PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 1
Strani 4–6

Joso Vukman:

O PERFEKTNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/410-Vukman.pdf

MATEMATIKA

O PERFEKTNIH ŠTEVILIH

Obstajajo matematični problemi, ki so po svoji formulaciji zelo preprosti in lahko razumljivi, njihove rešitve pa so tako zahtevne, da jim pogosto največji matematiki niso kos. Na tovrstne probleme naletimo pogosto v teoriji števil, veji matematike, ki preučuje lastnosti naravnih števil. V tem sestavku si bomo ogledali nekatere probleme, ki se nanašajo na tako imenovana *perfektna števila.*

Že stari Grki so opazili, da obstajajo naravna števila, ki so enaka vsoti vseh svojih deliteljev, manjših od števila samega. Števila s to lastnostjo so imenovali perfektna. Perfektni števili sta na primer 6 in 28.

$$1 + 2 + 3 = 6 \,, \qquad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Grki so najprej poznali le štiri perfektna števila, poleg 6 in 28 še 496 in 8128, toda že Evklid (3. st. pred n. št.) je dokazal tole zanimivo trditev:

Naj bo p naravno število. Če je $2^p - 1$ praštevilo, potem je število $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfektno.

Euler (1707 - 1783) je Evklidov rezultat dopolnil s tem, da je dokazal veljavnost trditve v nasprotni smeri:

Vsako sodo perfektno število lahko zapišemo v obliki $2^{p-1}(2^p - 1)$, pri čemer je $2^p - 1$ praštevilo.

Obe trditvi skupaj bomo Evklidu in Eulerju na čast imenovali Evklid-Eulerjev izrek. Dokaz tega izreka je prezahteven in ga ne bomo navajali.

Z Evklid-Eulerjevim izrekom smo zvedeli nekaj o sodih perfektnih številih. Kako pa je z lihimi perfektnimi števili? S tem vprašanjem smo že pri problemu, ki ga doslej še nihče ni rešil. Vsa doslej znana perfektna števila so namreč soda. Ni znano, če liha perfektna števila sploh obstajajo, vendar je matematikom uspelo dokazati naslednje: če obstaja kakšno liho perfektno število, potem je to število zelo veliko. Pa tudi s sodimi perfektnimi števili so še vedno težave. Res, da jih danes poznamo več, kot so jih poznali Grki, toda še vedno ni znano, če je sodih perfektnih števil neskončno ali končno mnogo. Oglejmo si problem končnosti oziroma neskončnosti števila sodih perfektnih števil nekoliko podrobneje.

Praštevila oblike $2^p - 1$ imenujemo po matematiku Mersennu (1588 - 1648) Mersennova praštevila. Evklid-Eulerjev izrek nam študij sodih perfektnih števil prevede na študij Mersennovih praštevil. Če bi torej mogli dokazati, da je Mersennovih praštevil neskončno mnogo, bi s tem dokazali, da je tudi sodih perfektnih števil neskončno mnogo. Za Mersennova praštevila lahko dokažemo naslednjo trditev:

Če je $2^p - 1$ praštevilo, potem je tudi p praštevilo.

Pišimo p v obliki $p = mn$, kjer je n praštevilo. Trditev bo dokazana, če dokažemo, da je $m = 1$. Oglejmo si vsoto $1 + 2^m + 2^{2m} + \ldots + 2^{(n-1)m}$. To je v bistvu vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja. Prvi člen tega zaporedja je 1, kvocient zaporedja pa 2^m. Po znani formuli je

$1 + 2^m + 2^{2m} + \ldots + 2^{(n-1)m} = ((2^m)^n - 1)/(2^m - 1)$. Če upoštevamo $mn = p$, dobimo $2^p - 1 = (2^m - 1)(1 + 2^m + 2^{2m} + \ldots$ $\ldots + 2^{(n-1)m})$. Število $2^p - 1$ smo torej zapisali v obliki produkta dveh naravnih števil. Ker je $2^p - 1$ praštevilo in je drugi faktor večji od 1, mora biti prvi faktor 1, to pa pomeni, da je $m = 1$.

Dokazali smo torej, da je p praštevilo, če je $2^p - 1$ praštevilo. Samo po sebi se vsiljuje naslednje vprašanje: ali velja ta trditev tudi v nasprotni smeri? Ali je $2^p - 1$ vedno praštevilo, če je p praštevilo? Vemo, da je vseh praštevil neskončno mnogo, zato bi bil trdilen odgovor na vprašanje, ki smo si ga zastavili, hkrati tudi dokaz, da je Mersennovih praštevil neskončno mnogo. Toda že Mersenne je vedel, da $2^p - 1$ ni vedno praštevilo, če je p praštevilo. Poznal je namreč primer $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ in še mnogo drugih.

Joso Vukman

Literatura

M. Kosmajac: *O savršenim brojevima*, Mat. fiz. list 3 (1963 - 1964), 101 - 103.