

# **PRESEK**

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 1

Strani 14-20

Janez Strnad:

## **PLANET MALEGA PRINCA**

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/869-Strnad.pdf>

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## PLANET MALEGA PRINCA

Francoski pisatelj in letalec Antoine de Saint-Exupéry (1900–1944) je napisal *Malega princa*, pristrčno knjižico za otroke in odrasle. Pustimo mu do besede, naj pove, kaj se mu je primerilo, ko je moral z letalom zaradi okvare v motorju prisilno pristati v Sahari: "In tako sem prvi večer zaspal v pesku, tisoč milj daleč od človeških bivališč ... Lahko si mislite, kako sem bil presenečen, ko me je zbudil droben glasek ... Skočil sem pokonci, kot da bi me oplazila strela. Pomel sem si oči. Ostrmel sem. Zagledal sem drobcenega, navadnega dečka, ki je resno zrl vame ... Tako sem zvedel drugo zelo važno stvar: njegov domači planet je bil komaj kaj večji od hiše ... Imam tehtne razloge za domnevo, da prihaja Mali princ z asteroida B 612. Ta asteroid je enkrat samkrat, leta 1909, zasledil s teleskopom neki turški zvezdogled" (slika 1)\*

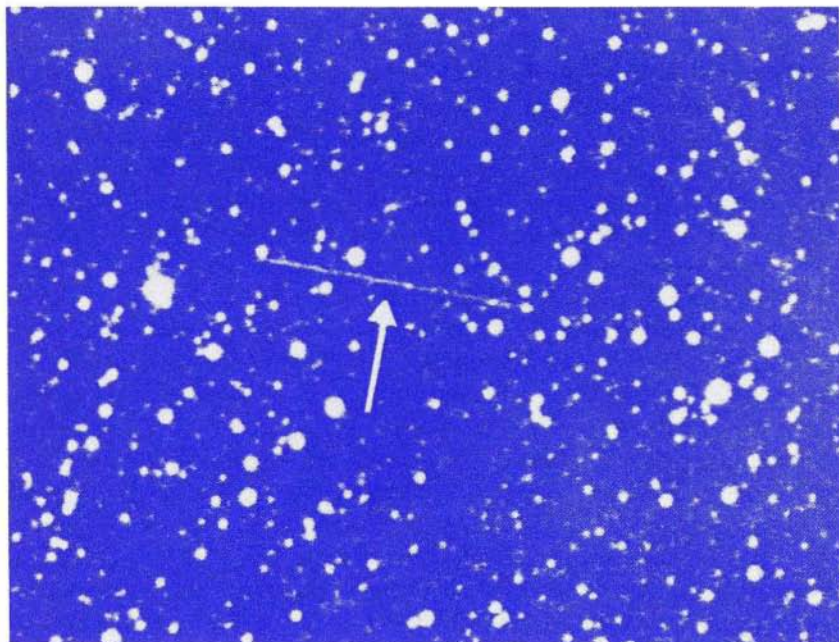
Lepoto *Malega princa* in spoznanje, da "dobro vidimo samo s srcem", vsakdo, mlad ali star, sprejema po svoje. Zato ne nameravamo razčlenjevati umetniškega užitka, ki ga imamo ob branju. Pač pa ob *Malem princu* razmišljajmo o gravitaciji. Bolj za šalo kot zares se vprašajmo, ali bi bilo mogoče pre-

---

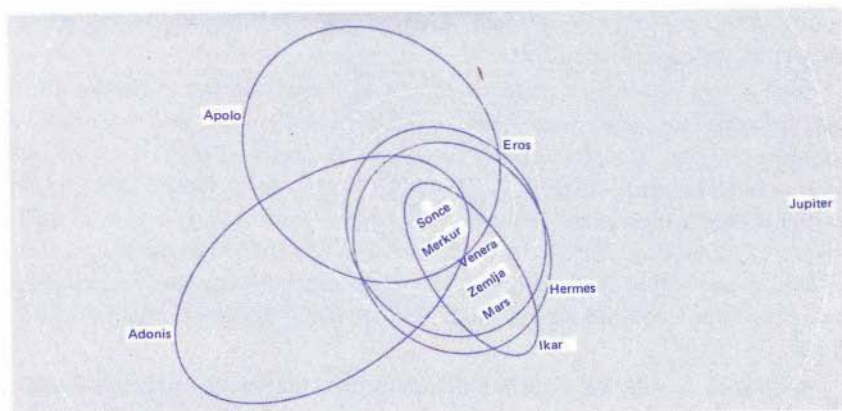
\* Antoine de Saint-Exupéry, *Mali princ*, prevedel Ivan Minatti, Mladinska knjiga, Biseri, Ljubljana, 1982.

Slika 1. Mali princ na svojem planetu (risba iz *Malega princa*). Knjižico je ilustriral pisatelj sam.





Slika 2. Sled na fotografski plošči na ozadju zvezd stalnic, po kateri so odkrili asteroid Ikar.



Slika 3. Poti planetov in asteroidov. Poti nekaterih asteroidov ne poznajo natančno.

bivati na zelo majhnem planetu. S tem nikakor nočemo obrzdati domišljije in upamo, da nam pisatelj, ki ga je že zgodaj "začel zanimati svet znanosti, zlasti fizike", v Newtonovem letu tega ne bi zameril.

Med planetoma Marsom in Jupitrom je nenavadno velika razlika v razdalji od Sonca. Zato leta 1801 niso bili posebno presenečeni, ko so med njima odkrili Ceres. Potem so leta 1802 odkrili še Palado, leta 1804 Junono in leta 1807 Vesto. Kmalu je postalo jasno, da so ti planeti zelo majhni, zato jim za razliko od devetih "navadnih" planetov pravimo *asteroidi* ali *mali planeti*. Dandanes jih poznamo več kot tri tisoč. Domnevajo, da jih utegne biti do sto tisoč takih, ki jih je mogoče zaznati po sledi na fotografski plošči (slika 2).

Večina se jih giblje okoli Sonca v 2,2– do 3,2–krat večji razdalji kot Zemlja, blizu ravnine, po kateri se giblje Zemlja. Med njimi pa so tudi posebneži. Betulija ima najbolj nagnjeno ravnino gibanja proti ravnini gibanja Zemlje, za  $52^{\circ}$ . Ikar se najbolj približa Soncu in ima eliptično pot, ki se najbolj razlikuje od kroga; velika polos meri 1,08 in mala 0,6 razdalje Zemlje od Sonca (slika 3). Hiron je najbolj oddaljen, velika polos meri 13,7 razdalje Zemlje od Sonca. Trije asteroidi so se približali Zemlji bolj kot na 5 milijonov kilometrov, Apolon leta 1932, Adonis leta 1936 in Hermes leta 1937. Predvidevajo, da zadene tak asteroid Zemljo v povprečju vsakih nekaj deset milijonov let. Nekateri podatki kažejo, da je zadel Zemljo asteroid z radijem okoli 5 kilometrov pred 65 milijoni let.

Samo asteroid Vesto je mogoče ob posebnih priložnostih videti s prostim očesom. Večino drugih je celo z daljnogledom težko opazovati. Njihovi radiji so zelo majhni: 1 Ceres 502 km, 2 Palada 304 km, 3 Junona 123 km, 4 Vesta 269 km, ... 1566 Ikar 500 m, ... Apolon 500 m, Adonis 150 m, Hermes 250 m. Zato ni lahko določiti njihove poti. Asteroidi, pri katerih je to uspelo, dobijo poleg imena še zaporedno številko.

Ime določi odkritelj. Spočetka so izbirali imena iz grške in rimske mitologije. Pozneje, ko je teh zmanjkalo, so prišla na vrsto druga, denimo imena iz Wagnerjevih oper. Novejša imena so različnega izvora. Tisoči je dobil ime Piazzia po Giuseppeju Piazziju, ki je odkril prvega, to je Ceres, tisoč prvi pa Gaussia po Karlu Friedrichu Gaussu, ki je izdelal nov računski prijem za določanje poti asteroidov. Dandanes dobijo običajni asteroidi navadno ženska imena, tisti, ki se po čem odlikujejo, pa moška. Geographos — geograf se na primer močno približa Zemlji. Asteroid 2062 Aten se giblje po skoraj enaki poti kot Zemlja.

Nekdaj so mislili, da so asteroidi preostanek planeta, ki se je gibal okoli Sonca med Marsom in Jupitrom. Toda skupno maso asteroidov cenijo samo na tritisočino zemeljske mase. Ker pa se nekateri gibljejo v skupinah, se zdi, da so



nastali iz nekoliko večjih teles, morda ob trkih.

Izhajajmo iz Newtonovega gravitacijskega zakona, po katerem delujeta telesi drugo na drugo s silo, ki je sorazmerna z maso enega in drugega telesa in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje. Zakon velja v tej obliki za drobni telesi ali za krogelno simetrični telesi, če upoštevamo razdaljo med njunima središčema. Nas zanima sila krogelno simetričnega planeta na drobno telo na njegovem površju, to je *teža* drobnega telesa. Za razdaljo tedaj vzamemo kar radij planeta  $R$ . Masa planeta je sorazmerna s povprečno gostoto in s prostornino in prostornina s tretjo potenco radija. To bi lahko uganili že po tem, da merimo radij v metrih  $m$ , prostornino pa v kubnih metrih  $m^3$ . Teža telesa na površju planeta je tedaj sorazmerna s tretjo potenco radija,  $R^3$ , in obratno sorazmerna s kvadratom,  $R^2$ , se pravi, da je sorazmerna z radijem:  $R^3/R^2 = R$ .

Posebno skupino sestavljajo *trojanski asteroidi*. Okoli Sonca se gibljejo tako, da prehitevajo in zaostajajo za točko  $60^\circ$  pred Jupitrom ali za točko  $60^\circ$  za njim. V teh *Lagrangeovih točkah* privlačna sila Sonca izravna privlačno silo Jupitra. Prvi trojanski asteroid, ki so ga odkrili, je dobil ime Ahil. Pozneje so se dogovorili, da naj dobijo asteroidi, ki se gibljejo okoli prve Lagrangeove točke, imena po grških junakih, asteroidi, ki se gibljejo okoli druge Lagrangeove točke, pa imena po trojanskih junakih. Preden so sprejeli dogovor, pa se je v grško skupino vrnil Trojanec 624 Hektor in v trojansko skupino Grk 617 Patrokel.

Zaradi lažjega računanja vzemimo, da ima Planet Malega princa radij 64 metrov ali stotisočino zemeljskega radija 6400 kilometrov. To je več, kot bi sklepali po pripovedovanju Malega princa, a manj kot meri radij Adonisa, za katerega najdemo najmanjši podatek, 150 m. Če je Planet Malega princa enako gost kot Zemlja, je teža na njem stotisočkrat manjša kot na Zemlji. Telo z maso 1 kilograma na njem nima teže okoli 10 newtonov kot na Zemlji, ampak samo desetstotino newtona. Mali princ z maso 30 kilogramov ima na svojem planetu težo samo 0,003 newtona. Tolikšno težo ima na Zemlji masa 0,3 grama, kar lahko stehamo le z lekarniško tehtnico.

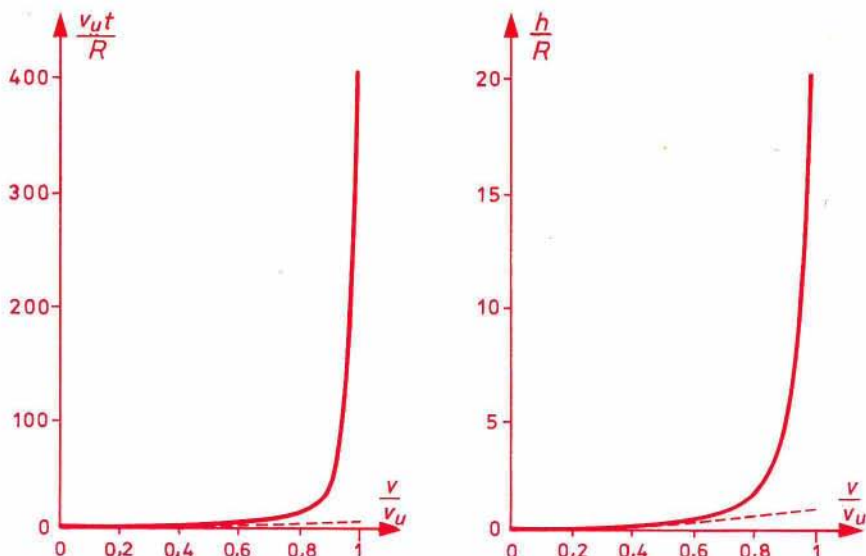
Ne oziramo se na to, da je težišče Malega princa za okoli 0,5 metra bolj oddaljeno od središča njegovega planeta kot površje. Zaradi tega je njegova teža še  $(64\text{ m}/64,5\text{ m})^2 = 0,98$ —krat, to je za 2 odstotka, manjša.

Računali smo, da je Planet Malega princa enako gost kot Zemlja. Če bi vzeli zanj povprečno gostoto asteroidov  $3500\text{ kg/m}^3$  namesto gostote Zemlje  $5500\text{ kg/m}^3$ , bi bila teža še  $3500/5500 = 0,64$ —krat manjša.

V enakem razmerju kot teža je zmanjšan tudi *pospešek prostega pada*:  $10 \text{ m/s}^2$  na Zemlji, a samo  $10^{-4} \text{ m/s}^2$  ali  $0,1 \text{ mm/s}^2$  na Planetu Malega princa. Medtem ko pade v prvi sekundi na Zemlji telo za 5 metrov, pade na Planetu Malega princa za borih 5 stotink milimetra. To bi morali opazovati z mikroskopom.

*Ubežna hitrost* je najmanjša hitrost, ki jo moramo dati izstrelku v smeri navpično navzgor, da zapusti planet. Pri tem se ne oziramo na morebitno vrtenje planeta. Enako kot teža je tudi ubežna hitrost sorazmerna z radijem planeta, če vzamemo, da se gostota ne spreminja. Na Zemlji meri ubežna hitrost dobrih  $11 \text{ km/s}$ , tako da meri na Planetu Malega princa samo  $0,11 \text{ m/s}$  ali  $11 \text{ cm/s}$ .

Podatek o majhni ubežnosti pove, da na majhnem planetu ni atmosfere. Molekule plina se namreč neurejeno gibljejo s hitrostjo, ki je v povprečju veliko večja, na primer  $440 \text{ m/s}$  za molekulo kisika pri temperaturi  $300 \text{ kelvinov}$  ali okoli  $20^\circ \text{C}$ , od ubežne hitrosti. Ta hitrost pa je precej manjša od ubežne hitrosti na Zemlji. (Izračunamo lahko še to, da bi se ubežna hitrost  $0,11 \text{ m/s}$  ujemala s povprečno hitrostjo neurejenega gibanja molekul pri temperaturi  $0,0002 \text{ K}$ .)



Slika 4. Trajanje  $t$  (levo) in višina  $h$  (desno) navpičnega meta v odvisnosti od razmerja med začetno hitrostjo  $v$  izstrelka in ubežno hitrostjo  $v_u$ . Črtkano sta narisana približka, pri katerih ne upoštevamo, da se teža spreminja z višino.

## Nekaj enačb za tiste, ki bi hoteli računati

$$m_p = \rho V = \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3$$

$$F = \kappa m m_p / R^2 = \kappa m \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3 R^2 = 4 \pi \kappa \rho m R / 3$$

masa planeta z radijem  $R$  in gostoto  $\rho$

teža telesa z maso  $m$  na površju planeta,  
 $\kappa$  gravitacijska konstanta

$$g = F / m = \kappa m_p / R^2 = 4 \pi \kappa \rho R / 3$$

pospešek prostega pada na površju planeta

$$v_u = (2 \kappa m_p / R)^{1/2} = (2gR)^{1/2} = (2 \kappa \rho \cdot 4 \pi R^3 / 3 R)^{1/2} = (8 \pi \kappa \rho / 3)^{1/2} R$$

ubežna ali druga vesoljska hitrost \*

$$v_s = (\kappa m_p / R)^{1/2} = (gR)^{1/2} = (4 \pi \kappa \rho / 3)^{1/2} R$$

hitrost umetnega satelita na majhni višini,  
prva vesoljska hitrost

$$\bar{v} = (8RT / \pi M)^{1/2}$$

povprečna hitrost molekul pri neurejenem  
gibanju v plinu,  $R = 8300 \text{ J/K}$  plinska  
konstanta,  $T$  absolutna temperatura,  $M$  ki-  
lomolska masa

$$\kappa m m_p / R^2 = \kappa (m + \Delta m) m_p / (R + \Delta R)^2$$

ravnovesje na tehtnici, če je eno  
izmed teles za  $\Delta R$  nižje od drugega; temu  
telesu se navidez poveča masa za  $\Delta m$   
 $= 2m \Delta R / R$

$$F = \int_R^{R+l} \kappa m_p \rho \, dm / R^2 = \int_R^{R+l} \kappa m_p \rho S \, dR / R^2 = \kappa m m_p / R(R+l)$$

teža navpičnega droga,  $\rho$  gostota,  $S$  presek  
in  $m$  masa droga

$$R^2 + Rl = (R + l/2 + \Delta l)^2$$

$$\Delta l = (R^2 + Rl)^{1/2} - R - l/2$$

razdalja težišča od središča mase

$$v_u t / R = 2((h + R) / R)^{3/2} (\arccos((R / (h + R))^{1/2} + ((R / (h + R))^{1/2} (h / (h + R))^{1/2})))$$

približek  $v_u t / R = 4v / v_u$  ali  $t = 2v / g$   $h$  višina,  $t$  čas trajanja navpičnega meta

$$h / R = (v / v_u)^2 / (1 - (v / v_u)^2) \quad v \text{ začetna hitrost (slika 4)}$$

$$\text{približek } h / R = v^2 / v_u^2 \text{ ali } h = v^2 / 2g$$

\* Če telo na planetu ne bi bilo drobno, bi bila ubežna hitrost

$v_u = (2 \kappa m_p / R(1 + m/m_p))^{1/2}$ . Masa Planeta Malega princa, 6 milijard kilogramov, pa je  
tolikšna, da lahko v primeri z njo maso Malega princa, 30 kilogramov, zanemarimo.



Enako kot ubežna hitrost je z radijem planeta sorazmerna tudi hitrost satelita, ki kroži okoli planeta v majhni višini. Pri Zemlji je to  $11 \text{ km s}^{-1} / \sqrt{2} = 8 \text{ km/s}$ , na Planetu Malega princa pa samo  $8 \text{ cm/s}$ . Mali princ bi se lahko igral z umetnimi sateliti. Za obhod njegovega planeta bi potrebovali 1 uro in 24 minut. Na to ni pomislil najbrž zato, ker tedaj na Zemlji še niso poznali mode umetnih satelitov.

Mali princ mora na svojem planetu previdno uporabljati enakoročno tehtnico. Paziti mora na to, da sta obe telesi na isti višini. Če je eno telo samo za 10 cm nižje kot drugo, pokaže tehtnica za 3 grame večjo maso.

Tudi se za Malega princa težišče ne ujema vedno s središčem mas. Navpičen metrski drog ima središče mas na polovici, težišče, to je točko, v kateri si lahko mislimo, da prijema teža, pa 1,9 milimetra nižje. Pri drogu v vodoravni legi se obe točki pokrivata.

Po tem ko smo omenili že več zanimivosti, nas zaskrbi, ali Mali princ sploh lahko hodi po svojem planetu. Pri hoji človek dviga in spušča težišče za nekaj milimetrov. Če naredi pri počasni hoji korak na sekundo, doseže hitrost težišča več milimetrov na sekundo. Hitrost težišča v navpični smeri mora biti mnogo manjša od ubežne hitrosti. (Na Zemlji zaradi mnogo večje ubežne hitrosti tega pogoja zares ni težko izpolniti.) Že pri desetini ubežne hitrosti, to je pri hitrosti  $1,1 \text{ cm/s}$ , se dvigne težišče Malega princa za dobrih 60 centimetrov in se spusti nazaj. Takšen korak ali bolje poskok traja skoraj 4 minute. Vsekakor se mora Mali princ na svojem planetu premikati zelo počasi, da ne bi njegovo težišče dobilo prevelike hitrosti v smeri navpično navzgor. (slika 4) Če bi se odrinil s hitrostjo  $11 \text{ cm/s}$  ali več v smeri navpično navzgor, bi se moral za večno posloviti od svojega planeta (če si ne bi zgradil strehe, če ne bi bil privezan ali če ne bi imel pištole kot nadomestila za raketni motor).

Če se odrine s hitrostjo med  $8 \text{ cm/s}$  in  $11 \text{ cm/s}$  v poljubni smeri, se giblje po eliptični pot, ki postaja pri vse večji hitrosti vse bolj podolgovata. V tem primeru se Mali princ vrne v točko, s katere se je odrinil, in ne zapusti planeta za vselej.

Ljudje že imamo nekaj izkušenj v podobnih razmerah. Pomislimo na vesoljce, ki so pristali na Luni, kjer je teža okoli šestkrat manjša kot na Zemlji. Mali princ podobno kot vesoljci, ki letijo okoli Zemlje na umetnih satelitih, ne občuti skoraj nobene teže. Telo se temu prilagodi, na primer tako, da kosti, ki niso obremenjene, izgubljajo kalcij, in zaide v težave pri povratku na Zemljo. Zato morajo vesoljci na umetnih satelitih delati posebne vaje. Za Malega princa bi bil prihod z njegovega planeta, kjer je vse peresno lahko, na Zemljo zelo tvegan, če ne bi bil pravljična oseba. Toda šlo nam je samo za nekaj zanimivosti iz mehanike, zato se ne spuščajmo še v vprašanja vesoljske medicine.