

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 23 (1995/1996)

Številka 5

Strani 257-263

Marija Vencelj:

TRIDIMENZIONALNE TEŽAVE GOSPODA PLOŠČAKA

Ključne besede: zanimivosti, razvedrilo, geometrija, dimenzije prostorov, Flatland, Edwin A. Abbot.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/23/1268-Vencelj.pdf>

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

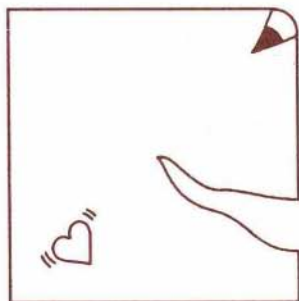
TRIDIMENZIONALNE TEŽAVE GOSPODA PLOŠČAKA

Živimo v tridimenzionalnem prostoru. To pomeni, da ima gibanje in opazovanje v našem prostoru tri prostostne stopnje. Poenostavljeno bi rekli, če govorimo le o gibanju, da lahko pridemo iz vsake točke našega prostora do poljubne druge njegove točke s kombinacijo treh gibanj v treh smereh, ki jih lahko vzamemo tudi kot medsebojno pravokotne. (No, če smo pošteni, je gibanje gor-dol za nas včasih rahlo problematično; svet je nekoliko bolj tridimenzionalen za ptice in ribe kot za nas.)

V prejšnji številki Preseka smo objavili prispevek o tem, kako si lahko predstavljamo štiridimenzionalno kocko. Kaj pa predstava o četrti dimenziji nasploh, to je o smeri, pravokotni na vse smeri, ki jih zaznavamo v našem tridimenzionalnem svetu? Je sploh možna njena mentalna slika?

Eden najboljših načinov za predstavljanje četrte dimenzije je analogija. Pri poskusu, kako naj bi izgledali štiridimenzionalni predmeti, si pomagamo s predstavo o podobnih naporih, ki bi jih imela dvodimenzionalna bitja, če bi si hotela predstavljati tridimenzionalne predmete. Dvodimenzionalnemu bitju, čigar napore bomo opazovali, bomo rekli Ploščak. Živi v Ploski deželi.

Ploska dežela je ravnina, čudna dvodimenzionalna dežela, naseljena z geometrijskimi liki, ki mislijo, govorijo in imajo človeške občutke. Vse njihovo gibanje in **opazovanje** je omejeno na ravnino.



Ploščak se je prvič pojavil z imenom A. Square v knjigi Flatland, angleškega šolnika in teologa Edwina A. Abbotta okrog leta 1884. Ne vemo, ali je Abbott res začetnik ideje o tovrstnem razvoju predstave o četrti dimenziji. Morda je dobil navdih v Platonovi alegoriji o votlini, v kateri poznajo jetniki tridimenzionalni svet le po senčnih slikah.

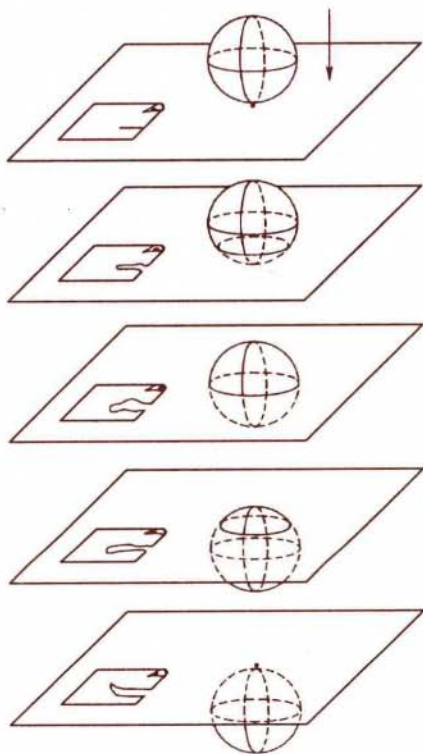
Abbottov Flatland, s podnaslovom Romanca o več dimenzijah, je tudi imenitna satira na viktorijansko Britanijo. Položaj prebivalca Ploske dežele je določen z njegovo obliko, začeniši z najvišjo – svečenikom kot krogom, nato pa preko večkotnikov (več oglišč imaš, več veljaš!) tja dol do daljic, ki predstavljajo ženske. Knjiga – takih danes ne pišejo več – ki jo je vredno prebrati!

Pa se vrnimo k našemu Ploščaku. Zamislimo si, da je Ploska dežela velik list papirja. Po njem se Ploščak lahko giblje naprej-nazaj in levo-desno ter opravi poljubno kombinacijo teh dveh gibanj.

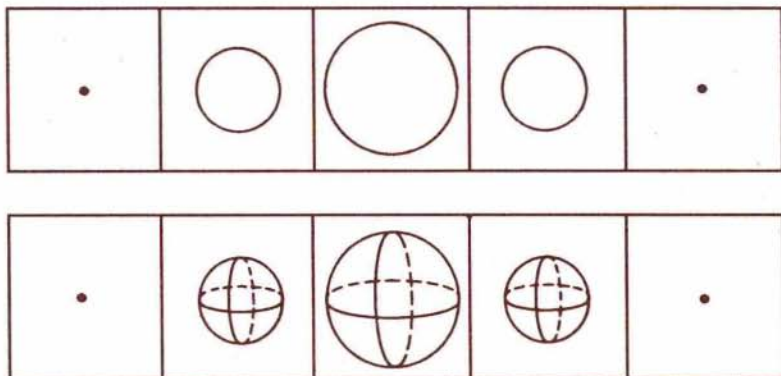
Pri sodeželanu lahko loči število oglišč (ne pozabimo, da vidi le v dveh dimenzijah, torej le projekcijo na premico, ki je pravokotna na smer gledanja), ker vsepovsod prisotna meglica povzroča, da so bližnje točke svetlejše, kar pomaga pri razpoznavanju oblik. Ne more pa z lista papirja, še več, popolnoma je tudi prikrajšan za vedenje o katerikoli drugi dimenziji, razen o tistih dveh, ki ju pozna.

Ko se je neke noči Obla (površje tridimenzionalne krogle) odločila, da ga pouči o tretji dimenziji, je imela zelo trdo delo.

Prva stvar, ki jo je Obla poskusila, je bilo preprosto gibanje naravnost skozi Ploščakovo delovno sobo. Ko je Obla prvič prišla v stik s tistim dvodimenzionalnim območjem svojega tridimenzionalnega prostora, ki je bil Ploska dežela, je Ploščak zagledal točko. Ko je Obla nadaljevala svojo pot, je točka prerasla v majhno krožnico, ki se je najprej večala, nato pa manjšala, se stisnila v točko in na koncu izginila.

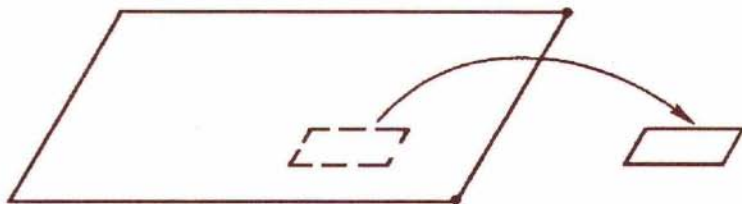


Ploščakova reakcija na ta čudni pojav je bila: “To že ne bo krožnica, ampak najbrž zelo spreten žongler.” In kaj bi rekli mi, če bi naenkrat zaslišali skrivnostni glas iz nedoločljive smeri, ki bi oznanal: “Sem hipersfera. Rada bi vas poučila o četrti dimenziji in v ta namen bom sedaj prešla vaš prostor.” In nato bi se pojavila pika, ki bi počasi naraščala do velike oble, se nato spet počasi skrčila v točko in poniknila. Ploščakovo in naše doživetje prikazuje naslednja slika.



Z našega vidika je razlika med obema izkušnjama ta, da zlahka vidimo, kako se nakladajo krožnice v tretjo dimenzijo, da dobimo oblo, ni pa jasno, kako naložiti oble v četrto dimenzijo, da bi dobili hipersfero.

Pojdimo spet v Plosko deželo k gospodu Ploščaku. S tem, da se je Obla Ploščaku prikazala, ga ni prepričala. Tako se je odločila za nove trike. Najprej je izmaknila iz Ploščakove zidne omare neki predmet, ne da bi omaro odprla ali podrla kakšno steno. Kako je bilo to mogoče? Omara je v Ploski deželi le zaprta dvodimenzionalna figura kot npr. pravokotnik. Vendar lahko v tridimenzionalnem prostoru sežemo vanjo, ne da bi vdrl njene dvodimenzionalne stene.



Analogija s tem trikoma je, da bi lahko štiridimenzionalno bitje, na primer, izmaknilo rumenjaka iz jajca, ne da bi strlo lupino. Lahko bi pobralo denar iz sefa, ne da bi odprlo sef ali zato moralo iti skozi katero od njegovih sten. Ali bi se, denimo, pojavilo ta hip tu med nami, ne da bi prišlo skozi vrata, okna, stene, strop ali tla. Ideja analogije ni v tem, da bi se štiridimenzionalno bitje dematerializiralo ali nehalo eksistirati, da bi lahko šlo skozi zaprta vrata. Našemu prstu ni potrebno, da preneha eksistirati, če naj ga postavimo v notranjost kvadrata, narisane na papirju. Gre za to, da je četrta dimenzija pravokotna na vse naše normalne tridimenzionalne smeri in da zaprte množice v tridimenzionalnem svetu nimajo mej v tej smeri. Sleherni stvar na Zemlji leži odprta pred očmi štiridimenzionalnega opazovalca, celo naše srce.

Edini način, da je Obla lahko prepričala Ploščaka o realnosti tretje dimenzije, je bil, da ga je dejansko dvignila iz Ploske dežele in mu prikazala gibanje v treh dimenzijah. Imamo mi kakšno možnost, da kaj podobnega doživimo? Kot podobno doživetje bi si lahko predstavljali, da so neke štiridimenzionalna bitja, ki bi nas z nekim zaporedjem dejanj dvignila iz naših stlačenih treh dimenzij in nam pokazala "resnični prostor". Tisti pravi!

Veliko ljudi je v nekaj takega verjelo v času spiritističnega gibanja okrog leta 1900. Osrednja misel tega gibanja je bila, da so duhovi štiridimenzionalna bitja, ki se lahko pojavijo ali izginejo na vsakem kraju, bitja, ki vse vidijo . . . Zelo ugleden astronom, profesor Zöllner, je celo napisal knjigo z naslovom *Transcendentna fizika*, v kateri je opisal številne seanse, ki jim je prisostoval s pričakovanjem, da bo dokazal, da so "duhovi" res štiridimenzionalna bitja. Videti je, da je bil Zöllner brezupen lahkovernež in njegova knjiga je povsem neprepričljiva. (Nekaj protislovij, ki jih najdemo v njegovi knjigi, je v eni svojih knjig uporabil za zglede tudi pri nas znani Martin Gardner in jih seveda ovrge). V splošnem je videti, da so avtorji idejo o četrti dimenziji ponižali na nivo okultnih ved, namesto, da bi jih ta ideja vodila k razjasnitvi matematičnih vprašanj. Dejstvo, da je nekaj težko, še ne pomeni, da je zmedeno. Najboljša knjiga o četrti dimenziji, napisana z mističnega vidika, je *Tertium Organum* astronoma Ouspenskega, ki je napisal tudi zelo dobro poglavje o četrti dimenziji v svoji knjigi *Novi model vesolja*.

— — —

Kakorkoli, Abbottova Ploska dežela se konča kmalu po Ploščakovem izletu v tretjo dimenzijo. Ko jih je hotel prepričati o obstoju tretje dimenzije, so ga Ploskodeželani zaprli (in vrgli ključ stran).

Najdemo pa posrečeno nadaljevanje Ploščakove zgodbe v knjižici ameriškega matematika Rudolfa Ruckerja Geometrija, relativnost in četrta dimenzija, ki je izšla leta 1977 pri založbi Dover. Avtor takole naveže svojo zgodbo:

Imel sem veliko srečo, da mi je prišla v roke resnična kronika ostanka Ploščakovega življenja.

Ploščak je bil že kakih deset let zaprt, ko se je pojavila v njegovi borni celici Obla spet kot krožnica spreminjajoče se velikosti. “Kaj se ti je pripetilo, dete?”

“O, presvetla Obla, ko bi te le ne bil nikoli videl; ko bi bil vsaj zaradi premalo oglišč nesposoben dojeti tvoj dokaz!”

“Pa saj še nisi kaj dosti videl. Bi rad, da te dvignem iz te celice in postavim nazaj v ženino sobo? Veš, bojim se ti povedati, da živi sedaj v tvoji hiši velik oster enakokraki trikotnik.”

“Obla, Obla, ko bi mi vsaj verjeli! Nobenega smisla nima, spraviti me ven. Takoj bi me spet zaprli, morda celo giljotinirali. Toda tu si in jaz imam načrt. Obrni me, obrni me in moje lastno telo bo dokaz, da tretja dimenzija obstaja!”

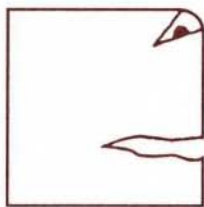
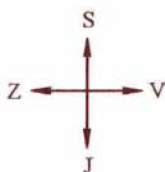
Nato je Ploščak razložil svojo idejo. V ječi je nekaj več premišljeval o Premi deželi. Premo deželo je videl v sanjah pred davnimi leti. To je bila premica, po kateri so sem in tja drsele daljice - Premščaki, prebivalci te dežele, s čutili na obeh krajiščih.

Ploščak je premišljal o Premi deželi podobno kot mi o Ploski deželi. Svoje težave s tretjo dimenzijo je premagal, ko si je predstavljal težave Premščakov z drugo dimenzijo.

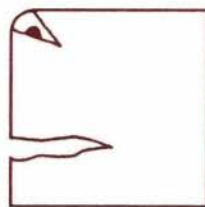
Prišel mu je na um način trajne spremembe, ki jo je bil sposoben napraviti v Premi deželi. (Seveda bi lahko izmaknil kako daljico, toda to bi lahko proglasili za nenavadno izginotje.) Dopustil je, da ima vsaka daljica na levem koncu bas, na desnem tenor. Če bi eno od daljic obrnil, bi vsakdo v Premi deželi lahko opazil to spremembo.



Če bi torej Ploščak lahko obrnil daljico okrog točke, mar ne bi mogla Obla obrniti Ploščaka okoli daljice? Obla bi lahko obrnila Ploščaka v njegovo zrcalno sliko! In vsakdo v Ploski deželi bi to spremembo lahko dojel, saj ima vsak, ki ima oko na severu, usta na vzhodu.



Ploščak



Ploščak

Rečeno, storjeno. Ploščak (ali bolje ~~ḡššolḡ~~) je poklical stražo: "Glejte, vi tepci omejeni, zavrteli so me skozi tretjo dimenzijo. Postal sem svoja lastna zrcalna slika. Ho, ho, ho, ho! Pokažite me svečeniku! Sedaj bo, ne, sedaj bo **moral** verjeti!"

No, na Ploskodeželane je naredil velik vtis. Tako velik, da so ga obsodili na smrt.

Preden nadaljujemo s to srh vzbujajočo zgodbo, premislimo analogno svojo situacijo.

Videti je, da bi nas lahko štiridimenzionalno bitje obrnilo v našo lastno zrcalno sliko z rotacijo skozi četrto dimenzijo okrog ravnine, ki bi sekala naše telo, recimo da bi šla skozi nos, popek in hrbtenico. In kaj bi čutili, če bi nas takole obrnili? Ne vem. Dokaj neokusna misel je, da bi bilo vse, kar bi ostalo v tridimenzionalnem prostoru, če bi bil zasuk površno izveden, ravnina, okrog katere bi nas zasukali. Bili bi torej plosk človekov presek. Podobno, kot bi od Ploščaka ostala le presečna daljica, če bi Obla odnehala na pol poti.

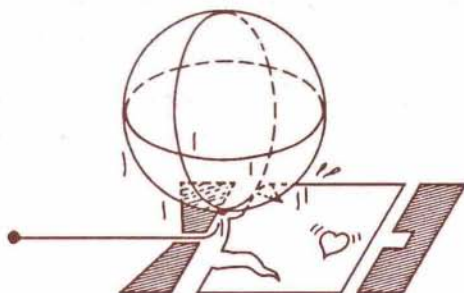
Pa še enkrat obiščimo ubogega Ploščaka. Ploskodeželani so ga poimenovali "predmet gnusa za ljudstvo" in ga sklenili takoj giljotinirati. (Naša tridimenzionalna giljotina deluje tako, da pride ravninski segment med dva dela žrtvinega telesa. Giljotina v Ploski deželi pa je daljica, ki pride med dva dela obsojenčevega poligonskega telesa.)

Ploščak se je potil od groze. Bil je tako prestrašen, da ni niti malo zmožgel uživati v svoji zrcalni sliki - pišoč nazaj in podobne stvari. Klical je Oblo na pomoč, a nič se ni zgodilo.

Nekega sivega mračnega jutra so ga odpeljali na Polje groze, kjer je bila pripravljena giljotina. Videl je veliko starih prijateljev, a nobeden ga ni gledal v oči. Obsodbo so prebrali in dva ostra enakokraka trikotnika sta začela potiskati strašni inštrument proti njemu. In tedaj ...



Tedaj se je pojavila Obla. Pohitela je do točke med Ploščakom in rezilom giljotine in začela vleči navzgor. Začela je raztegovati Plosko deželo v smeri tretje dimenzije in jo je raztegovala, dokler ni bil prostor med obsojencem in rezilom tako velik, da rezilo Ploščaka ni moglo doseči.



Ploskodeželani so bili zelo prevzeti. Ko je nato vzela Obla še srce iz svečenika, pa tudi močno prestrašeni. Zahtevali so pomilostitev za Ploščaka.

Nekoč obsojeni večkotnik je postal vodilni raziskovalec na Univerzi v Ploski deželi. Poglavitni cilj njegovih raziskav je bila ukrivljenost Ploske dežele in razlaga tretje dimenzije.

Analogija Ploščakove rešitve v našem prostoru pa je že težja matematična zgodba. Reče se ji neevklidska geometrija.