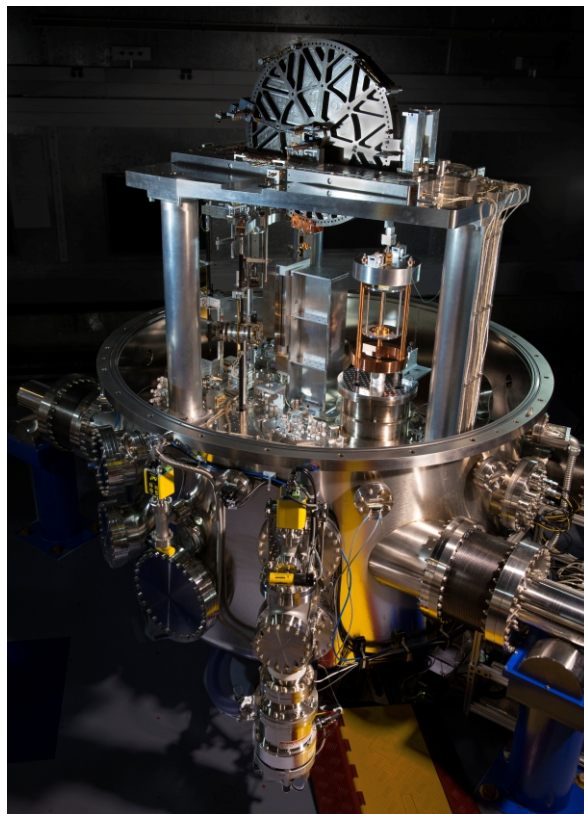


2018
Letnik 65
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2018, letnik 65, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2018 DMFA Slovenije – 2090

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

SIMPLICIALNI KOMPLEKSI IN DISKRETNA MORSOVA TEORIJA

ALEKSANDRA FRANC

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55U10, 57R70

V članku predstavimo enostavne, a nadvse uporabne simplicialne komplekse in osnove diskretne Morsove teorije.

SIMPLICIAL COMPLEXES AND DISCRETE MORSE THEORY

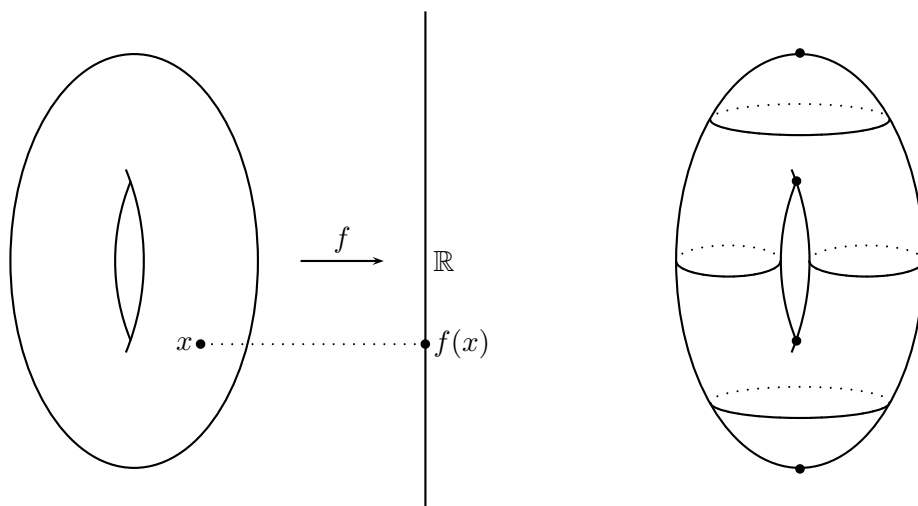
This paper introduces the simple and useful concept of a simplicial complex and the basics of discrete Morse theory.

Uvod

Ameriški matematik Marston Morse [4, 5] je opazil, da so določene gladke funkcije na gladkih mnogoterostih tesno povezane s topologijo teh mnogoterosti, in tako je nastala Morsova teorija. Ta teorija zgradi sklenjene gladke mnogoterosti iz informacije o (končno mnogo) kritičnih točkah Morsovih funkcij oziroma iz (končnega števila) geometrijsko preprostih gradnikov. En primer take funkcije in pripadajoče dekompozicije je na sliki 1. Na žalost pa je pri takih dekompozicijah mnogoterosti na končno število lepih kosov še vedno treba vedeti, kako se ti kosi med sabo zlepijo, načinov za to pa je, na žalost (ali pa morda veselje algebraičnih topologov), v večini dimenzij ogromno.

V veliko veselje številnih bolj ali manj uporabnih matematikov in računalnikarjev pa je prav tako ameriški matematik, Robin Forman, v letih 1998 [1] in 2002 [2] svetu predstavil diskretno verzijo Morsove teorije, ki je definirana za prostore s kombinatorično strukturo (za simplicialne komplekse, za celične komplekse ipd.), in pri kateri so tako Morsove funkcije kot pripadajoča vektorska polja diskretni objekti.

Tako sta področji uporabne matematike in računalništva dobili teorijo, ki ima aplikacije v topološki analizi podatkov, računski homologiji, konfiguracionih prostorih, topološkem poenostavljanju objektov in odstranjevanju šuma, pa še kje.



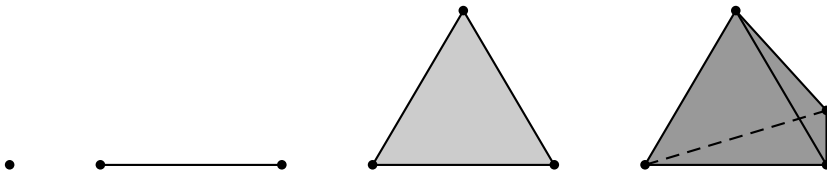
Slika 1. Primer gladke Morseove funkcije na gladki mnogoterosti (torusu) s štirimi kritičnimi točkami in pripadajočo dekompozicijo.

V tem članku bomo najprej vpeljali pojem simplicialnih kompleksov ter si ogledali nekaj njihovih lastnosti. Nato se bomo sprehodili čez osnove diskretne Morseove teorije (teh je presenetljivo malo in so presenetljivo lahko dostopne).

Simplicialni kompleksi

Začnimo s točko v dimenziji 0. V dimenziji 1 ni velikih presenečenj, iz točke nastane daljica z dvema krajiščema. V dimenziji 2 hitro najdemo vsaj dve možnosti za smiselno enostaven geometrijski gradnik: trikotnik ali kvadrat. Izberimo trikotnik. V dimenziji 3 bo na vrsti tetraeder (skupaj z notranjostjo). Tako nadaljujemo. Opisali smo osnovne gradnike simplicialnih kompleksov, simplekse (slika 2). Omenimo še, da bi z izbiro kvadrata v dimenziji 2 in z ustreznimi posplošitvami v višjih dimenzijah lahko prišli do npr. *kubičnih kompleksov* ali pa do *prodsimplicialnih kompleksov*, ampak o tem morda več kdaj drugič.

Da ne bo dilem, kako so videti simpleksi višjih dimenzij, povejmo vse še malo bolj natančno. Za začetek vpeljimo pojem standardnega n -simpleksa



Slika 2. 0-simpleks, 1-simpleks, 2-simpleks in 3-simpleks.

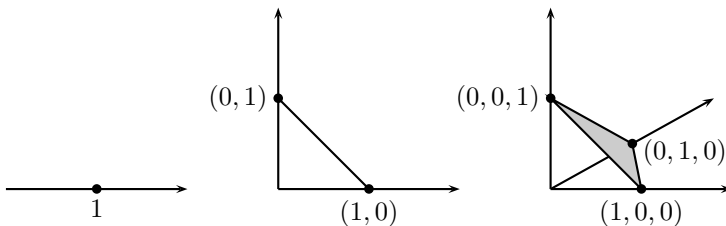
(slika 3), ki je podan kot konveksna ogrinjača $n + 1$ točk s koordinatami

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definicija 1. *Standardni n -simpleks* je podmnožica

$$\Delta^n = \{ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_{n+1} \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \text{ in } \lambda_i \geq 0 \text{ za vse } i \} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

pri čemer smo z $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ označili vektor, ki ima na i -tem mestu 1, na vseh preostalih pa 0.



Slika 3. Standardni 0-simpleks, 1-simpleks in 2-simpleks.

Splošen n -simpleks je posplošitev standardnega n -simpleksa, torej objekt, ki ima $n + 1$ oglišč, ki so povezana z $\binom{n+1}{2}$ daljicami, na katere je napetih $\binom{n+1}{3}$ trikotnikov, medtem ko vsaka štiri različna oglišča določajo enega od $\binom{n+1}{4}$ tetraedrov in tako dalje. Z drugimi besedami, splošen n -simpleks je podan z množico $n + 1$ oglišč, vsako njeno podmnožico pa imenujemo *lice* danega simpleksa in je sama po sebi spet simpleks. Če je simpleks τ lice simpleksa σ , pišemo $\tau \leq \sigma$. Vsak simpleks je sam svoje lice, lica nižjih dimenzij pa imenujemo *prava lica*. Če pri tem ne pozabimo na *prazno lice*, ki ustreza prazni podmnožici oglišč, smo morda koga spomnili na dobro znano

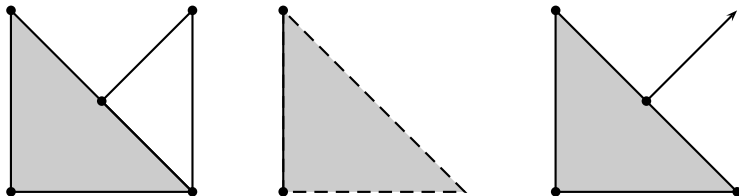
formulo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

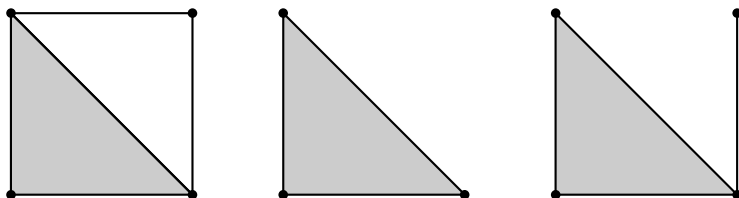
In res, n -simpleks ima 2^{n+1} lic. To je v resnici problem, ki lahko zelo hitro pokvari učinkovitost algoritmov, ki delajo s simplicialnimi kompleksi. Če bo naš algoritem nekaj naredil ali preveril za vsako lice simpleksa, bo takoj vsaj eksponentno zahteven glede na dimenzijo simpleksa. Računska zahtevnost je sicer še ena zanimiva zgodba, ki jo bomo tokrat izpustili. Omenimo le, da lahko težavo precej omilimo, če se mora npr. naš algoritem ukvarjati le z lici kodimenzije 1, tj. s takimi, katerih dimenzija je za 1 manjša od dimenzije simpleksa. Takih je namreč le $\binom{n+1}{n} = n + 1$.

Če želimo za neki simpleks σ poudariti njegovo dimenzijo, jo običajno zapišemo v eksponent, npr. σ^n označuje n -dimenzionalni simpleks z imenom σ .

Zdaj pa je prišel čas, da naše osnovne gradnike simplekse na smiseln način združimo v večjo celoto. Na sliki 4 je prikazanih nekaj načinov združevanja, ki niso sprejemljivi, na sliki 5 pa nekaj takih, ki so.



Slika 4. To niso simplicialni kompleksi. V prvem primeru eden od diagonalnih 1-simpleksov drugega seka v notranjosti in ne v skupnem licu (oglišču), v drugem primeru niso vključena vsa lica 2-simpleksa, v tretjem primeru pa se pojavita oba problema hkrati.



Slika 5. To pa so simplicialni kompleksi.

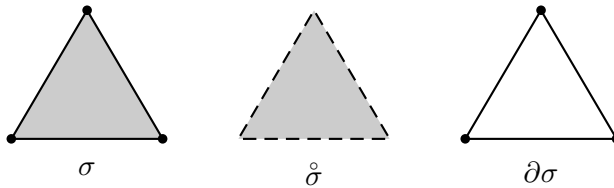
Definicija 2. *Simplicialni kompleks* K je množica simpleksov, ki zadošča naslednjim pogojem:

1. vsako lice simpleksa iz K je vsebovano v K in
2. presek poljubnih dveh simpleksov σ_1 in σ_2 je lice tako v σ_1 kot v σ_2 .

Torej, skupaj z vsakim simpleksom σ so v simplicialnem kompleksu K vsebovana vsa njegova lica in simpleksi so lahko zlepljeni samo vzdolž skupnih lic.

Vsak simpleks $\sigma \in K$, ki ni pravo lice nobenega drugega simpleksa iz K , imenujemo *maksimalni simpleks*. Simplicialni kompleks je torej natančno določen s seznamom svojih maksimalnih simpleksov.

Unija vseh pravih lic simpleksa σ sestavlja njegov rob $\partial\sigma$, preostale točke iz simpleksa σ pa spadajo v njegovo notranjost $\overset{\circ}{\sigma}$ (slika 6). Z izjemo 0-simpleksov torej vsaka točka v simplicialnem kompleksu pripada notranjosti natanko enega od simpleksov (v vseh preostalih simpleksih, ki to točko vsebujejo, leži na robu).



Slika 6. Notranjost in rob 2-simpleksa σ .

Oglejmo si še tri zanimive tipe simplicialnih kompleksov, ki jih lahko konstruiramo kot podmnožice večjih simplicialnih kompleksov.

Definicija 3. *Simplicialno zaprtje* $\text{cl}(\sigma)$ simpleksa $\sigma \in K$ je podkompleks, sestavljen iz vseh simpleksov, ki so lica σ . *Simplicialno zaprtje* $\text{cl}(S)$ podmnožice simpleksov S v simplicialnem kompleksu K je podkompleks, sestavljen iz vseh simpleksov, ki so lica kakšnega simpleksa iz S .

Definicija 4. *Zvezda* $\text{st}(\sigma)$ simpleksa σ iz K je sestavljena iz vseh simpleksov v K , ki imajo σ za lice. *Zvezda* $\text{st}(S)$ podmnožice simpleksov S iz K je unija zvezd $\text{st}(\sigma)$ po vseh simpleksih σ iz S .

Definicija 5. Okvir $\text{lk}(S)$ podmnožice S iz K je razlika množic

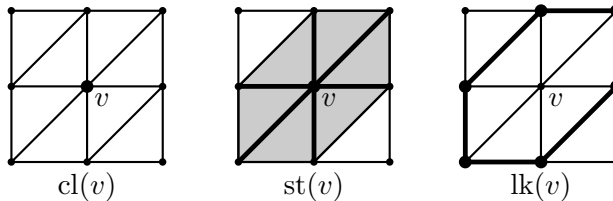
$$\text{cl}(\text{st}(S)) \setminus \text{st}(\text{cl}(S)),$$

tj. iz simplicialnega zaprtja zvezde odstranimo vse elemente, ki so v zvezdi simplicialnega zaprtja.

Primer 6. Na sliki 7 je primer simplicialnega kompleksa, sestavljenega iz osmih maksimalnih 2-simpleksov (in seveda vseh pripadajočih lic). Oglejmo si, kako so videti zgornje tri konstrukcije za 0-simpleks v . Vidimo, da simplicialno zaprtje $\text{cl}(v)$ vsebuje samo 0-simpleks v . Zvezda $\text{st}(v)$ vsebuje poleg 0-simpleksa v še vse 1- in 2-simplekse, ki imajo 0-simpleks v v robu (ki so torej en korak od v). Okvir

$$\text{lk}(v) = \text{cl}(\text{st}(v)) \setminus \text{st}(\text{cl}(v)) = \text{cl}(\text{st}(v)) \setminus \text{st}(v)$$

pa vsebuje simplekse, ki so v simplicialnem zaprtju zvezde $\text{st}(v)$, v zvezdi pa ne (torej take, ki so dva koraka od v po najkrajši poti).

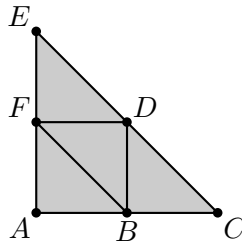


Slika 7. Simplicialno zaprtje, zvezda in okvir 0-simpleksa v (primer 6). Simplicialno zaprtje vsebuje samo oglišče v , zvezda poleg tega še po šest v -ju sosednjih robov in trikotnikov, okvir pa le po šest oglišč in robov, ki so sosedi sosedov v .

Naloga 1. Za simplicialni kompleks s slike 8 določi naslednje podkomplekse:

$$\text{cl}(B), \text{cl}(BD), \text{cl}(BDF), \text{st}(B), \text{st}(BD), \text{st}(BDF), \text{lk}(B), \text{lk}(BD), \text{lk}(BDF).$$

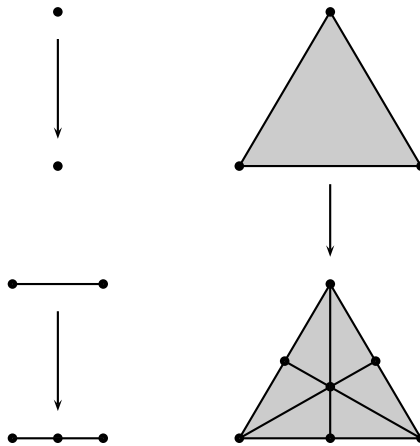
V nadaljevanju si oglejmo zanimivo konstrukcijo, s pomočjo katere iz danega simplicialnega kompleksa dobimo nov, bolj razdrobljen simplicialni kompleks. Začnimo z definicijo za simplicialne komplekse in si prihranimo težave za konec.



Slika 8. Simplicialni kompleks (naloga 1).

Definicija 7. Baricentrična subdivizija simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks \widehat{K} , ki je unija baricentričnih subdivizij vseh simpleksov iz K .

Zdaj pa potrebujemo še definicijo baricentrične subdivizije za posamezni simpleks. Formalna definicija je malce bolj zapletena, zato si najprej oglejmo primer. Baricentrične subdivizije za 0, 1 in 2-simpleks so prikazane na sliki 9.



Slika 9. Baricentrična subdivizija za 0, 1 in 2-simpleks.

To idejo bi želeli posplošiti na simplekse poljubne dimenzije. S pomočjo permutacij lahko na kratko povemo, katere simplekse dodamo, vendar je taka definicija precej abstraktna, zato jo bomo poskusili razumeti tako, da bomo baricentrično subdivizijo zgradili postopoma z dodajanjem simpleksov po dimenzijah. Vseeno najprej zapišimo formalno definicijo:

Definicija 8. Baricentrična subdivizija n -dimenzionalnega simpleksa σ z oglišči v_1, \dots, v_{n+1} je unija $(n+1)!$ simpleksov dimenzije n . Vsak tak simpleks z oglišči p_1, \dots, p_{n+1} ustreza neki permutaciji $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n+1)}$, in sicer tisti, za katero je p_i težišče točk $v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i+1)}$.

Vsak simpleks simplicialnega kompleksa K bo ustrezal natanko enemu 0-simpleksu baricentrične subdivizije \widehat{K} . Baricentrično subdivizijo \widehat{K} torej začnemo graditi tako, da v težišče vsakega simpleksa $\sigma \in K$ postavimo en 0-simpleks, v_σ , in vsakega od teh povežemo z vsemi v_α , za katere je $\alpha \leq \sigma$. Dobili smo 1-dimenzionalni simplicialni kompleks, ki bo 1-skelet baricentrične subdivizije \widehat{K} . Če je bila $\dim K = 1$, smo končali, sicer pa za vsak 2-simpleks $\sigma^2 \in K$ za vsako verigo simpleksov $\alpha^0 \leq \beta^1 \leq \sigma$ dodamo v \widehat{K} 2-simplekse, napete na v_α, v_β in v_σ . Dobili smo 2-skelet baricentrične subdivizije. Če je bila $\dim K = 2$, smo končali, sicer ponovimo postopek in za vse $\sigma^3 \in K$ za vsako verigo simpleksov $\alpha^0 \leq \beta^1 \leq \gamma^2 \leq \sigma$ dodamo v \widehat{K} 3-simplekse, napete na $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ in v_σ , in tako naprej.

Iz formalne definicije je jasno, da število simpleksov v baricentrični subdiviziji z dimenzijo izjemno hitro narašča. Če je $\dim K = n$, ima \widehat{K} vsaj $(n+1)!$ simpleksov. Teoretično je baricentrična subdivizija torej uporabna, kadar želimo npr. omejiti velikost največjega simpleksa, ker se ta s subdivizijo strogo zmanjša. Seveda pa hkrati zelo povečamo število simpleksov (funkcija $n!$ narašča še veliko hitreje kot funkcija 2^n , ki smo jo srečali zgoraj), zato se v aplikacijah običajno ne obnese, sploh če bi morali za zmanjšanje maksimalnega premera simpleksov baricentrično subdivizijo uporabiti večkrat zapored. Ta postopek pa lahko posplošimo na konveksne politope in takrat je baricentrična subdivizija zelo uporabna, saj poliedre spremeni v simplicialne komplekse, ki so zaradi bolj homogene strukture s stališča računalniških aplikacij bolj priročni.

Naloga 2. Naj bo K triangulacija ravninskega poligona, tj. povezan 2-dimenzionalni simplicialni kompleks, v katerem so vsi maksimalni simpleksi trikotniki, ki ležijo v isti ravnini in se sekajo vzdolž stranic.

- (a) Dokaži, da lahko oglišča njegove baricentrične subdivizije pobarvamo s tremi barvami tako, da nobeni dve oglišči iste barve ne bosta sosednji (tj. povezani z 1-simpleksom).

- (b) Dokaži, da lahko 2-simplekse v baricentrični subdiviziji K pobarvamo z dvema barvama tako, da bosta vsaka dva 2-simpleksa, ki imata skupno daljico, različne barve.

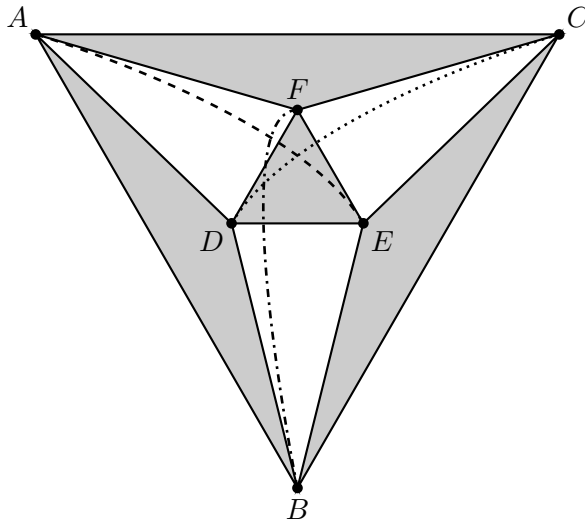
Oglejmo si še, kako lahko zgradimo simplicialne komplekse, ki pripadajo določenim družinam grafov.

Naj bo K_n poln graf z n vozlišči (graf, v katerem sta poljubni dve vozlišči sosednji). Oglejmo si družino \mathcal{V}_n njegovih vpetih podgrafov (vpet podgraf grafa G je podgraf, ki vsebuje vsa vozlišča iz G in nekatere od povezav). Če za vsak graf z lastnostjo \mathcal{L} velja, da imajo to lastnost tudi vsi njegovi vpeti podgrafi, pravimo, da je lastnost \mathcal{L} *monotono padajoča*. Primeri monotono padajočih lastnosti so:

- graf nima več kot k povezav,
- vsa vozlišča grafa imajo stopnjo $\leq \delta$ (tj. vsako vozlišče ima največ δ sosedov),
- graf ni povezan (tj. množica vozlišč razpade na več podmnožic, tako da med vozlišči iz različnih podmnožic ni povezav),
- graf nima Hamiltonovega cikla (tj. ne obstaja sklenjena pot po grafu, ki bi vsako vozlišče obiskala natanko enkrat),
- graf je dvodelen (tj. vozlišča lahko razdelimo na dve podmnožici tako, da vozlišča, ki pripadajo isti podmnožici, niso povezana),
- vozlišča grafa lahko pobarvamo z b barvami tako, da nobeni sosednji vozlišči nista iste barve.

Množici grafov, ki imajo dano monotono padajočo lastnost \mathcal{L} , lahko priredimo simplicialni kompleks. Na primer, označimo z $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{V}_n$ množico vseh nepovezanih vpetih podgrafov polnega grafa K_n . V pripadajočem simplicialnem kompleksu \mathcal{C}_n ustrezajo k -simpleksi tistim nepovezanim vpetim podgrafom, ki imajo natanko $k+1$ povezav. Ker je nepovezanost monotono padajoča lastnost, so v \mathcal{C}_n skupaj z vsakim simpleksom tudi vsa njegova lica in res dobimo simplicialni kompleks.

Primer 9. Za $n = 4$ dobimo simplicialni kompleks s šestimi 0-simpleksi, petnajstimi 1-simpleksi in štirimi 2-simpleksi. Podgrafi, ki ustrezajo posameznim simpleksom, so prikazani na sliki 11. Poimenovali smo jih tako, da smo povezave grafa K_4 poimenovali s črkami od A do F , nato pa vsakemu podgrafu priredili niz, ki ustreza njegovim povezavam. Z nekaj truda lahko \mathcal{C}_4 tudi narišemo tako, da se 2-simpleksi ne prekrivajo (slika 10). Nekaj več o strukturi simplicialnih kompleksov \mathcal{C}_n bomo povedali na koncu naslednjega razdelka.

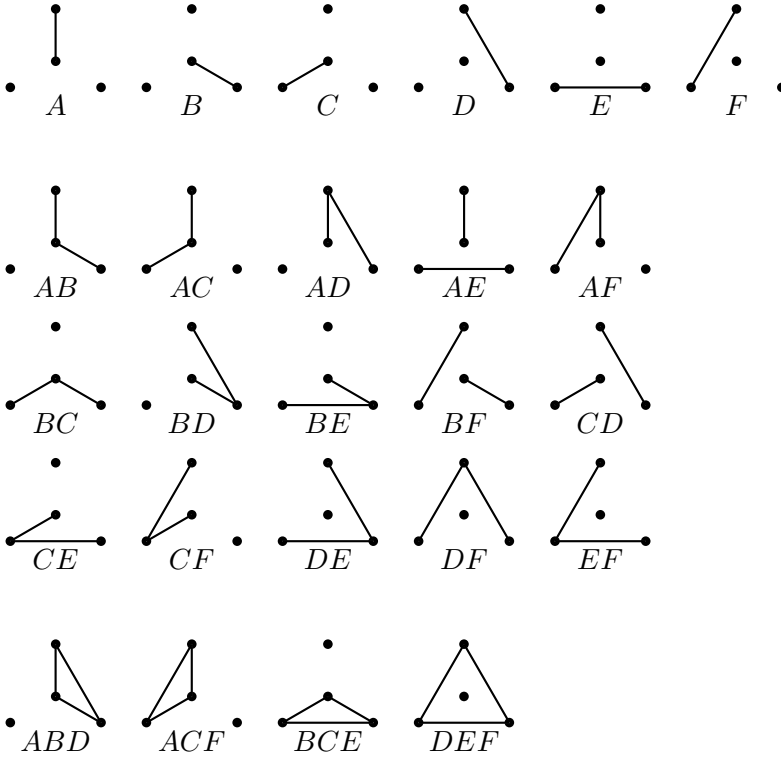


Slika 10. Simplicialni kompleks \mathcal{C}_4 , ki pripada nepovezanim vpetim podgrafom polnega grafa K_4 . Narišemo ga lahko tako, da le 1-simpleksi AE , BF in CD ne ležijo v ravnini.

Diskretna Morsova teorija

Zdaj ko smo se seznanili s simplicialnimi kompleksi, se lahko lotimo diskretne Morseove teorije. Začnimo pri funkcijah.

Funkcija $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ vsakemu simpleksu iz K priredi neko realno število. Diskretna *Morsova* funkcija to naredi tako, da vrednost funkcije načeloma narašča z dimenzijo z največ eno izjemo pri vsakem simpleksu. Formalno definicijo običajno zapišemo takole:



Slika 11. Nepovezani vpeti podgrafi polnega grafa K_4 .

Definicija 10. Funkcija $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ je *diskretna Morsova funkcija*, če za vsak p -dimenzionalni simpleks σ^p iz K velja:

1. množica $(p + 1)$ -dimenzionalnih simpleksov

$$\{\alpha^{p+1} \in K \mid \sigma \leq \alpha \text{ in } f(\alpha) \leq f(\sigma)\}$$

vsebuje največ en element in

2. množica $(p - 1)$ -dimenzionalnih simpleksov

$$\{\beta^{p-1} \in K \mid \beta \leq \sigma \text{ in } f(\beta) \geq f(\sigma)\}$$

vsebuje največ en element.

Če sta za kak simpleks σ obe množici iz definicije prazni, pravimo, da je σ *kritični simpleks*.

Primer 11. Naj bo K poljuben simplicialni kompleks in $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ za vse $\sigma \in K$. Potem je f Morsova funkcija na K in vsi simpleksi v K so kritični. Ta primer pokaže, da je za poljuben simplicialni kompleks K množica diskretnih Morsovih funkcij na K neprazna. Seveda pa nas običajno zanimajo takšne diskretne Morsove funkcije, ki imajo čim manj kritičnih celic.

Čeprav je morda videti, da bi lahko imeli po definiciji pri vsakem simpleksu dve izjemi, eno v dimenziji več in eno v dimenziji manj, pa se to ne more zgoditi. Dokaz je izjemno preprost, zato si ga oglejmo.

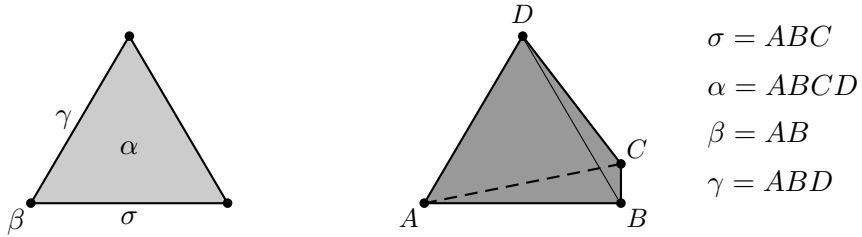
Trditev 12. *Naj bo $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna Morsova funkcija na simplicialnem kompleksu K in naj bo $\sigma \in K$ simpleks, ki ni kritičen. Potem velja natanko ena od naslednjih trditev:*

1. *Obstaja $(p+1)$ -dimenzionalni simpleks α , za katerega je $\sigma \leq \alpha$ in je $f(\alpha) \leq f(\sigma)$.*
2. *Obstaja $(p-1)$ -dimenzionalni simpleks β , za katerega je $\beta \leq \sigma$ in $f(\beta) \geq f(\sigma)$.*

Dokaz. Ker simpleks σ ni kritičen, obstaja gotovo vsaj en od simpleksov α in β . Denimo, da obstajata oba. Potem je $p \geq 1$ zaradi drugega pogoja in je $\dim(\alpha) \geq 2$. Za vsa preostala p -dimenzionalna lica (p -lica) $\gamma \neq \sigma$ simpleksa α potem velja $f(\gamma) < f(\alpha)$, saj je f Morsova funkcija in α že ima eno izjemo v dimenziji p . Ampak β je $(p-1)$ -lice σ , ki je p -lice $(p+1)$ -simpleksa α , zato je β tudi $(p-1)$ -lice α (slika 12). To pa pomeni, da obstaja še eno p -lice $\gamma \neq \sigma$ simpleksa α , tako da je $\beta \leq \gamma$. Vendar β že ima izjemo pri σ , zato je $f(\beta) < f(\gamma)$. Če vse neenakosti zberemo skupaj, vidimo, da je

$$f(\beta) \geq f(\sigma) \geq f(\alpha) > f(\gamma) > f(\beta).$$

To protislovje nam pove, da ne moreta biti hkrati izpolnjena oba pogoja. Obstaja torej natanko eden od simpleksov α in β . ■



Slika 12. Situacija za primera $p = 1$ in $p = 2$ (trditev 12).

Trditev 12 nam omogoča, da povežemo diskretne Morsove funkcije z določenimi diskretnimi vektorskimi polji.

Definicija 13. *Diskretno vektorsko polje* V na simplicialnem kompleksu K je družina parov (τ^p, σ^{p+1}) simpleksov $\tau, \sigma \in K$ sosednjih dimenzij s $\tau \leq \sigma$, za katero velja, da se noben simpleks iz K ne pojavi v več kot enem paru.

Polje lahko grafično predstavimo tako, da za vsak par $(\tau^p, \sigma^{p+1}) \in V$ narišemo puščico od središča τ do središča σ . Če simpleks ne pripada nobenemu paru, pravimo, da je *kritičen*. Povezavo z diskretnimi Morsovimi funkcijami nam da naslednja definicija.

Definicija 14. Naj bo K simplicialni kompleks in f diskretna Morsova funkcija na K . *Gradientno vektorsko polje* funkcije f , označimo ga z $-\nabla f$, ima za kritične simplekse vse kritične simplekse funkcije f . Če neki σ^p ni kritični simpleks za f , potem obstaja natanko en simpleks α^{p+1} ali β^{p-1} , kjer ima funkcija f nižjo oziroma višjo vrednost. V prvem primeru je v polju $-\nabla f$ par (σ, α) , v drugem primeru pa par (β, σ) .

Oznako $-\nabla f$ uporabljamo zato, ker puščice gradientnega polja prikazujejo smer (strogega) padanja funkcije f .

V vsakem diskretnem vektorskem polju so *poti* zaporedja puščic, pri katerih je začetek vsake naslednje puščice lice kodimenzije 1 simpleksa, ki je bil konec prejšnje puščice. Zaporedje parov $(\tau_1^{p-1}, \sigma_1^p) \dots (\tau_n^{p-1}, \sigma_n^p)$, kjer je $\tau_i \leq \sigma_i$ za $i = 1, \dots, n$ in $\tau_{i+1} \leq \sigma_i$ za $i = 1, \dots, n - 1$, je *p-pot dolžine n*.

Primer 15. Denimo, da je diskretna Morsova funkcija na simplicialnem

kompleksu s slike 13 podana z naslednjimi vrednostmi:

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| A | B | C | D | E | F | G | AB | AC | BC | BD | BE |
| 7 | 5 | 5 | 2 | 0 | 2 | 2 | 6 | 9 | 6 | 3 | 6 |

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| CD | DE | DF | EF | EG | FG | ABC | BCD | EFG |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | 8 | 4 | 3 |

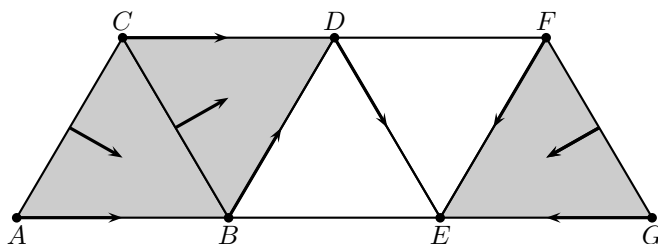
V pripadajočem vektorskem polju so maksimalne 1-poti

- (F, EF) dolžine 1,
- (G, EG) dolžine 1,
- $(C, CD)(D, DE)$ dolžine 2 ter
- $(A, AB)(B, BD)(D, DE)$ dolžine 3

in maksimalne 2-poti

- (FG, EFG) dolžine 1 ter
- $(AC, ABC)(BC, BCD)$ dolžine 2,

medtem ko so 1-simpleksa BE in DF ter 0-simpleks E kritični.



Slika 13. Diskretno vektorsko polje (primer 15).

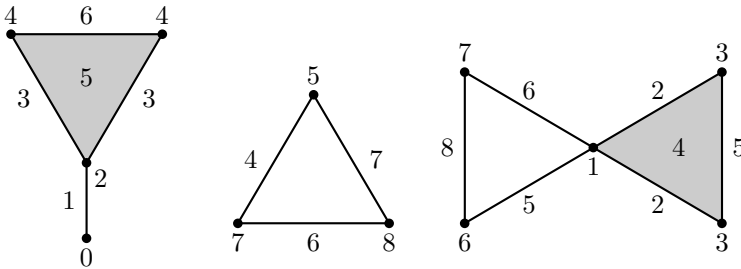
Iz povedanega sledi, da gradientna polja diskretnih Morsovih funkcij nimajo zank, tj. poti iz puščic, ki bi se po nekaj korakih vrnile na začetek, saj vrednosti vzdolž poti strogo padajo in torej začetek poti nikoli ne sovpada s koncem. Da se tudi pokazati (glej izrek 6.19 v [3]), da je vsako vektorsko polje, ki nima zank, gradientno polje kakšne diskretne Morsove funkcije (a očitno ne ene same, saj lahko vrednosti transliramo ali pa jim dodamo šum).

Gradientna polja diskretnih Morsovih funkcij na simplicialnih kompleksih se obnašajo podobno kot gradientna polja gladkih Morsovih funkcij na gladkih mnogoterostih. V obeh primerih govorimo o gradientnih poteh, padajočih diskih ter krajšanjih kritičnih simpleksov in v obeh primerih lahko iz kritičnih simpleksov izluščimo informacijo o homologiji prostora. Robin Forman je bil torej pri iskanju diskretne verzije znane zvezne teorije nadvse uspešen.

Več informacij o Morsovi teoriji lahko bralec najde v knjigi Kevina Knudsona [3], ki bralca v prvi polovici seznanja z gladko Morsovo teorijo, v drugi pa vsebuje poleg diskretne teorije tudi poglavji o algoritmih in aplikacijah.

Kot smo že omenili, lahko z uporabo diskretne Morsove teorije določimo homotopski tip kompleksov \mathcal{C}_n iz primera 9. Z relativno preprostim premislekom lahko vidimo, da je prostor \mathcal{C}_n homotopsko ekvivalenten šopu $(n-1)!$ kopij sfere S^{n-3} . Prostor \mathcal{C}_4 s slike 10 je torej homotopsko ekvivalenten prostoru, ki ga dobimo, če 6 krožnic S^1 zlepimo v eni točki. Podrobnosti lahko zainteresirani bralec najde v Formanovem članku [2], še posebej lepo pa so razložene v že omenjenem poglavju o aplikacijah v Knudsonovi knjigi [3]. Mi pa končajmo z nalogama za preverjanje razumevanja.

Naloga 3. Katere od funkcij s slike 14 so Morsove? Za tiste, ki so, nariši pripadajoče diskretno vektorsko polje.



Slika 14. Katere od zgornjih funkcij so Morsove (naloga 3)?

Naloga 4. Poišči še kakšno diskretno Morsovo funkcijo, ki je Morsova funkcija diskretnega vektorskega polja s slike 13. Poskusi najti kakšno, ki je ne dobiš iz dane s prištevanjem konstante.

Rešitve nalog

Rešitev naloge 1. Za vsak podkompleks bomo našteali vse simplekse, ki jih vsebuje:

$$\begin{aligned} \text{cl}(B) &= \{B\}, \\ \text{cl}(BD) &= \{B, D, BD\}, \\ \text{cl}(BDF) &= \{B, D, F, BD, BF, DF, BDF\}, \\ \text{st}(B) &= \{B, AB, BC, BD, BF, ABF, BCD, BDF\}, \\ \text{st}(BD) &= \{BD, BCD, BDF\}, \\ \text{st}(BDF) &= \{BDF\}, \\ \text{lk}(B) &= \{A, C, D, F, AF, CD, DF\}, \\ \text{lk}(BD) &= \{C, F\}, \\ \text{lk}(BDF) &= \{\}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 2. Baricentrična subdivizija ravninske triangulacije ima tri vrste oglišč. Prva so bila vsebovana že v originalnem simplicialnem kompleksu. Druga so središča daljic iz originalnega simplicialnega kompleksa in tretja so središča trikotnikov iz originalnega simplicialnega kompleksa. Če vsako od teh treh skupin pobarvamo z drugo barvo, dobimo iskano barvanje, v katerem ni sosedov istih barv.

Za drugi del opazimo, da vsak trikotnik razpade na 6 manjših trikotnikov, ki jih očitno lahko pobarvamo izmenično z dvema barvama, belo in črno. Potrebno se je le še prepričati, da lahko za vsak trikotnik izberemo eno od obeh možnih izmeničnih barvanj malih trikotnikov tako, da je usklajeno s sosednjimi trikotniki. To najlažje naredimo tako, da vse trikotnike v prvotnem simplicialnem kompleksu orientiramo v pozitivni smeri (nasprotni vrtenju urnega kazalca). Orientacija na notranjosti trikotnika določi tudi orientacijo na njegovem robu, pri čemer je vsak rob, ki pripada dvema trikotnikoma, v enem trikotniku orientiran v eno smer, v drugem pa ravno obratno. Po subdiviziji vsak tak rob razpade na dve polovici in v vsakem od trikotnikov, ki se v tem robu stikata, mu pripadata dva mala trikotnika. Če pobarvamo te male trikotnike tako, da je glede na podedovano orientacijo

prvi mali trikotnik pobarvan belo in drugi črno, potem bo vsak mali trikotnik iz sosednjega trikotnika pobarvan ravno obratno (črni bo imel belega soseda, beli pa črnega). Tako barvanje bo zadoščalo pogojem naloge.

Rešitev naloge 3. Prva in tretja funkcija sta Morsovi, druga pa ni, ker ima npr. 0-simpleks z vrednostjo 8 višjo vrednost kot 1-simpleksa, ki jima pripada (torej imamo dve izjemi namesto največ ene).

Rešitev naloge 4. En možen nabor vrednosti funkcije f je podan v spodnji tabeli.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| A | B | C | D | E | F | G | AB | AC | BC | BD | BE |
| 8 | 6 | 8 | 4 | 1 | 5 | 3 | 7 | 9 | 7 | 5 | 7 |

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| CD | DE | DF | EF | EG | FG | ABC | BCD | EFG |
| 7 | 3 | 6 | 4 | 2 | 7 | 8 | 6 | 6 |

LITERATURA

- [1] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics **184** (1998), 90–145.
- [2] R. Forman, *A User's Guide to Discrete Morse Theory*, Sémin. Lothar. Combin. **48** (2002), Art. B48c, 1–35 (electronic) MR 1939695.
- [3] K. P. Knudson, *Morse Theory: smooth and discrete*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015.
- [4] M. Morse, *The foundations of a theory in the calculus of variations in the large*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 213–274.
- [5] M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large*, American Mathematical Society Colloquium Publication **18**, New York, 1934.

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

REDEFINICIJE ENOT SI

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Odsek za fiziko trdne snovi, Institut Jožef Stefan, Ljubljana

PACS: 06.20.fa, 06.20.Jr

Sistem merskih enot mora biti notranje skladen, omogočati mora merjenje vseh fizikalnih količin, definicije osnovnih enot morajo temeljiti na naravnih konstantah in velikosti osnovnih enot se ne smejo spremeniti. To so bila osnovna vodila redefinicij osnovnih enot SI, ki stopajo v veljavo maja 2019.

REDEFINITION OF SI UNITS

System of units must be self consistent, it must enable measurements of all quantities, definitions of base units must be based on natural constants and their magnitudes must not change. These were the basic principles leading to the redefinitions of the base units of international system of units, which come into force in May 2019.

Uvod

Enote potrebujemo za merjenje fizikalnih količin¹. Točno in natančno merjenje je pomembno npr. v tehniki, prometu, trgovini in osnovnih raziskavah. Količino izmerimo tako, da jo (vsaj posredno, z umerjenim merilnikom) primerjamo z ustrezno enoto. Enota je dogovorjena in definirana vrednost količine. Definicijo enote realiziramo s predmetom ali postopkom, da dobimo etalon, zelo natančno merilo, s katerim nato umerjamo bolj razširjena in manj natančna merila v verigi zaporednih primerjav. Za to, da so merjenja v Sloveniji primerljiva in mednarodno usklajena, imamo vzpostavljen nacionalni meroslovni sistem, za katerega skrbi Urad RS za meroslovje. Nacionalni meroslovni sistem zagotavlja sledljivost meritev na mednarodno raven in natančna merila za uporabo v trgovini, industriji, javni upravi in na znanstvenem področju. Mednarodno usklajenost merskih enot pa ureja t. i. Meterska konvencija, ki je bila podpisana leta 1875 kot ena izmed prvih mednarodnih konvencij.

Sistem enot mora biti koherenten, notranje usklajen. Naravni pojavi so povezani s fizikalnimi zakoni in to moramo upoštevati pri definiciji enot. Mednarodni sistem enot SI ne predstavlja edinega smiselnega nabora osnovnih enot. Znan je kvantnomehanski sistem naravnih enot, kjer imata naravni konstanti, hitrost svetlobe in Planckova konstanta, vrednost (in enoto) 1.

¹Fizikalne količine so v standardih in meroslovju znane kot veličine [4].

Tak sistem ima le eno osnovno enoto in običajno izberejo meter. Na ta način je čas enakovredna koordinata v prostor-času. Enote za silo, energijo ipd. pa so ustrezne potence osnovne enote. Drugi zgled za koherentno definicijo enot najdemo v elektromagnetizmu. Tradicionalne enote so naslonjene na enote za dolžino, maso in čas, ker so jih že od nekdaj uporabljali in znali meriti, električne količine pa niso imele ekvivalentnih tradicionalnih enot. Osnovni zakon elektrostatike, Coulombov zakon, povezuje električni naboj s silo: $Fr^2 = k_1 ee'$. Z izbiro enote za naboj določimo enoto za konstanto k_1 . Preko Amperovega zakona lahko silo na enoto dolžine vzporednih vodnikov, v katerih teče tok, zapišemo $\frac{dF}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{r}$. Dvojka je dodana konstanti zaradi lepšega rezultata, ki sledi kasneje. Tu bi lahko izbrali enoto za tok po želji in s tem določili enoto konstante k_2 . Očitno velja zveza med konstantama k_1 in k_2 tako, da ima njun kvocient enoto kvadrata hitrosti in njuni velikosti (in s tem enoti za naboj in tok) lahko povežemo tako, da za hitrost zahtevamo vrednost svetlobne hitrosti $\frac{k_1}{k_2} = c^2$. Če za induk-

cijski zakon $\nabla \times \vec{E} + k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ izberemo sorazmernostno konstanto k_3 , lahko pokažemo, da je magnetno polje v okolici ravnega vodnika podano z $B = \frac{2k_2 I}{k_3 r}$. Izbire različnih električnih enot lahko poenostavijo določene račune in od sistemov sta najbolj znana SI in Gaussov sistem, za katera je po vrsti: $k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $k_3 = 1$ in $k_1 = 1$, $k_2 = c^{-2}$, $k_3 = c^{-1}$. V Gaussovem sistemu imata tako npr. jakost električnega polja in gostota magnetnega polja enaki enoti.

Nekdaj so enote temeljile na človeku bližnjih, dostopnih predmetih ali pojavih, kot so npr. širina palca, dolžina lakti ali stopala, masa zrna pšenice, dolžina dneva [2]. Pred francosko revolucijo je evropski merski sistem temeljil na sistemu, ki ga je po antično rimskih merah po celem cesarstvu vpeljal Karel Veliki. Po njegovi smrti se je cesarstvo razdrobilo in številni vladarji so vpeljali svoje različice merskih enot. Nekatero karolinške enote, kot npr. kraljevi stop (čevelj, pied du Roi), se praktično niso spreminjale tisoč let, medtem ko so se druge, npr. vatel (za merjenje dolžine blaga) in funt, močno razlikovale od kraja do kraja. Do francoske revolucije je število različnih sistemov in enot naraslo v nepregledno množico. Dostopnost do raznih enot je bila omejena in neuskkljenost med različnimi skupnostmi je povzročala težave, ki so jih skušali reševati z dogovori. Znan je 25. člen angleške Magne Carte iz leta 1215, ki je zahteval, da se po vsem angleškem kraljestvu uporablja enake standarde merjenja. Leta 1707 so angleške enote prevzeli tudi Škoti. Peter Veliki je želel vzpodbuditi trgovino z zahodom in je v 18. stoletju vpeljal angleški sistem enot tudi v ruskem carstvu. Od 1668 do 1776 je bil francoski dolžinski standard toise (klaftra ali seženj, z dolžino enako šestim stopam ali 72 palcem ali 864 linijam (lignes), slaba

dva metra). Leta 1735 so na ta standard umerili perujsko klaftro, geodetski standard, ki so ga uporabljali na špansko-francoski geodetski odpravi v Južno Ameriko. Perujska klaftra je 1766 postala uradna francoska enota za dolžino, znana kot Toise de l'Académie. Izpostaviti je treba trud Francozov, ki so začeli pripravljati enotni sistem temelječ na vsem dostopnih naravnih pojavih, npr. obsegu Zemlje, trajanju dneva, masi litra vode. Leta 1799, po izmeri pariškega poldnevnikarja od Dunquerque do Barcelone, ki sta jo izvedla Jean-Baptiste Joseph Delambre in Pierre Mechain, so meter definirali kot desetmilijonino razdalje od severnega pola do ekvatorja, kar je nanese 3 stope in 11,296 linij. Za enoto mase so predlagali kilogram kot maso tisočine kubičnega metra čiste vode. Čeprav so definicije izbrali tako, da si nihče ne bi mogel lastiti enot, jih niso mogli uporabiti dovolj pripravno in natančno. Zato so enoti realizirali z *mètre des Archives* in *kilogramme des Archives*, ki sta bila najboljša poskusa realizacije definicij. Čeprav so Francozi želeli razširiti nove enote in so k sodelovanju povabili Britance in Američane, so prototipe izdelali leta 1799 sami. Švicarji so prevzeli metrični sistem leta 1803 in leta 1805 je švicarski imigrant Ferdinand Rudolph Hassler prinesel kopiji metra in kilograma v Združene države, kjer pa je kongres leta 1830 potrdil britanski standard iz leta 1758, meter pa so uporabljali le za geodetska merjenja. Med 1840 in 1871 je metrski sistem sprejelo še več držav, Francija, Avstro-Ogrska (mi), Španija, južnoameriške republike, italijanske in nemške države. Nizozemska je sprejela sistem že leta 1817. Od 1863 so gram uporabljali za določanje mase poštnih pošiljk v Mednarodni poštni zvezi.

V 1860. so preiskave razkrile obrabo prototipa metra, znane pa so bile tudi težave zaradi upogibanja palice med uporabo. Zaradi teh dvomov o zanesljivosti enot meter in kilogram in strahu pred konkurenčnim standardom, je Napoleon III. povabil znanstvenike vsega sveta, da se udeležijo srečanja v Parizu, vendar je prej izbruhnila vojna med Francijo in Prusijo. Čeprav so se delegati zbrali, so se dogovorili, da počakajo z odločitvami do takrat, ko se jim bodo lahko pridružili tudi nemški kolegi. Po vojni sta metrski sistem sprejeli tudi Nemčija in Italija in leta 1875 so se v Parizu na Metrski konvenciji zbrali predstavniki 17 evropskih in ameriških držav. Njihova glavna naloga je bila, da nadomestijo prototipe metra in kilograma, ki so bili do tedaj pod nadzorom francoskih oblasti, in vzpostavijo organizacijo, ki bo skrbela za vzdrževanje standardov po vsem svetu. Na podlagi sklepov te konvencije so izdelali prameter in prakilogram ter razdelili njune kopije po nacionalnih laboratorijih sveta. Z Metrsko konvencijo so ustanovili Mednarodni urad za uteži in mere (*Bureau international des poids et mesures*, BIPM). Glavni organ Metrske konvencije je Generalna konferenca za uteži

in mere (Conférence générale des poids et mesures, CGPM), v kateri so zastopane vse države članice in skrbi za interese članic na področju meroslovja. BIPM vzdržuje mednarodni sistem enot, izvaja raziskave na področju meroslovja in skrbi za skladnost merskih enot na mednarodni ravni. Delo BIPM nadzira in usmerja Mednarodni komite za uteži in mere (Comité International des Poids et Mesures, CIPM), ki dobiva smernice od CGPM.

Prvotni namen Meterske konvencije je bil določiti enoti za dolžino in maso. Za druge enote so skrbela druga združenja; za čas astronomsko združenje, za električne enote namenske konference, za druge fizikalne standarde in definicije pa mednarodna združenja, kot sta Mednarodni kongres za uporabno kemijo CSI ali Mednarodna zveza za osnovno in uporabno fiziko IUPAP. Leta 1901 je Giovanni Giorgi predlagal koherentni sistem štirih osnovnih enot meter, kilogram, sekunda in eno od električnih enot (amper, volt ali ohm). Leta 1954 so se na 10. CGPM odločili za enoto amper. Po dogovoru s CSI in IUPAP so pozneje dodali še enoti stopinja kelvina in kandela in tako je 1960 na 11. CGPM nastal mednarodni sistem enot SI, *Système International d'Unités*. Od takrat so osnovnemu naboru enot dodali leta 1971 na 14. CGPM še enoto mol, drugače pa se SI ni spreminjal več, popravljali so le definicije in izboljševali nasvete za čim bolj natančno realizacijo enot – *mise en pratique* [5].

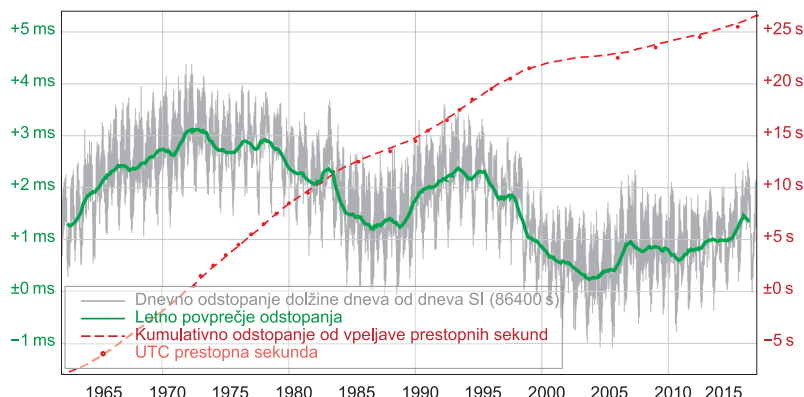
Težave starih definicij

S povečevanjem potreb po natančnosti merjenja se je izkazalo, da prvotno sprejete definicije enot niso primerne in iskati so začeli ustrežnejše definicije.

Čas

Najprej si oglejmo enoto časa, saj na njej temeljijo definicije nekaterih drugih enot. Enota časa sekunda je bila prvotno definirana kot $1/86\,400$. del povprečnega sončnega dne. Natančna opredelitev povprečnega sončnega dne je bila prepuščena astronomom. Vendar pa so meritve pokazale, da zaradi nepravilnosti pri vrtenju Zemlje definicija ni zadovoljiva. Dolžina dneva stalno narašča zaradi učinka plime in niha zaradi sklopitve Zemlje z atmosfero ter vplivov prestavljanja mase v Zemljinem jedru, skorji, oceanih in ledenikih. Podatke o spreminjanju dolžine dneva prikazuje slika 1.

Da bi natančneje določili časovno enoto, je 11. CGPM leta 1960 sprejela definicijo, ki jo je določila Mednarodna astronomska zveza na podlagi tropškega leta 1900. Poskusi so kazali, da je atomski standard časa, ki temelji na prehodu med energijskima nivojema atoma ali molekule, možno realizirati in ponoviti precej bolj natančno. Natančna opredelitev časovne enote je



Slika 1. Spreminjanje dolžine dneva s časom za zadnjih 50 let [6].

nujna za znanost in tehnologijo in zato je 13. CGPM leta 1968 sprejela definicijo sekunde na osnovi cezijeve atomske ure. CIPM je na svojem srečanju leta 1997 definicijo popravil, da se nanaša na atome cezija 133 v mirovanju pri temperaturi 0 K.

Dolžina

Zanimivo je naraščanje natančnosti merjenja opazovati po zaporednih redefinicijah enote meter. Že pred prvo definicijo so tehtali različne predloge in ugotavljali njihove pomanjkljivosti. Npr. predlog z dvesekundnim nitnim nihalom, ki ima nit dolgo skoraj natančno en meter, ni bil sprejet, saj so meritve pokazale, da se težni pospešek spreminja s krajem. So pa te meritve bile osnova za razvoj natančne metode merjenja gravitacijskega pospeška. Tudi definicija z dolžino poldnevnika se je izkazala za nenatančno, saj je dolžina poldnevnika odvisna od geografske dolžine, zato so na Meterski konvenciji pristali na definicijo s prametrom. Meritve dolžine poldnevnikov so vodile do natančnega poznavanja oblike Zemlje. Zanimivo je, da so se že pri osnovni meritvi dolžine poldnevnika zmotili in je prameter pravzaprav za 0,2 mm krajši, kot bi moral biti po predlogu definicije. Prameter so izdelali iz posebej trdne in obstojne zlitine 90 % platine in 10 % iridija s posebnim presekom tresca v obliki črke X, ki omogoča torzijsko stabilnost (slika 2). Prva definicija je določala dolžino metra kot razdaljo med zareza na prametru pri temperaturi tališča ledu. Do leta 1927 so definicijo popravili v: meter je razdalja pri 0 °C med osema zarez prametra pri normalnem zračnem tlaku, podprtem z dvema valjema s premerom večjim od enega centimetra, ki sta postavljena simetrično na medsebojni razdalji 571 mm. Ti Airyevi podporni točki sta izbrani zato, ker je upogib palice zaradi teže

tako najmanjši. Vse bolj natančne interferometrične meritve dolžin so vodile do nove definicije leta 1960. Po njej je bil meter enak dolžini 1 650 763,73 valovnih dolžin svetlobe v vakuumu, ki jo izseva kripton 86 pri prehodu med stanjema $2p_{10}$ in $5d_3$. Leta 1975 je bila sprejeta današnja definicija s hitrostjo svetlobe. S tem je bila hitrost svetlobe sprejeta kot naravna konstanta s točno določeno vrednostjo. Enota za razdaljo se torej oslanja zgolj na naravne konstante – hitrost svetlobe in frekvenco izsevane svetlobe pri točno določenem atomskem prehodu.

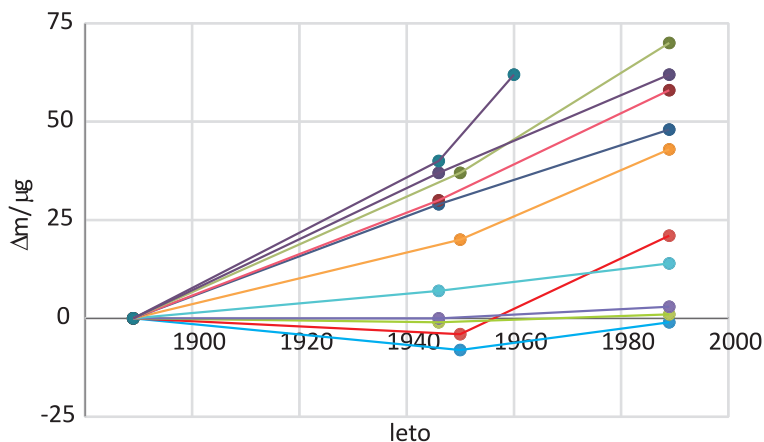


Slika 2. Prameter je izdelan iz posebej trdne in obstojne zlitine 90 % platine in 10 % iridija s posebnim presekom tresca v obliki črke X, ki omogoča torzijsko stabilnost.

Masa

Od 1960, ko se je definicija metra navezala na valovno dolžino svetlobe in ne več na prameter, je kilogram ostal edina enota vezana na predmet. Prvotna ideja za kilogram izvira iz leta 1793 kot teža enega kubičnega decimetra čiste vode pri ledišču. Takrat so enoto imenovali grave. Leta 1889 so definicijo naslonili na maso vode pri $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ in na podlagi podpisane Metrske konvencije definirali enoto kilogram in izdelali artefakt, ki jo je predstavljal. To je bil majhen valj ≈ 47 kubičnih centimetrov zlitine platine in iridija – prakilograma, ki ga hranijo v Pavillon de Breteuil. Mednarodni prototip kilograma hranijo pod pogoji, ki jih je določila 1. CGPM leta 1889. Tretja CGPM (1901) je v deklaraciji, s katero se je končala dvoumnost pri popularni uporabi besede teža, potrdila, da je kilogram enota mase, ki je enaka masi mednarodnega prototipa kilograma. Prakilogram so v poznejših letih nekajkrat primerjali s kopijami, ki so bile sočasno z originalno definicijo razdeljene po nacionalnih laboratorijih članic CGPM. Ugotovili so, da z leti prihaja do vedno večjih razlik med maso prakilograma in njegovih kopij v velikostnem redu $20 \cdot 10^{-9}$ kilogramov letno. Podatki primerjav mase pra-

kilograma in mase njegovih kopij so na sliki 3. Nerodno je, ker zaradi same definicije kilograma ne vemo, ali do odstopanja prihaja zato, ker kopije pridobivajo maso (npr. z absorpcijo živega srebra), ali zato, ker jo prakilogram izgublja (npr. zaradi čiščenja). Zato so na 21. srečanju CGPM leta 1999 pozvali k razmisleku o novi definiciji.



Slika 3. Prakilogram so nekajkrat primerjali s kopijami, ki so bile sočasno z originalno definicijo razdeljene po nacionalnih laboratorijih članic CGPM. Zaporedne meritve kažejo vedno večja odstopanja, v povprečju navzgor. Nerodno je, ker zaradi same definicije kilograma ne vemo, ali do odstopanja prihaja zato, ker kopije pridobivajo maso (npr. z absorpcijo živega srebra), ali zato, ker jo prakilogram izgublja (npr. zaradi čiščenja). [1]

Iz definicije enote kilogram sledi, da je masa mednarodnega prototipa kilograma vedno točno 1 kilogram, vendar pa masa prakilograma v resnici naraste za približno $1 \mu\text{g}$ na leto zaradi neizogibnega kopičenja polutantov, ki se absorbirajo na površini. Zato je CIPM določil, da je referenčna masa mednarodnega prototipa enaka tisti, takoj po čiščenju in pranju prototipa z vnaprej določeno metodo. Zaradi težav z možnostjo nezaznanega spreminjanja masne enote so začeli iskati realizacijo, poskus, s katerim se lahko neka osnovna konstanta, npr. Planckova ali Avogadrova, preko mase določi z dovolj majhno negotovostjo, kar bi potem služilo za redefinicijo enote. Tako se je začel razvoj metode tehtanja s Kibblovo (Wattovo) tehtnico in projekt Avogadro.

Tok

Prvotno je bil amper definiran elektrokemično kot tok, pri katerem se iz raztopine srebrovega nitrata vsako sekundo na elektrodi nabere 1,118 miligrama srebra. Od ampera v sistemu SI se ta enota razlikuje za 0,015 %. Od

leta 1881 je bil amper definiran kot desetina elektromagnetne enote toka v sistemu CGS. Ta je bila definirana kot tok, ki teče po obsegu krožnice s polmerom en centimeter in v njenem središču ustvari magnetno polje 2π oerstedov. V predhodnem sistemu CGS sta bili dve definiciji toka, ena praktično enaka definiciji v SI, druga pa je temeljila na električnem naboju, kot osnovni enoti, kjer je bila enota naboja definirana preko sile med naelektrenima kovinskima ploščama. Električne enote za tok in upor je uvedel Mednarodni električni kongres, ki je potekal v Chicagu leta 1893. Na 9. CGPM leta 1948 so sprejeli amper za enoto električnega toka: amper je jakost konstantnega toka v dveh ravnih vzporednih vodnikih, neskončne dolžine in zanemarljivega krožnega prečnega preseka, ki sta v vakuumu 1 meter narazen, in povzroča med vodnikoma silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtonov na meter dolžine. Iz definicije sledi, da je magnetna konstanta μ_0 , znana tudi kot permeabilnost praznega prostora, točno $4\pi \cdot 10^{-7}$ henrijev na meter. Na prvi pogled je enota že primerno naslonjena na naravno konstanto. Težava se pokaže pri realizaciji enote. Težko je natančno meriti silo na enoto dolžine neskončno dolgih vodnikov. Amper najbolj natančno realiziramo z Wattovo tehtnico, v praksi pa ga vzdržujemo preko Ohmovega zakona preko enot za napetost in upor, volt in ohm. Ti enoti enostavno realiziramo z Josephsonovim stikom in s kvantnim Hallovim pojavom.

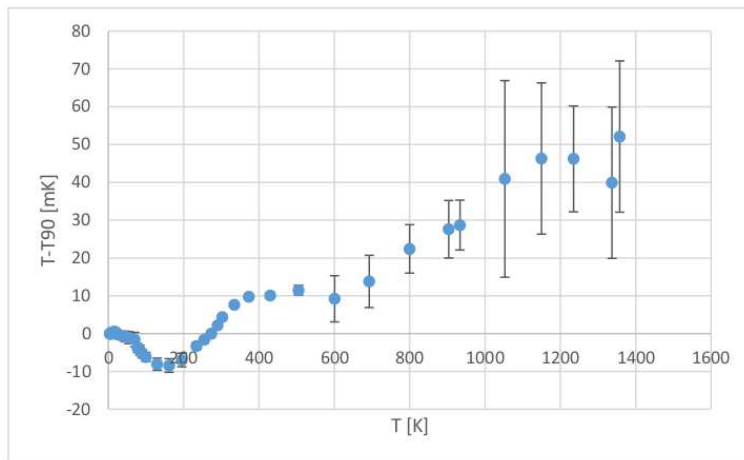
Temperatura

Definicija enote termodinamične temperature je bila sprejeta na 10. CGPM leta 1954, tako da trojni točki vode pripiše temperaturo 273,16 K. Na 13. CGPM leta 1968 so namesto stopinje Kelvina s simbolom °K uvedli ime kelvin s simbolom K. CIPM je na sestanku leta 2005 potrdila, da se definicija nanaša na vodo, ki ustreza dunajskemu standardu povprečne oceanske vode in ima izotopsko sestavo z razmerji: 0,00015576 mola ^2H na mol ^1H , 0,0003799 molov ^{17}O na mol ^{16}O in 0,0020052 mola ^{18}O na mol ^{16}O . Če se pri merjenju uporabi referenčno celico, ki vsebuje vodo z napačno izotopsko sestavo, to lahko vodi do napak velikostnega reda sto mikrokkelvinov. Enota za temperaturo je bila definirana glede na Celzijevo temperaturno lestvico t , kjer temperaturo izrazimo s termodinamično temperaturo T s formulo $t = T - T_0$, kjer je $T_0 = 273,15$ K ledišče vode. Enota celzijeve temperature je stopinja Celzija, ki je po definiciji enakovredna kelvinu. Razlika ali interval temperature se lahko izrazi v kelvinih ali v stopinjah Celzija, pri čemer je numerična vrednost temperaturne razlike enaka. Kelvin in stopinja Celzija sta tudi enoti mednarodne temperaturne lestvice iz leta 1990 (ITS-90). Od leta 1743 je bila temperatura definirana s stopinjsko lestvico, ki ima $0\text{ }^\circ\text{C}$ pri ledišču vode in $100\text{ }^\circ\text{C}$ pri vrelišču vode. Nato so definicijo leta 1954 spreme-

nili tako, da ima trojna točka vode ($0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$) temperaturo točno $273,16\text{ K}$, od 1967 dalje pa je en kelvin enak $1/273,16$ termodinamične temperature trojne točke vode. Posledica definiranja trojne točke standardne vode kot $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$ in $273,16\text{ K}$ je, da niti tališče niti vrelišče vode pri normalnem tlaku ($101,325\text{ kPa}$) nista več temperaturi, s katerima bi lahko definirali Celzijevo lestvico. Meritve kažejo, da se trojna točka in tališče vode razlikujeta le za $0,009911(10)\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tališče ledu je torej $+0,000089(10)\text{ }^{\circ}\text{C}$. Velikost stopinje je določena z absolutno ničlo in ne s stotino temperaturnega intervala od vrelišča do tališča. Vrelišče vode je zato pri $373,1339\text{ K}$ ($99,9839\text{ }^{\circ}\text{C}$). S kalibracijo na ITS-90 je vrelišče vode pri $99,974\text{ }^{\circ}\text{C}$. Razlika $16,1$ milikelvina med vreliščem prvotne Celzijeve lestvice in trenutne praktično ne vpliva veliko, saj je vrelišče vode zelo občutljivo na spremembo tlaka. Npr. sprememba nadmorske višine za 28 cm spremeni temperaturo vrelišča za 1 milikelvin. Leta 2007 je posvetovalna komisija za termometrijo sporočila CIPM, da obstoječa definicija temperature ni zadovoljiva za merjenje temperature v intervalih pod 20 K in nad 1300 K . Naraščanje merilne negotovosti jasno kažejo negotovosti referenčnih točk v ITS-90, kot razberemo s slike 4. Menili so, da je definicija z Boltzmannovo konstanto boljša.

Množina

Po odkritju osnovnih kemijskih zakonov so bile za določanje količin kemičnih elementov ali spojin uporabljene enote gram-atom in gram-molekula. Te enote so pravzaprav relativne mase. Atomske uteži so se prvotno nanašale na atomsko težo kisika, ki je bila splošno dogovorjena kot 16. Kisik so uporabili zato, ker je med bolj reaktivnimi elementi in omogoča enostavno primerjavo z drugimi elementi. Z masno spektrometrijo so pozneje odkrili izotope in vrednost 16 ustreza le enemu od izotopov kisika in ne naravni mešanici izotopov. Sporazum med Mednarodno zvezo čiste in uporabne fizike (IUPAP) in Mednarodno zvezo za čisto in uporabno kemijo (IUPAC) je leta 1959/60 končal to dvoumnost in pripisal vrednost 12 atomski teži izotopa ogljika 12. Namesto atomska teža zdaj uporabljamo izraz relativna atomska masa. Količine kemičnih elementov ali spojin podamo z množino, ki je sorazmerna s številom določenih osnovnih enot, entitet v vzorcu. Konstanta sorazmernosti je naravna konstanta. Enota množine je mol s simbolom mol. Mol je definiran z določitvijo mase ogljika 12, ki predstavlja en mol atomov ogljika 12. Z mednarodnim dogovorom je bila ta masa določena kot $0,012\text{ kg}$, to je 12 g . Po predlogih IUPAP, IUPAC in ISO je CIPM leta 1967 opredelil mol in ga potrdil leta 1969. 14. CGPM je leta 1971 sprejel definicijo: mol je količina snovi v sistemu, ki vsebuje toliko elementov (entitet), kot je atomov v $0,012$ kilograma ogljika 12. Ko uporabimo mol, moramo določiti



Slika 4. Odstopanja in negotovosti referenčnih temperatur mednarodne temperaturne lestvice ITS-90. Negotovost pri temperaturah večjih od 1000 K močno naraste. Lestvica ITS-90 temelji na množici umeritvenih točk, in sicer trojni točki vodika (13,8033 K), neona (24,5561 K), kisika (54,3584 K), argona (83,8058 K), živega srebra (234,3156 K), vode (273,16 K), tališču galija (302,9146 K), indija (429,7485 K), kositra (505,078 K), cinka (692,677 K), aluminija (933,473 K), srebra (1 234,93 K), zlata (1 337,33 K) in bakra (1 357,77 K). Termometri, ki se uporabljajo za določanje temperature v različnih intervalih, so: od 0,65–3,2 K plinski termometer s helijem 3, od 1,25–2,1768 plinski termometer s helijem 4, od 2,1768–5,0 plinski termometer s helijem 4 in drugačno zvezo med tlakom in temperaturo, 3,0–24,5561 helijev plinski termometer kalibriran v treh specifičnih točkah, 13,8033–1234,93 platinski uporovni termometer, z uporabo kalibriranim v več fiksnih točkah in z določeno interpolacijsko funkcijo, nad 1234,93 optični pirometer.

osnovne elemente, ki so lahko atomi, molekule, ioni, elektroni, drugi delci ali določene skupine takšnih delcev. Iz tega izhaja, da je molska masa ogljika 12 točno 12 gramov na mol. Leta 1980 je CIPM izostril definicijo, da so navedeni atomi ogljika 12 nevezani, v mirovanju in v svojem osnovnem stanju. Opredelitev mola določa tudi vrednost univerzalne konstante, Avogadrove konstante, ki povezuje število entitet z vsebnostjo snovi za kateri koli vzorec.

Svetilnost

Kandela temelji na količini svetlobe, ki jo oddaja goreča standardna sveča. Enote svetilnosti (jakost sevanja) na osnovi plamenskih ali žarilnih standardov žarilne nitke, ki so jih uporabljali v različnih državah pred letom 1948, je najprej nadomestila nova sveča. Nova sveča je tolikšna, da je svetilnost površine kvadratnega centimetra črnega telesa (Planckovega sevalnika) pri

tališču platine enaka 60 sveč. To definicijo sta pripravila Mednarodna komisija za osvetlitev (CIE) in CIPM. Definicijo je leta 1948 potrdila 9. CGPM in sprejela novo mednarodno ime enote kandela. Leta 1979 je bila zaradi težav pri realizaciji Planckovega sevalnika pri visokih temperaturah in razvoja radiometrije sprejeta nova definicija, da je kandela svetilnost vira v izbrani smeri, ki oddaja svetlobo s frekvenco $5,4 \cdot 10^{12}$ Hz z močjo 1/683 wattov v prostorski kot en steradian.

Redefinicije enot

Že prvotne definicije enot metrske konvencije so sledile načelu, da se naslanjajo na naravni pojav in se jih lahko realizira neodvisno od etalonov, vendar visoke zahteve po natančnosti in razvoj meroslovja pokažejo pomanjkljivosti teh definicij. Dve, za čas in dolžino, sta že bili naslonjeni na naravni konstanti, ostajala pa je težava s prakilogramom. Tudi to definicijo so sklenili nasloniti na naravno konstanto. CGPM je 16. novembra 2018 sprejela nove definicije osnovnih enot sistema SI, ki jih je predlagal BIPM. Nove definicije bodo stopile v veljavo 20. maja 2019.

Po stari definiciji [3] je sekunda trajanje 9 192 631 770 period sevanja, ki ustreza prehodu med dvema hiperfinima nivojema osnovnega stanja atoma cezija 133. Po novem pa je definicija:

sekunda je taka, da je frekvenca valovanja $\Delta\nu_{Cs}$, ki ga odda atom cezija 133 na absolutni ničli pri prehodu med nivojema hiperfinega razcepa osnovnega stanja, fiksna in enaka $9\,192\,631\,770\text{ s}^{-1}$.

Stara definicija enote za dolžino: meter je dolžina poti, ki jo prepotuje svetloba v vakuumu v časovnem intervalu 1/299 792 458 sekunde. Iz tega sledi, da je hitrost svetlobe v vakuumu točno 299 792 458 metrov na sekundo, $c = 299792458\text{ m/s}$. Nova definicija:

enota meter je taka, da ima hitrost svetlobe v vakuumu fiksno vrednost $299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$, kjer je sekunda definirana s cezijevo frekvenco $\Delta\nu_{Cs}$.

Stara definicija kilograma: kilogram je enota mase, ki je enaka masi mednarodnega etalona prototipa kilograma. Nova definicija kilograma:

Redefinicije enot SI

enota za maso je kilogram, določen prek Planckove konstante, ki ima fiksno vrednost $6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, kjer sta meter in sekunda definirana skladno s SI.

Stara definicija ampera: amper je konstantni električni tok, ki bi pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zamenljivega krožnega prereza, postavljena v vakuumu v medsebojni razdalji 1 m, povzročil med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtonov na meter dolžine. Nova definicija:

amper je enota za električni tok, ki je definirana preko električnega naboja in sekunde. Osnovni električni naboj ima definirano fiksno vrednost $1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ A s}^{-1}$, kjer je sekunda definirana skladno s SI.

Stara definicija kelvina: kelvin, enota termodinamične temperature, je $1/273,16$ -ti del termodinamične temperature trojne točke vode. Po novi definiciji

je kelvin definiran tako, da ima Boltzmannova konstanta fiksno vrednost $1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, kjer so meter, sekunda in kilogram definirani skladno s SI.

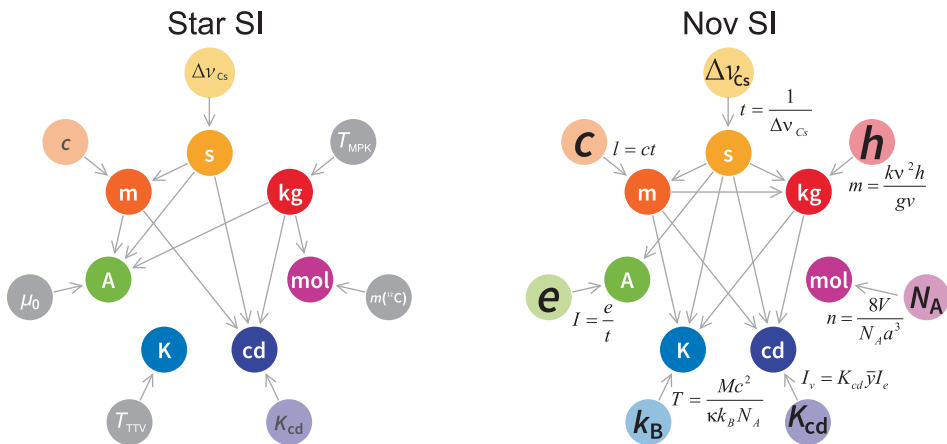
Stara definicija mola: mol je množina snovi v sistemu, ki vsebuje toliko osnovnih edink (entitet), kolikor je atomov v 0,012 kilograma ogljika 12. Pri uporabi mola je treba navesti osnovne edinke, ki so lahko atomi, molekule, ioni, elektroni, drugi delci ali določene skupine takšnih delcev. Po novi definiciji je mol definiran tako:

mol je definiran tako, da ima Avogadrova konstanta fiksno vrednost $6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Po stari definiciji je kandela (candela) svetilnost vira, ki v dani smeri oddaja monokromatsko sevanje frekvence $540 \cdot 10^{12}$ hertzov in seva z jakostjo $1/683$ watta na steradian. Po novi definiciji:

kandela je definirana tako, da je spektralna svetlobna učinkovitost za monokromatsko sevanje s frekvenco $540 \cdot 10^{12}$ Hz enaka $683 \text{ cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$, kjer so kilogram, meter in sekunda definirani skladno s SI.

Vidimo, da so definicije vseh enot vezane na naravne konstante, nekatere enote pa so vezane na definicije drugih enot. Medsebojne odvisnosti prikazuje diagram na sliki 5.



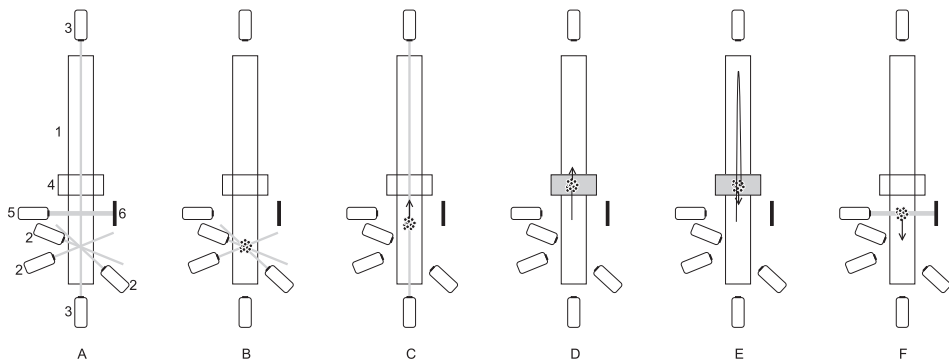
Slika 5. Odvisnosti definicij osnovnih enot od naravnih konstant in od drugih enot za star SI (levo) in nov SI (desno). V starem sistemu je npr. kelvin temeljil le na trojni točki vode, v novem pa temelji na Boltzmannovi konstanti in definicijah metra, sekunde in kilograma. V predstavitvi novega sistema so nakazane naravne konstante, na katerih slonijo definicije osnovnih enot. V nekaterih definicijah osnovnih enot je uporabljena definicija kake druge enote, kar tudi ponazarjajo enačbe in ustrezne puščice.

Realizacije enot

Realizacija enote pomeni izvedbo postopka, s katerim definicijo enote prevedemo v merljivo količino. Realizacije osnovnih enot s čim manjšo negotovostjo predlaga BIPM [5].

Z definicijo sekunde je definirana enota lastnega časa v območju, ki miruje glede na atomsko uro, in realizacija je veljavna v dovolj majhnem območju, da lahko zanemarimo razlike v gravitacijskem potencialu. Pri realizaciji moramo upoštevati relativistične popravke zaradi gibanja cezijevih atomov, ne pa zaradi gravitacije. Definicija je veljavna za nevzbujene atome pri absolutni ničli. V atomski uri čas pravzaprav meri elektronski oscilator,

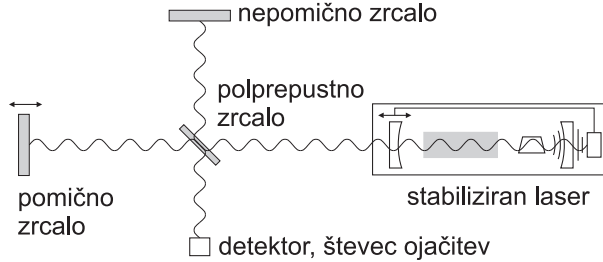
katerega lastno frekvenco lahko spreminjamo s povratno zanko tako, da ga resonančno uglasimo na frekvenco prehoda med hiperfinim razcepom energijskih stanj cezijevega atoma. Oscilator napaja mikrovalovni resonator, skozi katerega laser potisne navpično navzgor gručo ohlajenih cezijevega atoma. Gruča atomov zaradi teže nato pade spet nazaj skozi ta resonator. Število atomov, ki se pri tem vzbudi, je odvisno od tega, kako se frekvenca mikrovalov ujema s frekvenco prehoda. Če je ujemanje popolno, je to število največje. Število ugotavljajo tako, da gručo obseva z laserjem, ki povzroči stimulirano emisijo vzbujenih atomov. Moč stimulirane emisije daje signal, s katerim se kontrolira vzbujevalna frekvenca. Na ta način delujejo najnatančnejše atomske ure, katerih negotovost je velikostnega reda 10^{-16} . Taka ura zgreši sekundo na kakih 300 milijonov let. Primer fontanske atomske ure kaže slika 6.



Slika 6. A – Sestava fontanske cezijeve atomske ure: 1 – ohlajena vakuumsko posoda, 2 – laserji za hlajenje atomov, 3 – navpični laserji za navpični met gruče atomov, 4 – mikrovalovni resonator, 5 – detekcijski laser, 6 – detektor. Delovanje ure opišemo v korakih: B – cezijeve atome ohladimo v gručo, C – gručo laser potisne navpično navzgor, D – gruča preide skozi resonator in se po približno eni sekundi vrne skozenj, E – v resonatorju se atomi vzbudijo, F – količino vzbujenih atomov zaznamo z detektorskim laserjem.

Za praktično merjenje dolžin lahko uporabimo tri načine; tako da merimo čas potovanja svetlobe ali pa interferenčno, s štetjem valovnih dolžin laserjev z natančno znanimi frekvencami svetlobe in zvezo $c = \lambda\nu$. Za majhne premike je primernejše interferenčno merjenje (slika 7), za daljše razdalje pa način z merjenjem časa preleta.

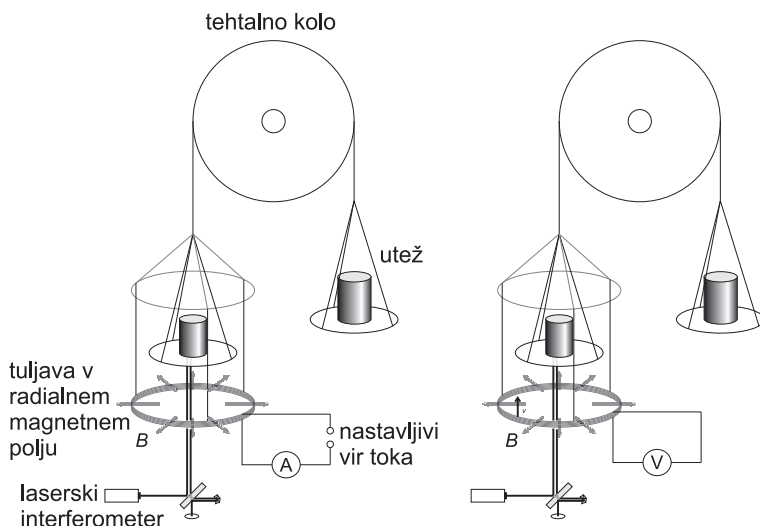
Maso nekega telesa določimo z negotovostjo 10^{-8} tako, da ga stehtamo s Kibblovo tehtnico, katere sestavo in delovanje prikazuje slika 8. To je primerjalna tehtnica s posodico, v katero postavimo utež, katere teža mg uravnovesi na drugi strani magnetna sila na tuljavo, ki se nahaja v radialnem magnetnem polju B , skozi katero nastavimo pravi tok I : $mg = IlB$.



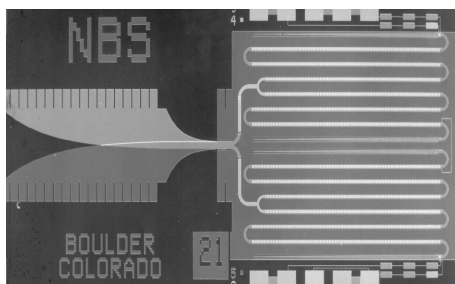
Slika 7. Interferenčno merjenje majhnih premikov, ki jih prenesemo na zrcalo enega kraka interferometra.

Dolžina vodnika v tuljavi je l . V ločenem poskusu pomikamo tuljavo skozi magnetno polje in natančno merimo njeno hitrost v z interferometrom. Na njenih priključkih se tedaj inducira napetost $U = lvB$. Če združimo obe meritvi, je masa določena z izrazom: $m = \frac{UI}{gv}$. Napetost na tuljavi lahko zelo natančno merimo z Josephsonovim stikom (slika 9), kjer izkoriščamo makroskopski kvantni Josephsonov pojav. Josephsonov stik sestavljata dva superprevodnika, ločena s tanko plastjo izolatorja. Če stik napajamo z izmeničnim tokom s frekvenco ν_n , potem se na stiku pojavi stalna napetost $U = \frac{n_n h \nu_n}{2e} = \frac{n_n \nu_n}{K_J}$, kjer je n_n kvantizacijsko (celo) število, e je osnovni naboj, h Planckova konstanta, K_J pa Josephsonova konstanta. Na mreži zaporedno vezanih N_n stikov je napetost tolikokrat večja. Tudi tok skozi tuljavo merimo posredno z Josephsonovim pojavom, tako da merimo napetost na upor R , ki ga natančno realiziramo s kvantnim Hallovim pojavom $R = \frac{h}{n_r e^2} = \frac{R_K}{n_r}$, n_r je kvantizacijsko (celo) število, R_K pa von Klitzingova konstanta. Tok, po Ohmovem zakonu, sledi $I = \frac{U_t}{R} = \frac{N_t n_t \nu_t n_r e}{2}$. Merjeno maso torej lahko izrazimo kot $m = \frac{N_t N_n n_n n_t n_r \nu_n \nu_t h}{4gv} = k \frac{\nu_n \nu_t}{4gv} h$. V izrazu nastopajo celoštevilski konstanta k , frekvence, ki jih merimo natančno preko standarda za čas, hitrost, ki jo merimo natančno preko standarda za dolžino in čas, gravitacijski pospešek g , ki ga tudi merimo preko standarda za dožino in čas, ter Planckova konstanta h . Gravitacijski pospešek na mestu uteži določijo zelo natančno z merjenjem padanja uteži. Meritev je tako natančna, da zazna razliko v težnem pospešku na razliki višin nekaj decimetrov. Iz izraza vidimo, da je definicija kilograma vezana na vrednost Planckove konstante in definiciji enot za čas in dolžino.

Enoto mol realizirajo z monokristalno, natančno polirano silicijevo kroglo (slika 10). Prostornino krogle V določijo z optično interferometrijo. Površina je narejena zelo natančno in odstopanja od krogelne oblike so tako majhna, da bi imela taka krogla, če bi jo napihnila na velikost Zemlje, gore in doline velike le deset centimetrov. Velikost osnovne kristalne celice a_0



Slika 8. Kibblova tehtnica, s katero določamo maso uteži tako, da merimo tok na tuljavi v magnetnem polju, ki z magnetno silo uravnovesi težo uteži (levo). Magnetno polje določimo s premikanjem tuljave v njem in merjenjem inducirane napetosti (desno).



Slika 9. Mikroskopska slika čipa z mrežo Josephsonovih stikov, ki ga v National Institute of Standards and Technology uporabljajo za standardni volt in merjenje napetosti. Vir: NIST

določijo z rentgenskim optičnim interferometrom. Maso krogle m natančno stehtajo s primerjalno tehtnico. Da kroglja ne vsebuje nečistoč, preverijo z rentgensko preiskavo površine. Molsko maso M določijo z masno spektroskopijo. Te količine so med seboj povezane z zvezo $N_A = \frac{8V}{a_0^3} \cdot \frac{M}{m}$.

Zaradi zveze med merljivimi količinami, maso in naravno konstanto je bila metoda tudi kandidatka za realizacijo mase. Na koncu so se odločili za metodo s Kibblovo tehtnico, ker doseže manjšo negotovost.

Enota za temperaturo se lahko realizira na več načinov, kar bo tudi izboljšalo negotovost merjenja temperature v širšem intervalu. Eden od na-



Slika 10. Silicijeva kroglja, s katero določijo enoto za množino snovi mol. Vir: NIST

činov je preko merjenja hitrosti zvoka v razredčenem plinu v sistemu, kot ga kaže slika 11. Merijo tako, da vzpostavijo stoječe valovanje v okrogli posodi, katere polmer je natančno izmerjen. Na ta način lahko natančno določijo valovno dolžino zvoka. Frekvenco zvoka izmerijo posebej in iz zveze $c = \lambda\nu$ določijo hitrost zvoka. Hitrost zvoka je v plinu odvisna od temperature, odvisnost opiše zveza $c^2 = \frac{\kappa k_B T}{m}$, kjer je κ razmerje specifične toplote pri stalnem tlaku in specifične toplote pri konstantni prostornini in je za monoatomne pline, kot sta helij ali argon, enako $5/3$. m je masa atomov ali molekul plina in k_B Boltzmannova konstanta. Temperaturo torej lahko izmerimo z določitvijo vrednosti Boltzmannove konstante, tehtanjem mase ter merjenjem dolžine in časa.

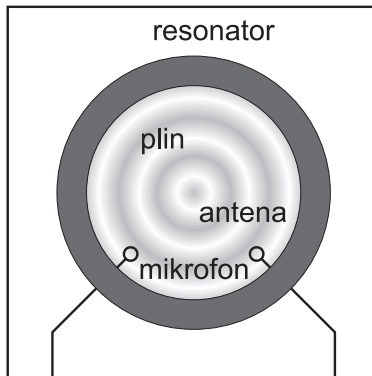
Drugi načini realizacije enote temperature so npr. še določanje dielektrične konstante plina z merjenjem kapacitete kondenzatorja napolnjenega s plinom, merjenje Johnsonovega termičnega šuma v uporniku ali z merjenjem Dopplerjeve razširitve absorpcijskega spektra v plinu.

Realizacija ampera je možna preko Ohmovega zakona ($I = U/R$), polnjenja kondenzatorja ($I = C \frac{dU}{dt}$), štetja elektronov (SET – Single Electron Transport). Enoti za upor in napetost lahko realiziramo z Josephsonovim stikom in s kvantnim Hallovim pojavom. Slika 12 prikazuje shematično delovanje (levo) in posnetek čipa (desno) za SET.

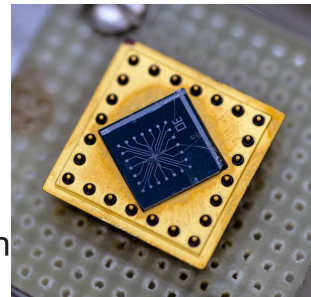
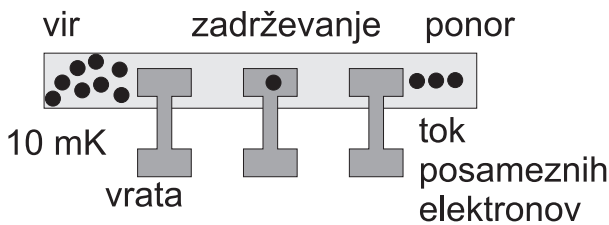
Definicija kandelega pravzaprav povezuje fotometrične X_f in radiometrične $X_r(\lambda)$ enote: $X_f = K_{cd} \int_{360 \text{ nm}}^{830 \text{ nm}} \frac{dX_r(\lambda)}{d\lambda} V(\lambda) d\lambda$. K_{cd} je naravna konstanta

Redefinicije enot SI

vakuumska posoda



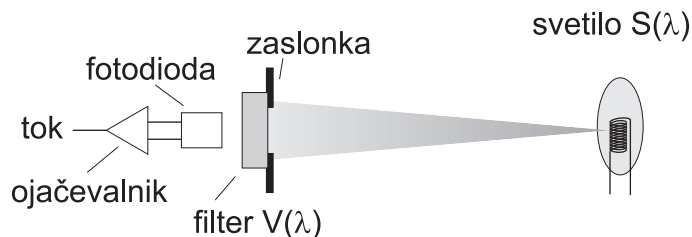
Slika 11. Posoda, s katero merijo hitrost zvoka v razredčenem plinu in posredno temperaturo plina.



Slika 12. Delovanje sistema za štetje elektronov (levo) in fotografija čipa (desno), ki ga lahko uporabimo za realizacijo enote amper. Vir: NIST

683 lm/W, $V(\lambda)$ pa funkcija svetlobne občutljivosti (npr. občutljivost očesa pri fotopičnem vidu). Radiometrični enoti watt ustreza fotometrična lumen in wattu na steradian ustreza kandela. Za realizacijo kandele potrebujemo radiometrično umerjene detektorje svetlobe, bodisi kriogenske radiometre bodisi polprevodniške elemente, ki svetlobni signal pretvarjajo v natančno merjeni električni signal. Radiometri imajo široko spektralno občutljivost in sami zase ne dajo podatka o fotometrični lastnosti svetila, zato potrebujejo še svetlobni filter za korekcijo na karakteristiko $V(\lambda)$, ki mora biti neodvisno kalibriran. V praksi se pogosto meri odziv radiometra kar z lasersko svetlobo. Radiometer meri svetlobno moč, za svetilnost moramo upoštevati še geometrijske lastnosti svetlobe, ki jo oddaja svetilo – oddaljenost svetila in velikost odprtine na zaslonki – to definira prostorski kot, iz katerega detektor zajema signal. Kandelu lahko realiziramo tudi s standardnimi absolutnimi

svetili s karakteristiko $S(\lambda)$, pri katerih natančno izmerimo pogoje, pod katerimi delujejo (temperatura ali napajalni tok). Absolutno svetilo je npr. Planckov sevalnik – segreta počrnjena votilna. Kandela se najpogosteje realizira s standardno žarnico, ki je postavljena dovolj daleč od dovolj majhne zaslone, da žarilno nitko lahko obravnavamo kot točkasto svetilo. Napajanje žarnice običajno izberejo tako, da ustreza svetloba standardnemu svetilu tipa A, ki ima enak spekter kot črno telo segreto na 2856 K. Shema sistema za realizacijo kandelega prikazuje slika 13.



Slika 13. Shema sistema za realizacijo kandelega.

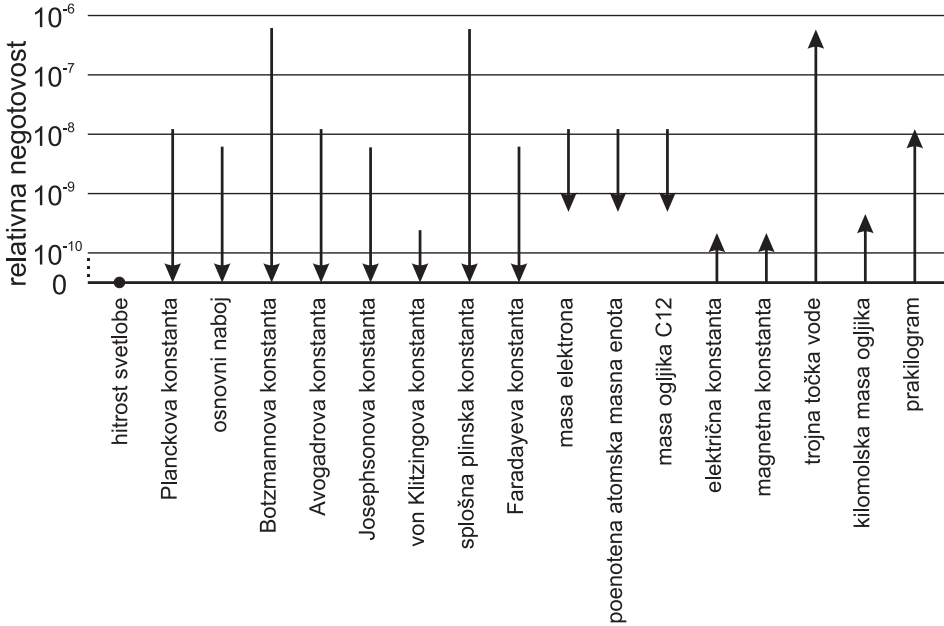
Zaključek

Vseh sedem osnovnih enot po redefiniciji temelji na splošnih naravnih in dogovorjenih konstantah. Razen sekunde in mola temeljijo definicije preostalih enot tudi na definicijah drugih enot, kot kaže slika 5. Pri izbiri definicijskih konstant bi lahko izbirali med več kot šestimi primernimi konstantami. Definicijo kilograma bi z definirano sekundo in metrom lahko naslonili npr. na gravitacijsko konstanto G . Vendar je negotovost, s katero merimo G , velikostnega reda 10^{-5} , kar je dosti večje od negotovosti $1,2 \cdot 10^{-8}$, ki jo dosežemo pri določanju mase s sprejeto definicijo s Planckovo konstanto. Nabor konstant, uporabljenih v redefinicijah, je bil izbran tako, da zagotavljajo čim manjšo negotovost pri realizaciji enot in čim večjo stopnjo neodvisnosti uporabljenih konstant od drugih konstant.

Nekatere osnovne naravne konstante so povezane med seboj, npr. električno konstanto ϵ_0 , magnetno konstanto μ_0 in svetlobno hitrost v vakuumu c povezuje izraz $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Vrednost povezane konstante določimo iz znane zveze z merjenjem drugih konstant. Negotovost take konstante je določena s kombinacijo negotovosti konstant, kot ustreza uporabljenemu izrazu. Negotovost konstant, katerih vrednost je določena z definicijo enote, je enaka nič. Zato se bo izboljšala negotovost tudi več drugih konstant. Pri redefiniciji so pazili, da je število konstant, katerih negotovost se poveča, čim manjše. Vrednost magnetne konstante je bila nekdanj z definicijo ampera določena

Redefinicije enot SI

točno na $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am in preko prej omenjene zveze je bila točna tudi vrednost električne konstante, saj je hitrost svetlobe določena z definicijo metra in brez negotovosti. Velikost osnovnega električnega naboja se je nekdanj določala z meritvami. Po redefiniciji ampera je velikost osnovnega naboja točna, magnetna in električna konstanta pa postaneta merjeni količini. Nekaj konstant in spremembe njihovih negotovosti prikazuje slika 14.



Slika 14. Spremembe relativnih negotovosti nekaterih naravnih konstant. Negotovost konstant, ki jim določimo vrednost z definicijo enot, in z njimi neposredno povezanih drugih konstant je enaka nič.

Ko je postal očiten problem razlik mas prakilograma in nacionalnih etalonov, se je razvila razprava o tem, kako bi kilogram redefinirali, ali preko števila atomov silicija 28 ali s Kibblovo tehtnico?

S projektom Avogadro bi Avogadrovo konstanto vezali neposredno na kilogram. Vendar se s tem pristopom poruši zveza med molom, kilogramom, poenoteno atomsko masno enoto in Avogadrovo konstanto. Poenotena atomska masna enota $u = \{m_u\}$ kg je definirana z maso atoma ogljika 12: $m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C}) = 1,660539040(20) \cdot 10^{-27}$ kg. Znana je tudi kot dalton (simbol Da) in ni enota SI. Avogadrova konstanta je bila definirana s to maso in maso kilograma, kar poemeni, da Avogadrova konstanta ni imela določene vrednosti, ampak se je njeno vrednost izmerilo. Predlog redefi-

nicije določi vrednost Avogadrove konstante. Če obdržimo staro definicijo daltona kot dvanajstino mase ogljika 12, dalton ne more biti več povezan s kilogramom in zveza $N_A = \frac{\text{g}}{\text{u}} \text{ mol}^{-1}$ ne velja več natančno. V 12 g ogljika je torej le približno Avogadrovo število atomov.

Relativna atomska masa entitete X je $A_r(X) = \frac{m(X)}{m_u}$. Molska masa entitete X je $M(X) = m(X)N_A = A_r(X)m_uN_A$. Molska masna konstanta je definirana $M_u = M(^{12}\text{C})/12$. Po stari definiciji kilograma in mola je bila vrednost M_u točno 1 g mol^{-1} . Zdaj je mol definiran s fiksno vrednostjo N_A . Eksperimentalno se vrednost molske masne konstante določa iz količine $M_u = \frac{R_\infty}{A_r(e)\alpha^2} \left(\frac{2N_A h}{c} \right)$. Količine v oklepaju so naravne konstante brez negotovosti, R_∞ je Rydbergova konstanta, α je konstanta fine strukture, $A_r(e)$ pa je relativna masa elektrona. Skladno z redefinicijo se vrednost M_u ne spremeni, njena negotovost pa je določena z $u(M_u) = u\left(\frac{R_\infty}{A_r(e)\alpha^2}\right)$. Ker je $M_u = m_uN_A$, je negotovost poenotene atomske masne enote enaka negotovosti molske masne konstante in se z redefinicijo zmanjša za faktor 20. V fiziki delcev se pogosto uporablja elektronvolt (simbol eV), ki ga s poenoteno atomsko masno enoto povezuje izraz za lastno energijo $E = mc^2$, tako da ustreza $1 \text{ u} \leftrightarrow 931,49410274(42) \text{ MeV}$.

Molu nekateri odrekajo status osnovne enote, ampak ga razumejo le kot velik faktor.

Temperatura je svojevrstna uganka. Pri sobni temperaturi jo merimo preko razpenjanja in krčenja snovi, pri visokih temperaturah pa jo povežemo z barvo. Lahko bi celo oporekali pravo naravo osnovne enote, saj je pravzaprav le mera za povprečno termično energijo gradnikov snovi. Z znanstvenega vidika je glavna prednost redefinicije kelvina, da bo omogočala bolj točne meritve pri zelo nizkih in zelo visokih temperaturah. Ima tudi načelno prednost, saj ne temelji na nobeni specifični snovi. Pred redefinicijo je bila temperatura trojne točke vode točno določena, Boltzmannova konstanta pa merjena količina $k = 1,38064903(51) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, z relativno standardno negotovostjo $3,7 \cdot 10^{-7}$. Zdaj postane Boltzmannova konstanta točna, z negotovostjo nič, temperatura trojne točke pa $273,1600(1) \text{ K}$. Redefinicija kelvina nima takojšnjega vpliva na ITS-90. Najbolj točne meritve v območju med 25 K in 1235 K so še vedno sledljive na standardne platinaste uporovne termometre. Vrednost temperature trojne točke vode se ne bo spremenila v bližnji prihodnosti. Na dolgi rok termodinamično merjenje temperature lahko zamenja klasične termometre in ITS-90 temperaturno lestvico.

Definicija ampera je nekdam slonel na definiciji enot časa, razdalje in mase. Volt in ohm sta bila naslonjena na definicijo ampera preko Ohmo-

vega zakona, vendar nista med seboj neodvisni količini, saj ju povezuje kvantni Hallov pojav in Josephsonov pojav. Po novem je amper naslonjen na definicijo sekunde in določeno vrednost osnovnega naboja. Volt in ohm določa Planckova konstanta, osnovni naboj in Ohmov zakon. Planckova konstanta je določena z definicijo kilograma. Zaradi redefinicije se spremenita vrednosti Josephsonove in van Klitzingove konstante. Enota volt je praktično realizirana preko Josephsonovega pojava in Josephsonove konstante $K_J = \frac{2e}{h} = 483\,597,848416984 \text{ GHz/V}$. Vrednost konstante je zdaj določena, prejšnja pa je bila izmerjena $K_{J-90} = 483\,597,9 \text{ GHz/V}$. Nova konstanta je manjša od prejšnje in novo definirana napetost je manjša od stare za faktor $0,1 \mu\text{V/V}$. Ohm je realiziran preko kvantnega Hallovega pojava in van Klitzingove konstante $R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812,8074593045 \Omega$. Od stare konstante $R_{K-90} = 25\,812,807 \Omega$ je to večje za faktor $0,02 \mu\Omega/\Omega$. Ta sprememba je zanemarljiva za večino uporabnikov, upoštevati jo bodo morali le nacionalni meroslovni inštituti, ki vzdržujejo standarde največje točnosti.

Marsikdo oporeka status osnovne enote tudi kandel, saj naj bi bila zgolj biološka enota, ki ustreza človeški zaznavi. V radiologiji shajamo brez posebne enote za svetlobni tok.

Kritika redefinicij se tiče uporabe dogovorjenih konstant, ki niso sorodne definirani količini. Tako je npr. za razumevanje zveze med Planckovo konstanto in maso potrebno poznati kvantne pojave. To pa ne velja za definicijo enote amper, ki je zdaj definirana precej bližje pravemu pomenu toka, ki je pretočen naboj v časovni enoti. Težko razumljive definicije bodo nekoliko otežile srednješolski pouk, je pa že zdaj učni načrt predvideval le obravnavo definicije ampera.

LITERATURA

- [1] G. Girard, *The third periodic verification of national prototypes of the kilogram (1988–1992)*, *Metrologia* **31** (1994), 317–336.
- [2] T. J. Quinn, *From artefacts to atoms: the BIPM and the search for ultimate measurement standards*, Oxford University Press, 2012.
- [3] *Odredba o merskih enotah*, Uradni list RS, št. 26/01 in 109/09
- [4] SIST-V ISO/IEC Vodilo 99, Mednarodni slovar meroslovja – Osnovni in splošni koncepti ter z njimi povezani izrazi (VIM).
- [5] www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/, ogled 24. 12. 2018.
- [6] *International Earth Rotation and Reference Systems Service*, dostopno na www.iers.org/ IERS/EN/Home/home_node.html, ogled 25. 12. 2018.

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 65 (2018)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

| | |
|---|---------|
| Ocenjevanje parametrov v Bayesovi statistiki (Aleš Toman) | 1–11 |
| Polarni sij in Zemljino magnetno polje (Aleš Mohorič) | 12–25 |
| O polovičnem odvodu funkcije (Nik Stopar) | 41–59 |
| Vloga gluonov v globoko neelastičnem virtualnem comptonskem sipanju (Miha Mihovilovič in Simon Širca) | 60–69 |
| Pravokotniki na krivulji (Žiga Virk) | 81–88 |
| Plavanje v mikroskopskem svetu (Mojca Vilfan) | 89–99 |
| Verjetnost komutiranja (Urban Jezernik) | 121–137 |
| O temperaturi ledu na vodi (Jože Rakovec) | 138–150 |
| Potence kovinskih razmerij (Marko Razpet) | 161–170 |
| Optična pinceta in ustvarjanje ultrakratkih optičnih sunkov visokih intenzitet, Nobelova nagrada za fiziko 2018 (Natan Osterman) | 171–183 |
| Simplicialni kompleksi in diskretna Morsova teorija (Aleksandra Franc) | 201–217 |
| Redefinicije enot SI (Aleš Mohorič) | 218–239 |

Zanimivosti — Miscellanea

| | |
|--|---------|
| Uganke iz oddaje Ugriznimo znanost (Uroš Kuzman) | 26–33 |
| Zlobni test matematične intuicije (Uroš Kuzman) | 151–157 |

Nove knjige — New books

| | |
|--|---------|
| Marta Zabret, MaRtematične prigode (Peter Legiša) | 72–73 |
| Tristan Needham, Visual Complex Analysis (Jurij Kovič)..... | 74–78 |
| Reinhard Siegmund-Schultze, Mathematicians Fleeing from Nazi Germany (Marko Razpet) | 79–VII |
| Bertrand Russell, Introduction to Mathematical Philosophy (Jurij Kovič) | 117–XI |
| Keith Devlin, Finding Fibonacci – The Quest to Rediscover the Forgotten Mathematical Genius Who Changed the World (Marko Razpet) | 184–186 |

Vesti — News

| | |
|--|-----------|
| Vidav, Spiritus agens slovenske matematike minulega stoletja (Damjan Kobal) | 34–36 |
| Stoletnica rojstva profesorja Ivana Vidava (1918–2015) (Milan Hladnik) | 36–III |
| 11. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah (Miha Škarabot) | 70 |
| Matematični adventni koledar (Jasna Prezelj) | 71 |
| Matematične novice (Peter Legiša) | 71 |
| MaRS 2018 (Žan Hafner Petrovski) | 106–108 |
| Glasbenik se v zreli starosti prelevi v matematika (Peter Legiša) | 108–109 |
| Petindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) | 110–116 |
| Zoisove nagrade in priznanja ter Puhove nagrade in priznanja 2018 (Aleš Mohorič) | 158–160 |
| In memoriam: Ciril Velkovrh (1935–2017) (Milan Hladnik) | 160–XV |
| Bojan Mohar je prejel prestižno nagrado Kanadskega kraljevega združenja (Peter Legiša) | 186–187 |
| Strokovno srečanje in 71. občni zbor DMFA (Janez Krušič in Nada Razpet) | 188–190 |
| Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj (Dragan Mihailović) | 191–192 |
| Andreja Grom, Andrej Guštin in Marta Zabret prejemniki priznanj DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman) | 193–197 |
| Prenos matematične revije iz okvira mednacionalke (Peter Legiša) | 198–XIX |
| Letno kazalo | 240–XXIII |
| Iz zgodovine — Miscellanea | |
| Plemljeva recenzija predelav Močnikovih učbenikov (Peter Legiša) | 100–105 |

<http://www.obzornik.si/>

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Letnik 65, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

| Članki | Strani |
|---|-----------|
| Simplicialni kompleksi in diskretna Morsova teorija (Aleksandra Franc) | 201–217 |
| Redefinicije enot SI (Aleš Mohorič) | 218–239 |
| Vesti | |
| Letno kazalo | 240–XXIII |

CONTENTS

| Articles | Pages |
|--|-----------|
| Simplicial complexes and discrete Morse theory (Aleksandra Franc) | 201–217 |
| Redefinition of SI units (Aleš Mohorič) | 218–239 |
| News | 240–XXIII |

Na naslovnici: Zelo natančna Kibblova tehtnica, ki jo v NIST uporabljajo za realizacijo osnovne enote mase, kilogram. Delovanje je opisano v članku *Redefinicija enot SI* (glej članek na straneh 218–239). Vir: NIST.