

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **18** (1990/1991)

Številka 1

Strani 12-16

Marko Razpet:

REZANJE VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/18/1023-Razpet.pdf>

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

REZANJE VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

Vzemimo v ravnini poljuben **izbočen** ali **konvexen** večkotnik. Z rezanjem ga lahko razdelimo na same trikotnike na neskončno mnogo načinov. Tukaj se bomo omejili na naslednji način rezanja: **Večkotnik režemo z njegovimi diagonalami, ki se ne sekajo v notranjosti**. Nekoč so nam v osnovni šoli pripovedovali, da je diagonalo odkril sam Pitagora, ki je imel prekratko posteljo, po diagonalah iz kota v kot pa mu je bila ravno pravšnja.

Naj ima naš večkotnik n oglišč, kjer je $n \geq 3$. Z našim načinom rezanja povežemo nekatera oglišča z diagonalami. Stranicam in diagonalam skupaj bomo rekli **povezave**, ker povezujejo oglišča večkotnika. Ne pozabimo, režemo na **same trikotnike**. Rešili bomo naslednje naloge:

1. Izračunaj število E_n povezav, ki jih dobimo na ta način!
2. Izračunaj število T_n trikotnikov, na katere smo razrezali n -kotnik!
3. Poišči število D_n vseh različnih rezanj danega n -kotnika na same trikotnike na prej opisani način!

Odgovor na prvo vprašanje je preprost. Pri trikotniku imamo 3 povezave, torej $E_3 = 3$, pri štirikotniku nastane pri dogovorjenem načinu rezanja 5 povezav, to se pravi $E_4 = 5$. Ni težko videti, da dobimo pri $n+1$ -kotniku le dve povezavi več kot pri n -kotniku, to pomeni, da velja preprosta zveza $E_{n+1} = E_n + 2$. Iz te pa hitro najdemo formulo

$$E_n = 2n - 3, \quad n \geq 3$$

Podobno izračunamo število T_n . Najprej je očitno $T_3 = 1$ in $T_4 = 2$. Pri dogovorjenem načinu rezanja dobimo pri $n+1$ -kotniku le en trikotnik več kot pri rezanju n -kotnika, to pomeni, da velja zveza $T_{n+1} = T_n + 1$, iz katere takoj sledi

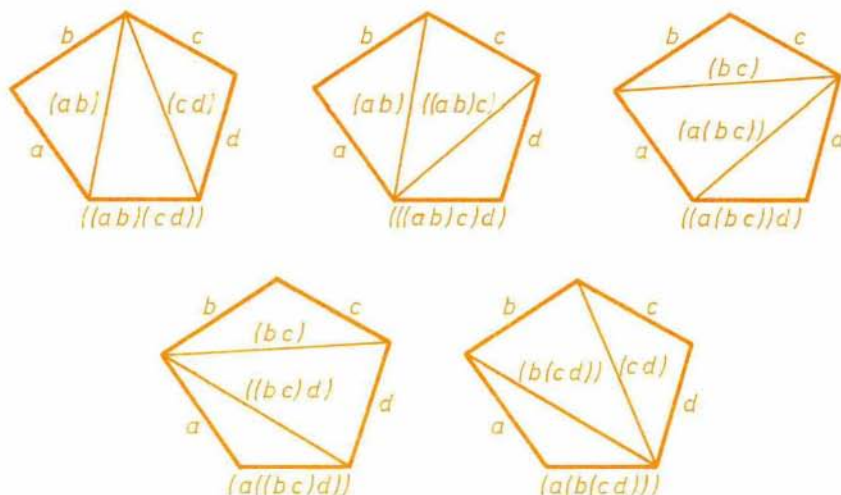
$$T_n = n - 2, \quad n \geq 3$$

Zaradi popolnosti označimo z O_n število oglišč, ki nastopajo v naših nalogah. Seveda je $O_n = n$. Pri tem velja enakost

$$O_n - E_n + T_n = 1, \quad n \geq 3$$

v kateri bodo starejši bralci spoznali *Eulerjev izrek*.

Precej teže pa je rešiti tretjo nalogo. Za n -kotnike z majhnim številom oglišč n pridemo do števil D_n z risanjem vseh možnosti. Za $n = 3$ imamo



Slika 1. Rezanje petkotnika na trikotnike

trikotnik in tu ni kaj rezati. To pomeni $D_3 = 1$. Za $n = 4$ dobimo štirikotnik in $D_4 = 2$. Za petkotnik dobimo že 5 možnosti (slika 1): $D_5 = 5$.

Števila D_n za $n \geq 5$ bomo izračunali *rekurzivno*, to je z že znanimi števili

$$D_3, D_4, \dots, D_{n-1}$$

Mislamo si, da imamo n -kotnik in v njem izbrano neko stranico, ki ji pravimo **baza** (slika 2). Iz krajišč te baze povlecimo diagonali v neko drugo oglišče našega n -kotnika. Naj ima večkotnik desno od trikotnika z bazo i , oni na levi strani pa j stranic, kjer je $i \geq 3$ in $j \geq 3$. Števili i in j nista neodvisni.



Slika 2. Trikotnik z bazo

Očitno mora veljati enakost $i + j - 2 + 1 = n$, torej $i + j = n + 1$. Oglišče trikotnika z bazo naj se sedaj spreminja po vseh tistih ogliščih n -kotnika, ki niso krajišča baze. Za $i \geq 3$ in $j \geq 3$ lahko dobljene i - in j -kotnike desno in levo od trikotnika z bazo še naprej režemo na trikotnike na D_i oziroma D_j načinov, pri tem je $i \geq 3$, $j \geq 3$ in $i + j = n + 1$. Pri izbranem trikotniku z bazo lahko to naredimo na $D_i D_j$ načinov. Če pa se zgodi, da je $j = n - 1$, ko se desno od trikotnika z bazo večkotnik izrodi v daljico (slika 2 desno), lahko dalje delimo na trikotnike le $n - 1$ -kotnik levo od trikotnika z bazo, in to na D_{n-1} načinov. Podobno je s to rečjo v primeru $i = n - 1$. Za $n \geq 5$ velja torej enakost

$$D_n = D_{n-1} + D_3 D_{n-2} + D_4 D_{n-3} + \dots + D_{n-2} D_3 + D_{n-1}$$

ki jo lahko krajše zapišemo tudi takole:

$$D_n = 2D_{n-1} + \sum_{l=3}^{n-2} D_l D_{n+1-l}, \quad n \geq 5$$

Z zadnjo formulo lahko izračunamo še nadaljnje člene zaporedja D_n :

$$D_6 = 14, D_7 = 42, D_8 = 132, D_9 = 429, D_{10} = 1430, \dots$$

Seveda nas zanima končna formula za števila D_n . Te tu ne bomo dokazovali, glasi pa se takole:

$$D_n = \frac{1}{n-1} \cdot \binom{2n-4}{n-2}$$

pri tem smo uporabili binomski koeficient

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

o katerem smo v PRESEKU že dosti pisali.

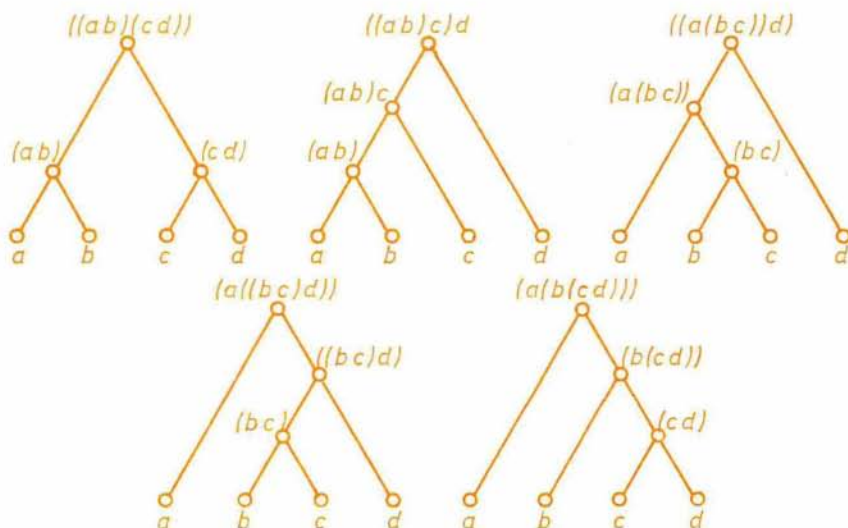
Naloga: Pokaži, da iz zgorajne formule sledi

$$D_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot D_n$$

Števila D_n se ne pojavljajo samo pri našem problemu, ampak tudi drugod. Oglejmo si **problem postavljanja oklepajev**. Denimo, da imamo znake a, b, c, d v tem vrstnem redu. Zanima nas, na koliko načinov lahko mednje postavimo tri predklepaje "(" in tri zaklepaje ")" tako, da nikjer ne nastopata predklepaj "(" in zaklepaj ")" eden za drugim, ne da bi kaj oklepala, to se pravi, izločevali bomo možnost "()". Poudarimo, da je vrstni red znakov a, b, c, d stalen. Te možnosti so:

$$((ab)(cd)), (((ab)c)d), ((a(bc))d), (a((bc)d)), (a(b(cd)))$$

Možnosti je torej 5, to je D_5 . Ali je kakšna zveza med številom rezanja večkotnika na trikotnike in postavljanjem oklepajev na opisani način v splošnem primeru? Je. Med n znake lahko tako postavimo $n-1$ predklepajev "(" in $n-1$ zaklepajev ")" tako, da se "(" in ")" nikdar ne srečata skupaj, na D_{n+1} načinov. To vidimo tako. Stranice $n+1$ -kotnika označimo z n znaki, ena pa ostane zaenkrat neoznačena. Na opisani način razrežemo $n+1$ -kotnik na trikotnike na vseh D_{n+1} možnih načinov. Če lahko v danem primeru stranici a, b (a, b sta katerikoli stranici) zaključimo v trikotnik, označimo tretjo stranico z (ab) . Prej ali slej pridemo po večkotniku naokrog in nazadnje lahko označimo tudi prvotno neoznačeno stranico večkotnika (slika 1).



Slika 3. Dvojliška drevesa s petimi izhodi

Znan je še en primer, v katerem imamo opraviti s števili D_n . To je **primer dvojiških ali binarnih dreves**. Dvojiško drevo (primerjaj ga z rodovnikom, tudi v PRESEKU je bilo o drevesih že marsikaj napisanega) ima eno točko posebej odlikovano, pravimo ji **koren**. Iz njega izstopata dve veji, v vsako drugo točko pa vstopa ena veja, izstopata pa dve ali nobena. Tistim točkam, v katere vstopa ena veja, izstopa pa nobena, pravimo **izhodi drevesa**. Dvojiška drevesa z izhodi a, b, c, d v predpisanem vrstnem redu so na sliki 3. Očitno vsakemu dvojiškemu drevesu pripada neka postavitvev oklepajev med znake a, b, c, d . Vsakokrat označimo točko, iz katere izhajata veji do a in b , z (ab) , če vodita veji do b in (cd) , označimo izhodno točko z $(b(cd))$ in tako naprej. Dvojiških dreves z n izhodi, ki so označeni v danem vrstnem redu, je natančno D_{n+1} .

Večkotnik smo v našem primeru rezali na trikotnike. Podobno bi lahko rezali tudi na štirikotnike, petkotnike ... Lahko pa bi dovolili tudi druge možnosti: večkotnik bi rezali deloma na trikotnike, deloma na štirikotnike itd. V tem primeru bi dobili števila, ki so v tesni zvezi z onimi, ki smo jih srečali pri šahovskem kralju.

Uporabljena literatura: H. G. Forder: *Some Problems in Combinatorics*, The Math. Gazette **45** (1961), str. 199-201 G. Pólya, R. E. Tarjan, D. R. Woods: *Notes on Introductory Combinatorics*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983

P. S.: V tretji številki Preseka **16** se je v program KINGPATH prikradla napaka. Vrstica 320 se pravilno glasi : $B[Y] := 0$;

Marko Razpet