Zb.gozdarstva in lesarstva, L.17,št.2 s. 351-392, Ljubljana 1979

UDK 634.0.561(083)

O RASTNIH FUNKCIJAH

Mag.Anton CEDILNIK, prof.matematike
asistent
VTOZD za gozdarstvo, Biotehniška fakulteta univerze E.Kardelja
v Ljubljani

61000 LJUBLJANA, Večna pot 83, YU

Sinopsis

O RASTNIH FUNKCIJAH

Ta sestavek ima namen z matematičnega stališča osvetliti lastnosti funkcij, ki jih gozdarji, agronomi in biologi uporabljajo za opis rasti nekaterih količin, kot višinska, debelinska, prostorninska rast dreves v odvisnosti od časa in podobno. Navadno uporabljajo za ponazoritev teh procesov elementarne, odsekoma analitične funkcije, ker na takih lahko uporabimo metode aproksimacije eksperimentalnih podatkov. Vendar take funkcije le grobo kažejo dejanska dogajanja v majhnih intervalih neodvisne spremenljivke. Zato bi bilo treba postaviti trdnejše temelje in kriterije za določevanje tipov funkcij, ki bi bile primerne za opisovanje katerih koli pojavov te vrste.

Synopsis

ON GROWTH FUNCTIONS

This article discusses from a mathematical point of view properties of functions that are used by forest engineers, agronomists and biologists for description of growth of some quantities like growth of height, thickness, or volume of trees in dependence of time etc. To illustrate these processes normally the elementary piecewise analitical functions are used, because with these functions methods of approximation of experimental data can be applied. Nevertheless, those functions only rouglhy show the actual events in the small intervals of an independent variable. It is necessary then, to apply more solid foundations and criteria to determine the types of more appropriate functions which could describe any of the phenomena of this kind.

O RASTNIH FUNKCIJAH

PREGLED VSEBINE

	Izvleček, Synopsis	352
0	Uvod	354
1	Pojem rastne funkcije	356
2	Subjektivni čas	361
3	Konvergenca rastnih funkcij	364
4	Biološka rast	370
5	Karakteristične funkcije	379
6	Primer: debelinska rast drevesa	382
	Literatura	389
	Zusammenfassung	390

0. UVOD

V [8] na straneh 28 in 33 najdemo pogoje, ki jim mora ustrezati rastna krivulja. Vendar ti pogoji večinoma ne vzdržijo kritike, če jih podrobneje prediskutiramo. Poglejmo si nekatere. Avtor dela [8] citira predvsem dva pisca, Peschela in Todorovića.

Peschel trdi, da mora funkcija izhajati iz koordinatnega izhodišča z vrednostjo 0, Todorović pa, da ima tam zelo majhno vrednost μ (velikost semena). Obe trditvi sta le formalnega značaja, saj je matematično gledano popolnoma vseeno, kje funkcijo začnemo. Ti zahtevi torej ne bi smeli biti karakteristiki rastne krivulje.

Peschel zahteva, da funkcija izhaja iz izhodišča z odvodom 0, Todorović pa, da je tam odvod bodisi 0, ∞ ali neka pozitivna vrednost. Očitno je, da Peschel zahteva preveč (po njegovem bi moral biti še celo drugi odvod enak 0), Todorović pa zahteva le, da funkcija pri majhnih vrednostih neodvisne spremenljivke narašča.

Desno od koordinatnega sistema naj bi bil kvečjemu en prevoj. Dejstvo pa je, da ima lahko rastna krivulja drevesa s kolikor toliko burnim življenjem prav presenetljivi število prevojev, oziroma ekstremov prirastne krivulje. Ta zahteva je zato zelo huda idealizacija.

Avtorja izrecno dopuščata možnost, da ima rastna krivulja asimptoto, ki ni del krivulje, torej da so prirastki poljubno pozno še vedno neničelni. Ker je vsako življenje časovno omejeno, je ta možnost nesmiselna.

Pri tem pa avtorja spregledata dejstvo, da o topoloških lastnostih teh krivulj oziroma ustreznih funkcij nič ne povesta. Oba kar brez utemeljitve implicitno zahtevata analitičnost, kar je premočna zahteva, da bi jo privzeli brez komentarja.

Vidimo, da so postulati za rastne funkcije, ki jih podajata omenjena pisca, pa še mnogi drugi, zelo neživljenski in tudi slabo formulirani. Zdi se, da so ti postulati namenjeni nekemu zakonu realne analitične oblike, ki naj pokaže splošno tendenco rasti drevesa, zanemari pa slučajne deviacije. Vemo pa, da je faktorjev, ki vplivajo na rast, slučajnih in neslučajnih, toliko, da je iskanje takega zakona za individualno rast pri današnji stopnji znanosti utopija.

Mnogi avtorji uporabljajo takšne večparameterske funkcije zato, da z njimi po različnih metodah, največkrat po metodi najmanjših kvadratov, aproksimirajo dejanske podatke za posamezen objekt opazovanja. Trdijo, da tako lahko izračunajo najrazličnejše podatke ter da je tak način podajanja bolj nazoren. Tisto o nazornosti je seveda iz trte izvito, kar se pa izračunavanja tiče, nam numerična analiza ter računalniki omogočajo delo neposredno s podatki in nam ni treba obdelovati funkcije, katere smiselnost in natančnost sta v večini primerov dvomljivi.

Verjetno je takšno delo smiselno le, če opazujemo rast večje množice osebkov, na primer rast enodobnega sestoja (višina v odvisnosti od časa) ali starega sestoja (višina v odvisnosti od debeline). V tem primeru je analitična predstavitev rasti poenostavitev, ki ni bistvena izguba informacije, ker so že podatki zelo variabilni in netočni; izračunamo pa lahko nekatere količine, naprimer zrelost sestoja, za katere je to že po definiciji edini način izračunavanja. Seveda pa je treba vse rezultate, vštevši samo krivuljo, kontrolirati s statističnimi testi.

No, tudi v tem primeru moramo dobljeni odsekoma analitični krivulji odreči pravico do tega, da bi bila nekakšen naravni zakon. Je le bolj ali manj uporaben in običajno ne posebno zanesljiv zapis statistično ugotovljenih dejstev, po svoje nič boljši od krivulje, povlečene na "oko" z roko.

V naslednjem sestavku bomo poskušali definirati najprej, kaj sploh so rastne funkcije, nato pa še pokazati, kakšne lastnosti naj bi imele tiste rastne funkcije, ki prikazujejo makroskopske biološke procese. Postavili bomo tudi ustrezne definicije za nekatere količine, za katere menim, da so bile doslej definirane preohlapno. Na koncu pa bomo še pokazali primer, kako lahko direktno iz podatkov, zbranih na terenu, izračunamo omenjene količine.

Večine izrekov ne bomo dokazovali, ker so dokazi ali zelo preprosti ali izpeljani v navedeni literaturi, za gozdarje pa so precej nezanimivi.

Ker sem matematik, ne bi mogel napisati tega sestavka brez obilne in ljubeznive pomoči kolegov gozdarjev, še posebno V. Puhka, za kar sem jim zelo hvaležen.

1. POJEM RASTNE FUNKCIJE

Naj bo $R = r(t)$ neka opazovana količina, ki se spreminja s časom (ali kako drugo neodvisno količino), pri čemer je r povsod definirana realna funkcija realne spremenljivke t. Za količino R postavimo naslednje predpostavke:

- količina R ne pada (r je monotono naraščajoča funkcija);
- količina R je navzdol in navzgor omejena, spodnja meja je 0 (eksistirata $\inf r(t) = 0$ in $\sup r(t) = V < \infty$);
- vsako spremembo količine R ugotovimo šele potem, ko se je že izvršila (r je z leve zvezna funkcija).

Če k temu dodamo še pogoj, da je $V = 1$, je funkcija r ravno porazdelitvena funkcija. Torej lahko definiramo:

DEFINICIJA 1. Rastna funkcija je vsaka funkcija r oblike:

$$r(t) = V.F(t)\ ,\ V \geqq 0 \tag{1}$$

kjer je F neka porazdelitvena funkcija. Število V imenujemo končna velikost dane rasti.

Obratno so torej porazdelitvene funkcije tiste rastne funkcije, katerih končna velikost je 1.

Oglejmo si nekaj osnovnih lastnosti rastnih funkcij! Najprej še enkrat zapišimo začetne predpostavke:

(T. 1) Povsod definirana realna funkcija r je rastna funkcija natanko tedaj, ko je:

(a) monotono naraščajoča,

(b) z leve zvezna,

(c) $\lim_{t \to -\infty} r(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \to \infty} r(t) = V \geqq 0 .$ (2)

Funkcija totalnega razmaha (totalne variacije) realne funkcije f je definirana takole:

$$\overset{t}{\underset{-\infty}{V}} f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \tag{3}$$

kjer gre supremum po vseh možnih delitvah

$-\infty < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Totalni razmah:

$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f = \lim_{t \to \infty} \overset{t}{\underset{-\infty}{V}} f$. Razred funkcij z omejenim totalnim razmahom označujemo z BV. Podrazred z leve zveznih funkcij z limito 0, ko gre argument v $-\infty$, pa označujemo z NBV (normalizirane funkcije iz BV).

(T. 2) Naj bo r rastna funkcija. Tedaj je: $r \in$ NBV in $r(t) = \overset{t}{\underset{-\infty}{V}} r$ (r je sama sebi funkcija totalnega razmaha). Totalni razmah: $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} r = V$ (končna velikost). Vsaka monotono naraščajoča funkcija iz NBV je rastna funkcija.

(T. 3) V vsaki točki eksistirata leva in desna limita rastne funkcije. Leva limita je enaka funkcijski vrednosti. Množica točk nezveznosti je kvečjemu števna ([7], 161).

(T. 4) Rastna funkcija r je skoraj povsod (glede na Lebesguovo mero) odvedljiva in odvod je integrabilna funkcija: $r' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ([7], 166).

(T. 5) ρ je pozitivna omejena Borelova mera natanko tedaj, ko je funkcija

$$r(t) = \rho((-\infty, t)) \tag{4}$$

rastna funkcija. Pri tem je r zvezna natanko v tistih točkah t, kjer je: $\rho(\{t\}) = 0$. V splošnem je: $\rho(\{t\}) = \lim\limits_{\tau \searrow t} r(\tau) - r(t)$. ([7], 163)

(T. 6) Naj bo f povsod definirana realna funkcija. $f \in NBV$ natanko tedaj, ko je: $f = r_1 - r_2$, kjer sta r_1 in r_2 neki rastni funkciji.

Dokaz. Naj bo $\bigvee_{-\infty}^{t} f$ funkcija totalnega razmaha funkcije $f \in NBV$ in definirajmo funkciji:

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\bigvee_{-\infty}^{t} f + f(t)\right)/2 \\ b(t) &= \left(\bigvee_{-\infty}^{t} f - f(t)\right)/2 \end{aligned} \tag{5}$$

$f = a - b$, $a(-\infty) = b(-\infty) = 0$.

a in b sta z leve zvezni funkciji, če je le f taka. Prav tako sta obe funkciji monotono naraščajoči in zato rastni. □

Seveda ta razstavitev funkcije f na dve rastni funkciji ni enolična. Ker je NBV vektorski prostor, se da gornja trditev še razširiti:

(T. 7) Rastne funkcije tvorijo v NBV generirajoč konveksni stožec.

Kot pri porazdelitvah razlikujmo med diskretnimi in nediskretnimi rastmi ter izmed slednjih odlikujmo zvezno rast.

DEFINICIJA 2. Rast je diskretna, če narašča rastna funkcija samo v skokih. Rast je zvezna, če je rastna funkcija absolutno zvezna, torej če eksistira taka funkcija p, da je $p \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ in je:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau . \tag{6}$$

Funkcijo p imenujemo prirastna funkcija.

Funkcija p je enolično določena le kot element prostora $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

(T. 8) Rastna funkcija zvezne rasti r je zvezna in celo enakomerno zvezna. $r'(t) = p(t)$ skoraj povsod (simbolično: $dr = p(t)dt$). Če je p na nekem intervalu zvezna (oziroma skoraj povsod enaka neki zvezni funkciji), je r tam zvezno odvedljiva.

(T. 9) Naj bo p prirastna funkcija neke zvezne rasti z rastno funkcijo r. Tedaj je $p(t) \geqq 0$ skoraj povsod.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = V \quad \text{(končna velikost)} \tag{7}$$

Če je $V \neq 0$, je $p(t)/V$ gostota porazdelitve, katere porazdelitvena funkcija je $r(t)/V$.

Če je p pri absolutno dovolj velikih t zvezna funkcija, velja:

$$\lim_{t \to \pm\infty} t.p(t) = 0 \tag{8}$$

DEFINICIJA 3. Naj bo r rastna funkcija s končno velikostjo $V > 0$.

(a) $Z = \inf \{t \; ; \; r(t) > 0\}$ <u>začetek rasti</u>,

$K = \sup \{t \; ; \; r(t) < 0\}$ <u>konec rasti</u>.

Rast, pri kateri eksistirata Z in K, imenujmo <u>omejena rast</u>.

(b) Naj Z eksistira. <u>Povprečni prirastek</u> je funkcija

$$\bar{p}(t) = \lim_{\tau \nearrow t} r(\tau)/(\tau - Z) \tag{9}$$

Naj K eksistira. <u>Rastni potencial</u> je funkcija

$$p^*(t) = \lim_{\tau \searrow t} (V - r(\tau))/(K - \tau) \tag{10}$$

Pri omejeni rasti naj bosta obe definiciji iz točke (b) le na intervalu $[Z, K]$, saj velja:

$$\bar{p}(Z-\tau) = p^*(K+\tau) = 0 \quad \text{in} \tag{11}$$

$$\bar{p}(K+\tau) = p^*(Z-\tau) = V/(K-Z+\tau) \; , \; \forall \tau > 0 \; , \tag{12}$$

zaradi česar izven tega intervala funkciji nista zanimivi.

Če Z ali K ne bosta eksistirala, bomo to zapisali takole: $Z = -\infty$ ali $K = \infty$.

V naslednjih petih trditvah naj pomenijo oznake isto kot v Definiciji 3.

(T.10) $Z = \max\{t\ ;\ r(t) = 0\}$, $K = \inf\{t\ ;\ r(t) = V\}$ (13)

$Z \leqq K$; pri zvezni rasti je: $Z < K$.

(T.11) $\bar{p}(t) > 0$, $\forall t > Z$; $p^*(t) > 0$, $\forall t < K$.

$\bar{p}(t) = 0$, $\forall t \leqq Z$; $p^*(t) = 0$, $\forall t \geqq K$.

$\bar{p}(\pm\infty) = p^*(\pm\infty) = 0$.

$\bar{p}(t) = r(t)/(t-Z)$, $\forall t \neq Z$. (14)

Pri omejeni rasti je: $\bar{p}(K) = p^*(Z) = V/(K-Z)$. (15)

Kvocient $D = V/(K-Z)$ imenujemo <u>končni povprečni prirastek</u>.

(T.12) $\bar{p}$ je z leve zvezna funkcija (leva limita je enaka funkcijski vrednosti). Povsod razen morda v točki Z eksistira desna limita, ki je večja ali kvečjemu enaka funkcijski vrednosti. Poleg morebitne nezveznosti v Z je množica točk nezveznosti ista kot pri funkciji r. Funkcija $\bar{p}$ je skoraj povsod odvedljiva.

(T.13) p^* je z desne zvezna funkcija. Povsod razen morda v točki K eksistira leva limita, ki je večja ali kvečjemu enaka funkcijski vrednosti. Poleg morebitne nezveznosti v K je množica točk nezveznosti ista kot pri funkciji r. Funkcija p^* je skoraj povsod odvedljiva.

Trditvi T.12 in T.13 sledita iz trditev T.3 in T.4.

(T.14) Naj bo rast zvezna. Funkcija $\bar{p}$ (oziroma p^*) je na komplementu poljubno majhne odprte okolice točke Z (oziroma K) absolutno zvezna. Skoraj povsod je:

$\bar{p}'(t) = [p(t).(t-Z) - r(t)]/(t-Z)^2$ (16)

in $p^{*\prime}(t) = [V - p(t).(K-t) - r(t)]/(K-t)^2$. (17)

2. SUBJEKTIVNI ČAS

Funkcijo $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ imenujmo progresivna funkcija, če je $r(s(t))$ rastna funkcija za vsako rastno funkcijo r. Definicijo razumimo tako, da je $r(-\infty) = 0$ in $r(\infty) = V$.

(T.15) Funkcija $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ je progresivna funkcija natanko tedaj, ko ima naslednje štiri lastnosti:

(a) je monotono naraščajoča,

(b) z leve zvezna,

(c) $\lim\limits_{t \to -\infty} s(t) = -\infty$ in (1)

(d) $\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = \infty$. (2)

Dokaz. Dokažimo najprej, da progresivna funkcija s res ima te lastnosti.

(a) Denimo, da s ni monotono naraščajoča funkcija. Tedaj eksistirata t_1 in t_2, da je $t_1 < t_2$ in $s(t_1) > s(t_2)$. Testirajmo to funkcijo na naslednji rastni funkciji:

$$r(t) = \begin{cases} 0 \ , & t \leqq a \\ 1 \ , & t > a \end{cases} \qquad a = [s(t_1) + s(t_2)]/2 \tag{3}$$

Potem velja: $r(s(t_1)) = 1$, $r(s(t_2)) = 0$, zaradi česar funkcija $r(s(t))$ ni monotono naraščajoča in s tem tudi ne rastna.

(b) Naj ne bo funkcija s v točki t_0 z leve zvezna. Prva možnost je, da eksistira $\lim\limits_{t \nearrow t_0} s(t) = a$. Ker s ni z leve zvezna, je $s(t_0) > a$ zaradi monotonega naraščanja. Testirajmo jo na rastni funkciji

$$r(t) = \begin{cases} 0 \ , & t \leqq a \\ 1 \ , & t > a \end{cases} \tag{4}$$

$r(s(t_o)) = 1 = \lim\limits_{t \nearrow t_o} r(s(t)) = r(a) = 0 \ .$

Druga možnost: $s(t) = -\infty \ , \ \forall t < t_o \ , \ s(t_o) = a > -\infty \ .$

$$r(t) = \begin{cases} 0 \ , & t \leqq a-1 \\ 1 \ , & t > a-1 \end{cases} \tag{5}$$

$r(s(t_o)) = r(a) = 1 = \lim\limits_{t \nearrow t_o} r(s(t)) = r(-\infty) = 0 \ .$

Drugih možnosti ni, ker ima naraščajoča funkcija vedno limito, razen če gre v ∞ , tedaj pa smemo smatrati funkcijo s za zvezno v tej točki.

(c) Naj bo $s(-\infty) = a > -\infty$. Testirajmo to funkcijo na primeru (5): $0 = r(s(-\infty)) = r(a) = 1$.

Točko (d) dokažemo na isti način.

Če je sedaj r(t) poljubna rastna funkcija in s(t) funkcija, ki izpolnjuje pogoje od (a) do (d), brez težav preverimo, da je r(s(t)) res rastna funkcija. Pri tem uporabimo trditev T.1 . □

Kot poseben primer omenimo, da je $r(\lambda t-\tau)$ rastna funkcija spremenljivke t za vsako rastno funkcijo r, realen τ in $\lambda > 0$.

(T.16) Bodita g in r dve rastni funkciji z lastnostima:

(a) $g(\infty) = r(\infty) = V$, (6)

(b) g je strogo naraščajoča zvezna funkcija.

Tedaj eksistira natanko ena progresivna funkcija s, da je: $r(t) = g(s(t))$. (7)

Če sta funkciji g in r poleg tega še povsod odvedljivi, je odvedljiva tudi funkcija s(t) in je:

$s'(t) = r'(t)/g'(s(t))$. (8)

Dokaz. Ker je g strogo naraščajoča funkcija, eksistira enolična, točno določena inverzna funkcija g^{-1}. Tedaj velja:

$$g^{-1}(r(t)) = g^{-1}(g(s(t))) = s(t) \,. \qquad (9)$$

Ker je funkcija g^{-1} definirana na intervalu $[0,V]$ (pri tem imamo v mislih razširjeno definicijo: $g^{-1}(0) = -\infty$, $g^{-1}(V) = \infty$), je kompozitum $g^{-1} \circ r$ povsod definiran in s tem je tudi s natanko določena funkcija.

Če je g odvedljiva funkcija, je taka tudi g^{-1}. Kompozitum dveh odvedljivih funkcij je spet odvedljiva funkcija. $s = g^{-1} \circ r$, torej je funkcija s odvedljiva. Odvajajmo enačbo $r(t) = g(s(t))$: $r'(t) = g'(s(t)).s'(t)$. □

Torej lahko sleherno rastno funkcijo izrazimo z eno samo primerno rastno funkcijo in ustrezno progresivno funkcijo. Od te rastne funkcije zahtevajmo preprostost (v topološkem smislu seveda), recimo kar analitičnost. Seveda mora biti strogo naraščajoča, njena končna velikost pa naj bo 1.

DEFINICIJA 4. Bodi dana nekonstantna rast $R = r(t)$ s končno velikostjo V. Subjektivni čas z osnovo g količine R je progresivna funkcija $S_{g,r}$, ki ustreza enačbi:

$$g(S_{g,r}(t)) = r(t)/V \,. \qquad (10)$$

Pri tem je osnova g neka strogo naraščajoča analitična porazdelitvena funkcija.

Iz izreka T.16 sledi, da ima vsaka nekonstantna rast subjektivni čas ne glede na osnovo. Velja še: $S_{g,g}(t) = t$. (11)

Pri omejeni rasti bomo subjektivni čas definirali le na intervalu $[Z,K]$.

(T.17) Naj bo r rastna funkcija s končno velikostjo V in s subjektivnim časom $S_{g,r}$. Obe funkciji imata nezveznosti in neodvedljivosti v istih točkah. Velja še:

$r(t) = 0$ natanko tedaj ko je $S_{g,r}(t) = -\infty$,

| $r(t) = V$ natanko tedaj,ko je $S_{g,r}(t) = \infty$.

Poglejmo si še dva primera osnove!

Primer 1. $g(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi}.\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\pi^2}$, (12)

$S_{g,r}(t) = \pi^2.\mathrm{tg}\, z$ za $0 \leq r(t) < V$. (13)

Pri tem je: $z = \pi[r(t)/V - 0,5]$. (14)

Primer 2. $g(t) = 0,5 + \Phi(t)$ (15)

$\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^t e^{-x^2/2}dx$ (16)

$S_{g,r}(t) = z + z^3/3! + 7z^5/5! + 127z^7/7! + 4369z^9/9! +$
$+ 233593z^{11}/11! + \ldots$ (17)

$z = \sqrt{2\pi}.[r(t)/V - 0,5]$ (18)

Vrsta konvergira za $|z| < \sqrt{\pi/2}$.

3. KONVERGENCA RASTNIH FUNKCIJ

Poglejmo si rastne funkcije s stališča funkcionalne analize. V ta namen se dogovorimo za naslednjo oznako:

$BV^o = \{ f \in BV \ ; \ f(-\infty) = 0 \}$. (1)

(T.18) BV^o je komutativna algebra brez enote. Pri tem sta adicija in multiplikacija običajno seštevanje in množenje funkcij po točkah. Če adjungiramo enoto 1, dobimo prostor BV, ki je tudi komutativna algebra. Razred NBV je podalgebra algebre BV^o.

(T.19) BV^o je normiran prostor z normo: $\|f\| = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f$. (2)

Dokaz. (a) $\|f\| = 0 \Rightarrow \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

(b) $\|\alpha.f\| = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(\alpha.f) = |\alpha|.\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f = |\alpha|.\|f\|$.

(c) $\|f + g\| = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f + g) \leq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g = \|f\| + \|g\|$. □

(T.20) BV^o je normirana algebra.

Dokaz. Definirajmo funkcije:

$$a(t) = (\overset{t}{\underset{-\infty}{V}} f + f(t))/2 , \quad b(t) = (\overset{t}{\underset{-\infty}{V}} f - f(t))/2 ; \tag{3}$$

$$c(t) = (\overset{t}{\underset{-\infty}{V}} g + g(t))/2 , \quad d(t) = (\overset{t}{\underset{-\infty}{V}} g - g(t))/2 . \tag{4}$$

Vse štiri funkcije so za $f,g \in BV^0$ monotono naraščajoče.

$f = a - b , \quad g = c - d .$

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f = \lim_{t\to\infty} (a + b) = a(\infty) + b(\infty) ; \tag{5}$$

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g = \lim_{t\to\infty} (c + d) = c(\infty) + d(\infty) . \tag{6}$$

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (f.g) = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} \left[(ac + bd) - (ad + bc)\right] \leqq$$

$$\leqq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (ac + bd) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (ad + bc) .$$

Funkciji $ac + bd$ in $ad + bc$ sta spet monotono naraščajoči, zato:

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (ac + bd) = \lim_{t\to\infty} (ac + bd) = a(\infty).c(\infty) + b(\infty).d(\infty) ,$$

enako tudi druga funkcija. Zato velja z upoštevanjem (5) in (6):

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (f.g) \leqq a(\infty).c(\infty) + b(\infty).d(\infty) + a(\infty).d(\infty) +$$

$$+ b(\infty).c(\infty) = (a(\infty) + b(\infty)).(c(\infty) + d(\infty)) =$$

$$= \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f . \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g . \tag{7}$$

Torej: $\| f.g \| \leqq \| f \| . \| g \|$. (8) □

<u>(T.21)</u> BV^0 je Banachova algebra.

<u>Dokaz.</u> Dokazati je treba, da je prostor BV^0 poln. Naj bo $\{f_n\}$ zaporedje, ki ustreza Cauchyjevemu pogoju:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : p,q > N(\varepsilon) \implies \| f_p - f_q \| < \varepsilon . \tag{9}$$

Zaporedje seveda konvergira po točkah (in celo enakomerno):

$$\| f_p - f_q \| = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (f_p - f_q) < \varepsilon \implies | f_p(t) - f_q(t) | < \varepsilon , \forall t .$$

Naj bo f limita po točkah tega zaporedja: $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

Dokažimo, da je f tedaj tudi limita v variacijskem smislu, torej da je: $\forall \delta > 0 , \exists M(\delta) \in \mathbb{N} : n > M(\delta) \implies \| f - f_n \| = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (f - f_n) < \delta$. Pa vzemimo nasprotno! Denimo, da eksistira tako število $A > 0$, da je: $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} (f - f_n) \geqq A$ za neskončno mnogo indeksov n.

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_n) = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_m + f_m - f_n) \leqq$$
$$\leqq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_m) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f_m - f_n) .$$

Ker je $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f_m - f_n)$ po (9) poljubno majhno število za dovolj velika indeksa m,n , je tedaj število $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_m)$ še vedno približno A ali kvečjemu večje. Zato velja:

$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_n) \geqq A > 0$, $\forall n > n_o$, kjer je n_o dovolj velik indeks. Označimo: $f - f_n = g_n$. Tedaj je g_n zaporedje funkcij, ki po točkah konvergira proti 0, ustreza variacijskemu Cauchyjevemu pogoju: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $p,q > N(\varepsilon) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(g_p - g_q) < \varepsilon$, in zadošča pogoju: $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g_n \geqq A > 0$ od nekega indeksa n_o dalje. Iz te zadnje trditve izhaja, da eksistira taka delitev D realne osi: $-\infty < t_o < t_1 < \ldots < t_r < \infty$, da velja: $\sum_D |g_n(t_k) - g_n(t_{k-1})| \geqq A - A/10$ (10)

za nek indeks $n > \max\{n_o, N(\varepsilon)\}$, kjer naj bo $N(\varepsilon)$ število v Cauchyjevem pogoju, ustrezajoče $\varepsilon = A/10$.

Ker zaporedje g_n konvergira po točkah, zagotovo eksistira tak člen zaporedja g_m, $m > N(\varepsilon)$, za katerega velja:

$g_m(t_k) \leqq A/(20r)$, $k = 0,1,\ldots,r$. (11)

$A/10 = \varepsilon > \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(g_n - g_m) \geqq \sum_D |g_n(t_k) - g_m(t_k) - g_n(t_{k-1}) +$
$+ g_m(t_{k-1})| \geqq \sum_D \big[|g_n(t_k) - g_n(t_{k-1})| - (|g_m(t_k)| +$
$+ |g_m(t_{k-1})|)\big] \geqq \sum_D |g_n(t_k) - g_n(t_{k-1})| - 2r.A/(20r) \geqq$
$\geqq A - A/10 - A/10 = 8A/10$ (z upoštevanjem (10) in (11)).

To protislovje dokazuje prvotno trditev, da je f tudi variacijska limita zaporedja f_n. Ker je f limita po točkah zaporedja f_n, velja: $f(-\infty) = 0$. Poleg tega pa je še: $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f =$
$= \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_n + f_n) \leqq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f - f_n) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f_n < \infty \Longrightarrow f$ BV^o. □

Direktna posledica izreka:

(T.22) Če je $\{f_n\}$ zaporedje, konvergentno v smislu norme v BV^o, je: $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f_n$. (12)

(T.23) Normirajmo BV z normo:

$$\|\alpha.1 + f\| = |\alpha| + \|f\| \quad , \ f \in BV^o \ . \tag{13}$$

BV je tedaj komutativna Banachova algebra z enoto.

Označimo z ABV množico absolutno zveznih funkcij iz BV^o.

(T.24) ABV je podalgebra normirane algebre NBV in s tem tudi BV^o.

(T.25) ABV je Banachov prostor, izometrično izomorfen prostoru $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Dokaz. Izometrični izomorfizem med prostoroma ABV in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ naj bo odvajanje. Vemo, da če je $f \in ABV$, je $f' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. f' pravzaprav ne eksistira povsod, vendar ga lahko določimo skoraj povsod, kar pa zadostuje. Operator odvajanja je torej dobro definiran na vsem ABV. Poleg tega je surjektiven, saj če je $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, je $f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$ element iz ABV in je $f' = g$ skoraj povsod ([3], 192).

Seveda je pa tudi injektiven, saj je očitno integriranje $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$ ravno inverzni operator.

$$f \in ABV \Longrightarrow \|f\| = \mathop{V}_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{t\to\infty} \mathop{V}_{-\infty}^{t} f = \lim_{t\to\infty} |\mu|((-\infty,t)) \tag{14}$$

([7], 163), kjer je $|\mu|$ totalni razmah realne Borelove mere μ, definirane z enačbo: $f(t) = \mu((-\infty,t)$. (15)

Ker lahko zapišemo: $f(t) = \int_{-\infty}^{t} f'(\tau)d\tau$, torej velja:

$$\mu((-\infty,t)) = \int_{-\infty}^{t} f'(\tau)d\tau \ . \tag{16}$$

Tedaj pa je: $|\mu|((-\infty,t)) = \int_{-\infty}^{t} |f'(\tau)|\,d\tau$, (17)

iz česar sledi: $\|f\| = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} |f'(\tau)|\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(\tau)|\,d\tau = \|f'\|_1$. Ker sta torej prostora ABV in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ izometrično izomorfna in je $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ Banachov prostor, je to tudi ABV. □

(T.26) Odvajanje $'$: $BV \to \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ je surjektiven linearni operator, ki krči slike: $\|f\|_{BV} \geq \|f'\|_1$.

Dokaz. Naj bo $f \in BV$. Vemo, da eksistira taka funkcija

$g \in NBV$, da je: $f(t) = g(t) + c$ za vse točke zveznosti funkcije f in da velja dvoje: ([7], 161):

$$f' = g' \text{ skoraj povsod }, \quad \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f \geq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g . \tag{18}$$

g pa lahko zapišemo v obliki vsote: ([7], 166):

$$g(t) = g_s(t) + \int_{-\infty}^{t} g'(\tau)d\tau , \tag{19}$$

pri čemer je g_s singularni del funkcije g, ki ni padajoča funkcija, če g ni.

Vzemimo še, da je $g = a - b$, kjer sta $a, b \in NBV$ nepadajoči funkciji, definirani kot v dokazu trditve T.6.

$$a(t) = a_s(t) + \int_{-\infty}^{t} a'(\tau)d\tau , \quad b(t) = b_s(t) + \int_{-\infty}^{t} b'(\tau)d\tau .$$

$$g' = a' - b' .$$

$$\|f\|_{BV} = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} f \geq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} g = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} a + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}} b = \lim_{t\to\infty} a(t) + \lim_{t\to\infty} b(t) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} a_s(t) + \lim_{t\to\infty} b_s(t) + \int_{-\infty}^{\infty} a'(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} b'(t)dt \geq$$
$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} [a'(t) + b'(t)]dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} |a'(t) - b'(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g'(t)|dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt = \|f'\|_1 . \qquad \square$$

(T.27) NBV je Banachova algebra.

Dokaz. Dokazati je treba le, da je prostor NBV poln. Naj bo $\{f_n\}$ Cauchyjevo zaporedje v NBV, ki v BV^o konvergira k f. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o$: $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/2$ za n, ki je večji ali enak n_o. Naj bo še $t_o \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{O}(t_o)$ taka okolica, da je:

$|f_{n_o}(t) - f_{n_o}(t_o)| \leq \varepsilon/2$, $\forall t \in \mathcal{O}(t_o)$, $t \leq t_o$, ker je funkcija f_{n_o} z leve zvezna. Tedaj pa za ista t in t_o velja:

$$|f(t) - f(t_o)| = |[f(t) - f_{n_o}(t)] + [f_{n_o}(t) - f_{n_o}(t_o)]| \leq$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

iz česar sledi, da je tudi f z leve zvezna funkcija. $\square$

Trditve T.19 - T.21 in T.25 - T.27 sem dokazoval, čeprav so ti rezultati poznani; to pa zato, ker nisem našel primernih dokazov v literaturi.

Sedaj pa zberimo vse povedano v naslednjem izreku.

(T.28) Limita zaporedja (absolutno zveznih) rastnih funkcij je v topologiji norme $\|f\| = \bigvee_{-\infty}^{\infty} f$ spet (absolutno zvezna) rastna funkcija.

Ta izrek pravzaprav ne pove zelo veliko, saj je konvergenca po normi (2) strožja celo od enakomerne konvergence. Zato dodajmo še en izrek.

(T.29) Limita enakomerno konvergentnega zaporedja (na nekem intervalu zveznih) rastnih funkcij je spet (na tem intervalu zvezna) rastna funkcija.

Pri tem je zaporedje $\{f_n\}$ enakomerno konvergentno, če za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak indeks n_o, da je: $|f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$ za vsak t. Izrek temelji na dejstvih, da je limita zaporedja nepadajočih funkcij nepadajoča in da je enakomerna limita zaporedja (z ene strani) zveznih funkcij prav taka funkcija ([7], 69).

Kot smo videli, smo v zvezi z rastnimi funkcijami srečali kar štiri Banachove algebre. Ta matematična lepota nam obljublja precejšnjo pestrost posledic naše definicije rastnih funkcij. Po drugi strani pa je ta definicija še vedno tako široka, da lahko z veliko gotovostjo trdimo, da bo ustrezala praktično vsem pojavom te vrste, ki jih utegnemo srečati v makroskopskem svetu.

V biologiji, ekonomiji in tudi drugih vedah večkrat opazimo, da vsak pojav spremljata dva tipa količin: prve dogajanje pospešujejo, druge ga pa zavirajo. Če označimo z r_1 vsoto učinkov prvega tipa količin in z r_2 vsoto učinkov drugega tipa, sta r_1 in r_2 v dovolj majhnem intervalu neodvisne spremenljivke (običajno časa) rastni funkciji. Količina, ki opisuje dogajanje, je tedaj ravno razlika $r_1 - r_2$. Iz trditve T.6 pa tedaj sledi, da bomo iskali funkcije za opis omenjenih pojavov v razredu NBV ali kvečjemu v razredu BV.

4. BIOLOŠKA RAST

Poskusimo sedaj definirati rastne funkcije, ki naj ponazarjajo rasti bioloških količin. Zahtevali bomo absolutno zveznost rastnih funkcij, saj je vsak prirastek vsota infinitezimalno majhnih prirastkov in je zato smiselno govoriti o prirastni funkciji. Ker so prirastki končni in niso trenutni, je prirastna funkcija omejena. Nihanj in skokov v priraščanju je le končno mnogo in smemo privzeti, da ima prirastna funkcija omejen totalni razmah, kar se sklada tudi z domnevami, omenjenimi na koncu prejšnjega razdelka. Prirastna funkcija je element prostora $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, zato moramo upoštevati, kadar govorimo o njenih lastnostih, da obravnavamo le en primerek iz razreda, ki ga ta funkcija predstavlja.

DEFINICIJA 5. Naj bo $R = r(t)$ nekonstantna zvezna rast s pogojem: $r' \in BV$ (1)

(po korekciji na množici z mero 0). Prirastno funkcijo definirajmo sedaj bolj določeno:

$$p(t) = [\lim_{\tau \nearrow t} r'(\tau) + \lim_{\tau \searrow t} r'(\tau)]/2 . \tag{2}$$

Izraz $v(t) = \lim_{\tau \searrow t} p(\tau)/V.100\%$, (3)

kjer je V končna velikost opazovane količine R, vzemimo kot mero za vitalnost (glede na količino R, ne pa glede na cel objekt opazovanja). Odvod

$$q(t) = p'(t) \tag{4}$$

imenujmo rastni pospešek.

Pri omejeni rasti naj bodo te funkcije definirane le na intervalu $[Z,K]$.

Najprej dokažimo naslednjo lemo:

(T.30) Naj bo $f \in BV \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Tedaj je f po Riemannu integrabilna in celo absolutno integrabilna funkcija.

Dokaz. Funkcija f ima omejen totalni razmah na vsakem končnem intervalu in se zato da povsod izraziti kot razlika dveh omejenih monotono naraščajočih funkcij: $f = f_1 - f_2$. Vsaka omejena monotona funkcija na zaprtem intervalu je po Riemannu absolutno integrabilna ([3], 37, 163), torej eksistirata Riemannova integrala $I_1 = \int_a^b |f_1(t)|dt$ in $I_2 = \int_a^b |f_2(t)|dt$ in zato eksistira tudi Riemannov integral $\int_a^b |f(t)|dt \leq I_1 + I_2$ za vsak interval $[a,b]$. Nato definiramo posplošeni integral: $\int_{-\infty}^t |f(\tau)|d\tau = \lim_{c\to-\infty} \int_c^t |f(\tau)|d\tau$. Integral pod limitnim znakom eksistira za vsak c, torej se moramo prepričati le še, da eksistira limita. Ta eksistira, če le lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak M, da je: $\int_b^{b'} |f(t)|dt < \varepsilon$ za $b, b' \geqq M$.

Množica $C_c(\mathbb{R})$ zveznih funkcij s kompaktnimi nosilci je gosta v prostoru $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ glede na običajno metriko ([7], 68), zato eksistira zaporedje $\{g_n\} \subset C_c(\mathbb{R})$, katerega limita v tej metriki je funkcija $|f(t)|$. Za vsak $\varepsilon_1 > 0$ torej eksistira tak N, da je: $\int_b^{b'} |g_n(t) - |f(t)||dt \leqq$ $\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(t) - |f(t)||dt \leqq \varepsilon_1$ za vsak $n \geqq N$. Funkcija $g_n(t)$ je seveda pri tem po Riemannu integrabilna in je zato prvi integral Riemannov. Velja še: za vsak $\varepsilon_2 > 0$ eksistira tak M', da je: $\left|\int_b^{b'} g_n(t)dt\right| < \varepsilon_2$, za $b, b' \geqq M'$. Sedaj pa lahko ocenimo: $\int_b^{b'} |f(t)|dt = \int_b^{b'} [g_n(t) + (|f(t)| - g_n(t))]dt \leqq$

$$\leq \left|\int_b^{b'} g_n(t)dt\right| + \left|\int_b^{b'} (|f(t)| - g_n(t))dt\right| \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \quad (\text{za } n > N).$$

Če vzamemo: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$, pa še: $M = M'$, je s tem trditev že dokazana.

Na enak način pomaknemo še zgornjo mejo v neskončnost. Razumljivo pa je, da če je funkcija absolutno integrabilna, je tudi integrabilna. □

V obratni smeri izrek ne velja. Primer:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , & t \in J \\ 0 \ , & \text{drugod} \end{cases} \qquad \text{Pri tem je: } J = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n-2^{-n}, \ n+2^{-n}]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2.2^{-n} = 2 \ . \quad \text{Toda: } \bigvee_{-\infty}^{\infty} f = \infty \ .$$

V naslednjih izrekih naj bo $R = r(t)$ zvezna rast s pogojem $r' \in BV$, Z, K, $\bar{p}$ in p^* količine iz definicije 3., če seveda sploh eksistirajo, p in q pa funkciji iz definicije 5.

(T.31) r je odvedljiva funkcija povsod razen v točkah nezveznosti funkcije p, ki pa jih je največ števno mnogo.

Velja: $r(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau$ (integral je Riemannov). (5)

Funkcija p je s funkcijo r natanko določena. p je omejena funkcija in $p(t) \geqq 0$, $\forall t$. p je skoraj povsod odvedljiva funkcija in velja: $q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

(T.32) $\bar{p}$ (oziroma p^*), če seveda obstaja, je omejena funkcija, zvezna povsod razen morda v točki Z (oziroma K), kjer je nezvezna podobno kot funkcija p:

$$\lim_{\tau \searrow Z} \bar{p}(\tau) = \lim_{\tau \searrow Z} p(\tau) \ , \quad \lim_{\tau \nearrow K} p^*(\tau) = \lim_{\tau \nearrow K} p(\tau) \ . \qquad (6)$$

Zato sta funkciji $\bar{p}$ in p^* iz BV.

(T.33) Funkcija $\bar{p}$ (oziroma p^*) je odvedljiva povsod razen v točkah nezveznosti funkcije p in morda v Z (oziroma K). V točkah odvedljivosti velja formula

$$\bar{p}'(t) = \frac{p(t) - \bar{p}(t)}{t - Z} \quad \text{oziroma} \quad p^{*\prime}(t) = \frac{p^*(t) - p(t)}{K - t} . (7)$$

(T.34) V točkah zveznosti funkcije p veljata naslednji logični ekvivalenci:

$\bar{p}(t)$ ima stacionarno točko $\Longleftrightarrow$ $\bar{p}(t) = p(t)$;

$p^*(t)$ ima stacionarno točko $\Longleftrightarrow$ $p^*(t) = p(t)$.

Izven točke Z oziroma K velja za $\bar{p}$ oziroma p^*:

$\bar{p}(t)$ strogo narašča $\Longleftrightarrow$ $\bar{p}(t) < p(t)$;

$\bar{p}(t)$ strogo pada $\Longleftrightarrow$ $\bar{p}(t) > p(t)$;

$p^*(t)$ strogo narašča $\Longleftrightarrow$ $p^*(t) > p(t)$;

$p^*(t)$ strogo pada $\Longleftrightarrow$ $p^*(t) < p(t)$;

$\bar{p}(t)$ ima lokalni minimum (oz. maksimum) $\Longleftrightarrow$ razlika $\bar{p}(t) - p(t)$ spremeni predznak od + na − (oz. od − na +) ;

$p^*(t)$ ima lokalni minimum (oz. maksimum) $\Longleftrightarrow$ razlika $p^*(t) - p(t)$ spremeni predznak od − na + (oz. od + na −) .

Za točke zveznosti funkcije p velja izrek zaradi formul (7), izven teh točk pa zaradi zveznosti funkcij $\bar{p}$ in p^*.

(T.35) V točkah, kjer je $\bar{p}(t) = p(t)$ (oz. $p^*(t) = p(t)$), gre tangenta na krivuljo r(t) skozi točko (Z,O) (oz. (K,V)). Krivulji $\bar{p} = \bar{p}(t)$ in $p^* = p^*(t)$ (če le obe hkrati eksistirata) se sekata na intervalu (Z,K) natanko v tistih točkah, kjer se sekata krivulja $r = r(t)$ in premica skozi točki (Z O) in (K,V).

Še nekaj smemo brez dvoma zahtevati od biološke rasti, namreč da ima začetek in konec. Dodajmo torej še ta pogoj in definirajmo:

DEFINICIJA 6. Nekonstantna zvezna rast $R = r(t)$ je biološka, če je omejena in je izpolnjen pogoj: $r' \in BV$ (po korekciji na množici z mero O).

Za tako rast definirajmo na intervalu $[Z,K]$:

$\{t\ ;\ \bar{p}(t) \leqq p(t)\ \&\ p^*(t) > p(t)\}$ <u>inicialna faza rasti</u>;

$\{t\ ;\ \bar{p}(t) \leqq p(t)\ \&\ p^*(t) \leqq p(t)\}$ <u>optimalna faza</u>;

$\{t\ ;\ \bar{p}(t) > p(t)\ \&\ p^*(t) \leqq p(t)\}$ <u>terminalna faza</u>;

$\{t\ ;\ \bar{p}(t) > p(t)\ \&\ p^*(t) > p(t)\}$ <u>stacionarna faza</u>;

Oznake v tej definiciji naj pomenijo isto kot že prej. Seveda ni nujno, da določena faza sploh eksistira (da ni prazna množica).

V naslednjih izrekih naj bo rast biološka.

<u>(T.36)</u> Z je točka inicialne ali optimalne faze, K pa točka optimalne ali terminalne faze. Če stacionarne faze ni, je funkcija p na (Z,K) strogo pozitivna in je zato tam rastna funkcija strogo naraščajoča.

<u>(T.37)</u> Na intervalu (Z,K) velja, da med poljubnima točkama inicialne in terminalne faze vedno leži vsaj ena točka optimalne ali stacionarne faze.

<u>Dokaz.</u> Vzemimo nasprotno, da eksistirata točki inicialne in terminalne faze, med katerima ni nobene točke drugih dveh faz. Interval med njima razdelimo na pol in izberimo tisto polovico, ki ima krajišči v različnih fazah. Ta postopek nadaljujmo, tako da dobimo zaporedje vloženih intervalov, katerih presek je točka, ki je bodisi v inicialni bodisi v terminalni fazi in v katere še tako majhni okolici je vsaj ena točka druge faze.

Denimo, da je ta točka, označimo jo s t_0, v inicialni fazi. Tedaj velja: $\bar{p}(t_0) \leqq p(t_0)$, $p^*(t_0) > p(t_0)$. (8)

Obenem pa lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta \neq 0$, da je $|\delta| < \varepsilon$ in $\bar{p}(t_0 + \delta) > p(t_0 + \delta)$, $p^*(t_0 + \delta) \leqq p(t_0 + \delta)$, torej da je $t_o + \delta$ v terminalni fazi. Naj bo $\varepsilon_n = 1/n$ in k vsakemu n poiščimo ustrezni δ_n. $\{p^*(t_o + \delta_n) - p(t_o + \delta_n)\}$ je zaporedje nepozitivnih števil z limito

$$p^*(t_o) - \lim_{n\to\infty} p(t_o + \delta_n) \leq 0 , \tag{9}$$

$\{\bar{p}(t_o + \delta_n) - p(t_o + \delta_n)\}$ pa zaporedje pozitivnih števil z limito: $\bar{p}(t_o) - \lim_{n\to\infty} p(t_o + \delta_n) \geq 0$. (10)

Iz (9) sledi: $p(t_o) < p^*(t_o) \leq \lim_{n\to\infty} p(t_o + \delta_n)$, iz (10) pa: $p(t_o) \geq \bar{p}(t_o) \geq \lim_{n\to\infty} p(t_o + \delta_n)$. To pa je protislovje.

Analogno dokažemo, da t_o tudi ne more biti točka terminalne faze. □

Za poznejšo uporabo navedimo tukaj nekaj primerov biološke rasti.

Primer 3. $p(t) = t.(1 + \sin t^2)$

$Z = 0 \leq t \leq \sqrt{7\pi/2} = K$

Primer 4.

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 = Z \text{ in } t = 1 \\ 2 & , 0 < t < 1 \\ t - 1 & , 1 < t < \sqrt{5} \\ \sqrt{5} - 1 & , \sqrt{5} \leq t < 3 \\ (\sqrt{5} - 1)/2 & , t = 3 = K \end{cases}$$

Primer 5.

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 = Z \text{ in } 1 \leq t < 2 \\ 2 - t & , 0 < t < 1 \\ 0{,}5 & , t = 2 = K \end{cases}$$

(T.38) V točki Z (oz. K) je funkcija p lahko zvezna. Če je, je to točka inicialne (oz. terminalne) faze.

Dokaz. Naj bo p v Z zvezna. Iz trditve T.32 sledi:

$p(Z) = 0 = \bar{p}(Z) \geq \bar{p}(Z)$, $p^*(Z) = V/(K-Z) > 0 = p(Z)$.

Analogno dokažemo terminalnost točke K.

Eksistenco funkcije p, zvezne v Z in K, pa podaja Primer 3. □

Označimo posamezne faze z njihovimi začetnicami: I, O, T in S.

(T.39) Med fazami so dovoljeni vsi stiki razen TI. Stiki, v katerih je funkcija p lahko zvezna, pa so vsi razen IT.

Dokaz. Po T.36 stik TI na more biti niti v Z niti v K, torej je nujno na intervalu (Z,K). Tam pa po T.37 ne more biti.
Primer 3. ima zvezne stike IO, OI, IS, SI in OT .
Rast p(K - t) iz istega primera ima še zvezne stike TS, ST in TO.
Primer 4. ima zvezen stik SO, rast p(K-t) iz istega primera pa še preostali stik OS.

Po T.37 stik IT ne more biti na intervalu (Z,K). Prva možnost je, da je v inicialni fazi točka Z, nadaljne točke pa že v terminalni fazi. Tam pa velja: $p^*(t) \leq p(t)$. Ker pa je $p^*(Z) = V/(K-Z)$ (T.11), je nezveznost tu. Podobno je, če je stik IT v točki K. Da pa ta stik sploh eksistira, kaže Primer 5. □

(T.40) Vsaka faza je bodisi prazna množica bodisi končna ali števna unija disjunktnih intervalov.

Pri tem razumemo kot interval tudi posamezno točko.

Dokaz. Funkciji $p - \bar{p}$ in $p - p^*$ sta iz BV, zato imata kvečjemu števno mnogo sprememb predznaka. Zato je tudi stikov med fazami kvečjemu števno mnogo, kar že dokazuje izrek. □

(T.41) Inicialna, stacionarna in terminalna faza si nikoli ne sledijo v tem vrstnem redu.

Dokaz. Naj bo I (oz. S oz. T) interval inicialne (oz. stacionarne oz. terminalne) faze. Na I velja: $\bar{p}(t) \leq p(t)$, na $S \cup T$ pa $\bar{p}$ pada (po T.34). Torej eksistira točka t_0, da je:

$p(t_0) \geq \sup \bar{p}(t)$ (supremum na $I \cup S \cup T$). Po drugi strani pa p^* na $I \cup S$ narašča, na T pa je: $p^*(t) \leq p(t)$. Torej eksistira $t_1 \in T$, da je: $p(t_1) \geq \sup p^*(t)$ (supremum na isti množici). Napišimo te trditve:

$\sup \bar{p}(t) \leq p(t_0) < p^*(t_0) \leq \sup p^*(t) \leq p(t_1) < \bar{p}(t_1)$.

To pa je protislovje in izrek je dokazan. □

Zapišimo posledico izrekov T.37 in T.41.

(T.42) Na intervalu (Z,K) je med dvema točkama inicialne in terminalne faze (v tem vrstnem redu!) vsaj ena točka optimalne faze.

(T.43) Naj si faze na danem intervalu sledijo v temle vrstnem redu: OST. Tedaj je funkcija p tam nezvezna.

Dokaz. Na prehodu iz optimalne v stacionarno fazo se funkcije p, $\bar{p}$ in p^* sekajo, nato pa p^* strogo raste, $\bar{p}$ pa strogo pada. Prav zaradi strogih ocen ne vsebuje ta del stacionarne faze samo ene točke. Pri prehodu ST bo torej veljalo: $\bar{p}(t) < p^*(t)$, kar pa ni res, saj bi moralo biti ravno obratno. □

(T.44) Naj si faze na danem intervalu sledijo v naslednjem vrstnem redu: ISO. Tedaj je funkcija p tam nezvezna.

Dokaz. Denimo, da je p zvezna na tem intervalu. Funkcija $p_1(t) = p(K-t)$ je seveda tudi zvezna, vsebuje pa zaporedje OST, kar pa po T.43 ni mogoče. □

(T.45) Naj si faze na danem intervalu sledijo v naslednjem vrstnem redu: OSO. Tedaj je funkcija p tam nezvezna.

Dokaz. Na prehodu OS so p, $\bar{p}$ in p^* enake, pozneje pa $\bar{p}$ pada in p^* narašča, tako da velja: $p^*(t) > \bar{p}(t) > p(t)$, pri čemer se razlika $p^* - \bar{p}$ v desno povečuje. Toda na prehodu SO naj bi bile funkcije spet enake, kar kaže na protislovje. □

Upoštevajmo vse tri zadnje trditve, pa lahko povemo naslednji izrek:

(T.46) Bodita I in T intervala inicialne oz. terminalne faze (v tem vrstnem redu!), med njima naj ne bo nobene točke teh dveh faz več, funkcija p pa naj bo na I, T in povsod vmes zvezna. Tedaj pripada ves vmesni interval optimalni fazi.

Še nekaj besed o elastičnosti biološke rastne funkcije! Koeficient elastičnosti neke funkcije $y = f(x)$ je definiran takole: $Ey/Ex = (x/y).(dy/dx)$. (11)

Zanimala nas bo elastičnost rastne funkcije r na intervalu (Z,K). Elastičnost je odvisna od lege izhodišča $(0,0)$, zato vzemimo: $Z = 0$. Tedaj velja: $Er/Et = p(t)/\overline{p}(t)$, (12)

toda le kjer je p zvezna.

(T.47) Naj bo rast biološka, $Z = 0$, funkcija p zvezna na $(0,K)$ in t točka iz tega intervala.

a) $r(t)$ je elastična $(1 < Er/Et < \infty)$ $\Longleftrightarrow$ $p(t) > \overline{p}(t)$;

b) $r(t)$ je na meji elastičnosti $(Er/Et = 1)$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $p(t) = \overline{p}(t)$;

c) $r(t)$ je neelastična $(0 \leq Er/Et < 1)$ $\Longleftrightarrow$ $p(t) <$ $< \overline{p}(t)$;

d) $r(t)$ je elastična ali na meji elastičnosti $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ t je v inicialni ali optimalni fazi ;

e) $r(t)$ je neelastična $\Longleftrightarrow$ t je v terminalni ali stacionarni fazi ;

f) $\lim_{t \searrow 0} Er/Et = 1$, $\lim_{t \nearrow K} Er/Et = \frac{K}{V}.\lim_{t \nearrow K} p(t)$. (13)

V primeru, da je $Z \neq 0$, bomo elastičnost definirali takole:

$Er/Et = p(t - Z)/\overline{p}(t - Z)$. (14)

Primerno apliciran bo izrek T.47 še vedno veljal.

5. KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

Večkrat obravnavamo količine, katerih rast vsaj na nekem intervalu precej pravilno niha. Poznavanje osnovne periode takšnega nihanja je seveda zelo pomembno za diskusijo dane količine. Nalogo, kako iz dane rastne funkcije dobiti take osnovne periode in intenzivnosti pripadajočih nihanj, poskusimo rešiti s Fourierjevo analizo.

Prav tako kot v teoriji verjetnosti definirajmo karakteristično funkcijo dane rasti.

DEFINICIJA 7. Naj bo $R = r(t)$ rastna funkcija količine R.

Karakteristična funkcija te rasti je

$$\hat{p}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dr(t) . \tag{1}$$

Integral v definiciji je Stieltjesov.

Iz verjetnostne teorije vemo, da veljajo naslednje trditve.

(T.48) Naj bo $\hat{p}(x)$ karakteristična funkcija rasti $r(t)$ s končno velikostjo V.

a) $\hat{p}$ eksistira (za vsako rast!).

b) Definicijsko območje $\hat{p}$ je cela realna os.

c) $|\hat{p}(x)| \leq V.(2\pi)^{-1/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\hat{p}(0) = V.(2\pi)^{-1/2}$. (2)

d) $\hat{p}$ je na $\mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija.

e) $\hat{p}(-x) = \overline{\hat{p}(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3)

f) $\hat{p}$ je realna funkcija natanko tedaj, ko je $r - V/2$ liha funkcija.

g) r je s $\hat{p}$ natanko določena. Če je r zvezna v točkah a in b, a < b , velja:

$$r(b) - r(a) = i.(2\pi)^{-1/2}.\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ibx} - e^{-iax}}{x} \hat{p}(x)dx$$

(integral je Riemannov).

Dokaze najdemo v [2], 216, 217, 221 - 226.

(T.49) Naj bo r rastna funkcija zvezne rasti, p prirastna funkcija in $\hat{p}$ karakteristična funkcija. Velja:

$$\hat{p}(x) = (2\pi)^{-1/2}. \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(t)dt \qquad (5)$$

(Če gre za biološko rast, je integral Riemannov).

Velja še: $\lim_{x\to\pm\infty} \hat{p}(x) = 0$. (6)

Dokaz najdemo v [10], 108, 109.

(T.50) Če je $\hat{p} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$, je rast zvezna (funkcija r je absolutno zvezna) in je:

$$p(t) = (2\pi)^{-1/2}. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\hat{p}(x)dx \qquad (7)$$

skoraj povsod, pri čemer je integral na desni Riemannov in predstavlja zvezno funkcijo spremenljivke t, zaradi česar smemo vzeti, da je p zvezna funkcija.

Dokaz je v [7], 186, 187, in v [2], 226 - 228.

Izrek T.50 je sicer zelo eleganten, vendar je veljaven le v zelo specialnem primeru in vsebuje težko preverljiv pogoj. Zato navedimo precej splošnejši izrek!

(T.51) Naj bo p prirastna funkcija zvezne rasti in $\hat{p}$ ustrezna karakteristična funkcija. Tedaj velja za skoraj vsak $t \in \mathbb{R}$:

$$p(t) = (2\pi)^{-1/2}.\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} (1 - \frac{|x|}{c}).e^{-ixt}.\hat{p}(x)dx \qquad (8)$$

Če je $p \in BV$, velja celo za vsak $t \in \mathbb{R}$:

$$p(t) = (2\pi)^{-1/2}.\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} e^{-ixt}.\hat{p}(x)dx \qquad (9)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx.\int_{-\infty}^{\omega} p(z).\cos x(z-t)dz \qquad (10)$$

$$= (2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty |\hat{p}(x)|.\cos x(t-\frac{\varphi(x)}{x})dx\ . \qquad (11)$$

($\varphi(x)$ je pri tem smerni kot kompleksnega števila $\hat{p}(x)$).

Dokaz (8) in (9) je v [11], 12-16. Vsi integrali v izreku so Riemannovi, posebej integral v (10) zaradi leme T.30. V (9) smo upoštevali, da je $p(t) = \frac{1}{2}[\lim_{\tau \nearrow t} p(\tau) + \lim_{\tau \searrow t} p(\tau)]$ po definiciji 5. Formuli (10) in (11) sledita iz (9) z upoštevanjem Eulerjeve formule, formule (5) ter sodosti oziroma lihosti kosinusa in sinusa, pa še formule (3), iz katere sledi, da sta $|\hat{p}(x)|$ in $\varphi(x)/x$ sodi funkciji.

Formula (10) je ena od oblik Fourierjevega izreka.

Za biološko rast bomo torej uporabljali formule (9), (10) in (11) takšne, kakršne so, le notranji integral v (10) bo imel končni meji - od Z do K. Vendar pa le velja za biološko rast nekaj več kot za poljubno rast s pogojem $p \in BV$. Ker je vsaka funkcija iz BV omejena, je pri biološki rasti $p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Od tod pa sledi Parsevalova enačba in $\hat{p} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Kako pa je z zveznostjo Fourierjeve transformacije?

(T.52) Če konvergira zaporedje rastnih funkcij r_n po točkah k rastni funkciji r, kjer le je ta zvezna, konvergira zaporedje njihovih karakterističnih funkcij enakomerno na vsakem končnem intervalu k ustrezni karakteristični funkciji.

Če konvergira zaporedje prirastnih funkcij p_n nekih zveznih rasti po normi prostora $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ k funkciji p (ki je očitno spet prirastna funkcija!), velja isti zaključek.

Dokaz najdemo v [2], 231-233 in v [10], 109, 110.

Poglejmo formulo (11) z očmi fizika! Funkcijo p smemo imeti tedaj za vsoto valovanj, ki imajo amplitude

$A(x) = (2/\pi)^{1/2}|\hat{p}(x)|$, $A(0) = V/\pi$, (12)

valovne dolžine $2\pi/x = T(x)$ (13)

in fazne premike $\Delta(x) = \varphi(x)/x$ (v desno). (14)

Če ima $|\hat{p}(x)|$ v točki x_0 izrazit maksimum, lahko zato sklepamo, da je rast opazno periodična s periodo $2\pi/x_0$ in ima najmočnejše priraščanje približno v točkah $[\varphi(x_0)+2k\pi]/x_0$, najšibkejše pa približno v točkah $[\varphi(x_0)+(2k+1)\pi]/x_0$.

Če je amplituda $A(x)= 0$, $\Delta(x)$ ni definiran. Prav tako ni definiran $\Delta(0)$. Dà pa se v nekaterih primerih (na primer pri omejeni rasti) izračunati:

$$\lim_{x \searrow 0} \Delta(x) = \frac{1}{V} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t.p(t)dt \ . \qquad (15)$$

Še dva primera prirastnih funkcij iz BV za konec!

Primer 6. Funkcija p naj izpolnjuje Dirichletov pogoj: odsekoma (to je na končno mnogo intervalih) naj bo zvezna in monotona. Tedaj je $p \in BV$. Vsaka faza take rasti je končna unija disjunktnih intervalov, če le ni $\emptyset$.

Primer 7. $p(t) = V.(2\pi)^{-1/2}.e^{-t^2/2}$. $\hat{p} = p$, $\Delta = 0$,
$A(x) = \frac{V}{\pi}.e^{-x^2/2}$ z edinim maksimumom pri $x = 0$.

6. PRIMER: DEBELINSKA RAST DREVESA

Pozno jeseni ali pozimi smo podrli zelo staro, praktično že odmrlo drevo in prešteli ter izmerili branike na čim nižjem prerezu. Nizek prerez vzamemo zato, da ne zgubimo podatkov o rani mladosti rastline; staro drevo pa zato, da lahko opazujemo cel potek njenega življenja. Rezultat meritev je tabela širin branik od sredine navzven

Podatki.

Številka letnice	$1, 2, \dots, n$
Širina branike	$p_1, p_2, \dots, p_n$

Predpostavka 1. Rast je biološka.

Poteka debelinske rasti v teku enega leta ne poznamo. Od prirastne funkcije imamo torej le naslednji podatek:

$$p_k = \int_{k-1}^{k} p(t)dt = r(k) - r(k-1) \; . \qquad (1)$$

Iz tega sledi, da bodo rezultati, ki jih nameravamo dobiti, smiselni le za obdobja, ki trajajo celo število let.

Predpostavka 2. Najmanjša smiselna časovna enota je leto.

Brez oklevanja lahko napišemo začetek in konec rasti:

Rezultat 1. $Z = 0 \; , \; K = n \; .$ (2)

Vse ostale rezultate bomo prikazovali le na intervalu $[0,n]$. Najprej si oglejmo rastno funkcijo r in končno velikost $V = r(K)$.

$$r(k) = \int_0^k p(t)dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{i-1}^{i} p(t)dt = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Rezultat 2. $r(k) = \sum_{i=1}^{k} p_i \; , \; k=1,2,\dots,n$ (3)

$$r(0) = 0 \; , \quad V = r(n) \qquad (4),(5)$$

Vrednosti $r(k)$ so eksaktne, vkolikor privzamemo meritve za točne.

Prirastna funkcija p je odvod rastne funkcije. Vendar ne bomo rastne funkcije numerično odvajali, ampak se spomnimo formule (1): p_k je povprečni prirastek v k-tem letu. Zato bomo zapisali:

Rezultat 3. $p(k - 0,5) = p_k \; , \quad k=1,2,\dots,n$ (6)

Te vrednosti seveda niso več eksaktne. S časom $k - 0{,}5$ smo formalno sicer kršili Predpostavko 2., vsebinsko pa prav nič.

Vitalnost v, ki jo kaže nek prirastek p_k, ima drevo že v začetku k-tega leta.

Rezultat 4. $v(k) = 100p_{k+1}/r(n)$, $k=0,1,\dots,n-1$; (7)

$v(n) = 0$. (8)

Formule (8) ne bi smeli napisati, če ne bi veljala že a priori in bi jo morali šele računati.

Rastni pospešek q je odvod prirastne funkcije. Zaradi netočnosti funkcije p in slabe pogojenosti numeričnega odvajanja sploh bo rastni pospešek zelo nenatančen in nima smisla pretiravati z natančnostjo formul za numerično odvajanje. Ker pa je q pravzaprav tudi neke vrste mera za vitalnost ali točneje za njeno spreminjanje, ga tabelirajmo podobno kot vitalnost.

Rezultat 5. $q(k) = p_{k+1} - p_k$, $k=1,2,\dots,n-1$. (9)

Subjektivni čas naj ima za osnovo funkcijo g iz Primera 1. (2. razdelek), ker je računanje z njo zelo preprosto.

Rezultat 6. $S_{g,r}(k) = \pi^2.\mathrm{tg}\, z_k$, (10)

$z_k = \pi[r(k)/r(n) - 0{,}5]$, $k=1,2,\dots,n-1$; (11)

$S_{g,r}(0) = -\infty$; $S_{g,r}(n) = \infty$. (12)

Vse vrednosti so popolnoma točne.

Povprečni prirastek: $\bar{p}(t) = r(t)/t$ za $t \neq 0$. Končni povprečni prirastek D je vrednost funkcije $\bar{p}$ na koncu rasti in ima pomen povprečne debeline letnice. Potemtakem velja čisto natančno (zaradi (3)):

Rezultat 7. $\bar{p}(k) = r(k)/k$, $k=1,2,\dots,n$ (13)

$\bar{p}(0) = 0$; $D = r(n)/n$. (14),(15)

Rastni potencial: $p^*(t) = (V - r(t))/(K - t)$ (16)

za $t \neq K$. Spet torej velja eksaktno (po uporabi (2), (3) in (5)):

<u>Rezultat 8.</u> $p^*(k) = [r(n) - r(k)]/(n - k)$, $k=0,1,\ldots,n-1$; (17)

$$p^*(n) = 0 \; . \qquad (18)$$

Glede <u>faz</u> najprej pribijmo, da bo v posamezno fazo zaradi Predpostavke 2. sodilo vsako leto celo, čeprav dejansko ni tako. Vresnici je nekako tako, da se leto razdeli na zaporedje faz IOTS, česar pa z našimi podatki ni mogoče ugotavljati. Ker je izračunana vrednost prirastne funkcije v resnici povprečje prirastne funkcije v danem letu, moramo tudi povprečni prirastek in rastni potencial gledati na isti način. Uvedli bomo torej dve seriji novih količin:

$$\bar{p}_k = \int_{k-1}^{k} \bar{p}(t)dt \quad \text{in} \quad p_k^* = \int_{k-1}^{k} p^*(t)dt \quad , \; k=1,2,\ldots,n. \qquad (19)$$

Oba integrala lahko seveda ocenimo le v grobem, najbolj primerno bi bilo takole:

$$\bar{p}_k = [\bar{p}(k-1) + \bar{p}(k)]/2 \quad \text{in} \quad p_k^* = [p^*(k-1) + p^*(k)]/2 \; . \qquad (20)$$

Vstavimo v obe formuli (13), (17) in (3), definirajmo še:

$$a_k = p_k - \bar{p}_k \quad \text{in} \quad b_k = p_k - p_k \; , \qquad (21)$$

pa dobimo:

<u>Rezultat 9.</u> $a_k \geqq 0$ & $b_k < 0$ inicialna

$a_k \geqq 0$ & $b_k \geqq 0$ optimalna

$a_k < 0$ & $b_k \geqq 0$ terminalna

$a_k < 0$ & $b_k < 0$ stacionarna

faza na intervalu $[k-1,k]$, $k=1,2,\ldots,n$. Pri tem je:

$$a_1 = p_1/2 \; ; \qquad (22)$$

$$a_k = \frac{(2k - 1).[k.p_k - r(k)]}{2k.(k - 1)} \; , \; k=2,3,\ldots,n \; ; \qquad (23)$$

$$b_k = \frac{(2n - 2k + 1).[(n-k).p_k - r(n) + r(k)]}{2.(n - k).(n - k + 1)} \; , \qquad (24)$$

$k=1,2,\ldots,n-1$;

$$b_n = p_n/2 \ . \tag{25}$$

Po formuli (12) iz razdelka 4. je <u>koeficient elastičnosti</u>: $E_r(t) = p(t)/\bar{p}(t)$, če je le p zvezna funkcija. Isti premislek kot prej nas napoti na formulo:

$$E_r(k) = p_k/\bar{p}_k \ . \tag{26}$$

<u>Rezultat 10.</u> $E_r(k - 0{,}5) = p_k/(p_k - a_k)$, $k=1,2,\ldots,n$. (27)

a_k so dani s formulama (22) in (23).

Na vrsti je še <u>karakteristična funkcija</u>. Ker bomo uporabili formulo (5) iz razdelka 5., spet zaidemo v težave, saj ne poznamo funkcije p v teku enega leta, obenem pa ni mogoče dati kakršnekoli pametne ocene o integralu

$$\int_{k-1}^{k} e^{itx}.p(t)dt \ .$$

Izrekoma T.28 in T.29 o konvergenci rastnih funkcij smo se lahko izognili, ker imamo funkcijo r v posameznih točkah eksaktno izračunano. Nikakor pa ne moremo ignorirati izreka T.52 , saj se izračunana funkcija p lahko v metriki prostora $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ bistveno razlikuje od dejanske. Toda celo če bi imeli podatek o vrsti drevesa, ki ga opazujemo, ter o njegovem rastišču, verjetno ne bi mogli bistveno izboljšati tele predpostavke:

$$p(t) = \begin{cases} 2p_k & ; \ k-1 < t < k-0{,}5 \\ 0 & ; \ k-0{,}5 < t < k \\ & \ \ \ k=1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{28}$$

Predpostavili smo torej, da drevo prvo polovico leta enakomerno raste, v drugi polovici leta pa počiva. To je smiselno, ker se samo po sebi razume, da se naše leto ne začne z januarjem, pač pa s povprečnim pomladanskim prebujenjem drevesa. Tukaj tudi postane jasno, da bi morali v Rezultatu 1.

postaviti: $K = n - c$, pri čemer je c približno 0,5. V skladu s Predpostavko 2. bomo pa to zanemarili.

Uporabimo torej (28):

$$\hat{p}(x) = 2(2\pi)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \int_{k-1}^{k-0,5} e^{itx} dt =$$

$$= 4(2\pi)^{-1/2} x^{-1} \sin\frac{x}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k e^{(k-0,75)ix} . \qquad (29)$$

Uvedimo dve novi funkciji:

$$u = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \cos(k-0,75)x , \qquad (30)$$

$$v = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \sin(k-0,75)x . \qquad (31)$$

Preden nadaljujemo, se vprašajmo, na kakšnem intervalu je karakteristična funkcija sploh zanimiva. Najmanjša perioda, ki po Predpostavki 2. še pride v poštev, je 1 leto, celo življensko dobo pa imamo lahko za polovico največje periode. Torej je: $1 \leqq 2\pi/x \leqq 2n$ oziroma

$$\pi/n \leqq x \leqq 2\pi . \qquad (32)$$

Na tem intervalu je: $\sin\frac{x}{4} \geqq 0$. Uvedimo še novo spremenljivko $z = x/2\pi$, pa lahko povzamemo

<u>Rezultat 11.</u> $T(z) = 1/z \quad (1/(2n) \leqq z \leqq 1)$ (33)

$$A(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{\frac{\pi z}{2}} \cdot \sqrt{u^2(z) + v^2(z)} , \quad A(0) = \frac{V}{\pi} \qquad (34),(35)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(z) = v(z)/u(z) , \quad \varphi(z) \in [0, 2\pi) \qquad (36)$$

$$\Delta(z) = \varphi(z)/(2\pi z) \in [0, T(z)) \qquad (37)$$

Pri tem je: $u(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \cos(4k-3)\frac{\pi z}{2}$ (38)

$$v(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \sin(4k-3)\frac{\pi z}{2} \qquad (39)$$

Velja še: $\Delta(1) = 0{,}25$, $\Lambda(1) = 2V/\pi^2$, (40)

$$\lim_{z \searrow 0} \Delta(z) = \frac{1}{V} \cdot \sum_{k=1}^{n} k p_k - 0{,}75 . \quad (41)$$

Takoj opazimo, da ima $\lim_{z \searrow 0} \Delta(z)$ precej podobno vlogo, kot matematično upanje v teoriji verjetnosti.

Dodajmo še, da se da s temi podatki periodičnost določiti še na en način, ki je manj eksakten, pa precej bolj enostaven. Če je funkcija p občutno periodična s periodo T, potem ima funkcija $f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(t+k.T) \quad (t \in [0,T))$ (41)

zelo velik razpon med svojo spodnjo in zgornjo mejo. Če izračunamo ta razpon za vse funkcije f_T , kjer je T ne preveč veliko naravno število, lahko izberemo najbolj izrazite periode. Lega vsakokratnega supremuma pa je ravno fazni premik Δ. Tako dobljeni rezultati se kar dobro ujemajo z rezultati dobljenimi s Fourierjevo transformacijo, toda razumljivo le za tiste T, ki so majhni v primerjavi z življensko dobo.

Za konec naj omenim, da se vitalnost in faze ne ujemajo z običajnimi gozdarskimi definicijami. Zato naj poudarim, da se vse količine, ki smo jih tukaj srečali, nanašajo izključno na količino, ki jo merimo in obravnavamo, ne pa na celoten subjekt. Tako se lahko primeri, da ima drevo v "najlepših letih" terminalno fazo rasti in vitalnost blizu 0 za višinsko rast, kar pa je le navidezno nepravilno. Kajti tudi pri človeku je terminalna faza višinske rasti v obdobju, ko se človek šele bliža svojemu vrhuncu.

Tudi izbira časovne enote je pomembna. Opis rasti drevesa po dnevih bo dal popolnoma različne rezultate na manjših intervalih kot letni opis. Tako lahko pričakujemo običajno zaporedje faz IOT šele, če bo časovna enota najmanj desetletje, pa še to le pri neproblematičnem drevesu. Vpliv izbire časovne enote se zabriše šele na časovnih intervalih, ki so mnogo večji od te enote. Zato ne smemo privzeti niti prevelike enote, ki nam preveč zmanjša informativnost rezultatov, niti premajhne enote, ki pa povzroči, da zaradi dreves ne vidimo gozda - kot pravi pregovor.

LITERATURA

[1] Z. Bohte: Numerična analiza. Institut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1973.

[2] R. Jamnik: Verjetnostni račun. Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.

[3] H. Kestelman: Modern Theories of Integration. Dover Publications, Inc., New York 1960.

[4] A. Levaković: Dendrometrija. Hrvatsko šumarsko društvo, Zagreb 1922.

[5] M. Prodan: Forstliche Biometrie. Bayer. Landw. Verlag, München 1961.

[6] H.L. Royden: Real Analysis. The Macmillan Company, New York 1963.

[7] W. Rudin: Real and Complex Analysis. Mladinska knjiga, Ljubljana 1974.

[8] V. Stamenković: Prirast i proizvodnost stabala i šumskih sastojina. Univerzitet u Beogradu, Beograd 1974.

[9] I. Vidav in soavtorji: Višja matematika II. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1975.

[10] I. Vidav in soavtorji: Višja matematika III. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1976.

[11] R. R. Goldberg: Fourier Transforms. Cambridge University Press 1965.

UBER WACHSTUMSFUNKTIONEN

Zusammenfassung

Rastne funkcije definiramo kot porazdelitvene funkcije, pomnožene z neko konstanto. Posebej definiramo zvezno rast z absolutno zvezno rastno funkcijo, torej tako, ki je integral prirastne funkcije. Uvedemo še povprečni prirastek ter rasni potencial kot povprečni prirastek bodoče rasti. V prvem razdelku pokažemo osnovne analitične in topološke lastnosti teh funkcij.

V drugem razdelku diskutiramo o načinu priraščanja rastne funkcije. Ta način kaže nek analitični razteg rastne funkcije, ki ga imenujemo subjektivni čas.

Tretji razdelek je posvečen izpeljavi osnovnega izreka o konvergenci rastnih funkcij: zaporedje rastnih funkcij zveznih rasti konvergirajo proti prav taki funkciji, če je totalna variacija razlike dveh dovolj poznih členov poljubno majhna.

Biološko rast definiramo najprej kot časovno omejeno rast, ki je zvezna in ima prirastna funkcija omejeno totalno variacijo. Rastni pospešek je odvod prirastne funkcije. Vitalnost je sorazmerna s priratkom. Definiramo še faze rasti: inicialno, optimalno, terminalno in stacionarno; kjer je prirastna funkcija večja od povprečnega prirastka, je inicialna ali optimalna faza, kjer pa je večja od potenciala rasti, je optimalna ali terminalna faza. V nadaljevanju tega razdelka pokažemo spet analitične in topološke posledice definicij ter dokažemo, da iz zveznosti prirastne funkcije sledi običajno zaporedje faz: inicialna, optimalna, terminalna. Omenimo še, da je koeficient elastičnosti rastne funkcije v tesni zvezi s fazami rasti.

V petem razdelku si ogledamo Fourier - Stieltjesovo transformiranko rastne funkcije in pokažemo, da ekstremi njene absolutne vrednosti kažejo periodiko rasti. Ob tem se izkaže, da bi bilo ugodneje definirati biološko rast bolj specialno, kot časovno omejeno zvezno rast, katere prirastno

funkcijo lahko razrežemo na končno mnogo delov, na katerih je zvezna, monotona in omejena.

Šesti razdelek je primer in sicer letna debelinska rast drevesa. Izpeljane so numerične metode za izračun omenjenih količin iz osnovnih podatkov. Med drugim je podana še ena metoda za določanje periodike rasti.