

Numerični postopek za izračun temperaturnega polja brame pri kontinuiranem ulivanju jekla

Numerical Precedure for Calculating Temperature Field in Continuous Casting of Steel

B. Šarler¹, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

Prejem rokopisa - received: 1995-10-04; sprejem za objavo - accepted for publication: 1996-01-22

V delu so opisana empirična metalurška merila ohlajanja pri kontinuiranem ulivanju jekla. Problem pravilne nastavitve procesnih parametrov je formuliran kot minimizacijski problem, ki temelji na analitičnem zapisu meril ohlajanja in znanem temperaturnem polju brame. Za definirano računsko intenzivno nalogo je razvit hiter numerični postopek za izračun temperaturnega polja brame. Temelji na podlagi Voller-Swaminathanove iterativne sheme, ki je v tem delu modificirana s preprostejšim računanjem novega volumskega deleža kapljevinske faze. Crank-Nicolsonovi časovni diskretizaciji ter na metodi kontrolnih prostornin v dveh dimenzijah. Diskretizirane enačbe so rešene na podlagi razvitega simetričnega ADI razcepa in TDMA algoritma. Natančnost metode je preverjena na podlagi dveh preskusnih primerov. Metoda je vgrajena v simulator livne naprave ACRONI Jesenice.

Ključne besede: kontinuirano ulivanje, metoda kontrolnih prostornin, modeliranje strjevanja

This work describes empirical metallurgical cooling criteria of the continuous casting of steel. The problem of setting proper casting process parameters is formulated as a minimization problem based on analytical form of the cooling criteria and on calculated temperature field of the slab. For the defined computationally intense optimization problem, a fast solution algorithm is developed for determining the temperature distribution in the slab. It is based on the Voller-Swaminathan iterative scheme modified with simple calculation of the new liquid volume fraction, Crank-Nicolson time discretization and on the finite volume method in two dimensions. Discretized equations are solved by using the deduced symmetric ADI decomposition and TDMA algorithm. The accuracy of the method is checked with two test cases. The described method is implemented in the ACRONI Jesenice caster simulator.

Key words: continuous casting, finite volume method, solidification modelling

1 Uvod in pomen raziskave

Kvaliteta brame pri kontinuiranem ulivanju jekla je funkcija željene sestave taline oziroma čistosti taline, notranje in zunanje razpokanosti proizvoda, intenzivnosti izcej na mikro, mezo in makro merilu, poroznosti ter pravih dimenzij proizvoda. Kvaliteto kontinuirano ulitih proizvodov zagotavljamo in izboljšujemo na podlagi podrobnega razumevanja dogajanj procesa, možnosti spremljanja in regulacije procesnih parametrov ter s primerno organizacijo dela¹.

Sodobna nastavitve procesnih parametrov pri kontinuiranem ulivanju jekla temelji na empiričnem znanju ter na direktnem in inverznem modeliranju procesa. Pri direktnem modeliranju skušamo predvideti kvaliteto izdelka v odvisnosti od podanih procesnih parametrov, pri inverznem pa skušamo določiti procesne parametre, ki dajo željeno kvaliteto. Na podlagi empiričnih izkušenj pri kontinuiranem ulivanju jekel so se izoblikovala tako imenovana metalurška merila ohlajanja, ki omejujejo variacije temperaturnega polja brame glede na željeno kvaliteto proizvoda. Iz izračuna temperaturnega polja brame ter metalurških meril ohlajanja lahko sklepamo na dobro ali slabo nastavitve procesnih parametrov livne naprave.

Značilna metalurška merila ohlajanja pri kontinuiranem ulivanju jekla² so:

- največja dovoljena dolžina kapljevinskega korena
- največje dovoljeno ohlajanje površine ingota na enoto časa
- največje dovoljeno ponovno segrevanje površine ingota na enoto časa
- najnižja dovoljena temperatura površine ingota v točki ravnjanja
- največje negativno odstopanje površinske temperature ingota pri dani osni legi v območju ohlajanja s prhami
- največje pozitivno odstopanje površinske temperature ingota pri dani osni legi v območju ohlajanja s prhami.

Značilno število procesnih parametrov livnih naprav za kontinuirano ulivanje jeklenih bram je med 20 in 30. Za zgled navedimo livno napravo ACRONI Jesenice, v kateri so procesni parametri: temperatura ulivanja, hitrost ulivanja, nivo taline v kokili, frekvenca nihanja kokile, livni prašek, pretoki vseh štirih stranic kokile, vstopna temperatura hladila primarnega ohlajevalnega sistema, pretoki prh dvanajstih sekundarnih ohlajevalnih sistemov, vstopna temperatura hladila sekundarnega ohlajevalnega sistema.

Na podlagi numeričnega simulatorja livne naprave poiščemo pravilno nastavitve procesnih parametrov na naslednji način

1. Nastavimo približek optimalnih procesnih parametrov.

¹ Doc. dr. Božidar ŠARLER,
Fakulteta za strojništvo
Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko
1000 Ljubljana, Aškerčeva 6

2. Izračunamo temperaturno polje livne naprave.
3. Izračunamo odstopanje metalurških meril ohlajanja od predpisanih vrednosti v primerni normi².
4. Iz stare nastavitve livne naprave in izračunanega odstopanja na podlagi primernega minimizacijskega algoritma izračunamo novo približno nastavitve livne naprave ob upoštevanju omejitev procesnih parametrov.
5.
 - V primeru, da se stara in nova nastavitve livne naprave razlikujeta, nadaljujemo s točko 2.
 - V primeru, da se stara in nova nastavitve livne naprave ne razlikujeta, ustavimo postopek iskanja optimalne nastavitve livne naprave.

Zaradi obilice procesnih parametrov je določanje optimalne nastavitve vseh procesnih parametrov livne naprave računsko intenzivno opravilo, ki zahteva primeren optimizacijski postopek in karseda hiter numerični izračun, saj moramo v vsakem novem koraku optimizacijskega postopka na novo izračunati celotno temperaturno polje ingota. V primeru, da temperaturno polje livne naprave računano pri vzdolžnih intervalih livne naprave 0,025 m pri prečni ločljivosti temperature 0,01 m in ingotu prečnih dimenzij 0,25 m x 1,6 m in dolžini od vrha ulivanja do rezalne dolžine 21,845 m (livna naprava ACRONI) je rezultat izračuna 3657727 vrednosti za temperature.

Vsebina prispevka je omejena samo na opis numeričnega postopka za izračun temperaturnega polja brame. Opis uporabljenih fizikalnih modelov ohlajanja livne naprave (prestop toplote z ingota na kokilo, prenos toplote v kokili, prestop toplote z ingota na primarno hladilo, prenos toplote z ingota na kapljice hladila, zastojno hladilo ob valjčnicah, obtekajoče hladilo, valjčnice in s sevanjem) je najti v³, optimizacijski postopek pa bo opisan v eni naših naslednjih publikacij.

2 Numerični postopek

2.1 Popis geometrije brame

Temperaturno polje brame v točki z radij-vektorjem \mathbf{p} ob času t popisujemo v tri-dimenzionalnem kartezičnem koordinatnem sistemu:

$$\mathbf{p} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z \quad (1)$$

kjer x , y in z predstavljajo koordinate, \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y in \mathbf{i}_z pa bazne vektorje. Koordinata z meri dolžino notranjega (južnega) dela livnega sistema kokile in valjčnic. Ker je livni sistem ločno ukrivljen, predstavlja uporaba kartezičnih koordinat približek, v katerem livni sistem "izravnamo". Izhodišče koordinate z sovpada s polovično višino kokile, bazni vektor \mathbf{i}_z pa s smerjo ulivanja. Koordinata x meri širino (smer zahod-vzhod) brame, pravokotno na smer ulivanja. Njeno izhodišče sovpada z zahodno stranico brame. Koordinata y meri debelino (smer jug-sever) brame, pravokotno na smer

ulivanja. Njeno izhodišče sovpada z notranjim (južnim) delom brame.

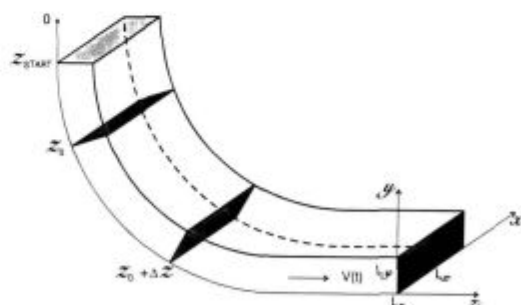
Narava prenosa toplote pri kontinuiranem ulivanju jekla je takšna², da je prevajanje toplote v smeri, vzporedno z ulivanjem, zanemarljivo v primerjavi z advektivnim prenosom. Tako je koordinata z parabolčna, koordinati x in y pa sta eliptični. Temperaturno polje v brami livne naprave ob danem času opišemo s tem, da izračunamo za vsak vzdolžni položaj (imenujmo ga rezino) prečno temperaturno polje. Tako so temperaturne razmere v brami pri dani koordinati z odvisne le od starosti rezine v livni napravi in intenzivnosti njenega hlajenja v odvisnosti od časa. Rezine nastajajo na začetni vzdolžni koordinati ulivanja z_{START} in potujejo v smeri baznega vektorja \mathbf{i}_z s hitrostjo ulivanja \mathbf{V} . Za izračun intenzivnosti hlajenja rezine v odvisnosti od časa potrebujemo zvezo med koordinato z livne naprave in starostjo rezine t , ki je v splošnem

$$z(t) = \int_{t_{START}}^t \mathbf{V}(t') dt' + z_{START}, \quad \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{i}_z, \quad (2)$$

kjer je t_{START} začetni čas rezine.

V primeru, ko je hitrost ulivanja konstantna, imamo med koordinato z livne naprave in starostjo rezine t naslednjo preprosto zvezo:

$$t(z) = \frac{z - z_{START}}{V} + t_{START}. \quad (3)$$



V SPLOŠNEM

$$\begin{aligned} t_0 &= t(z_0) \\ t_0 + \Delta t &= t(z_0 + \Delta z) \end{aligned} \quad ; \quad z = \int_{t_{START}}^t \mathbf{V}(t') dt' + z_{START}$$

PRI KONSTANTNI HITROSTI ULIVANJA

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{z_0 - z_{START}}{V} + t_{START} \\ t_0 + \Delta t &= \frac{z_0 + \Delta z - z_{START}}{V} + t_{START} \end{aligned}$$

Slika 1: Shema potovanja rezine brame in relacije med krajevno in časovno koordinato

Figure 1: Slice travelling schematics and relations between space and time coordinates

Ker se zanimamo samo za stacionarna stanja livne naprave, v nadaljevanju uporabljamo samo zgornjo preprosto zvezo. Posledično temperaturno polje brame $T(x, y, z)$ popisujemo v obliki

$$T(x, y, z(t)); t(z_{\text{START}}) \leq t \leq t(z_{\text{CUT}}). \quad (4)$$

2.2 Osnovna enačba, začetni in robni pogoji

Reševanja temperaturnega polja rezine se lotimo na naslednji način:

Entalpijo rezine popisujemo z enofaznim modelom⁴

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_S \rho_S h_S + f_L \rho_L h_L) = -\nabla \cdot (f_S \mathbf{F}_S + f_L \mathbf{F}_L), \quad (5)$$

kjer smo zanemarili vse mehanske vplive in disperzne člene. V enačbi (5) sta f_S in f_L volumska deleža trdne S in kapljevine L faze, ρ_S in ρ_L gostoti, h_S in h_L entalpiji ter \mathbf{F}_S in \mathbf{F}_L toplotna tokova faz. Ker zanemarimo morebitne poroznosti, velja naslednja konstitutivna enačba za volumska deleža faz:

$$f_S + f_L = 1. \quad (6)$$

Toplotna tokova faz konstituiramo s klasično Fourierjevo relacijo:

$$\mathbf{F}_S = -k_S \nabla T_S, \quad \mathbf{F}_L = -k_L \nabla T_L, \quad (7)$$

kjer k_S in k_L predstavljata toplotni prevodnosti, T_S in T_L pa temperaturi faz. Predpostavimo, da sta fazi v lokalnem termodinamskem ravnovesju, in s T označimo njuno temperaturo:

$$T = T_S = T_L. \quad (8)$$

Ker so zanemerjeni mehanski vplivi, sta entalpiji faz:

$$h_S = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_{pS}(\theta) d\theta, \quad h_L = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_{pL}(\theta) d\theta + h_M, \quad (9)$$

kjer c_{pS} in c_{pL} označujeta specifični toploti faz pri konstantnem tlaku, h_M pa talilno entalpijo. Enačbo (5) lahko ob upoštevanju naštetih konstitutivnih relacij zapišemo v obliki:

$$\rho_0 c \frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \cdot (k \nabla T) - \rho_0 h_{LS} \frac{\partial}{\partial t} f_L, \quad (10)$$

kjer smo definirali

$$\rho_0 c = f_S h_S \frac{d\rho_S}{dT} + f_L h_L \frac{d\rho_L}{dT} + f_S \rho_S c_{pS} + f_L \rho_L c_{pL}, \quad (11)$$

$$k = f_S k_S + f_L k_L,$$

$$\rho_0 h_{LS} = \rho_L h_L - \rho_S h_S. \quad (12)$$

Z ρ_0 smo označili neko povprečno gostoto, na primer povprečno gostoto trdne in kapljevine faze na sredi talilnega intervala.

Predpostavimo, da sta ob nekem začetnem času t_0 znani porazdelitev temperature in deleža kapljevine faze na odprtem območju rezine Ω z mejo Γ , definirani preko funkcij $T_0(\mathbf{p})$ in $f_{L0}(\mathbf{p})$:

$$T(\mathbf{p}, t_0) = T_0(\mathbf{p}), \quad f_L(\mathbf{p}, t_0) = f_{L0}(\mathbf{p}). \quad (13)$$

Robni pogoji na meji Γ so podani v Robinovi obliki:

$$\mathbf{F} = -(f_S k_S + f_L k_L) \nabla T = \mathcal{H} (T_G - T_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \quad (14)$$

kjer \mathcal{H} predstavlja koeficient toplotne prestopnosti, T_Γ temperaturo na meji, T_{ref} referenčno temperaturo in \mathbf{n}_Γ vektor, pravokoten na Γ . Koeficient toplotne prestopnosti \mathcal{H} je v splošnem funkcija položaja ter spremenljivk T_Γ , T_{ref} in $f_{L\Gamma}$.

Rešitev osnovne enačbe predstavlja temperaturno polje in polje deleža kapljevine faze na območju Ω in njeni meji Γ ob času $t_0 + \Delta t$.

Za reševanje osnovne enačbe potrebujemo naslednje snovne lastnosti h_M , $\rho_S(T)$, $\frac{d\rho_S}{dT}(T)$, $\rho_L(T)$, $\frac{d\rho_L}{dT}(T)$, $c_{pS}(T)$, $c_{pL}(T)$, $f_L(T)$ in znani funkciji v Robinovih robnih pogojih za $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ v naslednji obliki

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma(t), T_\Gamma, T_{\text{ref}}), \quad T_{\text{ref}} = T_{\text{ref}}(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma(t)); \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t. \quad (15)$$

Pri tem x_Γ , y_Γ in z_Γ predstavljajo koordinate meje Γ .

2.3 Diskretizacija

2.3.1 Časovna diskretizacija

Osnovno enačbo diskretiziramo po času na podlagi Crank-Nicolsonove sheme:

$$\rho_0 c^{l+1/2} \frac{1}{\Delta t} (T^{l+1} - T^l) = \nabla \cdot (k \nabla T)^{l+1/2} - \rho_0 h_{LS}^{l+1/2} \frac{1}{\Delta t} (f_L^{l+1} - f_L^l). \quad (16)$$

Indeks l označuje količino ob času t_0 , indeks $l+1$ ob času $t_0 + \Delta t$ in indeks $l+1/2$ ob času $t_0 + \Delta t$. Ker so členi v osnovni enačbi v splošnem odvisni od temperature, jih moramo iterativno določiti. V tej zvezi vpeljemo indeks m , ki šteje iteracije. Tako enačbo (16) zapišemo, ko računamo temperaturo ob času $t_0 + t$ pri $m+1$ iteraciji v naslednji obliki:

$$\rho_0^m c^{l+1/2} \frac{1}{\Delta t} ({}^{m+1}T^{l+1} - T^l) = \nabla \cdot ({}^m k \nabla {}^{m+1}T)^{l+1/2} - \rho_0^m h_{LS}^{l+1/2} \frac{1}{\Delta t} ({}^m f_L^{l+1} - f_L^l). \quad (17)$$

Snovne lastnosti in volumski delež kapljevinske faze ne morejo imeti indeksa $m+1$, ker so v splošnem odvisni od $m+1T$.

2.3.2 Voller-Swaminathanova iterativna shema

Poglavitni element Voller-Swaminathanove sheme je vpeljava približnega volumskega deleža kapljevinske faze ob iteraciji $m+1$ v enačbo (17). Ker je volumski delež kapljevinske faze ob iteraciji $m+1$ odvisen od temperature ob iteraciji $m+1$, ga izrazimo v naslednji približni obliki:

$$m+1f_L^{i+1} = m f_L^{i+1} + m \frac{\partial f_L^{i+1}}{\partial T} (m+1T^{i+1} - mT^{i+1}). \quad (18)$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} \rho_0^m c^{i+1/2} \frac{1}{\Delta t} (m+1T^{i+1} - T^i) &= \nabla \cdot (m k \nabla m+1T)^{i+1/2} - \\ - \rho_0^m h_{LS}^{i+1/2} \frac{1}{\Delta t} (m f_L^{i+1} - f_L^i) - \\ - \rho_0^m h_{LS}^{i+1/2} m \frac{\partial f_L^{i+1}}{\partial T} \frac{1}{\Delta t} (m+1T^{i+1} - mT^{i+1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Uporaba tovrstnega približka deleža kapljevinske faze zagotavlja optimalno majhno število iteracij v primerjavi z drugimi načini⁷.

2.3.3 Diskretizacija na podlagi metode kontrolnih prostornin

Temperaturno polje rezine brame računamo v mrežnih točkah $\mathbf{p}_{i,j}$. Položaj mrežne točke $\mathbf{p}_{i,j}$; $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$ je podan z

$$x_i = x_- + (i-1)\Delta x, \quad y_j = y_- + (j-1)\Delta y \quad (20)$$

kjer sta mrežni razdalji Δx in Δy definirani kot:

$$\Delta x = \frac{L_x}{I-1}, \quad \Delta y = \frac{L_y}{J-1} \quad (21)$$

in sta v splošnem različni. Rezino brame razdelimo na pravokotne kontrolne prostornine kot je razvidno s **slike 2**.

Sistem algebraičnih enačb za izračun temperatur v mrežnih točkah dobimo tako, da enačbo (19) integriramo po kontrolni prostornini $\Omega_{i,j}$ in integrale izrazimo z vrednostmi temperatur v mrežnih točkah.

Pri tem naletimo na dva tipa integralov. Integral skalarne funkcije $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ po kontrolni prostornini približno izrazimo kot:

$$\int_{\Omega_{i,j}} \mathcal{F}(\mathbf{p}) d\Omega \approx \Omega_{i,j} \mathcal{F}(\mathbf{p}_{i,j}), \quad (22)$$

kjer je $\Omega_{i,j}$ volumen kontrolne prostornine $\Omega_{i,j}$.

Integral funkcije $-\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{F}}(\mathbf{p})$ po kontrolni prostornini $\Omega_{i,j}$, kjer velja $\mathbf{J}_{\mathcal{F}} = -k \nabla \mathcal{F}$, približno izrazimo kot:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_{i,j}} \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{F}}(\mathbf{p}) d\Omega &\approx \\ \approx -\Gamma_{Si,j} J_{\mathcal{F}Si,j} - \Gamma_{Ni,j} J_{\mathcal{F}Ni,j} - \Gamma_{Ei,j} J_{\mathcal{F}Ei,j} - \Gamma_{Wi,j} J_{\mathcal{F}Wi,j} \end{aligned} \quad (23)$$

kjer $\Gamma_{O,i,j}$; $O = S, N, E, W$ predstavljajo površine kontrolnega volumna $\Omega_{i,j}$ in kjer smo označili:

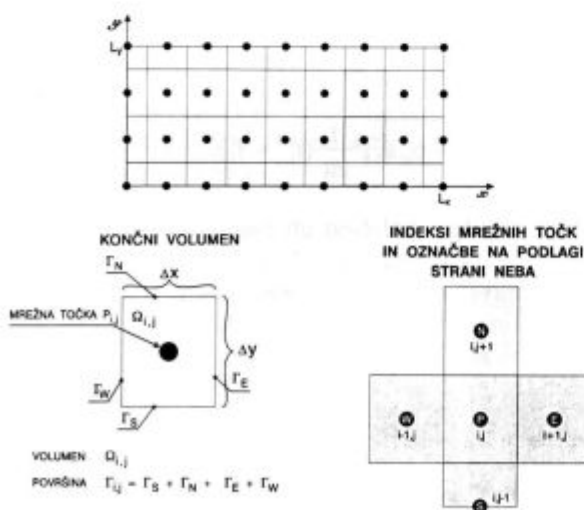
$$\begin{aligned} J_{\mathcal{F}O,i,j} &= K_{O,i,j} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{p}_{i,j}) - \mathcal{F}_{O,i,j}}{\Delta y}; \quad O = S, N, \\ J_{\mathcal{F}O,i,j} &= K_{O,i,j} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{p}_{i,j}) - \mathcal{F}_{O,i,j}}{\Delta x}; \quad O = E, W, \end{aligned} \quad (24)$$

Koeficienti $k_{Si,j}$, $k_{Ni,j}$, $k_{Ei,j}$ in $k_{Wi,j}$ so izračunani kot:

$$\begin{aligned} k_{O,i,j} &= 2 \frac{k(\mathcal{F}(\mathbf{p}_{i,j}))k(\mathcal{F}_{O,i,j})}{k(\mathcal{F}(\mathbf{p}_{i,j})) + k(\mathcal{F}_{O,i,j})}, \\ O &= S, N, E, W, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J. \end{aligned} \quad (25)$$

Fluksi skalarne količine \mathcal{F} dobijo zaradi Robinovih robnih pogojev za kontrolne prostornine na robu območja in na ogliščih območja posebno obliko, ki jo eksplicitno ne navajamo.

Sistem algebraičnih enačb za neznanne $T_{i,j}$ zapišemo v obliki



Slika 2: Shema diskretizacije rezine
Figure 2: Discretization of the slice

$$\begin{aligned}
 {}^m A_{1ij}({}^{m+1}T_{ij}^{l+1} - T_{ij}^l) = & \\
 -\frac{1}{2}({}^m C_{xij}^{l+1/2} + {}^m C_{yij}^{l+1/2})T_{ij}^{l+1} - \frac{1}{2}({}^m C_{i,j-1}^{l+1/2} + {}^m C_{i,j+1}^{l+1/2})T_{i,j-1}^{l+1} - \frac{1}{2}({}^m C_{i,j-1}^{l+1/2} + {}^m C_{i,j+1}^{l+1/2})T_{i,j+1}^{l+1} & \\
 -\frac{1}{2}({}^m C_{i-1,j}^{l+1/2} + {}^m C_{i+1,j}^{l+1/2})T_{i-1,j}^{l+1} - \frac{1}{2}({}^m C_{xij}^{l+1/2} + {}^m C_{yij}^{l+1/2})T_{ij}^l - \frac{1}{2}({}^m C_{i,j-1}^{l+1/2} + {}^m C_{i,j+1}^{l+1/2})T_{i,j-1}^l - \frac{1}{2}({}^m C_{i,j-1}^{l+1/2} + {}^m C_{i,j+1}^{l+1/2})T_{i,j+1}^l & \\
 -\frac{1}{2}({}^m C_{i-1,j}^{l+1/2} + {}^m C_{i+1,j}^{l+1/2})T_{i-1,j}^l - \frac{1}{2}({}^m C_{xij}^{l+1/2} + {}^m C_{yij}^{l+1/2})T_{ij}^{l-1} - {}^m C_{xxij}^{l+1/2} - {}^m C_{yyij}^{l+1/2} + {}^m A_{2ij}({}^m f_{Li,j}^{l+1} - f_{Li,j}^l) & \\
 + {}^m A_{3ij}({}^{m+1}T_{ij}^{l+1} - {}^m T_{ij}^{l+1}). & \quad (26)
 \end{aligned}$$

pri čemer koeficienti $A_{i,j}$ nastopajo iz integracije prehodnega in izvornih členov (tip integrala 22), koeficienti $C_{i,j}$ pa iz integracije difuzijskega člena (tip integrala 23) po kontrolni prostornini $\Omega_{i,j}$.

2.4 Reševanje sistema algebraičnih enačb

Sistem rešimo na iterativen način tako, da pri reševanju lahko uporabimo hiter TDMA algoritem⁶. Ker imamo v Voller-Swaminathanovi shemi izvorni člen odvisen od temperature na koncu časovnega koraka, klasična ADI metoda⁶, ki dovoljuje uporabo TDMA algoritma, odpove, saj daje nesimetrične rezultate. V našem primeru smo ADI simetrizirali na naslednji ad-hoc način: V prvem pol-koraku neodvisno rešimo tridiagonalna sistema enačb, dobljena s klasičnimi x in y razcepoma. Za vrednosti temperature ob času $l+1/2$ vzamemo povprečje tako dobljenih vrednosti. Pri tem ne upoštevamo izvornega člena zaradi $m+1$ -vega približka volumskega deleža kapljevinske faze. V drugem polkoraku za začetno vrednost vzamemo izračunane temperature ob času $l+1/2$ in neodvisno rešimo tridiagonalna sistema enačb dobljena s klasičnimi x in y razcepoma. Za vrednosti temperature ob času $l+1$ vzamemo povprečje tako dobljenih vrednosti. Pri drugem polkoraku upoštevamo izvorni člen vsled $m+1$ -vega približka volumskega deleža kapljevinske faze. Z omenjeno simetrizacijo smo računski čas glede na klasično ADI shemo povečali za dvakrat. To je še vedno ekonomično, saj klasične sheme za iskanje ${}^{m+1}f_L^{l+1}$ potrebujejo več kot dvakrat več iteracij kot Voller-Swaminathanova⁷. V situaciji brez faznega prehoda uporabljamo samo klasični ADI razcep.

2.5 Iterativni potek računanja

Potek računanja med časovnim korakom $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$.

1. Na začetku računanja definiramo diskretizacijske in geometrijske parametre

$$I, J, t_0, \Delta t,$$

$$\Delta x, \Delta y, \Omega_{i,j}, \Gamma_{Si,j}, \Gamma_{Ni,j}, \Gamma_{Ei,j}, \Gamma_{Wi,j}.$$

ter postavimo vrednosti temperaturnega polja in polja volumskega deleža kapljevinske faze ob koncu časovnega koraka na vrednosti ob začetku časovnega koraka

$${}^l T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l, \quad {}^l f_{Li,j}^{l+1} = f_{Li,j}^l,$$

2. Izračunamo specifične toplote, difuzijske koeficiente, in druge snovne lastnosti:

$${}^m C_{ij}^{l+1/2}, {}^m k_{oi,j}^{l+1/2}, O = S, N, E, W, \quad {}^m \frac{\partial f_L^{l+1}}{\partial T_{i,j}} \quad (I)$$

ter koeficiente

$$A_{1ij}, A_{2ij}, A_{3ij}, C_{ij}^{l+1/2}, C_{i,j-1}^{l+1/2}, C_{i,j+1}^{l+1/2}, C_{i-1,j}^{l+1/2}, C_{i+1,j}^{l+1/2}, C_{xxi,j}^{l+1/2}, C_{yyi,j}^{l+1/2}, \quad (II)$$

na podlagi vrednosti temperature in volumskega deleža kapljevinske faze ob začetku in koncu časovnega koraka ter robnih pogojev.

3. Izračunamo nove vrednosti temperature ob koncu časovnega koraka na podlagi modificirane ADI dekompozicije:

$${}^{m+1}T_{i,j}^{l+1}, \quad (III)$$

4. Izračunamo nove volumske deleže kapljevinske faze ob koncu časovnega koraka:

$${}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} = {}^m f_{Li,j}^{l+1} + {}^m \frac{\partial f_L^{l+1}}{\partial T_{i,j}} ({}^{m+1}T_{i,j}^{l+1} - T({}^m f_{Li,j}^{l+1})). \quad (IV)$$

Uporabimo korekcijo:

$$\begin{aligned}
 {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} = 1 \text{ v primeru: } & {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} > 1, \\
 {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} = 0 \text{ v primeru: } & {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} < 0. \quad (V)
 \end{aligned}$$

5. Izračunamo novo entalpijo ob koncu časovnega koraka:

$${}^{m+1}h_{Li,j}^{l+1} = h({}^{m+1}T_{i,j}^{l+1}, {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1}). \quad (VI)$$

6. Preverimo konvergenco na podlagi konvergenčnega merila:

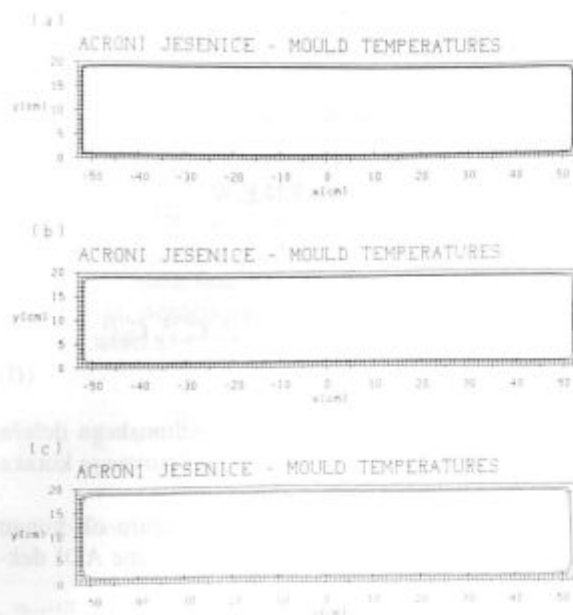
$$|{}^{m+1}h_{Li,j}^{l+1} - {}^m h_{Li,j}^{l+1}| < h_\epsilon \quad (VII)$$

• V primeru, da je konvergenčno merilo izpolnjeno, postavimo:

$${}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1} = f_L({}^{m+1}T_{i,j}^{l+1}), \quad {}^{m+1}h_{Li,j}^{l+1} = h({}^{m+1}T_{i,j}^{l+1}, {}^{m+1}f_{Li,j}^{l+1}). \quad (VIII)$$

• V primeru, da konvergenčno merilo ni izpolnjeno, nadaljujemo s točko 2.

Pripomniti velja, da je v originalni Voller-Swaminathanovi shemi računanje približka novega volumskega deleža kapljevinske faze precej bolj zapleteno, saj avtorja uporabljata povsem drugo strategijo v mrežnih točkah, pri katerih $T({}^m f_L^{l+1})$ ne leži, $T({}^{m+1} f_L^{l+1})$ pa leži v talilnem intervalu. Tej komplikaciji se v naši shemi brez izgube natančnosti izognemo z opisanimi postavitvami v primeru, ko je konvergenčno merilo izpolnjeno.



Slika 3(a,b,c): Značilno temperaturno polje brame po 0,30 m (a), po 0,45 m ulivanja (b) ter pri izstopu iz kokile po 0,60 m ulivanja (c). Notranja izoterma predstavlja likvidus temperaturo 1810 K, zunanja pa solidus temperaturo 1790 K. Iz slike 3(c) je razvidno, da je pri danih pogojih na izstopu iz kokile strjenega približno 0,015 m roba ingota

Figure 3(a,b,c): Representative temperature field of the ingot after casted lengths 0.30 m (a), 0.45 m (b) and at the mould outlet at 0.60 m (c). Inner isotherm represents liquidus temperature 1810 K, outer isotherm represents solidus temperature 1790 K. Figure 3(c) shows solidified shell thickness of approximately 0.015 m

3 Testiranje metode

V tem delu prikažemo dva preskusna zgleda. S prvim smo preverili pravilno implementacijo Robinovih robnih pogojev in temperaturnega polja brez faznega prehoda, z drugim pa smo preverili pravilno implementacijo trdno-kapljevinskega faznega prehoda. Imejmo pravokotno območje $0 \text{ m} \leq x \leq 1,5 \text{ m}$, $0 \text{ m} \leq y \leq 1,5 \text{ m}$. Snovne lastnosti so $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $c_S = c_L = 1 \text{ J/(kgK)}$, $k_S = k_L = 1 \text{ W/(mK)}$, $T_S = 0,99 \text{ K}$, $T_L = 1,01 \text{ K}$. V prvem testnem primeru je $h_M = 0,00 \text{ J/(kgK)}$, v drugem pa $0,25 \text{ J/(kgK)}$. Snov naj bo pri začetni temperaturi $1,3 \text{ K}$. Na severnem in zahodnem delu je kvadrat toplotno izoliran. V prvem primeru seva na južni in vzhodni strani v okolico s temperaturo 0 K pri koeficientu toplotne prestopnosti $1 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. V drugem testnem primeru temperatura roba ob času $t > t_0$ pade na 0 K . V obeh primerih nas zanima temperaturno polje ob času $t = 0,1 \text{ s}$. Diskretizacijski parametri so $\Delta t = 0,005$, $I = 21$, $J = 21$, $h_e = 0,0001 \text{ J/kg}$. Rešitev prvega preskusnega zgleda primerjamo z analitično rešitvijo iz⁸, rešitev drugega pa z referenčno semi-analitično rešitvijo iz⁹. Pri danih diskretizacijskih parametrih dobimo v prvem (drugem) primeru povprečno napako v računskih točkah enako $0,00098(0.00979)$

K, največjo napako v računskih točkah pa $0,00207(0,04224) \text{ K}$. Obe napaki sta pričakovane velikosti¹⁰.

4 Uporaba

Opisan numerični postopek smo uporabili v simulatorju temperaturnega polja brame, naprave za kontinuirano ulivanje ACRONI Jesenice. Na **sliki 3** sta prikazani izoterma $T_S = 1790 \text{ K}$ in $T_L = 1810 \text{ K}$ brame dimenzij $1,06 \text{ m} \times 0,20 \text{ m}$ pri ulivanju s temperaturo 1850 K in s hitrostjo $0,0166 \text{ m/s}$. Snovne lastnosti so $\rho = 7140 \text{ kg/m}^3$, $c_S = c_L = 717 \text{ J/(kgK)}$, $h_M = 277000 \text{ J/kg}$, $k_S = k_L = 26,4 \text{ W/(mK)}$. Koeficient toplotne prestopnosti kokile je $h = 600 \text{ W/(mK)}$, referenčna temperatura $T_{ref} = 350 \text{ K}$. Diskretizacijski parametri so $I = 107$, $J = 21$, $\Delta t = 1,2 \text{ s}$, $h_e = 100 \text{ J/kg}$. Celotno število iteracij, potrebnih za izračun 30 časovnih korakov je 251. Največje število iteracij v časovnem koraku je 10, povprečno 8,4 in najmanjše 7.

5 Sklepi

Prikazano delo sloni na Voller-Swaminathanovi shemi za računanje temperaturnega polja ob prisotnosti trdno-kapljevinskega faznega prehoda v kombinaciji z metodo kontrolnih prostornin. Osnovna metoda je v tem delu nadgrajena tako, da je iskanje približka volumskega deleža kapljevinske faze v točki, kjer prihaja do faznega prehoda, močno poenostavljeno, navkljub nezmanjšani natančnosti sheme. Obenem predstavlja delo nadgradnjo originalne metode, ki je bila predhodno preskušena samo v eni prostorski dimenziji na dve in na način, ki omogoča uporabo hitrega TDMA algoritma. Razvit numerični postopek je implementiran v simulatorju temperaturnega polja brame naprave za kontinuirano ulivanje ACRONI Jesenice.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje MZT in ACRONI Jesenice za finančno podporo v okviru projektov *Modeliranje kontinuiranega ulivanja jekla*, *Modeliranje kontinuiranega ulivanja* in projekta evropske skupnosti COST 512: *Modelling in materials science and processing*.

6 Literatura

- ¹ W. R. Irwing, *Continuous Casting of Steel*, The Institute of Materials, The University Press, Cambridge, 1993
- ² E. J. Laitinen, *On the simulation and control of the continuous casting process*, *Technical report*, University of Jyväskylä, Finland, 1989
- ³ B. Šarler, A. Košir, *Modeliranje prenosa toplote in snovi pri kontinuiranem ulivanju - modela ACRONI Jesenice in IMPOL Slovenska Bistrica*, *Kovine, zlitine, tehnologije*, 28, 1994, 163-167
- ⁴ W. D. Bennon, F. P. Incropera, *A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems - I. Model formulation*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, 1987, 2161-2170

- ⁵ S. V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980
- ⁶ W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, The Art of Scientific Computing, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- ⁷ V. R. Voller, C. R. Swaminathan, General source-based method for solidification phase change, *Num. Heat Transfer*, 19B, 1991, 175-189

B. Šarler: Numerični postopek za izračun temperaturnega

- ⁸ H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford, 1959
- ⁹ K. A. Rathjen, L. M. Jiji, Heat conduction with melting or freezing in a corner, *J. Heat Transfer*, 93, 1971, 101-109
- ¹⁰ A. J. Dalhuijsen and A. Segal, Comparison of Finite Element Techniques for Solidification Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23, 1986, 1807-1829



INŠTITUT ZA KOVINSKE MATERIALE
IN TEHNOLOGIJE p.o.

INSTITUTE OF METALS
AND TECHNOLOGIES p.o.

1000 LJUBLJANA, LEPI POT 11, POB 431,
SLOVENIJA

Telefon: 061/1251-161, Telefax: 061 213-780

VACUUM HEAT TREATMENT LABORATORY

Vacuum Brazing

Universally accepted as the most versatile method of joining metals. Vacuum Brazing is a precision metal joining technique suitable for many component configurations in a wide range of materials.

ADVANTAGES

- Flux free process yields clean, high integrity joints
- Reproducible quality
- Components of dissimilar geometry or material type may be joined
- Uniform heating & cooling rates minimise distortion
- Fluxless brazing alloys ensure strong defect free joints
- Bright surface that dispense with expensive post cleaning operations
- Cost effective

Over five years of Vacuum Brazing expertise at **IMT** has created an unrivalled reputation for excellence and quality.

Our experience in value engineering will often lead to the use of Vacuum Brazing as a cost effective solution to modern technical problems in joining.

INDUSTRIES

- Aerospace
- Mechanical
- Electronics
- Hydraulics
- Pneumatics
- Marine
- Nuclear
- Automotive

QUALITY ASSURANCE

Quality is fundamental to the **IMT** philosophy. The choice of process, all processing operations and process control are continuously monitored by **IMT Quality Control Department**.

The high level of quality resulting from this tightly organised activity is recognised by government authorities, industry and International companies.