Ohlajanje

mag. Tine Golež
Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

Povzetek

Opisan je poskus, ki je primeren tudi za maturante. Analiza meritve ohlajanja nekoliko segretega bolometra poteka po dveh poteh. Dijaki tako spoznajo, kako pri numeričnem računanju s spreminjanjem parametra modelsko krivuljo prilagodimo izmerkom. Dodana je še analitična rešitev, ki pa v tem primeru ne prekaša numerične, saj izhaja iz približka, hkrati pa tudi zahteva poznavanje infinitezimalnega računa. Zaradi poceni opreme in dobrih rezultatov učitelje vabimo, da s to meritvijo dopolnijo nabor vaj za maturante.

Ključne besede: poskus, ohlajanje, analiza meritev

Cooling

Abstract

An experiment is described which is also suitable for secondary school graduates. An analysis of the measured cooling time of a slightly heated bolometer is conducted in two ways. Secondary school students thus learn how to adjust the model curve to the measurements by changing the parameter during numerical calculations. An analytical solution is added, which in this case does not surpass the numerical one, as it is based on an approximation and simultaneously requires the knowledge of infinitesimal calculus. In light of the inexpensive equipment and good results, teachers are invited to add this measurement to their collection of exercises for secondary school graduates.

Keywords: experiment, cooling, analysis of measurements

Uvod

Excel je program, ki naj bi ga med šolanjem spoznali vsi dijaki. Čeprav ni v prvi vrsti namenjen fiziki, nam lahko pride še kako prav. Seveda glavna prednost programa ni ta, da omogoča računanje koordinat telesa pri prostem padu ali vodoravnem metu. Za omenjena pojava znamo zapisati natančne analitične enačbe že v srednji šoli, zato je program le hitrejši računar.

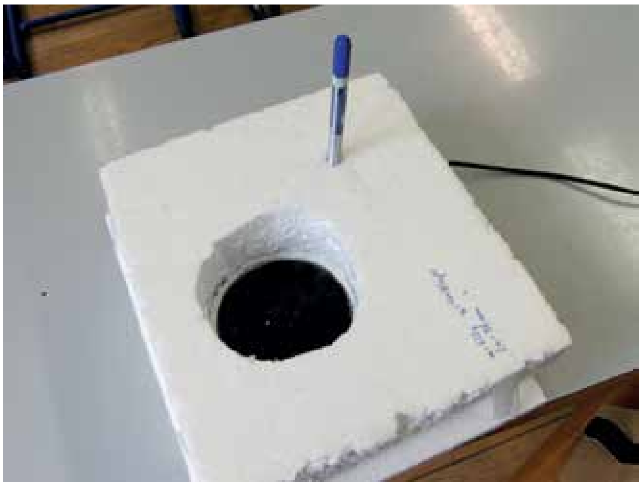
Smiselno je, da ga uporabimo za numerično računanje, kadar ne poznamo analitične rešitve. Študent sicer zna zapisati analitično rešitev za lego in hitrost padajočega telesa, ko upor zraka ni zanemarljiv. V srednji šoli pa se prezahtevnim računom izognemo tako, da padanje razdelimo na kratke časovne intervale in znotraj vsakega privzamemo, da je sila konstantna. Tako že dijak, ki še ne zna infinitezimalnega računa, z numeričnim računanjem v Excelu pravilno napove lego in hitrost telesa v poljubnem trenutku [1].

Včasih pa tudi višja izobrazba ne pomaga, saj analitične rešitve preprosto ni. Tak primer je ohlajanje telesa, kadar moramo upoštevati tako ohlajanje s konvekcijo kot tudi s sevanjem. Tedaj ne moremo napisati izraza $T(t)$ [2]. Ker imamo na šolah za tak poskus dovolj opreme, bomo v nadaljevanju predstavili pot, ki je nadvse primerna za srednje šole.

Izdelava merilnika

Bolometer izdelamo kar sami. Potrebujemo približno pol kilograma svinca in kovinski pokrovček s premerom okoli 10 cm. V pokrovčku stalimo svinec in dobimo tanek disk. S strani ga nekoliko prebodemo, da vanj lahko vstavimo temperaturni senzor. Z vrtanjem v svinec so lahko težave, bolje se obnese kar žebelj. Uporabili smo senzor za merjenje temperature znamke Vernier. Seveda disk tudi stehtamo.

Da bo disk postal bolometer, ga moramo še počrniti. Saje, ki jih naredi plamen sveče, so povsem primerne. Disk držimo tik nad plamenom, da ogenj malo dušimo. Če ima namreč plamen premalo kisika, se količina saj še poveča. Potem disk položimo na debelejši stiropor. Če ga uporabimo kot bolometer, ga obdamo z drugim stiroporom, ki je tudi debel in ima ustrezno luknjo. Ob sončnem dnevu merimo segrevanje in od tod solarno konstanto (slika 1), [3, 4].

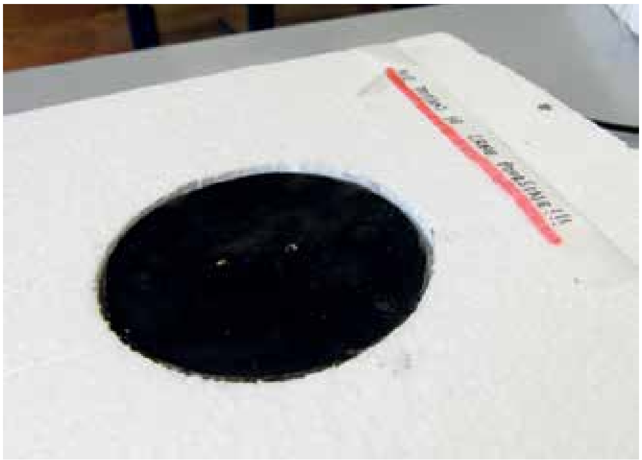


Slika 1: Bolometer, pripravljen za merjenje solarne konstante.

Program sam izračuna najboljšo premico skozi izmerke segrevanja, mi pa na osnovi tega izračunamo, kolikšni gostoti energijskega toka smo izpostavljeni. Ohlajanje je praktično zanemarljivo, točke zares ležijo skoraj na premici.

Za merjenje ohlajanja bolometer obdamo s tanjšim stiroporom, ki je debel enako kot bolometer (slika 2). S segrevanjem ni težav, preprosto ga osvetlimo z močnejšo žarnico. Mi navadno uporabimo kar 200-vatno, ki jo držimo kakih 10 cm nad bolometrom.

Program sam izračuna najboljšo premico skozi izmerke segrevanja, mi pa na osnovi tega izračunamo, kolikšni gostoti energijskega toka smo izpostavljeni. Ohlajanje je praktično zanemarljivo, točke zares ležijo skoraj na premici.



Slika 2: Bolometer, pripravljen za meritve med njegovim ohlajanjem.

Teoretični uvod

Temperature dotikajočih se teles stremijo k izenačenju. Predmet, ki ima višjo temperaturo od okolice, se bo zato ohlajal. Največkrat so v igri vsi trije načini prehajanja toplote. Vsekakor bo predmet s prevajanjem segreval zrak okoli sebe; zato se bo pojavil vzgon, ki bo povzročil dvigovanje zraka, kar pa je že konvekcija. Seveda se bo predmet ohlajal tudi s sevanjem.

Temperature so tri: temperatura predmeta, temperatura zraka in temperatura sobe. Ne smemo namreč spregledati, da se predmet sicer ohlaja s sevanjem, a da nanj sevajo tudi vse stene sobe, tako da je ohlajanje s sevanjem daleč manj izdatno, kot bi bilo v vesolju (ali zunaj v jasni noči). Seveda na srednješolski stopnji nekatere stvari poenostavimo. Privzeti smemo, da sta temperatura sobe in zraka kar enaki. Oznaka T_S bo torej temperatura okolice, uporabili pa jo bomo tako v enačbi za konvekcijo kot tudi v izrazu za sevanje.

Prevajanje in konvekcijo bomo zapisali s skupnim členom. Ta je odvisen od površine telesa, ki se ohlaja, prav tako pa tudi od temperaturne razlike in od koeficienta h, ki ga bomo s to meritvijo določili.

Stefanov zakon opiše sevanje. Privzamemo, da gre za črno telo, saj je svinčeni disk, ki ga bomo uporabili kot bolometer, primerno počrnjen, tako da ima emisivnost – posebno še v območju IR-svetlobe – res kar 1.

Zapišimo povedano z enačbo za ohlajanje. Prvi člen na desni strani se nanaša na konvekcijo (skupaj s prevajanjem), drugi pa na sevanje:

$$\Delta T = \frac{-hS(T-T_S)-S\sigma(T^4-T_S^4)}{mc_p}\Delta t.$$

Minus nakazuje, da se bo temperatura zniževala. Žal enačba – tudi če je zapisana kot diferencialna in ne kot diferenčna, kot je tu – nima analitične rešitve v obliki $T(t) = \ldots$

Ohlajanje bo razmeroma počasno; tudi tedaj, ko bomo bolometer ohlajali z dodanim ventilatorjem. Zato lahko ohlajanje razdelimo na korake po eno sekundo. Privzamemo, da je temperatura po eno sekundo konstantna, in izračunamo, koliko toplote je bolometer oddal s konvekcijo (z vključenim prevajanjem) in koliko s sevanjem. Seveda se bralec sedaj vpraša, kako lahko to storimo, ko pa še ne vemo, kolikšna je vrednost koeficienta h. Za ta koeficient si izberemo vrednost na primer 10. Potem izračunamo, za koliko se je bolometer ohladil. Celotni postopek ponovimo z ravnokar izračunano temperaturo. Vse te korake bo opravil kar Excel, le prvi ukaz moramo zapisati. Tako bomo na grafu dobili dva niza podatkov: izmerjene in izračunane temperature. Koeficient h spreminjamo toliko časa, da se točke izračunanih temperatur prilegajo izmerjenim. Ko poznamo koeficient, izračunamo delež toplote, ki ga je telo oddalo z enim in drugim načinom ohlajanja. Seveda primerjamo tudi ohlajanje z naravno konvekcijo in ohlajanje z ventilatorjem. Pričakujemo, da se pri vsiljeni konvekciji znatno zmanjša delež ohlajanja s sevanjem, saj se predmet ohladi bistveno hitreje.

Stefanov zakon opiše sevanje. Privzamemo, da gre za črno telo, saj je svinčeni disk, ki ga bomo uporabili kot bolometer, primerno počrnjen, tako da ima emisivnost – posebno še v območju IR-svetlobe – res kar 1.

Meritev in izračun

Bolometer osvetljujemo z močnejšo žarnico. Segrejemo ga do 52 °C. Potem se malo oddaljimo in sprožimo meritev. Za ohlajanje z naravno konvekcijo počakamo kar 1100 sekund. Merilni sistem naj izmeri temperaturo vsako sekundo.

Najprej v delovni list zapišemo nekaj podatkov o meritvi. V celico **F2** vpišemo temperaturo sobe, ki se v polju **F3** preračuna v kelvine. V celico **G2** vpišemo vrednost za koeficient h. Izberemo kar vrednost 10 (ko sta pozneje oba niza točk na grafu, vrednost toliko časa spreminjamo, dokler se izračunani izmerki ne ujemajo z izmerjenimi). V celico **H2** vpišemo površino tistega dela bolometra, ki se ne dotika stiropora (gre za počrnjeno zgornjo ploskev valja – izgubo toplote na ploskvah, ki sta v stiku s stiroporom, lahko zanemarimo), v celico **I3** pa vrednost Stefanove konstante.

1	F	G	H	I
2	*Ts*	*h*	*S*	sigma
3	24	10	0,007539	5,67E-08
4	297			

Na ta delovni list prilepimo še izmerke. Naj bo prvi izmerek tisti, ko je bila temperatura natančno 50 °C. Čas $t = 0$ bo v celici D5, temperatura pa v celici E5. Najprej vse temperature spremenimo v kelvine. Ta stolpec dodamo na desno. Potem v celico **H5** prepišemo začetno temperaturo. V celico **H6** zapišemo ukaz, ki bo izračunal novo temperaturo. Od prejšnje temperature (Tpr) bomo odšteli toliko, za koliko se je zaradi vseh načinov ohlajanja zmanjšala v tej sekundi. Gre za izraz, ki ga bomo pozneje zapisali v ustrezni obliki za Excel:

$T = T_{pr} - (hS(T - T_S) + S\sigma(T^4 - T_S^4))\Delta t/(mc_p).$

Tako izračunamo temperaturo v trenutku $t = 1$ s.

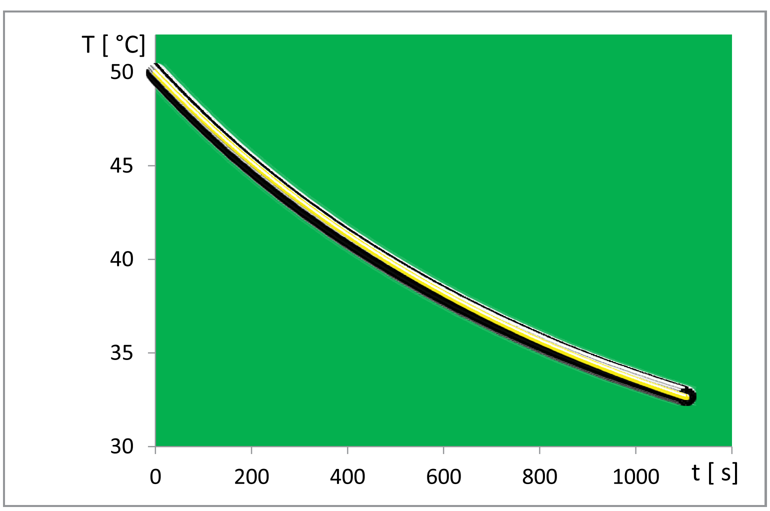
Sedaj je čas, da zapišemo enačbo za temperaturo v naslednji sekundi v celico **H6** z ustreznimi simboli, kot jih zahteva Excel:

=H5-(G2*H2*(H5-F3)+H2*I2*(H5^4-F3^4))/(0,623*130*0,5).

Ta celica (**H6**) je v spodnji tabeli, ki je del Excelovega lista, osenčena. Potem le še s »potegom navzdol« izračunamo preostalih tisoč in nekaj vrednosti. Seveda dodamo še stolpec z modelskimi temperaturami v stopinjah Celzija. Od vrednosti v stolpcu **H** odštejemo 273.

t	T	T[K]	T_{model} [°C]	T_{model} [K]		Kon.	Sev.		kon/vse
0	50,00	323	50	323		114,4	172,5		0,399
1	49,96	323	49,97	322,97		114,3	172,3		0,399
2	49,93	322,9	49,95	322,94		114,2	172,1		0,399

Program nariše graf z vrednostmi v stolpcih **D** (vodoravna os, čas), **E** in **G** (obe temperaturi, izmerjena in modelsko izračunana). Sedaj spreminjamo vrednost konstante h v celici **G2**, dokler teoretični izmerki ustrezno ne prekrijejo izmerjenih. Pri opisani meritvi je bila ustrezna vrednost koeficienta h enaka 4,4.



Zanima nas, kolikšen je delež oddane toplote s konvekcijo (z vključenim prevajanjem) glede na vso oddano toploto.

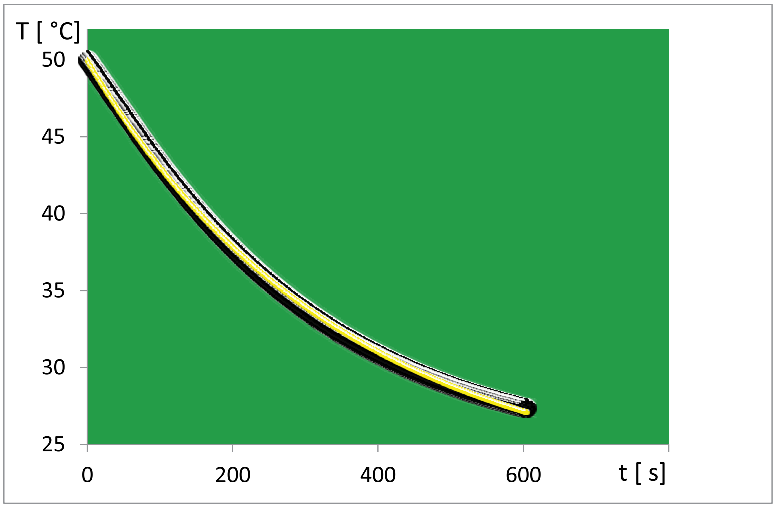
Graf izmerjene temperature (črna debela krivulja) in modelsko izračunane temperature (tanjša rumena krivulja). Gre za ohlajanje brez ventilatorja.

Zanima nas, kolikšen je delež oddane toplote s konvekcijo (z vključenim prevajanjem) glede na vso oddano toploto. To zapišemo z izrazom:

$$\frac{h(T-T_S)}{h(T-T_S)+\sigma(T^4-T_S^4)},$$

ki smo ga izračunali v stolpcu **M**. Pričakovano se delež nekoliko povečuje, saj se z nižanjem temperaturne razlike ohlajevanega telesa in okolice hitreje zmanjšuje delež sevanja, a razlika ni velika. Medtem ko je na začetku konvekcija predstavljala 40 % ohlajanja, ga je na koncu (pri temperaturi 33 °C oziroma 9 °C nad temperaturo sobe) 42 %.

Poskus ponovimo, a tokrat na bolometer usmerimo manjši ventilator, ki ga sicer uporabljamo za hlajenje v vročih poletnih dneh. Izberemo najmanjšo možnost pihanja. Tokrat smo merili le deset minut in navkljub krajšemu času se je bolometer bolj ohladil.



Ohlajanje z vsiljeno konvekcijo. Ohlajali smo do nižje temperature kot pri naravni konvekciji.

Prilagajanje krivulje kaže, da je najustreznejši koeficient h enak 26. Tokrat konvekcija (z vključenim prevajanjem) pomeni od 79 do 81 % ohlajanja; pri nižji temperaturi je delež večji.

Pričakovano se delež nekoliko povečuje, saj se z nižanjem temperaturne razlike ohlajevanega telesa in okolice hitreje zmanjšuje delež sevanja, a razlika ni velika. Medtem ko je na začetku konvekcija predstavljala 40 % ohlajanja, ga je na koncu (pri temperaturi 33 °C oziroma 9 °C nad temperaturo sobe) 42 %.

Približna analitična rešitev

Diferencialna enačba za ohlajanje:

$$P = \frac{dQ}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_S) - S\sigma(T^4 - T_S^4),$$

nima analitične rešitve v obliki $T(t)$. Iz zadrege se rešimo s približkom. Upoštevamo, da se temperatura sobe ne bo veliko razlikovala od začetne temperature svinčenega diska in tudi od vseh naslednjih vrednosti ne, saj bodo razlike vse manjše. Zato namesto oznake T_0 pišemo kar T. Privzamemo torej, da je izraz »$T - T_S$« majhen (seveda ne smemo pozabiti, da gre za kelvine; temperatura v sobi bo nekako 295 K, medtem ko bo začetna temperatura segretega diska 323 K, kar pomeni, da razlika res ne bo velika). Zapišemo:

$$(T^4 - T_S^4) = (T - T_S)(T + T_S)(T^2 + T_S^2).$$

Izraz preuredimo:

$$(T^4 - T_S^4) = (T - T_S)(T^3 + TT_S^2 + T_ST^2 + T_S^3).$$

Pri prvem oklepaju na desni strani enačbe seveda ne trdimo, da sta temperaturi skoraj enaki, saj bi potem dobili nič. Pri drugem oklepaju pa upoštevamo omenjeno (skoraj) enakost temperatur in dobimo:

$$(T^4 - T_S^4) \approx (T - T_S)4T_S^3.$$

Z upoštevanjem tega približka dobi enačba za ohlajanje preprostejšo obliko, saj spremenljivka T nastopa le na prvo potenco:

$$mc_p \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_S) - S\sigma(T - T_S)4T_S^3.$$

Oziroma:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{S(h + \sigma 4T_S^3)}{mc_p}(T - T_S).$$

Pred integriranjem spremenljivki ločimo:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{(T - T_S)} = -\frac{S(h + \sigma 4T_S^3)}{mc_p} \int_0^t dt.$$

Rezultat integracije je:

$$ln\left(\frac{T - T_S}{T_0 - T_S}\right) = -\frac{S(h + \sigma 4T_S^3)}{mc_p} t.$$

Iz te enačbe pa znamo izraziti časovno odvisnost $T(t)$:

$$T(t) = T_S + (T_0 - T_S)e^{-\frac{S(h + \sigma 4T_S^3)}{mc_p}t}.$$

Računalniški program bo skozi izmerke $T(t)$ narisal najboljšo eksponentno krivuljo. Izračunal bo tudi parameter A, ki ustreza izrazu:

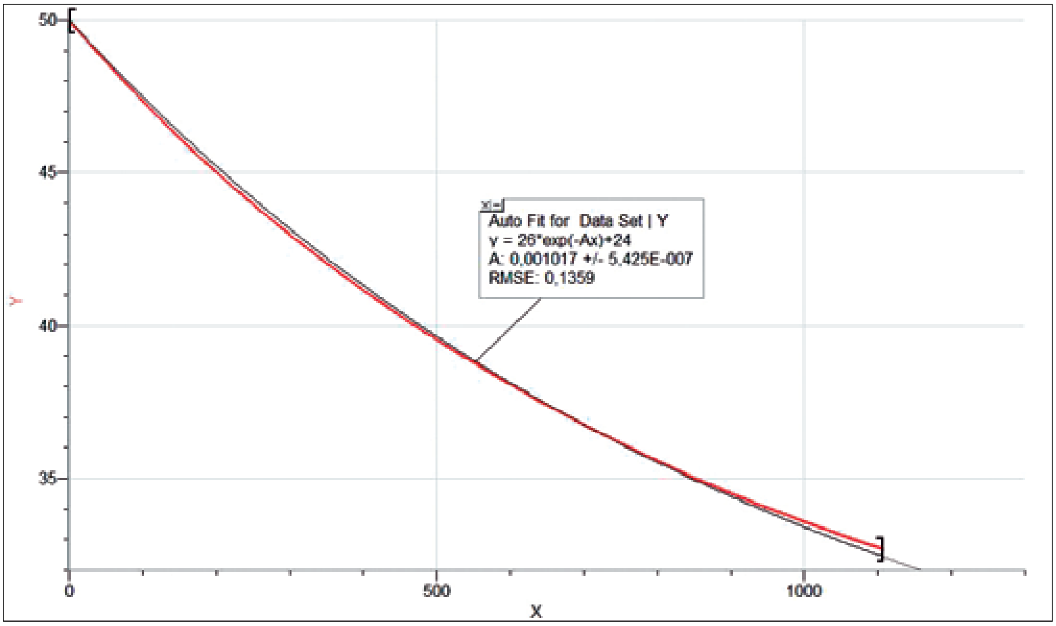
$$A = \frac{S(h + \sigma 4T_S^3)}{mc_p}.$$

Iz te enačbe izračunamo iskani koeficient h, saj vse druge vrednosti poznamo. Ne pozabimo, da moramo temperaturo v tem ulomku pisati v kelvinih! (Preostali zapisi temperature v enačbi $T(t)$ so lahko v °C!)

Po tej poti na koncu še izračunamo, kolikšen delež oddane toplote je posledica sevanja in kolikšen prevajanja ter konvekcije skupaj.

Začetna temperatura je bila 50 °C, temperatura sobe 24 °C in čas ohlajanja 1100 sekund.

Po tej poti na koncu še izračunamo, kolikšen delež oddane toplote je posledica sevanja in kolikšen prevajanja ter konvekcije skupaj.



Slika 3: Ohlajanje ob naravni konvekciji. Program je izračunal enačbo ustrezne eksponentne krivulje, ki ima v začetnem trenutku vrednost 26 in se najbolje prilega izmerkom.

Računalnik je izračunal, da je konstanta A = 0,001017. Zaokrožili bomo končni rezultat. Enoto poznamo, je s^{-1}.

Iz enačbe:

$$\frac{Amc_p}{S} = h + \sigma 4T_S^3$$

Izrazimo h:

$$h = \frac{Amc_p}{S} - \sigma 4T_S^3$$

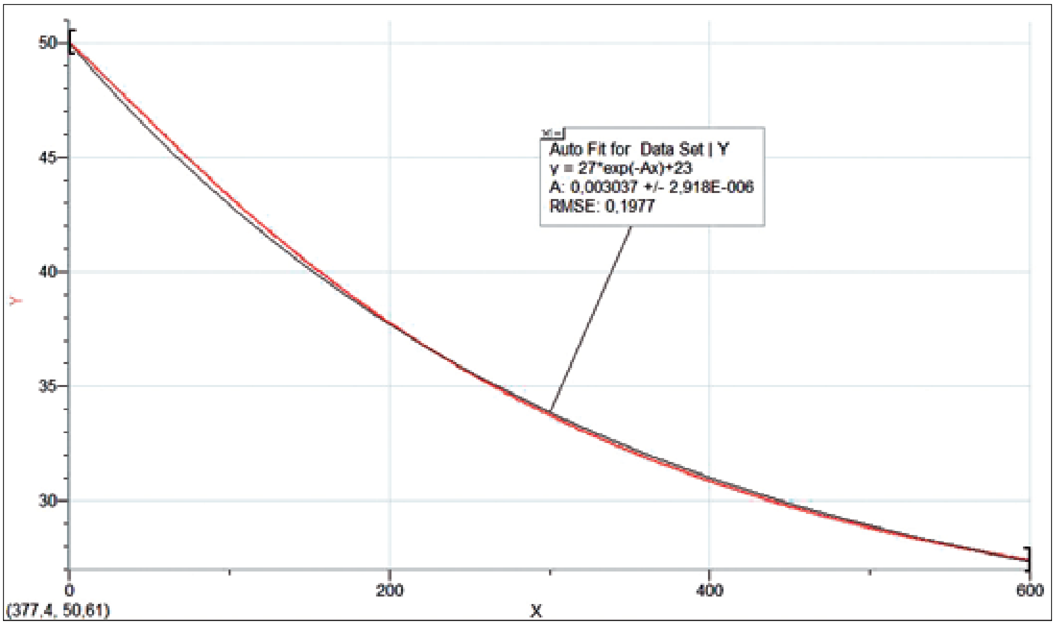
Upoštevamo še fizične lastnosti bolometra. Masa je 0,623 kg, polmer diska 0,049 m, specifična toplota svinca pa 130 $\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$. Koeficient h je zato enak:

$$h = 5{,}0\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$$

Le 46 % celotnega ohlajanja je povzročila konvekcija (s prevajanjem), kar 54 % pa sevanje. Rezultat se ne razlikuje veliko od numerično izračunanega.

Ohlajanje z ventilatorjem

Začetna temperatura je bila 50 °C, temperatura sobe 23 °C in čas ohlajanja 600 sekund.



Slika 4: Ohlajanje ob vsiljeni konvekciji.

Računalnik je izračunal, da je konstanta $A = 0{,}003037$.

Tokrat je koeficient h pričakovano večji:

$h = 26{,}7\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$.

To pomeni, da kar 82 % ohlajanja povzroči konvekcija (vključno s prevajanjem).

Komentar

Analitično rešitev načeloma cenimo bolj kot numerični izračun. A kadar analitična rešitev ne obstaja, gotovo najdemo kak približek oziroma poenostavitev diferencialne enačbe. Ker je »cena približka« odstopanje od izmerkov, dobi nekaj »točk prednosti« spet numerični izračun. Včasih je imel veliko »negativnih točk«, saj je zahteval dolgotrajno računanje. Ob današnjih računalnikih pa ta zadržek povsem odpade.

Pri opisani meritvi opazimo, da se iz približka izpeljana analitična rešitev in numerični izračun nekoliko razlikujeta. Po vsej verjetnosti lahko bolj verjamemo vrednostim, ki smo jih dobili z numeričnim računom.

Ne smemo spregledati, da smo numerično obravnavo izpeljali iz fizikalnih zakonitosti ohlajanja in tako dobili podatek o deležu ohlajanja. Prav nobenega smisla ne bi imelo, če bi Excel izračunal »trendno črto« v obliki polinoma skozi izmerke, saj nam koeficienti tega polinoma ne bi znali odgovoriti na zastavljeno vprašanje. Pri interpolaciji bi sicer imeli dobre približke, pri ekstrapolaciji pa bi tak polinom odpovedal. Numerično dobljena krivulja ali analitična krivulja (iz približka) pa bi se izkazali tako pri interpolaciji kot ekstrapolaciji, pa še z deležem ohlajanja sta nas seznanili.

Program Excel torej fiziki ponudi kaj pametnega le tedaj, ko ga znamo »vpreči« v fizikalne zakonitosti modela merjenega pojava. Šele ustrezno modeliranje iz »pisarniškega programa« naredi iz njega pripomoček, ki je koristen za fizika.

Pri opisani meritvi opazimo, da se iz približka izpeljana analitična rešitev in numerični izračun nekoliko razlikujeta. Po vsej verjetnosti lahko bolj verjamemo vrednostim, ki smo jih dobili z numeričnim računom.

Viri

[1] Golež, T. (1997). Excel – prvi koraki. *Fizika v šoli*, *2*(3), str. 36–40.

[2] Kukman, I. (2008). Sevanje črnega telesa. *Fizika v šoli*, *13*(14), str. 7–13.

[3] Kham, B. (2002). Viški tabor 2001. *Fizika v šoli*, *7*(9), str. 30–35.

[4] Golež, T. (2013/2014). Crni kalorimetar kućne izrade, Matematičko fizički [Zagreb], str. 95–100.