

SONČNO OBSEVANJE IN KLIMATSKE SPREMEMBE PO MILANKOVIČEVEM MODELU

ŽIGA ŠMIT

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Institut Jožef Stefan

PACS: 92.60.Ry, 92.30.Bc

Osnova klimatskih modelov je toplota, ki jo Zemlja prejme od Sonca. Prispevek prikaže nazorno izpeljavo enačb, ki vodijo do dnevnega obseva, to je količine toplote, ki v poljubnem dnevu leta pade na enoto zemeljske površine v obliki krogle pri izbrani geografski širini. Z analitičnimi približki v najnižjem redu je upoštevano spreminjanje nagiba zemeljske vrtilne osi in spreminjanje ekscentričnosti Zemljinega tira. Z modelom je izračunana relativna količina toplote za obdobje würmske poledenitve (do 160 tisoč let nazaj). Primerjava z drugimi računi in izmerjenimi klimatskimi spremembami kaže, da preprosti račun uspešno reproducira osnovno obliko klimatske krivulje.

SOLAR IRRADIATION AND CLIMATIC CHANGES ACCORDING TO THE MILANKOVITCH MODEL

Climatic models are essentially based on the energy, received by Earth from the Sun. The article shows methodic derivation of equations that lead to the daily insolation, i. e. the quantity of energy that hits a given area of spherically-shaped earth surface at given geographical amplitude on a given day. Analytical approximations are proposed for the time variation of the tilt of the geographical axis with respect to ecliptic and of the eccentricity of the Earth's orbit. The relative quantity of energy is calculated for the period of Würm glacial age (up to 160 thousand years in the past). A comparison with other calculations and measured climatic variations shows that the simple model reproduces well the main features of the climatic curve.

Uvod

Hitro spreminjanje klimatskih razmer v zadnjem času prav gotovo oživlja zanimanje za klimatske modele. Že sredi 18. stoletja so z opazovanjem geoloških pojavov zaznali pojav ledenih dob. Konec 19. stoletja so domnevali, da so nihanja hladnih in toplih obdobj posledica sprememb v sončnem obsevanju. Z idejo se je leta 1911 začel ukvarjati srbski matematik in naravoslovec Milutin Milanković (1879–1958). Do podrobnosti jo je izdelal v avstro-ogrskem vojaškem ujetništvu v bližini Budimpešte in jo leta 1920 objavil v knjigi, ki jo je izdala tedanja Jugoslovanska akademija znanosti in umetnosti v Zagrebu, izšla pa je pri založbi Gauthier-Villars v Parizu. Druga Milankovićeva knjiga je izšla v Beogradu leta 1941.

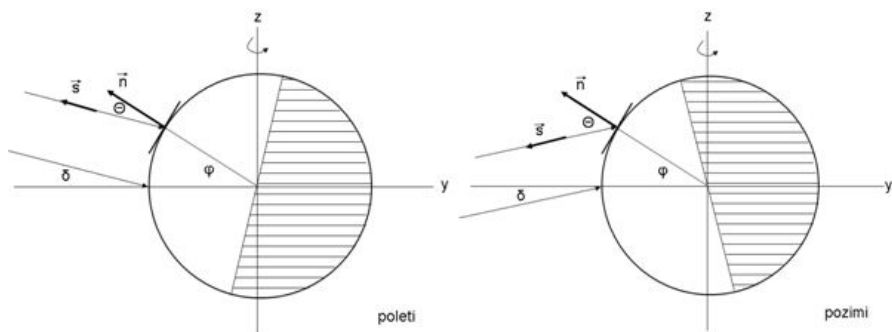
V Milankovičevem modelu je klima odvisna od dnevne količine sončne toplote, ki posije na izbrani del zemeljske površine. Toplota je odvisna od kota, pod katerim padajo sončni žarki, in od dolžine dneva. Ti količini pa se dolgotrajno spreminjata zaradi precesije in opletanja zemeljske osi ter zaradi spreminjanja eliptičnosti zemeljskega tira. Milanković je domneval, da je glavni vzrok za spreminjanje klime in nastop ledenih dob spreminjanje nagiba zemeljske osi, ki poteka s periodo 41 tisoč let. Toda ledene dobe nastopajo s periodo okoli 100 tisoč let, kar je nato kar za nekaj desetletij zmanjšalo zanimanje za Milankovičev model. Znova so ga oživila globokomorska in ledeniška vrtnja, s katerimi je bilo mogoče rekonstruirati klimatske spremembe 500–800 tisoč let v preteklost. J. D. Hays, J. Imbrie in N. J. Shackleton so v ključnem delu *Variation in the Earth's Orbit: Pacemaker of the Ice Ages* leta 1976 z numeričnimi postopki določili osnovne periode pri spreminjanju klime in pokazali, da se ujemajo s spreminjanjem precesije in nagiba zemeljske vrtilne osi. Vendar pa so te spremembe le približno periodične, ker gibanje Zemlje moti gravitacijsko polje težjih planetov. Naloga je zato pogosto obrnjena: iz izmerjenih nihanj klime ugotavljajo variacije v Zemljini orbiti.

Klimatska nihanja v preteklosti se kažejo v izotopski sestavi kisika v globokomorskih in ledenih vrtnah ter v sestavi in fizikalnih lastnostih sedimentov. Merjenja teh pojavov so tudi uveljavljena metoda datiranja v geoloških in starejših arheoloških obdobjih. Postopek, ko časovno skalo, ki jo dobimo iz klimatskih in geoloških opazovanj, uskladimo s parametri po Milankovičevem modelu, imenujemo orbitalna uskladitev (orbital tuning).

Čeprav vzroke za današnje naraščanje temperatur iščemo v spremembah atmosfere, ki jih povzroča človek, pa je Milankovičev model še vedno osnova za računanje dolgoročnih klimatskih sprememb. S primerjavo podatkov za količino vpadle toplote pozimi in poleti ter pri različnih geografskih širinah dobimo občutek, kako velike spremembe teh količin so pomembne. Izračun dnevnega obseva, to je količine toplote, ki pade na izbrani del zemeljske površine v enem dnevu, je zanimiv geometrijski problem, ki ga lahko z matematično nadarjenimi dijaki rešimo že v srednji šoli. Namen prispevka pa je razviti model do te mere, da reproducira osnovno obliko klimatske krivulje za obdobje würmske poledenitve, to je do 160 tisoč let nazaj. V ta namen predlaga analitične približke za časovno odvisnost ekscentričnosti zemeljskega tira in opletanje zemeljske vrtilne osi.

Model

Klima na Zemlji je odvisna od gostote energijskega toka s Sonca in od lastnosti atmosfere: odbojnosti za sončno svetlobo in absorptivnosti (emisivnosti)



Slika 1. Vpadni kot sončnih žarkov na severni polobli poleti in pozimi opoldne.

v infrardečem območju. Pri našem modelu se bomo omejili na izračun dnevnega obseva, to je integrala gostote energijskega toka j (obsevanosti) v času od sončnega vzhoda do zahoda:

$$\frac{Q}{S} = \int j \cos \Theta dt_d \quad (1)$$

Pri tem je Θ kot, ki ga sončni žarki oklepajo z normalo na izbrani del zemeljske površine; Θ se spreminja zaradi vrtenja Zemlje in njenega gibanja okoli Sonca, saj zemeljska vrtilna os ni pravokotna na ekliptiko, ampak oklepa s pravokotnico nanjo kot δ_0 . Zaradi gibanja Zemlje po elipsi se med letom spreminja tudi j , ki pada s kvadratom razdalje Sonce–Zemlja. Za sevanje Sonca in s tem povezano sončno konstanto privzemimo, da se ne spreminja. Spremembe r od enega dneva do drugega pa so majhne, tako da lahko j v (1) postavimo pred integral.

Za računanje kota Θ je ugodno, da začnemo meriti letni čas t_l v trenutku, ko je Zemlja v pomladišču in je zemeljska os pravokotna na smer sončnih žarkov. Zemeljska os v splošnem oklepa s smerjo proti Soncu kot λ :

$$\cos \lambda = \sin \delta_0 \sin \omega_l t_l, \quad (2)$$

pri čemer je ω_l kotna hitrost pri kroženju Zemlje okoli Sonca; $\omega_l = 2\pi/T_l$, kjer je T_l perioda enega leta.

Kot Θ želimo podati kot funkcijo dnevnega časa t_d in letnega časa t_l . Izberemo koordinatni sistem, pri katerem os z sovpada z zemeljsko vrtilno osjo. Osi x in y ležita v ekvatorialni ravnini; pri tem os y postavimo tako, da smer proti Soncu leži v ravnini yz (slika 1). Sončni žarki oklepajo tedaj z osjo y kot δ ; vrednosti δ so v letni polovici leta pozitivne, v zimski pa

negativne. Kota δ in λ se razlikujeta za $\pi/2$ ($\lambda = \pi/2 - \delta$), tako da velja

$$\sin \delta = \sin \delta_0 \sin \omega_d t_d. \quad (3)$$

Smer proti Soncu je tedaj

$$\vec{s} = (0, -\cos \delta, \sin \delta). \quad (4)$$

Smer normale na izbrani točki zemeljskega površja pri geografski širini φ je podana z vektorjem

$$\vec{n} = (\cos \omega_d t_d \cos \varphi, -\sin \omega_d t_d \cos \varphi, \sin \varphi). \quad (5)$$

Pri tem merimo dnevni čas t_d tako, da \vec{n} ob času $t_d = 0$ leži v ravnini xz ; $\omega_d = 2\pi/T_d$, kjer je T_d dolžina enega dneva. Iz enačb (4) in (5) dobimo $\cos \Theta$:

$$\cos \Theta = \cos \delta \cos \varphi \sin \omega_d t_d + \sin \delta \sin \varphi. \quad (6)$$

Iz zveze (6) lahko enostavno ocenimo, koliko je dan zaradi nagnjene zemeljske osi zjutraj in zvečer daljši ali krajši kot ob enakonočju. Za mejo svetlo-temno velja $\cos \Theta = 0$ in odtod

$$-\sin \omega_d t_d = \tan \delta \tan \varphi \equiv \sin \alpha, \quad (7)$$

pri čemer je α podaljšanje ali skrajšanje dneva v kotnih enotah. (V izvorni Milankovičevi izpeljavi namesto kota α nastopa kot $\pi/2 + \alpha$, ki ustreza polovični dolžini dneva v kotnih enotah.) Med arktično nočjo in arktičnim dnevom je absolutna vrednost $\tan \delta \tan \varphi$ večja od ena. Arktična noč ali dan nastopita pri geografski širini $\varphi = \pi/2 - |\delta|$, najmanjša geografska širina, pri kateri poznajo ta pojav, pa je $\varphi = \pi/2 - |\delta_0|$. Zaradi loma svetlobe v ozračju (astronomske refrakcije) je dolžina dneva nekaj daljša, kot jo napove enačba (6), pri arktičnem dnevnu, ki se vleče nekaj mesecev, lahko tudi za nekaj dni.

V enem dnevnu na površino S pade toplota (1):

$$\frac{Q}{S} = \frac{j}{\omega_d} \int_{-\alpha}^{\pi+\alpha} \cos \Theta d(\omega_d t_d) = \frac{2j}{\omega_d} \left(\cos \omega \cos \varphi \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \sin \delta \sin \varphi \right). \quad (8)$$

Pri tem smo upoštevali, da se j v enem dnevnu zaradi gibanja Zemlje po rahlo eliptičnem tiru ne spremeni.

V splošnem nas zanimajo relativne spremembe dnevnega obseva oziroma vpadle toplote Q . Za izhodišče vzemimo vrednost Q_0 pri $\delta = 0$, torej količino toplote, ki jo dobimo pri orientaciji zemeljske osi pravokotno na smer

sončnih žarkov. Zaradi enostavnosti vzemimo referenčno vrednost toka j pri $r = a$, ko je oddaljenost Zemlje od Sonca enaka daljši polosi elipse. Vrednost a je sicer večja od povprečne razdalje Zemlja–Sonce, vendar pomeni boljše konstanto gibanja: med drugim nastopa v tretjem Keplerjevem zakonu in izrazu za energijo planeta. Relativno spreminjanje toplote Q , ki se na izbrano zemeljsko površino S izseva v enem dnevu, je tako

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\cos \delta \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{a} + \alpha\right) \sin \delta \tan \varphi\right). \quad (9)$$

Pri računanju si pomagamo z izrazi za enačbo elipse v parametrični obliki. V tem zapisu so čas in koordinate planeta podani kot funkcija brezdimenzijskega parametra ξ , ki se spreminja podobno kot polarni kot od 0 do 2π , vendar nima enostavne geometrijske ponazoritve. Za r velja (glej Landau, enačba 15.10):

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad (10)$$

pri čemer je ϵ ekscentričnost elipse, parameter ξ pa je povezan s časom t' z zvezo

$$\xi - \epsilon \sin \xi = \omega_t t' = \frac{2\pi}{T_l} t_l. \quad (11)$$

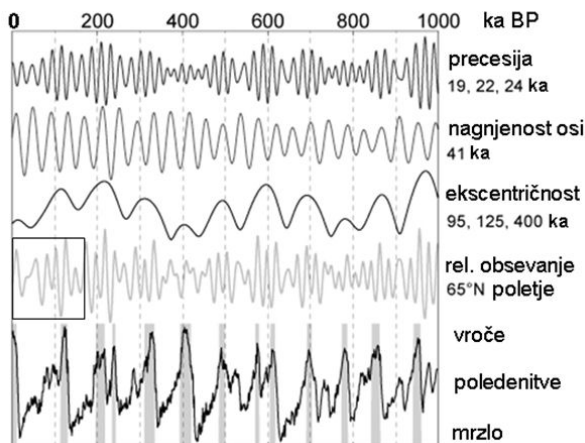
Pri majhnih vrednostih ϵ je ξ približno enak polarnemu kotu, ki ga opiše zveznica Sonce–Zemlja z začetno lego v periheliju. Čas t' , ki prav tako meri potovanje Zemlje okoli Sonca, ima torej v periheliju vrednost nič. Pri praktičnem računanju rešimo enačbo (11) numerično z iteracijo.

Razmerje Q/Q_0 želimo izračunati za poljuben koledarski dan t v letu. V ta namen nam zadostuje, da pozabimo na prestopna leta in za dolžino leta vzamemo $T_l = 365$ dni. Po koledarju nastopi pomlad navadno 21. marca, tako da je od 1. januarja do pomladišča še 80 dni. Perihelij nastopi okoli 3. januarja. Pri času t_l v enačbi (3) in času t' v enačbi (11) upoštevamo časovna premika:

$$t_l = t - 80d; \quad t' = t - 3d \quad (12)$$

V naslednjem koraku upoštevamo dolgoročno spreminjanje Q/Q_0 , ki je opazno šele v obdobjih več tisoč let. Zemeljska os v prostoru ni stalna, ampak zaradi precesije opleta po plašču stožca, ki je orientiran pravokotno na ekliptiko in ima odprtino $2\delta_0$. Učinek tega gibanja je navidezno vrtenje elipse zemeljskega tira. Pri računanju r iz enačb (10, 11) moramo torej pri času t' upoštevati dodatni fazni premik, ki je odvisen od geološkega časa T ; tega lahko merimo tako v preteklost kot v prihodnost:

$$t' = t - 3d + T_l \frac{T}{T_p}; \quad (13)$$



Slika 2. Parametri Zemljinega tira, izračunana krivulja relativnega dnevnega obseva in dejansko spreminjanje temperature (prirejeno po Global Warming Art). Območje relativnega obsevanja do 160 tisoč let je označeno s kvadratom.

pri tem smo s T_p označili precesijski obhodni čas.

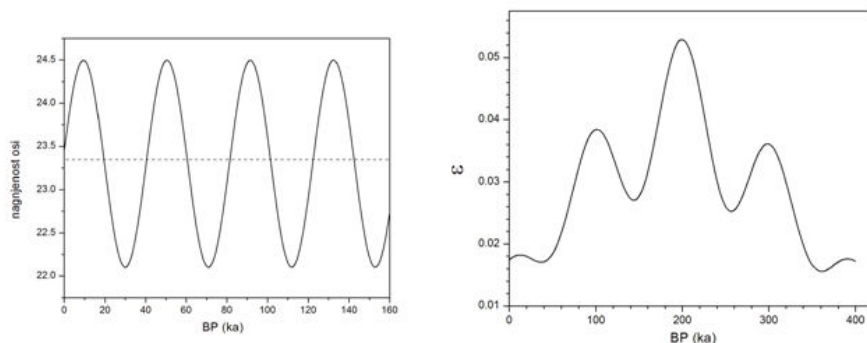
Precesijski čas T_p glede na zvezde je 26 ka; s ka označujemo tisoče let. Čas, kot ga vidimo na Zemlji, je odvisen tudi od vrtenja glavne osi Zemljinega tira glede na zvezde in od drugih gibanj. Tudi tu je opaznih več harmoničnih komponent s periodami 19, 22 in 24 ka. V računu smo privzeli $T_p = 23$ ka, kar se ujema z vrednostjo, ki so jo iz meritev na vrtni določili Hays in sodelavci.

Drugi dve gibanji, ki vplivata na Q/Q_0 , sta spreminjanje nagiba zemeljske vrtilne osi glede na ekliptiko (kot δ_0) in spreminjanje ekscentričnosti elipse zemeljskega tira. Pri opisu teh dveh parametrov si pomagamo z analitičnimi približki. Spreminjanje nagiba zemeljske osi med skrajnima legama $22,1^\circ$ in $24,5^\circ$ poteka s periodo 41 ka. Trenutna vrednost δ_0 je $23,44^\circ$ in se zmanjšuje. V naših računih podamo časovno odvisnost δ_0 z analitičnim približkom

$$\delta_0 = 23,3^\circ - 1,2^\circ \sin \left(2\pi \frac{T - 0,8 \text{ ka}}{41 \text{ ka}} \right). \quad (14)$$

Spreminjanje ekscentričnosti zemeljskega tira je kvaziperiodično zaradi vpliva masivnih planetov Jupitra in Saturna. Najmočnejše harmonične komponente imajo periode 95 ka, 125 ka in 413 ka. Analitično aproksimacijo, ki dovolj dobro opiše spreminjanje ϵ za zadnjih 400 ka, poiščemo z nastavkom

$$\epsilon = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i \sin \left(2\pi \frac{T + \varphi_i}{T_{ei}} \right). \quad (15)$$



Slika 3. Spreminjanje nagiba zemeljske osi po enačbi (14) (levo). Spreminjanje ekscentričnosti Zemljinega tira po enačbi (16) (desno).

Za prispevek s periodo 413 ka je amplituda 0,012. Minimum doseže pri času 400 ka v preteklosti, zato za φ_3 izberemo -13 ka $-1/4 \times 413$ ka. Preostale amplitude A in fazne čase φ določimo z zvezami:

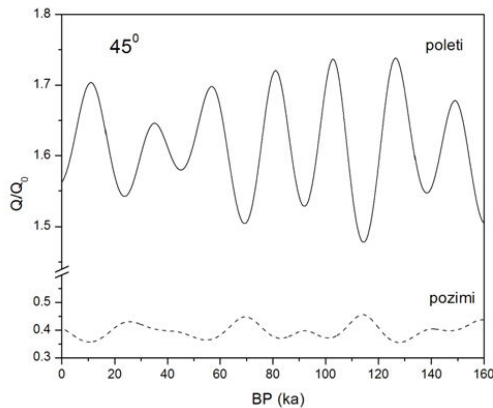
1. Največja vrednost ϵ je 0,053, najmanjša 0,005.
2. Današnja vrednost ϵ je 0,017.
3. Največja vrednost ϵ je bila pred 200 ka.

Iz pogoja (3) dobimo φ_1 in φ_2 z zahtevo, da morata biti ustrezni sinusni funkciji v (15) enaki ena. Nato z upoštevanjem pogojev (1) in (2) rešimo sistem enačb za preostale tri amplitude A . Ekscentričnost je tako podana s semiempiričnim približkom

$$\epsilon = 0,029 + 0,0062 \sin \left(2\pi \frac{T + 33,75 \text{ ka}}{95 \text{ ka}} \right) + 0,0058 \sin \left(2\pi \frac{T - 18,75 \text{ ka}}{125 \text{ ka}} \right) - 0,012 \cos \left(2\pi \frac{T - 13 \text{ ka}}{413 \text{ ka}} \right). \quad (16)$$

Rezultati in diskusija

Model smo uporabili za prikaz nihanj v sončnem obsevanju za čas würmske poledenitve (do 160 tisoč let nazaj). Rezultate računa smo primerjali z vrednostmi, kot jih najdemo na spletu (slika 2). Kot kaže slika 3, z enačbo (14) pravilno opišemo periodo in začetni potek nihanja zemeljske osi, ne zajamemo pa rahlega spreminjanja amplitude. Spreminjanje ekscentričnosti



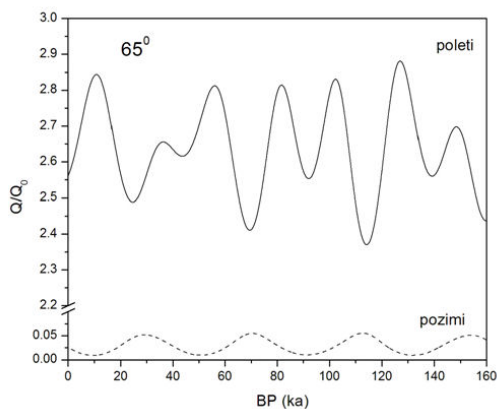
Slika 4. Izračunano relativno obsevanje za 45° severne širine.

zemeljskega tira do 400 tisoč let nazaj pa zelo dobro ponazorimo s približkom (16). Enačba (16) napove enako strukturo tudi za obdobje med 400 in 800 tisoč leti v preteklost, vendar slika 2 kaže, da se oblika funkcije pri bolj oddaljenih obdobjih nekoliko popači.

Krivulji relativnega sončnega obseva sta izračunani za dve geografski širini: 45° (slika 4), kamor približno sodijo naši kraji, in za 65° (slika 5). Širine okoli 65° naj bi bile namreč odločilne za nastanek ledenih dob. Te nastopijo tedaj, kadar deli zemeljske površine dobijo poleti premalo toplote, da bi se stalil ves led, ki je ostal od zime. Sliko 5 lahko primerjamo s podrobnostmi na sliki 2: kot vidimo, naš račun dokaj dobro reproducira posamezne strukture: vrh z visokimi temperaturami pred 10 tisoč leti, sedlast vrh z visokimi temperaturami med 30 in 45 tisoč leti, visoke temperature pred 75 in 100 tisoč leti, močno ohladitev pred 115 tisoč leti in zelo visoke temperature pred 125 tisoč leti (ta vrh navadno označujejo kot 5e ali 5,5 in ustreza eemianskemu interglacialu). Ohladitve nastopajo pred 20, 60 in 115 tisoč leti in štejejo kot poledenitve würm III, II in I. Od teh naj bi bila najhladnejša würm I (pred 115 tisoč leti), vendar dejanske klimatske meritve kažejo, da so bile tedaj temperature višje kot pri drugih dveh. Sliki 4 in 5 pa pokazeta, da na izbrani del zemeljske površine vedno posije največ toplote poleti in da je ravno ta toplota odločilna za klimatske spremembe.

Sklep

V prispevku smo prikazali preprost model za spremljanje klimatskih nihanj po Milankovičevem predlogu. Model se omeji na bistvene pojave, ki zajemajo relativno velikost dnevnega obseva in spreminjanje osnovnih astronom-



Slika 5. Izračunano relativno obsevanje za 65° severne širine.

skih parametrov. Računanje po predstavljenih izrazih je mogoče opraviti s preprostim računalniškim programom ali celo z navadnim kalkulatorjem. Seveda pa se mora bralec zavedati, da je spreminjanje klime odvisno še od mnogih drugih pojavov, ki niso zajeti v sedanjem modelu: površine Zemlje v obliki elipsoida, odbojnosti tal in vplivov atmosfere, kamor spadajo tako absorpcija sončnega sevanja kot učinki tople grede, in prenosov toplote z vetrovi in morskimi tokovi. Del teh pojavov je v model vključil že Milanković v prvi izdaji leta 1920. Z modelom lahko pogledamo tudi v prihodnost. Račun kaže, da bi v naslednjih nekaj tisoč letih morali pričakovati zmanjšanje temperature. Če se to ne bo zgodilo, bodo za to krivi toplogredni pojavi.

LITERATURA

- [1] M. J. Aitken, *Science-based dating in archaeology*, Longman, London 1990.
- [2] J. D. Hays, J. Imbrie in N. J. Shackleton, *Variation in the Earth's Orbit: Pacemaker of the Ice Ages*, *Science* **194** (1976), 1121–1132.
- [3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press 1976.
- [4] M. Milankovitch, *Théorie Mathématique des Phénomènes Thermiques Produits par la Radiation Solaire*, Gauthier-Villars, Paris 1920.
- [5] M. Milankovitch, *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeiten-problem*, Srpska kraljevska akademija, Beograd 1941.
- [6] Wikipedia; gesla: Milankovitch cycles, Milutin Milankovitch

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>