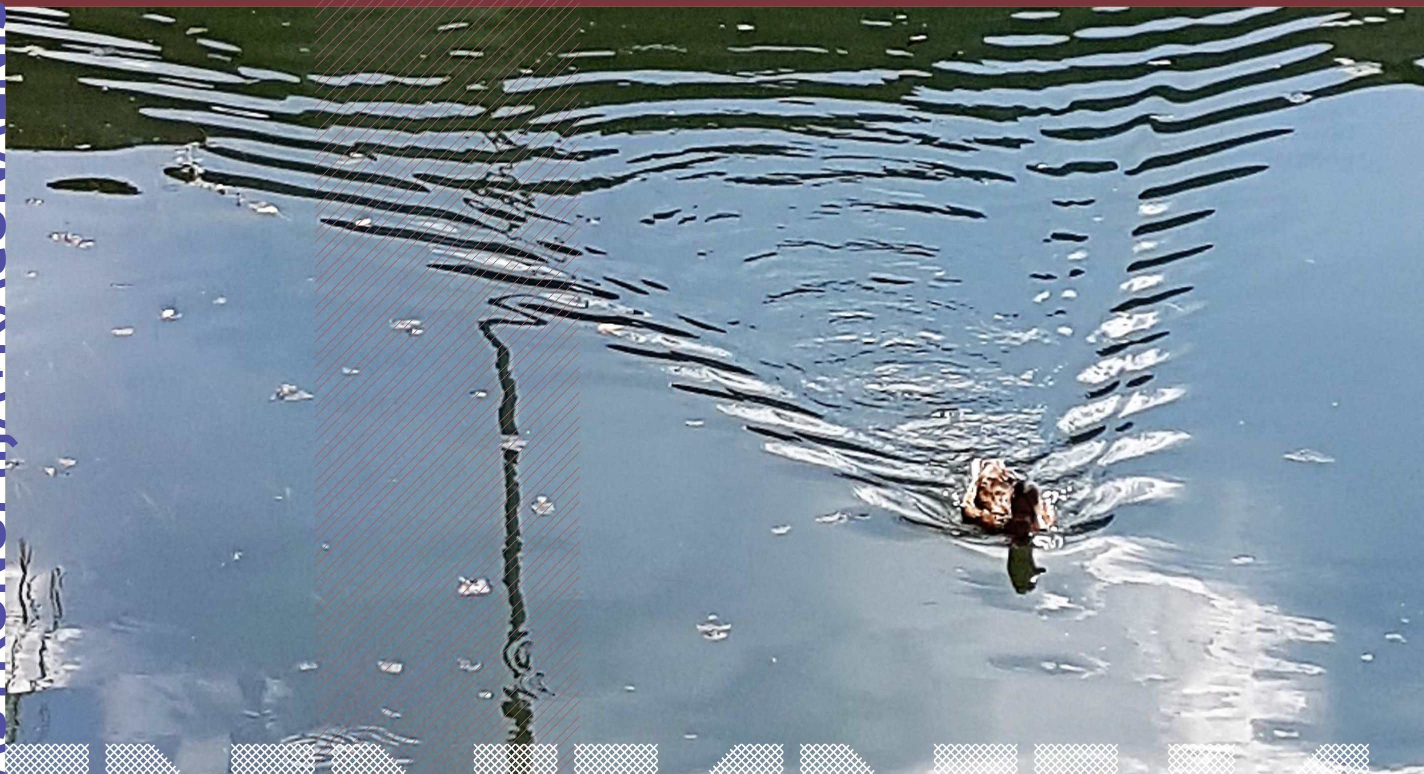
1

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

PRESEK LETNIK 45 (2017/2018) ŠTEVILKA **1**



PRESEK

- → DIRICHLETOV PRINCIP IN PARADOKS ROJSTNEGA DNEVA
- → KAKO NA ZASLONU PRIKAZATI BARVE MILNIČNIH MEHURČKOV?
- → DOLŽINA OPOLDANSKE SENCE
- → RUBIKOVO MAŠČEVANJE

ISSN 0351-6652

MATEMATIČNI TRENUTKI

Načrtovanje boljših biciklov

Čeprav so bicikli precej enostavne naprave, že več kot stoletje ne znamo natančno odgovoriti na vprašanja o njihovem delovanju. Tako nimamo natančnega odgovora na vprašanje, katere sile so odgovorne za stabilno vožnjo, ali pa zakaj lahko premikajoči se bicikel vozi brez voznika, če le ohranja hitrost. Matematiki, fiziki in inženirji skušajo s pomočjo modelov, ki vključujejo diferencialne enačbe, geometrijo in linearno algebro, odgovoriti tudi na tovrstna vprašanja. Hkrati bi radi pomagali pri poskusih načrtovanja drugačnih biciklov, ki bi bili bolj stabilni in lažje vodljivi.

Trenutna oblika biciklov temelji na poskušanju in učenju iz napak. V zadnjem času pa so raziskovalci s pomočjo matematike in mehanike zapisali enačbe, ki opisujejo delovanje glavnih delov bicikla: njegovih koles, okvirja in krmila. Ugotovili so, da ne drži dolgoletno prepričanje, da se mora prednje kolo dotikati tal za točko, kjer bi podaljšek osi krmila dosegel tla (glej sliko). Najprej so s pomočjo matematike, nato pa še eksperimentalno, pokazali, da je lahko stabilen tudi bicikel, ki krši to pravilo. S pomočjo dobljenih enačb bo možno raziskovati čisto nove koncepte, ki bodo s pomočjo računalnika ali klasičnega načrtovanja vodili do inovacij pri bodočih oblikah biciklov.

Za več informacij si preberite članek *Physics on Two Wheels*, ki ga je objavil Brendan Borell v reviji *Nature* 21. julija 2016 na straneh 338–341.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1700 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

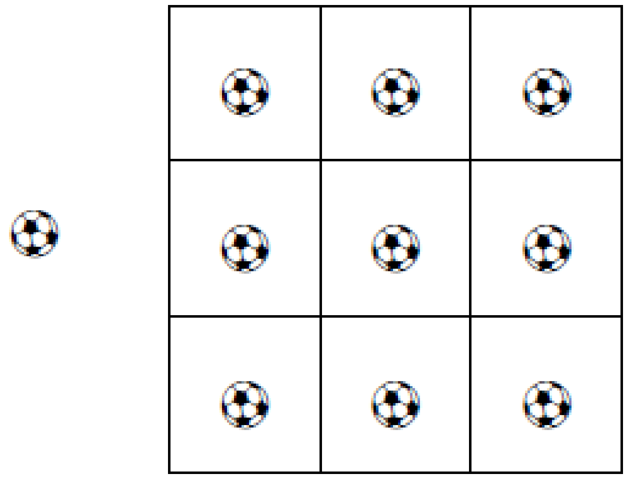
Kazalo

Slika na naslovnici: Raca plava po mirni vodni gladini s hitrostjo večjo od hitrosti vodnih valov ter pri tem za seboj pušča značilno, klinasto valovno brazdo. Več o pojavu govori prispevek v Naravoslovni fotografiji. Foto: Tina Ogrinc.

Dirichletov princip in paradoks rojstnega dneva

Primož Moravec

Dirichletov princip ni nič drugega kot enostavno dejstvo, ki ga lahko formuliramo na naslednji način: *Če v n škatel razporedimo $n+1$ žogic, sta v eni škatli vsaj dve žogici.* **Na prvi pogled nič posebnega, toda to načelo je v matematiki zelo uporabno. Prvič se je pojavilo v literaturi z delom Dirichleta (1805–1859) v teoriji števil, zato tudi nosi njegovo ime. Prispevek o Dirichletovem principu je že izšel v Preseku [1] pred 30-imi leti.**



SLIKA 1.
Deset žogic in devet škatel

Tudi v tem članku bomo prikazali nekaj primerov uporabe Dirichletovega principa, na koncu pa bomo problem razporejanja žogic v škatle pogledali še z drugega, verjetnostnega zornega kota.

Oglejmo si nekaj osnovnih primerov. Recimo, da imamo skupino 367 ljudi. Potem med njimi obstajata vsaj dve osebi, ki praznujeta rojstni dan na isti dan. Podoben sklep pokaže, da med poljubnimi štirimi naravnimi števili obstajata dve, ki imata isti ostanek pri deljenju s 3. Poleg tega očitno velja nekoliko splošnejša različica Dirichletovega principa, ki se glasi: Če v n škatel razporedimo $kn+1$ žogic, je v vsaj eni škatli več kot k žogic.

Lotimo se še malo zahtevnejših primerov.

Problem 1: V sobi je 2017 oseb. Pokaži, da obstajata vsaj dve osebi, ki imata enako število znancev v sobi.

Rešitev. Imejmo 2017 škatel, označenih s števili od 0 do 2016, in osebo spravimo v škatlo n, če ima v sobi natanko n znancev. Če je kakšna oseba v škatli številka 0, potem ni nikogar v škatli številka 2016, in obratno. Torej imamo v resnici na voljo 2016 škatel, kamor razporejamo 2017 oseb. Sedaj lahko neposredno uporabimo Dirichletov princip in sklepamo, da sta v eni od škatel vsaj dve osebi, to pa je ravno rešitev našega problema.

Problem 2: Med n celimi števili vedno obstaja podmnožica teh števil, katere vsota je deljiva z n.

Rešitev. Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ cela števila. Oglejmo si vsote

- $s_1 = x_1,$
  $s_2 = x_1 + x_2,$
  $\dots$
  $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$

Če je že ena od teh vsot deljiva z n, potem je naloga rešena. V nasprotnem primeru vse vsote pri deljenju z n dajo neničeln ostanek. Teh vsot je n, na voljo pa imamo le $n-1$ neničelnih ostankov. Po Dirichletovem principu obstajata dve vsoti, recimo s_m in s_{m+k}, ki pri deljenju z n dasta enak ostanek. Potem pa je vsota

$$s_{m+k} - s_m = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{m+k}$$

deljiva z n.

Naslednje dejstvo je mogoče izpeljati s pomočjo Evklidovega algoritma, tu pa pokažimo, kako do njega pridemo z Dirichletovim principom. Spomnimo se, da pravimo, da sta naravni števili m in n tuji, če je 1 največje naravno število, ki hkrati deli m in n.

Problem 3: Naj bosta m in n tuji naravni števili. Potem obstajata naravni števili x in y, da je $nx - my = 1$.

Rešitev. Oglejmo si števila $n, 2n, \ldots, (m-1)n$ in njihove ostanke pri deljenju z m. Ker nobeno od navedenih števil ni deljivo z m, se ostanek 0 ne pojavi. Ali se lahko zgodi, da se tudi ostanek 1 ne pojavi? Če bi se to zgodilo, bi imeli na voljo $m-2$ vrednosti za ostanke in bi po Dirichletovem principu v zgornjem zaporedju števil obstajali dve različni števili. Označimo ju z an in bn kjer je $a > b$, ki bi pri deljenju z m dali enak ostanek. V tem primeru bi bilo število $an - bn = (a-b)n$ deljivo z m, to pa ni mogoče, saj sta m in n tuji števili in $a - b < m$. Sklepamo torej, da obstaja tako naravno število $x \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, da je ostanek nx pri deljenju z m enak 1, kar lahko zapišemo tudi kot $nx = my + 1$ za neki $y \in \mathbb{N}$.

Hitro lahko preverimo, da velja tudi obrat trditve v zgornjem primeru; če za naravni števili m in n obstajata taki naravni števili x in y, da je $nx - my = 1$, potem sta m in n tuji števili. Če je namreč največji skupni delitelj števil m in n enak d, potem lahko zapišemo $m = dm_1$ in $n = dn_1$ za neki naravni števili m_1 in n_1. Dobimo $d(n_1x - m_1y) = 1$, od koder takoj sledi $d = 1$.

Problem 4: V ravnini je 2017 različnih točk, za katere velja, da v poljubni trojici točk obstajata dve, ki sta oddaljeni za manj kot 1. Pokaži, da obstaja krog s polmerom 1, znotraj katerega je vsaj 1009 točk.

Rešitev. Naj bosta A in B takšni točki, za kateri je razdalja $|AB|$ največja možna. Če je $|AB| < 1$, je naloga že rešena; krog s središčem v A in polmerom 1 vsebuje v svoji notranjosti vseh 2017 danih točk. Predpostavimo torej, da je $|AB| \geq 1$. Če je X katerakoli od danih točk, ki je različna od A in B, potem velja $|AX| < 1$ ali $|BX| < 1$. V tem primeru vsaka od danih točk pade v notranjost kroga s središčem v A in polmerom 1 ali v notranjost kroga s središčem B in polmerom 1. V jeziku škatel, v dve škatli razporejamo $2017 = 1008 \cdot 2 + 1$ žogic. Zato ena od škatel (torej eden od krogov) vsebuje več kot 1008 žogic (torej točk).

Bralca vabimo k rešitvi naslednjih nalog:

- V kocki z robom dolžine 5 na slepo izberemo 124 točk. Pokaži, da znotraj te kocke obstaja kocka z robom dolžine 1, ki ne vsebuje nobene od izbranih točk.
- V sobi je 2017 oseb, vsak se rokuje z vsakim. Potem sta v vsakem trenutku v sobi vsaj dve osebi, ki sta se do tega časa rokovali z enakim številom oseb.
- V konveksnem šestkotniku vedno obstaja diagonala, ki odreže trikotnik, katerega ploščina ne presega ene šestine ploščine šestkotnika.
- Naj bosta a in b tuji naravni števili. Potem v decimalnem zapisu ulomka a/b perioda decimalk ne presega $b-1$.

Oglejmo si sedaj primer, ko razporejamo m žogic v n škatel. Če je $m \leq n$, se prav lahko zgodi, da nobena od škatel ne vsebuje več kot ene žogice. Lahko pa govorimo o *verjetnosti*, da vsaj ena od škatel vsebuje vsaj dve žogici. Formalne definicije verjetnosti tu ne bomo navedli, bodimo malce površni. Predstavljajmo si, da žogice na slepo mečemo v škatle, za nas pa bo zanimiv *dogodek*, da po koncu razporejanja vsaj ena škatla vsebuje vsaj dve žogici. Če z x označimo število načinov, na katere lahko m žogic razporedimo v n predalov, z y pa število tistih razporejanj, ki dajo ugoden rezultat, torej, da vsaj ena škatla vsebuje vsaj dve žogici, potem razmerju

$$p = \frac{y}{x}$$

pravimo *verjetnost* dogodka, da vsaj ena škatla vsebuje vsaj dve žogici. Število p torej pove razmerje med številom »dobrih razporejanj« in številom vseh razporejanj žogic v škatle. Dirichletov princip pravi nič drugega kot to, da če razporejamo vsaj $n+1$ žogic v n škatel, potem je $p = 1$. V teoriji verjetnosti pravimo, da je dogodek »v vsaj eni škatli sta vsaj dve žogici« *gotovi dogodek*.

Poskusimo izračunati verjetnost p v splošnem. Najprej si oglejmo, na koliko načinov lahko razporedimo m žogic v n škatel. Pri tem predpostavimo, da je $m \leq n$. Mislimo si, da žogice zaporedoma mečemo v škatle brez omejitev. Za prvo žogico imamo n možnih izbir škatle, za drugo prav tako itd. Za razporeditev m žogic v n škatel imamo torej na voljo $x = n^m$ razporejanj. Izračunajmo še y, pri čemer si pomagajmo z manjšim trikom. Oglejmo si namreč število $x - y$. To je ravno število vseh možnih razporejanj žogic v škatle, pri katerih na koncu vsaka škatla vsebuje *kvečjemu eno žogico*. V tem primeru imamo za prvo žogico n možnih izbir škatle. Za drugo žogico velja, da je ne smemo dati tja, kjer je že prva, torej imamo na voljo še $n-1$ škatel. Podobno imamo za tretjo žogico $n-2$ možnih izbir škatle. Na koncu imamo za m-to žogico natanko $n-m+1$ možnih izbir škatle. Zato je $x - y = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$, torej dobimo

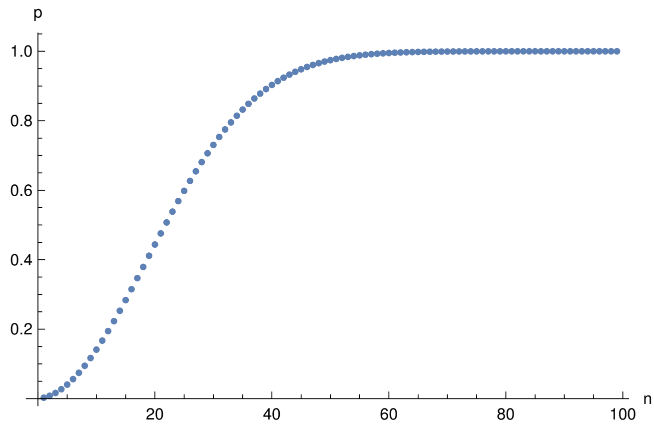
$$p = \frac{n^m - n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m} = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m}.$$

Opazimo, da formula velja tudi za primer, ko je $m > n$. V tem primeru je namreč števec drugega ulomka v zgornjem izrazu enak 0 in je $p = 1$, kar je ravno Dirichletov princip.

Recimo, da imamo skupino n ljudi in gledamo njihove rojstne dneve. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je vsak od 365 dni neprestopnega leta enako verjeten kot rojstni dan, 29. februarja pa ne štejemo. Verjetnost, da imata vsaj dve osebi rojstni dan na isti dan, je

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (366-n)}{365^n}.$$

Na sliki 2 je grafično prikazano, kako se p obnaša v odvisnosti od n.



SLIKA 2.
Verjetnost, da imata med n ljudmi vsaj dve osebi rojstni dan na isti dan

Rezultat je nekoliko presenetljiv. Za $n = 23$ dobimo $p = 0{,}507$, kar lahko interpretiramo kot dejstvo, da v skupini 23 ljudi obstaja 50 odstotna možnost, da imata vsaj dva rojstni dan na isti dan. Ko je v skupini 60 ljudi, je ta možnost že 99,4 odstotna. To je v nasprotju z intuicijo, saj je ljudi le 60, možnih rojstnih dni pa 365, zato bi pričakovali, da je možnost, da imata vsaj dva med njimi rojstni dan na isti dan, bistveno manjša. Temu navideznemu protislovju pravimo *paradoks rojstnega dneva*, pojav pa se s pridom uporablja v kriptografiji pri naključnem razvozlavanju šifriranih sporočil.

Bralec se lahko za konec pozabava z naslednjim problemom. Recimo, da ljudje vstopajo v sobo eden za drugim. Za katero osebo po vrsti bo največja verjetnost, da je prvi od ljudi, ki so vstopili, in ima rojstni dan na isti dan kot nekdo, ki je že v sobi?

Literatura

[1] Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Šemrl, *Dirichletov princip*, Presek **14** (1986/1987), 2, 110–111.

× × ×

Napoleonov problem

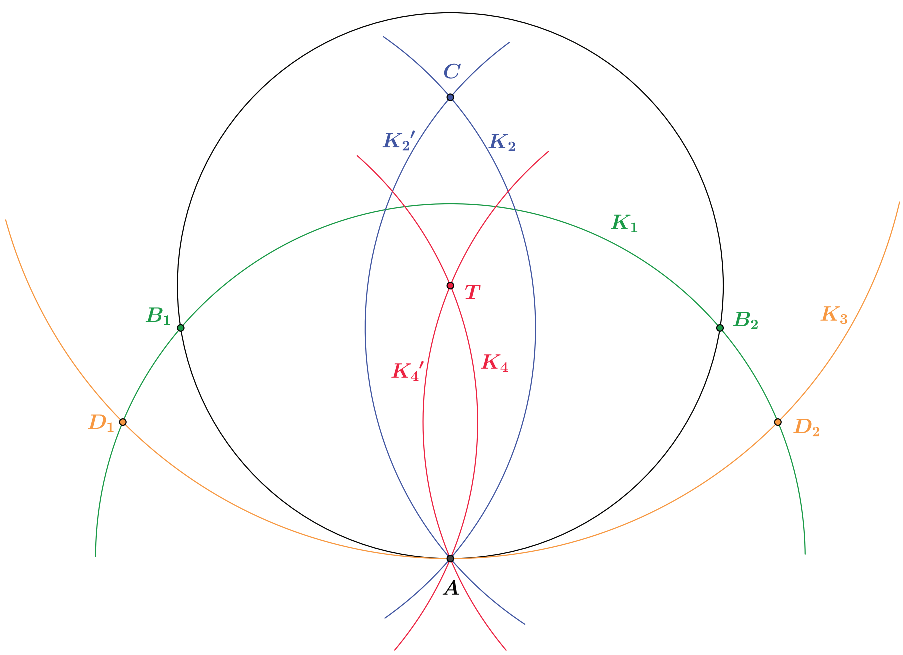
↓↓↓
Mateja Čarman

→ **Ukvarjali se bomo s konstrukcijskim problemom. Podano imamo krožnico (brez središča). Naša naloga je, da samo z uporabo šestila razdelimo krožnico na štiri enake dele. To je ekvivalentno problemu, da v dano krožnico včrtamo kvadrat. Nalogo bomo razdelili na dva dela. V prvem delu bomo konstruirali središče dane krožnice, v drugem delu pa bomo krožnici s podanim središčem včrtali kvadrat. Drugi del problema je znan tudi kot Napoleonov problem. Sicer ni povsem znano, ali je problem res postavil on, tudi ni jasno, ali je ta problem sploh rešil.**

Prvi del. Konstrukcija središča danega kroga s šestilom

Potek konstrukcije

Na krožnici si izberemo poljubno točko A (glej sliko 1). Narišemo krožnico K_1 s središčem v A in poljubnim polmerom, večjim od polmera dane krožnice in manjšim od premera. Presečišči krožnice K_1 z dano krožnico označimo z B_1 in B_2. Narišemo $K_2(B_1, |AB_1|)$ in $K_2'(B_2, |AB_2|)$, ki se sekata v točki C. V nadaljevanju narišemo krožnico K_3 s središčem v C in polmerom $|AC|$. Presečišči krožnic K_3 in K_1 označimo z D_1 in D_2. Nazadnje narišemo še krožnici $K_4(D_1, |AD_1|)$ in $K_4'(D_2, |AD_2|)$. Trdimo, da je njuno presečišče T središče prvotnega kroga.



SLIKA 1.
Konstrukcija središča kroga s šestilom

Dokaz

Naj bo S središče kroga (te točke sicer še ne znamo skonstruirati). Naš cilj je dokazati, da je $T = S$, torej, da je T središče prvotne krožnice. Dokaz bo potekal v dveh delih.

Najprej si poglejmo le krožnice K_1, K_2 in K_2' (glej sliko 2). Predpostavimo, da središča krožnice že poznamo. Razdalja $|AS| = r$ je ravno polmer dane krožnice, dolžino $|AB_2|$ označimo z b, kot B_2AS pa z α. Točka B_2 leži na prvotni krožnici, zato je $|SB_2| = r$, točki C in A pa ležita na krožnici K_2', zato je $|B_2C| = |B_2A| = b$. Trikotnik AB_2S je enakokrak, zato je $\angle AB_2S = \alpha$, prav tako je trikotnik AB_2C enakokrak in zato je $\angle B_2CA = \alpha$. Zaradi podobnosti trikotnikov AB_2S in CAB_2 velja razmerje

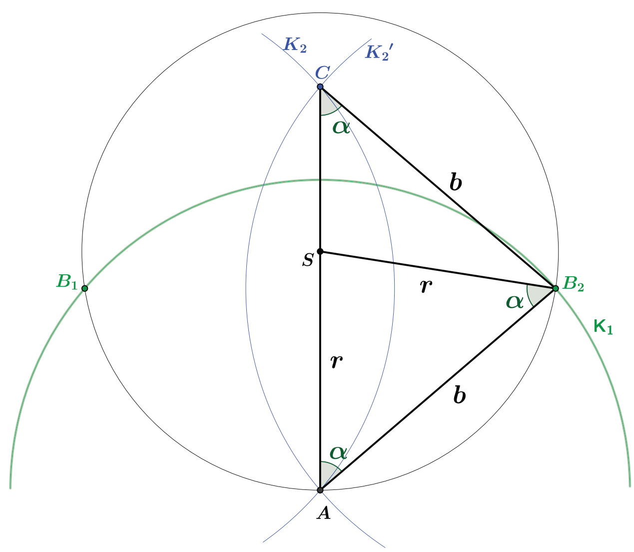
- $|AB_2| : |AS| = |AC| : |CB_2|$,

od koder sledi

- $|AC| = \dfrac{|AB_2||CB_2|}{|AS|}$.

Zapisano z našimi oznakami dobimo

- $|AC| = \dfrac{b^2}{r}$.



SLIKA 2.
Prvi del dokaza

V drugem delu dokaza si bomo ogledali še krožnice K_3, K_4 in K_4' (glej sliko 3). Velja $|AD_2| = b$, saj točka D_2 leži na krožnici K_1 tako kot točka B_2. Točki A in D_2 ležita na krožnici K_4, katere središče je C, zato velja $|AC| = |CD_2|$. Označimo kot D_2AT z β. Zaradi enakokrakih trikotnikov velja analogno kot v prvem delu $\angle D_2AT = \angle AD_2C = \angle ATD_2 = \beta$ ter podobnost trikotnikov AD_2T in D_2CA. Torej velja razmerje

- $|AT| : |AD_2| = |AD_2| : |CD_2|$.

Izrazimo $|AT|$:

- $|AT| = \dfrac{|AD_2||AD_2|}{|CD_2|}$.

Namesto $|AD_2|$ pišimo b, namesto $|CD_2|$ pa $|AC|$ in vstavimo rezultat prvega dela. Dobimo:

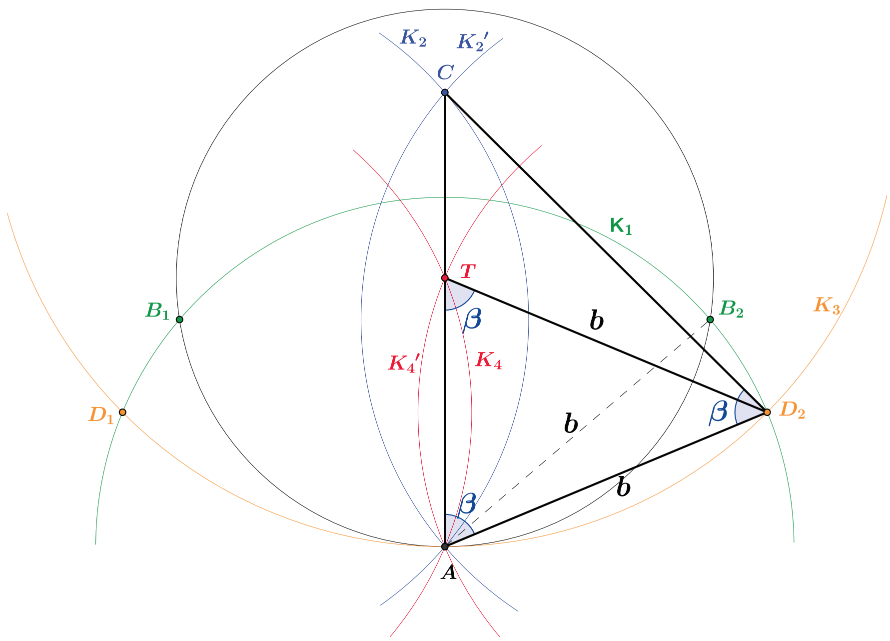
- $|AT| = \dfrac{b^2}{|AC|} = \dfrac{b^2}{\frac{b^2}{r}} = r$.

S tem smo dokazali, da je T res središče prvotne krožnice.

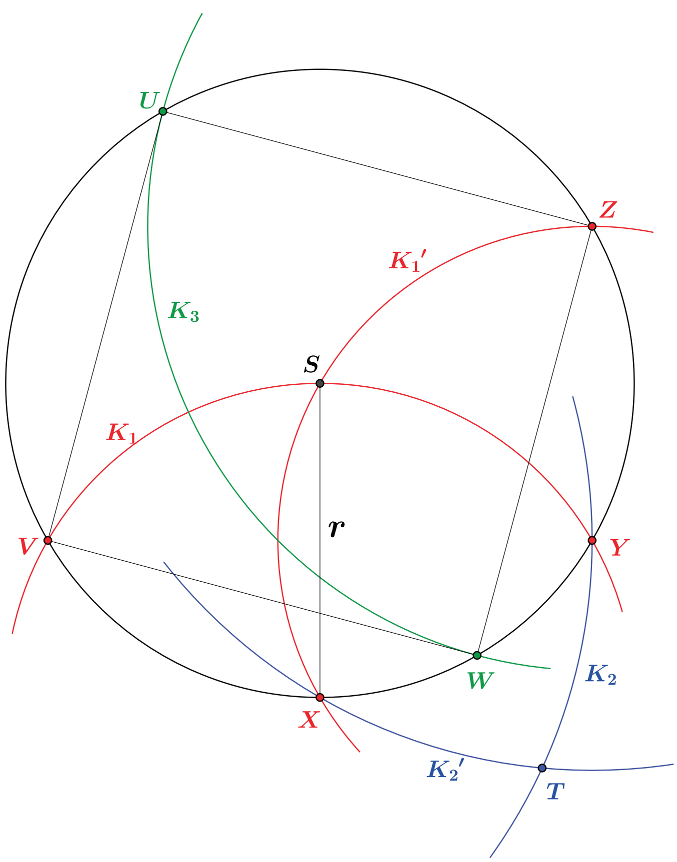
Drugi del. Konstrukcija včrtanega kvadrata v krog z danim središčem

Potek konstrukcije

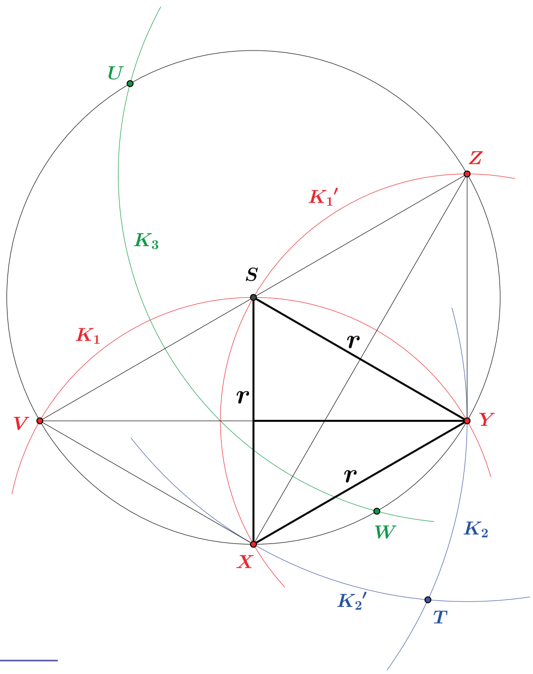
Središče dane krožnice sedaj že znamo določiti, označimo ga z S. Na krožnici izberemo poljubno točko X (glej sliko 4). Narišemo krožnico K_1 s središčem X in polmerom $|XS|$. Presečišča s prvotno krožnico označimo z V in Y. Narišemo krožnico K_1' s središčem Y in enakim polmerom kot K_1. Krožnica seka prvotno krožnico v točkah X in Z. Potem narišemo krožnici $K_2(V, |VY|)$ in $K_2'(Z, |ZX|)$ ter eno od njunih presečišč označimo s T. Nazadnje narišemo še krožnico K_3 s središčem Z in polmerom $|ST|$. Presečišči K_3 in prvotne krožnice označimo z U in W. Točke $VWZU$ so oglišča kvadrata.



SLIKA 3.
Drugi del dokaza



SLIKA 4.
Konstrukcija včrtanega kvadrata



SLIKA 5.
Izračun stranic $|VY|$ in $|ZX|$

Dokaz

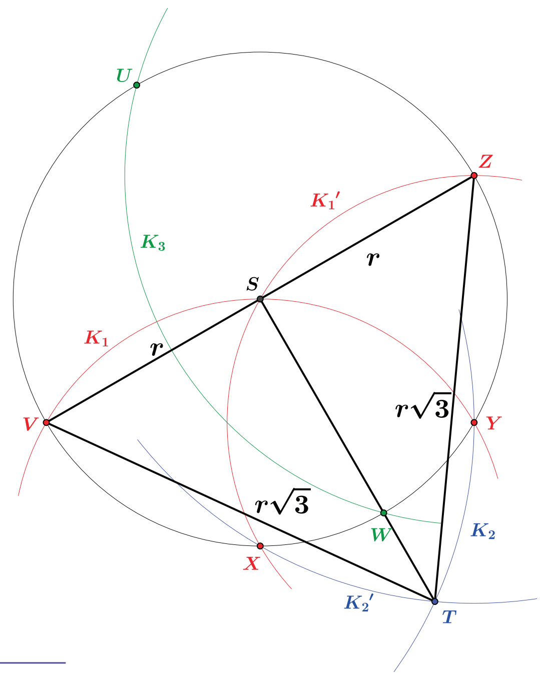
Naj bo polmer dane krožnice r. Diagonala kvadrata včrtanega v krožnico bo merila $2r$, torej bo stranica kvadrata dolga $r\sqrt{2}$. S konstrukcijo želimo dobiti dve točki, katerih razdalja meri $r\sqrt{2}$, kar predstavlja dolžino stranice v krožnico včrtanega kvadrata. Naš cilj je dokazati, da sta V in Z diametralni točki in da je $|ZU| = |ST| = r\sqrt{2}$, kar je ravno dolžina stranice kvadrata.

Polmer prvotne krožnice ter krožnic K_1 in K_1' meri r, zato velja $|VS| = |ZS| = |XS| = |XV| = |XY| = |YS| = |YZ| = r$ (glej sliko 5). Trikotniki VXS, XYS in YZS so enakostranični z dolžino stranice r. Od tod sledi, da je kot $\angle VSZ = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Torej točki V in Z ležita na premeru prvotne krožnice. Naslednje, kar nas zanima, je dolžina daljice $|VY|$. Daljica $|XS|$ je simetrala omenjene daljice in jo razpolavlja. Torej je polovica daljice $|VY|$ ravno višina enakostraničnega trikotnika XYS in zato meri $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Torej je dolžina daljice $|VY| = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Analogno pokažemo, da je $|XZ| = r\sqrt{3}$.

Krožnici K_2 in K_2' imata enak polmer. Točki T in Y ležita na K_2, zato je $|VY| = |VT|$ (glej sliko 6). Točki T in X pa ležita na K_2', zato je $|ZX| = |ZT|$.Če uporabimo zadnje enakosti, smo ugotovili, da je trikotnik VTZ enakokrak z dolžino kraka $r\sqrt{3}$. Točka S je razpolovišče osnovnice trikotnika VTZ, torej je trikotnik VTS pravokoten. Za izračun stranice $|ST|$ uporabimo Pitagorov izrek:

$$|ST| = \sqrt{|VT|^2 - |SV|^2} = \sqrt{(r\sqrt{3})^2 - r^2}$$
$$= \sqrt{3r2 - r^2} = r\sqrt{2}.$$

S tem je dokaz zaključen, saj nam je uspelo poiskati razdaljo $r\sqrt{2}$, ki predstavlja dolžino stranice včrtanega kvadrata.



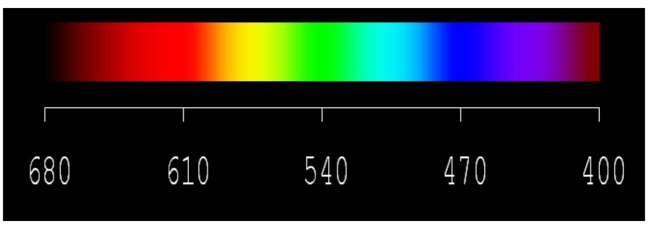
SLIKA 6.
Izračun stranice $|ST|$

× × ×

Kako na zaslonu prikazati barve milničnih mehurčkov?

Andrej Likar

V prispevku [1] smo pokazali, kako z mavričnimi barvami predstavljamo števila. Na sliki 1 je taka lestvica predstavljena z valovnimi dolžinami mavričnih barv, izraženih z nanometri. Še vidni rdeči barvi smo pripisali 680 nm, izginjajoči vijolični pa 400 nm. Za vsako barvo z dano valovno dolžino vemo, kako jo predstavimo na računalniškem zaslonu z njemu osnovnimi barvami: rdečo, zeleno in modro. S to lestvico si pomagamo pri prikazu barv, ki jih opazimo na milničnih mehurčkih ali na tanki plasti olja na vodni gladini. Te barve seveda niso več mavrične.



SLIKA 1.
Mavrične barve z valovnimi dolžinami v nanometrih

Na tanki plasti se odbita bela svetloba obarva. Na sliki 2 je predstavljena skica, ki jo najdemo v sleherni knjigi, ki obravnava osnove fizike. Ko svetloba z izbrano valovno dolžino pade na milnično opno, se odbije na sprednji in zadnji mejni ploskvi. Vpadni kot je označen z α, lomni kot pa z β, tako da velja zaradi lomnega zakona

- $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Tu je n lomni količnik milnice. Svetlobi odbiti od obeh plasti interferirata in daleč stran dobimo bodisi ojačano bodis pa oslabljeno svetlobo, pač glede na svetlobo iz prve plasti. Svetloba iz spodnje plasti naredi do očesa nekoliko daljšo pot kot svetloba iz zgornje plasti. Nihanji jakosti električnega polja pri obeh svetlobah zato nista enaki. Če sta usklajeni, da torej obe hkrati dosežeta amplitudo, ničlo in amplitudo v nasprotni smeri, se ojačujeta. Oslabita pa se, če si njuni nihanji nasprotujeta, da torej ena doseže amplitudo, druga pa prav takrat amplitudo v nasprotni smeri. Med obema skrajnima primeroma so delne ojačitve in delne oslabitve.

Nihanje odbitih svetlob v očesu opišemo takole:

- svetloba iz sprednje mejne plasti v izbranem trenutku:
  - $\cos(\omega t)\,,$
- svetloba iz zadnje mejne ploskve:
  - $\cos(\omega t + \delta)\,.$

Skupno nihanje je potem vsota obeh:

- $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \delta)\,.$

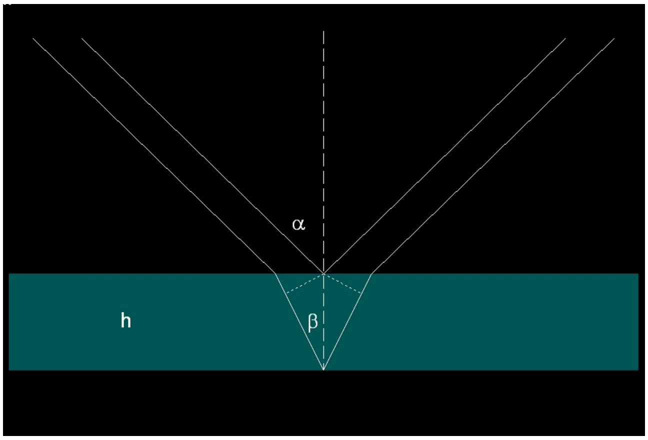
Po adicijskem izreku je to

- $2\cos\omega t\cos\delta\,.$

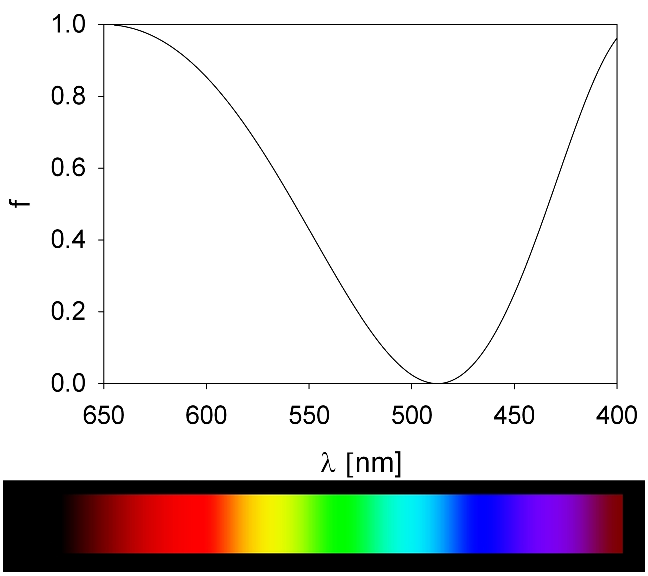
Privzeli smo, da sta amplitudi nihanj obeh svetlob enaki. Od velikosti $\cos(\delta)$ je odvisno, kako svetlo ploskev vidimo. Fazni zaostanek δ, kot imenujemo to pomembno količino, je odvisen od debeline plasti h, lomnega kota β in valovne dolžine svetlobe λ:

- $$\cos\delta = \sin\left(\frac{2\pi h n}{\lambda}\cos\beta\right).$$

Zakaj je tako, lahko bralec razbere iz slike 2, kjer je razvidno, da je razlika poti obeh svetlob $2h\cos(\beta)$,



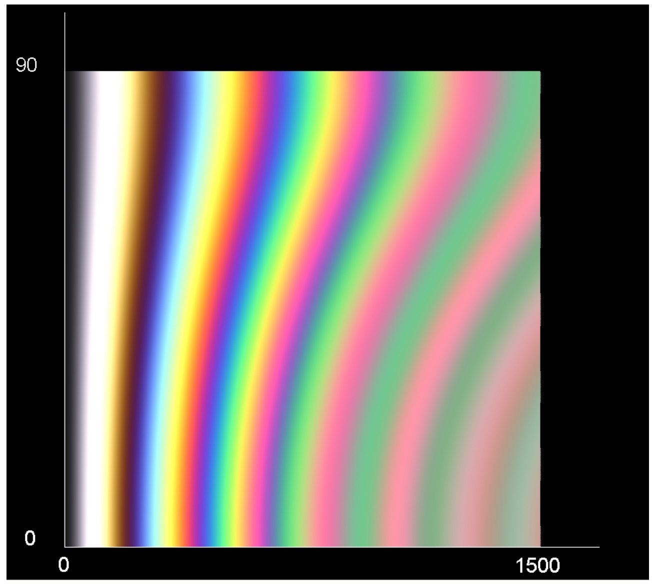
SLIKA 2.
Skica, s katero izračunamo fazni zaostanek δ.



SLIKA 3.
Ojačenje ali slabitev svetlobe v odvisnosti od valovne dolžine pri debelini milnične plasti $h = 375$ nm in zornem kotu $\alpha = 0°$

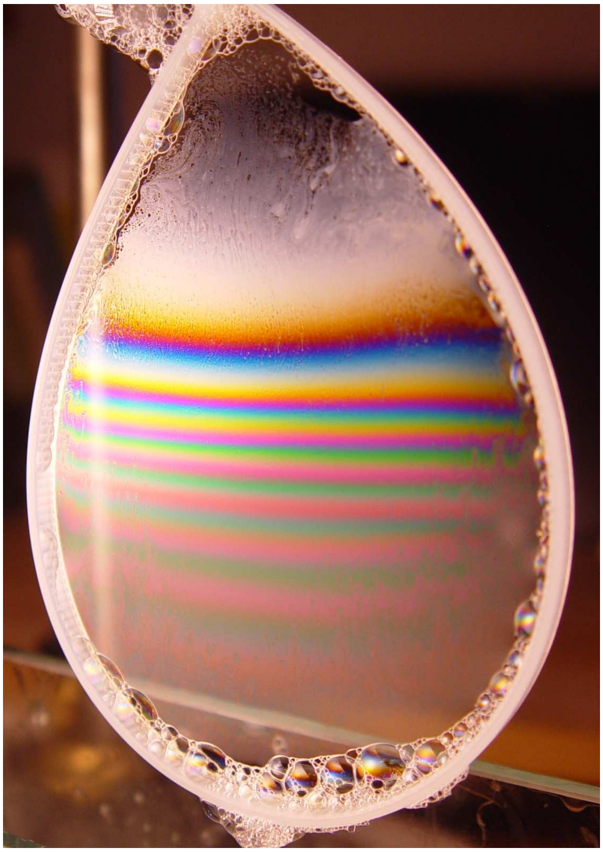
fazna razlika zato $2hn\cos(\beta)$ in še dodatnih 180°, ker se svetloba na zadnji mejni ravnini odbije z nasprotno fazo.

Bela svetloba se po odboju obarva, ker se nekatere njene sestavine ojačajo, druge pa oslabijo. Na sliki 3 smo z grafom ponazorili spremembe jakosti razstavljene bele svetlobe. Po odboju na zrcalu bi bila krivulja vodoravna, po odboju na tanki plasti pa kaže izrazito spreminjanje. Krivulja ojačitve ali oslabitve je odvisna ne le od valovne dolžine svetlobe, temveč tudi od debeline plasti, lomnega količnika plasti n in zornega kota α.



SLIKA 4.
Izračunane barve milnične opne v odvisnosti od debeline opne (os x) in zornega kota α (os y). Opna se proti desni enakomerno debeli od debeline 0 do debeline 1500 nm, zorni kot pa enakomerno narašča od 0 (pogled pravokotno na opno) do 90° (tangencialni pogled).

Ker vemo, kako posamezne mavrične barve sestavimo na zaslonu, lahko upoštevamo interferenco na plasti za vsako barvo posebej in potem dobljeni spekter sestavimo nazaj v eno samo zaslonsko barvo. Na sliki 4 smo prikazali barve po odboju na milnični opni v odvisnosti od debeline plasti (os x) in zornega kota α (os y). Slika 5 kaže eksperimentalno dobljene barve opne, ki se ji debelina navzdol veča, kjer smo barve posneli s fotoaparatom. Ujemanje je kar dobro, majhne razlike nastanejo zaradi rdečkaste svetlobe iz svetila.

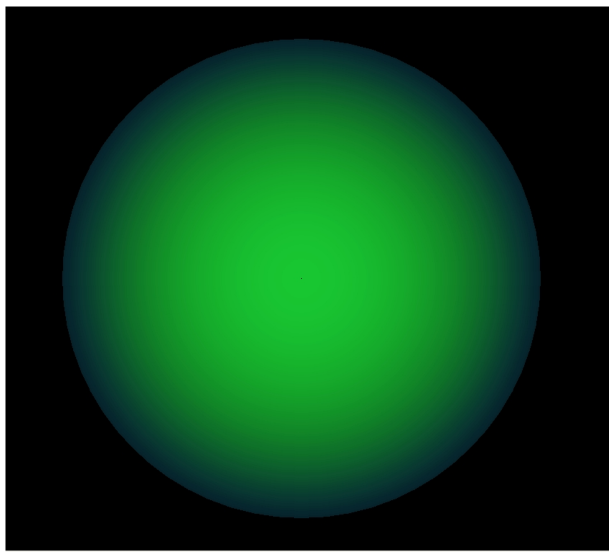


SLIKA 5.
Posnete barve na milnični opni, ki se ji debelina veča od zgoraj navzdol. Na vrhu je opna zelo tanka, ker teža vleče milnico na spodnji del opne, ki se pri tem debeli.

SLIKA 6.
Izsek iz slike 5

Komentirajmo dobljeno barvno sliko milnične opne. Pri zelo majhni debelini se odbita svetloba ne glede na njeno valovno dolžino popolnoma oslabi, ker se na zadnji mejni ravnini opne odbije z nasprotno fazo. Pri nekoliko večji debelini se svetloba iz obeh mejnih ploskev ojačuje spet ne glede na valovno dolžino, ki je pri vseh mavričnih barvah mnogo večja od debeline plasti. Vidimo skoraj belo progo. Za njo se pojavijo značilne barve, ker se del svetlobe z ustreznimi valovnimi dolžinami oslabi, ostali deli pa ojačijo. Barve so tu izrazite, potem pa pri vse večji debelini opne postajajo vse bolj blede, ker se ojačujejo in slabijo vse ožji pasovi barv v mavrici – odbita svetloba postaja siva.

V prvi številki lanskega Preseka je na naslovnici prikazan racak s čudovito obarvanim perjem. Kako pa pride do takšnih barv? Zgradba peres je prav zanimiva, pod močnimi mikroskopi se razkrije ponavljajoči se vzorec, ki odbija svetlobo. Interferenca teh odbojev ojači svetlobo v ozekem pasu valovnih dolžin. Na sliki 7 smo prikazali kroglo, ki bi odbijala svetlobo kot racakovo perje na glavi. Zelena barva prehaja v modro na robovih slike, kjer je zorni kot drugačen kot na sredini.



SLIKA 7.
Krogla, ki odbija svetlobo kot perje na racakovi glavi.

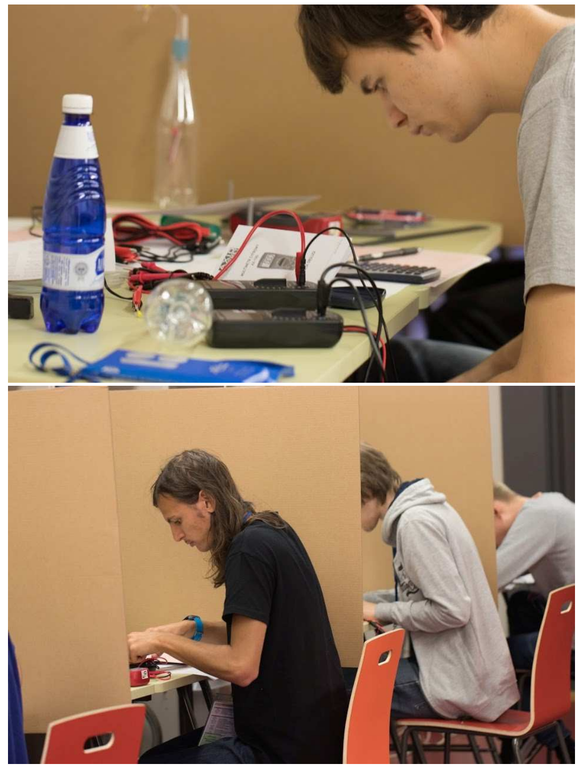
Literatura

[1] A. Likar, *Barvna lestvica*, Presek (2016/2017), **44**, 4.

× × ×

Barbara Rovšek in Jurij Bajc

→ Med 20. in 24. majem 2017 je v Tartuju in Talinu v Estoniji potekala 1. EFO, evropska fizikalna olimpijada. Tekmovalo je 91 dijakov iz 20-ih držav, med katerimi so bile poleg 16-ih evropskih še Brazilija, Singapur, Tadžikistan in Turčija. Slovensko ekipo smo izbrali na izbirnem tekmovanju 21. aprila 2017. V ekipo so se uvrstili dijaki Aleksej Jurca in Marko Čmrlec iz Gimnazije Bežigrad v Ljubljani, Luka Govedič in Urban Duh iz II. gimnazije v Mariboru ter Klemen Bogataj iz Gimnazije Škofja Loka.

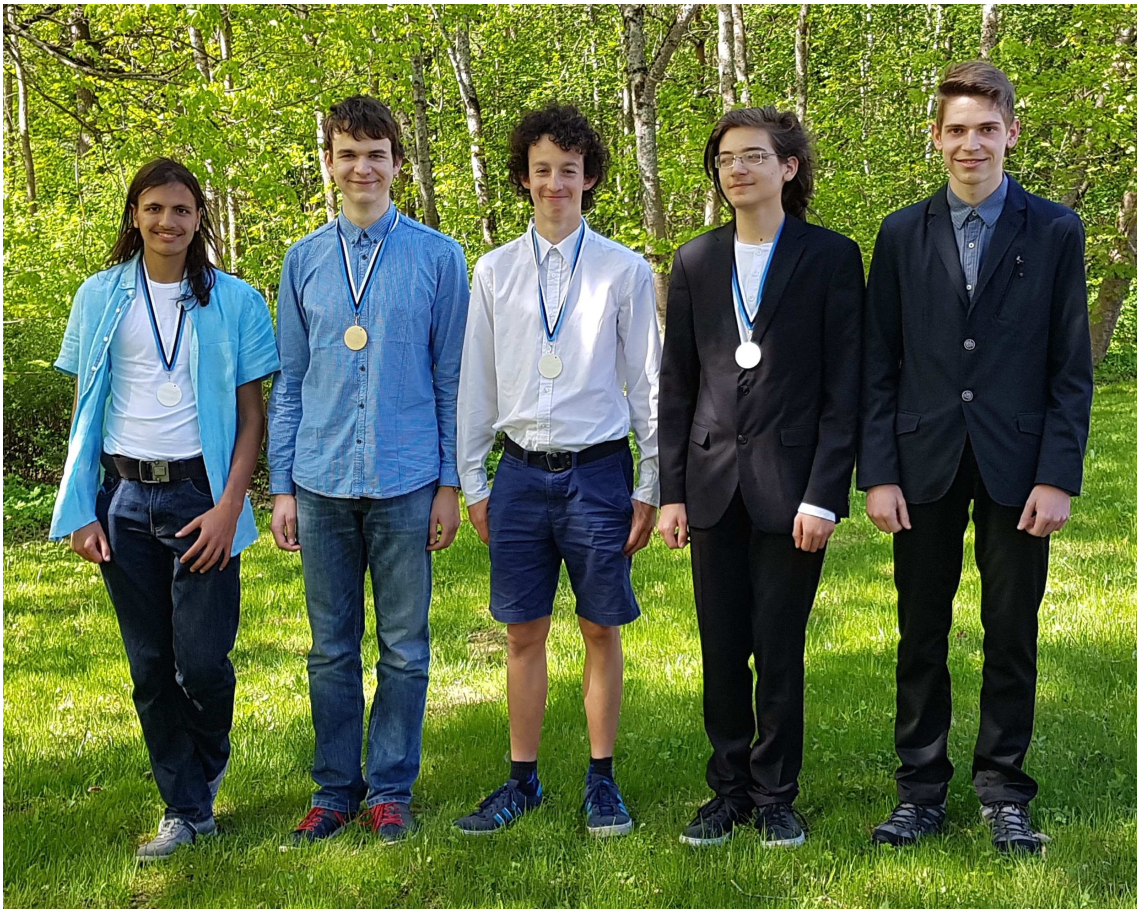


SLIKA 1.
Urban in Marko med reševanjem eksperimentalne naloge.

Evropska fizikalna olimpijada je sestavljena iz eksperimentalnega in teoretičnega dela. Prvi dan so dijaki tekmovali v reševanju eksperimenalne naloge, naslednji dan v reševanju treh teoretičnih nalog. Vsak del tekmovanja je trajal pet celih ur. V tem je evropska olimpijada podobna mednarodni fizikalni olimpijadi (MFO). Precej drugačne pa so bile naloge – spremljevalca ekipe sva imela s prevajanjem bistveno manj dela kot običajno na mednarodni olimpijadi. Če so na MFO naloge podrobno strukturirane in imajo precej dolga spremljevalna besedila, so bila na 1. EFO besedila nalog kratka, naloge pa zastavljene problemsko, brez usmerjanj in namigov – in zato precej težje ter velik izziv ne le za tekmovalce, ampak tudi za vodje ekip. Take vrste nalog lahko pričakujemo tudi v prihodnosti. Kogar zanimajo naloge, jih lahko najde v jezikih vseh sodelujočih držav na spletnih straneh organizatorja `http://eupho.ut.ee`.

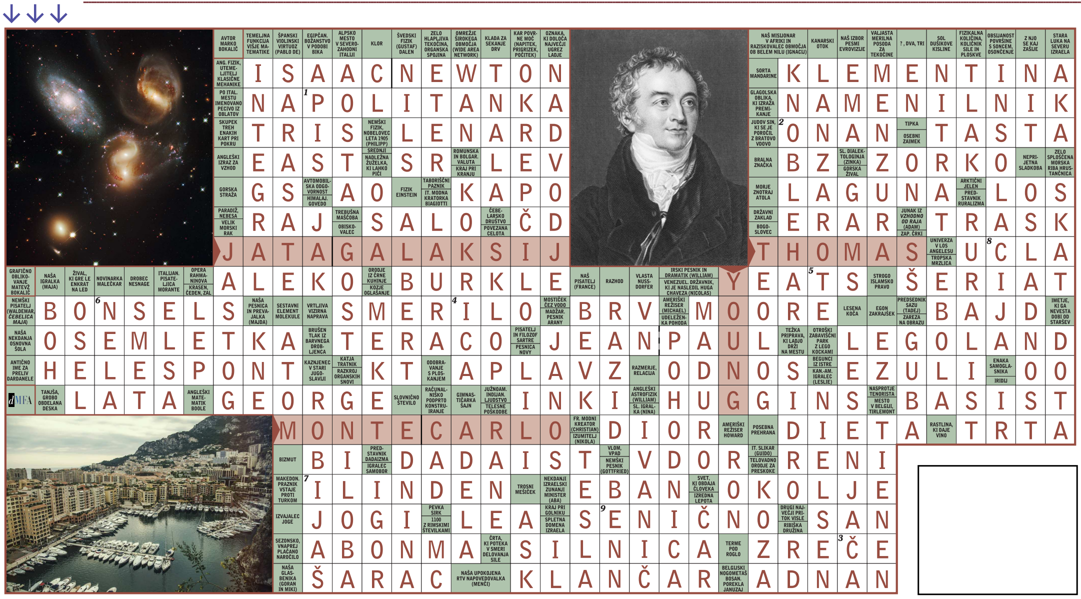
In bera nagrad? Odlična. Aleksej, Luka in Marko so si prislužili srebrne medalje, Urban bronasto, Klemnu se je medalja izmuznila (si pa je po objavi neuradnih rezultatov z uspešno utemeljitvijo svojega originalnega načina reševanja dela eksperimentalne naloge priboril kar veliko dodatnih točk).

Letošnja ekipa potuje v isti zasedbi v juliju 2017 tudi na 48. MFO v Indonezijo. Za prihodnost si želimo, da se mednarodnih fizikalnih tekmovanj udeleži več dijakov in po možnosti tudi dijakinj. Pravila za izbor ekip, ki se bodo udeležile EFO v prihodnjih letih, bomo objavili na spletnih straneh DMFA Slovenije. Predvidoma bo 2. EFO v Rusiji, 3. v Romuniji in 4., leta 2020, v Sloveniji.



SLIKA 2.
Na sliki so Marko, Urban, Luka, Aleksej in Klemen po slavnostni podelitvi medalj, kjer je udeležencem olimpijade uvodne spodbudne besede namenila tudi estonska predsednica Kersti Kaljulaid.

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE

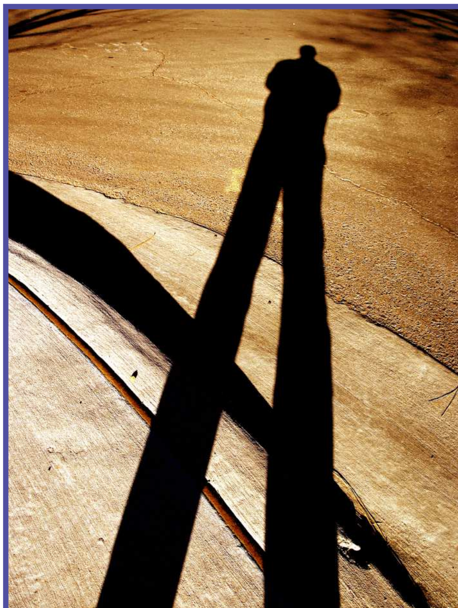
PRESEK 44/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka je **Počitnice.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Anže Mihelčič iz Kresnic, Karel Rankel iz Kranja in Anka Đudarić iz Celja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

↓↓↓

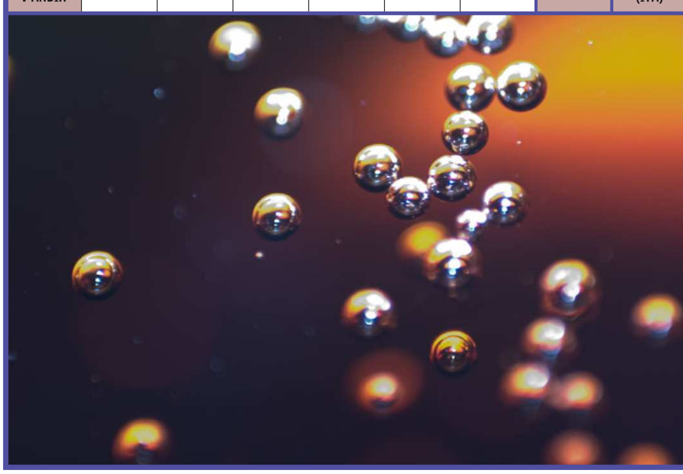
Nagradna križanka



AMERIŠKI FIZIK, KI JE DOKAZAL TVORBO PAROV LEPTONOV (JACK)
NAŠ POKOJNI LITERARNI KRITIK (TARAS)
MESTO NA NOTRANJSKI PLANOTI
100 m^2
ZNANILEC OGNJA
DROG NA PREDNJEM DELU VOZA
GEOMETRIJSKO TELO
NIKO GRAFENAUER
NEKDANJA IRSKA TERORIST. ORGANIZACIJA
NEKDANJI PORTUG. DIPLOMAT (JOSE)
PO BOŽJE ČAŠČEN EGIPČANSKI BIK

VEČJA KOLIČINA UREJENO ZLOŽENIH KOSOV
DEL ALGEBRE
4
PODROČJE PEŠČENIH SIPIN V SAHARI
IGRALEC GIBSON
POJAVNA OBLIKA LUNE, FAZA
OČKA, OČI
MOČEN PRIJEM
MUSLIMANSKI DUHOVNIK
JAPONSKA MISELNA IGRA NA IGRALNI PLOŠČI
JOHANN STRAUSS
AKTIVEN JAPONSKI VULKAN
IVO SVETINA
VRSTA DVOŽIVKE (MOŠ. IME)
UPOGLJIVA CEV ZA IZVLEK TEKOČINE
TOK ZA PUŠČICE
PEVKA KATAYA (KATJA)
10
LJUBLJAN. HOKEJSKI KLUB IZ ZALOGA
GL. MESTO ARGENTINE
POKOJNI AVS. SMUČAR (TONI)
GRŠKI TRAGIK
AMERIŠKI FIZIK (J.ROBERT)

AVTOR MARKO BOKALIČ
BITJE NENARAVNEGA VIDEZA
TRŽIŠKA TOVARNA OBUTVE V STEČAJU
STAR ANGLEŠKI KOLIDŽ
KRAJ PRI VRHNIKI
ŠVEDSKO SMUČIŠČE
BIOLOŠKA KATEGORIJA RED
ZVOČNO OPOZORILO NA NEVARNOST
SIBIRSKO VELEMESTO OB IRTIŠU
ODVZEM ALI PREDAJA OROŽJA
NEPRAVILNOST
ODRSKO DELO S PEVSKIMI VLOŽKI
POLOŽAJ PRI ŠAHU
MESTO NA SEVERU FRANCIJE
NAJVEČJE MESTO V SIBIRIJI
NEMŠKI OVČAR
NAŠ POLITIK (LOJZE)
NAŠA OBLIKOVALKA STEKLA (JANJA)
SVETOPIS. PRAMATI ČLOVEŠTVA
19. GRŠKA ČRKA
AZIJSKA DRŽAVA
OPONAŠALEC
DELAVEC, PLAČAN PO UČINKU
9
SLABOVIDNOST
6
JASTREB, KI KRALJUJE V ANDIH
dMFA
IGRALKA IDA KRAVANJA (ITA)
JUŽNOAM. ŽIVAL
POKOJNA SL. PEVKA (MARJETA)



MRAZ, KI POŠKODUJE RASTLINE
KOS POHIŠTVA
NIKALNICA
ŠIITSKI VODJA
SNOV ZA PNEVMATIKE
18. GRŠKA ČRKA, POGOST SIMBOL V FIZIKI
RIM. BOG LJUBEZNI
PRVO NARAVNO ŠTEVILO
STARINSKA PUŠKA IZ 16. STOLETJA, KI SE JE POLNILA SPREDAJ
LOJZE FILIPIČ
8
POMOŽNI IZREK V MATEMATIKI
NESPOŠTLJIVO ŠALJENJE NA RAČUN KOGA
ZADAJ PREKLAN SVEČAN MOŠKI SUKNJIČ
AZIJSKO RIŽEVO ŽGANJE

OMEJUJETA GA DVA POLTRAKA S SKUPNIM IZHODIŠČEM
NAPITEK PRED JEDJO
GRAFIČNA TEHNIKA VREZOVANJA V LES
NAŠ PESNIK IN IMUNOLOG (ALOJZ)
ENOTA ZA KAPACITIVNOST
PRITOK URALA PRI ORSKU
OKSIDNA PLAST NA ŽELEZNIH POVRŠINAH
SVETOVALEC GRKOV V TROJAN. VOJNI
ŽELJA PO UDEJSTVOVANJU, ZANIMANJE
NAŠ IGRALEC, SIN IGRALCA TONETA
SRBSKO MOŠKO IME
TIHOMORSKA AMERIŠKA ZVEZNA DRŽAVA
OGOLJUFANEC
IZDELOVALEC OSTREŠIJ
OKRASNA VRTNA ROŽA
GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
DRUGA NAJVEČJA FR. REKA
RIMSKI FILOZOF
GRAFIČNI FORMAT, OSMERKA
POLT
IZVIRNO IME REKE LOARE
ŠVEDSKI AVTO
ŽIVILO IZ MLEKA
MESTO PRI BERLINU
ŠPANSKO ŽEN. IME
DELOVNO PODROČJE MINISTRA
POLOTOK NA DALJN. VZHODU
SOLI VINSKE KISLINE
ČAS OB VZHODU SONCA
NADLEŽNA ŽUŽELKA Z ŽELOM
AZIJSKI TAKSIST
ITALIJANSKI SKLADATELJ (GAETANO)
NAJDALJŠA REKA V SIBIRIJI
KRAJ V ZG. POLJANSKI DOLINI
GLASBENA ZVRST Z JAMAJKE
FRANCOSKO-NEMŠKA REKA
BIVALIŠČE UMRLIH
MOŠKI NA DAN SVOJE POROKE
USAIN BOLT
GRŠKI POLOTOK Z ATENAMI
SKANDINAVEC
NEKDANJA POLITIČNA STRANKA V ARAB. DRŽAVAH
SERPENTINA
MEŠČAN ČEŠKEGA PIVOVAR. MESTA
OKRAJŠANI ARTHUR
LETOVIŠČE V JUŽNI DALMACIJI
AVANS, PLAČAN OB SKLENITVI POGODBE
NEMŠKI SKLADATELJ (KASPAR)
VENO TAUFER
NIZEK ŽENSKI GLAS
NAPERA
IME VEČ NAŠIH KRAJEV
SEVEROVZHOD
SVETOPIS. KRAJ PRI JERUZALEMU
DVORAZSEŽNA GEOMETR. TVORBA
OBLAČILO ZA OKOLI VRATU
NASPROTJE DOBREGA
PIVOVARSKA RASTLINA
EVROPSKA VESOLJSKA RAKETA
PRODAJNI PREDMET
DRUGI NAJVEČJI PLANET
PODOBA MARIJE Z OTROKOM, MADONA
VABNIK
ZGORNJI DEL STOPALA
GLAVNO MESTO ARMENIJE
ANDREJ INKRET
KONFLIKT
RASTLINSKA BOLEZEN
ELDA VILER
SPODNJA POVRŠINA POSODE
ZAPOR
OZNAKA ČAKOVCA
BENCINSKI SERVIS
JURE ROBEŽNIK
STARA RUSKA UTEŽNA MERA
ENAKI ČRKI
NEMŠKI KVANTNI FIZIK (MAX)
KUNI PODOBNA OBVODNA ŽIVAL IN NJEN DRAGOCEN KOŽUH, NORKA
ČEŠKO MESTO, SREDIŠČE MORAVSKE

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **15. oktobra 2017**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Dolžina opoldanske sence, ki jo navpična palica meče na vodoravno ravnino

Marijan Prosen

→ V vodoravno ravnino (tla) zapičimo navpično palico. Od Sonca osvetljena palica meče senco na ravnino. Dolžina opoldanske sence, ki jo palica meče na vodoravno ravnino, je $s = v / \mathrm{tg}\,\beta$, če je v dolžina (višina) navpične palice, β pa opoldanski višinski kot Sonca določenega dne. Ker je $\beta = 90° - (\varphi - \delta)$, kjer φ pomeni geografsko širino (za kraje v Sloveniji je blizu 45°), δ pa deklinacija Sonca ($|\delta| \leq 23{,}5°$), za opoldansko dolžino sence tako dobimo enačbo

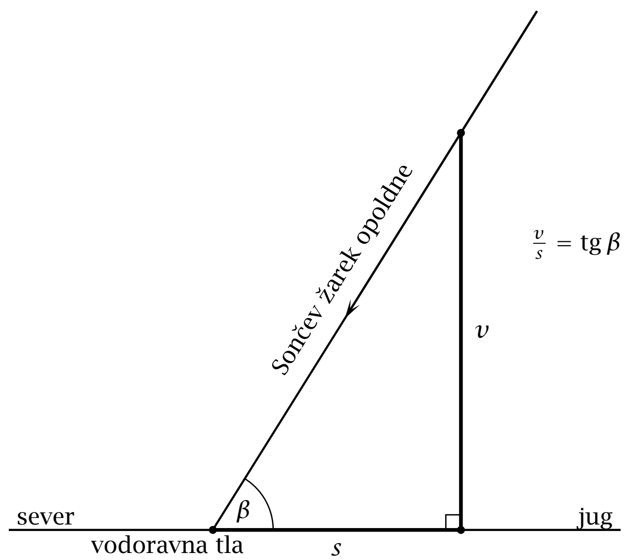
- $s = v\,\mathrm{tg}(\varphi - \delta)$.

Dolžina sence je pri konstantni dolžini palice odvisna od φ in δ.

Poglejmo nekaj zanimivih zgledov.

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) je $s = v\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Sonce se giblje po nebesnem ekvatorju. To enačbo lahko s pridom uporabimo za preprosto določitev zemljepisne širine pri izmerjenih s in v. Pri nas ($\varphi = 45°$) je $s = v$.
- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = v\,\mathrm{tg}(-\delta) = -v\,\mathrm{tg}\,\delta$. Poleti opoldanska senca kaže proti jugu, pozimi proti severu, ob enakonočjih pa je ni ($s = 0$), palica se projicira v točko, saj je Sonce tam opoldne natančno nad glavo.
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90°$) je $s = v\,\mathrm{tg}(90° - \delta) = v / \mathrm{tg}\,\delta$. Ob enakonočjih je neopredeljena, sicer je pa vidna le od spomladanskega do jesenskega enakonočja (najkrajša je ob poletnem Sončevem obratu, $v / \mathrm{tg}\,23{,}5°$), jeseni in pozimi pa ni vidna, saj je Sonce pod obzorjem.

Na splošno se dolžina sence $s = v\,\mathrm{tg}(\varphi - \delta)$ pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $v\,\mathrm{tg}(\varphi + 23{,}5°)$ do $v\,\mathrm{tg}(\varphi - 23{,}5°)$. Če npr. vzamemo $v = 1$ m in $\varphi = 45°$, se dolžina sence spreminja od približno 2,54 m (zimski Sončev obrat) do 0,39 m (poletni Sončev obrat).



SLIKA 1.
Opoldanska dolžina sence s, ki jo navpična palica z dolžino v meče v kraju z zemljepisno širino φ na vodoravno ravnino; β je opoldanski višinski kot Sonca določenega dne in je $\beta = 90° - (\varphi - \delta)$, kjer pomeni $\varphi > 0$ geografsko širino kraja na severni Zemljini poluti in $\delta(-23{,}5° \leq \delta \leq 23{,}5°)$ deklinacijo Sonca. Poleti je $\delta > 0$, pozimi je $\delta < 0$, ob enakonočjih pa je $\delta = 0$, saj se Sonce giblje praktično po nebesnem ekvatorju.

Še tri zanimive raziskovalne naloge

- Narišite graf $s = \mathrm{tg}(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske navpične palice v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, torej približno tako kot pri nas. Narišite graf za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.
- Narišite graf $s = \mathrm{tg}(-\delta)$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence metrske navpične palice v krajih na ekvatorju, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte le $s > 0$. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.
- Narišite graf $s = \mathrm{tg}(90^\circ - \delta) = 1/\,\mathrm{tg}\,\delta$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence metrske navpične palice na severnem Zemljinem polu, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte samo $s > 0$. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.

Pri risanju vseh grafov velja omejitev: $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq 23{,}5^\circ$. Zato jih rišemo od točke do točke. Pomagamo si z astronomskimi efemeridami Naše nebo, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (kjer dobimo podatke za deklinacijo Sonca), in s kalkulatorjem.

V vseh treh primerih dobimo zanimive krivulje, ki jih znamo tudi dobro pojasniti. Prva je zvezna, ostali dve pa sta pretrgani. Seveda opazovanje te sence lahko uporabimo tudi pri določanju geografske širine.

Rešitev

Predvsem je potrebno natančno narisati vse tri grafe in jih smiselno komentirati.

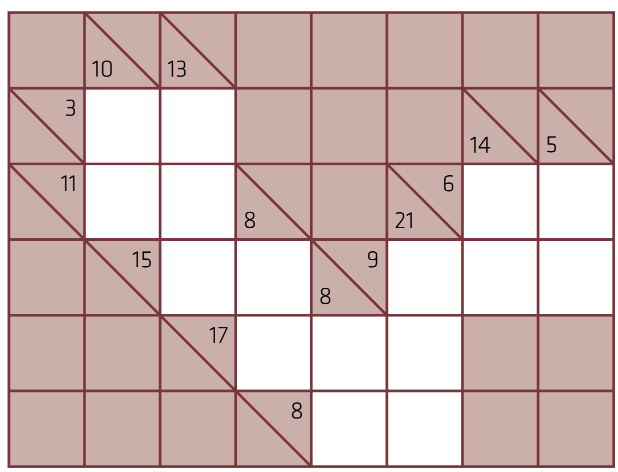
- V času enega leta se dolžina sence palice spreminja približno od 0,4 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna, to je nepretrgana.
- V času enega leta se dolžina sence navpične palice v krajih na ekvatorju spreminja od 0 m (enakonočje) do 0,4 m (zimski Sončev obrat). Senco $s > 0$, ki opoldne kaže proti severu, lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času.
- V času enega leta se dolžina sence navpične palice na severnem Zemljinem polu spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob poletnem Sončevem obratu. Senco opazujemo spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Opoldanska senca vodoravne palice na navpično ravnino

Marijan Prosen

Večinoma pišemo o navpični palici, ki jo osvetljuje Sonce in meče senco na vodoravno ravnino (ravna tla). Ta pojav znamo tudi uporabiti. Pri znani dolžini palice in izmerjeni dolžini njene sence lahko v posebnih pogojih ugotovimo geografsko širino (in tudi dolžino) kraja.

Tokrat pa bomo spregovorili nekaj besed o vodoravni, od Sonca osvetljeni palici. Vzemimo navpično ravnino (ravno steno) v smeri vzhod-zahod. Vanjo zapičimo vodoravno palico z dolžino d tako, da vrh palice gleda proti jugu.

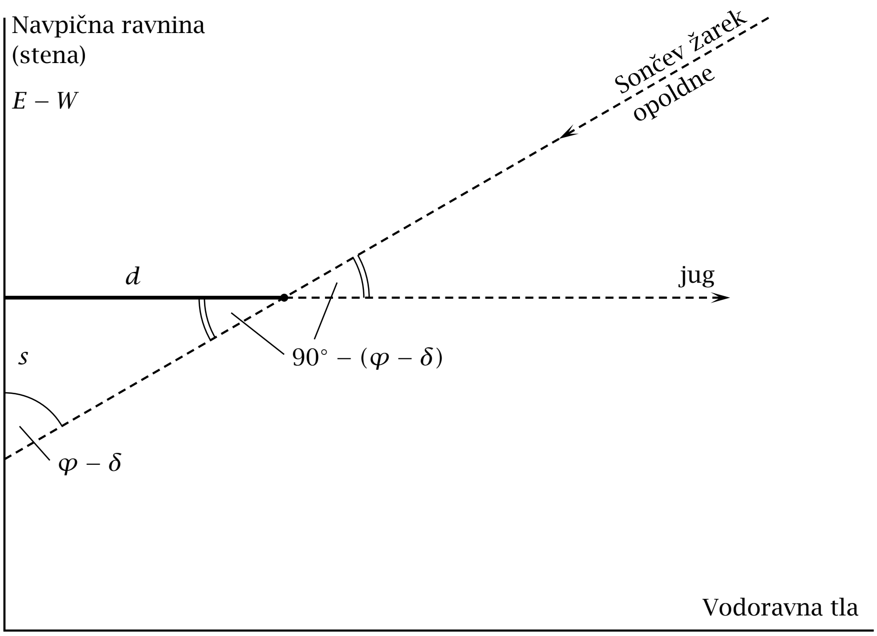
Izračunajmo dolžino s opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena palica meče na navpično ravnino v kraju z geografsko širino $\varphi \geq 0$ določenega dne v letu, ko je δ deklinacija Sonca (slika) znana. Za deklinacijo Sonca velja omejitev: $-23{,}5^\circ \leq \delta \leq 23{,}5^\circ$, kar pomeni, da deklinacija Sonca leži med omenjenima vrednostma.

Sonce je opoldne na jugu, senca palice pa je usmerjena od podnožišča palice navpično navzdol. Pri nas je opoldne Sonce vedno nad obzorjem, zato ima samo taka senca pomen. Če je Sonce pod obzorjem, do sence ne more priti. V našem primeru je dolžina sence palice pozitivna, torej $s > 0$. V primeru, da je $s = 0$, je senca palice točka – sence ni (Sonce je na idealnem obzorju in njegov višinski kot je nič; žarki Sonca padajo pravokotno na steno in palica se projicira v točko). Da je vrednost sence negativna (za $s < 0$), pa sploh ne more priti, saj Sonca ni nad obzorjem, ampak je pod njim.

Iz slike 1 izpeljemo splošni izraz za dolžino opoldanske sence s na navpični ravnini:

- $s = d/\operatorname{tg}(\varphi - \delta); \quad s \geq 0.$

Dolžina sence ima torej vedno pozitivno vrednost (je večja od nič in »gleda« dol) ali pa je nič (je ni), je točka; odvisna je od kraja φ in časa v letu, kar pove deklinacija δ Sonca, ki se med letom spreminja. Seveda obravnavamo le senco, ko je Sonce na nebu in



SLIKA 1.
Dolžina opoldanske sence s, ki jo od Sonca osvetljena vodoravna palica d meče na navpično ravnino vzhod-zahod. Opoldanski višinski kot Sonca je $90^\circ - (\varphi - \delta)$, kot med smerjo Sončevega žarka opoldne in navpično ravnino pa je $\varphi - \delta$. Poleti je $\delta > 0$, pozimi je $\delta < 0$, ob enakonočjih pa je $\delta = 0$.

osvetljuje palico. Pri nas so poleti sence daljše kot pozimi.

Analizirajmo dobljeno enačbo za dolžino sence in poglejmo nekaj zanimivih zgledov.

- Ob enakonočju ($\delta = 0$) sledi $s = d/\operatorname{tg}\varphi$. Dolžina sence je pri znani dolžini palice odvisna le od kraja φ. Za $\varphi = 0$ (ekvator) je senca nedoločena, saj se Sonce za kraje na ekvatorju ta dan giblje od vzhoda do zahoda natanko po nebesnem ekvatorju na nebu in je opoldne v nadglavišču. Za $\varphi = 45^\circ$ (približno v naših krajih) je $s = d$. Za $\varphi = 90^\circ$ je formalno $s = 0$ in sence ni. (Sonce se navidezno giblje po nebesnem obzorniku, ki sovpade z nebesnim ekvatorjem; palica se projicira v točko).
- Za kraje na Zemljinem ekvatorju ($\varphi = 0$) je $s = d/\operatorname{tg}(-\delta) = -d/\operatorname{tg}\delta$. Dolžina sence je odvisna le od δ. Če je $\delta = 0$, je senca nedoločena, kar že vemo. Če je $\delta > 0$, ne pride do sence, za $\delta < 0$ pa do sence pride (od jesenskega do spomladanskega enakonočja, torej vso jesen in zimo).
- Na severnem Zemljinem polu ($\varphi = 90^\circ$) nebesne smeri sicer izgubijo pomen, vendar formalno velja $s = d/\operatorname{tg}(90^\circ - \delta) = d\operatorname{tg}\delta$. Dolžina sence je odvisna od δ. Za $\delta = 0$, je $s = 0$ in idealno ravna vodoravna palica se projicira v točko, sence ni. Za $\delta > 0$ pa senca nastopi (od spomladi do jeseni), ko pa je $\delta < 0$, ne more priti do sence, saj je Sonce pod obzorjem. Kljub temu, da smeri neba tu niso opredeljene, je zanimivo, da izpeljano formulo za dolžino sence lahko dobro pojasnjujemo. V situacijo se moramo pač vživeti.

Na splošno se dolžina sence $s = d/\operatorname{tg}(\varphi-\delta)$ pri konstantnem φ v času enega leta spreminja od $d/\operatorname{tg}(\varphi - 23{,}5^\circ)$ do $d/\operatorname{tg}(\varphi+23{,}5^\circ)$. Če npr. vzamemo $d = 1$ m in $\varphi = 45^\circ$, se dolžina sence spreminja od 2,54 m (poletni Sončev obrat) do 0,39 m (zimski obrat).

Za konec pa še tri zelo zanimive raziskovalne naloge

- Narišite graf $s = 1/\operatorname{tg}(45^\circ - \delta)$, ki prikazuje, kako se med letom spreminja dolžina sence metrske vodoravne palice v kraju z geografsko širino $\varphi = 45^\circ$, torej približno tako kot pri nas. Narišite graf za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.
- Narišite graf $s = -1/\operatorname{tg}\delta$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence metrske vodoravne palice v krajih na ekvatorju, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte le $s > 0$. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.
- Narišite graf $s = \operatorname{tg}\delta$, ki prikazuje spreminjanje dolžine sence metrske vodoravne palice na severnem Zemljinem polu, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte samo $s > 0$. Sestavite tabelo: čas (datum) | s oziroma tabelo δ | s in nato narišete graf.

Pri risanju vseh grafov velja omejitev: $-23{,}5^\circ \le \delta \le 23{,}5^\circ$. Zato jih rišemo od točke do točke. Pomagamo si z astronomskimi efemeridami Naše nebo, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (tu dobimo podatke za deklinacijo Sonca), in s kalkulatorjem.

V vseh treh primerih dobimo zanimive krivulje, ki jih znamo tudi dobro pojasniti. Prva je zvezna, ostali dve pa sta pretrgani. Seveda opazovanje te sence lahko uporabimo tudi pri določevanju geografske širine. A to je že druga zgodba.

Rešitev

Predvsem je potrebno natančno narisati vse tri grafe in jih smiselno pokomentirati.

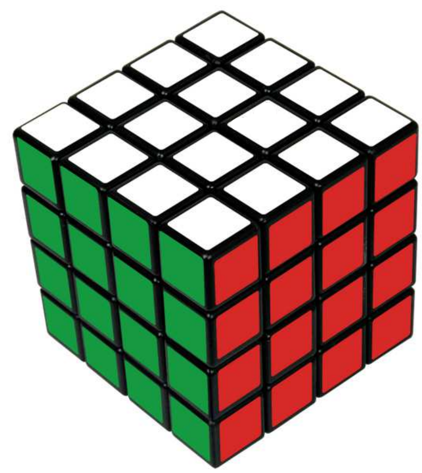
- V času enega leta se dolžina sence spreminja približno od 0,4 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna, tj. nepretrgana.
- V času enega leta se dolžina sence spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob zimskem Sončevem obratu. Senco lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času, spomladi in poleti pa je ni, saj se Sonce giblje po nebu za steno.
- V času enega leta se dolžina sence spreminja od 0 m do 0,4 m, in to spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

× × ×

Rubikovo maščevanje: algoritem za reševanje Rubikove kocke $4 \times 4 \times 4$ – 1. del

Marko Jakovac

→ V članku [7] smo spoznali algoritem za reševanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$. Med drugim je bila v tem članku omenjena tudi Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$, ki jo lahko vidimo na sliki 1 [1]. Poljudno jo imenujemo tudi Rubikovo maščevanje (ang. Rubik's revenge) [5]. V nadaljevanju si bomo pogledali, zakaj je dobila takšno ime in kako jo rešimo. Pri tem bomo uporabljali podobne izraze kot v članku za reševanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$.



SLIKA 1.
Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$

Osnovni pojmi

Cilj reševanja Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ ostaja enak kot pri Rubikovi kocki dimenzije $3 \times 3 \times 3$, tj. sestaviti enobarvne ploske. Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ ima šest ploskev. Vsaka ploskev je sestavljena iz 16-ih ploskev manjših kockic in je obarvana z eno izmed naslednjih barv: bela, rumena, modra, zelena, rdeča in oranžna. Vseh manjših kockic v celotni Rubikovi kocki dimenzije $4 \times 4 \times 4$ je natančno 56 in jih ločimo glede na njihovo lego v večji kocki:

- *Sredinska kockica* je ena izmed štirih kockic na sredini vsake ploskve. Štiri sredinske kockice na isti ploskvi imenujemo *sredina*. Dve vodoravni ali navpični sosednji sredinski kockici imenujemo *sredinska vrstica*. Za razliko od Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$ se sredinske kockice med reševanjem kocke premikajo. Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ ima 24 sredinskih kockic.

- *Kotna kockica* je kockica na stičišču treh ploskev in ima natančno tri barve. Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ ima osem kotnih kockic.
- *Robna kockica* je kockica na stičišču dveh ploskev in ima natančno dve barvi. Sosednji robni kockici imenujemo *robna vrstica*. Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ ima 24 robnih kockic.

Plast Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ je četrtina celotne kocke. Zunanji plasti sta sestavljeni vsaka iz 16-ih kockic, srednji plasti pa vsaka iz 12-ih kockic.

Rubikovo maščevanje

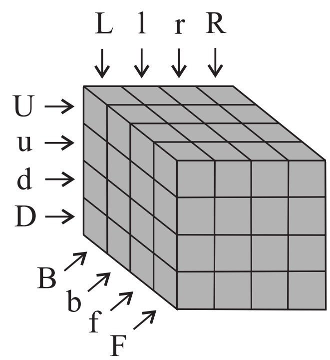
Da bi razumeli ozadje reševanja Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$, moramo najprej razumeti strukturo klasične Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$. Marsikoga je že zamikalo, da bi Rubikovo kocko razstavil na manjše kockice. Če to naredimo in nato kockice sestavimo nazaj v večjo kocko, se lahko zgodi, da leta ne bo več rešljiva. Dovolj je že, da izderemo eno kockico, jo obrnemo in vstavimo nazaj v večjo kocko. In prav s tem dejstvom je povezana Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$. Takoj lahko opazimo, da pri klasični kocki med njenim reševanje sredinska kockica miruje in nam s tem nudi oporo pri reševanju same kocke. Pri Rubikovi kocki dimenzije $4 \times 4 \times 4$ pa imamo na vsaki ploskvi štiri sredinske kockice in posledično se te med reševanjem premikajo. To pa ima na samo reševanje enak učinek, kakor da bi razdrto Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$ morali najprej pravilno sestaviti, preden se lotimo njenega reševanja. Preneseno v jezik reševanja Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ to pomeni, da si lahko med njenim reševanjem otežimo delo do te mere, da bomo od nekega trenutka naprej reševali nerešljivo kocko. Če se zgodi prav to, je treba v večini primerov z reševanjem pričeti od začetka. Prav zaradi tega dejstva je Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ dobila ime Rubikovo maščevanje.

Ukazi za reševanje Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$

Uporabili bomo ukaze, ki so bili vpeljani v članku [7], ter jih nekoliko dopolnili, saj Rubikova kocka dimenzije $4 \times 4 \times 4$ vsebuje več plasti. Prav tako bomo v nekem trenutku reševanje Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ prevedli ne reševanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$, zato je zelo pomembno, da znamo najprej rešiti klasično Rubikovo kocko [2, 7] in da dobro poznamo vse ukaze, ki nas privedejo do rešitve. Ločili bomo naslednje ukaze:

- P^{desno}: P-plast obrnemo v smeri urinega kazalca za 90°(en obrat).
- P^{levo}: P-plast obrnemo v nasprotni smeri urinega kazalca za 90°(en obrat).
- P^2: P-plast obrnemo v poljubni smeri za 180°(dva obrata).

Pri tem bo oznaka P predstavljala eno izmed naslednjih plasti: F-sprednja plast, f-srednja sprednja plast, B-zadnja plast, b-srednja zadnja plast, U-zgornja plast, u-srednja zgornja plast, D-spodnja plast, d-srednja spodnja plast, L-leva plast, l-srednja leva plast, R-desna plast, r-srednja desna plast (slika 2).



SLIKA 2.
Vse plasti Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$

Pozor! Vse omenjene ukaze izvajamo tako, da v izvedbi danega ukaza gledamo izbrano plast. Če npr. obrnemo zadnjo plast v smeri urinega kazalca, bi v primeru, da bi obrat gledali s sprednje strani, videli obrat v nasprotni smeri urinega kazalca. Prav tako je zelo pomembno, da pri premikih srednjih plasti (f,b,u,d,l,r) ne premikamo hkrati tudi zunanjih plasti (F,B,U,D,L,R), kar je pogosta napaka, ki se dogaja pri reševanju večjih kock. Na slikah bodo kockice, ki v danem trenutku ne bodo pomembne, označene s sivo barvo.

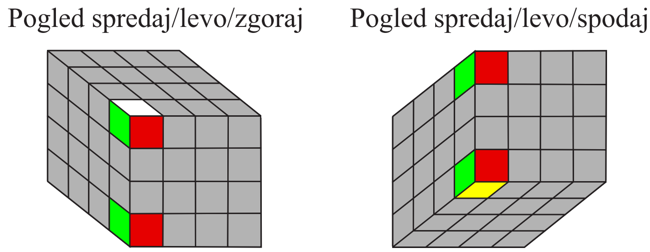
Uporabljena metoda za reševanje Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ je z nekaj spremembami in alternativnimi premiki povzeta po [6] in vsebuje naslednje korake:

- enobarvne sredine (sestavljanje sredinskih kockic tako, da bo vsaka sredina vsebovala enake sredinske kockice),
- dvobarvne robove (sestavljanje robnih vrstic tako, da bosta obe kockici poljubne robne vrstice enaki),
- algoritem za Rubikovo kocko dimenzije $3 \times 3 \times 3$ (sestavljanje Rubikove kocke dimenzije $4 \times 4 \times 4$ s pomočjo algoritma za sestavljanje Rubikove kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$),
- parnost orientacije zadnje plasti (ang. OLL parity – orientation last layer parity) in parnost permutacije zadnje plasti (ang. PLL parity – permutation last layer parity).

Enobarvne sredine

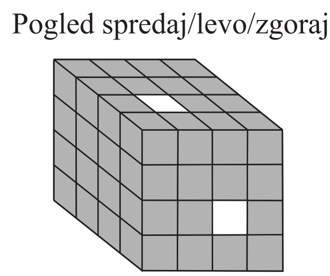
Na kocki želimo sestaviti vseh šest sredin tako, da bo vsaka sredina vsebovala kockice enake barve. Enobarvne sredine nam bodo služile kot oporne točke za nadaljnje reševanje kocke, pri tem pa moramo paziti, da vse enobarvne sredine postavimo na ustrezna mesta, saj lahko v nasprotnem primeru dobimo nerešljivo kocko in vsi nadaljnji koraki bi bili zaman. Najprej je treba proučiti kocko in ugotoviti katere barve so si nasprotne. To storimo tako, da poiščemo dve kotni kockici z dvema enakima barvama (kockici ni potrebno premikati). Tretja barva, ki je različna na obeh kotnih kockicah, nam pove, kateri barvi morata v pravilno sestavljeni kocki biti na nasprotnih ploskvah. V našem primeru so nasprotne naslednje barve: bela-rumena, modra-zelena, rdečaoranžna (na nekaterih kockah je lahko tudi drugače). Ko določimo nasprotne barve, je treba določiti tudi njihovo pravilno orientacijo. To naredimo tako, da pogledamo eno izmed kotnih kockic, ki nam pove, katere tri barve se morajo srečati v določenem kotu. V našem primeru v enem kotu najdemo skupaj belo, zeleno in rdečo barvo. Na sliki 3 smo dve izbrani kotni kockici postavili tako, da hkrati vidimo dve nasprotni barvi (bela-rumena) in tri barve, ki se srečajo v določenem kotu (bela-zelena-rdeča). Sedaj imamo vse podatke, da ustrezno sestavimo enobarvne sredine.

Cilj: sestaviti prvo in drugo enobarvno sredino z nasprotnima barvama na sprednji in zadnji ploskvi (v našem primeru bela in rumena barva).



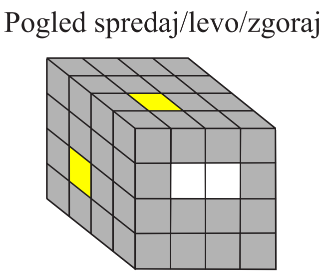
SLIKA 3.
Dve nasprotni barvi (bela-rumena) in pravilna orientacija treh barv (bela-zelena-rdeča)

- Postavitev kocke: kocko postavite poljubno, vendar je pri izvajanju nadaljnjih korakov več ne obračajte.
- Če obstaja bela sredinska vrstica, jo premaknite v u-plast na sprednji ploskvi.
- Če bela sredinska vrstica ne obstaja, postavite dve beli sredinski kockici, kot prikazuje slika 4, in izvedite: l^{desno}, F^2.



SLIKA 4.
Postavitev prvih dveh belih sredinskih kockic

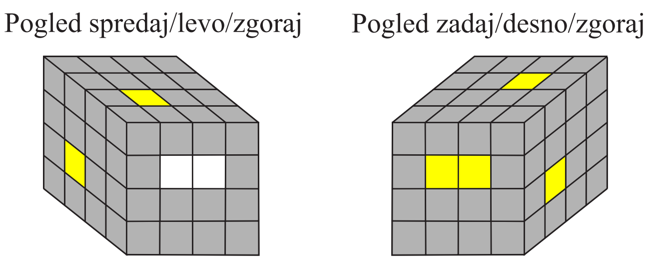
- Če obstaja rumena sredinska vrstica, jo s pomočjo f-plasti, b-plasti, d-plasti in zunanjih plasti (brez uporabe F-plasti) premaknite v u-plast na zadnji ploskvi.
- Če rumena sredina vrstica ne obstaja, s pomočjo f-plasti, b-plasti, d-plasti in zunanjih plasti (brez uporabe F-plasti) postavite dve rumeni sredinski kockici, kot prikazuje slika 5, in izvedite: f^{levo}, d^{levo}, B^2.
- Če obstaja tudi druga rumena sredinska vrstica in ne sestavlja rumene sredine na zadnji ploskvi, jo s pomočjo f-plasti, b-plasti, d-plasti in zunanjih pla-



SLIKA 5.
Postavitev prvih dveh rumenih sredinskih kockic

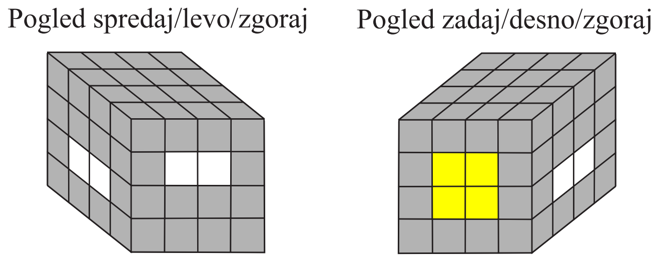
sti (brez uporabe F-plasti in B-plasti) premaknite v d-plast na zadnji ploskvi.

- Če druga rumena sredinska vrstica ne obstaja, s pomočjo f-plasti, b-plasti, d-plasti in zunanjih plasti (brez uporabe F-plasti in B-plasti) postavite preostali rumeni sredinski kockici, kot prikazuje slika 6, in izvedite: f^{levo}, d^{levo}.

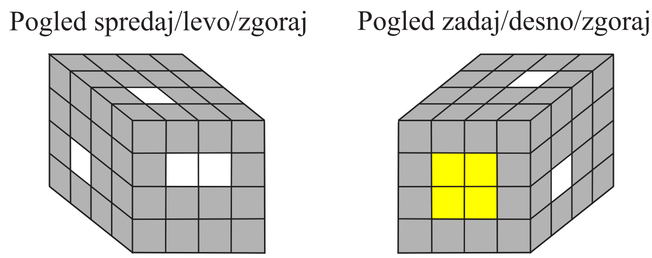


SLIKA 6.
Postavitev drugih dveh rumenih sredinskih kockic

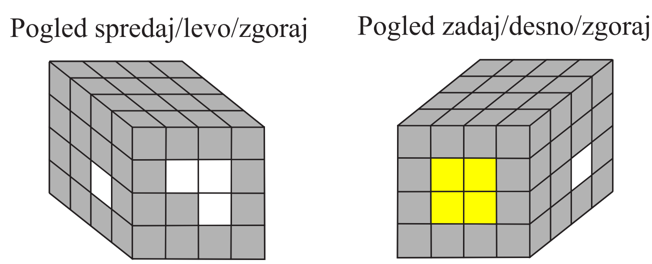
- Če obstaja tudi druga bela sredinska vrstica in ne sestavlja bele sredine na sprednji ploskvi, s pomočjo f-plasti, b-plasti in zunanjih plasti (brez uporabe F-plasti) pripravite kocko, kot prikazuje slika 7, in izvedite: L^2, d^{levo}, L^2, d^{desno}.
- Če druga bela sredinska vrstica ne obstaja, a obstajata dve beli sredinski kockici v f-plasti in/ali b-plasti, ju s pomočjo f-plasti, b-plasti in zunanjih plasti (brez uporabe F-plasti) postavite, kot prikazuje slika 8, in izvedite: f^{levo}, L^2, d^{levo}, L^2, d^{desno}.
- Če druga bela sredinska vrstica ne obstaja in obstaja ena bela sredinska kockica v f-plasti ali b-plasti, s pomočjo f-plasti, b-plasti in zunanjih plasti pripravite kocko, kot prikazuje slika 9, in izvedite: F^{desno}, d^{desno}, F^{levo}, d^{levo}.



SLIKA 7.
Postavitev druge bele sredinske vrstice



SLIKA 8.
Postavitev drugih dveh belih sredinskih kockic



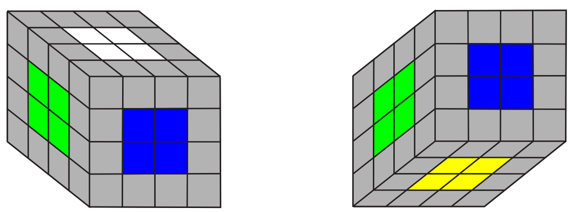
SLIKA 9.
Postavitev drugih dveh belih sredinskih kockic, kjer je ena sredinska kockica na sprednji ploskvi

Nadaljujemo s sestavljanjem dveh novih enobarvnih sredin z nasprotnima barvama. Postopek bo podoben, vendar bodo v njem pomembne razlike, saj v tem primeru več ne smemo posegati v obe ploskvi, kjer sta že sestavljeni prvi dve enobarvni sredini.

→ *Cilj*: sestaviti tretjo in četrto enobarvno sredino z nasprotnima barvama na sprednji in zadnji ploskvi (v našem primeru modra in zelena barva).

- Postavitev kocke: kocko postavite tako, da bosta že sestavljeni enobarvni sredini na zgornji in spodnji ploskvi (npr. bela sredina zgoraj in rumena sredina spodaj) in je pri izvajanju nadaljnjih korakov več ne obračajte.
- Če ima kocka že sestavljeni obe sredini, a nista na nasprotnih ploskvah, pripravite kocko, kot prikazuje slika 10, in izvedite: d^{levo}, B^2, d^2, L^2, d^{levo}.

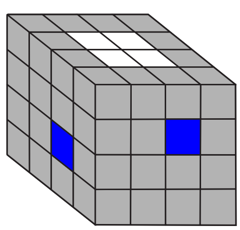
Pogled spredaj/levo/zgoraj   Pogled spredaj/levo/spodaj



SLIKA 10.
Modra in zelena sredina nista na nasprotnih ploskvah

- Če obstaja modra sredinska vrstica, jo s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti premaknite v u-plast na sprednji ploskvi.
- Če modra sredinska vrstica ne obstaja, postavite dve modri sredinski kockici, kot prikazuje slika 11, in izvedite: d^{desno}, F^{levo}.

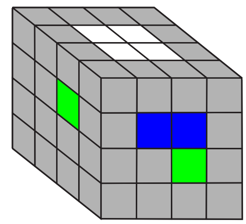
Pogled spredaj/levo/zgoraj



SLIKA 11.
Postavitev prvih dveh modrih sredinskih kockic

- Če obstaja zelena sredinska vrstica, jo s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti premaknite v u-plast na zadnji ploskvi.
- Če zelena sredinska vrstica ne obstaja, s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti postavite dve zeleni sredinski kockici, kot prikazuje slika 12, in izvedite: d^{levo}, L^{desno}, d^{levo}, B^2.

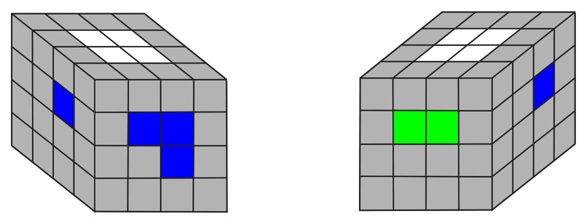
Pogled spredaj/levo/zgoraj



SLIKA 12.
Postavitev prvih dveh zelenih sredinskih kockic

- Če obstaja tudi druga modra sredinska vrstica, jo s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti premaknite v u-plast na levi ploskvi.
- Če druga modra sredinska vrstica ne obstaja, s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti postavite dve modri sredinski kockici, kot prikazuje slika 13, in izvedite: d^{levo}, L^{levo}.

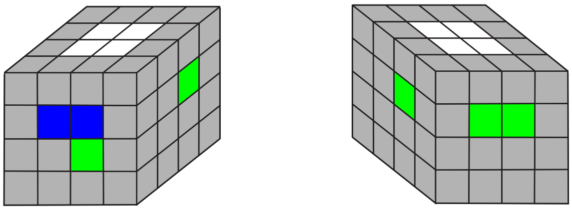
Pogled spredaj/levo/zgoraj   Pogled zadaj/desno/zgoraj



SLIKA 13.
Postavitev drugih dveh modrih sredinskih kockic

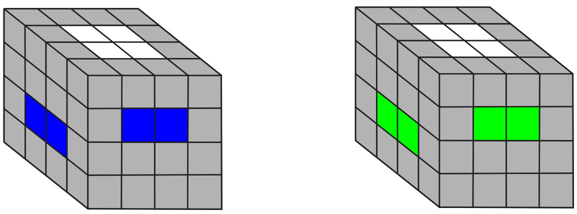
- Če obstaja tudi druga zelena sredinska vrstica, jo s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti premaknite v u-plast na desni ploskvi.
- Če druga zelena sredinska vrstica ne obstaja, s pomočjo d-plasti in zunanjih plasti postavite dve zeleni sredinski kockici, kot prikazuje slika 14, in izvedite: d^{desno}, R^{levo}.
- Pripravite kocko, kot prikazuje slika 15, in izvedite: d^{desno}.

Pogled spredaj/desno/zgoraj   Pogled zadaj/levo/zgoraj



SLIKA 14.
Postavitev drugih dveh zelenih sredinskih kockic

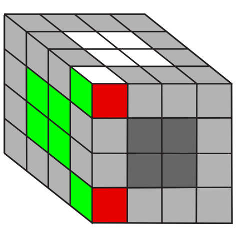
Pogled spredaj/levo/zgoraj   Pogled zadaj/levo/zgoraj



SLIKA 15.
Postavitev modrih in zelenih sredinskih vrstic

Sedaj imamo sestavljene že štiri enobarvne sredine, tako da nam preostaneta le še dve. V našem primeru sta to rdeča in oranžna sredina. V zadnjem koraku bo orientacija zelo pomembna, saj vemo, da mora rdeča barva mejiti na belo in zeleno, zato bomo glede na sliko 16 na sprednji ploskvi sestavili rdečo sredino, na zadnji ploskvi pa oranžno sredino.

Pogled spredaj/levo/zgoraj

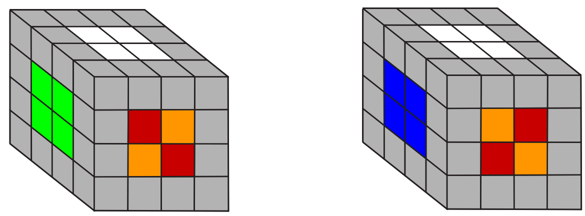


SLIKA 16.
Pravilna orientacija rdeče sredine

Cilj: sestaviti peto in šesto enobarvno sredino s pravilno orientiranima nasprotnima barvama na sprednji in zadnji ploskvi (v našem primeru rdeča barva na sprednji ploskvi in oranžna barva na zadnji ploskvi).

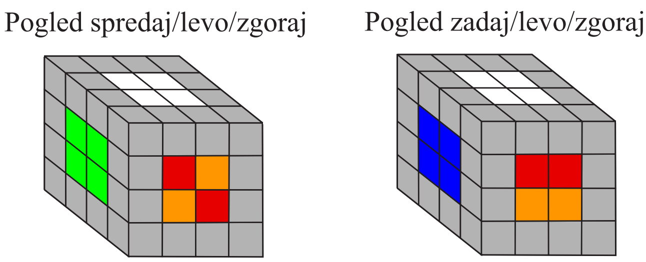
- Postavitev kocke: kocko postavite tako, kot prikazuje slika 16, in je pri izvajanju nadaljnjih korakov več ne obračajte.
- Če ima kocka že sestavljeno rdečo in oranžno sredino, a sta na napačnih ploskvah (oranžna sredina na sprednji ploskvi in rdeča sredina na zadnji ploskvi), izvedite: d^2, F^2, B^2, d^2.
- Če ima kocka na sprednji in zadnji ploskvi šahovski vzorec, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 17, in izvedite: d^2, F^{desno}, B^{desno}, d^2.

Pogled spredaj/levo/zgoraj   Pogled zadaj/levo/zgoraj

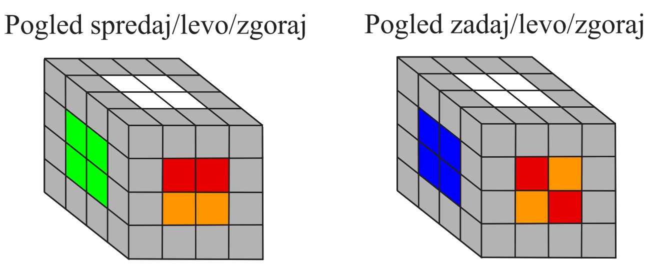


SLIKA 17.
Šahovski vzorec na sprednji in zadnji ploskvi

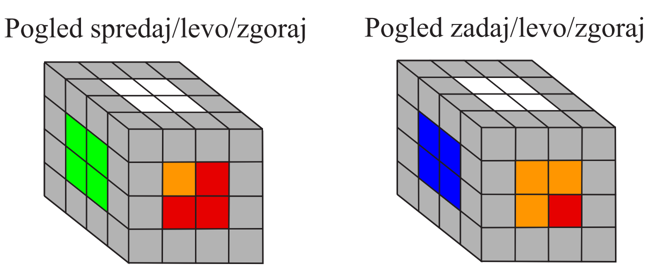
- Če ima kocka na sprednji ploskvi šahovski vzorec, na zadnji ploskvi pa eno rdečo in eno oranžno sredinsko vrstico, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 18, in izvedite: d^2, B^{desno}, d^2.
  Opomba. Po tem koraku obe sredini še ne bosta sestavljeni in je treba izvesti še enega izmed naslednjih korakov.
- Če ima kocka na sprednji ploskvi eno rdečo in eno oranžno sredinsko vrstico, na zadnji ploskvi pa šahovski vzorec, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 19, in izvedite: d^2, B^{levo}, d^2.
  Opomba. Po tem koraku obe sredini še ne bosta sestavljeni in je treba izvesti še enega izmed naslednjih korakov.
- Če ima kocka na sprednji ploskvi tri rdeče sredinske kockice, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 20, in izvedite: d^2, F^{levo}, d^2.



SLIKA 18.
Šahovski vzorec le na sprednji ploskvi

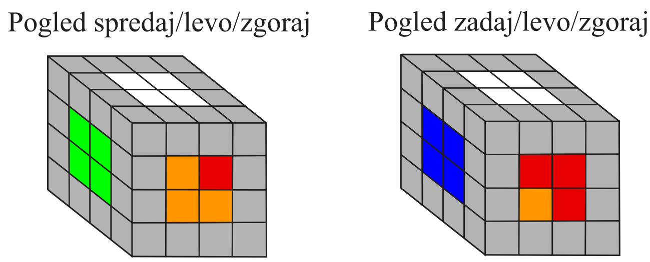


SLIKA 19.
Šahovski vzorec le na zadnji ploskvi

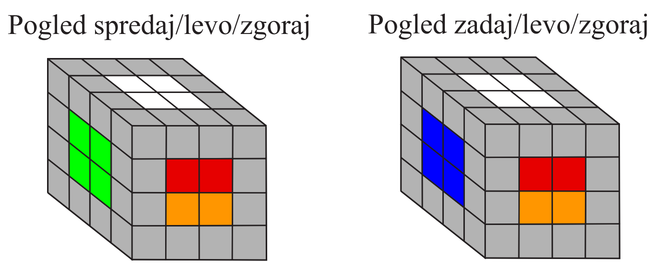


SLIKA 20.
Tri rdeče sredinske kockice na sprednji ploskvi

- Če ima kocka na sprednji ploskvi eno rdeče sredinsko kockico, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 21, in izvedite: d^2, F^{levo}, B^2, d^2.
- Če ima kocka na sprednji in zadnji ploskvi eno rdečo in eno oranžno sredinsko vrstico, jo s pomočjo F-plasti in B-plasti pripravite, kot prikazuje slika 22, in izvedite: d^2, B^2, d^2.

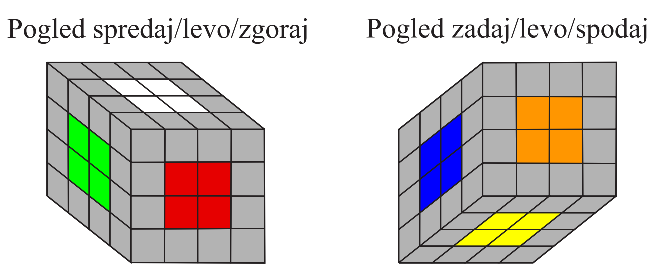


SLIKA 21.
Ena rdeča sredinska kockica na sprednji ploskvi



SLIKA 22.
Ena rdeča in ena oranžna sredinska vrstica na sprednji in zadnji ploskvi

Če ste uspešno izvedli vse tri opisane postopke, potem bi morala kocka imeti pravilno sestavljenih vseh šest enobarvnih sredin (slika 23). Pred nadaljevanjem postopka je priporočljivo še enkrat preveriti s poljubno kotno kockico, če so vse barvne sredine na ustreznih mestih.



SLIKA 23.
Pravilno sestavljenih vseh šest enobarvnih sredin

Se nadaljuje ...

V naslednji številki revije Presek si bomo pogledali še preostale tri korake našega algoritma in s tem dokončno rešili Rubikovo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$.

Literatura

[1] *Best Speed Cubes*, dostopno na http://www.bestspeedcubes.com/4x4-rubiks-cubes/, ogled dne 22. 4. 2017.

[2] *How to Solve the Rubik's Cube!* (Beginner Method), dostopno na https://www.youtube.com/watch?v=tYmtdFM1Zwk, ogled dne 22. 4. 2017.

[3] *Jessica Fridrich*, dostopno na http://www.ws.binghamton.edu/fridrich/, citirano dne 22. 4. 2017.

[4] *Professor's Cube*, dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Professor\%27s_Cube, ogled dne 22. 4. 2017.

[5] *Rubik's Revenge, Wikipedia*, dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik\%27s_Revenge, ogled dne 22. 4. 2017.

[6] *Solving the Rubik's Revenge* (×4 × 4), dostopno na http://www.speedcubing.com/chris/4-solution.html, ogled dne 22. 4. 2017.

[7] N. Špur, *Algoritem za reševanje Rubikove kocke*, Presek, **42** (2014/2015), 4, 23–29.

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

	2				3		
1							
	3	8				4	
	5						
		4		1			
	7			8		6	4
			2				
4	6				5		2

REŠITEV BARVNI SUDOKU

8	2	6	5	4	3	7	1
1	4	3	7	5	8	2	6
7	3	8	1	2	6	4	5
6	5	2	4	7	1	3	8
2	8	4	6	1	7	5	3
5	7	1	3	8	2	6	4
3	1	5	2	6	4	8	7
4	6	7	8	3	5	1	2

× × ×

Vodna gladina

↓↓↓
Aleš Mohorič

→ **Poletni izlet na Krko je tokratni vir navdiha za naravoslovno fotografijo. Z odprtimi očmi lahko najdemo okoli sebe obilo zanimivih pojavov. Na videz bolj dolgočasna od vseh teles v okolici je vodna gladina postregla s kar nekaj presenečenji. Slika na naslovnici kaže odsev neba na sicer mirni rečni gladini. Gladino je vzvalovila raca, ki plava proti kameri. Valovi so dobro vidni zaradi kontrasta med svetlim nebom in temnim mostom za raco.**

SLIKA 1.
Značilna klinasta valovna brazda za raco, ki plava hitreje od valov.

Na delu gladine, ki se zaradi valov nagne proti kameri, se zrcali svetlo nebo, na delu, ki je nagnjen stran, pa zasenčeni spodnji del mostu. Valovi imajo zato zelo izrazit kontrast. Brazda za raco ima značilno klinasto obliko. Po obliki brazde, njenem vršnem kotu, bi lahko povedali, kako hitro raca plava. Na prvi pogled je brazda podobna Machovemu valovnemu čelu, pa to ni. O valovnih brazdah je bil objavljen prispevek v Preseku [1]. Oblika valov za raco je posledica disperzije, pojava, da je hitrost valov odvisna od valovne dolžine. Dolgi valovi potujejo hitreje kot kratki. Te valove na vodni gladini poganja teža.

Valove na vodni površini pa lahko vzdržuje tudi

SLIKA 2.
Odsev Sonca na vodni gladini. Vidimo nekaj krožnih valov, nekaj skupin mehurčkov in mavrični venec okoli Sonca.

sila površinske napetosti. Pri teh valovih velja obratno – valovi s krajšo valovno dolžino so hitrejši. Kateri vpliv pri valovanju prevladuje, je odvisno od valovne dolžine. Valovi zaradi površinske napetosti imajo valovno dolžino krajšo od nekaj centimetrov. Tudi o tem valovanju si lahko preberete v starem Preseku [2]. Take valove vidimo na drugi sliki. Na tej sliki vidimo odsev Sonca na vodni gladini. Desno in nad njim je krožni val. Jasno vidimo, da so krajši valovi (tisti, kjer so proge bolj na gosto) prišli dlje od izvira kot dolgi valovi.

Na sliki opazimo tudi, da je odsev Sonca obdan z mavričnim obročem. To je Sončev venec, korona, ki je nastala na oblakih okoli Sonca [3]. Pogled proti Soncu tega pojava ni razkril, saj je Sonce skozi luknjo v oblakih svetilo premočno. Šele v odsevu je bila svetloba dovolj šibka, da je se je venec opazil.

Še eno podrobnost opazimo na drugi sliki. Mehurčke levo in desno spodaj. Sicer se na fotografiji slabo razločijo, ker so le majhna podrobnost, vendar v povečanem izseku zlahka opazimo žive škrlatne in zelenomodre barve, ki so posledica interference bele svetlobe na tanki steni mehurčka. O barvah mehurčkov govori fizikalni članek v tej številki [4].

Torej, ko greste naslednjič v naravo, le dajte oči na peclje in vzemite pametni telefon s sabo. Vse objavljene fotografije so narejene z njim in s fotografskega vidika niso zahtevne. Primerne prispevke bralcev bomo z veseljem objavili. Če ste v zadregi z razlago, se bomo potrudili skupaj.

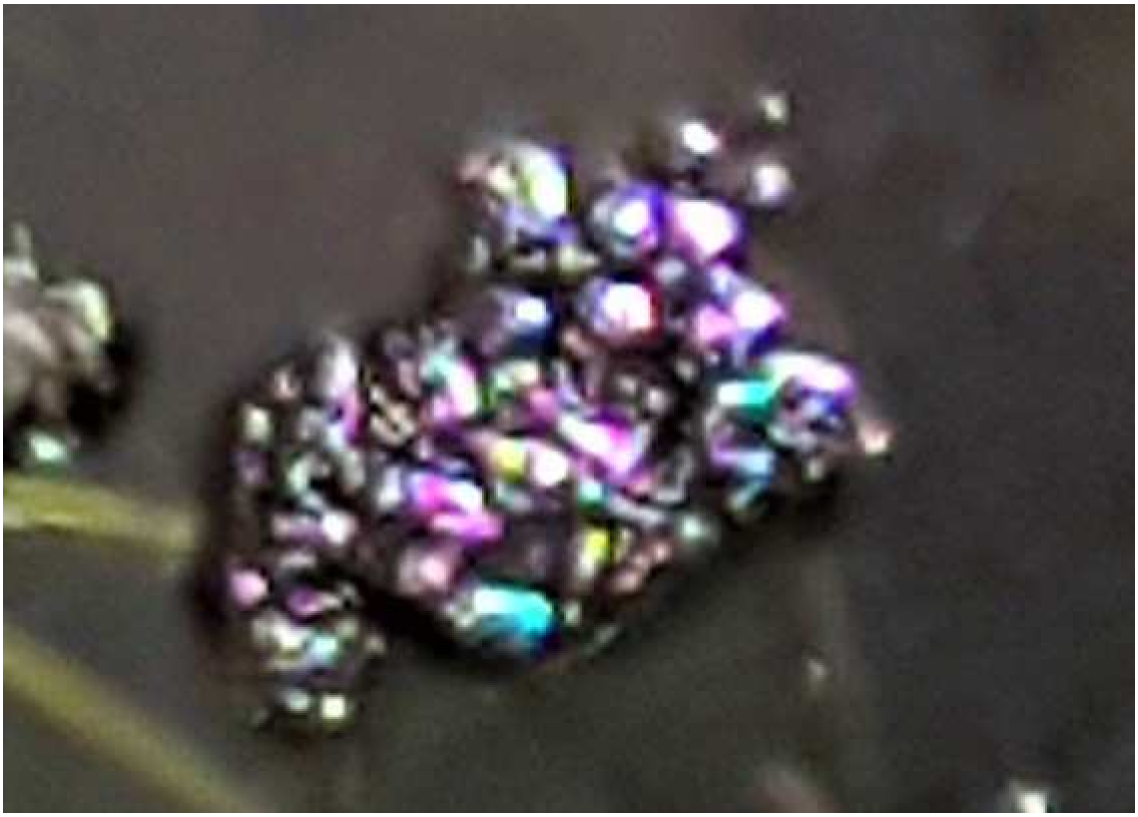
Literatura

[1] A. Likar, *Valovne brazde*, Presek **39**, 1 (2011/2012).

[2] A. Likar, *Vrzimo kamen v vodo*, Presek **41**, 4 (2013/2014).

[3] A. Mohorič, *Venec*, Presek **40**, 5 (2012/2013).

[4] A. Likar, *Barve mehurčkov*, Presek, **45**, 1 (2017/2018).



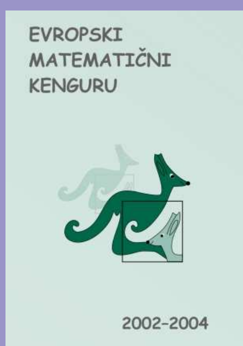
SLIKA 3. Podrobnost s slike 2 – skupina mehurčkov na vodi. Mehurčki so obarvani v barve značilne za interferenco bele svetlobe na tanki plasti.

×××

Matematični kenguru

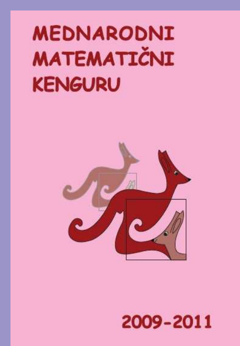
Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



10,99 EUR

18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!