja med točko C in tetivo AB, da je trikotnik ACB največji?

168. Določi izmed vseh prisekanih stožcev, ki imajo enake višine in pri katerih znaša vsota polumerov v osnovnih ploskvah $2a$, tistega, ki ima najmanjšo prostornino.

169. Sprednje kolo nekega voza se zavrti na 1260 m dolgi cesti 105krat več nego zadnje kolo. Če bi bil obod vsakega kolesa za $\frac{1}{2}$ m manjši, bi se sprednje kolo na isti poti le 80krat več zavrtelo ko zadnje kolo. Kolik je obseg vsakega kolesa?

170. Dve telesi se pomikata po krakih pravega kota proti vrhu in pretečeta po 6 m in 8 m vsako sekundo. V začetku sta telesi oziroma 103 m in 76 m oddaljeni od kotovega vrha. Po koliko sekundah sta telesi 109 m narazen?

171. Dve telesi se pomičeta po premicah, ki stojita pravokotno druga na drugi, proti njiju presečišču in pretečeta vsako sekundo oziroma po 3 m in 4 m. V začetku svojega premikanja sta telesi 20 m in po 2 sekundah 10 m narazen. Kako daleč je bilo sprva vsako telo od presečišča premic?

172. Sela A in B gresta istodobno od istega kraja M proti 60 km oddaljenemu kraju N. Sel B prehodi vsako uro $\frac{1}{3}$ km več ko A in pride za $\frac{3}{4}$ ure poprej v kraj N. Koliko km prehodi A in koliko B v eni uri?

173. Dva popotnika gresta od krajev A in B, ki sta 45 km narazen, istodobno drug proti drugemu in se srečata po 5 urah. Prvi popotnik pride $2\frac{1}{4}$ ure poprej v kraj B ko drugi v kraj A. Kje sta se srečala?

174. Kolesar se pelje ob osmih zjutraj od kraja A proti 9 km oddaljenem kraju B in odtod proti kraju C. Istodobno odide od kraja B proti kraju C pešec, ki potrebuje za vsak kilometer $4\frac{1}{4}$ minute več kot kolesar. Če kolesar dohiti pešca ob 11. uri 20. minuti predpoldne, koliko pot napravi vsak v 1 minuti?

175. Pri katerem mnogokotniku je število diagonal za 18 večje od števila stranic?

176. Ena kateta pravokotnega trikotnika je za 17 m večja od druge. Če podaljšaš manjšo kateto za 20 m in večjo za 10 m, postane hipotenuza za 20 m večja. Kolika je krajša kateta?

177. Hipotenuza pravokotnega trikotnika meri 35 m in vsota iz ene katete in njenega vzmeta na hipotenuzo znaša $33 \cdot 6\ m$; koliki sta kateti?

178. Določi stranice pravokotnega trikotnika, če znaša vsota iz ene katete in hipotenuze 50 m, vsota iz druge katete in hipotenuze pa 81 m.

179. Določi izmed pravokotnikov z obsegom $2s$ tistega, ki ima *a)* največjo ploskev, *b)* najmanjšo diagonalo.

180. Očrtaj kvadratu s stranico a najmanjši enakokraki trikotnik tako, da leži kvadratova osnovnica na trikotnikovi osnovnici.

181. Včrtaj določenemu kvadratu enakokrak trikotnik tako, da je njegov obseg najmanjši in da leži vrh v kvadratovem oglišču.

182. Ako načrtaš skoz točki $x_1 = -\frac{b}{2a} + m$ in $x_2 = -\frac{b}{2a} - m$ funkcijske črte $y = ax^2 + bx + c$ tangenti, sta kota teh tangent s pozitivno abscisno osjo suplementarna. Dokaži to!

183. Pri katerem pokončnem valju je obseg osjega preseka najmanjši, če ima plašč (površje) določeno velikost?

184. Pokončnemu stožcu s stranico a naj se očrta pokončni valj z največjim plaščem. Kolik je polumer skupne osnovne ploskve?

185. Včrtaj določeni krogli pravilno tristranično (šesterostranično) prizmo z največjim plaščem.

186. Očrtaj določeni krogli pokončni prisekani stožec z najmanjšim plaščem (najmanjšo prostornino).

187. Pri koliko elementih je razlika med številom kombinacij četrtega razreda s ponavljanjem in številom kombinacij četrtega razreda brez ponavljanja $32\frac{1}{2}$ krat toliko ko število elementov?

188. Pri koliko elementih se števili premen in kombinacij tretjega razreda brez ponavljanja razlikujeta za 5kratno število elementov?

189. Pri koliko elementih je število premen tretjega razreda s ponavljanjem za 225 večje nego število premen tretjega razreda brez ponavljanja?

Uporabne naloge o postopicah.

190. Razdeli 756 K med več oseb tako, da dobi prva oseba 80 K in vsaka naslednja za 4 K manj ko prejšnja. Koliko je oseb?

191. Pri kateri aritmetični postopici je osmi člen enak kvadratu četrtega člena in šesti člen enak srednji geometrijski sorazmernici med 4. in 11. členom?

192. Kako se glasi aritmetična postopica, ki šteje 21 členov, če znaša vsota prvih 20 členov 650 in vsota zadnjih 20 členov 710?

193. Vrini med prvi in drugi člen postopice 2, 5, 8 . . . toliko novih členov, da je vsota vrinjenih členov, ki tvorijo aritmetično postopico, le za 1 manjša ko vsota prvih 20 členov prvotne postopice.

194. Katero liho število je za 1 manjše ko peti del vsote vseh prejšnjih lihih števil?

195. Vsota iz 5. in 8. člena aritmetične postopice znaša 21 in vsota iz kubov istih dveh členov 2457; kolika je vsota prvih 33 členov?

196. Pri aritmetični postopici z razliko $\frac{1}{2}$ znaša vsota prvih n členov $236\frac{1}{2}$; ako prišteješ k tej vsoti naslednjih 7 členov, dobiš $418\frac{1}{2}$. Določi n in prvi člen!

197. Štiri števila tvorijo aritmetično postopico; produkt vseh 4 števil je 880 in razlika med kvadratoma srednjih števil znaša 39. Katera so števila?

198. Stranice pravokotnega trikotnika tvorijo aritmetično postopico in hipotenuzi pripadajoča višina meri 21·6 *m*; kolike so stranice?

199. Določen kapital je naložen po 5 % in se poveča vsako leto za 250 K; ako znašajo po 10 letih letne obresti vsega kapitala 1812·5 K, kolik je prvotni kapital?

200. Kako se glasi geometrijska postopica, pri kateri je 11. člen za $7\frac{31}{32}$ večji od tretjega in 9. člen za $1\frac{7}{8}$ večji od petega?

201. Pri geometrijski postopici 4 členov znaša vsota prvega in zadnjega člena 172 in vsota srednjih členov 28; kolik je prvi člen in kolik kvocijent?

202. Ako prišteješ prvim 4 členom aritmetične postopice zaporedoma števila 5, 6, 9, 15, dobiš geometrijsko postopico; kako se glasi aritmetična postopica?

203. Ako odšteješ zaporedoma od prvih 4 členov geometrijske postopice prve 4 člene aritmetične postopice, dobiš razlike 1, 2, 8, 24. Kako se glasi geometrijska in kako aritmetična postopica?

204. Vsota geometrijske postopice, ki šteje osem členov, znaša 250; vsota sodih členov je za 150 večja od vsote lihih členov. Kako se glasi postopica?

205. Kolika je vsota brezkončne geometrijske postopice, pri kateri je produkt prvih treh členov 1728 in vsota iz kubov teh členov 15768?

206. Kolika je vsota brezkončne geometrijske postopice, pri kateri znašajo prvi trije členi 351 in naslednji trije členi 13?

207. Koliko členov moraš med 3 in 46875 vriniti, da dobiš geometrijsko postopico z vsoto 58593?

208. Razdeli določeno vsoto denarja med 5 oseb tako, da tvorijo deleži geometrijsko postopico in da znašata 2. in 3. delež 8400 K, prvi in tretji pa 10000 K. Koliko denarja se je razdelilo?

209. Določi 5 števil tako, da tvorijo prva 4 števila aritmetično postopico z vsoto 30 in zadnja tri števila geometrijsko postopico in da je produkt iz 3. in 5. števila 24krat večji od drugega števila!

210. Krogli s polumerom r se včrta pravilni tetraeder, tetraedru se včrta krogla, tej krogli se včrta zopet tetraeder i. t. d. Kolika je prostornina *a)* vseh krogel, *b)* vseh tetraedrov?

211. Določeni kocki se včrta krogla, tej krogli se včrta kocka, tej kocki se zopet včrta krogla i. t. d. Kolika je vsota prostornin *a)* vseh kock, *b)* vseh krogel?

212. Kapital 25110 K je po $3\frac{3}{4}\%$ naložen na obrestne obresti. Za koliko se mora ta kapital zmanjšati koncem vsakega leta, da bode njegova vrednost čez 10 let znašala 25604 K?

213. Neki kapital, ki je po $4\frac{1}{2}\%$ naložen, se je v 18 letih podvojil, akoravno se je koncem vsakega leta zmanjšal za 420 K. Kolik je bil kapital?

214. Kapital 1300 K se koncem vsakega leta poveča za 200 K; drugi kapital znaša 5960 K in se koncem vsakega leta zmanjša za 200 K. Čez koliko let bosta kapitala enaka, če se računajo obresti po 4%?

215. Nekdo ima vsaka tri leta po 4000 K plačati in sicer povsem 10 krat. S katerim kapitalom se da ta dolg takoj poravnati, če se računajo obresti po $3\frac{1}{2}\%$?

216. Nekdo si izposodi pri hranilnici kapital 8000 K. Ta dolg hoče tako poravnati, da plača skoz 15 let koncem vsakega leta enako vsoto; kolika je ta vsota, če hranilnica za posojeni denar računa obresti po 5%, za prejeti denar pa po 4%?

217. Kapital 10000 K se naloži 10 let po 4% na obrestne obresti; skoz koliko naslednjih let dobiš od tega kapitala rento 1825 K?

218. Kolik kapital moraš 18 let po 5% naložiti na obrestne obresti, da dobiš potem skoz 13 naslednjih let rento 1200 K?

219. *A* hoče od 20. leta naprej skoz 16 let in sicer koncem vsakega leta dobivati rento 1000 K. Koliko mora sedaj za rento plačati, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$?

220. Nekdo ima skoz 15 let dobivati rento 1250 K; koliko časa se mora tej renti odpovedati, da dobiva potem skoz 12 let rento 1785·5 K, če se računajo obresti po $3\frac{1}{2}\%$?

221. Letna renta 1000 K, ki se ima še 10 krat izplačati, se zamenja za poluletno rento 597·7 K; koliko časa se dobiva zadnja renta, če se računajo obresti po 4%?

222. Pri igri „domino“ so kameni zaznamovani z vsemi kombinacijami dveh števil od 0 do 8. Kolika je verjetnost, da obrneš kamen, ki ima število 5?

223. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama števili 2 in 6?

224. Na tleh, ki imajo obliko pravokotnika s stranicama 6 *m* in 3 *m* so enaki krogi v mozaiku, ki se dotikajo od zunaj in imajo premer 3 *dm*. Na tla vržeš okroglo ploščo s premerom 2 *dm*. Kolika je verjetnost, da plošča nikjer ne leži čez rob krogov?

225. Pri neki dobrodelni ustanovi so določili s srečkanjem vsakoletne nagrade za pet revnih nevest. V nekem letu se oglasi 40 deklet in med njimi tri sestre. Kolika je verjetnost, da *a*) nobena teh treh sester ne dobi nagrade, *b*) da jo dobi ena, *c*) da jo dobi najstarejša, *d*) da jo dobita dve, *e*) da jo dobe vse tri, *f)* da jo dobita mlajši dve.

226. Kolika je verjetnost, da potegnem iz 32 kart igre „pike“, kjer so štiri kralji, dvakrat zapored kralja?

227. Nekdo zapiše štiri različna troštevilčna števila. Kolika je verjetnost, da so prva tri števila liha, četrto pa sodo?

228. Kolika je verjetnost, iz posode, kjer je 11 enakih krogel, trikrat zapored sodo število krogel vzeti, četrtič pa liho, *a*) ako se vsaka krogla vrže vedno nazaj, *b*) ako se vsaka krogla obdrži?

229. V vrečici so loterijske številke od 1 do 90. Nekdo stavi 10 vinarjev, da potegne število. ki je manjše od 46. Kolik je dobitek pri pravilni stavi?

230. Kolika je verjetnost, da vrže kdo s tremi enakimi novci dvakrat zapored vsaj po dve podobi? Kolika je nevarnost izgube, ako je stavil 2 K?

231. Kolika je verjetnost, da učaka 5 leten otrok *a)* 35. leto, *b)* 55. leto?

232. Kolika je verjetna starost *a)* dveletnega otroka, *b)* 9 letnega dečka, *c)* 18 letnega mladeniča, *d)* 35 letnega moža?

233. Izračunaj za poskušnjo iz 4 % tablice umrljivosti za zavarovanje na smrt diskontovano število še živečih (D_n) za *a)* 23 letnike, *b)* 43 letnike, *c)* 73 letnike.

234. Za novorojenca je založil nekdo 60.000 K. Kakšno rento bo užival dotičnik do svoje smrti? Obrestna mera 3 %.

235. Neka 30 letna oseba se zavaruje na doživetje 60 let ali na smrt za 1000 K in plačuje zato letnih 29·69 K tarifne premije. Koliko znaša čista letna premija? Za koliko % je tarifna premija večja?

236. Ista naloga za 35 letno osebo, ki se zavaruje za 2000 K na doživetje 65 let ali na smrt in plačuje 61·56 K letne tarifne premije.

Zgodovinski dostavki.

Matematična veda se je razvijala le polagoma, kakor je potreba zahtevala. Tako nam zgodovina priča o starih Feničanih, da so bili izvrstni trgovci, torej gotovo dobri računarji. Egipčane so vsakoletne poplave reke Nila kmalu prisilile, da so zgradili nasipe, prekope in vodotoke, in tako so se izurili v zemljemerstvu in v praktični geometriji. Stari Kaldejci so častili zvezde kakor božanstva in postali na ta način prvi zvezdogledi. Pa tudi Indijci in Kitajci niso zaostali za njimi; opazovali so solnčne in lunine mrke in zvezde repatice ter nam ohranili najstarejšo astronomsko kroniko.

Prvi korak do znanstvene matematike sploh so bili številni sestavi. Od Asircev in Babiloncev smo prejeli seksagezimalni številni sestav, ki se kaže še sedaj v razdelitvi kroga na stopinje, minute in sekunde in istotako v razdelitvi časa.

Izvrstni računarji so bili stari Indijci. Od njih imamo takozvani pozicijski številni sestav, ki sloni na dvojni vrednosti vsake številke. S pomočjo tega sestava je omogočeno z malim številom znamenj kratko in hitro računanje z velikimi števili. Zlasti uvedba ničle pomeni velik napredek v pismenem številjenju. Indijski številni sestav je tako duhovit in vendar tako preprost, da se je le čuditi, kako da se je seznanila Evropa ž njim šele v srednjem veku (v 13. stoletju) po Arabcih iz Španske. Indijci so tudi že razreševali enačbe prve in druge stopnje. (Glej staroindijsko nalogo št. 135 na strani XLVII.) Drugi koren in negativna števila so jim bila tudi že znana. V razreševanju nedoločnih enačb pa so jih prekosili Kitajci.

O napredku starih Egipčanov v aritmetiki nas poučuje pisar Ahmes (Amasis med 2000 in 1700 pr. Kr.) v svoji zbirki računskih vaj. Poleg celih števil obdeluje tudi navadne ulomke s števcem ena. V tej zbirki so razrešene tudi nekatere enačbe z eno in dvema neznankama.

Stari Grki so gojili v prvi vrsti znanstveno geometrijo, pa tudi v aritmetiki in algebri so dosegli lepe uspehe. Najvažnejši zastopnik aritmetike je bil filozof Pitagora (rojen na otoku Samu okrog 570 pr. Kr.), ustanovitelj italske šole v Krotonu v južni Italiji. Njegova šola se je bavila zlasti z lastnostmi celih števil, s proporcijami in progresijami. On je prvi razvil matematično teorijo tonov in je sklepal iz razdalje plasti, v katerih se sučejo svetovi, na „harmonijo sfer". Na geometrijski način je prišla ta šola do pojma iracijonalnosti. Sčasoma pa se je izgubljalo njeno delovanje bolj in bolj v računske igrače in v brezplodne mistične spekulacije s celimi števili.

S Platonom (ki je bil rojen okrog 430 pr. Kr. v Atenah) je zopet oživelo zanimanje za pravo aritmetiko. Platonova šola na akademiji v Atenah je uvedla v matematično znanost nove indirektne dokaze. Vendar pa so Platonovci gojili aritmetiko bolj kot pomožno vedo, isto velja tudi za največjega učenjaka starega veka, za Aristotela.

Ko je uničil macedonski kralj Aleksander docela samostojnost grških držav, je začela matematična veda na Grškem propadati in Atene niso bile več središče znanstvenikov, njih mesto je prevzela nova Aleksandrija v Egiptu. Nasledniki Aleksandra Velikega v Egiptu so bili Ptolemejci, ki so si mnogo prizadeli, da se je razvila v Aleksandriji grška (helenska) matematična veda do one stopnje, da je več ko tisoč let noben narod v Evropi ni prekosil. Najznamenitejši matematik prve aleksandrijske dobe je Evklid (okoli 300 pr. Kr.) V svoji knjigi „Elementa" (*στοιχεῖα*) je zbral vse matematično znanje tedanjega sveta. Ta knjiga je bila pozneje stoletja in stoletja vzor pregledne razvrstitve in metodičnega dokazovanja. Aritmetiko obdeluje pisatelj v 7., 8. in 9. knjigi. V isto dobo spada tudi Eratosten (rojen okrog 276 pr. Kr.), ki je znan po svojem načinu, kako se dobijo vsa praštevila do poljubne meje (Eratostenovo sito). Nekako ločen od teh dveh in od središča v Aleksandriji je živel na Siciliji Arhimed (rojen 287 pr. Kr. v Sirakusah). Njemu pa je služila aritmetika le v toliko, kolikor jo je rabil za svoje geometrijske in mehanične študije.

V aleksandrijski dobi so se uvedli pismeni računi. Poprej in tudi še dolgo pozneje so imeli nekako pripravo „abacus“, kjer so na deski ali na palčicah sestavljali kroglice in vozle in ž njimi računali. Še celo v srednjem veku so na ta način računali „abacisti“, sčasoma pa so jih čisto izpodrinili „algoritmiki“, ki so računali po indijskem, oziroma po aleksandrijskem načinu.

Ko so si osvojili Rimljani Egipet, je začela helenska matematična veda nazadovati. Šele za rimskih cesarjev Hadrijanov in Antoninov je zopet nekoliko oživela. V tej drugi aleksandrijski dobi je poleg slavnega astronoma Klavdija Ptolomeja (okrog 125 do 160 po Kr.) za aritmetiko in algebro posebno važen Diofant iz Aleksandrije (sredi 4. stoletja po Kr.). V svoji knjigi „13 aritmetičnih problemov“ je položil temelj sedanji algebri. Bil je zelo izurjen in iznajdljiv v razreševanju določilnih in nedoločilnih (diofantičnih) enačb. Poskušal je že tudi uporabljati algebro v geometriji, kar je šele v novejši dobi slavni Descartes takorekoč iznova začel v analitični geometriji.

Med Rimljani, ki so bili toliko časa gospodarji sveta, se ni pokazal noben odličen zastopnik matematične vede. Učili so se pač pri Grkih in prevajali njihova dela, toda dosegli niso nikdar svojih učiteljev. Kot izvežbani juristi so prvi spoznali obrestne obresti. Od Rimljanov imamo več matematičnih izrazov, ki so še sedaj splošno v rabi. Ti izrazi pa so nastali v poznejši latinski dobi, ko so prevajali grške pisatelje. V tem oziru je posebno znan Avrelij Kasiodorij (475—570 po Kr.).

Po razpadu velikorimske države je jela tisočletna grškorimska kultura hirati in matematična veda se ni mogla dalje razvijati. Leta 640. so pridrli mohamedanski Arabci v Egipet in kalif Omar je dal zažgati v Aleksandriji slavno veliko knjižnico. In zdelo se je, da je to smrtni udarec helenski in staroveški kulturi sploh. Toda ravno isti zmagonosni Arabci, ki so si z mečem v roki podvrgli severno Afriko in pridrli tudi na Špansko, ravno ti so postali nekaki posredovalci staroklasične kulture. Arabske visoke šole v Bagdadu in Damasku in pozneje v Kordovi so se ponašale s pravimi učenjaki matematične vede.

Arabci so bili v prvi vrsti učenci Grkov, pa tudi od vzhodnih Indijcev so prejeli marsikaj (n. pr. številni sestav). Posebno sta se odlikovala arabska matematika Mohamed ibn Mûsâ (okrog 800 po Kr.) tudi Alchvarismi imenovan in pa Thâbit ibn Kurrah. Arabci so že poznali pri drugem korenu dvojno vrednost in razreševali so že enačbe tretje stopnje, pa tudi algebro so uporabljali v geometriji. Beseda algebra sama je arabskega izvora. Na visoki šoli v Kordovi se je seznanil z arabskimi matematiki francoski menih Gerbert (poznejši papež Silvester II., 940—1003), ki je pač prevzel arabske številke, pa je vendar ostal še abacist.

Doba od 10. do 16. stoletja je za aritmetiko in algebro doba posnemanja grških in arabskih učenjakov. Nekaka izjema je 13. stoletje, ko je živel duhoviti računar Leonardo Pisano (literarno delovanje okrog 1202—1228). Njegovo delo „Liber Abaci“ (dovršeno 1202) obsega vso tedanjo aritmetiko in algebro. Za poskušnje pri računih je rabil in tudi dokazal staroindijsko poskušnjo z devetinskimi ostanki. Njegov sodobnik dominikanec Jordanus Nemorarius (umrl 1236) je rabil za števila že črke. Ali za tisto dobo sta bila Leonardo in Jordanus preučena, sodobniki ju niso umeli in prešlo je zopet nekaj stoletij, da je zopet oživelo zanimanje za to vedo.

Za križarskih vojsk so upoznali laški kupci arabske in bizantinske računarje in na laških visokih šolah so se učili pozneje Nemci algebre. Na to spominjajo stare računice „Die welsche Praktik“ in pa „Die Koß“ od laške besede cosa = reč, ki je pomenila neznanko. Iz arabskih virov sta črpala angleški menih Roger Bacon in Nemec Albertus Magnus.

Iz 16. stoletja so na glasu laški matematiki Hieronimo Cardano iz Milana (1501—1576), Niccolo Tartaglia iz Brescie (1501—1557) in Lodovico Ferrari (1522—1565). Cardano je dal splošni obrazec za razreševanje enačb tretje stopnje, pri njem se nahaja tudi že drugi koren negativnih števil. Sedanjo pisavo korenov je začel Girard (1600), izraz za realna in imaginarna števila pa je rabil šele Descartes. Imaginarno enoto je uvedel največji nemški matematik Karl Friderik Gauß (1777—1855), ki je dokazal potem s pomočjo kompleksnih števil, da ima vsaka algebrajska enačba toliko korenov, kolikršna je stopnja enačbe (Dissertation 1799). R. Descartes je uvedel sedanjo pisavo potenc in rabil za neznanke črke x, y, z... Leonhard Euler (1707—1783) pa je prvi jel rabiti za funkcijo pisavo $f(x)$. Tatarglia se je pečal z iracijonalnimi imenovalci ulomkov in je prvi pravilno izračunal obrestne obresti. Kako se enačbe 4. stopnje s pomočjo Cardanovega obrazca razrešujejo, je prvi dokazal Ferrari. Šele v novejšem času je Gauß dokazal, da se algebrajske enačbe pete stopnje in višjih stopenj splošno ne dajo razrešiti. Iz 16. stoletja se tudi pogosto omenja Francesco Maurolico (1494—1575), ki je prvi uvedel induktivni sklep od n na $n+1$.

Največji francoski matematik v tej dobi je brezdvomno François Viète (Vieta, 1540—1603). Obdelal je zlasti proporcije in „regeldetrijo". Uvedel je v računih vseskozi pozitivna in negativna števila. Računska znamenja $+$ in $-$ pa je prvi rabil slavni slikar in filozof Leonardo da Vinci (1452—1519). Namesto posebnih števil je uvedel Viète občna števila in je postal tako ustvaritelj občne aritmetike.

Izmed nizozemskih matematikov sta posebno znana Ludolf von Ceulen (1540—1610), ki je preračunal število π na 35 decimalk, in pa Simon Stevin po svoji algebri (1585), kjer je praktično začel z računi decimalnih števil. Prvi se je pač že poskušal z njimi Nemec Regiomontanus (Joh. Müller 1436—1476).

Z uvedbo decimalnih ulomkov, še bolj pa z iznajdbo logaritmov se je razvijala matematika odslej jako hitro. Za prvenstvo iznajdbe logaritmov sta se kosala Švicar Jos. Bürgi in pa Škot John Neper (Napier), ki je prvi dal natisniti (1614) razpravo o logaritmih, in sicer z osnovnim številom $e = 2{\cdot}71828\ldots$ (naravni ali hiperbolski logaritmi). Deset let pozneje je izdal Anglež Henry Briggs prve tablice logaritmov števil 1 — 20.000 in 90.000 — 100.000, in sicer z osnovnim številom 10 (Briggovi ali navadni logaritmi). Za njim je Nizozemec Adrian Vlacq dopolnil še logaritme števil 20.000 — 90.000. Kmalu nato so se prikazale tudi tablice logaritmov goniometrijskih funkcij. Naš rojak baron Jurij Vega je Vlacq-ove tablice popravil in pomnožil ter jih izdal pod naslovom „Thesaurus logaritmorum" (1794) na 10 decimalk.

V 17. stoletju se je pečal posebno z aritmetiko Francoz Pièrre de Fermat (1608—1665), ki je začetnik znanstvene teorije števil. Obdelal je zlasti kombinacije in pa račune o verjetnosti. Na istem polju so delovali še: Francoza Blaise Pascal (1623—1662) in Pièrre Simon Laplace, potem oba švicarska brata Jakob in Janez Bernoulli (1654—1705, 1667—1748) in Anglež Isaak Newton (binomski stavek 1676), pozneje tudi še Leibniz, Euler, Lagrange i. t. d.

Jako je napredovala matematična veda z iznajdbo infinitezimalnih računov (z diferencijali in integrali) po Newtonu in Leibnizu. Ta račun se je razvil, kakor povestnica uči, iz geometrijskih problemov. Že Arhimed je bil napravil nekak začetek s svojo metodo izčrpanja (ekshauscijsko metodo), ko je primerjal ploščino kroga s ploščino včrtanega in očrtanega mnogokotnika. Isti način je uporabljal pozneje z dobrim uspehom Lah Bonaventura Cavalieri (okrog 1591 – 1647), pozneje tudi Angleža Barrow in Wallis in Francoza Roberval in Fermat. Ko je nato še Réné Descartes (1596—1650) v svoji znameniti knjigi „Geométrie" (1637) dal podlago za analitično geometrijo, bili so se izpolnili vsi pogoji in dovršile vse predpriprave za infinitezimalni račun. Odločilen korak sta napravila Anglež Isaak Newton (1642 – 1727) in pa Nemec Gottfried Wil. von Leibniz (1646—1716). Newton je poslal svojo razpravo l. 1669. akademiji v London, v tisk pa je prišla šele l. 1736. Leibniz pa je izdelal svoj rokopis l. 1675. in ga dal tiskati l. 1684. Vsled tega je nastal med njima dolgotrajen znanstveni prepir za prvenstvo. Vsekako pa je Leibnizova zasluga, da je uvedel v matematiko znake za nove račune diferencijalov in integralov in s tem določil enotno pisavo in enotni matematični jezik. (M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathem., 4 deli 1880—1907.)

Infinitezimalni račun je odslej obvladal vso matematično vedo in odkril znanosti sploh čisto nova pota. Matematična veda se je razvijala odslej z neznansko bitrico. Uporabljali so novi račun v geometriji, v fiziki in astronomiji, v moderni tehniki i. t. d. Cela vrsta učenjakov raznih narodov je tekmovala odslej v spopolnitvi teh računov in je dovedla na ta način matematično vedo na tako visoko stopnjo, da se lahko ponaša s pridevkom najeksaktnejše vede sploh.

Izmed domačih pisateljev matematikov se večkrat omenjajo:

1. Andrej Kobal (Kobavius, rojen v Cirknici 1594, umrl v Trstu 1654). Bil je profesor matematike na jezuitskih šolah v Ljubljani in je spisal knjigo o astronomiji.

2. Joahim Košutnik (rojen v Beljaku 1714, umrl v Mariboru 1789) iz reda jezuitov. Bil je profesor na akademični

gimnaziji na Dunaju, pozneje pa v Gradcu vodja zvezdarne. Spisal je l. 1754. knjigo „Prima elementa Arithmeticae, Algebrae, Geometriae, Trigonometriae planae et sphaericae, Architecturae civilis et militaris". (Posneto iz razprave Fridol. Kaučiča „Znameniti Slovenci".)

3. Baron Jurij Vega (rojen Veha v Zagorici pri Moravčah 1754, utonil v Donavi 1802), profesor matematike na vojaški šoli na Dunaju. Vega je bil tudi slaven junak, ki se je odlikoval v vojskah s Turki in s Francozi in je postal nazadnje baron in podpolkovnik. L. 1783. je izdal logaritemske in trigonometrijske tablice na 7 decimalk, ki so doživele 60 izdaj. L. 1794. pa je izšel njegov veliki logaritmovnik „Thesaurus logarithmorum" na 10 decimalk. Za šolsko rabo je izdal svoja predavanja o višji matematiki „Vorlesungen über Mathematik" (1786—1802).

4. Dr. Franc vitez Močnik (rojen v Cerknem na Goriškem 1814, umrl 1892), profesor matematike v Lvovu in Olomucu. Služboval je pozneje v Ljubljani kot deželni šolski svetnik in v Gradcu kot nadzornik. Pisal je zlasti učne knjige za ljudske in srednje šole. Njegove knjige so doživele mnogo izdaj ter se še rabijo. Preložili so jih v slovanske in razne druge jezike ter so bile v rabi na Avstrijskem, Ogrskem, Laškem in Nemškem.