

31034, III, Fd, 59

86

872
m. Lavtarič

Občna

ARITMETIKA

za učiteljišča.



Sestavil in založil

L. LAVTAR,

c. k. profesor v Mariboru.

Cena 1 fl.

V Ljubljani.

Natisnila Narodna Tiskarna.

1879.

ARITHMETIK

1888

12

VERLAG VON F. V. DEUTSCH

Občna

ARITMETIKA

za učiteljišča.

Sestavil in založil

L. LAVTAR,

c. k. profesor v Mariboru.

883

V Ljubljani.

Natisnila Narodna Tiskarna.

1879.

Obecná

ARITMETIKA

pro učitelské školy

První vydání

J. LAVTAR

prof. na V. ústřední škole v Praze

V Praze

ve Vydavatelství Národního učitelského ústavu

1918

Predgovor.

Pisatelj te knjige pogrešal je ves čas svojega poučevanja na slovenskem učiteljišči aritmetike, pripravne namenu tega zavrata. Zbirati je moral tvarino za pouk iz knjig za nižje in višje srednje šole — večinoma iz Močnikovih in Villicusovih — da je zadoščeval načrtu za učiteljišča, ki je zdaj veljaven po ukazu vis. c. k. ministerstva za uk in bogočastje od 26. maja 1874 št. 7114. To zbirko je pisatelj po svoji izkušnji uredil in izročil vis. dež. šolsk. svetu v Gorici, da jo presodi — in potem vvede na slovenskih učiteljiščih. Presodil jo je gospod profesor Križnič prav natanko — hvala mu za njegov trud! — ter nekatere nedostatke prav jasno določil, katere je potem pisatelj odpravil.

Tvarina je v obče tako urejena, kakor v drugih aritmetikah. Ker pa učni načrt zahteva: „Hauptsächlich ist das Verständnis der Operationen mit besonderen Zahlen anzustreben, das Rechnen mit allgemeinen Zahlen ist im Hinblick auf diesen Zweck zu pflegen,“ govorimo takoj v vvodu o desetastih (dekadičnih) številih in njihovej uredbi, in se pri vsakem računu nanje obširniše oziramo. Računanje z imenskimi števili pred računanjem z dekadičnimi pripravlja na to zadnje, da je popolnoma jasno.

Občna števila so za marsikoga nova in do te stopnje neznaná. Njih bitje se le osvetljuje na znanih slučajih. Desetasto uredbo števil pa kandidati in kandidatkinje že poznajo iz ljudske

šole. Kako živo torej spoznajo pomen in tudi potrebo občnega števila, ko napišejo desetasto število v občnem obrazu, ki ga izvájajo iz posebnih slučajev.

Učitelj sploh, in tudi v ljudskeji šoli ne sme svojim učencem pravil v glavo ubijati, ako jih niso poprej razumeli. To pravilo mora na tolikih primerih pojasnjevati, da učenec sluti: „Pri vsakem drugem takem primeru bom pa tako računil,“ da torej končno iz posebnih primerov občno pravilo posnema.

Zategadelj so vaje v tej knjigi tako urejene, da kandidat najprej dokaze na posebnih in potem na občnih primerih izvršuje, da se torej vadi iz posebnega na obče prehajati.

Včasih posebno od začetka so pa strogi dokazi za nevajene prvi trenutek morebiti razumljivi, vendar pa ne prehajajo v kri in meso. Ako pa učenec izvrši po istem izreku več nalog iz posebnih števil, spozna brez strogega dokaza, da je računanje po tem pravilu pravo in nehoté sklepa, da to pravilo velja za vsak slučaj, torej v obče. Zadnji način more namestovati in naj bi namestoval prvega od začetka pri učencih, ki so formalno manj izobraženi.

Med vajami nahajaš mnogokrat vprašanja, da utrjujemo jasno razne aritmetične pojme in izreke in da ponavljamo prejšnjo tvarino. Taka vprašanja pa tudi kandidatom kažejo, kako naj uče kot učitelji v ljudskeji šoli. — Taka vprašanja staviti je sicer učiteljem naloga; vendar so jako pripravna, kedar učenec ponavlja, ali pa pri samouku.

Poraba izrekov za računanje na pamet in s pridobitkom najtudi ta pravila pojasnjuje. — Pri računanji v porabo so prve naloge tako rešene, da pridemo na besedice in, manj, krat i. t. d., kar je važno za učitelje v ljudskih šolah. Ravno tako so razni slučajji tako zvanega sklepnega računa v rešenih nalogah nakazani. Sploh smo skušali povsod narisati načine, po kakoršnih se mora učitelj v ljudskeji šoli ravnati, da jih uže od začetka in ne še le v zadnjih razredih utrjujemo.

S kratka — pisatelj je hotel to-le doseči:

1. Utrjenje dekadičnega številnega sistema.
2. Jasne pojme števil in razumno računanje ž njimi, posebno kar se tiče desetastih števil.
3. Jasno izpoznanje izrekov in njihovo porabo za računanje na pamet ali s pridobitkom.
4. Spoznanje metode, po kateri učitelj v ljudski šoli računati mora.
5. Ne strokovnjakov v aritmetiki, ampak takih učiteljev, ki imajo stvarino popolnoma v svoji oblasti, iz katere sami poučujejo.

Akoravno je ta knjiga namenjena učiteljiščem, vendar jo morejo tudi gimnazijalci rabiti, kedar jim je v njihovej aritmetiki kaj nejasno, ker je tukaj vse bolj na kratko izraženo.

Pri vsej pozornosti so vendar ostali nektorej tiskarneji pogrški. Te dámo tákoj na tem mestu tiskati, da jih vsakdo v knjigi popravi, predno jo bere.

Popravki.

	napačno	popravljeno
Na str. 6 v zadnji vrsti odsp.	$(a = b)$	$(a + b)$
" " 15 " 19. " odzg.	$(46 - 50)$	$(46 + 10)$
" " 16 " 12. " "	$(8 + 6) - 4$	$(8 + 6) - 5$
" " 26 " 14. " odsp.	$(7x + 2y)$	$(7x + 2y) 3y$
" " 27 " zadnji " "	napačno $(9ab^2z^3 + 3m^2v)$	$(5ab^2z^3 + 3m^2v)$
	popravljeno $(5ab^2z^3 + 3m^2v)$	$(5ab^2z^3 - 3m^2v)$
" " 32 " 7. " "	$\left(\frac{a}{b}\right)$ ali $= \left(\frac{a}{b}\right)$	$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)$
" " 32 " 5. " "	$a = b,$	$a = 6,$
" " 41 " 14. " "	$(a - b = c)$	$(a - b + c)$
" " 43 " 11. " "	$2x^2 - 9y^2$	$4x^2 - 9y^2$
" " 48 " 11. " odzg.	b	x

	napačno	popravljeno
" " 66 " 10. " odsp.	$\frac{ma}{a}$	$\frac{ma}{n}$
" " 66 " zadnjeje " "	$\frac{2 \times 7}{3} \frac{14}{2}$	$\frac{2 \times 7}{3} = \frac{14}{3}$
" " 96 " 19. " odzg.	1150	1250
" " 96 " 20. " "	$4 \times 1250 = 2750$	$3 \times 1250^* = 3750$
" " 103 " 15. " "	$x_1 v_1$	xv_1
" " 110 " 12. " "	58800000	58800000
" " 117 " 6. " odsp.	a^b	a^1
" " 117 " 6. " "	$\frac{m}{\sqrt{+ a^{2m+1}}}$	$\frac{2m}{\sqrt{+ a^{2m}}}$
" " 124 " 8. " "	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt[3]{\quad}$
" " 134 " 15. " odzg.	9·568563	0·568563

Naglica, s katero se je morala knjiga tiskati, zakrivila je, da je tudi v tekstu, osobito na prvih dveh polah, ostalo več pravopisnih napák, katere blagovoljni čitatelj sam popravi in oprosti!

Ako je pisatelj zraven zgorej omenjenega namena s to knjigo našej mladini, ki se mora pečati z aritmetiko, olajšal trud, potem je dosegel popolnoma svojo namero.

V Mariboru, meseca maja 1879.

L. Lavtar.

V v o d.

Pojem števila in njegovo zaznačenje.

§. 1. Odgovori na ta le vprašanja:

Koliko glav, oči, ušes, prstov ima človek?

Koliko klopi je v naši šolski sobi?

Koliko oken ima naša šolska soba?

Koliko učencev je v tej šoli?

i. t. d.

V naravi to ali uno stvar enkrat ali tudi večkrat zaporedoma nahajamo. Izraz, s katerim povemo, kolikokrat to stvar zaporedoma nahajamo, imenujemo **število**; stvar samo pa **jednoto**. Zraven števil postavimo ime štetih stvari, ter imamo **imenasta števila**. Imenasta števila imenujemo tudi **količine**; stvar pa, katero v količini večkrat nahajamo, **količinsko jednoto**. Z jednotami torej merimo količine. Moremo pa tudi samo na prestop iz vsakega kraja zaporedoma na sledečega misliti, na katerih kako star ponavljano nahajamo, brez da bi se na njeno natoro ozirali. Takrat ne zapišemo imena zraven števila, ter imamo **brezimenasto število**.

Za jednoto imamo znak 1. Zaporedno ponavljanje te jednote pa izrazimo z znakom + (več, plus). Števila bi torej po njihovi naravi morali zaporedoma takole pisati:

1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 i. t. d.

za katere pa imamo krajše znake 2, 3, 4 i. t. d.

1, 2, 3, 4, 5, 6 i. t. d. imenujemo **naravno številno vrsto**. Kedar pripovedujemo naravno številno vrsto, **štejemo**. Ako štetje začnemo pri manjših številih ter prehajamo na večje, **štejemo naprej**; ako pa pri štetji iz večih števil na manjša prehajamo, potem **štejemo nazaj**. Števila v naravni številni vrsti so cela števila.

§. 2. Koliko klopi je v nekeji šoli? — Odgovor: V nekeji šoli je ali 8, ali 12, ali 15 i. t. d., torej **nekako število** klopi.

Koliko ljudi je v nekem mestu?

Koliko ovac je na nekeji paši?

i. t. d.

Na taka vprašanja ne moremo z določenim številom odgovoriti, kakor v prejšnjih primerih. Število, katero izrazi določeno število jednot, imenujemo **posebno število**; število pa, katero **nekako** množino jednot izrazuje, **občno število**.

Občna števila zaznačimo s črkami alfabeta, kakor $a, b, c, \dots$ A, B, C , i. t. d.

Pristavek: Nekatera števila niso znana in imenujemo jih **neznana števila**; zaznačujemo jih z zadnjimi črkami alfabeta, navadno s tujko x ali y .

§. 3. Ako imate števili a in b isto množino jednot, imenujemo ji **enaki** in pišemo

$$a = b$$

Matematični izraz enakosti dveh količin, imenujemo **enačbo**. Vsaka enačba ima dve strani, levo in desno.

Ima pa a več jednot kot b , imenujemo ga **veče**, ter pišemo

$$a > b$$

Ako pa ima a manj jednot od b , ga imenujemo **manjše**, ter pišemo

$$a < b$$

Matematični izraz neenakosti dveh količin imenujemo **neenačbo**.

Osnovne resnice.

§. 4. Opomba 1. Resnice, katere so same iz sebe razumljive, imenujemo **osnovne resnice** (aksijome).

I. Vsaka količina je sama sebi sebi enaka.

Opomba 2. Pritem si isto količino dvakrat vzeto mislimo, kajti pri primerjanji moramo dve stvari imeti.

II. Vsi deli celote skupaj vzeti, dadó spet to celoto.

III. Celota je večja kot del te celote.

IV. Dve količini tretjej enaki, ste tudi med seboj enaki.

V. Ako je količina drugej enaka, druga pa ne tretjej, je tudi prva od tretjej različna.

VI. Enaki količini zamoremo med seboj zamenjati.

Opomba 3. Ako na mesto števila a enake število b postavimo, pravimo, da število a sè številom b **namestimo** (substitujemo).

VII. Enako na isti način spremenjeno, dá spet enako.

Zaznačenje posebnih števil.

§. 5. Najbolj naravni znaki za števila bi bili tisti, kateri nam tudi njihov postanek iz jednote izražujejo (glej §. 1). Ti znaki bi bili vendar nemogoči za velika števila. Treba jih je okrajšati. Pa tudi z okrajšanimi znaki bi ne mogli vseh števil

zaznačiti, ker bi nikoli za vsa števila znakov ne imeli in bi si tudi težko narejene znake zaradi prevelike množine zapomnili. Treba je torej na to misliti, da z nekoliko znaki zaznačimo vsa števila. Take znake imenujemo številke.

Rimljani so si v ta namen te-le številke naredili: I (jednočka), V (petika), X (desetika), L (petdesetika), C (stotika), D (petstotika), M (tisočika), in so števila po sledečem pravilu napisavali:

Skupaj stoječe znake seštevaj; ravno tako seštevaj znake raznih veljav, ako stojé manjši na desni od večih, narobe pa jih moraš odštevati. Po tem pravilu so napisali štiri z IV, osem z VIII, šest, sedem, devet, ednajst z VI, VII, IX, XI.

Beri še ta-le števila: XIV, XV, XX, XXX, XL, LX, LXIV, CCC, MDC, MDCCCLXXX.

Napiši sledeča števila z rimskimi številkami: trinajst, devetnajst, osemindvajset, štiri in osemdeset, devet in devetdeset, šest sto pet in štirideset, tisoč sedem sto dva in devetdeset.

Rimske številke pa zdaj le pri spominkih, pri oddelkih v knjigah, pri napisu letnih števil i. t. d. rabijo, ker so arabske številke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in 0 (beri: jednočka, dvojka, trojka, čveterka, petika, šestika, sedmika, osmika, devetika in ničla) za zaznačenje števil bolj pripravne. S temi številkami zaznačimo števila od jedne do devet. Z vpeljavo večih jednot — t. j. večih števil, s katerimi večja števila merimo — pa dosežemo, da moremo tudi vsa druga števila s temi številkami napisati. Za prvo večo jednoto vzamemo število, ki ima deset prvotnih jednot ali jedinic; to jednoto imenujemo jednoto prvega reda ali desetico. Na enaki način dobimo vse druge jednote. Potem ima jednoto drugega reda ali stotica deset desetic, jednoto tretjega reda ali tisočica deset stotic, jednoto četrtega reda ali desettisočica deset tisočic, jednoto petega reda ali stotisočica deset desettisočic, jednoto šestega reda ali milijonica deset stotisočic i. t. d.

Primerjaj meterske dolgostne jednote med seboj!

Vsako jednoto zapišemo z znakom 1, odločimo jej pa gotovo mesto, iz katerega razvidimo njen red. Jedinice stoje na prvem mestu, desetice na drugem proti levi, stotice na tretjem, tisočice na štertem mestu i. t. d. Na nezasedeno mesto pride 0, da le določi mesto in zraven pove, katere jednote nij. Potem je

1 = prvotna jednot ali jedinica

10 = desetica

100 = stotica

1000 = tisočica

i. t. d.

Pri izraževanju števil je potem le treba pomisliti, koliko jednot vsake vrste to število ima.

Da zapišemo množino enot katerikolega reda, postavimo pristojno številko na mesto teh enot. Tako n. pr. zapišemo 4 stotice s 400.

Pri vsaki številki moramo torej na dvoje gledati: koliko (nasebna vrednost) in kakošne enote šteje (mestna vrednost). Tako n. pr. je v 606 nasebna vrednost šestice ista, pa mestna vrednost je različna. Z ozirom na mestno vrednost je ista številka višja, katera šteje enote višjega reda.

Jednote, izmed katerih ima vsaka višja po deset od prejšnje nižje, imenujemo desetaste (dekadične) enote, in števila obstoječa iz desetastih enot imenujemo desetasta (dekadična) števila. Uredbo, po kakoršnji posebna števila z desetimi številkami napišujemo, imenujemo desetasti številni sistem (sestavo).

Iz prejšnega sledi, da je:

1 desetica = 10 enot, 2 desetici = 20 enot, 3 desetice = 30 enot
 1 stotica = 10 desetec = 100 enot, 2 stotici = 20 desetec = 200 enot
 1 tisočica = 10 stotic = 100 desetec = 1000 enot, 2 tisočici = 20 stotic = 200 desetec = 2000 enot
 i. t. d.

§. 6. Opomba. Občno število a nij omejeno, ako vsako število na njegovo mesto postaviti smemo. Včasih pa naloga zahteva, da ga denemo v gotove meje. N. pr. a je katerokoli število od 0 do 10, ali od 0 do 100, ali od 0 do 1000 i. t. d. drugo pa ne.

Če pomenijo $a, b, c, d \dots$ katerekoli številke ali števila od 0 do 9, je

$$\dots + d.1000 + c.100 + b.10 + a$$

občni izraz za dekadična cela števila, kjer točke pomenijo, da moremo v številu še enote višjih redov nahajati, katere pa tukaj niso napisane. V tem smislu je

$$6528 = 6.1000 + 5.100 + 2.10 + 8.$$

§. 7. Da velika števila lažje beremo, postavimo na desno zraven tisočic točko, zraven milijonov vejico, zraven biljonov dve vejici i. t. d. N. pr. 67,824.396,734.681 beremo: 67 biljonov 824 tisoč 396 milijonov 734 tisoč 681. — Narekovana števila lahko zapisavamo, ako številke zaporedoma od leve proti desni tako pišemo kakor jih izrekavamo; pri besedi milijoni naredimo vejico in pri besedi tisoč točko. S temi znaki razdelimo število v oddelke po 3 številke; če tedaj ne slišimo v enem oddelku treh števk, moramo v tem oddelku vsako neizrečeno število nadomestiti z ničlo. N. pr. napiši 42 milijonov 27 tisoč in devet; to se zgodi na sledeči način: 42,027.009; napačno bi pa bilo 42,27.9.

Naloge in vprašanja.

1. Napiši sledeča števila sè številkami, ki imajo: a) 2 desetic, 3 jedinice; b) 5 stotic, 6 desetic, 8 jedinc; c) 2 stotici, 3 jedinice; d) 5 stotic, 9 desetic; e) 8 stotic; f) 4 tisočice, 3 stotice, 5 desetic, 2 jedinici; g) 5 tisočic, 6 stotic, 3 desetice; h) 8 tisočic, 3 desetice; i) 9 milijonic; k) 25 milijonic, 3 tisočice, 5 stotic; l) 2 milijonice, 4 desetitisočice, 6 stotic.

2. Napiši števila prve naloge v podobi občnega izraza.

3. Napiši sledeča števila sè številkami: tri in trideset; šeststo pet in devetdeset; tri tisoč pet in sedemdeset; tristo tisoč in štiri; dva in devetdeset tisoč pet sto in dvajset.

4. Napiši vsa dekadicihna števila od 0 do 100 na enkrat.

Rešitev

$$b. 10 + a.$$

Kaj pomenite črki v dobljenem izrazu? — Kat'ro število v tem izrazu je največje, in kaj pomeni a in kaj b za to število?

5. Napiši na enkrat vsa dekadicihna števila med: a) 0—1000; b) 0—10000; c) 0—100000. —

Kaj pomenijo črke v dobljenih izrazih? — Katero število je največje v vsakem teh izrazov in kaj pomeni vsako občno število za to število?

6. Napiši vsa dekadicihna števila na enkrat, povej koliko je vseh in ali moremo največje povedati?

7. Namesti v izrazu

$$\dots + d.1000 + c.100 + b.10 + a$$

sledeče vrednosti:

$$a) a = 4, b = 5, c = 0, d = 6, e = 8, f = g = h = \dots = 0.$$

$$b) a = 0, b = 2 = c = 9, d = e = f = \dots = 0.$$

$$c) a = 8, b = 6, c = 3, d = 7, e = f = \dots = 0$$

i. t. d.

Kaj so številke? Koliko je vseh števil? Kake dobimo dekadicihne jednote? Katera števila so dekadicihna? Katero uredbo števil imenujemo dekadicihno?

8. Beri sledeča števila in napiši jih v obliki občnega izraza za dekadicihna števila: 312, 5047, 26, 27.340 — $3.100 + 1.10 + 2$ (beri tri stotice, 1 desetica, 2 jedinici).

9. a) Koliko jednot vsakega reda imajo sledeča števila: 527, 4356, 46009, 77544, 44000.

Število 527 ima 5 stotic 2 desetici in 7 jedinice ali $527 = 5.100 + 2.10 + 7$.

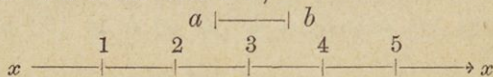
b) Koliko jedinice je v vseh raznovrstnih jednotah vsakega prejšnjega števila? Koliko desetic? Koliko stotic? Koliko tisočic? i. t. d.

V številu 527 je 527 jedinice, 52 desetic, 5 stotic.

10. a) Kako spremenimo vsako številko v številih 35, 628, 5094, 37826, če jim pripišemo 1, 2, 3, 4, 5 ničel na desni? — Kolikokrat je potem vsako število več?
- b) Ali tudi spremenimo mestno vrednost števk, če prejšnjim številom jedno ali več ničel na levi pripišemo? Zakaj ne?
- c) Ali smemo kako ničlo v številu izpustiti?

Načrtanje celih števil.

§. 8. Cela števila moramo tudi načrtati, kakor iz pridjane podobe vidiš. Na ravno črto x ,



katero si proti desni brezkončno dolgo mislimo, pokladaj ravno črto ab (črtno enoto) od začetka proti desni dalje; na tej črti potem vidiš vsa števila urejena po njihovej vrednosti in imenujemo jo številno ravnico.

Na številni ravnici je številna vrsta načrtana, moremo pa tudi na tak način vsako število za se načrtati.

Načrtaj števila: 5, 3, 6, 2, 8, 1, 9.

Prvi oddelek.

Računanje s celimi števili.

Seštevanje.

§. 9. Vsoto dveh števil a in b imenujemo število, katero ima toliko enot, kakor a in b skupaj. Števili a in b imenujemo seštevnik (sumanda). Kedar vsoto danih števil iščemo, jih seštevamo. Neznano vsoto pa dobimo, ako od števila a za b enot naprej štejemo.

Poišči vsoto števil 4 in 3, 5 in 7, 8 in 2, 6 in 9. (Na pamet.) Rešitev: 4 in 1 je 5 in 1 je 6 in 1 je 7 torej 4 in 3 je 7.

Vsoto a in b zapišemo

$$a + b.$$

Osnovna resnica.

Vsota občnih števil je občno število, t. j.

$$a + b = c.$$

Pišemo pa tudi $a + b = (a + b)$.

Opomba. Tukaj z oklepom () povemo, da si števili a in b sešteti mislimo; potem imenujemo c ali ($a = b$) izvršeno, $a + b$

pa samo nakazano vsoto števil a in b . Oklepa vsotne vrednosti ne spremeni, ter jo smemo izpustiti, kedar le hočemo.

Naloga. Namesti v enačbi

$$a + b = (a + b)$$

a in b s temi-le števili:

$a = 5$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 3$; $a = 4$, $b = 6$, $a = m$, $b = n$.

Vprašanja in vaje na pamet.

Kaj se pravi število 3 k številu 4 prištevati? Kako imenujemo števili 3 in 4? Katera števila sploh imenujemo sumande? Povej izvršeno vsoto števil 3 in 4 in potem nakazano! Kaj je vsota danih števil: 3 in 5, 2 in 7, 9 in 24, 8 in 34, 6 in 25, m in n .

§. 10. Vsoto več števil dobimo, ako prištevamo k prvemu številu drugo, k dobljeni vsoti tretje, k novi vsoti četrto število i. t. d. Potem je

$$3 + 5 + 7 + 6 = 8 + 7 + 6 = 15 + 6 = 21.$$

$$a + b + c = (a + b) + c.$$

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d.$$

Tudi tukaj imajo oklepe isti pomen, kakor v §. 9.

Namesti v 1. in 2. a , b , c , d s temi-le števili

$$a = 3, b = 2, c = 5, d = 8,$$

in izvrši seštevanje tako, kakor ti oklepe velé.

Vaje na pamet.

1. Seštevaj sledeča števila:

a) 3, 4 in 7, b) 4, 8, 9 in 2, c) 6, 5, 4 in 12, d) 20 in 30, f) 50 in 80, g) 200 in 300, h) 500 in 400.

2. a) Prištevaj začeni pri 1 toliko časa po 2, da prideš do 101; in toliko časa po 3, da prideš do 103, po 4 do 105 i. t. d.

b) Z 2 pričenši prištevaj zmerom po 2, da prideš do 100; po 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 da prideš do 100.

c) Pričenši s 3 prištevaj zmerom po 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, da prideš čez sto.

Izreki.

§. 11. Pojasnilo. Resnice, katere moremo iz ustanovljenih pojmov ali iz drugih že izpoznanih resnic izvoditi, imenujemo **dovode** ali **izreke**; tako izvodbo pa imenujemo **dokaz**.

I. Vsotne vrednosti ne spremeniš, ako sumande med seboj zamenjaš, t. j.

$$3 + 4 = 4 + 3, a + b = b + a,$$

$$4 + 6 + 5 = 5 + 6 + 4 = 6 + 5 + 4,$$

$$a + b + c = b + a + c = c + a + b = \dots$$

Dokaz: Množina sumandskih jednot ostane ista, naj sumande kakorkoli uredimo; torej ostane tudi vsotna vrednost nespremenjena.

II. K vsoti dveh števil prištevaš število, ako ga prišteješ k enemu številu, t. j.

$$(4 + 2) + 3 = (4 + 3) + 2 = 4 + (2 + 3) = 9$$

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

Dokaz. Ako jeden sumand za 3 (c) jednote povečamo, povečamo tudi število jednot v vsoti, t. j. vsoto samo za 3 (c) jednote.

Opomba 1. Kedar nakazano vsoto (račun) spet z drugimi števili kot celoto združimo, jo (ga) denemo v oklepo. V tem pomenu bomo oklepe mnogokrat rabili.

Opomba 2. V enačbah, katere pravila za kako številbo izražujejo, pomeni levi del nakazano nalogo, desni pa izvršitev te naloge. Oba dela sta si pa po veljavi enaka, ter zamenljiva. Ako v enačbi levi del z desnim zamenjamo, enačbo obrnemo.

Z enačbinim obratom pa leva in desna stran svojega pomena ne spremenite.

III. K številu prištevaš vsoto dveh števil, ako sumanda zaporedoma k njemu prišteješ, t. j.

$$4 + (2 + 3) = (4 + 2) + 3 = (4 + 3) + 2$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b.$$

Dokaz. Ta enačba je le obrat enačbe v. 2.

Primeri.

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 1. $(4 + x) \times 5 = ?$ | 2. $(a + 2) + 7 = ?$ |
| 3. $(12 + m) + 4 = ?$ | 4. $(p + q) + 7 = ?$ |
| 5. $8 + (1 + a) = ?$ | 6. $5 + (p + 3) = ?$ |
| 7. $(m + 3) + (4 + n) = ?$ | |

Izvršitev: Misli si vsoto $(4 + n)$ izvršeno, ter kot jedno samo število, potem dobiš

$$(m + 3) + (4 + n) = m + [3 + (4 + n)] = m + [7 + n].$$

Kako izvršiš to nalogo, ako si vsoto $(m + 3)$ kot jedno samo število misliš.

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 8. $(5 + c) + (3 + d) = ?$ | 9. $(6 + i) + (k + 12) = ?$ |
| 10. Seštevaj na pamet: | |
| a) $37 + 20 = (30 + 7) + 20 = ?$ | h) $518 + 300 = ?$ |
| b) $59 + 30 = ?$ | i) $50 + 39 = 50 + (30 + 9) = ?$ |
| c) $27 + 80 = ?$ | j) $80 + 79 = ?$ |
| d) $79 + 50 = ?$ | k) $400 + 315 = ?$ |
| e) $154 + 40 = (150 + 4) + 40 = ?$ | l) $34 + 15 = ?$ |
| f) $389 + 30 = ?$ | m) $42 + 68 = ?$ |
| g) $756 + 200 = ?$ | n) $315 + 422 = ?$ |

Vsote enakih sumandov.

§. 12. Sumandi morejo enaki biti, potem napišemo vsoto krajše. Pred večkratni sumand postavimo število, katero pove, kolikokrat sumand v vsoti nahajaš. N. pr.

$$a + a + a + a = 4a$$

$$a + a + a + \overbrace{a + a + a}^{b\text{-krat}} + a = ba$$

Vsoto b sumandov, izmed katerih je vsak enak a , imenujemo **izvod** (produkt) števil a in b . Število a imenujemo **množenec** (multiplikand), število b pa **množilec** (multiplikator), in vsako tudi **množnik** (faktor). Kedar iščemo produkt števil a in b t. j. $b \cdot a$ (beri b krat a), **množimo**. Množenje zaznačimo z znakom $\times$ ali $\cdot$, katerega pa tudi izpustimo, če le nista oba faktorja posebni števili.

Osnovna resnica: Produkt občnih števil je občno število, t. j.

$$a \cdot b = c$$

Pišemo pa tudi

$$a \cdot b = (a \ b)$$

O pomenu oklepe glej §. 9.

Naloga. Namesti v enačbi

$$a \cdot b = (ab)$$

a in b sè temi-le števili:

$$a = 5, 7, 4, m; \quad b = 2, 3, 6, n.$$

Vprašanja in vaje na pamet.

1. Kaj se pravi število 5 sè številom 3 množiti? Kako se imenujete števili 5 in 3? Kaj je multiplikand? Kaj je multiplikator? Kako še imenujemo ti števili? Povej izvršen produkt teh števil, potem pa njilovi nakazani produkt. Odgovori na ta vprašanja še za te-le faktorje: 2 in 5, 4 in 7, m in n .

2. Izvrši: 5×8 , 6×9 , 10×8 , 3×2 , $a \times b$.

§. 13. V izrazih $5a$, $7b$, $12x$ i. t. d. imenujemo 5, 7, 12 i. t. d. **koficijente**, a , b , x pa **glavne količine**. Ravno tako moremo v ba b koficijent imenovati.

Ker je

$$a = 1a$$

ima vsaka glavna količina koficijent 1, če ne družega, akoravno ga ne pišemo. Izraze z isto glavno količino imenujemo **istoimenske**, n. pr. $3x$ in $5x$; izraze raznih glavnih količin pa **raznoimenske**, n. pr. $7a$ in $8b$. V istoimenskih izrazih je glavna količina **skupen faktor**.

Vaje.

1. Izberi iz izrazov

$$2x, 3y, 5x, 7y, 8y, 9x, 12y$$

vse istoimenske skupaj. Zakaj imenujemo zbrane izraze istoimenske? Zakaj niso vsi navedeni izrazi istoimenski?

2. Imenuj mi nekoliko istoimenskih in nekoliko raznoimenskih izrazov.

§. 14. Istoimenske izraze seštevaš, ako vsoto koeficijentov pred skupno glavno količino postaviš, t. j.

$$2a + 4a = 6a, ma + na = (m + n)a.$$

Dokaz: V $2a$ imamo a 2krat, v $4a$ pa 4krat, torej v $2a$ in $4a$ 2krat in 4krat, ali 6krat, t. j.

$$2a + 4a = 6a.$$

Na isti način dokaži to resnico v obče.

Ker je glavna količina skupen faktor sledi iz dobljenega: Skupen faktor dveh sumandov smeš samo enkrat napisati, ako vsoto različnih faktorjev v oklepo zraven njega postaviš. V tem slučaju skupni faktor izločiš.

Primeri.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $5b + 3b = ?$ | 2. $ax + bx = ?$ |
| 3. $(3a + 2b) + 5a = ?$ | 4. $(mp + nr) + ap = ?$ |
| 5. $(7m + 3n) + 5n = ?$ | 6. $(ay + bx) + cx = ?$ |
| 7. $6a + (4a + 5b) = ?$ | 8. $12p + (3r + 7p) = ?$ |
| 9. $(8c + 5h) + (3c + 6h) = ?$ | 10. $(ay + bz) + (my + nz) = ?$ |
| 11. $3m + 2m + m = ?$ | 12. $5a + 3b + 2a + 4b = ?$ |
| 13. $3x + 5y + 2z$ | 14. $(2 + m)k + (3 + n)l$ |
| $2x + 3y + z$ | $(5 + 2m)k + (1 + 4n)l$ |
| $x + 7y + 5x$ | $(7 + 5m)k + (8 + 3n)l$ |

$$15. \begin{array}{l} (x + y)a + (v + z)b \\ (x + y)c + (v + z)d \end{array}$$

$$16. \begin{array}{l} (i + k)(l + m) + (2r + s)(t + u) \\ (i + k)(2l + 3m) + (2r + s)(3t + 2u) \end{array}$$

17. Izštevili vrednost izrazov:

$$a) (6m + n) + (3m + n) + (5m + 4n) = ?$$

$$b) \{[(5m + n) + (5m + 3n) + 2n] + (6m + 7n) + m\} = ?$$

za $m = 8, n = 5$.

Seštevanje imenastih števil.

§. 15. Imenasti števili, kateri se ozirate na isto jednoto, imenujemo **istovrstni**, n. pr. števili 6 fl. in 8 kr.

Imenuj še druga istovrstna števila in skupno jednoto.

Imenuj raznovrstna števila.

Količina A naj ima e za jednoto in a tacih jednot potem je

$$A = ae$$

Število a imenujemo **mero** količine A . — Kaj pomenijo v številih „5 $\frac{d}{m}$ 3 $\frac{g}{l}$, 7 fl. i. t. d.“ količine A , a in e ? — Katero količinsko jednoto 3krat, 5krat, 7krat i. t. d. zaporedoma nahajaš?

Imenasta števila z enako imenasto jednoto seštevaš, ako njihove mere seštevaš, t. j.

$$A + B = (a + b) e$$

kjer je $A = ae$, $B = be$. Sledi iz prejšnjega §.

Primeri.

- | | |
|---|--|
| 1. 2 fl. + 5 fl. = ? | 2. 3 $\frac{h}{g}$ + 6 $\frac{h}{g}$ = ? |
| 3. 50 kr. + 24 kr. + 62 kr. = ? | 4. 5 $\frac{g}{l}$ + 8 $\frac{g}{l}$ + 3 $\frac{g}{l}$ = ? |
| 5. 12 $\frac{h}{g}$ 3 $\frac{d}{m}$ 8 $\frac{g}{l}$ | 6. 2 $\frac{m}{l}$ 3 $\frac{d}{m}$ 6 $\frac{c}{m}$ |
| 5 „ 4 „ 5 „ | 3 „ 5 „ 4 „ |
| 2 „ 9 „ 2 „ | 4 „ 6 „ 7 „ |

Seštevanje dekadičnih celih števil.

§. 16. Izvrši te-le naloge:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ 3 jednote} \\ + 4 \text{ „} \end{array} \right\} \text{ jedinice, ali desetice, ali stotice i. t. d.}$$

7 jednot.

$$\begin{array}{l} 2. \text{ 8 jednot} \\ + 6 \text{ „} \end{array}$$

14 jednot = 1 jednota sledečega viš. reda + 4 jednote danega reda.

3. 5 jednot	4. 6 jednot	5. a jednot	$a + b < 10$
+ 8 „	+ 2 „	+ b „	
+ 9 „	+ 7 „		

6. a jednot	$a + b > 10$
+ b „	

$$\begin{array}{l} 7. \text{ 512} = 5.100 + 1.10 + 2 \\ + 425 = 4.100 + 2.10 + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8. \text{ 6038} = 6.1000 + 0.100 + 3.10 + 8 \\ + 3124 = 3.1000 + 1.100 + 2.10 + 4 \\ \hline 9162 = 9.1000 + 1.100 + 6.10 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9. \text{ } \check{S}_1 = a_1 100 + b_1 10 + c_1 \\ + \text{ } \check{S}_2 = a_2 100 + b_2 10 + c_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \check{S}_1 = \dots + a_1 100 + b_1 10 + c_1 \\
 & + \check{S}_2 = \dots + a_2 100 + b_2 10 + c_2 \\
 & + \check{S}_3 = \dots + a_3 100 + b_3 10 + c_3 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Kako torej seštevamo dekadična cela števila? —

11. Izpeljži še iz teh-le primerov pravilo za seštevjanje dekadičnih števil:

a) 315	b) 6905	c) 25832	d) B_1
+ 223	+ 3216	+ 34246	+ B_2

1. Nekdo petero kapitalov izposodi, kateri posamezni 256 fl. 26 kr., 102 fl. 86 kr., 93 fl. 59 kr., 166 fl. 88 kr., 427 fl. 75 kr. avstr. velj. letnih obresti prineso; koliko zneso vse obresti skupaj? — Vse obresti zneso 256 fl. 26 kr., in 102 fl. 86 kr. in 93 fl. 59 kr. in 166 fl. 88 kr. in 427 fl. 75 kr. skupaj, t. j.

256 fl. 26 kr.

102 „ 86 „

93 „ 59 „

166 „ 88 „

427 „ 75 „

1047 fl. 34 kr.

2. V neki tiskarni so tiskarskega popirja porabili: 3 bale 7 risov 5 bukev + 5 bal 2 risa + 2 bali 9 risov, 15 bukev + 4 bale 16 bukev + 3 bale 8 risov 10 bukev. Koliko vsega skupaj?

3. Vinsk kupec ima trojno vino in sicer: 146 $\mathcal{H}_h$ 75 $\mathcal{q}$, 295 $\mathcal{H}_h$, 80 $\mathcal{q}$ in 584 $\mathcal{H}_h$ 50 $\mathcal{q}$. Koliko vsega skupaj?

4. Neka kmetija ima: 43 hektarov 85 arov njiv, 36 $\mathcal{H}_a$ 58 $\mathcal{a}$ travnikov, 16 $\mathcal{H}_a$ vinogradov in 102 $\mathcal{H}_a$ 50 $\mathcal{a}$ gojzdvov. Koliko je celo posestvo?

5. 24 $\square^m$	47 $\square^d_m$	90 $\square^c_m$	6. 346 $\bigcirc^m$	715 $\bigcirc^d_m$	403 $\bigcirc^c_m$
179 „	95 „	16 „	87 „	93 „	670 „
203 „	— „	72 „	42 „	215 „	84 „
170 „	85 „	— „	130 „	66 „	9 „

Odštevanje.

§. 17. Razliko ali diferenco $a-b$ (beri „ a manj b “) števil a in b imenujemo ono število, k kateremu b prišteto a za vsoto dá, t. j.

$$(a - b) + b = a$$

Število a imenujemo zmanjševanec (minuend) število b pa zmanjševalec, odštevanec (subtrahend).

Diferenco števil a in b dobimo, t. j. od števila a odštevamo število b , ako od števila a za b jednot nazaj štejemo. N. pr. $8 - 3 = 8$ mánj 1 je 7 mánj 1 je 6 mánj 1 je 5; torej je 8 mánj 3 enako 5.

Izračunaj še te-le difference: $6 - 2$, $9 - 5$, $8 - 6$.

Osnovna resnica: Diferenca obéhnih števil je obéno število, t. j.

$$a - b = c.$$

Pišemo pa tudi

$$a - b = (a - b)$$

Glej opombo v oklepi v §. 9.

Naloga: Namesti v enačbi

$$a - b = (a - b)$$

a in b s temi-le števili:

$a = 5, 7, 9, 12, m$; $b = 2, 3, 5, 4, n$.

Vprašanja in vaje na pamet.

1. Kako odštevamo število 5 od števila 8? Kako imenujemo števili 8 in 5? Katera število imenujemo minuend, katero subtrahend? Povej izvršeno diferenco teh števil; povej njihovo nakazano diferenco. — Kaj je diferenca števil 8 in 5?

Odgovori na ta vprašanja še za te-le pare števil: $8 - 6$, $7 - 2$, $24 - 9$, $m - n$.

2. Odštevaj 8 od 15, 20 od 48, 25 od 30, 49 od 90.

§. 18. Iz pojmov vsote in difference naravnost ti-le izreki slede:

$$\begin{array}{ll} (a + b) - b = a & (8 + 4) - 4 = 8 \\ a - (a - b) = b & 8 - (8 - 4) = 4 \\ a - a = 0 & 8 - 8 = 0 \end{array}$$

Izrazi sam te enačbe z besedami. Iz

$$(a - b) + b = a$$

$$(a + b) - b = a$$

tudi sledí:

Vrednost števila ne spremeniš, ako k njemu isto število prišteješ in odšteješ in narobe.

Odštevanje je tedaj seštevanju nasprotno.

Vaje.

1. Odštevaj: 5 od 8 in prištevaj k dobljeni diferenci 5

8	12	„	„	„	„	5
15	23	„	„	„	„	15
m	n	„	„	„	„	m

2. Seštevaj 7 in 9 in odštevaj od dobljene vsote 9

5	„	12	„	„	„	„	„	5
4	„	9	„	„	„	„	„	4
m	„	n	„	„	„	„	„	n

Izreki o diferencah.

§. 19. Od vsote odštevaš število, ako ga od enega sumanda odšteješ, t. j.

$$(5 + 3) - 4 = (5 - 4) + 3 = 4, \quad (3 + 8) - 6 = 3 + (8 - 6) = 5$$

$$(a + b) - c = (a - c) + b \quad 1) \quad (a + b) - c = a + (b - c) \quad 2)$$

Dokaz 1). Ako smo brez pogreškov odštevali, mora vsota difference in subtrahenda minuendu enaka biti, t. j.

$$[(a - c) + b] + c = a + b \text{ ali}$$

$$[(a - c) + c] + b = a + b \text{ (glej §. 11, 2) ali}$$

$$a + b = a + b \text{ (glej §. 18),}$$

kar je na vsak način res, ter je naše pravilo pravo.

Opomba. Izraz $[(a - c) + b]$ imenujemo diferenco, ker je znesek odštevanja, po obliki pa ga imenujemo vsoto.

Dokaži 2) na enaki način.

Vaje.

1. Izračuni po tem pravilu:

$$a) (9 + 1) - 4 = ? \quad b) (5 + 8) - 6 = ? \quad c) (m + n) - p = ?$$

$$d) (a + m) - a = ? \quad e) (5x + 3y) - 3y = ?$$

2. Izračuni na pamet

$$a) 435 - 35 = (400 + 35) - 35 \text{ i. t. d.}$$

$$b) 869 - 500 = (800 + 69) - 500 \text{ i. t. d.}$$

$$c) 582 - 40 = ?$$

$$d) 758 - 48 = ?$$

$$e) 956 - 800 = ?$$

$$f) 1248 - 600 = ?$$

§. 20. K številu prištevaš diferenco, ako v poljubnem redu minuend prišteješ in subtrahend odšteješ, t. j.

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.$$

Dokaz. Ta enačba je le obrat enačb v § 19.

Vaje.

$$1. 6 + (8 - 7) = ?$$

$$2. 3 + (4 - 2) = ?$$

$$3. 5 + (4 - x) = ?$$

$$4. 8 + (a - 2) = ?$$

$$5. m + (n - p) = ?$$

$$6. 5m + (n - 5m) = ?$$

$$7. 15y + (2y - 8) = ?$$

8. Izštevíli na pamet :

$$a) 65 + 29 = 65 + (30 - 1) = 95 - 1 = 94.$$

$$b) 415 + 87 = ? \quad c) 537 + 58 = ?$$

$$č) 645 + 89 = ? \quad e) 5448 + 406 = ?$$

§. 21. Od števila odštevaš vsoto, ako zaporedoma vsak sumand odšteješ, t. j.

$$8 - (5 + 2) = (8 - 5) - 2 = (8 - 2) - 5 = 1$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$$

Dokaz. Ker je

$$(b + c) + [(a - b) - c] = [(b + c) - c] + (a - b) \text{ (glej §. 20)}$$

$$= b + (a - b) = a \text{ (glej §. 11 in §. 17)}$$

je prva diferenca $[(a - b) - c]$ prava. — Dokaži na isti način, da je diferenca $[(a - c) - b]$ prava.

Vaje.

$$1. 9 - (3 + 2) = ? \quad 2. 15 - (7 + 10) = ?$$

$$3. 12 - (5 + a) = ? \quad 4. 10 - (2m + 3) = ? \quad 5. m - (n + p) = ?$$

$$6. 4x - (4x + y) = ? \quad 7. 7z - (2v + 7z) = ?$$

8. Izštevíli na pamet :

$$a) 546 - 56 = 546 - (46 - 50) = \text{i. t. d.}$$

$$b) 328 - 50 = ? \quad c) 876 - 335 = ?$$

§. 22. Od difference odštevaš število, ako ga od minuenda odšteješ, ali pa k subtrahendu prišteješ.

$$(8 - 2) - 4 = (8 - 4) - 2 = 8 - (4 + 2)$$

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$$

Dokaz sledi iz §. 21, ako enačbo obrnemo.

Vaje.

$$1. (12 - 3) - 8 = ?$$

$$2. (16 - 5) - 5 = ?$$

$$3. (12 - m) - 9 = ?$$

$$4. (5z - 14) - 10 = ?$$

$$5. (21 - 8a) - 9 = ? \quad 6. (m - n) - p = ? \quad 7. (3p - 8r) - 7r = ?$$

8. Izštevíli na pamet :

$$a) 652 - 68 = (668 - 16) - 68 = ? \text{ i. t. d.}$$

$$b) 422 - 345 = ? \quad c) 5649 - 460 = ?$$

§. 23. Od števila odtševaš difference, ako odšteješ minuend in prišteješ subtrahend, t. j.

$$8 - (4 - 3) = (8 - 4) + 3, \quad 5 - (6 - 2) = (5 + 2) - 6.$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c = a + c - b.$$

Dokaz. Ker je

$$[(a - b) + c] + (b - c) = (a - b) + [c + (b - c)] \text{ (glej §. 11, 2)}$$

$$= (a - b) + b \text{ (§. 11, 1 in 17)}$$

$$= a,$$

torej je gornje odštevanje brez pogreška. — Na isti način dokaži, da je $(a + c) - b$ prava diferenca.

Vaje.

1. $12 - (10 - 3) = ?$
2. $5 - (8 - 6) = ?$
3. $8 - (6 - x) = ?$
4. $m - (n - p) = ?$
5. $5a - (y - 4a) = ?$
6. $15m - (15m - 4n) = ?$
7. $10z - (8v - 5z) = ?$

8. Izštevali na pamet:

a) $67 - 38 = 67 - (40 - 2) = \text{i. t. d.}$

b) $492 - 296 = ?$ c) $783 - 580 = ?$

§. 24. K diferenci prištevaš število, ako ga k minuendu prišteješ ali od subtrahenda odšteješ, t. j.

$$(8 - 5) + 6 = (8 + 6) - 4, (9 - 6) + 5 = 9 - (6 - 5)$$

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$$

Dokaz sledi iz enačbe §. 23, ako jo obrnemo.

Vaje.

1. $(8 - 3) + 4 = ?$
2. $(10 - 8) + 5 = ?$
3. $(6x + 5y) + 2x = ?$
4. $(m - n) + p = ?$
5. $(8a - 3b) + 3b = ?$
6. $(15m - 2n) + 3m = ?$
7. $(7s - 12) + 9 = ?$

8. Izštevali na pamet:

a) $95 + 76 = (100 - 5) + 72 = \text{i. t. d.}$

b) $93 + 62 = ?$ c) $498 + 315 = ?$

Odštevanje istoimenskih izrazov.

§. 25. Istoimenske izraze odštevaš, ako diferenco koeficientov pred skupno glavno količino postaviš, t. j.

$$6a - 4a = 2a, ma - na = (m - n)a$$

Dokaz: V $6a$ imamo a 6krat, v $4a$ pa 4krat, torej v $6a$ menj $4a$, 6krat menj 4krat, ter 2krat, t. j.

$$6a - 4a = 2a$$

Na isti način dokažemo to resnico v obče. a je skupen faktor, in ga tudi v tem slučaju izločiti smemo (glej §. 14); povej pravilo! kako?

Vaje.

1. $8m - 5m = ?$
2. $15x - 10x = ?$
3. $ay - by = ?$
4. $mz - nz = ?$
5. $(8p + 3r) - 3p = ?$
6. $(7t + 9v) - 4v = ?$
7. $(am + bn) - cm = ?$
8. $4x + (5x - 2y) = ?$
9. $8k + (6l - 3k) = ?$
10. $mp + (np - 4) = ?$
11. $7c - (4c + 2d) = ?$
12. $12y - (4x + 5y) = ?$
13. $ax - (cx + cy) = ?$
14. $(14m - 5n) - 5m = ?$

- | | |
|---------------------------------|--|
| 15. $(10a - 6b) - 4b = ?$ | 16. $(ax - by) - cx = ?$ |
| 17. $(mp - nr) - sr =$ | 18. $8x - (6x - 5y) = ?$ |
| 19. $3a - (5b - 2a) = ?$ | 20. $ax - (bx - cy) = ?$ |
| 21. $mz - (nv - pz) = ?$ | 22. $(5k - 2l) + 2k = ?$ |
| 23. $7x - 9y) + 2y = ?$ | 24. $(ax - by) + cx = ?$ |
| 25. $(mz - nv) + pv = ?$ | 26. $(4a + 3b) + (3a - 2b) =$
$[4a + (3a - 2b)] + 3b = \text{i. t. d.}$ |
| 27. $(7x - 2y) + (2y + 3y) = ?$ | 28. $(2z - 3v) + (4v - 2z) = ?$ |
| 29. $(5y + 2z) - (3y - z) = ?$ | 30. $(2a - 4b) - (a - 6b) = ?$ |

§. 26. V izrazih

1. $[(a + b) + c] + d$, 2. $[(a + b) - c] - d$

in v družih podobnih kažejo oklepe, kako moramo zaporedoma od leve proti desni seštevanje in odštevanje danih števil izvrševati; to pa tudi že znaki $+$ in $-$ izrazijo, ter smemo oklepe tudi izpustiti, brez da bi kaj pogrešili. Potem dobimo iz onih izrazov

1. $a + b + c + d$, 2. $a + b - c - d$ i. t. d.

Znaki $+$ in $-$ razdele izraz v več delov ali členov in imenujemo ga **mногоčlenski izraz** ali **mногоčlenik** (polinom). V posebnem imenujemo izraz z dvema členoma **dvočlenik** (binom), s tremi členi **tročlenik** (trinom) in za se stoječ člen **enočlenik** (monom). Členi z znakom $+$ so **dodajalni** (aditivni) in z znakom $-$ **odjemalni** (subtraktivni). Znak $+$ pred prvim členom navadno izpustimo. Ako imamo v polinomu istoimenske člene, jih moremo v en sam člen skrčiti. N. pr.

$$3a - 4b + 5a - 3b - 2a = 6a - 7b.$$

Vaje.

Skrči te-le izraze:

1. $5y - 2y + 3y - 6y = ?$ 2. $5x - 2x + 4x - 3y = ?$
3. $5a - 2b - 3b + 5a + 8b - 9a = ?$

Narobe pa moremo v vsakem polinomu oklepe ponoviti. N. pr.

$$a - b + c - d = [(a - b) + c] - d.$$

- §. 27. 1. Naloga. Seštevaj število m in mnogočlenik $a - b + c$.
Izvršitev: $m + (a - b + c) = m + ([a - b] + c)$ (glej §. 26).
 $= (m + [a - b]) + c$ (glej §. 11, 3).
 $= [(m + a) - b] + c$ (glej §. 20).
 $= m + a - b + c$ (glej §. 26).

Število in mnogočlenik seštevaj, ako člene z nespremenjenimi znaki k številu pripišeš, in ako mogoče, dobljeni polinom skrčiš.

Vaje.

1. $4x + (2y - 5z - 4x) = ?$ 2. $(2a - 3b + 4c) + 5b = ?$
3. $(7x - 3y + 5z) + (2x - 3y + 4z) = ?$

2. Naloga. Odštečaj od števila m polinom $a - b + c$
 Izvršitev $m - (a - b + c) = m - [(a - b) + c] =$
 $= [m - (a - b)] - c$
 $= [(m - a) + b] - c$
 $m - (a - b + c) = m - a + b - c.$

Polinom od števila odštevaš, ako njegove člene s protivrtnimi znaki k njemu pripišeš.

Vaje.

1. $5a - (3a - 2b + 7c) = ?$ 2. $6x - (2m - 5n + 6x) = ?$
3. $(4t - 2u - 9v) - (3t - 5u - 6v) = ?$

Opomba o oklepah. Ako so polinomi z oklepami zvezani, moreš oklepo polinoma, pred katero znak $+$ stoji, naravnost izpustiti; oklepo pa, pred katero znak $-$ stoji, tudi, ako v njej stoječe člene — ki so spet lahko polinomi — s protivnim znakom vzameš. Tako spremembo polimonomov imenujemo **razrešitev oklep**. Narobe tudi moreš več členov polinoma v oklepo dati in sicer brez spremembe ali pa s spremembo znakov, ako postaviš znak $+$ ali $-$ pred oklepo.

Vaje.

1. Razreši oklepe v sledečih izrazih in skrči:

- a) $8x + (5x - 8a) + (8a - 3x) - 6x = ?$
- b) $7a + (8a - 2b) + (9 - 2a) - 10 = ?$
- c) $(6 - x) + (2 + 3x) - (4 - 5x) = ?$
- č) $(9x - 7y) + (2x + 3y) - (5x - 8y) = ?$
- d) $(2x - 3y) + [5x + (6y - 1)] = ?$

2. Deni sledeče izraze v oklepo in sicer postavi enkrat + drugokrat — pred oklepo,

- a) $5x - 2y + 3 = ?$ b) $7a + 2b - 3c - 5 = ?$
- c) $6m - 3n - 5x + 2y = ?$ č) $- 3x - 2y - 4z = ?$

3. Izštevi vrednost izrazov:

- a) $(2m - n) - (3m - 2n) + (5m - n) = ?$
- b) $\{[(5m - n) - (4m + 3n) - 2n] - (6m - 7n) + 20m\} = ?$

Odštevanje imenastih števil (glej §. 15).

§. 28. Imenasta števila z enako imenasto jedrno odštevaš, ako njihove mere odštevaš, t. j.

$$A - B = (a - b) c.$$

Dokaz sledi iz §. 25.

Vaje.

$$\begin{array}{r} 1. \quad 8 \text{ } \frac{1}{g} - 5 \text{ } \frac{1}{g} = ? \\ 3. \quad 2 \text{ } \frac{m}{g} \quad 5 \text{ } \frac{d}{m} \quad 3 \text{ } \frac{c}{m} \\ - 2 \quad \text{ } \text{ } 3 \quad \text{ } 2 \quad \text{ } \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 12 \text{ } \frac{h}{g} - 84 \text{ } \frac{D}{g} = ? \\ 4. \quad 12 \text{ } \frac{m}{g} \quad 4 \text{ } \frac{d}{m} \quad 2 \text{ } \frac{c}{m} \\ - 6 \quad \text{ } \text{ } 8 \quad \text{ } 7 \quad \text{ } \end{array}$$

Odštevanje dekadičnih celih števil.

§. 29. Izvrši te-le naloge:

$$\begin{array}{r} 1. \quad 8 \text{ jednot} \\ - 5 \text{ jednot} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 1. \quad 8 \text{ jednot} \\ - 5 \text{ jednot} \end{array}} \right\} \text{ jedinic ali desetih ali stotih i. t. d.} \\ \quad \quad \quad 3 \text{ jednote.}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 9 \text{ jednot} \\ - 6 \quad \text{ } \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2. \quad 9 \text{ jednot} \\ - 6 \quad \text{ } \end{array}} \right\} \begin{array}{r} 3. \quad 7 \text{ jednot} \\ - 6 \quad \text{ } \end{array} \quad \begin{array}{r} 4. \quad a \text{ jednot} \\ - b \quad \text{ } \end{array} \quad a > b$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 574 = 5.100 + 7.10 + 4 \\ - 243 = 2.100 + 4.10 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4.100 \quad \quad 10.10 \\ 6. \quad 4527 = 4.1000 + 5.100 + 2.10 + 1 \\ - 351 = \quad \quad \quad 3.100 + 5.10 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.1000 + 2.100 - 3.10 + 6 \text{ ali} \\ 4.1000 + 1.100 + 7.10 + 6. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 5432 = \\ - 3025 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad \check{S}_1 = a_1 \cdot 100 + b_1 \cdot 10 + c_1 \quad b_1 < b_2 \\ - \check{S}_2 = a_2 \cdot 100 + b_2 \cdot 10 + c_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad \check{S}_1 = \dots + a_1 \cdot 100 + b_1 \cdot 10 + c_1 \\ - \check{S}_2 = \dots + a_2 \cdot 100 + b_2 \cdot 10 + c_2 \end{array}$$

Kako torej odštevamo dekadična cela števila?

10. Izpelji še iz teh-le primerov pravilo za odštevanje dekadičnih števil:

$$\begin{array}{r} a) \quad 335 \quad \quad b) \quad 6905 \quad \quad c) \quad 25832 \quad \quad d) \quad B_1 \\ - 223 \quad \quad - 3216 \quad \quad - 4246 \quad \quad - B_2 \end{array}$$

1. Koliko ostane, ako 162 $\frac{h}{g}$ 78 $\frac{D}{g}$ 7 $\frac{g}{g}$ od 285 $\frac{h}{g}$ 64 $\frac{D}{g}$ 8 $\frac{g}{g}$ odšteješ? — 285 $\frac{h}{g}$ 64 $\frac{D}{g}$ 8 $\frac{g}{g}$ menj 162 $\frac{h}{g}$ 78 $\frac{D}{g}$ 7 $\frac{g}{g}$ t. j.

$$\begin{array}{r} 285 \text{ } \frac{h}{g} \quad 64 \text{ } \frac{D}{g} \quad 8 \text{ } \frac{g}{g} \\ 162 \text{ } \text{ } \quad 78 \text{ } \text{ } \quad 7 \text{ } \text{ } \\ \hline 122 \text{ } \text{ } \quad 86 \text{ } \text{ } \quad 1 \text{ } \text{ } \end{array}$$

2. Nekdo kupi za 2540 fl. 60 kr. blaga in ga prodá za 2691 fl. 75 kr., koliko ima dobička?

3. Sod, ki je z blagom napolnjen, tehta 4 cente in 56 funtov 20 lotov; koliko tehta blago?

4. Preširen je bil v Vrbi na Gorenjskem 3. decembra 1800 rojen in je 8. februarja 1849 leta umrl; koliko je bil star?

5. Cesar Franc I. je umrl 2. marca 1835 67 let 18 dni star; kedaj je bil rojen?

6. Naš cesar Franc Jožef I. je vladarstvo 2. decembra 1848 nastopil in je bil 18 let 3 mesce 14 dni star; kedaj je bil rojen?

§. 30. Seštevanje in odštevanje enačb in neenačb.

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{array}{l} 3 = 3 \\ 5 = 5 \\ \hline 8 = 8 \end{array} & \begin{array}{l} a = a \\ b = b \\ \hline a+b = a+b; \end{array} & 2. \begin{array}{l} 8 = 8 \\ 2 = 2 \\ \hline 6 = 6 \end{array} & \begin{array}{l} a = a \\ b = b \\ \hline a-b = a-b; \end{array} & a > b \\
 3. \begin{array}{l} 3 = 3 \\ 5 > 2 \\ \hline 8 > 5 \end{array} & \begin{array}{l} a = a \\ b > c \\ \hline a+b = a+c \end{array} & 4. \begin{array}{l} 8 > 3 \\ 2 = 2 \\ \hline 10 > 5 \end{array} & \begin{array}{l} a > b \\ c = c \\ \hline a+c > b+c \end{array} & \\
 5. \begin{array}{l} 10 > 6 \\ 3 = 3 \\ \hline 7 > 3 \end{array} & \begin{array}{l} a > b \\ c = c \\ \hline a-c > b-c \end{array} & 6. \begin{array}{l} 7 > 3 \\ 5 > 2 \\ \hline 12 > 5 \end{array} & \begin{array}{l} a > b \\ c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array} & \\
 & 7. \begin{array}{l} 4 > 4 \\ 2 < 3 \\ \hline 3 > 1 \end{array} & \begin{array}{l} a > b \\ c < d \\ \hline a-c > b-a \end{array} & &
 \end{array}$$

Izrazi 1. do 7. z besedami!

1. Enako k enakemu prišteto, dá enako i. t. d.

Opomba. Veljavnost občnih rezultatov v 1. in 2. sledi iz nasebne resnice 7. v §. 4.

Veljavnost občnih rezultatov v 3. do 7. pa sklepaj iz veljavnosti vsakega slučaja s posebnimi števili. N. pr. tako-le:

$$\begin{array}{lll}
 3 = 3 & 7 = 7 & 9 = 9 \\
 5 > 2 & 6 > 3 & 4 > 1 \quad \text{i. t. d.} \\
 \hline
 8 > 5 & 13 > 10 & 13 > 10 \\
 \text{torej sploh} & a = a & \\
 & b > c & \\
 & \hline
 & a+b > a+c &
 \end{array}$$

Algebrajska števila.

Vaje na pamet.

§. 31. 1. Štej od števila 35 do 12 nazaj; od 48 do 26 (glej §. 1).

2. Štej od števila 42 za 8 jednot nazaj; od 75 za 3 jednote.

3. Štej od števila 4 za 4 jednote nazaj; od 12 za 12 jednot.

4. Štej od števila 4 za pet jednot nazaj. — Odgovor: Od števila 4 moremo le za 4 jednote nazaj šteti; moralo bi se pa to še z 1 jedното zgoditi, kar je nemogoče.

5. Štej od števila 8 za 10, 11, 12, 13 i. t. d. jednot nazaj.

Nalogi 4. in 5. zahtevate, da bi za več jednot nazaj šteli, kakor je mogoče; akoravno pa tega v resnici storiti ne moremo, moremo vendar z matematičnim znakom zapisati, da bi se to imelo zgoditi. Ta znak je — (mànj, minus), katerega pred število postavimo. N. pr. — 1 pomeni, da bi še za 1 jednoto nazaj šteti morali.

Vprašanje: Kaj pomenijo sledeča števila: — 2, — 3, — 4, — a ?

Števila z znakom — pred seboj imenujemo **nikavna** (negativna). Negativnim številom nasproti stojé števila naravne številne vrste, in te imenujemo **pozitivna** števila. Pred pozitivna števila postavimo znak + katerega pa tudi izpustiti smemo. N. pr. $+ a = a$.

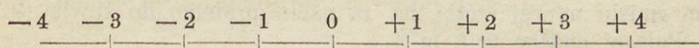
Negativna in pozitivna števila imenujemo **oziravna** (relativna) ali **algebrajska** števila; števila brez znakov + ali — pa **nasebna** (absolutna) števila.

Pri vsakem algebrajskem številu moramo na njegov znak in na številno vrednost gledati. Znak pove, **kakošne lastnosti** je število, številna veljava pa, **koliko jednot** z znakom določene lastnosti ima število.

Razno zaznačeni števili z isto številno vrednostjo imenujemo **protivni**. Ako negativna števila s pozitivnimi vvrstimo, dobimo sledečo algebrajsko vrsto.

. . . . — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0 + 1, + 2, + 3, + 4, + 5

Vrsto algebrajskih števil moremo tudi načrtati, kakor kaže sledeča podoba



Tako ravnico imenujemo **algebrajsko številno ravnico** (glej §. 8).

Vaje.

§. 32. Nekdo ima prvi dan meseca januarja 20 fl. **premoženja** in porabi vsak dan 1 fl.; koliko ima na koncu meseca?

Odgovor: Zadnji dan meseca ima — 11 fl. premoženja, ali kakor navadno rečemo 11 fl. dolga. Po tem primeru pomeni znak — dolg, znak + pa premoženje.

2. Nekega dne kaže toplomer ob dveh popoldne 3° gorkote; koliko kaže ob devetih zvečer, če vsako uro za jedno stopinjo pade?

Odgovor: Ob devetih zvečer kaže — 4° gorkote ali 4° mraza. Po tem primeru pomeni znak — mraz, znak + pa gorkoto.

3. Barka jadra od doma proti jugu in pride že 20 kilometrov daleč, ko se vzdigne vihar in jo naravnost proti severu in

sicer vsako uro za 1 kilometer nazaj žene; kako daleč proti jugu prijadra barka od svojega doma, ako vihar 24 ur traja?

Odgovor: — $4 \frac{k}{m}$ daleč ali $4 \frac{k}{m}$ na nasprotno stran. Po tem primeru pomeni znak — mer proti severu in znak + mer proti jugu.

4. Povej sam kak primer, iz katerega pomen pozitivnih in negativnih števil posnamemo:

Iz navedenih primerov vidimo, da pozitivna in negativna števila niso samo matematična domišljija, ampak tudi potrjena od praktičnega življenja in narave; negativno število pomeni zmerom nekaj nasprotnega od pozitivnega.

Seštevanje in odštevanje algebraskih števil.

§. 33. Pojma vsote in difference moremo tako razširiti, da tudi za algebraska števila veljata.

Vsoto števil $\pm a$ in $\pm b$, t. j. $(\pm a) + (\pm b)$ dobimo, ako od števila $(\pm a)$ za b jednot in sicer v takem smislu naprej štejemo, kakor znak števila b zahteva.

Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} (+6) + (+3) &= +(6+3) = +9, & (+a) + (+b) &= +(a+b) 1. \\ (+6) + (-3) &= +(6-3) = +3, & (+a) + (-b) &= +(a-b) 2. \\ (-6) + (+3) &= -(6-3) = -3, & (-a) + (+b) &= -(a-b) 3. \\ (-6) + (-3) &= -(6+3) = -9, & (-a) + (-b) &= -(a+b) 4. \\ (+4) + (-4) &= 0, & (+a) + (-a) &= 0. \end{aligned}$$

Pojasnilo: Ako vsoto $(+6) + (+3)$ iščemo, moramo v algebraski številni vrsti od števila $+6$ za 3 jednote in sicer v tistem zmislu naprej šteti; na ta način pridemo do števila $+9$.

Pojasni enačbe 2, 3 in 4.

Algebraska števila z enakim znakom seštevaš, ako absolutne vrednosti sešteješ in pred to vsoto skupni znak postaviš.

Algebraska števila z različnim znakom seštevaš, ako absolutne vrednosti odšteješ in pred to difference znak večje absolutne vrednosti postaviš.

Primeri.

1. $(+4a) + (+3a) = ?$
2. $(+7x) + (-5x) = ?$
3. $(-3y) + (+2y) = ?$
4. $(-5m) + (-3m) = ?$

Diferenco števil $(\pm a)$ in $(\pm b)$ t. j. $(\pm a) - (\pm b)$ dobimo ako v algebraski številni vrsti od števila $\pm a$ za b jednot in sicer v takem smislu nazaj štejemo, kakor znak števila b zahteva.

Iz tega sledi:

$$\begin{aligned} (+6) - (+3) &= (+6) + (-3), & (+a) - (+b) &= (+a) + (-b) \text{ 1.)} \\ (+6) - (-3) &= (+6) + (+3), & (+a) - (-b) &= (+a) + (+b) \text{ 2.)} \\ (-6) - (+3) &= (-6) + (-3), & (-a) - (+b) &= (-a) + (-b) \text{ 3.)} \\ (-6) - (-3) &= (-6) + (+3), & (-a) - (-b) &= (-a) + (+b) \text{ 4.)} \end{aligned}$$

Pojasnilo 1. Ako v algebraski številni vrsti od števila $(+6)$ za 3 jednote nazaj štejemo in sicer v istim smislu, dobimo isto, kakor če za 3 jednote v nasprotnem smislu naprej štejemo.

Pojasni enačbe 2., 3. in 4.

Algebrajska števila odštevaš, ako subtrahend s spremenjenim znakom minuendu prišteješ.

Primeri.

1. $(+5a) - (+3a) = ?$
2. $(-15x) - (+5x) = ?$
3. $(+4y) - (-3y) = ?$
4. $(-7m) - (-8m) = ?$
5. $(-6p) - (-p) = ?$
6. $(+8r) - (+12r) = ?$

§. 34. Vsoto, v kateri so sumandi algebrajska števila, imenujemo **algebrajsko vsoto**. Vsako algebrajsko vsoto moremo v polinom spremeniti, ako znake algebrajskih števil v smislu računskih znakov vzamemo (primerjaj v §. 33 enačbe 1., 2., 3. in 4. In to navadno storimo. Potem pa veljate pravili za seštevanje in odštevanje polinomov tudi za seštevanje in odštevanje algebrajskih vsot.

Primeri.

1. $(-4m) + (-2n) + (-m) + (+8m) = ?$
2. $(2x - 4z + 2v) - (2x - 2z) = ?$
3. $(m - 2n + 3p) + (-m - 3n + 4) = ?$
4. $12a - 5b - [4a - (2c + 3a)] = ?$
5. $x - \{2y - x - [3x - (3y - 5x) + 5y]\} = ?$

Množenje.

(Glei §. 12.)

§. 35. **Opomba.** Od tod naprej stoji multiplikator zmerom na desni od multiplikanda.

Ako imamo produkt treh, štirih ali pa še več števil izračunati, množimo prvo število z drugim, dobljeni produkt s tretjim, novi produkt s četrtim i. t. d. Tako je n. pr.

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d \end{aligned}$$

Glej §. 11 opombo 1 in §. 26.

§. 36. **Vrednost produkta ostane nespremenjena, če tudi faktorje med seboj zamenjaš, t. j.**

$$2 \times 3 = 3 \times 2, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Dokaz. Ako si naredimo b vrst, izmed katerih ima vsaka a jednot, namreč

$$\left. \begin{array}{c} 1 + 1 + 1 + \overbrace{\dots}^{a \text{ krat}} + 1 \\ 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ \vdots \\ 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{array} \right\} b \text{ krat}$$

potem je očitno, da dobimo isto množino jednot, ter iste število, če preštejemo jednote vseh horizontalnih ali pa jednote vseh vertikalnih vrst. V prvem slučaju dobimo a jednot b krat ter $a b$, v drugem pa b jednot a krat ter $b \cdot a$. Tedaj je

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ta izrek velja tudi za vsako množino faktorjev.

V produktu iz več faktorjev moremo namreč po dva in dva skupaj stoječa faktorja med seboj zamenjati, med tem ko drugi na svojem mestu ostanejo; na tak način moremo pa vse zamenjati, kakor ravno hočemo. Tako je n. pr.

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b \text{ i. t. d.}$$

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih:

$$3 \times 4, 5 \times 6, 7 \times 2, m \times n.$$

§. 37. Produkt dveh faktorjev množiš sê številom ako en faktor množiš, t. j.

$$(a b) c = (a \cdot c) \cdot b = a (b \cdot c)$$

Dokaz. Ker je

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = a \cdot b \cdot c \text{ (§. 36)}$$

je tudi

$$(a \cdot b) c = (a c) \cdot b = a \cdot (b c) \text{ (§. 35).}$$

Narobe je

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b.$$

Izrazi to enačbo z besedami!

Vaje.

1. $3a \cdot 4 = ?$

2. $7x \cdot 5 = ?$

3. $ax \cdot m = ?$

4. $6 \cdot 3m = ?$

5. $y \cdot az = ?$

6. $6x \cdot 7y = 6x \cdot (7y) = (6x \cdot 7) y$
= i. t. d.

7. $7m \cdot 3n \cdot 4x = ?$

8. $2p \cdot 8a \cdot 6y =$

9. Izštevili na pamet

a) $64 \cdot 20 = 64 \cdot (10 \times 2) = \text{i. t. d.}$ b) $87 \cdot 40 = ?$

c) $95 \cdot 50 = ?$

č) $115 \cdot \frac{7 \times 3}{21} = ?$

d) $385 \cdot \frac{3 \times 4}{12} = ?$

Produkti enakih faktorjev.

§. 38. Ako imamo a 4 (m) krat kot faktor staviti, dobimo

$$\text{potenco } a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4, \quad a \cdot a \cdot a \cdot \overbrace{\dots}^{\text{mkrat}} a = a^m$$

a^m beri „ a na m to“ (potenco povzdignjen) ali a mkrat potencovan. Število a imenujemo **osnovno število**, **podlago** ali **koren**, število m pa **potenčni eksponent** (kazalo) ali tudi krajše **eksponent**. Kedar iščemo m to potenco števila a pravimo da jo potencujemo (vzmnožujemo) sè številom m . Potenco a^2 imenujemo tudi **kva-**
drat in potenco a^3 **kubus** števila a .

Potenca more ali nakazana ali izvršena biti. Pri občnih potencah to razliko pokažemo, kakor vidiš v tem-le

$$a^m = (a^m) = c$$

Kedar nahajaš v izrazih potence kot glavne količine, so ti izrazi istoimenski, ako imajo potence **enake korene** in **enake eksponente**, n. pr. $2a^3$ in $5a^3$; drugače so pa raznoimenski n. pr. $3a^2$ in $7a^3$, $4b^3$ in $7c^3$.

Vaje in vprašanja.

1. a) Napiši sledeče izraze krajše in potem jih beri

$$a \cdot a, b \cdot b \cdot b, c \cdot c \cdot c \cdot c, x \cdot x \cdot x \cdot \overbrace{\dots}^{\text{nkrat}} x$$

- b) Imenuj korene in eksponente prejšnjih primerov; zakaj imenujemo 2, 3, 4, n eksponente in zakaj a, b, c, x korene? Katero število v potenci imenujemo eksponent, katero koren? Kaj se pravi število a na drugo, število b na tretjo, število c na četrto in število x na m to potenco povzdigniti.

2. Povej nakazano in potem izvršeno drugo, tretjo, četrto, peto, šesto potenco števil, 1, 2, 3, 4, c .

3. Povej kvadrat in kubus vsakega števila do 12.

4. Imenuj tri istoimenske izraze, v katerih so potence glavne količine; b) ali so izrazi $3a^5$, $4a^3$, $8b^3$ istoimenski?

Iz pomena potence sledi

$$a^1 = a \qquad 1^m = 1$$

Eksponenta 1 navadno ne napišemo.

§. 39. Potence enakih podlag množiš, ako skupno podlago z vsoto eksponentov potencuješ, t. j.

$$a^3 \cdot a^4 = a^7, \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Dokaz. Število a stoji najpred 3krat (m krat) in potem še 4krat (n krat) ali 7krat $[(m+n)$ krat] kot faktor; torej je naša trditev prava.

Dokaži isto na teh-le primerih:

$$3^5 \cdot 3^2, 6^4 \cdot 6^4, 2^3 \cdot 2^2, x^p \cdot x^r$$

Produkt potenc z raznimi podlagami moremo le nakazati.

Vaje.

1. $a^5 \cdot a = ?$
2. $x^u \cdot n^v = ?$
3. $9x \cdot x = ?$
4. $8y^2 \cdot 7y^3 = ?$
5. $2t^3 \cdot 4v^3 = ?$
6. $ab \cdot bc = ?$
7. $a^3x \cdot bx^3 = ?$
8. $4am \cdot 3an = ?$
9. $8x^2y^3 \cdot 6x^3 = ?$
10. $a \cdot 2a \cdot 3a = ?$
11. $a^m \cdot a^n \cdot a^p = ?$
12. $x^3 \cdot 3x^2y \cdot 3xy^2 = ?$

§. 40. 1. Vsoto množiš s številom, ako ž njim vsak sumand množiš in dobljena delska produkta sešteješ, t. j.

$$(m+n)a = ma + na$$

Dokaz sledi iz §. 14, ako tam enačbo obrnemo.

Opomba. Produkta ma in na imenujemo delska ali parcijalska produkta.

2. Število množiš z vsoto, ako ga množiš z vsakim sumandom in dobljena delska produkta sešteješ, t. j.

$$a(m+n) = am + an$$

Dokaz sledi iz 1., ako tam faktorje med seboj zamenjamo.

Vaje.

1. $(4+a) \cdot 3 = ?$
2. $(5a+b) \cdot 4 = ?$
3. $(7x+2y) = ?$
4. $(4a^2b + 4ab^2) \cdot 4ab = ?$
5. $(2mn^2x + 5m^2ny) \cdot 5mnx^2y^2 = ?$
6. $8p^2s^2(3p^3s^2 + 2p^4s) = ?$
7. $(a+b+c)m = [(a+b)+c] \cdot m = (a+b)m + cm = am + bm + cm.$
8. $(3x^2 + 2y^3 + 3z) \cdot 2x^2yz^3 = ?$
9. Izštevili na pamet
 - a) $45 \times 6 = (40+5) \cdot 6$ i. t. d.
 - b) $320 \times 5 = ?$
 - c) $432 \times 3 = ?$
 - č) $528 \times 7 = ?$
 - d) $348 \times 4 = ?$

3. Diferenco množiš s številom ako vsak člen (minuend in subtrahend) množiš in dobljena delska produkta odšteješ, t. j.

$$(m-n)a = ma - na$$

Dokaz sledi iz §. 25.

4) Število množiš z diferenco, ako ga z minuendom in subtrahendom množiš in dobljena delska produkta odšteješ, t. j.

$$a(m - n) = am - an.$$

Dokaz sledi iz enačbe v 3. ako v njej faktorje zamenjamo.

Vaje.

1. $(a - 3) \cdot 5 = ?$
2. $(3m - 2n) \cdot 6x = ?$
3. $(6x - 5y) \cdot 2xy = ?$
4. $(3ax^2 - 2by^2) \cdot 5x^3y^3 = ?$
5. $7m^2n^3x^4 (8m^3n^2x^3 - 7mn^3x^2) = ?$
6. Izštevili na pamet
 - a) $68 \times 3 = (70 - 2) 3 = \text{i. t. d.}$
 - b) $398 \cdot 4 = ?$
 - c) $596 \cdot 7 = ?$
 - d) $54 \cdot 99 = 54 (100 - 1) = \text{i. t. d.}$
 - e) $83 \cdot 98 =$
 - f) $65 \cdot 999 = ?$

5. Vsoto ali diferenco množiš z vsoto ali diferenco, ako vsak člen multiplikanda z vsakim členom multiplikatorja množiš in dobljene delske produkte z aditivnim ali s subtraktivnim znakom vzameš, kedar imata člena enaka ali različna znaka, t. j.

$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= ac + bc + ad + bd \\ (a + b)(c - d) &= ac + bc - ad - bd \\ (a - b)(c + d) &= ac - bc + ad - bd \\ (a - b)(c - d) &= ac - bc - ad + bd \end{aligned}$$

Dokaz sledi iz prejšnjih izrekov, ako si misliš jeden faktor kot jedno samo število in potem izvršiš. Stori to!

Iz vseh teh izrekov spoznamo to-le pravilo za znake pri delskih produktih.

Delski produkt vzemi aditiven ali subtraktiven, če sta oba znaka faktorjev enaka ali različna.

Vaje.

1. $(3a + 3b)(2a + 5b) = ?$
2. $(5x + 2y)(4x - 3y) = ?$
3. $(7m^2 - 5n^3)(8m^3 + 3n^2) = ?$
4. $(6ab^3x^2 - 5m^3ny^3)(2a^2b^2x^3 - 3m^2n^3y) = ?$
5. $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Vsoto dveh števil množiš z njuno diferenco, ako odšteješ njuna kvadrata.

6. $(m + n)(m - n) = ?$
7. $(5a + 2b)(5a - 2b) = ?$
8. $(3x^2 - 7y^2)(3x^2 + 7y^2) = ?$
9. $(9ab^2z^3 + 3m^2v) \cdot (5ab^2z^3 + 3m^2v) = ?$

10. Izštevíli na pamet

- a) $34 \times 46 = (30 + 4) (20 + 6) = (30 + 4) \cdot 20 + (30 + 4) \cdot 6 = \text{i. t. d.}$
 b) $29 \cdot 23 = ?$ c) $37 \cdot 41 = ?$

6. Polinom množiš sè številom, ako vsak člen ž njim množiš in delске produkte zè znaki zvežeš, kakor gornje pravilo za znake veli, t. j.

$$(a - b + c) m = am - bm + cm.$$

7. Število množiš s polinomom, ako ga množiš z vsakim členom polinoma in znano pravilo za znake pri delskih produktih porabiš, t. j.

$$a (m - n + p) = am - an + ap.$$

8. Polinom množiš s polinomom, ako vsak člen prvega polinoma množiš z vsakim členom drugega polinoma in znano pravilo za znake pri delskih produktih porabiš, t. j.

$$\begin{aligned} (a - b + c) (m - n - p) &= am - bm + cm \\ &\quad - an + bn - cn \\ &\quad - ap + bp - cp \end{aligned}$$

Resnica teh treh izrekov sledi iz večkratne porabe izrekov od 1 do 5 v tem §. Stori to !

Vaje.

1. $(3a - 5b + 2c) \cdot 2x = ?$ 2. $7a^2m^3 (5a^2m - 2am^2 - 6m^3)$
 3. $3a^2 (5b - 4a^3 + 9) = ?$ 4. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4) 6z^2 = ?$
 5. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1) (2x^3 + 6x - 3) =$

$$\left. \begin{array}{l} 6x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 2x^3 + 2x^2 \\ 18x^5 - 12x^4 + 30x^3 - 6x^2 + 6x \\ - 9x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 3x - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{delski} \\ \text{produkti} \end{array}$$

produkt $= 6x^6 + 14x^5 - 11x^4 + 34x^3 - 19x^2 + 9x - 3$

Ako v tej nalogi oba faktorja in njun produkt natančnije pogledaš, vidiš, da ima vsak člen od prvega do zadnjega potenco z istim korenem, v kateri ima koren prvega člena najvišji in koren vsakega sledečega člena nižji eksponent od pred njim stoječega. V tem slučaju pravimo: Polinomi so po upadnih potencah skupnega korena poredani. Polinome pa tudi večkrat po ravnih potencah poredamo. Pri izvršitvi množenja pišemo istoinenske izraze zaradi pripravnosti skrajšitve navadno jeden pod drugega.

6. $(x^4 + 3x^3 + 7x^2 + x + 1) (x - 1) = ?$

7. $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) (x + 1) = ? \quad (x = 3)$

8. $(5x^2 - 6ax + 2a^2) (3x^2 - 4ax + 2a^2) = ? \quad (a = 2, x = 4).$

1. $(2x^2 - 3a^2)(5x^2 + 2a^2) + (3x^2 - a^2)(2x^2 + 4a^2) = ?$
2. $(8 - m^2)(6 + n^2) - (8 - m^2)(5 + n^2) = ?$
3. $(x + 4)(x - 4) + 16 = ?$
4. $z^2 - (z + 5)(z - 5) = ?$
5. $(3x^2 + 2y^2)(3x^2 - 2y^2) - (4x^2 + y^2)(4x^2 + y^2) = ?$
6. $(5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(6x + 4) = ?$
7. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = ?$
8. $(x + 3)(x - 2)(x - 1) = ?$
9. $(4x^2 - 4xy - y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + 2xy + 3y^2) = ?$
10. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1) + (x^3 - 2x - 3)(3x^3 - 4x + 1) = ?$

Množenje imenastih števil.

§. 41. Imenasto število množiš s številom, ako njegovo mero množiš, t. j.

$$A. m = (a.e).m = (am).e.$$

Dokaz sledi iz §. 37.

Opomba. Multiplikator je zmerom brezimenasto število.

Vaje na pamet.

1. $14 \frac{a}{l} \times 5 = ?$
2. $32 \text{ fl.} \times 4 = ?$
3. $5 \frac{d}{m} \times 13 = 65 \frac{d}{m} = 6 \frac{m}{l} 5 \frac{d}{m}$
4. $28 \text{ kr.} \times 10 = ?$
5. $8 \frac{d}{l} \times 15 = ?$
6. $5 \text{ fl. } 12 \text{ kr.} \times 9 = ?$
7. $2 \frac{h}{l} 80 \frac{y}{l} \times 48 = ?$
8. $5 \frac{h}{g} 23 \frac{d}{g} 8 \frac{g}{l} \times 8 = ?$

Množenje dekadičnih števil.

§. 42. Opomba. 1. Ker je

$$10 = 10^1 = \text{jednota prvega reda}$$

$$100 = 10^2 = \text{,, drugega ,,}$$

$$1000 = 10^3 = \text{,, tretjega ,,}$$

i. t. d.

moremo dekadično število tudi v tej-le obliki napisati:

$$\dot{S} = \dots + a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d.$$

Potem je 10^m katera-koli dekadična jednota ali jednota m tega reda. Število m imenujemo redovno število.

Opomba. 2. Ako v sledečem zarad krajšega rečemo, „z dekadično jedното množiti“, mislimo na število, katero za dekadično jedното vzamemo.

Vaje.

1. $1.10 = ?$
2. $10.10 = ?$
3. $10^2.1 = ?$
4. $10^2.10 = ?$
5. $10^3.10^2 = ?$
6. $10^m.10^n = ?$

Iz primera $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$ vidiš: Ako množiš dekadno jedното jednega reda z dekadno jedното kakega drugęga reda, dobiš jedното višjega reda in sicer je njeno redovno število enako vsoti obeh redovnih števil.

7. Kakošne jednote dobiš, ako množiš?

a) desetico, stotico, tisočico, desettisočico z jedinico;

b) desetico, stotico, tisočico i. t. d. z desetico, stotico, tisočico i. t. d.

$$8. 3 \cdot 10^2 \times 2 \cdot 10^3 = ? \quad 9. 5 \cdot 10^2 \times 9 \cdot 10^3 = 45 \cdot 10^5 = (4 \cdot 10 + 5) 10^5 = 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 =$$

$$10. 7 \cdot 10 \times 8 \cdot 10^2 = ? \quad 11. 4 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^3 \times = ?$$

$$12. 7 \cdot 10^m \times 4 \cdot 10^n = ? \quad 13. a \cdot 10^m \times b \cdot 10^n = ?$$

Naloge 8., 9., 10., in 11. reši na pamet, kakor je ta-le naloga rešena:

$$4 \cdot 10 \times 3 \cdot 10^2$$

Rešitev: 4 desetice pomnožene s 3 stoticami dadó 12 tisočic, t. j. 1 desettisočico in 2 tisočici.

$$14. (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4) \cdot 2 = ? \quad 15. (2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) 3 = ?$$

$$16. 658 \cdot 7 = (6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) \cdot 7 \quad \text{Na kratko}$$

$$\begin{array}{r} \underline{42556} \quad \underline{42 \cdot 10^2 + 35 \cdot 10 + 56} \quad \underline{658 \cdot 7} \\ 4606 \quad 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6 \quad 4506 \end{array}$$

$$17. (5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9) \cdot 3 = ?$$

$$18. (a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) \cdot d_1 = ?$$

Kako torej množiš mnogoštevilkasto število z jednoštevilkastim?

19. Pokaži še na teh-le primerih, kako do pravila za množenje mnogoštevilkastih števil z jednoštevilkastim pridemo (na pamet in pismeno): a) $312 \times 3 = ?$

Na pamet: 312 ima 3 stotice 1 desetico 2 jedinici

$$\begin{array}{l} 3 \text{ krat } 3 \text{ stotice je } 9 \text{ stotic} = 900 \text{ jedinice} \\ 3 \text{ krat } 1 \text{ desetica so } 3 \text{ desetice} = 30 \text{ jedinice} \\ 3 \text{ krat } 2 \text{ jedinici je } 6 \text{ jedinice} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 900 \text{ in } 30 \\ \text{je} \\ 930 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 930 \text{ in } 6 \\ \text{je} \\ 936 \end{array} \right.$$

$$\text{Pismeno: } \frac{312 \times 3}{936} = (3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) \times 3 =$$

$$= 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 = 936$$

$$b) 26 \times 4 = ? \quad c) 16 \times 4 = ? \quad \checkmark) 34 \times 5 = ?$$

d) $459 \times 8 = ?$ e) $5092 \times 5 = ?$ f) Zakaj začneš pri jednicah množiti?

20. Reši sledeče naloge na pamet in pismeno:

$$a) 54 \cdot 10 = (5 \cdot 10 + 4) \cdot 10 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 0 = 540$$

- b) $751 \times 10 = ?$ c) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \cdot 10 = ?$
 č) $84 \times 100 = ?$ d) $(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) \cdot 100 = ?$
 e) $5093 \times 1000 = ?$ f) $(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d) \cdot 10^m = ?$

Kako množiš dekadična cela števila z 10, 100, 1000 i. t. d.

$$21. (3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6) (2 \cdot 10^2 + 5) = 3596 \times 235$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 \dots\dots\dots 7192 \\ 1 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 \dots\dots\dots 10788 \\ 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 0 \dots\dots\dots 17980 \\ \hline 8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 0 \dots\dots\dots 845060 \end{array}$$

$$22. (2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3) \cdot (8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 2) = ?$$

$$23. (5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4) (9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3) = ?$$

Kako torej množiš mnogoštevilkasto število z mnogoštevilkastim?

24. Pokaži še na sledečih primerih, kako pravilo za množenje mnogoštevilkastih števil z mnogoštevilkastimi dobimo:

a) $5324 \times 27 = (5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4) (2 \cdot 10 + 7)$

b) $6708 \times 305 = ?$ c) $28029 \times 513 = ?$

č) Katero mestno vrednost ima prva številka na desni v prvem, drugem ... delskem produktu? To pojasni na primerih 24. naloge.

25. Pokaži na primeru 3492×532 , da je vse jedno, če začneš z najvišjo ali pa z najnižjo številko multiplikatorja množiti. — Zakaj pišemo vsak sledeč delski produkt za jedno mesto bolj proti desni oziroma proti levi?

$$26. a) 350 \times 7500 = (3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 0) (7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0)$$

$$= (3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10) (7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2) =$$

$$35 \cdot 10 \cdot 75 \cdot 10^2 \dots\dots = (3 \cdot 10 + 5) \cdot 10 \cdot (7 \cdot 10 + 5) \cdot 10^2$$

$$35 \cdot 75 \cdot 10^3 \dots\dots\dots = (3 \cdot 10 + 5) (7 \cdot 10 + 5) 10^3$$

$$245 \dots\dots\dots = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$$

$$175 \dots\dots\dots = 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10 + 5$$

$$2625 \cdot 10^3 = 2625000 = (2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5) \cdot 10^3$$

$$= 2625 \cdot 10^3 = 2625000$$

b) $4500 \times 500 = ?$

c) $32000 \times 24 = ?$

1. Izštevili z ozirom na enačbo 2. v §. 37.

$$\begin{array}{r} 7.5 \\ a) \quad 3425 \times 35 \\ \hline 17125 \\ 68500 \\ \hline 119875 \end{array}$$

b) $4528 \times 63 = ?$

c) $35827 \times 64 = ?$

č) $54087 \times 560 = ?$

2. Izštevíli z ozirom na §. 40 4.

$$\begin{array}{r} 100-1 \\ a) 4834 \times 99 = ? \end{array}$$

$$c) 56291 \times 998 = ?$$

$$f) 52790 \times 9930 = ?$$

$$i) 52817 \times 4999 = ?$$

$$\begin{array}{r} 3. a \quad 254 \times 21 \\ \quad 508 \\ \hline \quad 5334 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100-3 \\ b) 5842 \times 97. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) 42829 \times 9990. \\ \quad 400-1 \end{array}$$

$$h) 35728 \times 399.$$

$$k) 7826 \times 29999 = ?$$

$$b) 6842 \times 17 = ? \quad c) 4592 = 18$$

$$č) 78425 \times 182 = ? \quad d) 42567 \times 102 = ?$$

$$f) 569278 \times 11 = ?$$

1. Ako jeden meter 3 fl. 60 kr. stane; koliko velja 5^m?

1^m velja 3 fl. 60 kr.

5^m „ 5krat 3 fl. 60 kr., t. j. 3 fl. 60 kr. $\times 5 = ?$

2. 1 dekagram velja 14 kr.; koliko veljajo 3 $\frac{h}{g}$ 25 $\frac{d}{g}$?

3. 1 liter vina velja 36 krajc.; koliko velja 1 $\frac{fl}{l}$ 8 $\frac{y}{l}$?

4. 1 kubičen meter stane 9 fl. 40 kr.; koliko velja 62 $\bigcirc^m$?

Deljenje.

§. 43. Število a se številom b deliti se pravi iskati število, katero dá z b pomnoženo a za produkt; število a imenujemo **deljenec** (dividend), število b **deljitelj** (divizor) in iskano število **količnik** (kvocijent). Da imamo število a se številom b deliti, zapišemo

$$a : b \text{ ali } \frac{a}{b} \text{ (beri „} a \text{ deljeno z } b \text{)}$$

Osnovna resnica: Kvocijent občnih števil je občno število, t. j.

$$a : b = c$$

Pišemo pa tudi

$$a : b = (a : b) \text{ ali } \left(\frac{a}{b}\right) \text{ ali } = \left(\frac{a}{b}\right) \text{ (glej opombo v §. 9.)}$$

Naloga. Namesti v enačbi $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)$ a in b s temi-le števili:

$$a = b, 9, 12, m$$

$$b = 2, 3, 4, n$$

Torej je dividend enak produktu iz kvocijenta in divizorja, t. j.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a, \quad \frac{8}{2} \cdot 2 = 8$$

Iz pojma kvocijenta pa še sledi:

$$\frac{a \cdot b}{b} = a, \quad \frac{8 \cdot 2}{2} = 8 \quad a : \frac{a}{b} = b, \quad 8 : \frac{8}{2} = 2$$

$$a : a = 1, \quad a : 1 = a, \quad 0 : a = 0$$

Izrazi te enačbe z besedami! — Ali spremeniš vrednost števila, ako ga z drugim množiš in z istim deliš in narobe? Katero enačbo ti dajó odgovor na to vprašanje?

Pri množenju smo iskali produkt iz dveh danih faktorjev; pri deljenju pa iščemo iz danega produkta dveh faktorjev (iz dividenda) in iz jednega teh faktorjev (iz divizorja) drugi faktor. Deljenje je torej nasprotno množenju.

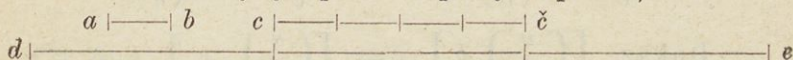
Tako je n. pr. pri množenju $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$; ako se pa vprašamo, kolikokrat faktor (multiplikand) 4 od 12 odšteti moremo, dobimo $12 - 4 = 8$, $8 - 4 = 4$, $4 - 4 = 0$, t. j. 4 moremo ravno 3krat odšteti od 12; ta znesek pa dobimo krajše z deljenjem $12 : 4 = 3$.

Ker je množenje okrajšano seštevanje in deljenje okrajšano odštevanje, je deljenje množenju ravno tako nasprotno, kakor odštevanje seštevanju.

Iz gornjega primera razvidamo, da dobivamo multiplikator (kvocijent) 3 iz produkta (dividenda) 12 in multiplikanda (divizorja) 4, ako od 12 zaporedoma 4 odštevamo. V tem slučaju je deljenje primerjanje in merjenje, ker hočemo pozvedeti, kolikokrat je divizor zapopaden v dividendu.

Vprašati pa tudi moremo po multiplikandu; v tem slučaju je deljenje neka delitev (*Teilung*), s katero oni del iščemo, ki nam daje dividend, ako ga tolikokrat vzamemo, kakor zahteva divizor.

To razliko deljenja spoznaš iz pridejane podobe,



v katerej je $ab = 1$, $cč = 4$. ab in $de = 3$. $cč = 4 \cdot 3 = 12$.

Multiplikator 3 dobimo iz produkta 12, ako črto de zmerimo s črto $cč$, multiplikand 4 pa, ako črto de delimo v tri enake dele.

Obojno deljenje je bitstveno različno po pomenu; z ozirom na §. 36 je pa številna vrednost kvocijenta za vsak slučaj ista, če sta le dividend in divizor ista.

Vprašanja in vaje na pamet.

1. Kaj se pravi število 8 sè številom 4 deliti? Kako imenujemo števili 8 in 4? Katero število imenujemo dividend in katero divizor? Povej izvršeni kvocijent teh števil! — Katero število imenujemo kvocijent? — Odgovori na ta vprašanja še pri sledečih primerih:

$$12 : 6, \quad 25 : 5, \quad 20 : 4, \quad 30 : 15, \quad m : n.$$

2. a) Odštečaj, kolikokrat moreš 8 od 40, 9 od 36, 6 od 24, 3 od 15. — Kolikokrat je torej 8, 9, 6, 3 v 40, 36, 24, 15 zapopadeno.
 b) Deli: 40 : 8, 36 : 9, 24 : 6, 15 : 3.
3. a) Razdeli črto ab v 3, 4, 5, 6 enakih delov; b) Kolikokrat je dobljen del zapopaden v danej črti? —
4. Deli: 8 : 8, 6 : 6, 20 : 20, $a : a$, $m^3 : m^3$, $5xm : 5xm$.
5. Deli: 5 : 1, 7 : 1, 3 : 1, 15 : 1, $a : 1$.
6. Deli: 0 : 2, 0 : 3, 0 : 11, $0 : a$.
7. Množi: 3 s 4 in deli dobljeni produkt s 4
- | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|---|---|---|---|-----|
| 5 | " | 6 | " | " | " | " | " | 6 |
| 7 | " | 8 | " | " | " | " | " | 8 |
| m | " | n | " | " | " | " | " | n |
8. Deli 12 s 3 in množi dobljeni kvocijent s 3
- | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|---|---|---|---|---|-----|
| 30 | " | 5 | " | " | " | " | " | 5 |
| 56 | " | 7 | " | " | " | " | " | 7 |
| m | z | n | " | " | " | " | " | n |

Izreki.

§. 44. I. Produkt deliš sè številom, ako jeden faktor ž njim deliš, t. j.

$$\frac{6 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 5, \quad \frac{7 \cdot 8}{4} = 7 \times 2$$

$$\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right) b, \quad \frac{ab}{c} = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\text{Dokaz.} \quad \left[\left(\frac{a}{c}\right) \cdot b\right] \cdot c = \left[\left(\frac{a}{c}\right) \cdot c\right] \cdot b \quad (\S. 37.)$$

$$= ab \quad (\S. 43),$$

torej jednak dividendu in deljenje je v resnici pravo. — Dokaži takisto drugo jednačbo. — Ali spremeniš vrednost kvocijenta, če v poljubnem redu množiš in deliš?

Vaje.

1. Število 45 deli potem sè številom 9, ko spremeniš 45 v produkt iz faktorja 9 in iz drugega faktorja.

$$45 : 9 = (5 \times 9) : 9 = 5.$$

Na pamet: 45 je jednako 5krat 9; torej je 9 v 45 5krat zapopaden; ali 45 je jednako 9krat 5, torej je 9ti del od 45 število 5.

2. Reši na isti način še te-le naloge:

- a) $72 : 8 = ?$ b) $800 : 2 = ?$ c) $612 : 6 = ?$
 3. $12a : 4 = ?$ 4. $4m : m = ?$ 5. $3xy : y = ?$
 6. $8x^3 : x^3 = ?$ 7. $mx^2 : m = ?$ 8. $amx^n : mx^n = ?$

II. Število množiš s kvocijentom, ako ga v poljubnem redu z dividendom množiš in z divizorjem deliš, t. j.

$$a \cdot \left(\frac{b}{c} \right) = \frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c} \right) \cdot b$$

Dokaz sledi iz I.

1. Reši te-le naloge na pamet, kakor kaže prva naloga.

a) $23 \cdot 5 = 23 \cdot \frac{10}{2} = 230 : 2 = 115$

govori: 10krat 23 je 230, in polovica od 230 = 200 + 30 je 100 + 15, t. j. 115.

b) $45 \cdot 5 = ?$ c) $87 \cdot 5 = ?$

č) $32 \cdot 25 = 32 \cdot \frac{100}{4} = 3200 : 4 = 800$. Na kratko

$$\frac{32_{00} \times 25}{800}$$

d) $48 \cdot 25 = ?$ e) $56 \cdot 125 = 56 \cdot \frac{1000}{8} = ?$

f) $72 \cdot 125 = ?$

2. $4a \cdot \frac{c}{4}$, 3. $5x^3 \cdot \frac{x^2}{5} = ?$ 4. $12mz^4 \cdot \frac{3nz^2}{4m}$

III. Kvocijent množiš s številom, ako dividend ž njim množiš in produkt z divizorjem deliš, ali pa dividend s kvocijentom iz števila in divizorja deliš, t. j.

$$\frac{b}{c} \cdot a = \frac{ba}{c} = b \cdot \left(\frac{a}{c} \right)$$

Dokaz sledi iz II., ako faktorje zamenjamo.

Vaje.

1. $\frac{2a}{b} \cdot c = ?$ 2. $\frac{3a^2}{b} \cdot 2a^3 = ?$ 3. $\frac{5mx^2y}{4nz^3} \cdot 8xy^2 = ?$

4. $\frac{2a}{b} \cdot 3b = ?$ 5. $\frac{5mn^3x^4}{z} \cdot 2mnz = ?$

IV. Število deliš s produktom, ako ga z jednim faktorjem in dobljeni kvocijent z drugim faktorjem deliš, t. j.

$$\frac{42}{7 \cdot 3} = \frac{6}{3}, \quad \frac{42}{7 \cdot 3} = \frac{14}{7}$$

$$a : bc = \left(\frac{a}{b} \right) : c = \left(\frac{a}{c} \right) : b$$

$$\begin{aligned} \text{Dokaz: } \left[\left(\frac{a}{b} \right) : c \right] bc &= \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \left(\frac{bc}{c} \right) \text{ (glej 3.)} \\ &= \left(\frac{a}{b} \right) \cdot b = a \text{ (§. 43.)} \end{aligned}$$

a je pa dividend torej deljenje pravo. Dokaži takisto drugi del trditve.

Vaje.

1. Reši te-le naloge tako na pamet, kakor je tukaj prva rešena:

$$a) 72 : 12 = \frac{72}{6} : 2 = 12 : 2 = 6.$$

$$b) 105 : 15 = ? \quad c) 126 : 18 = ? \quad d) 120 : 24 = ?$$

$$2. \frac{12a}{3m} = ? \quad 3. \frac{5x}{2x} = ? \quad 4. \frac{27ax^2}{9a} = ?$$

$$5. \frac{15mnx}{3mx} = \frac{15mnx}{3(mx)} = \frac{5mnx}{mx} = ? \text{ i. t. d.}$$

$$6. \frac{27am^2nx^3}{3am^2x^3} = ? \quad 7. \frac{20mpxz}{5amx} = ?$$

V. Kvocijent deliš sè številom, ako dividend ž njim deliš ali pa divizor ž njim množiš, t. j.

$$\left(\frac{a}{b} \right) : c = \left(\frac{a}{c} \right) : b = \frac{a}{bc}$$

Dokaz sledi iz IV.

Vaje.

$$1. \frac{4a}{b} : a = ? \quad 2. \frac{5a}{b} : b = ? \quad 3. \frac{7x}{2y} : 7y = ?$$

$$4. \frac{12amx^3}{5nz^2} : 6mz = ? \quad 5. \frac{25am^3x^3z^3}{8ny^3v^2} : 5m^3x^3y^2v^3$$

Opomba. Ako v kvocijentu $\frac{a}{b}$ dividend in divizor zamenjaš, dobiš njegovo vzratno ali recipročno veljavo $\frac{b}{a}$ —. Ker je $a = \frac{a}{1}$, je $\frac{1}{a}$ recipročna veljava števila a .

VI. Kvocijent množiš s kvocijentom, ako produkt dividendov deliš s produktom divizorjev, t. j.

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{6}{3} = \frac{48}{6}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Dokaz: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \left(\frac{c}{d}\right)}{b} = \left(\frac{ac}{d}\right) : b = \frac{ac}{bd}$

Potem je $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Izrazi to enačbo z besedami!

Vaje.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{2a}{3b} \cdot \frac{5a}{7b} &= ? & 2. \quad \frac{15ax^2}{8my^3} \cdot \frac{24ax}{5my^3} &= ? \\ 3. \quad \frac{7a^2x^2}{2bz^3} \cdot \frac{2bz^3}{7a^2x^2} &= ? \end{aligned}$$

VII. Število deliš s kvocijentom, ako ga z recipročno veljavo kvocijenta množiš, t. j.

$$24 : \frac{3}{4} = 24 \cdot \frac{4}{3}, \quad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) c.$$

Dokaz. $\left(a \cdot \frac{c}{b}\right) \cdot \frac{b}{c} = a \cdot \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}\right) = a$

a je pa dividend, torej deljenje pravo.

Vaje.

1. Reši te-le naloge na pamet in sicer tako, kakor je prva rešena:

a) $400 : 25 = 400 : \frac{100}{4} = 400 \cdot \frac{4}{100} = \frac{4 \cdot 4}{100} = 16$

b) $1200 : 25 = ?$ c) $1250 : 25 = ?$ e) $2350 : 25 = ?$

d) $8000 : 125 = 8000 : \frac{1000}{8} = \text{i. t. d.}$ e) $5000 : 125 = ?$

f) $1375 : 125 = ?$ g) $2250 : 125 = ?$

2. $3a : \frac{3a}{2b} = ?$ 3. $5a : \frac{3b}{2a} = ?$ 4. $15mx^3 : \frac{5m}{2x^2} = ?$

VIII. Kvocijent tudi množiš s številom, ako divizor ž njim deliš, t. j.

$$\frac{16}{8} \cdot 4 = \frac{16}{2}, \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{(b:c)}$$

Dokaz sledi iz VII.

Vaje.

1. Reši te-le naloge na pamet in sicer tako, kakor je rešena prva naloga:

$$a) \frac{135}{15} \cdot 5 = \frac{135}{3} = 45.$$

$$b) \frac{432}{18} \cdot 9 = ? \quad c. \frac{357}{21} \cdot 7 = ? \quad \check{c}) \frac{880}{44} \times 11 = ?$$

$$2. \frac{5a}{4b} \cdot b = ? \quad 3. \frac{7x}{12y} \cdot 3y = ? \quad 4. \frac{12ay^3}{5my} \cdot my = ?$$

IX. Kvocijent deliš s kvocijentom, α) ako kvocijent dividendov s kvocijentom divizorjev deliš, β) ali ako dividend z recipročno veljavo divizorja množiš, t. j.

$$\alpha) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} \quad \beta) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\text{Dokaz: } \alpha) \frac{a : c}{b : d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a : c) \cdot c}{(b : d) \cdot d} = \frac{a}{b}$$

$$\beta) \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} \right) = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}$ je pa dividend, torej deljenje pravo.

Vaje.

$$1. \frac{4a}{15b} : \frac{2a}{3b} = ?$$

$$2. \frac{15ax^3}{7my^2} : \frac{5a}{my^2} = ?$$

$$3. \frac{2ax^3}{3by^2} : \frac{7by^3}{3ax^2} = ?$$

$$4. \frac{12mp^2x^4}{nr^3z^2} : \frac{7nr^2z^3}{m^2px^3} = ?$$

X. Vrednosti kvocijenta ne spreminjaš, ako dividend in divizor z istim številom množiš ali deliš, t. j.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}$$

$$\text{Dokaz: } \frac{am}{bm} \cdot b = \frac{am}{m} \text{ (glej VIII.)} = a.$$

a je pa dividend torej kvocijent pravi.

$$\frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{m} \cdot \frac{m}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

torej tudi drugi kvocijent pravi.

Opomba. Kedar dividend in divizor z jednim in istim številom množiš, takrat kvocijent razširiš; ako dividend in divizor z istim številom deliš, kvocijent okrajšaš.

Vaje.

1. Razširi te-le kvocijente :

$$\frac{a}{b}, \frac{2x}{3y}, \frac{5am^2x^3}{3bn^3y^2} \text{ se } 3, 2x, 5amx^2y.$$

2. Okrajšaj te-le kvocijente.

$$a) \frac{12ax^3}{4am} \cdot \frac{3ax^3}{am} \cdot \frac{3x}{m} \quad b) \frac{15amx^2y}{9bmx^3} = ?$$

$$c) \frac{21a^2bnx^4}{35a^2cny^3} = ?$$

§. 45. Potenci enakih podlag deliš, ako skupno podlago z diferenco eksponentov potencuješ, t. j.

$$a^5 : a^3 = a^2, \quad am : an = am-n \quad m > n$$

$$\text{Dokaz: } an \cdot am-n = a(n+m-n) = am$$

Ako je $m = n$, dobimo po tem pravilu

$$am : an = a^0$$

Ker je pa

$$am : am = 1$$

mora za zmerom

$$a^0 = 1$$

pomeniti, in to so matematiki tudi ustanovili.

Ako je $m < n$ n. pr. $m = 3, n = 5$, dobimo po gornjem pravilu

$$a^3 : a^5 = a^{-2}$$

Ker je pa

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$$

mora za zmerom

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

pomeniti, in to so matematiki tudi ustanovili. V obče je torej

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

t. j. potenca z negativnim eksponentom je enaka recipročne veljavi iste potence pa s pozitivnim eksponentom.

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih :

$$1. \frac{x^3}{x^2}, \quad 2. m^5 : m^3, \quad 3. am : a^3, \quad 4. x^6 : x$$

Izvrši še te-le naloge:

1. $10^5 : 10^2 = ?$
2. $10^m : 10^n = ?$
3. $5x : x^2 = ?$
4. $3y^2 : y^2 = ?$
5. $24a^7 : 6a^3 = ?$
6. $15t^2v^2 : 3tv^2 = ?$
7. $12ax^2 : 4x^4 = ?$
8. $5a^3mx^5 : a^2m^3x^6 = ?$
9. $am + n : am = ?$

§. 46. I. Vsoto deliš sè številom, ako vsak sumand ž njim. deliš, in delske kvocijente sešteješ, t. j.

$$\frac{6 + 9}{3} = 2 + 3, \quad \frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

$$\text{Dokaz: } \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right) \cdot m = \frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m \quad (.40, \text{ I.}) \\ = a + b \quad (\S. 43)$$

$(a + b)$ je pa dividend, torej deljenje pravo.

Vaje.

1. Reši te-le naloge na pamet, in sicer tako, kakor je rešena naloga a).

$$a) \frac{124}{4} = \frac{120 + 4}{4} = 30 + 1 = 31$$

$$b) \frac{155}{5} = ? \quad c) \frac{144}{8} = ? \quad \check{c}) \frac{279}{9} = ?$$

$$2. \frac{4a + 6b}{2} = ? \quad 3. \frac{5x^3 + 3x}{x} = ? \quad 4. \frac{12x^2y^3 + 18x^2y^2}{6xy}$$

5. Okrajšaj te-le kvocijente:

$$\frac{5a^2 + 4ab}{3a}, \quad \frac{7mx^3 + 6nx^4}{2mx^2}, \quad \frac{12a^2y^3 + 12a^3y^2}{12a^2y^2}$$

II. Diferenco deliš sè številom, ako minuend in subtrahend ž njim deliš in delska kvocijenta odšteješ, t. j.

$$\frac{8 - 2}{2} = 4 - 1, \quad \frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

Dokaz kakor pri I.

Vaje.

1. Reši sledeče naloge na pamet in sicer tako, kakor je rešena naloga a).

$$a) \frac{112}{4} = \frac{120 - 8}{4} = 30 - 2 = 28$$

$$b) \frac{135}{5} = \frac{150 - 15}{5} = \text{i. t. d.} \quad c) \frac{184}{8} = ?$$

$$2. \frac{27a - 15b}{3} = ?, \quad 3. \frac{7x^3 - 3x}{x} = ?,$$

$$4. \frac{18x^2y^3 - 12x^3y^2}{6xy} = ?$$

5. Okrajšaj te-le kvocijente:

$$\frac{5a^4 - 3a^2b^2}{3a^2b}, \quad \frac{9m^2nx^3 - 6n^2x^2}{3mn^3x}, \quad \frac{8ab^2x^3y^4 - 2a^2bx^4y^3}{4a^3bx^2y},$$

§. 47. I. Polinom deliš sè številom, ako vsak člen polinoma ž njim deliš in delske kvocijente sè znaki dividendov zve-
žeš, t. j.

$$\frac{a - b + c}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

Dokaz. $\frac{a - b + c}{m} = \frac{(a - b) + c}{m} = \frac{a - b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$

Vaje.

1. $(3x^4 + 6x^2 - 3x) : 3x = ?$

2. $(42a^2x^3y - 14a^3x^2y - 7ax^2) : 7ax^2 = ?$

3. $(5a^3 - 25a^4 - 10a^5 + 15a^6) : 5a^2 = ?$

4. $(16a^3b^2c^3 + 8a^4b^3c^6 - 12a^5b^4c^4 - 20a^6b^3c^2) : 4a^2b^2c^2 = ?$

Ker je

$$(a - b + c)(m - n) = am - bm + cm - an + bn - cn$$

dobimo za $m = 0$

$$(a - b + c) \cdot (-n) = -an + bn - cn \text{ ter } \frac{-an + bn - cn}{-n} = a - b + c$$

Iz tega sledi, da jo pravilo v §. 40 tudi za znake v kvocijentu veljavno. Kako se glasi potem to pravilo?

II. Za deljenje polinoma s polinomom služi rešitev te-le naloge:

Razloži kvocijent $\frac{A_1}{B_1}$ v dva sumanda $a_1 + x_1$ kjer je a_1 dan.

Rešitev. Naj je

$$\frac{A_1}{B_1} = a_1 + x, \text{ kakor n. pr. } 40 : 8 = 2 + x$$

potem je

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & a_1 B_1 + B_1 x \\ - a_1 B_1 & = & - a_1 B_1 \\ \hline A_1 - a_1 B_1 & = & B_1 x \quad (\S. 30, \text{ II.}) \\ : B_1 & = & : B_1 \\ \hline \frac{A_1 - a_1 B_1}{B_1} & = & x \quad (\S. 51, \text{ I. b.}) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 40 & = & 16 + 8x \\ - 16 & = & - 16 \\ \hline 24 & = & 8x \\ 8 & = & 8 \\ \hline 24 : 8 & = & x \end{array}$$

torej

$$\frac{A_1}{B_1} = a_1 + \frac{A_1 - a_1 B_1}{B_1} = a_1 + \frac{A_2}{B_2}, \quad 40 : 8 = 2 + \frac{24}{8}$$

Za število a_1 nam najboljše kvocijent iz prvega člena dividendi in prvega člena divizorja služi, katera sta poredana po istem zakonu.

Z večkratno porabo tega izraza moremo kvocijent $\frac{A_1}{B_1}$ v vsoto več izrazov razložiti. N. pr.

$$\text{Naj je } \frac{A_1}{B_1} = \frac{30cm - 15bc - 42dm + 21bd}{5c - 7d}$$

Naj je na dalje

$$\begin{aligned} a_1 &= 30cm : 5c = 6m \text{ potem je} \\ a_1 B_1 &= 6m (5c - 7d) = 30cm - 42dm, \text{ in} \\ A_1 - a_1 B_1 &= 30cm - 15bc - 42dm + 21bd \\ &\quad - 30cm \qquad \qquad + 42dm \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = 6m + \frac{-15bc + 21bd}{5c - 7d}, \text{ torej}$$

Ako prejšnjo ravnavo pri ulomku $\frac{-15bc + 21bd}{5c - 7d}$ ponavljamo ter $a_2 = -15bc : 5c = -3b$ stavimo, potem je

$$\begin{aligned} a_2 B_2 &= -15bc + 21bd \text{ in} \\ A_2 - a_2 B_2 &= -15bc + 21bd \\ &\quad - 15bc + 21bd \\ &\quad + \end{aligned}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = -3b, \text{ ter končno}$$

$$\frac{30cm - 15bc - 42dm + 21bd}{5c - 7d} = 6m - 3b$$

To nalogo rešimo v krajšej obliki tako le:

$$(30cm - 15bc - 42dm + 21bd) : (5c - 7d) = 6m - 3b$$

$$\begin{array}{r} - 30cm \\ + 42dm \\ \hline - 15bc + 21bd \\ + 15bc - 21bd \\ \hline \emptyset \end{array}$$

Reši na isti način nalogo:

$$\frac{21a^3 - 41a^2b + 38ab - 8b^3}{3a^2 - 5ab + 4b^2} = ?$$

Iz teh primerov posnemamo pravilo:

1. Poredaj dividend in divizor po istem zakonu;
2. deli prvi člen dividenda s prvim členom divizorja, da dobiš prvi člen kvocijenta;
3. množi celi divizor z delskim kvocijentom in odštevaj delski produkt od dividenda;
4. iz dobljenega ostanka išči na isti način drugi člen kvocijenta, kakor si dobil prvi člen iz dividenda;
5. na ta način nadaljuj številbo toliko časa, dokler ne prideš do ostanka 0.

Vaje.

1. $(x^3 - 1) : (x - 1) = ?$
2. $(x^2 - 1) : (x + 1) = ?$
3. $(a^2 - b^2) : (a + b) = ?$
4. $(a^2 - b^2) : (a - b) = ?$
5. $(9m^2 - 4n^2) : (3m + 2n) = ?$
6. $(9m^2 - 4n^2) : (3m - 2n) = ?$
7. $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1) = ?$
8. $(x^4 - x^2 + x - 1) : (x - 1) = ?$
9. $(4a^2 - 4ax + x^2) : (2a - x) = ?$ ($a = 3, x = 5$)
10. $(m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3) : (m - n) = ?$
11. $(125x^2 - 150x^2y + 60xy^2 - 8y^2) : (5x - 2y) = ?$ ($x = 4, y = 2$)
12. $(1 - a^5) : (1 - a) = ?$
13. $(24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2 - 13a^3b + 2a^4) : (4b^2 - 3ab + 2a^2) = ?$
14. $(27a^7 - 33a^6b - 45a^5b^2 + 71a^4b^3 - 36a^3b^4 + 16ab^5) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3) = ?$

15. Okrajšaj te-le kvocijente:

$$\frac{2x^2 - 3x}{4x^2 + 5x}, \quad \frac{4ab - 2ax + 3ay}{7ab + 3ay}, \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}, \quad \frac{4x^2 - 9y^2}{2x + 3y}, \quad \frac{2x^2 - 9y^2}{2x - 3y}$$

Deljenje imenastih števil.

§. 48. Deljenje imenastih števil rabimo za rešitev takih nalog, s katerimi moramo določiti neko delitev ali pa pri primerjanju dveh istovrstnih števil neko zapopadenost. N. pr.

- a) Koliko je 5ti del od 20 gold.? — b) Kolikokrat so $3m$ v $15m$ zapopadeni? V prvem slučaju je divizor, v drugem pa kvocijent le včasih brezimenasto število.

Imenasto število deliš z brezimenastim, ako njegovo mero ž njim deliš, t. j.

$$A : m = ae : m = \frac{a}{m} e \quad (\S. 44 \text{ I.})$$

Imenasto število deliš z istoimenskim številom, ako mero dividenda z mero divizorja deliš, t. j.

$$A : B = ae : be = \frac{a}{b} \text{ (§. 44, IV.)}$$

Vaje na pamet.

Nek dobrotnik razdeli 36 fl. med tri učence; koliko dobi vsak? — Vsak dobi 3tji del od 36 fl., t. j. $36 : 3 = 12$ fl.

2. Koliko kilogramov nekega blaga dobiš za 12 fl.; ako 1 $\frac{h}{g}$ 2 fl. stane? — Kolikokrat sta 2 fl. v 12 fl. zapopadena, t. j. $12 : 2 = 6$ kg.

3. 8 $\frac{h}{g}$ stane 8 fl. 40 kr.; koliko stane 1 $\frac{h}{g}$?

4. 4 hektolitri vina stanejo 28 gold. 60 kr.; koliko stane 1 $\frac{H}{l}$.

5. 1 $\frac{h}{g}$ 50 $\frac{D}{g}$ nekega blaga stane 3 gold.; koliko 1 $\frac{D}{g}$?

Kolikokrat je 6 $\frac{m}{l}$ 2 $\frac{d}{m}$ 2 $\frac{c}{m}$ dolga ravnica krajša od 12 $\frac{m}{l}$ 4 $\frac{d}{m}$ 6 $\frac{c}{m}$ dolge ravnice?

Deljenje dekadičnih števil.

§. 49. Vaje.

1) $6 \cdot 10^5 : 3 \cdot 10^3 = ?$

2) $12 \cdot 10^8 : 4 \cdot 10^5 = ?$

3) $15 \cdot 10^m : 5 \cdot 10^n = ?$

4) $a \cdot 10^m : b \cdot 10^n = ?$

5) $9 \cdot 10^4 : 2 = (8 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4) : 2 = (8 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3) : 2 = 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$.

6) $7 \cdot 10^3 : 5 \cdot 10 = ?$

7) $5 \cdot 10^4 : 4 \cdot 10^2 = ?$

8) $624 : 2 = (6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4) : 2 = ?$

$$\begin{array}{r} 1239 \\ 9) 8673 : 7 = (8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 17 \cdot 10 + 3) : 7 = \\ 7 \dots\dots\dots 7 \cdot 10^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \dots\dots\dots 1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 = 16 \cdot 10^2 \\ 14 \dots\dots\dots 14 \cdot 10^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \dots\dots\dots 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 = 27 \cdot 10 \\ 21 \dots\dots\dots 21 \cdot 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \dots\dots\dots 6 \cdot 10 + 3 = 63 \\ 63 \dots\dots\dots 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

Na kratko

$$8673 : 7 = 1239$$

16

27

63

10) $4992 : 6 = (4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2) : 6 = ?$

Kako torej delimo mnogoštevilkasto število z jednoštevilkastim?

11)

$$\begin{array}{r}
 803\ 985 : 651 = 8 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5 : 651 \\
 \underline{1235} \quad \underline{803 \cdot 10^3} \quad \underline{1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5} \\
 803 \dots\dots 803 \cdot 10^3 \\
 651 \dots\dots 651 \cdot 10^3 \\
 \hline
 1529 \dots\dots 152 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 = 1529 \cdot 10^2 \\
 1302 \dots\dots\dots 1302 \cdot 10^2 \\
 \hline
 2278 \dots\dots\dots 227 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 = 2278 \cdot 10 \\
 1953 \dots\dots\dots 1953 \cdot 10 \\
 \hline
 3255 \dots\dots\dots 325 \cdot 10 + 5 = 3255 \\
 3255 \dots\dots\dots 3255 \\
 \hline
 \emptyset \qquad \qquad \qquad \emptyset
 \end{array}$$

Na kratko : $803985 : 651 = 1235$

1529
2278
3255
Ø

12) $105547 : 23 = (1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) : 23 = ?$

13) $14843816 : 4204 = (1 \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 6) : 4204 = ?$

14) Reši naloge 11., 12., 13. tako, da tudi divizor v podobo polinoma spremeniš.

$$\begin{array}{r}
 (8 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) : (6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1) = \\
 \underline{6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3} \qquad \qquad \qquad \underline{1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5} \\
 \underline{1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2} \\
 \underline{15 \cdot 10^4} \\
 \underline{13 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2} \\
 \underline{2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10} \\
 \underline{22 \cdot 10^3} \\
 \underline{19 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10} \\
 \underline{3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5} \\
 \underline{32 \cdot 10^2} \\
 \underline{32 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5} \\
 \hline
 \emptyset
 \end{array}$$

Kako torej delimo mnogoštevilkasto število z mnogoštevilkastim?

Ali moremo sklepati iz najvišjih števil divident (oziroma ostanka) in divizorja na pristojno številko kvocijenta?

15. Pokaži še na teh-le primerih, kako pridemo do pravila za deljenje dekadičnih števil:

$$5416 : 4, 12300 : 492, 1777575 : 3425.$$

Izštevili pismeno:

$$\begin{array}{r} 9.2 \\ 4284 : 18' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.6 \\ 5679064 : 36 \text{ (§. 44, IV.)} \end{array}$$

1. Nekdo porabi vsak dan 3 fl. 85 kr.; koliko časa izhaja s 1200 gold.?
2. Med več ubogih so 136 fl. 80 kr. tako razdelili, da je dobil vsak revež 5 fl. 70 kr.; med koliko revežev so to vsoto razdelili?
3. Neka cev daje v 24 urah 51 $\frac{3}{4}$ 36 $\frac{1}{4}$ vode; koliko v 1 uri?
4. Vlak prevozi v 1 uri 30 $\frac{7}{m}$ 336 $\frac{m}{n}$ daljave; koliko v 1 minuti?
5. Koliko cekinov à 8 gold. 56 kr. je 642 gold. vrednih?
6. 4800 $\frac{h}{g}$ kave stane 3426 gold. 24 kr.; koliko stane 2400 $\frac{h}{g}$?

Množenje in deljenje algebraskih števil.

§. 50. Produkt algebraskih števil $(+ a)$ in $(+ b)$ imenujemo vsoto, v katerej nahajamo $(+ a)$ b krat kot sumand in sicer v istem smislu, kakor zahteva znak števila b .

Algebraski števili množiš, ako postaviš pred produkt njijinih številnih vrednosti znak $+$, kedar ste istoznačni, in znak $-$, kedar ste raznoznačni, t. j.

1. $(+ a).(+ b) = + ab$
2. $(- a).(- b) = + ab$
3. $(+ a).(- b) = - ab$
4. $(- a).(+ b) = - ab$

Dokaz. Število $+ a$ sè številom $+ b$ množiti se pravi število $+ a$ b krat kot sumand staviti in sicer v istem smislu, torej je

$$\begin{aligned} (+ a).(+ b) &= (+ a) + (+ a) + \overbrace{+ \dots}^{b\text{krat}} + (+ a) = \\ &= a + a + a + \dots + a = + ab \end{aligned}$$

Takisto dokažeš 2., 3. in 4. slučaj.

Dokaži gornji izrek še na teh-le primerih:

- a) $(+ 3).(+ 4) =$; b) $(- 2).(+ 6)$; c) $(- 4).(- 5)$;
 č) $(+ 7).(- 2)$; d) $(+ m).(+ n)$.

Pojasni to pravilo na pojmih čas, hitrost in pot

	pozit.	negat.
Hitrost = pot v 1 sek.....	na desno	na levo
pot.....	" "	" "
čas.....	pretekli	prihodnji.

Vaje.

1. $7a \cdot (-4) = ?$ 2. $(-a^2) \cdot 3a = ?$ 3. $(-6a^4) \cdot (-3a^2x) = ?$
 4. $(-2a^2) \cdot 3ab^2 = ?$ 5. $2ax^3 \cdot (-3a^2x) \cdot (-4ax^3) \cdot (-x) = ?$

§. 51. Kvocijent algebraskih števil $(+a)$ in $(+b)$ imenujemo ono algebrasko število, katero daje s $(+b)$ pomnoženo $(+a)$ za produkt.

Algebraski števili deliš, ako postaviš pred kvocijent njijinih številnih vrednosti znak $+$, kedar ste istoznačni in znak $-$, kedar ste raznoznačni, t. j.

$$1. (+a) : (+b) = +\frac{a}{b}$$

$$2. (+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$

$$3. (-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$$

$$4. (-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$$

$$\text{Dokaz 1. } \left(+\frac{a}{b}\right) \cdot (+b) = +\frac{a}{b} \cdot b \quad (\S. 50) \\ = +a \quad (\S. 43).$$

$+a$ je pa dividend, torej deljenje pravo.

Takisto dokažeš 2., 3. in 4. slučaj. Dokaži gornji izrek še na teh-le primerih:

$$(+8) : (+4), (-2) : (+1), (-10) : (-5), (+12) : (-6) \\ (\pm m) : (\pm n).$$

Vaje.

1. $(+8a) : (+4) = ?$ 2. $(-3x^3) : (+3x) = ?$
 3. $(+15ax^4) : (-5ax^3) = ?$ 4. $(-27m^2y^3) : (-9m^2y) = ?$

§. 52. Izreki o množenju in deljenju polinomov (§. 40, §. 47) veljajo tudi za algebranske vsote; vzemi samo aditivne in subtraktivne člene (z ozirom na §. 34.) tukaj kot pozitivne in negativne sumande.

Vaje.

1. $(6a - 5b) \cdot (-8c) = ?$
2. $(7x^2 - 6y^2) \cdot (-2xy) = ?$
3. $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3) \cdot (-6a^2) = ?$
4. $(-12a^2x^2) \cdot (2a^3 - 4a^2x + 6ax^2) = ?$
5. $(7a^5 - 2a^4x - 3a^3x^2 + 5a^2x^3 - ax^4 + x^5) \cdot (3a^2 - 2ax + 5x^2) = ?$
6. Namesti v teh-le izrazih
 - a) $(5x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + a^3) (1x^2 - 5ax - 3a^2) = ?$
 - b) $(x^3 - a^3) \cdot (x^3 + a^3) = ?$
 za a in x te-le veljave:

$$a = +1, -1, +3, -4$$

$$b = -1, -3, +2, +6$$
7. $(12x^3 - 3x^2 + 6x - 9) : -3 = ?$
8. $(5a^3x - 2a^2x^2 - 3ax^3) : +ax = ?$
9. $(1 - x^5) : (1 - x) = ?$
10. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (-2x + 5) = ? (x = -1)$

Množenje in deljenje jednačb in nejednačb.

§. 53.	1.		2.
$8 = 8$	$m = n$	$12 = 12$	$m = n$
$4 = 4$	$m = n$	$4 > 3$	$p > r$
$32 = 32$	$mn = mn$ a)	$48 > 36$	$mp > nr$ a)
$2 = 2$	$\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ b)	$3 < 4$	$\frac{m}{p} < \frac{n}{r}$ b)
	3.		
$8 > 7$	$m > n$	$24 > 15$	$m > n$
$5 > 3$	$p > r$ a)	$2 < 5$	$p < r$ b)
$40 > 21$	$mp > nr$	$12 > 3$	$\frac{m}{p} > \frac{n}{r}$

Izrazi 1., 2. in 3. z besedami! — Glej opombo §. 30.

Vaje in vprašanja za ponavljanje.

1. Seštevaj na pamet
 - a) $425 + 300,$ $800 + 327,$ $453 + 836$ (§. 11)
 - b) $85 + 39,$ $523 + 199,$ $862 + 519$ (§. 20)
 - c) $96 + 48,$ $392 + 86,$ $570 + 76$ (§. 24)
2. Pojasni pravilo za seštevanje dekadičnih števil na tem-le primeru

$$5429 + 3972$$
3. V nekem zvonu je $1248 \frac{h}{g}$ $36 \frac{p}{g}$ medi, $1853 \frac{h}{g}$ $48 \frac{p}{g}$ bakra, $177 \frac{h}{g}$ $42 \frac{p}{g}$ kositra; koliko tehta zvon?

4. Odštečaj na pamet:

- a) 742 — 36, 923 — 500, 762 — 442 (§. 19.)
 b) 732 — 48, 862 — 92, 1512 — 432 (§. 21)
 c) 544 — 46, 892 — 96, 4532 — 542 (§. 22)
 č) 85 — 49, 582 — 78, 742 — 627 (§. 23).

5. Pojasni pravilo za odštevanje celih dekadičnih števil na tem-le primeru:

$$7632 - 548$$

6. Nekdo je 780 gold. 30 kr. dolžen, in plača 458 gold. 55 kr.; koliko je še dolžen?

7. $(5x^3 - 2x^2 + x - 1) - (2x^3 - 5x + 3) + (3x^3 + 2x^2 - x + 5) = ?$
 $(x = -3)$
 8. $\{[(4a - 2b + 3c) - 5a] - [(6a - 5b + 2c) + 8a]\} + (5a - 8b + 7c) = ?$

9. Izštevíli na pamet:

- a) 38.30, 67.70, 512.40 (§. 35, 24)
 48.32, 215.23, 560.24 (§. 37, §. 40, I., II.)
 b) 48.6, 498.8, 65.98, 87.999 (§. 40, IV.)
 c) 46.5, 83.25, 35.125 (§. 44, II.)
 č) 3510 : 27, 272 : 16, 144 : 18 (§. 44, IV.)
 d) 450 : 25, 525 : 25, 875 : 125 (§. 44, VII.)
 e) 707 : 7, 248 : 8, 639 : 9 (§. 46, I.)
 f) 114 : 6, 406 : 7, 224 : 8 (§. 46, II.)

10. Pojasni pravilo za množenje in deljenje števil na teh-le primerih:

$$5432 \times 8, \quad 652 \times 723, \quad 12791361 : 28247.$$

11. Izštevíli pismeno:

$$\begin{array}{r} 7 \times 7 \qquad 100 - 2 \\ 8352 \times 49, \quad 5822 \times 98, \quad 4532 \times 599, \\ 6728 \times 17, \quad 5688 \times 11, \quad 3487 \times 105, \\ \qquad \qquad \quad 7.4 \qquad \qquad \quad 8 \times 8 \\ 40264 : 28, \quad 4352 : 64 \end{array}$$

12. Mlin ima 6 kamenov; vsak kamen zmelje na dan 5 hektolitrov in 36 litrov žita; koliko žita zmelje vseh 6 kamenov v 42 dneh?

13. Krčmar kupi 4 $\mathcal{H}_h$ vina po 30 gold. 40 kr., 1 $\mathcal{H}_h$ po 24 gold. 28 kr. in 3 $\mathcal{H}_h$ po 22 gld.; koliko stane 1 $\mathcal{H}_h$ povprek?

14. $(3a^2 - 2ax + 5x^2) \cdot (2a^3 + 3ax - 2x^2) - (2a - 4x) \cdot (2a + 4x) = ?$

15. $(24x^3 - 26x^2y + 18xy^2 - 4y^3) : (4x^2 - 3xy + 2y^2) = ?$

16. Namesti v 15.: $x = -2, y = +3$

17. Kako dobimo cela števila? — Koliko vrst računov imamo? — Katero število imenujemo: sumand, vsoto, minuend,

subtrahend, diferenco, multiplikand, multiplikator, faktor, dividend, divizor, kvocijent, potenco, potenčni eksponent? — Katera števila imenujemo algebrajska? — Katera pozitivna, katera negativna? — Iz katerega računa slede algebrajska števila? — Iz katerega računa sledi množenje, iz katerega deljenje?

Drugi oddelek.

O deljivosti števil.

§. 54. Število a je z m deljivo kedar je m v a brez ostanka zapadeno, torej ako je

$$a = mb$$

V tem slučaju je m mera mnogokratnika a .

N. pr. je 54 s 6 deljivo, ker je 6 v 54 ravno 9krat zapadeno. Iz tega sledi:

Ako je m mera števila a , je tudi mera mnogokratnika ac . Kajti, ako je $a = mb$, je

$$ac = (mb) c = m (bc)$$

Pojasni to še na teh-le primerih: $12 = 3 \cdot 4$, $18 = 2 \cdot 9$, $d = mf$, kjer so 3, 2, m mere števil 12, 18 in d .

Vsako število je deljivo z 1 in sè samim seboj. Število, katero je z jednoto in se samim seboj deljivo, imenujemo **absolutno praštevilo** ali na kratko **praštevilo**. Vsako drugo število imenujemo **sestavljeno število**. Tako n. pr. so števila 3, 5, 7 praštevila in števila 4, 6, 12 sestavljena števila.

Števila, katera so deljiva z 2, imenujemo **parna**, soda števila; vsa druga so **neparna** lika.

Vaje na pamet.

1. Povej vsa praštevila od 1 do 50; od 50 do 100.
2. Povej 2, 3, 4, 5 sestavljenih števil.
3. Katera števila so parna: med 1 in 20, med 35 in 64; in katera neparna?
4. Povej mero števil: 12, 18, 32, 17, 15, 23, m ; kedaj je p mera števila r ?
5. Povej 3 mnogokratnike števila: 3, 5, 7, 8, m .

§. 55. Ako ste števili a in b sè številom m deljivi, je tudi njih vsota in diferenca s tem številom deljiva.

Dokaz. Ker je

$$\begin{array}{l} a = mp \\ b = mr \text{ je tudi } (\S. 50, I., II.) \end{array}$$

$$a + b = mp + mr = m(p + r)$$

$$a - b = mp - mr = m(p - r)$$

torej vsota $a + b$ in diferenca $a - b$ z m deljiva.

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih: 9 in 6 deljivi s 3; 28, 12 deljivi s 4; p, r deljivi z n .

Rešitev na pamet: 3 je zapopadeno v 9 3krat, v 6 2krat, torej je v 9 in 6 skupaj 3krat in 2krat, t. j. 5krat (oziroma v 9 menj 6 3krat menj 2krat t. j. 1krat) zapopadeno.

§. 56. Ako a nij z b deljivo, dobimo

$$\begin{array}{r} a : b = c \qquad 28 : 8 = 3 \\ bc \qquad 24 \\ \hline 1. \ a - bc = o \text{ ostanek} \qquad 28 - 24 = 4 \\ \quad + bc = + bc \qquad \qquad \quad + 24 = + 24 \\ \hline 2. \ a = bc + o \qquad \qquad \qquad 28 = 24 + 4. \end{array}$$

Iz 1. in 2. sledi z ozirom na §. 55: Vsaka skupna mera dividenda in divizorja je tudi mera ostanka; in vsaka skupna mera divizorja in ostanka je tudi mera dividenda.

Spoznatki deljivosti.

§. 57. I. Število je deljivo z 2, ako je številka na mestu jedinice z 2 deljiva.

Dokaz. Dekadično število $\check{s}$ je

$$\check{s} = \dots + d.1000 + c.100 + b.10 + a$$

Po §. 55 je $\check{s}$ deljivo z 2, ako je vsak sumand z 2 deljiv; to pa moremo reči od vsakega, samo od številke a le takrat, kadar je parno število.

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih: 312, 426, 5014, n .

$$312 = 310 + 2 \text{ i. t. d.}$$

II. Število je deljivo s 5, ako ima na mestu jedinice 0 ali 5.

III. Število je deljivo z 10, ako ima na mestu jedinice 0.

— Dokaz takisto kakor za I. — Dokaži ta izreka še na teh-le primerih: 315, 2540, 3570, n .

IV. Število je deljivo s 4, ako je število iz jedinice in desetic s 4 deljivo.

$$\begin{array}{l} \text{Dokaz. } \check{s} = \dots + e.10000 + d.1000 + c.100 + b.10 + a \\ \qquad \qquad = (\dots + e.100 + d.10 + c).100 + b.10 + a \\ \qquad \qquad \check{s} = (\dots + e.100 + p.10 + c).25 + \frac{b.10 + a}{4} \end{array}$$

Ako je tedaj $b.10 + 4$ t. j. število iz desetic in enic se 4 deljivo, je tudi število $\check{s}$ se 4 deljivo.

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih: 1524, 6732, 15212, n .

$$1524 = 1500 + 24 \text{ i. t. d.}$$

V. Število je deljivo z 8, ako je število iz desetic, desetic in stotic z 8 deljivo.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz. } \check{s} &= (\dots + e.10 + d).1000 + c.100 + b.10 + d \\ \frac{\check{s}}{8} &= (\dots + e.10 + d).125 + \frac{c.100 + b.10 + d}{8} \end{aligned}$$

Ako je tedaj $c.100 + b.10 + d$ t. j. število iz stotic, desetic in enic deljivo z 8, je tudi število $\check{s}$ z 8 deljivo.

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih: 5048, 12376, n .

VI. Število je deljivo s 3 ali z 9, ako je njegova, številična vsota s 3 ali z 9 deljiva.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz. } \check{s} &= \dots + d.1000 + c.100 + b.10 + a \\ &= \dots + d.999 + d + c.99 + c + b.9 + b + a \\ &= \dots + 999d + 99c + 9b + \dots + d + c + b + a \\ \frac{\check{s}}{3} &= \dots + 333d + 33c + 3b + \frac{\dots + d + c + b + a}{3} \\ \frac{\check{s}}{9} &= \dots + 111d + 11c + b + \frac{\dots + d + c + b + a}{9} \end{aligned}$$

Ako je tedaj $\dots + d + c + b + a$ t. j. vsota števil s 3 ali z 9 deljiva, je tudi $\check{s}$ s 3 ali z 9 deljivo.

Dokaži ta izrek še na teh le primerih: 5712, 7803, 36261, n .

VII. Število je deljivo s 6, ako je deljivo z 2 in s 3.

Dokaz: Ker je $\check{s}$ z 2 deljivo, je $\check{s} = 2a$, in ker je $\check{s} = 2a$ s 3 deljivo, je tudi a s 3 deljivo ali $a = 3b$, torej je

$$\check{s} = 2.3b = 6b$$

t. j. s 6 deljivo.

Vaje.

S katerimi števili so ta-le števila deljiva: 3542, 7834, 36531, 5003, 78231? — Kedaj je m deljivo z 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10?

Razložitev števila v njegove prafaktorje.

§. 58. Vsako sestavljeno število moremo razložiti v same prafaktorje.

Dokaz. Ako je a sestavljeno število, mora imeti vsaj jeden faktor m ; ako je spet faktor m sestavljeno število, mora imeti

faktor n in tako nadaljevaje moraš do praštevila p priti, ker so števila $a, m, n \dots$ zmerom manjša.

Torej je

$$a = \acute{a}p$$

Sè številom $\acute{a}$ ravnaj ravno tako; na zadnje dobiš

$$a = p.r.s \dots$$

kjer so p, r, s praštevila.

Sestavljeno število pa razložiš v njegove prafaktorje, ako ga deliš s praštevilom, s katerim je deljivo; na isti način moraš deliti dobljeni kvocijent, prvi in zaporedoma vsak sledeč, s praštevilom toliko časa, dokler ne prideš do kvocijenta, ki je sam praštevilo. Zaporedoma rabljeni divizorji z zadnjim kvocijentom vred so prafaktorji danega števila.

N. pr. poišči prafaktorje števila 4224.

Rešitev.

4224 : 2	4224	2
2112 : 2	2112	2
1056 : 2	1056	2
528 : 2	528	2
264 : 2	264	2
132 : 2	132	2
66 : 2	66	2
33 : 3	33	3
11	11	

Tedaj je $4224 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11$.

Naloge (ustmene in pismene).

Razloži še ta-le števila v prafaktorje: 26, 32, 28, 66, 105, 524, 8442, 950, 19350.

Kako razložiš število v njegove prafaktorje?

Razloži v prafaktorje izraze: $3a + 3b$, $15x^2 - 12x$, $x^2 - y^2$, $15a^4 - 25b^6$.

Največja skupna mera.

§. 59. Vprašanja: Števila 48 in 72 ste deljivi sè številom 4; kako imenujemo število 4 z ozirom na število 48 in kako z ozirom na število 72? Kako z ozirom na obe števili? Skupno mero teh števil. Povej še kako število, s katerim je vsako teh števil deljivo; povej največje tako število. Kako imenujemo to število z ozirom na obe števili? Največjo skupno mero teh števil. Število, s katerim je več števil deljivih, imenujemo **skupno mero**

teh števil; in največje število, s katerim je vsako teh števil deljivo, največjo skupno mero.

Ako néma več števil nobene skupne mere, imenujemo jih medsebojna (relativna) praštevila. Tako n. pr. so 21, 25, 16 relativna praštevila.

a) Največjo skupno mero dveh ali več števil dobiš, ako jih razložiš v njihove prafaktorje in tiste izmed njih izločiš, katere nahajaš v vsakem številu; produkt teh skupnih prafaktorjev je iskana najv. sk. mera.

Dokaz. Na tak način dobljen produkt je gotovo skupna mera danih števil, ker nahajamo vse njegove faktorje v vsakem številu, je pa tudi največja skupna mera, ker bi ne bilo vsako število ž njim deljivo, ako bi mu prideli še jeden faktor.

Poišči najv. sk. mero števil 1572 in 1092.

1572	3	1092	3	
524	2	364	2	$1572 = 3 \times 2 \times 2 \times 131$
262	2	182	2	
131		91	7	$1092 = 3 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$
		13		

Tedaj je najv. skupna mera števil 1572 in 1092 produkt $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Poišči z razložitvijo v prafaktorje najv. sk. mero števil a) 315, 414; b) 2516, 352; c) 457, 832; d) 3156, 438, 5102.

b) Ako je število deljivo z drugim, je divizor najv. sk. mera obeh števil. Tako n. pr. je 83 najv. skup. mera števil 255 in 83. Na ta slučaj vendar navadno ne naletimo; največkrat še ostane ostanek pri deljenji. Potem pa deli divizor s tem ostankom in tako dalje zmerom prejšnji divizor z novim ostankom, dokler ne izvršiš deljenja brez ostanka. Zadnji divizor je potem najv. sk. mera danih števil.

Ako je pa zadnji divizor jednak 1, ste obe števili relativni praštevili.

Dokaz. Ako ste dani števili a in b in $a > b$, $r_1, r_2, r_3, \dots$ pa zaporedoma dobljeni ostanki, moremo račun takole nakazati:

dividend	a	divizor	b	ostanek	r_1
"	b	"	r_1	"	r_2
"	r_1	"	r_2	"	r_3
"	r_2	"	r_3	"	$r_4 = 0$

Vsak ostanek je celo število in manjši od prejšnjega, moramo torej jedenkrat priti do ostanka, ki je jednak ničli. V našem načrtu je r_4 ta ostanek, r_3 je potem skupna mera števil r_2 in r_3 ter tudi števil r_2 in r_1 , r_1 in b torej tudi danih števil a

in b (§. 56). r_3 je pa tudi najv. skup. mera števil a in b . Kajti ko bi bilo število $m > r_3$ tudi skupna mera teh števil, bi bilo ono tudi sk. mera števil b in r , ter tudi števil r_1 in r_2 , torej tudi števil r_2 in r_3 (§. 56), kar pa je mogoče, ker je $m > r_3$.

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

a) 3512, 428; b) 5421, 345; c) 7504, 312; č) m, n ;

$$\begin{array}{rclcl} 3512 : 428 = 8 & 88 : 76 = 1 & 3512 & 426 & 8 \\ 488 & 12 & 88 & 76 & 4 \\ 28 : 88 = 4 & 76 : 12 = 6 & 12 & 4 & 1 \\ 76 & 4 & & & 6 \\ & 12 : 4 = 3 & & & \end{array} \quad \text{ali}$$

Po tej poti dobiš najv. sk. mero več števil, ako iščeš najv. skupno mero med dvema številoma, potem med dobljeno najv. sk. mero in tretjim številom, nadalje med najv. skupno mero teh števil in četrtim številom i. t. d.; nazadnje dobljena najv. sk. mera je najv. sk. mera vseh danih števil.

Naloge.

Poišči najv. sk. mero med: a) 391 in 989; b) 1330 in 1007; c) 1334 in 754; č) 2567 in 6191; d) 3692, 6916 in 442; e) 1316, 3196 in 1034; f) 57862, 49, 788 in 90866; g) m, n ; h) m, n, p .

Rešitev nalog g) in h) obstoji v tem, da poveš, kako bi ji rešil (glej gornji dokaz), ko bi bila dana števila posebna.

n) $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b, a^2 - b$;

o) $x^2 - 2ax + a^2, x^2 - a^2$;

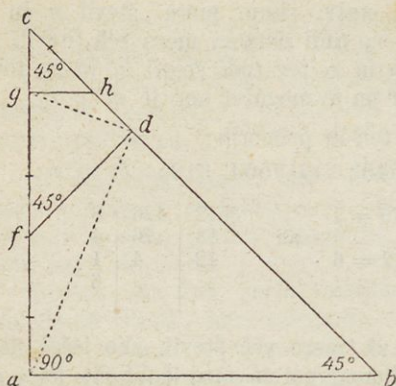
p) $12a^3 - 2a^2 - 35a - 11, 6a^2 + 11a + 3$.

7. Išči skupno mero ravníc $ab = 32m, cd = 44m$.

Rešitev s primerjanjem ravníc in njihovih ostankov.

$$\begin{array}{lcl} db = cf = 32m'_m & c \text{ ————— } f & i \text{ ————— } d \\ fa = ag = gh = 12m'_m & & \\ hb = fi = 8m'_m & a \text{ ————— } g & h \text{ ————— } k \text{ ————— } b \\ id = hk = kb = 4m'_m & & \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 44 & 32 & 1 \\ 12 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{array}$$

a) Išči skupno mero katete in hipotenuze enakokračnega trikotna.



Rešitev:

Naredi 7.) $bd = ac = ab$ in
 $fd \perp bc$

2.) $cd = af = fg$ in
 $gh \perp ac$

3.) $cg = gh = hi$

i. t. d. brez konca, ker je kateta zmerom krajša od hipotenuze in hipotenuza zmerom manjša od dvojne katete. Kateta jednokračnega trikotnika in hipotenuza torej nimate skupne mere.

Količine, ki imajo skupno mero, imenujemo **somerne**; in količine brez skupne mere, **nesomerne**. Naj je e — neka količina (ravnica), katero si misliš, tako majhna, kakor le hočeš — mera količine A (katete ab), katera je z B (hipotenuzo bc) nesomerna, potem je

$$A = m \cdot e \text{ in } B = ne + v$$

kjer je v (zadnji ostanek) manjši kakor e .

Za prav majhno količino e je v tudi prav majhna, da jo brez znatnega pogreška lahko izpustiš. Potem je

$$A = me \text{ in } B = ne \text{ s prav malim pogreškom.}$$

Najmanjši skupni mnogokratnik.

§. 60. Vprašanja. S katerimi števili je število 15 deljivo? Kaj je število 15 z ozirom na število 3 in kaj z ozirom na število 5? Kaj je število 15 z ozirom na vsako število (3 in 5)? Zakaj imenujemo število 15 skupen mnogokratnik števil 3 in 5? Povej še kako število, ki je skupen mnogokratnik števil 3 in 5 in potem še več takih; povej najmanjše število, ki je sk. mnogokratnik števil 3 in 5? Število, ki je deljivo z dvema ali več števili, imenujemo **skupen mnogokratnik** teh števil, najmanjše število pa, ki je deljivo z vsakim izmed danih števil, **najmanjši skupni mnogokratnik**.

Skupni mnogokratnik danih števil mora imeti v sebi vse prafaktorje vsakega števila; ko bi le jeden faktor manjkal v njem z ozirom na kako število, bi uže ne bil deljiv s tem številom. Skupen mnogokratnik pa še zmerom ostane, če ga tudi še z novim faktorjem množiš (§. 54). Da pa dobiš najm. sk. mnogokratnik, vzemi faktor, ki ga skupno nahajaš v dveh ali več številih, v skupnem mnogokratniku le enkrat. To smeš storiti, ker ima ta sk. mnogokratnik vse jedno še zmerom vse prafaktorje vsakega števila. N. pr.

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 98 = 2 \cdot 7 \cdot 7.$$

$$\text{Najm. sk. mnogokr.} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2940.$$

Ali nahajaš v 2940 vse faktorje števila 105, in števila 84 in števila 98, kateri so ti? Ali ima 2940 ravno toliko prafaktorjev, kakor 105, 84 in 98 skupaj?

Išči na isti način najm. sk. mnogokr. teh-le števil: 25, 435, 204; 72, 96, 324. —

Iz tega sledi pa tudi to-le pravilo za iskanje najm. sk. mnogokratnika.

1. Dana števila napiši v vrsto jedno zraven drugega in prečrtaj manjša, ako so zapopadana brez ostanka v večjih.

2. Vsak skupen prafaktor dveh ali več izmed danih števil izloči na drugo stran črte, potegneno na levo ali na desno vrstnih števil, in deli potem vsako število, v katerem nahajaš ta faktor; dobljene kvocijente in s tem faktorjem nedeljiva števila zapiši v drugo vrsto pod prvo.

3. Taisto stori z novo vrsto, in to početje ponavljaj toliko časa, dokler ne prideš do vrste iz samih relativnih praštevil.

4. Produkt v zadnji vrsti ostalih praštevil in izločenih skupnih faktorjev je najm. sk. mnogokratnik vseh danih števil.

Ta-le primer to pravilo še bolj pojasnjuje:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5, 10, 12, 15, 16 \\ 2 & 5, 6, 15, 8 \\ & 3, 15, 4 \end{array}$$

najm. sk. mnogokr. števil 5, 10, 12, 15, 16 je $15 \times 4 \times 2 \times 2 = 240$

Poišči najm. skupni mnogokratnik števil

- a) 3, 18, 9, 15, 16, 20; b) 22, 20, 32, 35;
c) 14, 21, 18, 33, 11, 36;
č) ax, mx ; d) $3x^2, 2ax, 4a$

Zakaj smemo v teh primerih prečrtati manjša števila, ki so zapopadana v večjih brez ostanka? Zakaj smemo izločiti skupne faktorje? Zakaj v obče moramo samo prafaktorje izločevati? Zakaj je produkt iz dobljenih relativnih praštevil in iz izločenih prafaktorjev skupni in zakaj najm. sk. mnogokratnik danih števil?

Vaje (na pamet in pismeno).

- a) 5, 2; b) 3, 7; c) 5, 8; č) 8, 12; d) 2, 4;
e) 3, 5, 7; f) 2, 4, 8; g) 5, 7, 10; h) 3, 6, 7;
i) 12, 18, 19, 4, 16; j) 23, 2, 5, 10, 14;
k) 42, 48, 92, 4, 8; l) 105, 93, 16, 201, 819, 312;
m) $3x, 3$; n) $6x^2, 2x^3, 15$; o) am, a^2n, mx, nx^3 ;
p) $y, 3, x$; r) $x - a, x + a$; s) $y^2 + 5, y^2 - 5$.

Vaje za ponavljanje.

1. S katerimi števili so deljiva :
3522, 7803, 40752.
2. Išči najv. sk. mero števil 258, 702, 3518, 432, 856; na oba načina.
3. Načrtaj si črti: 56mm, 28mm in išči njihovo najv. skup. mero s pokladanjem jedne na drugo.
4. Išči najm. sk. mnogokratnik števil 2, 6, 8, 12, 16.

Tretji oddelek.

0 ulomkih ali drobih.

§. 61. Koliko je: deseti del $1 \frac{m}{l}$, $1 \frac{d}{m}$, $1 \frac{c}{m}$, $1 \frac{g}{g}$; stoti del $1 \frac{gl.}{l}$, $1 \frac{h}{g}$, $1 \frac{H}{a}$, $1 \frac{a}{l}$; tisoči del $1 \frac{h}{g}$, $1 \bigcirc \frac{m}{l}$, $1 \bigcirc \frac{d}{m}$, $1 \bigcirc \frac{c}{m}$, šestdeseti del 1 ure, 1 minute, 1^0 (z ozirom na kote); šesti del 1 sežnja?

Rešitev: Deseti del 1 m je 1 dm i. t. d.

Naloga: Razdeli $17 \frac{m}{l}$ v 5 enakih delov.

$$\text{Rešitev: } 17 \frac{m}{l} : 5 = (15 + 2) : 5 = 3 \frac{m}{l} + (2 : 5)$$

$17 \frac{m}{l}$ ne moremo tako deliti s 5, da bi dobili celo število za kvocijent; število $2 \frac{m}{l}$ ostane, katero bi še s 5 deliti morali. To je pa le mogoče, ako razdrobimo jednoto meter v 5 enakih delov, v 5 petin; $2 \frac{m}{l}$ imata potem 10 petin. Tedaj je

$$2 \frac{m}{l} : 5 = 10 \text{ petin } \frac{m}{l} : 5 = 2 \text{ petini } \frac{m}{l}.$$

2 petini pišemo navadno $\frac{2}{5}$, torej kakor nakazano deljenje. Gornji primer izvršujemo potem tako-le

$$\begin{aligned} 17 \frac{m}{l} : 5 &= 3 + \frac{2}{5} \frac{m}{l} \text{ ali krajše} \\ &= 3 \frac{2}{5} \frac{m}{l} \end{aligned}$$

Opazka: $1 \frac{m}{l}$ ima 10 $\frac{d}{m}$; toraj 1 petina metra $2 \frac{d}{m}$ in 2 petini $4 \frac{d}{m}$.

Reši takisto te-le naloge:

$$14 \frac{gl.}{l} : 10, \quad 26 \frac{h}{g} : 8, \quad 33 \frac{H}{a} : 6.$$

Če torej tudi nij divizor v dividendu brez ostanka zapopaden, moremo deljenje vse jedno izvršiti; treba je le vsako jednoto ostanka v toliko enakih delov razdrobiti, kolikor ima divizor jednot. To smo spoznali najpred za imenasta števila; velja pa tudi za brezimenasta, ker rešitev prve naloge n. pr. ne odvisi čisto nič od natore količinske jednote.

Deli: $28 : 6$, $35 : 8$, $45 : 7$, $m : n$ ($m = an + b$ in $b < n$)

Števila $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{a}{n}$ (a -ntin), kakoršne dobiš v takih primerih, imenujemo **ulomke** ali **drobe**. Ulomki so tedaj števila, ki postanejo iz samih enakih delov prvotne jednote. Vsak ulomek obstoji iz dveh števil; jedno pove v koliko enakih delov imaš razdeliti jednoto, ali imenuje jednoten del, zovemo ga **imenivce** in pišemo ga pod ulomkovo črto; drugo pa šteje jednake dele, imenujemo ga **števec**, in pišemo ga nad ulomkovo črto.

Ulomek $\frac{a}{b}$ tedaj pomeni b ti del jednote a krat vzet, t. j.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Ulomke ločimo v **prave** in **neprave**; pravi so tisti, v katerih je števec manjši od imenivca, nepravi pa oni, v katerih je števec večji od imenivca.

Povej nekoliko pravih in potem nekoliko nepravih ulomkov.

Kedaj imenujemo ulomek $\frac{m}{n}$ pravi in kedaj nepravi?

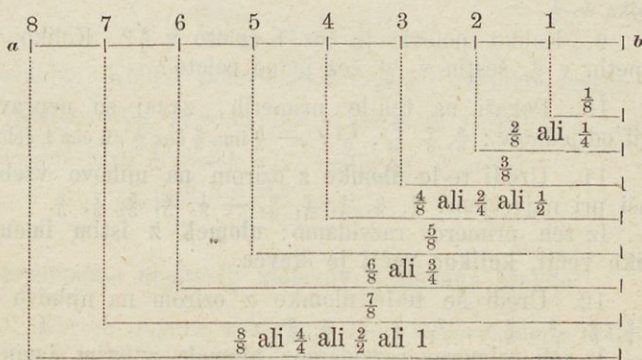
Število obstoječe iz celega števila in ulomka imenujemo **mešano število**. N. pr.

$$5\frac{2}{7}, 3\frac{5}{8}, a + \frac{m}{n}$$

Povej še nekoliko mešanih števil.

Dostavek. Iz pomena ulomka sledi, da si ga moremo misliti, kot nakazan kvocijent. Izreki za kvocijente veljajo torej tudi za ulomke.

Tudi ulomke moremo načrtati, kakor je razvidno iz te-le podobe:



Ravnica *ab* predstavlja 1 celoto, katera je v osminke razdeljena. — Načrtaj na ravnici vse tretjine, četrtine i. t. d., kakor si vsa števila na številni ravnici načrtal.

Vaje na pamet in vprašanja.

1. Razdeli jednoto v : 2, 3, 4, 5, 6, ... *a* enakih delov in imenuj vsak dobljen del. — Pokaži to na črti.

Iz tega razvidamo, da je:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \dots$$

2. Izvrši ta-le nakazana deljenja:

- a) $5 : 8 = ?$ b) $7 : 9 = ?$ c) $2 : 4 = ?$
 č) $11 : 20 = ?$ d) $17 : 25 = ?$ e) $32 : 49 = ?$
 f) $5 : 100 = ?$ g) $a : b = ?$ ($a < b$)

3. Beri te-le ulomke in povej pri vsakem njegov števec in imenivec : $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{m}{n}$. — Kako postanejo ti ulomki?

4. Načrtaj te-le ulomke : $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$.

5. Koliko je : 2 polovici, 3 tretjine, 4 četrtine... *a*-tin?

6. Koliko polovic, tretjin, četrtin, ... *a*-tin daje jedno celoto?
 — 2 polovici, 3 tretjine i. t. d. dajó jedno celoto.

a-ti del jednote *a*-krat vzet daje jednoto, t. j. $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Koliko polovic moramo še vzeti zraven 1 polovice, da dobimo 1 celoto? Koliko tretjin zraven 1, 2 tretjin; koliko četrtin zraven 1, 2, 3 četrtin, koliko petin zraven 1, 2, 3, 4 petin, da dobimo jedno celoto?

8. Pokaži na teh-le primerih, zakaj so pravi ulomki manj veljavni od jednote : $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{15}$. — Od $\frac{2}{3}$ do 1 celote ali $\frac{3}{3}$ manjka še $\frac{1}{3}$. —

9. Koliko polovic je čez 1 celoto v $\frac{3}{2}$? Koliko tretjin v $\frac{5}{3}$, petin v $\frac{8}{5}$, šestin v $\frac{11}{6}$ čez jedno celoto?

10. Pokaži na teh-le primerih, zakaj so nepravi ulomki večji od jednote : $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{9}$? — $\frac{5}{3}$ ima $\frac{2}{3}$ čez $\frac{3}{3}$ ali čez 1 celoto.

11. Uredi te-le ulomke z ozirom na njihovo vsebnost pričenši pri največjem : $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, — $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$.

Iz teh primerov razvidamo : ulomek z istim imenivcem je toliko večji, kolikor večji je števec.

12. Uredi še te-le ulomke z ozirom na njihovo vrednost : $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{8}$ — $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$.

Iz teh primerov razvidamo : ulomek z istim imenivcem je toliko večji, kolikor manjši je imenivec.

13. Zakaj je: $\frac{5}{3} > \frac{2}{3}$, $\frac{8}{9} > \frac{5}{9}$, $\frac{3}{11} > \frac{2}{11}$? Odgovor: Kolikor več enakih delov vzamemo, toliko več moramo dobiti; kedaj je $\frac{a}{m} > \frac{b}{n}$?

14. Zakaj je $\frac{5}{8} > \frac{5}{11}$, $\frac{3}{8} > \frac{3}{18}$, $\frac{5}{7} > \frac{7}{8}$? — Nekako število večjih delov je več, kakor isto število manjših delov (5 večih šestin je gotovo več, kakor 5 manjših jednajstin).

Kedaj je $\frac{a}{m} > \frac{a}{n}$?

Uravnavanje ulomkov.

§. 62. Vsako celo število moreš spremeniti v ulomek z danim imenivcem, ako množiš celo število z danim imenivcem in ta produkt vzameš za števec.

Dokaz: $5 = (5 \times 3) : 3 = \frac{15}{3}$

$a = (a \cdot b) : b = \frac{ab}{b}$ §. 61, dostavek.

Kedar je števec z imenivcem deljiv, imenujemo ulomek **neresničen** ulomek.

Vprašanja 1. Koliko polovic ima 2, 3, 4, 5..... n celih? — Koliko tretjin, koliko četrtn, petin.... a -tin? — 1 celota = 2 polovici, 2 celoti = 2×2 polovici = 4 polovice = $\frac{4}{2}$.

Mešano število spremeniš v nepravi ulomek ali ga uravnaš, ako množiš celo število z imenivcem in k produktu prišteješ števec; ta vsota je števec in imenivec ostane neizpremenjen, t. j.

$$a + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}$$

Dokaz:

a ima an n -tin, torej

a in $\frac{m}{n}$ na in m n -tin, t. j.

$$a + \frac{m}{n} = \frac{na + m}{n}$$

Vprašanja: Koliko polovic je 2 celi $\frac{1}{2}$? Koliko tretjin je 5 in $\frac{2}{3}$? Koliko n -tin je a in $\frac{b}{n}$? 1 celota = 3 tretjin, 5 celot = 5×3 tretjin = 15 in še $\frac{2}{3}$ zraven je 17 tretjin ali $\frac{17}{3}$; tedaj

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}.$$

Izprememba nepravilnih ulomkov v mešana števila.

§. 63. Ker je ulomek nakazano deljenje, moremo to deljenje izvršiti, s čimer ravno iz nepravega ulomka mešano število dobimo. N. pr. $\frac{12}{5} = 12 : 5 = 2\frac{2}{5}$.

Razširjenje ulomkov.

§. 64. Vrednost ulomka ne spremeniš, ako množiš števec in imenivec z istim številom. (§. 61, §. 44, IX.)

Kedar množimo števec in imenivec ulomka z istim številom, pravimo, da ulomke razširimo.

Z razširjenjem moremo vsak ulomek brez izpremembe njegove vrednosti spremeniti v drug, ki ima za imenivec mnogokratnik prejšnjega imenivca.

Naloge: Izpremeni $\frac{3}{5}$ v ulomek z imenivcem 10, 15, 20, 5m.

5 petin = 10 desetini, 1 petina = 5. del od 10 desetini = 2 desetini, in 3 petine = 3×2 desetini = 6 desetini ali $\frac{6}{10}$, torej pismo

$$10 : 5 = 2 \text{ in } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$$

Izpremeni še: ulomek $\frac{5}{7}$ v ulomek z imenivcem 14, 21, 35; ulomek $\frac{a}{b}$ v ulomek z imenivcem $2b$, $3b$, mb .

Ulomek spremeniš v drug ulomek z danim imenivcem, ako deliš novi imenivec sè starim in množiš števec z dobljenim kvocijentom; produkt je novi števec.

Razširi te-le ulomke tako, da ima vsak 56 za imenivec :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 14}{4 \times 14} = \frac{42}{56}, \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{40}{56}, \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 7}{8 \times 7} = \frac{49}{56}$$

Imenivec 56 imenujemo skupen imenivec razširjenih ulomkov.

Razširi še in sicer kolikor mogoče na pamet:

1. ulomke	$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$	na ulomke z imenivcem 10;
2. "	$\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}$	" " " " 70;
3. "	$\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{3}{15}$	" " " " 180;
4. "	$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}$	" " " " 60;

§. 65. Kedar hočemo ulomke primerjati, seštevati ali odštevati, moramo jih izpremeniti v ulomke sè skupnim imenivcem; da je pa računanje kolikor mogoče kratko, poiščemo najmanjše število, ki je deljivo z vsakim imenivcem danih ulomkov, torej najmanjši skupni mnogokratnik imenivcev in ga naredimo za najmsk. imenivec novih ulomkov. N. pr. spremenimo ulomke $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{13}{16}$ v ulomke z najm. sk. imenivcem.

$$\begin{array}{c|c} \text{Imenivci danih ulomkov} & 3, 5, 6, 9, 16 \\ \hline & 5, 3, 9, 8 \end{array} \quad 2$$

$$\text{najm. sk. imenivec} = 5 \times 9 \times 8 \times 2 = 720$$

720				
$\frac{2}{3}$	240	480	tedaj	$\frac{2}{3} = \frac{480}{720}$
$\frac{3}{4}$	144	432		$\frac{3}{4} = \frac{432}{720}$
$\frac{5}{6}$	120	600		$\frac{5}{6} = \frac{600}{720}$
$\frac{4}{5}$	80	320		$\frac{4}{5} = \frac{320}{720}$
$\frac{1}{2}$	45	585		$\frac{1}{2} = \frac{585}{720}$

Naloge (kolikor mogoče na pamet).

- Izpremeni ulomka $\frac{3}{8}$ in $\frac{1}{2}$ v ulomka z najm. sk. imenivcem. Na pamet: Najmanj. sk. imenivec je 8; 2 polovici = 8 osmink, polovica = 4 osminke; torej sta iskana ulomka $\frac{3}{8}$ in $\frac{4}{8}$.
- Izpremeni še te-le ulomke v ulomke z najm. sk. imenivcem.

a) $\frac{3}{7}$ in $\frac{5}{14}$; b) $\frac{a}{c}, \frac{b}{cd}$; c) $\frac{x}{m}, \frac{x}{m^2}$; č) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$;

d) $\frac{1}{2}, \frac{4}{15}$; e) $\frac{4}{10}, \frac{1}{15}$; f) $\frac{a}{3x}, \frac{b}{2x}$; g) $\frac{4}{5m^3}, \frac{6}{15m^2}$;

h) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}$; i) $\frac{4}{11}, \frac{7}{8}$; j) $\frac{a}{1+a}, \frac{a}{1-a}$; k) $\frac{3}{x-5}, \frac{2}{x+5}$;

l) $\frac{3}{5}, \frac{2}{10}$; m) $\frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{24}, \frac{1}{18}$.
- Kateri izmed ulomkov je večji:

a) $\frac{5}{7}, \frac{9}{13}$; b) $\frac{6}{5}, \frac{1}{15}$.
- Kateri izmed ulomkov $\frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{1}{19}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}$ je največji in kateri najmanjši?
- Poredaj te-le ulomke po njihovej vrednosti, pričenši z najmanjšim: $\frac{5}{7}, \frac{1}{24}, \frac{3}{8}, \frac{7}{9}, \frac{3}{48}, \frac{1}{21}$.

Okrajšanje ulomkov.

§. 66. Dobili smo

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \text{ torej je tudi narobe}$$

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$$

Vrednost ulomka ne spremeniš, ako deliš števec in imenivec z istim številom.

S porabo tega izreka moremo ulomek okrajšati, t. j. z manjšimi števili izraziti, pa vendar ne spremenimo njegove vrednosti, kedar imata števec in imenivec skupno mero. — Ulomka ne moremo več okrajšati, ako smo delili števec in imenivec z najv. sk. mero.

Naloge.

1. Okrajšaj te-le ulomke:

$$\begin{array}{cccc} \frac{528}{312}, \frac{54}{81}, \frac{855}{915}, \frac{345}{405} \\ \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ \frac{528}{312} & \frac{855}{915} \end{array} \end{array}$$

2. Okrajšaj te-le ulomke kar na jedenkrat kolikor mogoče:

$$\frac{248}{360}, \frac{315}{405}, \frac{6012}{8172}, \frac{1050}{2400}, \frac{7032}{2322}, \frac{3abx}{12bm}, \frac{12a^2x}{28ax^2}$$

Seštevanje ulomkov.

§. 67. Ulomke enakih imenivcev seštevaj, ako sešteješ števec, skupni imenivec pa obdržiš, t. j.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

Dokaz. Ulomek $\frac{a}{m}$ ima jedno m -tinko a -krat in ulomek $\frac{b}{m}$ jo ima b -krat, torej oba skupaj a in b -krat ali $(a+b)$ m -tink, t. j. $\frac{a+b}{m}$

Dokaži to še na teh-le primerih:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = ? & b) \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = ? & c) \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = ? \\ & \check{c}) \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = ? \end{array}$$

Ulomke raznih imenivcev pa spremeni v ulomke z najm. sk. imenivcem, da jih potem moreš seštevati.

N. pr. ulomke $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{8}, \frac{11}{14}, \frac{7}{16}$.

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{4} & 28 & 84 & \\ \frac{5}{7} & 16 & 80 & \\ \frac{7}{8} & 14 & 98 & \\ \frac{11}{14} & 8 & 88 & \\ \frac{7}{16} & 7 & 49 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{sk.} \\ \text{števec za} \\ \text{imen. 112} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4, 7, 8, 14, 16 \\ 7 \quad 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{najm. sk. im.} = 7 \times 8 \times 2 = 112 \end{array}$$

$$3 \frac{9}{16} \quad 399 : 112 = 3 \frac{63}{112} \left| \frac{9}{16} \right.$$

Naloge (kolikor mogoče na pamet).

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = ? & 2. \frac{7}{8} + \frac{6}{8} = ? & 3. \frac{25}{8} + \frac{23}{8} = ? \\ 4. \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = ? & 5. 5\frac{3}{7} + 3\frac{6}{7} = ? & 6. 12\frac{5}{10} + 24\frac{7}{10} + 32\frac{6}{10} = ? \end{array}$$

Rešitev nal. 5. na pamet: 5 in 3 je 8, $\frac{3}{7}$ in $\frac{6}{7}$ je $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$, torej $5\frac{3}{7}$ in $3\frac{6}{7} = 8$ in $1\frac{2}{7} = 9\frac{2}{7}$.

7. $122\frac{3}{5} + 403\frac{4}{5} + 82\frac{1}{5} + 105\frac{2}{5} = ?$
 8. $\frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} = ?$ 9. $\frac{5}{3p} + \frac{7}{3p} + \frac{2}{3p} + \frac{4}{3p} = ?$
 10. $\frac{a+x}{b} + \frac{a-x}{b} = ?$ 11. $\frac{m}{x-1} + \frac{2n-m}{x-1} = ?$
 12. $m + \frac{a-mn}{n} = ?$ 13. $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = ?$
 14. $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} = ?$ 15. $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = ?$ 16. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ?$
 17. $\frac{m}{ax} + \frac{n}{x} = ?$ 18. $\frac{x}{cb} + \frac{x}{cd} = ?$ 19. $14\frac{2}{3} + 23\frac{7}{10} = ?$
 20. $5\frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} + 3\frac{3}{5} + 4\frac{2}{3} = ?$
 21. $123\frac{11}{15} + 45\frac{3}{11} + 312\frac{4}{5} + 5722\frac{17}{33} = ?$
 22. $\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{3x^3} = ?$ $x=3$ 23. $3m + \frac{2b}{5x} = ?$
 24. $\frac{5m}{3a^3} + \frac{4n-2m}{6a^2} + \frac{m-2n}{a^3} = ?$ 25. $6a - b + \frac{x-18ay}{3y} = ?$

Odštevanje ulomkov.

§. 68. Ulomke enakih imenivcev odštevaš, ako odšteješ števec, skupni imenivec pa obdržiš, t. j.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

Dokaz. Ulomek $\frac{a}{m}$ ima jedno m -tinko a -krat in ulomek $\frac{b}{m}$ jo ima b -krat, torej jo ima njijina diferenca a menj b -krat ali diferenca obeh ulomkov ima $(a-b)$ m -tink, t. j. $\frac{a-b}{m}$

Dokaži to še na teh-le primerih:

a) $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = ?$ b) $\frac{7}{9} - \frac{3}{9} = ?$ c) $\frac{5}{11} - \frac{4}{11} = ?$ č) $\frac{x}{s} - \frac{y}{s} = ?$

Ulomke raznih imenivcev pa izpremeni v ulomke z najm. sk. imenivcem, da jih potem moreš odštevati. N. pr. ulomka $\frac{4}{9}$ in $\frac{5}{27}$ odštevamo

27		
$\frac{4}{9}$	3	12
$\frac{5}{27}$	1	6
$\frac{7}{27}$	$\frac{7}{27}$	

števeca za
sk. im. 27.

9, 27
najm. sk. im. = 27.

Naloge (kolikor mogoče na pamet).

1. $\frac{2}{15} - \frac{1}{15} = ?$ 2. $\frac{13}{15} - \frac{8}{5} = ?$ 3. $5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = ?$

Rešitev 3. nal. na pamet. 5 menj 4 je 1, $\frac{2}{3}$ menj $\frac{1}{3}$ je $\frac{1}{3}$, torej

$$5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

4. $12\frac{3}{7} - 5\frac{6}{7} = ?$ — Rešitev: Ker $\frac{6}{7}$ ne moremo odštevati od $\frac{3}{7}$, moramo jedno jedoto minuenda izpremeniti v $\frac{7}{7}$ in jih prišteti $\frac{3}{7}$, potem je $12\frac{3}{7} - 5\frac{6}{7} = 11\frac{10}{7} - 5\frac{6}{7} = 6\frac{4}{7}$.

Tako računamo v vsakem enakem slučaju.

5. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = ?$ 6. $\frac{5m-3n}{2p} - \frac{4m}{2p} = ?$
 7. $\frac{7f+2h}{3x^4} - \frac{4f-h}{3x^4} = ?$
 8. $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = ?$ 9. $12\frac{4}{3} - 5\frac{2}{3} = ?$ 10. $\frac{7}{9} - \frac{5}{12} = ?$
 11. $\frac{7}{8} - \frac{10}{16} = ?$ 12. $142\frac{5}{9} - 25\frac{5}{6} = ?$
 13. $\frac{3}{m} - \frac{2}{n} = ?$ 14. $\frac{5}{3a} - \frac{2}{a} = ?$ 15. $\frac{2a}{5x^4} - \frac{a}{x^3} = ?$ ($a=2$ $x=1$)
 16. $\frac{5x^3-2y^3}{xy^2} - \frac{2x^3-5y^3}{yx^2} = ?$
 17. $\frac{7ax^3+8bx^3}{9x^5} - \frac{5a-3b}{3x^2} = ?$

Množenje in deljenje ulomkov.

§. 69. a) Ulomek množiš s celim številom, ako ž njim množiš števec in imenovalec neizpremenjen pustiš.

$$\frac{m}{n} \cdot a = \frac{ma}{n}$$

Dokaz glej (§. 61 dostavek, §. 44, III.) Ali: ulomki z istim imenovalcem so tim večji, čim večji je števec, ter a -krat večji; če je števec a -krat večji; torej je

$$\frac{m}{n} \cdot a = \frac{ma}{a}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

- a) $\frac{3}{4} \times 7 = ?$ b) $\frac{5}{7} \times 2 = ?$ c) $\frac{3}{8} \times 5 = ?$ č) $\frac{s}{t} \times p = ?$

Vaje (na pamet in pismeno).

1. $\frac{3}{5} \times 4 = ?$ 2. $12\frac{7}{8} \times 11 = ?$ Rešitev na pamet: 11krat 12 je 132, 11krat $\frac{7}{8}$ je 11krat $\frac{8}{8} = 1$ menj 11krat $\frac{1}{8}$, t. j. 11 menj $1\frac{1}{8}$ ali $9\frac{5}{8}$, torej 11krat $12\frac{7}{8} = 141\frac{5}{8}$.
 3. $12\frac{7}{9} \times 25 = ?$ 4. $\frac{4}{m} \times 3 = ?$ 5. $\frac{7}{18} \times 12 = ?$
 Rešitev: $\frac{7}{18} \times 12 = \frac{84}{18} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ ali tudi $\frac{7}{3 \cdot 18} \times 12 = \frac{2 \times 7}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Če moreš celo število proti imenivcu okrajšati, okrajšaj se skupnim faktorjem še pred množenjem.

6. $\frac{5}{8} \times 24 = ?$ Rešitev na pamet: 24krat $\frac{1}{8} = \frac{3}{1}$ ali 3 in 34krat $\frac{5}{8} = 24$ krat 3 ali 3krat 24 = 72.

7. $15\frac{5}{7} \times 28 = ?$ 8. $\frac{5}{x} \times 3x = ?$ 9. $\frac{6}{cm^2} \cdot am = ?$

10. $\frac{2x^2}{5y} \times x^3 = ?$ 11. $\frac{7a^3}{15b^7} \cdot 5a^4 = ?$

b) Ulomek tudi množiš s celim številom, ako ž njim deliš imenivec, števec pa neizpremenjen pušiš.

$$\frac{m}{n} \cdot a = \frac{m}{n : a}$$

Dokaz (§. 61 dostavek, §. 44, VIII.) Ali: Ulomki z istim števcem so tim večji, čim manjši je imenivec, ter a -krat večji, če je imenivec a -krat manjši ali le a -ti del od imenivca prvega ulomka, torej je

$$\frac{m}{n} \times a = \frac{m}{n : a}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih.

a) $\frac{5}{12} \times 3 = ?$ b) $\frac{3}{8} \times 4 = ?$ c) $\frac{5}{18} \times 6 = ?$ č) $\frac{i}{k} \times l = ?$

To pravilo moremo porabiti, kedar je imenivec deljiv s celim številom.

Vaje na pamet.

1. $\frac{5}{9} \times 3 = ?$ Rešitev na pamet: 3krat $\frac{1}{9}$ je $\frac{1}{3}$ in 3krat $\frac{5}{9}$ je 5krat $\frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. 2. $\frac{7}{12} \times 4 = ?$ 3. $16\frac{5}{8} \times 6 = ?$

4. $\frac{a}{35b} \times 7 = ?$ 5. $\frac{7x}{27y} \times 9y = ?$ 6. $\frac{13a}{25x^3} \times x^3 = ?$

7. $\frac{21m^2}{26n^4} \times 13n = ?$ 8. $\frac{3}{7} \times 7 = ?$ 9. $\frac{5}{8} \times 8 = ?$

10. $125\frac{1}{2} \times 29 = ?$ 11. $\frac{a}{m} \times m = a$ 12. $\frac{7}{6x} \times 6x = ?$

12. $\frac{5m}{x^5} \times x^5 = ?$ 14. $\frac{17x^4}{15y^5} \times 15y^5 = ?$

Iz primera 11. izpoznaš: Ako množiš ulomek z njegovim imenivcem, dobiš števec za produkt.

§. 70. I. Ulomek deliš s celim številom, ako ž njim deliš števec, imenivec pa neizpremenjen pušiš.

Dokaz. Glej §. 61 dostavek §. 44, V. Ali: Ulomki z istim imenivcem so tim manjši, čim manjši je števec ter a -krat manjši,

če je števec a -krat manjši ali le a -ti del od števca prvega ulomka; torej je

$$\frac{m}{n} : a = \frac{m : a}{n}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

a) $\frac{2}{3} \frac{1}{4} : 7 = ?$ b) $\frac{2}{6} \frac{4}{5} : 3 = ?$ c) $\frac{4}{5} \frac{3}{8} : 11 = ?$ č) $\frac{a}{b} : c = ?$

To pravilo moremo pa le porabiti, kedar je števec deljiv s celim številom.

Vaje (na pamet in ustmeno).

1. $\frac{14}{3} : 7 = ?$ 2. $\frac{1}{7} \frac{3}{4} : 6 = ?$ 3. $\frac{3}{8} \frac{8}{5} : 7 = ?$ 4. $\frac{2}{5} \frac{5}{2} : 25 = ?$

5. $\frac{3a}{2b} : 3a = ?$ 6. $\frac{5x^{12}}{2y^4} : x^9 = ?$ 7. $\frac{48m^5}{5n^5} : 12m^4 = ?$

II. Ulomek deliš s celim številom, ako množiš imenivec s celim številom, števec pa neizpremenjen pustiš.

$$\frac{m}{n} : a = \frac{m}{n \times a}$$

Dokaz. Glej §. 61, dostavek, §. 44. V). Ali ulomki z istim števcom so tim manjši, čim večji je imenivec, ter a -krat manjši, če je imenivec a -krat večji; torej je

$$\frac{m}{n} : a = \frac{m}{na}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

a) $\frac{5}{7} : 2 = ?$ b) $\frac{1}{13} \frac{2}{5} : 5 = ?$ c) $\frac{3}{5} \frac{2}{6} : 6 = ?$ č) $\frac{h}{k} : i = ?$

Vaje.

1. $\frac{3}{5} : 2 = ?$ 2. $\frac{5}{7} : 4 = ?$ 3. $23 \frac{8}{9} : 7 = ?$

4. $\frac{a}{b} : c = ?$ 5. $\frac{1}{19} \frac{5}{6} : 6 = ?$ Rešitev: $\frac{1}{19} \frac{5}{6} : 6 =$

$= \frac{1 \cancel{5} 5}{19 \times 6 \cancel{2}} = \frac{5}{38}$ ali $\frac{1 \cancel{5} 5}{19} : 6 \cdot 2 = \frac{5}{38}$. Kedar imata torej števec in celo število skupno mero, okrajšaj jih ž njo pred deljenjem.

6. $\frac{27a}{22b} : b = ?$ 7. $\frac{mx^5}{ny^3} : 5x^3 = ?$ 8. $\frac{27b^4}{14c} : cb^3 = ?$

§. 71. Opomba. Ako imamo z ulomkom $\frac{a}{b}$ število m ali ulomek $\frac{m}{n}$ množiti, moramo razširiti pojem množenja. Število m ali ulomek $\frac{m}{n}$ z ulomkom $\frac{a}{b}$ množiti se pravi b -ti del števila m ali ulomka $\frac{m}{n}$ a -krat vzeti.

I. Število množiš z ulomkom, ako ga v poljubnem redu deliš z imenivcem in množiš se števcem, t. j.

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{b}$$

Dokaz sledi naravnost iz pojma za množenje celega števila z ulomkom.

II. Ulomek množiš z ulomkom, ako množiš števec se števcem in imenivec z imenivcem, t. j.

$$\frac{m}{n} \times \frac{a}{b} = \frac{ma}{nb}$$

Dokaz. Glej (§. 61 dostavek in §. 44 VI.) Ali po pojmu za množenje z ulomkom.

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{m}{n} : b \right) a = \frac{m}{nb} \cdot a = \frac{ma}{nb}$$

$$\text{Ker je } \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{nb} = \frac{am}{bn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$$

smemo faktorje zamenjati, če so tudi ulomki.

Dokaži te pravili še na teh-le primerih:

$$a) 4 \times \frac{3}{5} = ? \quad b) p \cdot \frac{r}{s} = ? \quad c) \frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = ? \quad \check{c}) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$$

$$d) \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g} = ?$$

Rešitev: a) 5ti del 1 celote je $\frac{1}{5}$ in 4 celot $\frac{4}{5}$; 3krat $\frac{4}{5} = \frac{12}{5}$.

c) 4ti del $\frac{1}{7}$ je $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ pa $\frac{5}{7}$, 3krat $\frac{5}{7} = \frac{15}{7}$.

Vaje.

$$1. 8 \cdot \frac{5}{7} = ? \quad 2. 5a^2x \cdot \frac{2m}{ax^2} = ? \quad 3. 12a^2y^3 \cdot \frac{5bx}{12a^2y^3} = ?$$

$$4. \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{12} = ? \quad 5. \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{9} = ? \quad 6. 5\frac{3}{8} \cdot 8\frac{5}{11} = ?$$

$$7. 125\frac{5}{12} \cdot 600\frac{1}{21} = ? \quad 8. \frac{5a}{3b} \cdot \frac{7x}{4y} = ? \quad 9) \frac{20m^3}{17n^4} \cdot \frac{5m^4}{3n^5} = ?$$

$$10. \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{17} = ? \quad \text{Rešitev: } \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{17} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{36}{85} \text{ ali tudi}$$

$\frac{12}{5} \cdot \frac{15}{17} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 17} = \frac{36}{85}$. Ako imata tedaj števec jednega ulomka skupno mero, okrajšaj ž njo uže pred množenjem.

$$11. \frac{18}{5} \times \frac{21}{16} = ? \quad 12. \frac{42}{119} \cdot \frac{13}{21} = ? \quad 13. \frac{2a}{7b} \cdot \frac{3b}{5}$$

$$14. \frac{12m}{5n} \cdot \frac{4n}{9m} = ? \quad 15. \frac{4x^3}{7y^2} \times \frac{5y^2}{2x^4} = ?$$

§. 72. Opomba. Tudi za deljenje z ulomki velja isti pojem za kvocijent, kakor za deljenje s celimi števili (glej §. 43.)

Celo število deliš z ulomkom, ako ga z recipročno vrednostjo divizorja množiš, t. j.

$$a : \frac{m}{n} = a \times \frac{n}{m} = \frac{an}{m}$$

Dokaz. Glej (§. 61 dostavek §. 44 VII). Ali: Ako število a delimo s številom m , dobimo n -krat premajhen kvocijent $\frac{a}{m}$, ker je m n -krat večji od $\frac{m}{n}$; kvocijent $\frac{a}{m}$ moramo torej n -krat večji narediti, da dobimo zahtevani produkt, t. j.

$$\frac{a}{m} \cdot n = \frac{an}{m}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

a) $8 : \frac{4}{7} = ?$ b) $18 : \frac{7}{9} = ?$ c) $132 : \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 2} = ?$ č) $a : \frac{b}{c} = ?$

Vaje.

1. $5 : \frac{3}{5} = ?$ 2. $12 : \frac{5}{7} = ?$ 3. $24 : 3\frac{2}{9} = ?$ 4. $x : \frac{y}{n} = ?$

5. $5m^4 : \frac{3n}{m^2} = ?$ 6. $21 : \frac{6}{11} = ?$

Rešitev: $21 : \frac{6}{11} = 21 \times \frac{11}{6} = \frac{77}{2} = 38\frac{1}{2}$ ali $21 : \frac{6}{11} = \frac{77}{2} = 38\frac{1}{2}$.

Ako imata torej celo število in števec sk. mero, okrajšaj ž njo pred deljenjem.

7. $39 : 2\frac{7}{8} = ?$ 8) $11 : 8\frac{4}{5} = ?$ 9. $315 : 2\frac{5}{11} = ?$ 10. $15a : \frac{5x}{n} = ?$

11. $ma^2 : \frac{7a}{5x} = ?$ 12. $27x^5 : \frac{9x^3}{10y^2} = ?$

§. 73. Ulomek deliš z ulomkom, ako množiš dividend z recipročno vrednostjo divizorja, t. j.

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$$

Dokaz. Glej (§. 61 dostavek, §. 44 IX.) ali: Ako ulomek $\frac{a}{b}$ delimo s številom m , je dobljeni kvocijent $\frac{a}{bm}$ n -krat premajhen, kvocijent $\frac{a}{bm}$ moramo torej še n -krat večji narediti, da dobimo zahtevani kvocijent, t. j.

$$\frac{a}{bm} \times n = \frac{an}{bm}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le primerih:

a) $\frac{5}{12} : \frac{4}{7} = ?$ b) $\frac{11 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 2} : \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 9} = ?$ c) $\frac{s}{t} : \frac{u}{v} = ?$

Vaje.

1. $\frac{21}{8} : \frac{55}{8} = ?$ 2. $124\frac{5}{8} : 12\frac{7}{9} = ?$ 3. $216\frac{1}{3} : 20\frac{2}{5} = ?$
4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ?$ 5. $\frac{x^m}{y^n} : \frac{y^a}{x^a} = ?$ 6) $\frac{5m^4}{3n^5} : \frac{3n^3}{5m^4} = ?$
7. $\frac{15}{8} : \frac{9}{14} = ?$ Rešitev: $\frac{15}{8} : \frac{9}{14} = \frac{15}{8} \times \frac{14}{9} = \frac{5}{6}$ ali krajše
- $\frac{15}{8} : \frac{9}{14} = \frac{5}{6}$. Ako imata števca ali pa tudi imenivca sk. mero, jih okrajšaj ž njo pred deljenjem.
8. $\frac{1}{18} : \frac{5}{9} = ?$ 9. $\frac{24}{35} : \frac{48}{49} = ?$ 10. $23\frac{4}{10} : 25\frac{2}{100} = ?$
11. $\frac{16x^6}{15y^4} : \frac{25x^6}{16y^4} = ?$ 12. $\frac{212a}{543x} : \frac{744x}{27a} = ?$
13. $\frac{1842b^4}{91c^3} : \frac{324b^3}{49c^3} = ?$ 14. $\frac{755x^3}{532y^5} : \frac{532y^5}{755x^3} = ?$
15. $\frac{125m^2}{39n} : \frac{4596m^2}{732} = ?$

Decimalni ulomki.

§. 74. Ulomke z imenivci 10, 100, 1000... 10^m imenujemo **decimalne** (desetinaste) ulomke v razliko od **navadnih** ulomkov. V obče je torej

$$\frac{A}{10^m}$$

decimalen ulomek.

Cela desetasta števila obstoje iz raznovrstnih jednot, iz jedin, desetic, stotic i. t. d. Vsaka jednota višjega reda ima 10 jednot nižjega reda; in narobe je vsaka jednota nižjega reda samo deseti del ali $\frac{1}{10}$ jednote višjega reda, stotica je $\frac{1}{100}$ tisočice, desetica $\frac{1}{10}$ stotice, jedinica $\frac{1}{10}$ desetice. Na ta način nadaljevaje moremo pa še dekadične jednote nižjih redov narejati.

Take nižje dekadične jednote so:

$$1 \text{ desetina} = \frac{1}{10} \text{ jedinice}$$

$$1 \text{ stotina} = \frac{1}{100} \text{ stotine} \quad \frac{1}{1000} \text{ desetine} = \frac{1}{10000} \text{ jedinice}$$

$$1 \text{ desettisočina} = \frac{1}{1000} \text{ tisočine} = \frac{1}{10000} \text{ desetine} = \frac{1}{100000} \text{ desetine} = \frac{1}{1000000} \text{ jedinice i. t. d.}$$

Povej vse dekadične jednote celih števil pričenši pri jedinicah. —

Povej vse dekadične jednote celih števil pričenši pri tisočicah navzdol. — Koliki del je stotica od tisočice, desetica od sto-

tice, jedinica od desetice? Ali moremo na ta način še nižje dekadische jednote dobiti? Kako in katere?

Iz takih dekadishnih jednot moremo takisto sestavljati števila, kakor sestavljamo cela števila iz dozdam znanih; in v obče moreš vsako tako število tako le napisati:

$\frac{m}{10} + \frac{n}{100} + \frac{p}{1000} + \dots$ ali $\frac{m}{10} + \frac{n}{10^2} + \frac{p}{10^3} + \dots$ ali $m \cdot 10^{-1} + n \cdot 10^{-2} + p \cdot 10^{-3} + \dots$, kjer pomenijo $m, n, p, \dots$ nam uže znane številke. In sploh je oblika za vsakoršno dekadishno število:

$\dots + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a + \frac{m}{10} + \frac{n}{10^2} + \frac{p}{10^3} + \dots$
ali $\dots + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a + m \cdot 10^{-1} + n \cdot 10^{-2} + p \cdot 10^{-3} + \dots$

$$\text{Iz } \frac{3254}{10^2} = (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4) : 10^2 = \\ = 3 \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

izpoznavš, da decimalen ulomek v dveh oblikah pisati moreš: v obliki navadnega ulomka in v obliki dekadishnih števil. V obče je potem

$$\frac{A}{10^r} = \dots + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a + m \cdot 10^{-1} + n \cdot 10^{-2} + \dots + v \cdot 10^{-r}$$

Številke $m, n, p, \dots$ v imenujemo **desetilke** (decimalke). Eksponent r določi število decimalk.

Napiši te-le decimalne ulomke v obliki dekadishnih števil:

$\frac{325}{1000}, \frac{2412}{100}, \frac{53789}{1000}, \frac{5032}{10000}$. — Koliko decimalk ima vsak teh ulomkov? ali kaj pomeni r za te decimalne ulomke?

$$\text{Rešitev: } \frac{325}{1000} = \frac{3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5}{10^3} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

$$\text{Ker je narobe: } 3 \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} =$$

$$3 \cdot 10 + 2 + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10} = \frac{3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4}{10^2} = \frac{3254}{10^2}$$

izpoznaš, da dekadishno obliko decimalnega ulomka izpremeniš v obliko navadnega ulomka, ako vse člene v ulomke z najm. sk. imenivcem izpremeniš, ter jih sešteješ.

Izpremeni še te-le decimalne ulomke v obraz navadnega ulomka: a) $5 + \frac{4}{10} = ?$ b) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} = ?$

$$c) 2 \cdot 10 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} = ?$$

$$d) 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 9 + \frac{0}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{3}{10^3} = ?$$

$$e) \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} = ?$$

Posebna decimalne ulomke pa pišemo še nekoliko krajše in sicer takisto, kakor posebna cela dekadishna števila; na desno

jedinic postavljamo desetine in od tod proti desnej stojé zaporedoma zmerom manjše jednote nižjih redov. Mejo pri jedinicah zaznamujemo s točko (piko) med jedinicami in desetini, katero imenujemo decimalno točko. Ta obraz decimalnih ulomkov imenujemo krajši obraz. N. pr.

$$\frac{52758}{1000} = 5.10 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} = 52.758.$$

Na levej točke torej stojé cele jednote ali na kratko cele in na desnej pa decimalke. Ako nímamo nič celih, napišemo na mesto jedinic ničlo z ozirom na decimalno točko, katero moramo postavljati med jedinice in desetine. N. pr. 9.312.

Napiši te-le decimalne ulomke v njih krajšem obrazu:
 $\frac{2821}{1000}, \frac{235}{10}, \frac{13}{100}, \frac{507}{10000}.$

Decimalne ulomke beremo lahko na tri načine. Tako n. pr. beremo ulomek 53.789 tako-le: ali 53789 tisočink ali 53 celih 7 desetink 8 stotink 9 tisočink, ali tudi in navadno 53 celih 789 tisočink.

Beri te-le decimalne ulomke na vse mogoče načine:
 3.75, 322.542, 30.07, 0.702, 0.08469 in jih napiši po dekadničnem občenem obrazu in v podobi navadnega ulomka.

Decimalen ulomek ne izpremeni svoje vrednosti, ako mu pripišeš na desnej kolikorkoli ničel. Tako n. pr. je:

$$23.57 = 23.5700. \text{ Zakaj?}$$

Koliko kilogramov je 5 $\frac{h}{g}$ 26 $\frac{D}{g}$ 7 $\frac{g}{l}$; 8 $\frac{D}{g}$ 7 $\frac{g}{l}$? Rešitev:
 1 $\frac{D}{g}$ je $\frac{1}{100} \frac{h}{g}$, 26 $\frac{D}{g}$ pa $\frac{26}{100} \frac{h}{g}$; 1 $\frac{g}{l}$ je $\frac{1}{1000} \frac{h}{g}$ in 7 $\frac{g}{l}$ = $\frac{7}{1000} \frac{h}{g}$; torej je 5 $\frac{h}{g}$ 26 $\frac{D}{g}$ 7 $\frac{g}{l}$ = 5 $\frac{h}{g}$ + $\frac{26}{100} \frac{h}{g}$ + $\frac{7}{1000} \frac{h}{g}$ = 5.267 $\frac{h}{g}$.

Koliko metrov je: 12 $\frac{m}{l}$ 7 $\frac{d}{m}$ 8 $\frac{c}{m}$ 4 $\frac{m}{m}$ 7 $\frac{d}{m}$ 4 $\frac{m}{m}$?

Koliko hektarov je 12 $\frac{ha}{a}$ 25 $\frac{a}{l}$; 24 $\frac{a}{l}$ 35 $\frac{m}{l}$?

Koliko $\square$ metrov je: 14 $\square \frac{m}{l}$ 8 $\square \frac{d}{m}$; 32 $\square \frac{d}{m}$ 4 $\square \frac{c}{m}$?

Koliko kub. metrov je 112 $\square \frac{m}{l}$ 32 $\square \frac{d}{m}$; 425 $\square \frac{d}{m}$ 2 $\square \frac{c}{m}$?

§. 75. Ako ima decimalen ulomek mnogo decimalk, nímajo nižje decimalke za državljansko življenje nobednega pomena in jih zategadelj izpuščaj. Tako n. pr. je v ulomku 3.56835 gl. $\frac{8}{1000}$ nekoliko večji od $\frac{1}{2}$ krajcarja in $\frac{3}{10000}$ ter tem bolj $\frac{8}{100000}$ uže neizplačljiv denar. Pri goldinarjih potrebujemo k večjemu še tisočine, ravno tako pri metrih. In tako izpoznamo v drugih slučajih, da potrebujemo ali le 2 ali 3 ali 4 decimalke i. t. d. — Ako pa izpustiš nekoliko decimalk, popravi zadnjo ostalo decimalko t. j. povekšaj jo za 1, kedar je prva izpuščena decimalka 5 ali večja od 5. Tako n. pr. vzemi namesto decimalnega ulomka 3.56835 ulomek 3.568, ako zadosté 3 in 3.57, ako zadostiti 2 decimalki. Tak decimalen ulomek imenujemo okrajšan in je samo blizo izraz za popolni decimalni ulomek. Narejena pomota vender ni nikoli večja, kakor $\frac{1}{2}$ jednote zadnje ob-

držane decimalke. Okrajšani decimalni ulomek pišemo tako-le: 3·568..

Ako računamo z okrajšanimi ulomki namesto s popolnimi niso zanesljive nižje decimalke v znesku.

Okrajšaj te-le decimalne ulomke na 4 decimalke: 0·789156, 12·5231497, 3·7532813.

Koliko decimalk zadoščuje pri goldinarjih, metrih, kvadratnih in kub. metrih, litrih, kilogramih?

Kaj se zgodi z jedinicami, z deseticami, stoticami....., desetimi, stotinami i. t. d., ako decimalno točko premaknemo za 1, 2, 3 mesti i. t. d. proti desnej ali proti levej? Ali ostanejo jednote decimalnega ulomka nespremenjene? Ali se vrednost decimalnega ulomka spremeni in kako? — Vsaka jednota je 10, 100, 1000krat i. t. d. večja, oziroma manjša, ter tudi decimalni ulomek 10, 100, 1000krat... večji ali manjši.

Decimalen ulomek postane 10, 100, 1000krat i. t. d. večji ali manjši, če premakneš decimalno točko za 1, 2, 3 mesta i. t. d. proti desnej ali proti levej.

Izprememba navadnih ulomkov v decimalne.

§. 76. Kaj je navaden ulomek prav za prav? — Nakazano deljenje. — Kako je mogoče tako nakazano deljenje izvršiti? — Ako izpremenimo jednote ostanka v nižje, ki so del prvotne jednote. — Ali morejo te nižje jednote tudi dekadične biti? — Tudi in sicer desetine, stotine, tisočine i. t. d.

Navaden ulomek izpremeniš v decimalen ulomek, ako z navadnim ulomkom nakazano deljenje tako izvršiš, da jednote vsakega ostanka izpremeniš v nižje dekadične jednote.

Tako n. pr. je

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} &= 7 : 8 = 0 \text{ jedinic} + 8 \text{ desetin} + 7 \text{ stotin} + 5 \text{ tisočin} = 0 \cdot 875 \\ 70 \text{ desetin} &\dots\dots\dots 70 \\ 6 \text{ } & \text{ } = 60 \text{ stotin} \dots\dots\dots 60 \\ 4 \text{ } & \text{ } = 40 \text{ tisočin} \dots\dots 40 \\ 0 \text{ } & \text{ } \dots\dots\dots 0 \end{aligned}$$

Vaje.

1. Izpremeni še te-le navadne ulomke v decimalne in opraviči to izpremembo:

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{11}, \frac{107}{333}, \frac{5}{6}, \frac{7}{44}.$$

Rešitev:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0 \cdot 6666 \text{ i. t. d. brez konca}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{11} = 2 : 11 = 0.181818 & \text{i. t. d. br. k.} \\ \frac{107}{333} = 107 : 333 = 0.321321321 & \text{,, ,, ,,} \\ \frac{5}{6} = 5 : 6 = 0.8333 & \text{,, ,, ,,} \\ \frac{7}{44} = 7 : 44 = 0.15909090 & \text{,, ,, ,,} \end{array}$$

Ako pri izpremehi navadnega ulomka v decimalen ulomek deljenja ne moremo nikoli izvršiti brez ostanka, dobimo **brezkončen decimalen ulomek**, drugače pa **končen**. V takem brezkončnem decimalnem ulomku mora se povrniti vsak prejšnj ostank, torej tudi decimalke kvocijenta v istem redu, in imenujemo ga **povratnega** (perjodskega) vrsto povračavnih decimalk pa **povračaj** (perjodo). V perjodskem decimalnem ulomku ne stojé ali nobene decimalke pred perjodo in imenujemo ga **čisto perjodsk decimalen ulomek**, ali pa stojé pred perjodo še druge decimalke in imenujemo ga **nečisto perjodsk decimalen ulomek**. — Povej nekoliko čisto in nekoliko nečisto perjodskih decimalnih ulomkov.

V obče moremo čisto perjodsk decimalen ulomek s 3 decimalkami n. pr. v perjodi tako-le izraziti:

$$\begin{aligned} \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{a}{10^4} + \frac{b}{10^5} + \frac{c}{10^6} + \dots = \\ = \frac{p}{10^3} + \frac{p}{10^6} + \frac{p}{10^9} + \dots \end{aligned}$$

in nečisto perjodsk decimalen ulomek:

$$\frac{t}{10^m} + \frac{p}{10^{m+3}} + \frac{p}{10^{m+6}} + \dots$$

Napiši po tem obrazu še sledeče ulomke:

$$0.575757\dots, 0.21603603603, 0.914791479147\dots, \\ 0.5217302843028430284\dots$$

Kaj pomenja v vsakem teh primerov p, A, m ? Perjodsk decimalen ulomek je toliko bolj blizo jednak navadnemu, kolikor več decimalk vzameš v decimalnem ulomku. Koliko decimalk zadoščuje v vsakem slučaju posebej, pové razum sam; v kupčijskih računih večinoma užé zadoščujejo 4 decimalke.

Pri perjodskem decimalnem ulomku pišemo navadno perjodo le jedenkrat; stavimo pa točko nad njeno prvo in zadnjo decimalko. Tako n. pr.

$$0.\dot{3}2\dot{5}, 0.8\dot{1}7\dot{4}, 20.\dot{5}.$$

Izpremeha decimalnih ulomkov v navadne.

§. 77. a) Končen decimalen ulomek izpremeniš v navaden, ako njegove decimalke vzameš za števec; za imenivec pa pod-

pišeš najnižjo dekadično jednoto decimalnega ulomka. Tako dobljeni ulomek potem še okrajšaj, ako je mogoče.

Vse to je razvidno iz prejšnjega. Tako n. pr. je:

$$0.528 = \frac{528}{1000} = \frac{528}{1000} \cdot \frac{125}{125} = \frac{66}{125}$$

Izpremeni še te-le decimalne ulomke v navadne:

$$0.75, 0.378, 35.25, 312.714, 500.05$$

b) Čisto perijodsk decimalen ulomek izpremeniš v navaden ulomek, ako vzameš perjodo za števec, za imenivec pa toliko devetik, kolikor ima perjoda decimalk.

Dokaz. Naj je

$$x = \frac{p}{10^3} + \frac{p}{10^6} + \frac{p}{10^9} + \dots \text{potem je}$$

$$x \cdot 10^3 = p + \frac{p}{10^3} + \frac{p}{10^6} + \dots \left\{ \text{dolenje od gornjega} \right.$$

$$x = \pm \frac{p}{10^3} \pm \frac{p}{10^6} \pm \dots \left\{ \text{odšteto} \right.$$

$$\frac{x \cdot 10^3 - x = p \text{ ali } x \cdot 1000 - x = p \text{ ali } 999 \cdot x = p.}{\text{torej}}$$

$$x = \frac{p}{999}$$

Dokaži to pravilo še na teh-le ulomkih:

$$0.\dot{2}4\dot{3}, 0.\dot{5}, 0.\dot{7}\dot{2}, 0.\dot{3}28\dot{5}, 17.\dot{6}2\dot{1}$$

Dokaz za prvi ulomek $0.\dot{2}4\dot{3}$

$$\text{tisočkratni ulomek} \quad 0.\dot{2}4\dot{3} = 243.\dot{2}4\dot{3}$$

$$\text{manj jedenkratni ulomek} \quad 0.\dot{2}4\dot{3} = 0.\dot{2}4\dot{3}$$

$$999\text{kratni ulomek} \quad 0.\dot{2}4\dot{3} = 243$$

$$\text{torej jedenkratni} \quad \text{„} \quad \text{ali} \quad 0.\dot{2}4\dot{3} = \frac{243}{999}$$

c) Nečisto perijodsk decimalen ulomek izpremeniš v navaden ulomek, ako odšteješ število iz decimalk pred perjodo od števila iz decimalk pred perjodo in v perjodi in dobljeno diferenco vzameš za števec; imenivec je pa število iz toliko devetik, kolikor ima perjoda decimalk in iz toliko ničel na desnej, kolikor je decimalk pred perjodo.

$$0.25\dot{3}18 = \frac{25318}{99900}$$

Dokaz :

Stotisočkratni ulomek $0.\dot{2}5\dot{3}1\dot{8} = 25318.\dot{3}1\dot{8}$

mānjstokraten „ $0.\dot{2}5\dot{3}1\dot{8} = 25.\dot{3}1\dot{8}$

99900kratni „ $0.\dot{2}5\dot{3}1\dot{8} = 25293 \text{ torej}$

jedenkratni „ $0.\dot{2}5\dot{3}1\dot{8} = \frac{25293}{99900}$

Vaje.

1. Izpremeni te-le ulomke v decimalne: $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $8\frac{5}{11}$, $24\frac{7}{13}$, $12\frac{5}{6}$, $251\frac{2}{3}$.

2. Izpremeni te-le decimalne ulomke v navadne: 0.25 , 0.728 , 5.04 , 238.61835 , 0.7 , 0.315 , 25.827 , 345.0207 , 45.2384 , 12.53892 .

Računjanje z decimalnimi ulomki.

Seštevanje in odštevanje decimalnih ulomkov.

§. 78. Decimalne ulomke seštevaj ali odštevaj, kakor seštevaj ali odštevaj cela števila; samo da v vsoti ozir. diferenci še postaviš decimalno točko, kedar prideš pri številbi do nje.

To pravilo dobimo na isti način, kakor pravilo za seštevanje in odštevanje celih števil.

Pokaži na teh-le primerih, kako do tega pravila pridemo.

a) $32.785 + 56.326 = ?$

$$32.785 = 3.10 + 2 + 7.10^{-1} + 8.10^{-2} + 5.10^{-3}$$

$$56.326 = 5.10 + 6 + 3.10^{-1} + 2.10^{-2} + 6.10^{-3}$$

$$89.111 = 8.10 + 9 + 1.10^{-1} + 1.10^{-2} + 1.10^{-3}$$

b) $792.5308 + 81.309 = ?$

c) $67.58 + 3.492 + 315.7813 = ?$

č) $53.835 - 7.437 = ?$

$$53.835 = 5.10 + 3 + 8.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3}$$

$$- 7.437 = - 7 + 4.10^{-1} + 3.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

$$5.10 - 4 + 4.10^{-1} - 1.10^{-2} - 2.10^{-3}$$

$$46.388 = 4.10 + 6 + 3.10^{-1} + 8.10^{-2} + 8.10^{-3}$$

d) $5.039 - 0.545 = ?$

e) $3492 \cdot 5209 - 483 \cdot 479 = ?$

f) Dokaži to pravilo za vse decimalne ulomke (v obče).

Vaje.

Izvrši te-le račune:

1. $3824 \cdot 567 + 291 \cdot 318 + 46 \cdot 7359 = ?$

2. $6 \cdot 27 + 3 \cdot 008 + 0 \cdot 32 + 478 \cdot 56 = ?$

3. $7 \cdot 29 + 3 \cdot 408 + 251 + 3 \cdot 726 = ?$

4. $28 \cdot 56 - 13 \cdot 32 = ?$

5. $362 \cdot 37 - 35 \cdot 3289 = ?$

6. $825 - 327 \cdot 534 = ?$

7. $3482 \cdot 309 - 392 \cdot 46532 = ?$

Množenje decimalnih ulomkov.

§. 79. Kakoršno jednoto dobiš, ako množiš: a) desetico, stotico, tisočico, desetino, stotino, tisočino, desettisočino z jedinic; b) desetico z desetico, stotico, tisočico, desetino, stotino, tisočino, desettisočino i. t. d.; c) stotico z desetino, stotino, tisočino i. t. d.; č) stotino z desetino, stotino, tisočino i. t. d.

a) Decimalne ulomke množiš z 10, 100, 1000 i. t. d., ako prestaviš decimalno točko za toliko mest proti desne, kolikor ima multiplikator ničel. (Primerjaj §. 75.)

Izvrši te-le račune:

a) $3 \cdot 52 \times 10 = ?$

a) $77 \cdot 528 \times 1000 = ?$

c) $7 \cdot 308 \times 100 = ?$

č) $0 \cdot 82 \times 100000 = ?$

b) Decimalne ulomke množiš kakor cela števila, samo v produktu vzemi toliko decimal, kolikor jih imata oba faktorja skupaj.

Pokaži na teh-le primerih, kako do tega pravila pridemo.

a) $34 \cdot 25 \times 3 \cdot 724 = ?$

$$\begin{array}{rcl} 34 \cdot 25 \times 3 \cdot 724 & = & (3 \cdot 10 + 4 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}) = \\ 102 \cdot 75 & = & 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 2 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \\ 23 \cdot 975 & = & 2 \cdot 10 + 3 + 9 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} \\ 0 \cdot 6850 & = & 6 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} \\ 13700 & = & 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} \\ 127 \cdot 54700 & = & 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

$$\text{ali: } 34 \cdot 25 \times 3 \cdot 724 = \frac{3425}{10^2} \times \frac{3734}{10^3} = \frac{3425 \times 3734}{10^5} = 127 \cdot 54700 \text{ (glej §. 73.)}$$

b) $52 \cdot 3 \times 7 \cdot 35 = ?$

c) $315 \times 0 \cdot 78 = ?$

č) $827 \cdot 495 \times 0 \cdot 26 = ?$

d) $5 \cdot 493 \times 4532 = ?$

- e) $\frac{A}{16^m} \times \frac{B}{10^n} = \frac{AB}{10^m n}$ — koliko decimalk ima prvi in koliko drugi ulomek? — Koliko njen produkt?

Okrajšano množenje.

§. 80. V produktu dobimo včasih mnogo decimalk, ki jih smemo prezirati v navadnem življenji. Tako n. pr. so v tem-le primeru

$$\begin{array}{r} 723 \cdot 54852 \times 527 \cdot 327 = 5064 \overline{) 83964} \\ \underline{14470} \\ 217064 \\ \underline{5064839} \\ 14470970 \\ \underline{361774260} \\ 381546 \cdot 670 \overline{) 40604} \end{array}$$

zadnje decimalke 40604 nepotrebno, ako produkt pomeni gol-dinarje.

Kako bi torej račun tako okrajšali, da bi ne iskali nepotrebnih decimalk ni v produktu ni v delskih produktih. V gornjem primeru so nepotrebne decimalke ločene s črto od potrebnih.

Pri navadnem množenju moramo množiti multiplikand z vsako številko multiplikatorja. Ako pa množimo z **jedinicami** stotisočine, desettisočine, tisočine, stotine, desetine i. t. d. dobimo zaporedoma stotisočine, desettisočine, tisočine, stotine i. t. d. Nepotrebno je torej množenje desettisočin, stotisočin z **jedinicami**, ker deset-tisočin in stotisočin ne iščemo. Ravno tako je nepotrebno množenje stotisočin z deseticami; tisočin, desettisočin in stotisočin s stotinami; stotin, tisočin, desettisočin in stotisočin s stotinami; deset-in, stotin, tisočin, desettisočin in stotisočin s tisočinami. (Zakaj?)

Nepotrebnega množenja torej ne izvršuj; da pa pri vsakej nalogi hitro vidiš, pri katerej multiplikandovi številki moraš množenje s kako številko multiplikatorja začeti, piši jo ravno pod ono številko. V našem primeru stori to tako-le:

$$\begin{array}{r} 723 \cdot 548 \ 52 \\ 7 \ 237 \cdot 25 \end{array}$$

Jedinice stavi pod toliko decimalko multiplikanda, kolikor jih v produktu hočeš dobiti, vse druge številke pa zraven njih ravno narobe, nego stojé v multiplikatorji. Pri izvršitvi množenja s kako številko smeš izpustiti vse multiplikandove številke na desnej nad njo, v delskih produktih pa piši najnižje številke jedno pod drugo, ker vsaka tisočine pomenja. Ako množenje tako izvršiš, dobiš

$$\begin{array}{r}
 723 \cdot 54852 \\
 723.725 \\
 \hline
 361774260 \\
 14470970 \\
 5064836 \\
 217062 \\
 14470 \\
 5061 \\
 \hline
 381546 \cdot 659
 \end{array}$$

Najnižje decimalke okrajšanih delskih produktov in okrajšanega produkta so različne od istoimenskih decimalk popolnih delskih produktov in popolnega produkta. Temu je pa uzrok, ker včasih nižje jednote pri množenji tudi že višje dadó. Torej ne smeš popolnoma prezirati v multiplikandu prve številke na desnej nad množilno številko multiplikatorja, ampak prepričati se moraš koliko višjih jednot dobiš, ako tudi njo množiš, da jih šteješ dalje, t. j. moraš vzeti **popravo** (korekturo) od nje. Zapomni si pa, da jemljemo popravo 1 od 5 do 14, popravo 2 od 15 do 24, popravo 3 od 25 do 34 i. t. d.

Dani primer potem izvrši tako-le :

$$\begin{array}{r}
 723 \cdot 54852 \times 527 \cdot 327 \text{ na 3 dec.} \\
 723.725 \\
 \hline
 361774260 \\
 14470970 \\
 5064840 \\
 217064 \\
 14471 \\
 5065 \\
 \hline
 381546 \cdot 670
 \end{array}$$

Iz tega primera posnemamo to pravilo za okrajšano množenje :

Pri okrajšanem množenji moraš pisati jedinice multiplikatorja pod toliko decimalko multiplikanda, kolikor je potreba decimalk v produktu. Vse druge številke multiplikatorja pa zapisuj zraven jedinice ravno narobe. Sè številkami multiplikatorja množi one številke multiplikanda, ki stojé nad njo in na levej od nje, množi pa tudi prvo številko na desnej nad množilno številko, da vzameš od nje popravo. Delske produkte piši jednega pod drugega in sicer najnižjo številko pod najnižjo in jih seštej.

Pojasni to pravilo še na teh-le primerih:

- a) $351 \cdot 25683 \times 26 \cdot 315926$ na 3 decimalke
 b) $25 \cdot 312 \times 7 \cdot 508$ " 2 "
 c) $17 \cdot 384 \times 51 \cdot 3752$ " 4 "

Vaje.

1. Izvrši te-le račune in sicer s pridobitkom, kedar je mogoče:

- a) $372 \cdot 5 \times 25 = ?$ b) $532 \times 0 \cdot 708 = ?$
 b) $48 \cdot 305 \times 1 \cdot 25 = ?$ č) $7 \cdot 54032 \times 9 \cdot 999 = ?$
 d) $18 \cdot 5432 \times 6 \cdot 17 = ?$ e) $0 \cdot 0594 \times 0 \cdot 0274 = ?$
 f) $358 \cdot 21 \times 49 \cdot 99 = ?$ g) $782 \cdot 1 \times 99 \cdot 95 = ?$
 h) $72935 \times 0 \cdot 25 = ?$ i) $5200 \cdot 3 \times 4 \cdot 8 = ?$
 j) $3 \cdot 78215 \times 42 \cdot 78 = ?$ na 3 decimalke
 k) $325 \cdot 6893 \times 415 \cdot 327$ " 4 "

Deljenje decimalnih ulomkov.

§. 81. 1. Decimalne ulomke deliš z 10, 100, 1000 i. t. d., ako prestaviš decimalno točko v dividendo za toliko mest proti levej, kolikor ima divizor ničel. (Glej §. 75.)

Ako je dividend celo število, naredi toliko števil za decimalke, kolikor ima divizor ničel.

Izvrši te-le račune:

- a) $438 \cdot 5 : 100 = ?$ b) $5 \cdot 87 : 10 = ?$
 c) $0 \cdot 49 : 1000 = ?$ č) $4212 : 10000 = ?$
 d) $578 : 100 = ?$

2. Decimalne ulomke deliš s celimi števili kakor cela števila, samo da postaviš decimalno točko v kvocijentu, kedar prideš v dividendo do nje. (Glej §. 49, nalogo 11.)

Pokaži na teh-le primerih, kako pridemo do tega pravila:

a) $928 \cdot 72 : 26 =$

$$(9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}) : 26 = 3 \cdot 10 + 5 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = 92 \cdot 10$$

$$14 \cdot 10 + 8 = 148$$

$$18 + 7 \cdot 10^{-1} = 187 \cdot 10^{-1}$$

$$5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} = 52 \cdot 10^{-2}$$

ali krajše:

$$928 \cdot 72 : 26 + 35 \cdot 72$$

$$148$$

$$187$$

$$52$$

$$0$$

b) $3088 \cdot 63 : 4231 = ?$

c) $8 \cdot 253 : 256 = ?$

3. Decimalni ulomek deliš z decimalnim ulomkom, ako v divizorji izpuštiš decimalno točko, v dividendu jo pa za toliko mest proti desnej prestaviš, kolikor ima divizor decimalk in potem deljenje izvršiš. — Ako je dividend celo število, mu pripiši toliko ničel, kolikor ima divizor decimalk. Torej je n. pr.

$$5 \cdot 789 : 3 \cdot 25 = 578 \cdot 9 : 325 = \text{i. t. d.}$$

Dokaz. Kvocijent ostane neizpremenjen, ako dividend in divizor množiš sè 100.

Deli in opraviči to deljenje na teh-le primerih :

a) $78 \cdot 35 \times 2 \cdot 7 = ?$

b) $4 \cdot 23 : 0 \cdot 578 = ?$

c) $24 : 5 \cdot 23 = ?$

č) $175 : 0 \cdot 021 = ?$

Okrajšano deljenje.

§. 82. Kedar hočeš samo neko število decimalk v kvocijentu dobiti, deli okrajšano. Pri okrajšanem deljenji je pa treba določiti mestno veljavo prve številke kvocijenta, da potem veš koliko številc ima ves zahtevani kvocijent. To pozveš, ako si misliš divizor pod dividend tako podpisan, da stoji prva pomenljiva številka divizorja pod prvo številko dividenda ali pa pod drugo, kedar ima prvi delski dividend jedno številko več od divizorja. Mestna vrednost številke v dividendu, pod katero stojé jedinice divizorja, je tudi mestna vrednost prve številke kvocijenta.

Tako n. pr. pomeni prva številka v kvocijentu teh-le primerov:

$$\begin{array}{r} 7627 \cdot 35 : 354, \quad 527 \cdot 38 : 715, \quad 23 \cdot 87 : 0053 \\ 354 \qquad \qquad \qquad 715 \qquad \qquad \qquad 0053 \end{array}$$

zaporedoma desetice, desetinke, stotice.

Določi mestno vrednost prve številke kvocijenta teh-le primerov:

$$5412 : 45, \quad 78 \cdot 523 : 321 \cdot 52, \quad 0 \cdot 574 : 0 \cdot 00671.$$

Ako v teh primerih iščemo kvocijent na 3 decimalke, koliko številc ima vsak kvocijent?

Pri okrajšanem deljenji obdrži v divizorju le toliko številc, kolikor jih ima kvocijent v dividendu; pa ravno toliko ali pa jedno več, ako ima prvi delski dividend jedno številko več od divizorja.

Po vsakem deljenji odreži od divizorja jedno število; namesto da bi k ostanku pristavil ničlo, in vzemi popravo od produkta iz odrezane in iz ravno dobljene številke kvocijenta. De-

ljenje je dovršeno, kedar n mamo nobedne številke več v divizorju, da bi jo odrezali.

Opomba. Kedar ima divizor manj številk nego kvocijent, začni  e le potem okrajšano deliti, ko si u e vse številke okrajšanega dividenda porabil. Ako pa ima dividend manj številk, kakor jih pri okrajšanem deljenji imeti mora, pripiši mu toliko ničel, kolikor mu številk manjka.

Vaje.

1. Deli okrajšano na tri decimalke :

a) $5643\cdot6,93 : 3,5,9,3,7,54 = 15\cdot704$

20498

2529

14

 

prva številka kvocijenta pomeni desetice, ter ima zahtevani kvocijent 5 številk.

b) $8784\cdot325 : 75\cdot3 = 116\cdot657$

1245

5013

4952

434

57

4

c) $38\cdot52 : 0\cdot04,7,6,5,4,2,8 = 808\cdot322$

000

39658

1535

105

10

1

2. Izvrši  e te-le primere :

a) $572\cdot789 : 325\cdot586 = ?$ (na 4 decim.)

b) $547\cdot06 : 0\cdot694 = ?$ (na 2 decim.)

c) $0\cdot69457 : 0\cdot06943 = ?$ (na 3 decim.)

 ) $60832 : 0\cdot97523 = ?$ (na 2 decim.)

d) $3\cdot725 : 0\cdot0643 = ?$ (na 4 decim.)

e) $28\cdot723 : 714 = ?$ (na 3 decim.)

Vaje za ponavljanje

(na pamet).

1. Koliko je: $\frac{1}{10}$ 1 fl., 1 $\frac{h}{g}$, 1 $\frac{d}{g}$, 1 $\frac{m}{l}$.
 $\frac{1}{100}$ 1 $\frac{H}{a}$, 1 $\frac{a}{l}$, 1 $\square \frac{m}{l}$, 1 $\square \frac{d}{m}$, 1 gl.
 $\frac{1}{1000}$ 1 $\bigcirc \frac{m}{l}$, 1 $\bigcirc \frac{d}{m}$, 1 $\frac{h}{g}$.
 $\frac{1}{60}$ 1 ure, 1 min., 1 stopinje?

2. Uravnaj ta-le mešana števila:

$$8\frac{3}{5}, 2\frac{3}{4}, 9\frac{7}{10}, 12\frac{6}{11}.$$

3. Izpremeni v mešana števila:

$$\frac{14}{3}, \frac{17}{8}, \frac{25}{9}.$$

4. Seštevaj: $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}, \frac{2}{5} + \frac{5}{6}, 1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{5}.$

5. Odštevaj: $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}, 5\frac{1}{9} - 1\frac{5}{6}.$

6. Množi: $\frac{3}{8} \times 5, \frac{5}{9} \times 3, \frac{5}{8} \times \frac{2}{3}, 2\frac{1}{3} \times 7, 1\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{2}.$

7. Deli: $\frac{8}{9} : 4, \frac{3}{7} : 5, 6\frac{4}{5} : 2, 4 : \frac{1}{2}, \frac{2}{3} : \frac{3}{5}.$

Pismo.

Izvrši te-le naloge spremenivši jedenkrat vse decimalne ulomke v navadne, drugokrat vse navadne ulomke v decimalne:

1.) $3\frac{1}{5} + \frac{5}{8} + 4\frac{5}{6} + 3 \cdot 6 = ?$

2.) $12\frac{5}{9} + 3 \cdot 87 + 2\frac{1}{3} = ?$ 3.) $154 \cdot 235 + 312\frac{1}{2} + 31\frac{1}{5} = ?$

4.) $21 \cdot 527 + 3 \cdot 2356 + 4\frac{3}{11} = ?$ 5.) $12 \cdot 81 + 25 \cdot 325 = ?$

6.) $12 \cdot 85 - 3\frac{7}{8} = ?$ 7.) $12\frac{5}{12} - 3 \cdot 8 = ?$

8.) $37 \cdot 25 - 4\frac{1}{3} = ?$ 9.) $31\frac{1}{5} - 0 \cdot 5312$

Sledeče naloge izvrši brez izpremembe navadnih ulomkov v decimalne in narobe in sicer s pridobitkom, kedar je mogoče.

10.) $3 \cdot 782 \times 5\frac{3}{4} = ?$

11.) $\frac{123}{16} \times 8 \cdot 25 = ?$

12.) $431\frac{31}{125} \times 9 \cdot 999 = ?$

13.) $75\frac{2}{3} \times 1 \cdot 25 = ?$

14.) $315\frac{17}{18} \times 59 \cdot 99 = ?$

15.) $\frac{136}{15} \times 0 \cdot 11 = ?$

16.) $\frac{543}{64} \times 997 = ?$

17.) $\frac{73}{360} \times \frac{180}{75} \times 12 \cdot 5 = ?$

18.) $418\frac{2}{33} \times 31 \cdot 2 = ?$

19.) $\frac{731}{892} \times 4 \cdot 5 = ?$

20.) $34\frac{1}{5} \times 0 \cdot 997 = ?$

21.) $53 \cdot 278 : 42\frac{18}{5} = ?$

22.) $732\frac{57}{125} : 0 \cdot 25 = ?$

23.) $\frac{3645}{7801} : 3 \cdot 15 = ?$

24.) $7 \cdot 568 : \frac{64}{3125} = ?$

25.) $178\frac{7}{11} : 12 \cdot 5 = ?$

V sledečih nalogah izvrši vsako množenje in deljenje na 3 decimalke:

26.) $75 \cdot 492 \times \frac{432 \cdot 781}{5 \cdot 324} = ?$

27.) $\frac{425 \cdot 72}{31 \cdot 295} \times \frac{7542 \cdot 35}{35 \cdot 391} = ?$

$$28.) \frac{15 \cdot 720}{3 \cdot 49} : 2 \cdot 581 = ? \quad 29.) 509 \cdot 35 : \frac{4 \cdot 321}{0 \cdot 9375} = ?$$

$$30.) \frac{7522 \cdot 3258}{42 \cdot 59} : \frac{293 \cdot 51437}{3475 \cdot 265} = ?$$

$$31.) \frac{2a-b}{x^2-1} + \frac{3a+2b}{x+1} - \frac{a-2b}{x-1} = ?$$

$$32.) \frac{5x^2-2x+3}{6x-1} \cdot (3x-1) = ?$$

$$33.) \frac{7a-b}{a^2-b^2} \cdot (a-b) = ? \quad 34.) \frac{4x^2-9y^2}{7} : (2x+3y) = ?$$

$$35.) \frac{5}{2x-5y} : (2x+5y) = ? \quad 36.) \frac{4x^2-2x-1}{y^2+1} : \frac{3x-2}{y^2-1} = ?$$

37.) 1 $\frac{h}{g}$ nekega blaga stane 1 fl. 50 kr.; koliko stane $\frac{1}{8} \frac{h}{g}$?
Rešitev na pamet: 1 $\frac{h}{g}$ 1 fl. 50 kr., $\frac{1}{8} \frac{h}{g}$ 5ti del od 1 fl. 50 kr., t. j. 30 kr.

38.) 1 $\frac{m}{l}$ stane 3 gl. 40 kr.; koliko $\frac{1}{4} \frac{m}{l}$?

39.) $\frac{3}{4} \frac{m}{l}$ stane 2 fl. 70 kr., koliko 4 $\frac{m}{l}$?

40.) $\frac{3}{8} \frac{h}{g}$ stane 90 kr.; koliko $\frac{5}{8}, \frac{4}{9} \frac{h}{g}$?

Rešitev na pamet: $\frac{3}{8} \frac{h}{g}$ stane 90 kr., $\frac{1}{8}$ 3tji del od 90 kr., t. j. 30 kr., $\frac{5}{8}$ pa 5krat 30 kr., t. j. 1 fl. 50 kr. — $\frac{1}{8} \frac{h}{g}$ stane 30 kr., $\frac{8}{8} = 1 = \frac{8}{8}$ 8krat 30 kr., t. j. 240 kr., $\frac{1}{9}$ deveti del od 240, t. j. 26 $\frac{2}{3}$ kr. in $\frac{4}{9}$ 4krat 26 $\frac{2}{3}$ kr., t. j. 1 fl. 5 $\frac{2}{3}$ kr.

41.) Koliko stane $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 2\frac{3}{8} \frac{m}{l}$; ako stane $\frac{2}{3} \frac{m}{l}$ 1 fl.?

Reši naloge 37, 38, 39, 40, 41 tudi pismeno.

42.) Kako se ločijo ulomki od celih števil? — Iz katerega računa izvajaš ulomke? — Koliko vrst ulomkov poznaš? Kako razvrstimo decimalne ulomke? — Kako prideš do neizračunljivih števil?

Četrty oddelek.

● omerah in razmerah.

A. 0 omerah.

§. 84. Količine moremo primerjati in sicer na dva načina; ali preiskavamo za koliko je količina a večja ali manjša od količine b , ali pa kolikokrat je a večja ali manjša od b . Tako

n. pr. dobimo pri primerjanji dveh pašnikov, izmed katerih ima jeden 44 arov drugi pa 11 arov, da je prvi $44 - 11 = 33$ arov večji od drugega, ali pa da je prvi $44 : 11 = 4$ krat večji od drugega.

Prvo primerjanje nakazujemo z diferenco $a - b$, drugo pa s kvocijentom $a : b$, vsako tako matematično nakazano primerjanje istovrstnih količin imenujemo omero. Omeri $a - b$ in $a : b$ razlikujete se bistveno, prvo imenujemo aritmetiško, drugo pa geometrijsko omero.

Pečati se hočemo z geometrijskimi omerami.

Omero $a : b$ beremo „ a se ima proti b “ ali krajše „ a proti b “. a imenujemo prvi ali prednji člen, b drugi ali zadnji člen.

Iz prejšnjega je razvidno, da si moremo misliti geometrijsko omero kot nakazano deljenje, kjer je prednji člen dividend, zadnji člen pa divizor. Kvocijent, katerega dobimo, ako to nakazano deljenje izvršimo, imenujemo eksponent (kazalo) omere.

§. 85. Prvi člen omere je ali večji ali enak ali manjši od drugega člena, in omere so oziroma ali upadne ali omere enakosti ali rastne omere. Tako n. pr. je omera $5 : 2$ upadna, $3 : 3$ omera enakosti, in $4 : 7$ rastna omera.

V upadni omeri je eksponent večji od 1, v omeri enakosti jednak 1 in v rastni omeri manjši od 1.

Ako zamenjamo v omeri člena, imenujemo novo omero obratno z ozirom na prvo. Tako n. pr. dobimo iz omere $15 \text{ ž} : 4 \text{ ž}$ obratno omero $4 \text{ ž} : 15 \text{ ž}$.

Omeri ste jednaki, ako imate jednaka eksponenta.

Tako n. pr. ste omeri $12 : 4$ in $39 : 13$ jednaki, ker ima vsaka eksponent 3.

Ako sta člena v omeri brezimenasta, imamo številno omero, ako sta pa člena imenasta, imamo količinsko omero.

V količinski omeri morata člena biti istovrstna, ker moremo primerjati samo istovrstne količine.

Pri primerjanji omer nam ni treba gledati na imena členov, ker eksponenti določujejo, ali so omere jednake ali nejednake in ti so zmerom brezimenasta števila. Tako n. pr. ima omera 20 gl. : 4 gl. eksponent 5 in omera $45 \frac{h}{g} : 9 \frac{h}{g}$ tudi eksponent 5, torej omeri ste jednaki, akoravno primerjamo jedenkrat goldinarje, drugokrat pa kilograme.

§. 86. Iz prejšnjega je znano, da si moremo misliti omero kot nakazano deljenje in to kot ulomek po vrednosti, ne pa po pomenu. Tako je n. pr.

omera	13 : 5	jednaka	ulomku	$\frac{13}{5}$
"	27 : 35	"	"	$\frac{27}{35}$
.....				
"	$a : b$	"	"	$\frac{a}{b}$

potem so pa tudi narobe ulomki $\frac{13}{5}$, $\frac{27}{35}$... $\frac{a}{b}$ jednaki omeram 13 : 5, 27 : 35.... $a : b$.

Iz tega sledi: Vsako omero moremo izpreminjati v navaden ulomek in narobe vsak navaden ulomek v omero.

Vrednosti omere ne izpreminjaš, ako množiš ali deliš vsak člen omere z istim številom. (§. 44, X.)

Po tem izreku oprostiš omero od ulomkov, ako množiš vsak člen z najmanjšim skupnim mnogokratnikom imenivcev. N. pr.

$$\text{za } \frac{4}{7} : 9, \frac{5}{9} : \frac{1}{2}, \frac{7}{8} : \frac{3}{4}, \frac{a}{m} : \frac{b}{n}$$

dobiš omere 4 : 63, 10 : 9, 7 : 6, $an : bm$.

Po tem izreku pa tudi okrajšujemo omere, kedar imata člena skupen faktor, ako s tem vsak člen delimo.

Tako n. pr. dobimo za

$$\begin{array}{l} 8 : 6, 66 : 11, 12 : 40, am : bm \\ \text{omere } 4 : 3, 6 : 1, 3 : 10, a : b. \end{array}$$

§. 87. 1. Prednji člen je enak zadnjemu členu, pomnoženemu z eksponentom.

2. Zadnji člen je enak prednjemu členu, deljenemu z eksponentom. (§. 43.)

Neznani člen omere zaznamenujemo s črko x . N. pr.

1. Kolik je prednji člen omere, ako je zadnji člen 2 in eksponent 3?

$$x : 2 = 3, x = 2 \times 3 = 6$$

2. Kolik je zadnji člen omere, ako je prednji člen omere 8 in eksponent 2?

$$8 : x = 2, x = 8 : 2 = 4$$

§. 88. Vrednost omere nesomernih količin B in A je

$$\frac{B}{A} = \frac{ne}{me'} + \frac{v}{me} = \frac{n}{m} + v' \quad (\text{glej §. 59});$$

v in v' pa ne moremo nikoli natanko izšteviliti, torej tudi ne vrednosti take omere. Vrednost omere nesomernih količin je neizračunljivo (iracijonalno) število, katero pa moremo s tako natančnostjo izraževati, kakor le hočemo. Tako število je n. pr. Ludolfovo število π , t. j. vrednost omere iz periferije kroga in nje-

govega primera. — Druga števila pa imenujemo **izračunljiva** (racijonalna). — Ali moremo iracijonalna števila približavno načrtati? — Odgovor: Ker je iracijonalno število blizo jednako omeri ali ulomku $\frac{m}{n}$, ga moremo tudi načrtati in sicer tako določno, kakor le hočemo, da, celo popolnoma natanko. Primerjaj §. 59 s., kjer hipotenuza predstavlja iracijonalno število za racijonalno kateto.

Vaje.

1. Poišči eksponente teh-le omer: $35 : 7$, $7 : 2$, $25 : 15$, $144 : 12$, $21 : 105$, $a : b$, $a^3 : a^2$, $2R\pi : 2r\pi$, $R^2\pi : r^2\pi$.

2. Kolikokrat večje je jedno število od drugega v teh-le primerih: 35 in 7 , 52 in 26 , 55 in 11 , 23 in 2 , 31 in 82 , $6m$ in $2m$, $25a^2$ in $5a^2$?

3. Te-le omere izpremeni v omere s celimi števili:

$$\frac{3}{4} : 11, \frac{5}{8} : 13, 15 : \frac{2}{3}, 12 : \frac{5}{7}, \frac{5}{6} : \frac{2}{3}, \frac{3}{4} : \frac{5}{8}, \frac{1}{12} : \frac{1}{24}, \frac{5}{32} : \frac{7}{8}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}, \frac{m}{6} : \frac{n}{9}, \frac{5}{4x} : \frac{3}{8x}$$

4. Okrajšaj te-le omere: $13 : 52$, $144 : 18$, $54 : 12$, $0.54 : 3.6$, $64 : 4.8$, $5m^2 : 3m^3$, $2x^5 : 6x^2$.

5. Izrazi te-le omere z najmanjšimi celimi števili:

$5.9 : 4.8$, $23.25 : 3.73$, $66\frac{3}{4} : 285$, $0.79 : 8.2$, $3\frac{2}{5} : 34$, $2\frac{1}{5} : 5\frac{3}{4}$.

- | | |
|--|---|
| 6. a) $x : 4 = 5$. | b) $x : 3\frac{1}{4} = 2\frac{1}{5}$. |
| c) $x : 7 = 3.5$. | č) $x : 8\frac{3}{7} = 1.2$. |
| d) $4 : x = 1$. | e) $12 : x = 4$. |
| f) $5\frac{2}{3} : x = 4\frac{1}{5}$. | g) $3\frac{2}{7} : x = 12\frac{4}{5}$. |
| h) $2.7 : x = 0.3$. | i) $31\frac{5}{11} : x = 2.18$. |

7. Kako se ima: a) $1 \frac{kg}{g}$ proti $1 \frac{D}{g}$? b) 1 meter proti 1 centimetru, c) 1 goldinar proti 1 krajcarju? č) 1 hektoliter proti 1 litru?

8. Kako se ima a) 2 gl. proti 35 kr.? b) 3 seznji proti 2 črevljema? c) 8 mescev proti 3 letom?

9. Neka soba je 4^0 $1'$ dolga, 2^0 $3'$ široka; kako se ima njena dolgost proti širokosti?

10. V kakšnej omeri stoji avstrijski dvo-goldinar proti francoskemu petero-franku, ako je 1 frank $= 40\frac{1}{2}$ kr. av. velj.?

11. 1 ruski rubelj $= 1.62$ fl.; v kakšnej omeri stojita 1 goldinar in 1 rubelj?

12. 1 marka kur. v Hamburgu je vredna 60 kr.; kako se ima 1 gl. proti 1 marki kur.?

13. 1 dunajski vatel $= \frac{3}{5}\frac{9}{10}$ metrov in 1 jard $= \frac{3}{5}\frac{3}{10}$ metrov; v kakšnej omeri stojita dunajski vatel in jard?

15. V kakšnej omeri stoji 1 kilogram proti 1 angl. funtu, ako je $1 \frac{h}{g} = 1.785$ dun. funtov in 1 angl. funt $= 0.81$ dun. funtov?

15. Ruski pud ima 16.38 in dunajski funt 0.56 kilogramov; katera omera iz celih števil med pudom in dunajskim funtom je najmanjša?

15. 15 nemških milj $= 104.32$ ruskih vrst

15 nemških milj $= 14.64$ avst. milj, v kakšnej omeri stoji 1 ruska vrsta proti 1 avstrij. milji?

17. A prehodi v 4 urah isto pot, kakor B v $5\frac{1}{2}$ urah; kako se imate hitrosti teh oseb?

18. Ljubljana ima 24000 in Maribor 15000 prebivalcev; v kakšnej omeri stoji množina prebivalcev v Ljubljani z množino prebivalcev v Mariboru?

B. 0 razmerah.

§. 88. Ako postavimo jednačaj med jednaki omeri, dobimo razmero.

Če je torej $a : b = e$, $c : d = e$, je

$$a : b = c : d$$

razmera, katero beremo „ a (se ima) proti b , kakor c proti d “. Prvi in četrti člen (a in d) imenujemo vnauja člena; drugi in četrti člen (b in c) pa notranja člena razmere. Prvi in tretji člen sta sprednja drugi in četrti zadnja člena.

Četrti člen (d) imenujemo četrto geometrijsko razmernico (proporcijonalo).

Razmero imenujemo stalno, ako sta njena notranja člena jednaka. N. pr.

$$2 : 4 = 4 : 8 \text{ v obče } a : b = b : c,$$

kjer imenujemo 4, b srednjo geometrijsko proporcijonalo, 8, c pa tretjo stalno proporcijonalo k a in b .

Razmero z brezimenastimi členi imenujemo številno razmero, razmero z imenastimi členi pa količinsko razmero. V količinske razmeri morata člena jedne omere istovrstna biti, ker moremo samo istovrstne količine primerjati. Tako n. pr. postane številna razmera

$$5'' : 10 = 2 : 4$$

količinska razmera.

$$5 \text{ metrov} : 10 \text{ met.} = 2 \text{ fl.} : 4 \text{ fl.}$$

ako pristavimo prvima členom ime meter in zadnjima ime goldinar.

Neznan člen razmere hočemo zaznačiti z x .

Izreki o številnih razmerah.

§. 89. V vsakej razmeri je produkt vnánjih členov jednak produktu notranjih členov.

Torej je v razmeri $a : b = c : d$

$$ad = bc$$

Dokaz. Omeri dane razmere moremo tudi z ulomki nameščati

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{ potem je}$$

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd \text{ (§. 53, 1) ali}$$

$$ad = bc$$

Dokaži ta izrek še na teh-le primerih:

- 1.) $6 : 2 = 3 : x$, 2.) $6 : 8 = x : 4$, 3.) $5 : x = 2 : 7$
4.) $x : 12 = 4 : 9$.

Narobe potem moremo reči: Razmera je veljavna, ako sta produkta vnánjih in notranjih členov jednaka.

Sklepi. a) Iz 3 členov razmere moreš 4. člen dobiti

$$a = \frac{bc}{d}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}, \quad d = \frac{bc}{a} \quad (\text{§. 53, 1})$$

- | | |
|----------------------|----------------------------------|
| 1.) $x : 3 = 8 : 4$ | $x = \frac{3 \times 8}{4} = 6$ |
| 2.) $7 : 2 = 21 : x$ | $x = \frac{2 \times 21}{7} = 6$ |
| 3.) $15 : x = 3 : 2$ | $x = \frac{15 \times 2}{3} = 10$ |
| 4.) $9 : 5 = x : 10$ | $x = \frac{9 \times 10}{5} = 18$ |

Kedar iz 3 členov razmere 4. člen poiščemo, razmero razrešimo.

Pri rešitvi razmer moraš še na to dvojce gledati:

1. Ako ima razmera ulomke, jih odpravi;
2. vsako razmero iz celih števil okrajšaj pred rešitvijo, ako je mogoče (glej §. 90).

b) Razmera ostane veljavna, ako zamenjaš notranja ali vnánja člena med seboj, ali pa vnánja z notranjima členoma, t. j.

$$1.) a : b = c : d$$

$$2.) a : c = b : d$$

$$3.) d : c = b : a$$

$$4.) d : b = c : a$$

$$5.) b : a = d : c$$

$$6.) b : d = a : c$$

$$7.) c : a = d : b$$

$$8.) c : d = a : b$$

kajti iz vsake te razmere dobivamo $ad = bc$, kakor iz prve.

Narobe moremo iz enakih produktov razmero sestaviti, ako faktorja jednega produkta za vnanja in faktorja drugega produkta za notranja člena naredimo. N. pr. iz $3.4 = 2.6$

$$\text{in } m.n = p.r$$

dobimo v razmeri

$$3 : 2 = 6 : 4$$

$$m : p = r : n$$

§. 90. Ako množiš ali deliš notranji in vnanji člen razmere $a : b = c : d$ z jednim in istim številom, dobiš spet veljavno razmero, t. j.

$$am : bm = c : d \text{ ali } am : b = cm : d \text{ i. t. d.}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d \text{ ali } \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d \text{ i. t. d.}$$

Dokaz $amd = bmc$ ali $ad = bc$ i. t. d.

$$\frac{a}{m} \cdot d = \frac{b}{m} \cdot c, \quad m \cdot \frac{a}{m} \cdot d = m \cdot \frac{b}{m} \cdot c, \quad ad = bc \text{ i. t. d.}$$

S porabo tega izreka odpravljamo ulomke iz razmer, in krajšamo razmere.

Naloga 1. Odpravi ulomke iz razmere

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : x$$

$$1 \text{ in } 2 \text{ člen množé z } m \dots a : \frac{b}{n} \times m = \frac{c}{p} : x$$

$$1 \text{ " } 2 \text{ " " " } n \dots an : bm = \frac{c}{p} : x$$

$$1 \text{ " } 2 \text{ " " " } s \ p \dots anp : bm = c : x$$

V razmeri torej imenivec odpraviš, ako množiš z imenivcema notranjih členov vnanji člen in z imenivcema vnanjih členov notranji člen.

Naloga 2. Okrajšaj razmero

$$am : bm = c : x \text{ 1 in 2 člen delé z } m$$

$$a : b = c : x$$

Odpravi ulomke iz teh-le razmer:

$$1.) \frac{3}{5} : \frac{5}{8} = : x; \quad 2.) 2 : \frac{5}{7} = x : 4; \quad 3.) \frac{2}{7} : \frac{5}{9} = \frac{4}{11} : x$$

$$4.) \frac{2}{9} : \frac{5}{9} = 5 : x; \quad 5.) \frac{3}{8} : 4 = \frac{1}{4} : x$$

Okrajšaj še te-le razmere:

$$1.) 28 : 13 = 21 : x; \quad 2.) 16 : 12 = x : 15$$

Vaje.

Naredi iz vsake teh-le jednačb 8 razmer:

- 1.) $2 \times 16 = 8 \times 4$; 2.) $5 \times 9 = 3 \times 15$; 3.) $4 \times 6 = 3 \times 8$;
4.) $8 \times 12 = 6 \times 16$; 5.) $mx = ns$; 6.) $fg = a^2$.

Izrazi te-le razmere z najm. celimi števili:

- 1.) $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} : \frac{5}{8}$; 2.) $5\frac{1}{7} : x = 3\frac{3}{8} : 35$;
3.) $2 \cdot 5 : 0 \cdot 27 = 25 : x$; 4.) $\frac{4}{9} : 6 \cdot 4 = x : 7 \cdot 2$;
5.) $\frac{x}{a} : \frac{g}{b} = \frac{h}{c} : \frac{i}{d}$; 6.) $x^3 : \frac{6a}{x} = x^4 : 6x$.

Izračunaj x v teh-le razmerah:

- 1.) $60 : 48 = 25 : x$; 2.) $12 : 16 = x : 8$;
3.) $3\frac{2}{5} : x = 3 : 7$; 4.) $x : 28 \cdot 2 = 3 \cdot 1 : 36$;
5.) $16 : 12 = 12 : x$; 6.) $\frac{5}{8} : \frac{1}{6} = 6 : x$;
7.) $4 \cdot 8 : \frac{4}{5} = 3\frac{2}{7} : x$; 8.) $x : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : \frac{5}{8}$;
9.) $a : ab = c : x$; 10.) $ap : bp = x : b$;
11.) $mn : x = mp : a$; 12.) $x : 3a^3 = 2b : 6a^2b$;
13.) $ab : b = b : x$; 14.) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x : n$;
15.) $\frac{a}{d} : x = \frac{b}{c} : \frac{b}{n}$; 16.) $x : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} : c$;
17.) $x : p = R^2\pi : r^2\pi$;

§. 91. V tem §. je $a : b = c : d$ prvotna razmera.

1. V vsakej razmeri se ima vsota ali diferenca členov prve omere proti vsoti ali diferenci členov druge omere kakor se imata sprednja ali pa zadnja člena, t. j.

$$\begin{aligned} (a \pm b) : (c \pm d) &= a : c \\ &= b : d \end{aligned}$$

Dokaz. Naj je: $a : b = e$, $c : d = e$

ter $a = be$, $c = de$ in

$$a + b = be + b = b(e + 1)$$

$$c + d = de + d = d(e + 1), \text{ torej}$$

$$(a + b) : (c + d) = b(e + 1) : d(e + 1)$$

$$\text{ali } (a + b) : (c + d) = b : d$$

$$= a : c$$

2. V vsakej razmeri se ima vsota ali diferenca sprednjih členov proti vsoti ali diferenci zadnjih členov, kakor vsak spreden člen proti svojemu zadnjemu členu, t. j.

$$\begin{aligned} (a \pm c) : (b \pm d) &= a : b \\ &= c : d \end{aligned}$$

Dokaz: Iz $a : b = c : d$ dobimo

$$a : c = b : d \text{ (§. 89, b) ter po 1.)}$$

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b \\ = c : d$$

3. Dokaži še veljavnost teh-le razmer:

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b$$

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$$

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$

$$(a + c) : (b + d) = (a - c) : (b - d)$$

in izrazi jih z besedami.

Vaje.

Razreši te-le razmere z ozirom na ta §.

1.) $(16 - x) : x = 8 : x$;

2.) $(100 + x) = 2000 : 10$;

3.) $(100 - x) : 3000 = x : 150$;

4.) $105 : (2000 + x) = 5 : x$.

§. 92. Ako imamo razmere:

$$a : b = a_1 : b_1$$

$$b : c = b_1 : c_1$$

$$c : d = c_1 : d_1$$

⋮

pišemo krajše:

$$a : b : c : d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1$$

in imenujemo tako razmero **zaporedno** razmero.

Naloga. Izpremeni te-le razmeri v zaporedno razmero.

$$a : b = m : n$$

$$b : c = p : r$$

Rešitev.

$$a : b = mp : np$$

$$b : c = pn : rn$$

$$a : b : c = mp : np : nz$$

Sestavljene razmere.

§. 93. Ako imamo ob jednom razmere

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{p}{r}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{s}{t}, \text{ dobimo}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{s}{t} \quad (\S. 53, 1)$$

$$\text{ter } \frac{acf}{bdg} = \frac{mps}{nrt}$$

Iz tega sledi: Več razmer moreš sestaviti v jedno, ako množiš njihove istoimenske člene jeden z drugim. Na ta način dobljeno razmero imenujemo sestavljeno razmero.

1. Sestavi še te-le razmere:

$$a) \begin{cases} 2:3=4:6 \\ 7:8=21:24 \\ 3:7=12:28 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5:3=10:6 \\ 1:7=2:14 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 8:28=2:7 \\ 5:2=10:4 \\ 4:6=8:12 \end{cases}$$

2. Sestavi te-le razmere in potem določi x .

$$a) \begin{cases} 1:3=6:z \\ 3:4=z:y \\ 4:5=y:x \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ \hline & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ \hline & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{okrajšaje} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$1.3.4:3.4.5=6.z.y:x$$

$$x = \frac{5 \times 6}{1} = 30$$

divizor | dividend $x = \frac{5 \times 6}{1} = 30$

$$b) \begin{cases} 3:5=9:z \\ 4:7=z:y \\ 5:6=y:x \end{cases} \quad c) \begin{cases} \frac{2}{3}:\frac{3}{4}=4:z \\ \frac{3}{4}:\frac{4}{5}=z:y \\ \frac{5}{6}:\frac{2}{3}=y:x \end{cases}$$

$$\check{c}) \begin{cases} a:b=m:z \\ \frac{b}{c}:\frac{a}{d}=z:x \end{cases} \quad d) \begin{cases} ab:cd=n:z \\ \frac{d}{a}:\frac{b}{c}=z:x \end{cases}$$

Količinske razmere.

§. 94. Ravnovrstne količine so odvisne mnogokrat jedna od druge, in sicer takó, da večja količina jedne vrste zahteva večjo količino druge vrste (in manjša manjšo), ali pa, da večja količina jedne vrste zahteva manjšo količino druge vrste ali narobe. Taki odvisnosti pojasnita nam ta-le primera:

1. Ako stane 1 kilogram nekega blaga 2 gl., staneta (stanejo)

$$\begin{array}{l} 2 \text{ kg } 2 \times 2 \text{ gl.} = 4 \text{ gl.} \\ 3 \text{ " } 3 \times 2 \text{ " } = 6 \text{ " } \\ 4 \text{ " } 4 \times 2 \text{ " } = 8 \text{ " } \\ \dots\dots\dots \\ a \text{ " } a \times 2 \text{ " } = 2a \text{ " } \end{array}$$

Kolikor več kilogramov, toliko več goldinarjev, ali v obče čem več jedne količine, tem več druge količine. V tem slučaju je

omera iz količin jedne vrste jednaka omeri iz pristojnih količin druge vrste, ako člena v obeh omerah v istem redu vzameš ali na kratko količine takih dveh vrst so **ravno razmerne**.

Iz našega primera dobimo razmere

$$\begin{aligned} 2 \frac{h}{g} : 3 \frac{h}{g} &= 4 \text{ fl.} : 6 \text{ fl.} \\ 3 \text{ " } : 6 \text{ " } &= 6 \text{ " } : 12 \text{ " } \\ 5 \text{ " } : 8 \text{ " } &= 10 \text{ " } : 16 \text{ " } \\ &\text{i. t. d.} \end{aligned}$$

2. Ako 1 delavec dovrši delo v 60 dneh, dovršita (dovršijo) to delo

$$\begin{aligned} 2 \text{ del. v } 60 : 2 &= 30 \text{ dneh} \\ 3 \text{ " " } 60 : 3 &= 20 \text{ " } \\ 4 \text{ " " } 60 : 4 &= 15 \text{ " } \\ &\dots\dots\dots \\ a \text{ " " } 60 : a &= \frac{60}{a} \text{ " } \end{aligned}$$

Čim več delavcev, tem manj dnij, ali v obče čim več jedne količine, tem manj druge količine.

V tem slučaju moramo **omero** iz količin druge vrste v **obratnem** redu vzeti od **omere** narejene iz pristojnih količin prve vrste, da dobimo **veljavno razmero**; količine teh dveh vrst so tedaj **obratno razmerne**. Iz našega primera dobimo razmere :

$$\begin{aligned} 2 \text{ del.} : 3 \text{ del.} &= 20 \text{ dnij} : 30 \text{ dnevom} \\ 4 \text{ " } : 5 \text{ " } &= 12 \text{ " } : 15 \text{ " } \\ 12 \text{ " } : 6 \text{ " } &= 10 \text{ " } : 5 \text{ " } \end{aligned}$$

Ravno razmerne količine so: razno blago in njegova cena, kapitali in obresti, čas in plačilo za delo, delavci in njihovo delo i. t. d.

Ravne omere spoznavamo iz primerjalnih besedi: „Čim več, tem več“ ali tudi „čim manj, tem manj“.

Obratno razmerne količine so: hitrost in čas, kapital in čas, delavci in čas i. t. d.

Obratne omere spoznavamo iz primerjalnih besedi: „Čim več, tem manj,“ ali tudi „čim manj, tem več“.

C. Regeldetrija.

Jednostavna regeldetrija.

§. 95. Ako stojite dve vrsti števil v ravnej ali obratnej omeri in ako ste dani dve števili jedne vrste, izmed obeh pristojnih števil druge vrste pa samo jedno, moremo izračunati tudi drugo neznano število druge vrste s pomočjo postavljene razmere. Kako

razmero naredimo, povedali smo ravno poprej. Naj ste n. pr. dani nalogi:

1.) 5 metrov sukna stane 15 fl.; koliko stanejo 3 metri?

Rešitev na pamet 5 $\frac{m}{l}$ stane 15 fl.

1 $\frac{m}{l}$ " 5ti del od 15 fl., t. j. 3 fl.

3 $\frac{m}{l}$ " 3krat 3 fl., t. j. 9 fl.

5 $\frac{m}{l}$ 15 fl. čem manj metrov,

3 " x " tem manj gold.

$$5 : 3 = 15 : x$$

$$3$$

$$x = 3 \times 3 = 9 \text{ fl.}$$

Odgovor: 3 metri stanejo 9 fl.

2.) 2500 fl. kapitala daje v 3 letih gotove obresti; koliko gol-dinarjev kapitala daje iste obresti v 2 letih? — Reši to nalogo najpred na pamet.

Rešitev: 2500 fl. k... 3 l.

x " " ... 2 l.

$$x : 2500 = 3 : 2$$

$$1150$$

$$x = 4 \times 1250 = 2750 \text{ fl.}$$

Odgovor: V 2 letih daje 3750 fl. kapitala ravno toliko obresti, kakor 2500 fl. v 3 letih.

Račune take vrste imenujemo **jednostavno regeldetrijio** (trostavko).

V vsakej regeldetrijiskej nalogi razločujemo 2 stavka: **pogojni stavek**, v katerem je zveza med raznovrstnima količinama določena (v gornjih primerih „5 $\frac{m}{l}$... 15 fl.“ „2500 fl. k... 3 l.“) in **vprašalni stavek**, s katerim ravno vprašamo po številu druge vrste, ki pripada k drugemu danemu številu (vprašalnemu številu) prve vrste (v gornjih primerih „3 $\frac{m}{l}$... x fl.“ „ x fl. k... 2 l.“; 3 $\frac{m}{l}$, 2 l. ste vprašalni števili).

Sestavljena regeldetrija.

§. 96. Ako stoji kaka vrsta števil z dvema ali več vrstami števil v ravnej ali obratnej omeri in ako so dana jedenkrat vsa skupna števila vsake vrste (to so vsa števila pogojnega stavka), drugokrat pa tudi vsa razna števila jedne vrste, moremo izračunati to neznano število. po tako imenovanej **sestavljenej regeldetriji**. To nam pojasni ta-le primer:

100 fl. kapitala dá v 1 letu 5 $\frac{1}{2}$ fl. obresti.

4350 " " " " 3 letih x " "

Vsako nalogo sestavljene regeldetrije moremo razstaviti v dve ali več jednostavno-regeldetrijskih nalog. Na gornjem primeru bi se to zgodilo tako-le:

Na pamet: 100 fl. kap. dajó $5\frac{1}{2}$ fl. ali 5 fl. 50 kr. obresti v 1 letu.

10 " " " 10ti del od 5 fl. 50 kr., t. j. 55 kr.

4350 " " " pa 435krat 55 kr., t. j. 239 fl. 25 kr.

v 1 letu; v 3 letih 3krat 239 fl. 25 kr., t. j. 717·75 fl.

a) 100 fl. k. dáje $5\frac{1}{2}$ fl. obr. }
 4350 " " " y " " } v istem času (v 1 letu)

$$100 : 4350 = 5\frac{1}{2} : y \text{ iz tega } = 239\frac{1}{4} \text{ fl.}$$

b) v 1 letu $239\frac{1}{4}$ fl. obresti

" 3 letih x " "

$$1 : 3 = 239\frac{1}{4} : x \text{ iz tega } x = 717\frac{3}{4} \text{ fl. ali } 717\cdot75 \text{ fl.}$$

obe razmeri sestavljeni

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 : 4350 = 5\frac{1}{2} : y \\ 1 : 3 = y : x \\ \hline 1 \times 100 : 3 \times 4350 = 5\frac{1}{2} : x \\ \hline x = \frac{3 \times 4350 \times 5\frac{1}{2}}{1 \times 100} \end{array} \right.$$

ali krajše

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 : 4350 = 5\frac{1}{2} : x \\ 1 ; 3 \\ \hline 1 \cdot 100 : 3 \times 4350 = 5\frac{1}{2} : x \\ \hline x = \frac{3 \times 4350 \times 5\frac{1}{2}}{1 \cdot 100} \end{array} \right.$$

in iz vsake razmere $x = 717\frac{3}{4}$ fl.

Te vrste naloge rešujemo tudi v takej obliki:

<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">x</td> <td style="padding: 0 10px;">5½</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">100</td> <td style="padding: 0 10px;">4350</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">divizor</td> <td style="padding: 0 10px;">dividend</td> </tr> </table>	x	5½	1	3	100	4350	divizor	dividend	ali	<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">x</td> <td style="padding: 0 10px;">5½, 11</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">2, 1</td> <td style="padding: 0 10px;">3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">2, 100</td> <td style="padding: 0 10px;">4350</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"></td> <td style="padding: 0 10px;">87</td> </tr> </table>	x	5½, 11	2, 1	3	2, 100	4350		87
x	5½																	
1	3																	
100	4350																	
divizor	dividend																	
x	5½, 11																	
2, 1	3																	
2, 100	4350																	
	87																	
$x = \frac{5\frac{1}{2} \times 3 \times 4350}{1 \cdot 100} = 717\frac{3}{4}$		$x = \frac{11 \times 3 \times 87}{2 \times 2 \times 1} = 717\frac{3}{4}$																

Vaje.

* Opomenja. Ložje naloge reši tudi na pamet; črke v oklepkih pomenjajo občna števila in veljajo za drugo nalogo, iz katere dobivamo občni izraz za x . — Izražaj vsako občno razmero z besedami, ravno tako dobljeni izraz za x .

1.) 12 (a) metrov nekega blaga stane 4 fl. 80 kr. (b fl.); koliko stane 18 (c) metrov?

- 2.) 25 (*a*) metrov nekega blaga stane 70 fl. (*b* fl.); koliko metrov dobimo za 14 (*c*) fl.?
- 3.) Nekdo dobi za 5 fl. 20 kr. (*a* fl.) 4 kilograme (*b* $\frac{h}{g}$) nekega blaga; koliko kilogramov dobi za 13 (*c*) fl.
- 4.) 456 $\frac{h}{g}$ 12 $\frac{D}{g}$ (*a* $\frac{h}{g}$) nekega blaga stane 358 fl. 25 kr. (*b* fl.); koliko stane 352 $\frac{h}{g}$ 45 $\frac{D}{g}$ (*c* $\frac{h}{g}$)?
- 5.) Nekdo naloži 3452 fl. kapitala (*k* fl.) s 6 $\frac{0}{10}$ (*p* $\frac{0}{10}$); koliko obresti dobi v 1 letu od tega kapitala?

Za takšne račune si pomni:

1. **Glavnico** ali **kapital** imenujemo imetje v denarji ali izposojen denar.

2. **Obresti** imenujemo oni denar, katerega daje v odmenjenem času izposojeni denar.

3. **Odstotke** ali **procente** ($\frac{0}{100}$) imenujemo obresti od 100 fl. kapitala za 1 leto. Tako n. pr. pomeni v gornji nalogi izraz: „6 $\frac{0}{100}$ “, da 100 gl. kapitala daje v letu 6 fl. obresti.

6.) 2500 gl. (*k* gl.) kapitala daje v 1 letu 162·5 (*b*) fl. obresti; s koliki odstotki je naložen ta kapital?

7.) Koliko kapitala moramo naložiti s 7 $\frac{2}{3}$ (*p* $\frac{0}{100}$), da dobimo 532·27 (*b*) fl. obresti?

8.) Nekdo zasluži v 3 (*a*) tednih 31·5 (*b*) fl.; koliko zasluži v 72 (*c*) dneh?

9.) Nekdo zasluži v 10 (*a*) tednih in 3 (*b*) dneh 56 (*c*) fl.; v kolikih dneh zasluži 5·2 (*d*) fl.?

10.) 12 (*a*) delavcev izkoplje v gotovem času 40° 5' (*d*⁰ *b*') dolg prekop (jarek); kako dolg prekop naredi 18 (*c*) delavcev v istem času?

11.) Nekdo potrebuje vsako leto 890 (*a*) fl.; koliko potrebuje za 3 (*b*) tedne?

12.) Nekdo porabi vsak dan 2·5 (*a*) fl.; v katerem času porabi 524·32 (*b*) fl.?

13.) Nekdo izhaja s svojim imetjem 3 $\frac{1}{2}$ (*a*) mesecev, ako izda vsak dan 2·4 (*b*) gl.; koliko časa izhaja s svojim imetjem, ako izdá vsak dan 1·6 (*c*) gl.?

14.) V katerem času dobimo od 870 gl. (*k*₁) ravno toliko obresti, kakor dobimo od 350 (*k*₂) gl. v 3 $\frac{5}{8}$ (*l*) letih?

15.) Kateri kapital dá v 5 $\frac{5}{8}$ (*l*₁) letih ravno toliko obresti, kakor 3000 (*k*) gl. v 6 $\frac{3}{8}$ (*l*₂) letih?

16.) Hitrost nekega konja se ima proti hitrosti vlaka, kakor 5 : 12 (*a* : *b*); ako tedaj potrebuje konj 8 (*c*) ur, da preleti neko daljavo, v katerem času preleti vlak to pot?

17.) 8 (*a*) delavcev dovrši neko delo v 10 (*b*) dneh; koliko delavcev je potreba, da to delo dovrše v 13 (*c*) dneh?

18.) 39 (*a*) delavcev naredi neko delo v 15 (*b*) dneh; koliko delavcev je potreba, da taisto delo izvrše v 13 (*c*) dneh?

- 19.) 34 (*a*) metrov nekega blaga, ki je 6 (*b*) decimetrov široko stane 22·48 (*c*) fl.; koliko stane 16 (*d*) metrov takega blaga, ako je 7 (*e*) decimetrov široko?
- 20.) Koliko obresti dobimo od 1520 (*k*) fl. kapitala v $5\frac{1}{4}$ (*l*) letih, ako je ta kapital naložen s $5\frac{1}{2}$ (*p*) %?
- 21.) Kolik kapital dá v 3 (*l*) letih in 5 (*m*) mesecih 720 (*o*) fl.; ako je naložen z 8 (*p*) %?
- 22.) S kolikimi odstotki moramo naložiti 3450 (*k*) fl. kapitala na 5 (*l*) let, da dobimo 1150 (*o*) fl. obresti?
- 23.) 250 (*k*₁) kapitala dá v $2\frac{1}{2}$ (*l*₁) letih neke obresti, ako ga naložimo s 6 (*p*) %; s kolikimi odstotki moramo naložiti 300 (*k*₂) fl. kapitala, da dobimo v $1\frac{7}{8}$ (*l*₂) letih iste obresti?
- 24.) Koliko kapitala moramo naložiti s 7% (*p* %), da dobimo v 5 (*m*₁) mesecih ravno toliko obresti, kolikor nam dá 3250 (*k*) fl. kapitala s $5\frac{1}{3}$ (*p*₂) % naloženih v 1 (*l*) letu in 7 (*m*₂) mesecih?
- 25.) Koliko časa mora biti 780 fl. (*k*₁) s $4\frac{3}{4}$ (*p*) % naloženih, da dobimo iste obresti, kakor jih nam dá 520 (*k*₂) fl. kapitala v 4 (*l*) letih pri 6 (*p*₂) %?
- 26.) Nekdo zasluži v 5 (*m*) mesecih 260 (*a*) fl., ako dela 10 (*d*) ur na dan in 5 (*b*) dni na teden; koliko zasluži v 2 (*c*) mesecih, ako dela 9 (*f*) ur na dan in 6 (*g*) dni na teden?
- 27.) 14 zidarjev naredi v 50 dneh 60 sežnjev dolg, 8 črevljev visok in $2\frac{1}{2}$ črevlja debel zid, ako delajo 10 ur na dan. V kolikih dneh naredi 10 zidarjev 36 sežnjev dolg, 10 črevljev visok in 2 črevlja debel zid, ako delajo 11 ur na dan?
- 28.) Nekdo je 2000 fl. na 2 meseca, 1500 fl. na 5 mesecev in 2400 fl. na 1 leto dolžen, kedaj more ves dolg na jedenkrat plačati?

Rešitev:

2000 fl. nese v 2 mesecih ravno toliko kakor 2krat 2000=	4000 v 1 msc.
1500 " " " 5 " " " " 5 " 1500=	7500 " " "
2400 " " " 1 letu= 12 m. " " 12 " 2400=	28800 " " "
5900 fl. nese v navedenih obrokih ravno toliko, kakor	40300 v 1 msc.
	40300 fl. v 1 mesecu
	5900 " " <i>x</i> mesecih
	$x = 403,00 : 59,00 = 6 \text{ mesc. } 24 \cdot 9 \text{ dn.}$

Odgovor: Ves dolg more v 6 mesecih 25 dneh plačati.

- 29.) Nekdo mora *c* fl. v *t* letih, *c'* fl. v *t'* letih, *c''* fl. v *t''* letih plačati; kedaj more ves dolg na jedenkrat povrniti, tako da néma dobička ali izgube?

Odgovor: v $\frac{ct + c't' + c''t''}{c + c' + c''}$ letih.

Č. Družni ali delni račun.

§. 97. Naloga: 1. Razdeli število 2268 v tri dele, da je jeden proti drugemu, kakor 2 proti 3 proti 7; kateri so ti deli?

Rešitev: Število 2268 moremo deliti na 3 razno velike dele x, y, z . Na vsak del pride določeno število enakih delov, in sicer na prvi del 2, na drugi 3 in na tretji 7, torej na vse dele skupaj 12 enakih delov števila 2268.

Potem je

$$2268 : x = 12 : 2$$

$$2268 : y = 12 : 3$$

$$2268 : z = 12 : 7 \text{ in}$$

$$x = \frac{2268}{12} \cdot 2, \quad y = \frac{2268}{12} \cdot 3, \quad z = \frac{2268}{12} \cdot 7$$

$$\text{ali } x = 378, \quad y = 567, \quad z = 1323.$$

Izštevili x, y, z tudi na pamet, a tako, da ne bodeš rabil razmer.

Naloga 2. Razdeli število $\check{s}$ v tri dele, da se ima jeden proti drugemu, kakor a proti b proti c ; kateri so ti deli?

Rešitev (glej nalogo 1)

$$x = \frac{\check{s}}{a+b+c} \cdot a, \quad y = \frac{\check{s}}{a+b+c} \cdot b, \quad z = \frac{\check{s}}{a+b+c} \cdot c$$

Račune, v katerih delimo dano število v več delov, ki se imajo jeden proti drugemu, kakor druga dana števila, imenujemo **razdelne** ali **družne račune**; števila, katera pripovedujejo, kolik mora biti jeden del proti drugemu **primerna števila**; število, katero moraš razdeliti, **razdelno število** ali **razdelno vsoto**; in dele, katere iščeš, **deleže** ali tudi **dele**.

Iz gornjih primerov spoznaš za izvršitev razdelnih računov to-le pravilo:

Deli razdelno vsoto z vsoto primernih števil in množi dobljeni kvocijent z vsakim primernim številom; produkti so iskani deleži.

Ako so kaka primerna števila ulomki, izpremeni vse najprej v cela števila s tem, da jih množiš z najmanjšim mnogokratnikom vseh imenovcev. Kedar pa imajo primerna števila skupno mero, okrajšaj jih ž njo.

Vaje (na pamet in pismeno).

1. Razdeli število 1500 fl. tako v tri dele, da se ima jeden proti drugemu, kakor 2 proti 3 proti 5; kateri so ti deli?

2. Trije trgovci se udeležé nekega podjetja. V ta namen da A 800 fl., B 600 fl. in C 1000 fl.; koliko ima vsak podjetnik dobička, če vsi trije pridobé 580 fl.?

3. Neki oče zapusti štirim sinovom 28500 fl.; prvi dobi $\frac{1}{4}$, drugi $\frac{1}{3}$, tretji $\frac{1}{5}$ in četrti ostanek premoženja. Koliko dobi vsak sin?

4. Trije bratje so kupili posestvo za 136000 fl., A je vložil $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ in C $\frac{1}{6}$ kupščine. Konec prvega leta bil je čist prihodek tega posestva 8500 fl. Koliko prihodka ima vsak brat od tega posestva in koliko odstotkov nese kupčija?

5. Pakfong je zmes iz $53\frac{1}{2}$ delov bakra, 29 delov cinka in $17\frac{1}{2}$ delov niklja. Koliko vsake zmesnine potrebuješ, da dobiš 28 kilogramov pakfonga.

6. Nekdo je kupecu A 1500 fl., B 800 fl., C 1200 fl., D 420 fl. in E 80 fl. dolžan. On umerje in zapusti 2300 fl. čistega premoženja; koliko izgubi vsak kupec?

7. Razdeli s fl. tako na 3 dele, x , y , z , da se ima $x : y = m : n$ in $y : z = p : q$.

8. Trije dediči morajo 6150 fl. tako med seboj razdeliti, da A tolikokrat po 5 fl. dobi, kakor B po 3 in C tolikokrat po 3, kakor B po 4 fl.; koliko dobi vsak dedič?

Sestavljeni razdelni račun.

§. 98. Naloga 1. Trije podjetniki prevzemo skupno delo za 6596 gl.

A	dá	25	delavcev	za	64	dni
B	"	20	"	"	60	"
C	"	40	"	"	70	"

koliko dobi vsak podjetnik?

Rešitev na pamet: Ko bi vsak z enim delavcem ravno toliko zaslužiti hotel, bi moral delati delavec podjetnika:

A	25krat	64 dni,	t. j.	$64 \times 25 = 1600$	dni
B	20	"	60	$60 \times 20 = 1200$	"
C	40	"	70	$70 \times 40 = 2800$	"

Z enim samim delavcem bi moral torej delati: A 1600, B 1200 in C 2800 dni. Ali na 4 dni osebe A bi prišlo 3 dni osebe B in 7 dni osebe C , ter 14 dni vseh. — 14 del od 6596 je $6596 : 14 = i. t. d.$

Rešitev z omerami: Ta račun moremo izpremeniti v jednostaven račun. Število 6596 moramo razdeliti v deleže, ki se imajo z ozirom na število delavcev jeden proti drugemu kakor $25 : 20 : 40$ in z ozirom na število dni kakor $64 : 60 : 70$. Ako imenujemo neznane deleže x , y , z , potem je $x : y = 25 : 20$ in $x : y = 64 : 60$, ter tudi $x : y = 25 \times 64 : 20 \times 60$. Ravno tako

je $y : z = 20 \times 60 : 40 \times 70$. V našem računu je torej zahtevano, da zadoščujemo pogoju:

$$x : y : z = 25 \times 64 : 20 \times 60 : 40 \times 70$$

kar pa je naloga jednostavnega razdelnega računa.

Ako dalje računiš, dobiš:

$$x = 1884\frac{1}{4} \text{ fl.}, y = 1413\frac{3}{4} \text{ fl. in } z = 3298 \text{ fl.}$$

Naloga 2. Razdeli število z ozirom na razne okolščine v 3 dele, ki se imajo jeden proti drugemu v jednom obziru kakor $a : b : c$, v drugem obziru kakor $d : e : f$. (Glej nalogo 1.)

Pri sestavljenem razdelnem računu si torej pomni to-le:

Množi vsa primerna števila za isti delež in misli si dobljene produkte kot primerna števila jednostavnega razdelnega računa. Potem računi dalje, kakor ti je znano.

Vaje.

1. Trije kupci so skupaj trgovali. A je dal pri tej kupčiji 800 fl. za 7 mesecev, B 1200 fl. za 4 mesece in C 2500 fl. za 3 mesece. Ko so se ločili, imeli so 500 fl. izgube; koliko je vsak izgubil?

2. Tri srenje so dobile za neko delo 250 fl. Srenja A je dala 11 mož skoz 10 dni po 9 ur, srenja B 9 mož skoz 9 dni po 10 ur in srenja C 15 mož skoz 5 dni po 6 ur na dan. Koliko je dobila vsaka srenja?

3. Trije kupci so skupaj kupčevali z žitom. V ta namen je vložil A 4000 fl., B 3800 fl. in C 3000 fl. Čez tri mesece priloži še B 1200 fl. in C čez 5 mesecev še 1000 fl., dobička so pa na zadnje imeli 2600 fl.; koliko dobi od tega dobička vsak kupec?

4. Za neko podjetje je dal A 3000 fl. koj in 1200 fl. čez 20 dni; B pa 4500 fl. koj in čez $2\frac{1}{2}$ meseca še 1300 fl. Čez $\frac{3}{4}$ leta razdelila sta pridobljenih 850 fl. med-se; koliko ima vsak dobička?

D. Sovezni račun.

§. 99. Naloga 1.

Koliko (x) dunajskih črevljev je 2135 pruskih črevljev?

če je 223 pruskih črevljev 70 metrov

„ „ 104 metrov 329 dunajskih črevljev?

To nalogo rešimo tako, da si stavimo sledeča vprašanja:
Koliko metrov (y) ima 2135 pruskih črevljev, če je 70 metrov =

223 pruskih črevljev? Koliko dunajskih črevljev (x) ima y metrov, če je 329 dunajskih črevljev = 104 metrov. In iz teh vprašanj sledite sledeči razmeri:

$$\begin{array}{rcl} y : 2135 & = & 70 : 223 \\ x : y & = & 329 : 154 \text{ in iz teh razmer} \\ \hline x : 2135 & = & 70 : 223 \\ & & 329 : 104 \end{array}$$

Potem je

$$x = \frac{2135 \times 70 \times 329}{223 \times 104} = 2120,08675 \text{ dun. č.}$$

Naloga 2.

Koliko (x) jednot vrste V_1 obseza a jednot vrste V_2
 če obseza a_1 " " V_2 " b " " V_3
 " " b_1 " " V_3 " c " " V_1

To nalogo krajše tako-le napišemo:

$$\begin{aligned} x_1 V_1 &= a V_2 \\ a_1 V_2 &= b V_3 \\ b_1 V_3 &= c V_1, \end{aligned}$$

kjer so V_1, V_2, V_3 imena števil x, a, a_1, b, b_1, c in jo rešimo, kakor nalogo 1.

Reši jo, potem dobiš:

$$x = \frac{a b c}{a_1 b_1} \quad 2.$$

Take vrste račune imenujemo sovezne račune.

Iz izrazov 1. in 2. posnemamo to-le pravilo za sovezni račun:

Naredi vertikalno črto, napiši na levo te črte x , na desno zraven nje pa število, ki ima isto vrednost, kakor x . Vsa druga števila napiši na levo in na desno črte in sicer tako, da stoji na levej istoimensko število sè zadnjim na desnej, na desnej pa število iste vrednosti. Sovezo dovršiš, kedar stoji na desnej število, ki je istoimensko sè številom x . Potem okrajšaj števila na desnej proti številom na levej in deli produkt ostalih števil na desnej s produktom ostalih števil na levej; kvocijent je iskano število x .

Vaje.

1. Če stane 84 bavarskih vatlov nekega blaga $194\frac{2}{5}$ gl. južnonemške velj., koliko goldinarjev avstr. veljave stane 56 dunajskih vatlov?

(18 bavarskih vatlov = 25 badenskih vatlov, 309 bad. v. = 278 pruskih v., 111 pruskih v. = 95 dun. v. in 6 fl. avstr. v. = 7 fl. južnon. velj.)

Rešitev: fl. avstr. v. x	56 d. v.
95	111 pr. v.
278	309 bad. v.
25	18 bav. v.
84	$194\frac{2}{5}$ fl. avst. v.
$x = \text{i. t. d.}$	

2. 1 hamb. funt kave stane $6\frac{1}{2}$ šilingov; koliko stane $5\frac{1}{4}$ dunajskih fl. v avstrij. velj.? (100 hamb. funtov = $89\frac{3}{4}$ dun. funtov; 100 mark = $84\frac{1}{2}$ gl. avst. velj.; 1 marka = 16 šilingov; 1 dun. cent = 100 dun. funtov.)

3. Koliko stane 1 dun. cent nekega blaga, če stane 1 angl. cent tega blaga $4\frac{2}{3}$ šterlingov? (1 angl. cent = 128 angl. funtov, 100 angl. funt. = 81 dun. f., 1 šterling = $11\frac{1}{5}$ fl. avst. velj.)

4. Koliko stane v avst. v. kos 13lotnega srebra, ki tehta $18\frac{3}{4}$ mark; če stane marka čistega srebra $21\frac{1}{5}$ fl. a. v.

5. Koliko frankov stane 100 kilogramov kave, če 1 dun. cent te kave stane 9 fl. 50 kr. (1 dun. f. = 0.56 kilogr., 1 frank = $40\frac{1}{2}$ kr. a. v.)

6. Nek dunajski kupec dobi iz Hamburga 2714 hamb. funtov bombaža, funt po $6\frac{1}{2}$ šilingov. Ako znašajo stroški $8\frac{1}{2}\%$, koliko % ima dobička ali izgube, če na Dunaji 100 kilogramov daje 100 kilogramov daje za 87 fl.? (100 hamb. f. = $89\frac{3}{4}$ d. f., 100 d. f. = 56 $\frac{1}{2}$ fl., 16 šiling. = 1 marka, 100 mark = $84\frac{1}{2}$ fl. a. v.)

Vprašanja za ponavljanje.

Iz katerega računa sledé omere? — Kaj je omera? — Kako delimo omere z ozirom na vrednost členov. — Kaj je razmera? — Kaj je količinska, kaj številna razmera? — Katere količine so ravno, katere obratno razmerne? — V kakšnej zvezi so omere, kvocijenti in ulomki? — Kaj iz te zveze sledi z ozirom na računanje ž njimi?

Peti oddelek.

● potencah, korenih in logaritmih.

A. O potencah.

§. 100. Pomen potence (glej §. 38.) Za seštevanje in odštevanje potenc velja pravilo za seštevanje in odštevanje istoimenskih števil. — O množenji potenc enakih podlag (glej §. 39). — O deljenji potenc enakih podlag, o potenci a^0 in o potencah z negativnim eksponentom (glej §. 45).

Množenje potenc enakih eksponentov.

§. 101. Potence enakih eksponentov množiš, ako produkt njihovih podlag sè skupnim eksponentom potencuješ.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Dokaz. Iz pomena potence sledi:

$$a^m \cdot b^m = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ krat}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{m \text{ krat}} = \overbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}^{m \text{ krat}} = (ab)^m$$

Dokaži isto na teh-le primerih:

$$\begin{array}{lll} a) \quad 2^3 \cdot 5^3 = ? & b) \quad 4^2 \cdot 5^2 = ? & c) \quad 10^5 \cdot 4^5 = ? \\ & d) \quad x^p \cdot y^p = ? \end{array}$$

Ker je $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$, je tudi

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m$$

t. j. produkt potencuješ, ako vsak faktor produkta za se potencuješ.

Deljenje potenc enakih eksponentov.

§. 112. Potenci enakih eksponentov deliš, ako kvocijent iz njihovih podlag sè skupnim eksponentom potencuješ.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Dokaz. Iz pomena potence sledi:

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ krat}}}{\overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{m \text{ krat}}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Dokaži isto na teh-le primerih:

$$\begin{array}{llll} a) \quad \frac{12^3}{4^3} = ? & b) \quad \frac{32^4}{8^4} = ? & c) \quad \frac{60^5}{6^5} = ? & d) \quad \frac{27^n}{9^n} = ? \\ & f) \quad \frac{x^n}{y^n} = ? \end{array}$$

Ker je $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, je tudi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

t. j. kvocijent (ulomek) potencuješ, ako deliš potenco dividenda (števeca) s potenco divizorja (imenivca).

Potencovanje potenc.

§. 103. Potenco potencuješ, ako podlago s produktom obeh eksponentov potencuješ.

$$(am)^n = amn$$

Dokaz. Iz pomena potence sledi:

$$(am)^n = am \cdot \overbrace{am \dots am}^{nkrat} = am + m + \dots + m = amn$$

Dokaži isto na teh-le primerih:

a) $(3^2)^3 = ?$ b) $(5^3)^4 = ?$ c) $(a^3)^2 = ?$ d) $(x^p)^r = ?$

Ker je $(am)^n = amn$, je tudi

$$amn = (am)^n$$

t. j. število potencuješ s produktom, ako ga najpred z jednim in potem dobljeno potenco z drugim faktorjem potencuješ.

Potencovanje algebraskih števil.

§. 104. Iz pomena potence sledi:

$$(+a)^1 = +a$$

$$(+a)^2 = (+a) \times (+a) = +a^2$$

$$(+a)^3 = (+a) \times (+a) + (+a) = +a^3$$

.....

$\overbrace{\hspace{1cm}}^{mkrat}$

$$1. (+a)^m = (+a) \times (+a) \times \dots \times (+a) = +am$$

Potenca pozitivnega števila je zmerom pozitivna.

$$(-a)^1 = -a$$

$$(-a)^2 = (-a) \times (-a) = +a^2$$

$$(-a)^3 = (-a) \times (-a) \times (-a) = -a^3$$

$$(-a)^4 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = +a^4$$

$$(-a)^5 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = -a^5$$

.....

$$2. (-a)^{2m} = [(-a)^2]^m = (+a^2)^m = +a^{2m}$$

$$3. (-a)^{2m+1} = (-a)^{2m} \times (-a) = (+a^{2m}) \times (-a) = -a^{2m+1}$$

Negativno število potencovano s parnim eksponentom daje pozitivno in potencovano z neparnim eksponentom neparno potenco.

Dokaži to še na teh-le primerih:

a) $(-3)^2 = ?$ b) $(-5)^5 = ?$ c) $(-x)^3 = ?$ d) $(-y)^4 = ?$

Kvadrovanje in kubovanje binoma in polinomov.

§. 105. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, t. j. kvadrat binoma je jednak kvadratu prvega člena, več dvojnemu produktu iz obeh členov, več kvadratu drugega člena.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
t. j. kubus binoma je enak kubusu prvega člena, več trojnemu kvadratu prvega člena, pomnoženemu z drugim členom, več trojnemu prvemu členu, pomnoženemu s kvadratom drugega člena, več kubusu drugega člena.

Vaje.

- 1.) $6^3 \cdot 6^2 = ?$ 2.) $a^3 \cdot a^5 = ?$ 3.) $(a + b)^5 \cdot (a + b)^3 = ?$
- 4.) $\frac{7^6}{7^4} = ?$ 5.) $\frac{432^8}{432^7} = ?$ 6.) $\frac{5803^9}{5803^7} = ?$ 7.) $\frac{a^8}{a^5} = ?$
- 8.) $\frac{x^7}{x^5} = ?$ 9.) $\frac{(a + b)^6}{(a + b)^4} = ?$ 10.) $2^5 \cdot 5^5 = ?$ 11.) $5^3 \cdot 8^3 = ?$
- 12.) $x^2 \cdot y^2 = ?$ 13.) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = ?$ 14.) $3^5 a^5 x^5 y^5 = ?$
- 15.) $2^4 \cdot 5^4 \cdot x^4 = ?$ 16.) $(ax)^3 = ?$ 17.) $(7ax)^2 = ?$
- 18.) $(2x)^3 = ?$ 19.) $(10mnp)^5 = ?$ 20.) $\frac{12^4}{3^4} = ?$
- 21.) $\frac{18^3}{6^3} = ?$ 22.) $\frac{(32ax)^5}{(8ax)^5} = ?$ 23.) $\frac{(15 : 4x)^8}{(5 : 8)^8} = ?$
- 24.) $\frac{(48y)^{13}}{(48 : x)^{12}} = ?$ 25.) $\frac{(ab)^m}{nm} = ?$ 26.) $\frac{(abc)^n}{(bc)^n} = ?$
- 27.) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = ?$ 28.) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = ?$ 29.) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = ?$
- 30.) $\left(-\frac{2x}{5y}\right)^3 = ?$ 31.) $(x + y)^m \cdot (x + y)^n = ?$
- 32.) $(a - b)^{m-1} \cdot (a - b) = ?$ 33.) $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} = ?$
- 34.) $(x + y)^m : (x + y)^n = ?$ 35.) $(x - y)^{n+1} : (x - y) = ?$
- 36.) $\left(\frac{a + b}{z - x}\right)^m \cdot \left(\frac{z + x}{a + b}\right)^m \cdot \left(\frac{z - x}{a - b}\right)^m = ?$
- 37.) $(3a - 4b)^m \cdot (3a + 4b)^m \cdot (3a + 4b)^m \cdot (9a^2 + 16b^2)^m = ?$
- 38.) $(x + 1)^2 = ?$ 39.) $(x - 1)^2 = ?$ 40.) $(5 + y)^2 = ?$
- 41.) $(4 - y)^2 = ?$ 42.) $(z - 8)^2 = ?$ 43.) $(x + 1)^3 = ?$
- 44.) $(x - 1)^3 = ?$ 45.) $(x + 7)^3 = ?$ 46.) $(x - 2)^3 = ?$
- 47.) $(9 - x)^3 = ?$ 48.) $(5m + 4n)^2 = ?$ 49.) $(3x - 2y)^2 = ?$

- 50.) $(4a + 3)^3 = ?$ 51.) $(3x - 7y)^3 = ?$ 52.) $(10x - 5y)^3 = ?$
 53.) $(a^5)^3 = ?$ 54.) $(10a^2)^3 = ?$ 55.) $(3x^2y^3)^2 = ?$
 56.) $\left(\frac{2ax^2}{36x^2}\right)^2 = ?$ 57.) $(5a^2 - 6y^3)^2 = ?$ 58.) $(2ax^2 + 3by^2)^3 = ?$
 59.) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^3}{a}\right)^2 = ?$ 60.) $\left(\frac{3ax^2}{5m^3} - \frac{7by^2}{12n^2}\right)^2 = ?$
 61.) $\alpha) (a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$
 $= a^2 + (2a + b)b + [2(a + b) + c]c$
 $\beta) (a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2 =$
 $= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$
 $= a^2 + (2a + b)b + [2(a + b) + c]c + [2(a + b + c) + d]d$
 i. t. d.
 62.) $(3x - 2y + 2z)^2 = ?$ 63.) $(5m - 2n - 3p + 4r)^2 = ?$
 64.) $(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$ i. t. d.
 65.) $(3x - 2y + 5z)^3 = ?$ 66.) $(x - 2x - 3z + 4v)^3 = ?$

Kvadriranje posebnih števil.

§. 106. Število kvadrujemo, ako ga dvakrat kot faktor stavimo in potem množimo. N. pr.

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

$$12 \cdot 5^2 = 12 \cdot 5 \times 12 \cdot 5 = 156 \cdot 25$$

Samo po sebi se umé, da ima kvadrat decimalnega ulomka dvakrat toliko decimalk, kakor dani decimalni ulomek. (Zakaj?)

Kvadrati jednoštevilkastih števil so:

Števila (drugi koreni) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Kvadrati 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Naloga 1. Kvadrui število 43.

$$43^2 = 43 \times 43 = 1849$$

Pa še drugače moremo število kvadrovati. V ta namen razstavi število 43 v binom $40 + 3$ in ga kvadrui kakor binom.

$$43^2 = (40 + 3)^2 =$$

40 ²1600	ali	4 ²16
+ 2 × 40 × 3.....240	krajše	+ 2 × 4 × 3... 24
+ 3 ²9		+ 3 ²9
1849		1849

Naloga 2. Kvadriraj število 794.

Troštevilkasto število razstavi v polinom, kakor to sploh stôri pri vsakem mnogoštevilkastem številu.

$$794^2 = (700 + 90 + 4)^2 \text{ (glej nalogo 61. prejšnjega §.)}$$

794 ²	490000		7 ²	49
2 × 700 × 90	126000	ali	2 × 7 × 9.....	126
90 ²	8100	krajše	9 ²	81
2 × 790 × 4	6320		2 × 79 × 4.....	632
4 ²	16		4 ²	16
	630436			630436

Iz teh in še iz drugih na enak način predelanih primerov dobivamo za kvadriranje mnogoštevilkastih števil to-le pravilo:

Kvadrat mnogoštevilkastega števila dobiš, ako vzameš najpred kvadrat najvišje številke; iz vsake sledeče številke pa naredi zaporedoma dvoje delov: dvojni kvadrat pred njo stoječega števila pomnožen s to številko; potem kvadrat te številke. Vsak sledeč del piši pod prejšnji za jedno mesto proti desnej, in seštej vse te dele.

Kvadriraj še ta-le števila in pri nekaterih opraviči tudi to kvadriranje:

- 1.) $52^2 = ?$ 2.) $0.78^2 = ?$ 3.) $573^2 = ?$ 4.) $3.12^2 = ?$
 5.) $27.5^2 = ?$ 6.) $4527^2 = ?$ 7.) $9.403^2 = ?$ 8.) $2.009^2 = ?$
 9.) $506.032^2 = ?$ 10.) $1.30005^2 = ?$ 11.) $500.9007^2 = ?$

Kubovanje posebnih števil.

§. 107. Število kubujemo, ako ga stavimo trikrat kot faktor. N. pr.

$$738^3 = 748 \times 738 \times 738 = 401947272$$

$$7.02^3 = 7.02 \times 7.02 \times 7.02 = 345.948408$$

Kubus decimalnega ulomka ima trikrat toliko decimalk, kakor dani ulomek sam. (Zakaj?)

Kubusi jednoštevilkastih števil so:

število (tretji koren) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

kubus 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Naloga 1. Kubuj število 62.

$$62^3 = 62 \times 62 \times 62 = 238328$$

Do drugačnega kubovanja pridemo, ako razstavimo posebno število (62) v binom.

$$\begin{array}{rcl}
 62^3 = (60+2)^3 = & & \\
 60^3 \dots\dots\dots 216000 & 6^3 \dots\dots\dots 216 & \\
 3 \times 60^2 \times 2 \dots\dots 21600 & \text{ali} & 3 \times 6^2 \times 2 \dots\dots\dots 216 \\
 3 \times 60 \times 2^2 \dots\dots 720 & \text{krajše} & 3 \times 6 \times 2^3 \dots\dots\dots 72 \\
 2^3 \dots\dots\dots 8 & & 2^3 \dots\dots\dots 8 \\
 \hline
 & 238328 & \hline
 & 238328 &
 \end{array}$$

Naloga 2. Kubuj število 471.

$471^3 = (400+70+1)^3$ (glej nalogo 64 §. 105.)

$$\begin{array}{rcl}
 471^3 = & & \\
 400^3 \dots\dots\dots 64000000 & 4^3 \dots\dots\dots 64 & \\
 3 \times 400^2 \times 70 \dots\dots 33600000 & 3 \times 4^2 \times 7 \dots\dots\dots 336 & \\
 3 \times 400 \times 70^2 \dots\dots 58800000 & \text{ali} & 3 \times 4 \times 7^2 \dots\dots\dots 588 \\
 70^3 \dots\dots\dots 343000 & \text{krajše} & 7^3 \dots\dots\dots 343 \\
 3 \cdot 470^2 \cdot 1 \dots\dots\dots 662700 & 3 \times 47^2 \cdot 1 \dots\dots\dots 6627 & \\
 3 \times 470 \times 1^2 \dots\dots\dots 1410 & 3 \times 47 \times 1^3 \dots\dots\dots 141 & \\
 1^3 \dots\dots\dots 1 & 1^3 \dots\dots\dots 1 & \\
 \hline
 & 104487111 & \hline
 & 104487111 &
 \end{array}$$

Iz teh in iz družih na enak način predelanih primerov dobimo to-le pravila za kubovanje mnogostevilkastih števil:

Najvišjo številko kubuj, iz vsake sledeče številke pa naredi troje delov namreč:

1. Trojni kvadrat prednjo stoječega števila, pomnožen s to številko;

2. trojni produkt prednjo stoječega števila in kvadrata te številke; in

3. kubus te številke.

Te dele piši tako jeden pod drugima, da vsak sledeč stoji za jedno mesto bolj proti desnej od prejšnjega. Vsota vseh teh delov je kubus števila.

Kubuj še ta-le števila (in pri nekaterih številih opraviči to kubovanje):

- 1.) $35^3 = ?$ 2.) $0 \cdot 23^3 = ?$ 3.) $652^3 = ?$ 4.) $40 \cdot 5^3 = ?$
 5.) $3005^3 = ?$ 6.) $5 \cdot 728^3$ 7.) $305 \cdot 0206^3 = ?$

B. O korenih.

§. 108. Število a potencuješ m krat, ako ga staviš m krat kot faktor.

$$a^m = a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (mkrat) } = c.$$

Narobe torej moreš število $c = (a^m)$ razstaviti v m enakih faktorjev. — Razstavi zaporedoma števila 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 v dva (glej §. 106), in števila 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 v tri jednake faktorje (glej §. 107).

Ako iščemo za kako število (potenco) c ponavljani faktor a , iz katerega je postalo, pravimo, da to število **korenimo**. Dano število c imenujemo **korenjenec** (radikand) ali navadno tudi **število**; število m , ki pove, v koliko enakih faktorjev imamo razstaviti radikand, **korenov eksponent** (kazalo); iskani ponavljani faktor **koren**. Kedar imamo število c razstaviti v m faktorjev,

zapišemo $\sqrt[m]{c}$ kar beremo „ m ti koren iz c “. Drugi in tretji koren kakega števila imenujemo tudi oziroma kvadratni koren in kubični koren. Koren je ali le nakazan ali pa tudi izvršen. Tako

n. pr. je $\sqrt[3]{27}$ nakazani, 3 pa izvršeni tretji koren števila 27. $\sqrt[m]{a}$ ima le takrat nek pomen, kedar je a kako število izmed 1^m , 2^m , 3^m ... i. t. d.

Vaje in vprašanja.

1. a) Razstavi ta-le števila :
 25 , a^2 v dva faktorja; 27 , b^3 v tri faktorje; c^4 v štiri in d^m v m faktorjev.
 b) Imenuj radikande in eksponente prejšnjih primerov; zakaj imenujemo 25 , a^2 , 27 , b^3 , c^4 , d^m radikande, zakaj 2, 3, 4, m korenove eksponente? Kaj se pravi iz števila a drugi, tretji, četrti, m ti koren iskati?
2. Povej nakazan in potem izvršen: drugi koren iz 36 , a^2 ; tretji koren iz 125 , b^3 ; m ti koren iz a^m .
3. Povej prvi koren iz števil: 2, 3, 4, 5, m . Iz teh primerov spoznaš: Prvi koren iz kateregakoli števila je število samo, t. j. $\sqrt[1]{a} = a$.

Za prvi koren torej ni treba zapisavati niti korenovega znaka niti eksponenta 1. Pri drugem ali kvadratnem korenu pišemo navadno le korenov znak, ne pa eksponenta 2, tako da je $\sqrt{a}$ ravno toliko, kakor $\sqrt[2]{a}$.

4. Povej prvi, drugi, tretji, m ti koren števila 1.

Iz tega spoznaš: Vsak poljuben koren števila 1 je 1, t. j. $\sqrt[m]{1} = 1$.

5. Povej 3. potenco števila 10, 11, 12, b in išči iz dobljene potence 3. koren. Kaj dobiš, ako povzdigneš število a na m to potenco in iz dobljene potence iščeš m ti koren? — Ako iščeš iz m te potence m ti koren, dobiš podlago, t. j. $\sqrt[m]{a^m}$.

6. Povej 3. koren števila 343 in potencuj trikrat dobljeni koren. Kaj dobiš, ako iščeš m ti koren iz a in dobljeni koren povzdigneš na m to potenco? —

Ako potencuješ koren s korenovim eksponentom, dobiš radikand, t. j. $(\sqrt[m]{a})^m = a$.

Iz 5. in 6. sledi: Števila ne izpreminjaš, ako ga v poljubnem redu potencuješ in koreniš z jednim in istim številom.

Potencovanje in korenjenje sta torej protivna računa. — Potem moremo vsako število v obliki korena napisati. Napiši n. pr. število 5 v obliki 3. korena. —

$$5 = \sqrt[3]{5^3}$$

Opomba. 2., 3., 4., 5., 6. slede iz pojma o korenu.

7. Povej kvadratni koren števil 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 in povzdigni dobljen koren na drugo potenco.

8. Povzdigni na tretjo potenco števila: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in išči iz dobljene potence tretji koren.

9. Napiši v obliki m . korena števila: 1, 2, 3, 4, 5, 6, x .

11. Napiši te-le potence v obliki 3. korena: $a^2 = \sqrt[3]{a^6}$, 3^5 , 4^4 , m^3 , x^6 , cd .

12. Napiši v obliki m tega korena te-le potence: 3^5 , 2^3 , 5^8 , a^3 , b^7 , cn .

Računanje s koreni.

S koreni računamo ravno tako, kakor z običnimi števili sploh. Krčiti moremo le istoimenske korene, t. j. take, ki imajo isti radikand in eksponent. Tako je n. pr. $3 \sqrt[m]{x} - 2 \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$,
 $5 \sqrt[m]{a} - 7 \sqrt[m]{a} = -2 \sqrt[m]{a}$, $a \sqrt[n]{y} + b \sqrt[n]{y} = (a + b) \sqrt[n]{y}$.

Množenje korenov enakih eksponentov.

§. 109. Korene enakih eksponentov množiš, ako koreniš produkt radikandov s skupnim eksponentom.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

Dokaz. Naj je $\sqrt[m]{a} = x$, $\sqrt[m]{b} = y$, torej $a = x^m$, $b = y^m$ in
 $x^m \cdot y^m = ab$ ali
 $(xy)^m = ab$, ter tudi

$$xy = \sqrt[m]{ab} \text{ ali}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

Dokaži isto na teh-le primerih :

$$a) \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[9]{9} = ? \quad b) \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{27} = ? \quad c) \sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{n} = ?$$

$$d) \sqrt[a]{h} \cdot \sqrt[a]{i} = ?$$

Ker je $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$, je tudi

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

t. j. produkt koreniš, ako koreniš vsak faktor za sé.

Deljenje korenov z enakimi eksponenti.

§. 110. Korena enakih eksponentov deliš, ako kvocijent radikandov sè skupnim eksponentom koreniš.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Dokaz. Naj je $\sqrt[m]{a} = x$, $\sqrt[m]{b} = y$, ter $a = x^m$, $b = y^m$ in

$$\frac{x^m}{y^m} = \frac{a}{b} \text{ ali } \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{a}{b} \text{ ter tudi}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \text{ ali } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Dokaži isto na teh-le primerih :

$$a) \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[4]{4}} = ? \quad b) \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}} = ? \quad c) \frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[5]{i}} = ? \quad d) \frac{\sqrt[r]{s}}{\sqrt[r]{t}} = ?$$

Ker je $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, je tudi

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

t. j. kvocijent (ulomek) koreniš, ako dividend in divizor (števec in imenivec) za sé koreniš.

§. 111. Koren potencuješ sé številom, ako radikand ž njim potencuješ, t. j.

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Dokaz. Naj je $\sqrt[m]{a} = x$ ali $x^m = a$, potem je

$$(x^m)^n = a^n \text{ ali } (x^n)^m = a^n \text{ torej}$$

$$x^n = \sqrt[m]{a^n} \text{ ali } (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Dokaži isto na teh-le primerih:

$$(\sqrt[3]{4})^2, (\sqrt[3]{120})^3, (\sqrt[r]{p})^s$$

Narobe je:
$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$$

Izrazi to jednačbo z besedami! — Ali je vse jedno, v katerem redu koreniš in potencuješ?

§. 112. Koren koreniš sé številom, ako radikand s produktom eksponentov koreniš, t. j.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Dokaz. Naj je:
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

potem je $x^m = \sqrt[n]{a}$ in $x^{mn} = a$ ter tudi

$$x = \sqrt[mn]{a} \text{ ali } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Dokaži to še na teh-le primerih:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}}, \sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}, \sqrt[p]{\sqrt[r]{s}}.$$

Narobe je: $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Izreci to jednačbo z besedami!

§. 113. Korena ne izpreminjaš, ako korenovi in potenčni eksponent z istim številom množiš ali deliš, t. j.

$$\sqrt[m]{a^n} = 1.) \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} = 2.) \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$$

Dokaz. 1. Naj je $\sqrt[m]{a^n} = x$ ali $x^m = a^n$ torej tudi $x^{mp} = a^{np}$, potem je

$$x = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} \text{ ali } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}$$

S porabo tega izpreminjamo korene na jednake eksponente.

N. pr. Izpremeni $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$ v korena z enakima eksponentoma.

Rešitev: $\sqrt[2 \cdot 3]{a^3} = \sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[3 \cdot 2]{b^2} = \sqrt[6]{b^2}$.

Narobe je: $\sqrt[m \cdot p]{a^n} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{p}}}$. Korenivi in potenčni eksponent moremo torej sè skupno mero okrajševati.

2. Naj je $\frac{m}{p} = \alpha$, $\frac{n}{p} = \beta$ ali $m = p\alpha$, $n = p\beta$ potem je

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[p\alpha]{a^{p\beta}} = \sqrt[\alpha]{a^\beta} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$$

Ako je n deljivo z m , moremo $p = m$ staviti, potem je

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a^n} = \sqrt[\frac{1}{n}]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$$

Izrazi to jednačbo z besedami!

Kedar je m z n deljivo, moremo $p = n$ staviti in dobimo

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^1} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}$$

Izrazi to jednačbo z besedami!

Dokaži gornji izrek še na teh-le primerih:

$$\sqrt[3]{a^4}, \sqrt[9]{a^6}, \sqrt[r]{a^8}$$

Okrajšaj korene: $\sqrt[8]{a^6}$, $\sqrt[15]{a^{10}}$, $\sqrt[am]{x^{6m}}$.

Izvrši te-le naloge: $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[5]{x^{10}}$, $\sqrt[2m]{a^m}$, $\sqrt[3a]{x^{6a}}$.

Opomba. Številni obliki $\sqrt[n]{a^m}$ in $\sqrt[n]{a}$ tudi obdržimo, ako nij jedno izmed števil m in n mnogokratnik od drugega. $\sqrt[n]{a^m}$ potem le pomeni, da moramo število a z n potencovati in z m koreniti; $\sqrt[n]{a}$ pa, da imamo m ti koren števila a z n potencovati.

Kaj pomenijo ti-le izrazi: $a^{\frac{3}{4}}$, $9^{\frac{3}{2}}$, $125^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[2]{36}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[5]{a}$?
Izvrši kolikor mogoče.

Naloge.

- 1.) $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} = ?$ 2.) $7\sqrt[m]{x^n} - 3\sqrt[m]{x^n} = ?$
- 3.) $a + b\sqrt[m]{m} + c - d\sqrt[m]{m} = ?$
- 4.) $3\sqrt[3]{2} - 7\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{5} = ?$
- 5.) $3\sqrt[3]{a} - b\sqrt[3]{a} + m\sqrt[3]{a} + n\sqrt[3]{a} = ?$
- 6.) $5\sqrt[8]{a^3} + 2\sqrt[8]{a} - 3\sqrt[8]{a^3} = ?$
- 7.) $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b} = ?$
- 8.) $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = ?$ 9.) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{8} = ?$ 10.) $\sqrt[5]{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{5}} = ?$
- 11.) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = ?$ 12.) $\sqrt{\frac{a^b}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{a}} = ?$
- 13.) $\sqrt[4]{a^2b^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2} = ?$ 14.) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{a}} = ?$
- 15.) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{5} = ?$ 16.) $\sqrt[13]{13} \cdot \sqrt[13]{13} = ?$
- 17.) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} = ?$ 18.) $\sqrt[m]{a^{m-3}} \cdot \sqrt[m]{a^3} = ?$
- 19.) $\sqrt[36]{25} = ?$ 20.) $\sqrt[49]{64} = ?$ 21.) $\sqrt[a^2]{b^2} = ?$
- 22.) $\sqrt[a^2b^2]{b^2c^2} = ?$ 23.) $\sqrt[16]{9 \cdot 49} = ?$ 24.) $8 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 6} = ?$
- 25.) $\sqrt[a^3b]{b^2c^3} = ?$ 26.) $\sqrt[8]{27 \cdot 64} = ?$ 27.) $\sqrt[16]{16 \cdot 12 \cdot 9} = ?$
- 28.) $\sqrt[12]{12} : \sqrt[3]{3} = ?$ 29.) $\sqrt[304]{304} : \sqrt[19]{19} = ?$ 30.) $\sqrt[16]{16} : \sqrt[2]{2} = ?$

$$31.) \sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4} = ? \quad 32.) \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6}} + \frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{8}} + \frac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{2}} = ?$$

$$33.) \frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} - \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = ? \quad 34.) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = ?$$

$$35.) (8 - 3\sqrt{5})(7 + 2\sqrt{5}) = ? \quad 36.) (4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = ?$$

$$37.) (2\sqrt{3a} - \sqrt{3})(3\sqrt{3a} + \sqrt{3}) = ?$$

$$38.) (\sqrt[4]{3 \cdot 7} + \sqrt[4]{4 \cdot 3})(\sqrt[4]{2 \cdot 7} - \sqrt[4]{3 \cdot 3}) = ?$$

$$39.) (\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab} = ? \quad 40.) \sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt{a + b} = ?$$

$$41.) (\sqrt[3]{6})^3 = ? \quad 42.) (2\sqrt[3]{4})^3 = ? \quad 43.) (\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3})^2 = ?$$

$$44.) (2\sqrt{a^3} - 3\sqrt{b^3})^2 = ? \quad 45.) (a\sqrt{m^5} - b\sqrt{n^5})(a\sqrt{m^5} + b\sqrt{n^5}) = ?$$

$$46.) \sqrt[3]{a^3} = ? \quad 47.) \sqrt[3]{\frac{a}{b}x} = ? \quad 48.) \sqrt[6]{9} = ?$$

$$49.) \sqrt[9]{729} = ? \quad 50.) \sqrt[12]{16x^4} = ?$$

51.) Izpremeni korene $\sqrt[3]{5x^2}$, $\sqrt[5]{2y}$, $\sqrt[10]{3xy}$, v korene z enakimi eksponenti in množi jih potem.

52.) Deli korena $\sqrt[3]{12a^3x^5}$, $\sqrt[3]{6a^2x^4}$ izpremenivši jih v korena z enakima eksponentoma.

$$53.) \sqrt[6]{a^6} = ? \quad 54.) \sqrt[6]{a^3} = ? \quad 55.) \sqrt[8]{x^6} = ? \quad 56.) \sqrt[4]{x^4y^6} = ?$$

§. 114. Iz §. 104 sledi:

$$1.) \sqrt[3]{+a^2} = +a, \sqrt[3]{+a^3} = +a, \dots, \sqrt[m]{+a^m} = +a$$

Koren pozitivnega radikanda je pozitiven.

$$2.) \sqrt[4]{+a^2} = -a, \sqrt[4]{+a^5} = -a, \dots, \sqrt[m]{+a^{2m+1}} = -a$$

Pozitiven radikand s parnim eksponentom korenjen daje tudi negativen koren.

$$3.) \sqrt[3]{-a^3} = -a, \sqrt[5]{-a^5} = -a, \dots, \sqrt[m]{-a^{2m+1}} = -a.$$

Negativen radikand z neparnim eksponentom korenjen daje negativen koren.

Kaj dobiš, ako negativno število s parnim številom koreniš? N. pr. $\sqrt{-4} = ?$ Rešitev: Koren ni ne $+2$ in ne -2 , ker je $(+2)^2 = (-2)^2 = +4$; $\sqrt{-4}$ je neka nova številna oblika, **imaginarno** število imenovana.

Ravno tako so imaginarna števila: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, ... $\sqrt{-a}$ sploh parni koreni iz negativnih števil. $\sqrt{-1}$ pišejo tudi krajše z i .

Kvadratni korén posebnih števil.

§. 115. V §. 106 spoznali smo zakon, po katerem so številke danega števila sestavljene v njegovem kvadratu. Iz tega zakona pa moremo narobe dobiti pravilo za iskanje kvadratnega korena kakega števila. Ako n. pr. povzdignemo število 6837 na kvadrat, dobimo

$$\begin{array}{r}
 6837^2 = \\
 \begin{array}{r|l}
 6^2 \dots\dots\dots & 36 \\
 2 \times 8 \times 6 \dots\dots\dots & 96 \\
 8^2 \dots\dots\dots & 64 \\
 2 \times 3 \times 68 \dots\dots\dots & 408 \\
 3^2 \dots\dots\dots & 9 \\
 2 \times 7 \times 683 \dots\dots\dots & 9562 \\
 7^2 \dots\dots\dots & 49 \\
 \hline
 & 46744569
 \end{array}
 \end{array}$$

Ker iz prve korenove številke jedno ali dve številki v kvadratu dobimo, vsled vsake sledeče številke pa še po dve številki, ima kvadrat kakega števila ali dvakrat toliko številok kakor njegov koren ali pa jedno številko manj. Ako tedaj razdelimo kvadrat od desne proti levi v razrede po dve številki, dobimo jih toliko, kolikor ima koren številok. V prvem razredu na levi, ki more tudi imeti jedno samo številko, nahajamo kvadrat prve korenove številke; v vsakem sledečem pa: 1. dvojno sledečo številko pomnoženo s številom iz pred to številko v korenu stoječih številok. 2. kvadrat te številke, kjer dvojni produkt do prve številke v razredu seza.

Dela katerekoli korenove številke pa dajeta večkrat jednote, katere moramo v višji razred prištevati; posamezni razredi torej navadno némajo čistih del korenove številke, ampak so za nekoliko večji.

Iz vsega tega posnemamo to-le pravilo za iskanje kvadratnega korena kakega števila:

1. Dano število moraš razdeliti v razrede po dve številki od desne proti levi; prvi razred more imeti tudi le jedno številko.

2. Iz vsakega razreda dobiš po jedno korenovo številko in sicer tako-le:

- a) Poišči največje število, katerega kvadrat še ne preseza števila v prvem razredu; to število povzdigni na kvadrat, da ga odšteješ od prvega razreda. — (Zakaj moraš odštevati od prvega razreda kvadrat prve korenove številke?)
- b) Sledeče številke kvadratnega korena dobiš z deljenjem. Pripiši namreč k ostanku sledeči razred; to število je dividend, izvzemši zadnjo številko; divizor je dvojni dobljeni del korena; kvocijent tega deljenja pa nova številka korena. — (Zakaj izpuščaš najnižjo številko pristavljenega razreda? Zakaj moraš deliti z dvojnimi dobljenim delom korena, da dobiš novo korenovo številko?)
- c) Pod dividend podpiši dvojno število, stoječe v korenu pred dobljeno številko (t. j. divizor) množeno z novo številko in pod ta produkt samo za jedno stopinjo proti desnej kvadrat te številke; vsoto obeh teh delov odštevaj od števila stoječega nad njima; to se pa zgodi ob jednem s tem, ako pripišeš divizorju dobljeno številko, in tako dobljeno število množiš z novo korenovo številko in produkt odštevaš od vsega števila (iz ostanka in pripisanega razreda). — (Zakaj moraš odštevati od števila iz ostanka in pripisanega razreda omenjeno vsoto?)
- d) K ostanku pripiši sledeči razred in ponavljaj tako računanje toliko časa, dokler nimaš nobednega razreda več, da bi ga k ostanku pripisal.

Tako dobimo n. pr. drugi koren števila 46744569.

$$\begin{array}{r} \sqrt{46|74|45|69} = 6837 \\ 107,4 : 12_8 \times 8 \\ 5045 : 136_3 \times 3 \\ 95669 : 1366_7 \times 7 \\ \emptyset \end{array}$$

Išči še drugi koren teh-le števil in odgovori na primernem kraju na vprašanja, kakoršna imaš napisana pri raznih točkah pravila: 70157376, 36216324, 37636, 5890329.

Iskanje kvadratnega korena iz decimalnih ulomkov.

§. 116. Naloga. Išči drugi koren decimalnega ulomka 1.53760.

$$\sqrt{1.5376} = \sqrt{\frac{15376}{10000}} = \frac{\sqrt{15376}}{\sqrt{10000}} = \frac{124}{100} = 1.24$$

ali krajše: $\sqrt{1.53|76} = 1.24$

$$\begin{array}{r} 5,3 : 2_2 \times 2 \\ 976 : 24_4 \times 4 \\ \emptyset \end{array}$$

Išči še drugi koren števil: 5.76, 10.7534, 2.362369 po daljšej in krajšej poti.

Iz takih primerov spoznavamo, da korenimo decimalne ulomke ravno tako, kakor cela števila; zapomniti si pa moramo, da delimo v razrede po dve številki od decimalne točke proti desnej in proti levej. Decimalno točko v korenu takrat postavljamo, kedar pridemo do prvega razreda iz decimalk.

Kako navadne ulomke korenimo, nam je znano iz §. 110.

§. 117. Kvadratna števila od

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ so} \\ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. \end{array}$$

Števila, katera ne nahajamo v drugej številnej vrsti, kakor n. pr. 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 i. t. d. niso kvadratna števila. Njihovih korenov ne moremo izraževati ni s celimi števili, ni z ulomki, ni z mešanimi števili, ker je kvadrat ulomka spet ulomek in kvadrat mešanega števila spet mešano število. Koreni takih števil so neizračunljivi (iracijonalni). Koreni pa, katere moremo izraževati ali s celimi števili, ali z ulomki ali z mešanimi števili, so izračunljivi (racijonalni) koreni. Izračunljivi koreni so n. pr. $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{25}{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Imamo torej mnogo števil, za katere ne moremo dobiti natančno drugega korena. Mogoče je pa koren iz takega števila tako natančno izračunjati, kakor ga le hočemo, ker moremo številu kolikorkoli ničel za decimalke tako pripisavati, da ga s tem nič ne izpreminjamo, ter dobiti v korenu poljubno mnogo decimalk. — Neizračunljivi koren si moremo misliti kot število, ki ima brezkončno mnogo decimalk. N. pr. $\sqrt{5} = \sqrt{5.00} = \sqrt{5.0000} = \sqrt{5.000000} \text{ i. t. d.}$

Koreni 3.41

$$\sqrt{3.41} = 1.84661...$$

$$24,1 : 2_8$$

$$170,0 : 36_4$$

$$2440,0 : 368_6$$

$$22840,0 : 3692_6$$

$$684400 : 36932_1$$

$$315079 \text{ i. t. d.}$$

§. 118. Neizračunljivi koreni imajo brezkončno mnogo decimal. Zadosti jih pa po navadi uže malo število in tak račun moremo jako okrajšati s tem, da določimo v korenu polovico številke in še jedno na navadni način, ostale številke pa z okrajšanim deljenjem. Divizor za okrajšano deljenje je dvojno število iz številke, katere so uže v korenu izračunane. Določimo n. pr. drugi koren števila 3.41 s štirimi decimalkami.

$$\sqrt{3.41} = 1.8466$$

$$241 : 2_s$$

$$170,0 : 36_4$$

$$244 : 3,6,8$$

$$23$$

$$1$$

kjer smo prve 3 številke na navadni način in zadnji dve z okrajšanim deljenjem določili.

Vaje.

- 1.) $\sqrt{5329} = ?$ 2.) $\sqrt{1.7956} = ?$ 3.) $\sqrt{16777216} = ?$
4.) $\sqrt{2502.400576} = ?$ 5.) $\sqrt{0.0576} = ?$ 6.) $\sqrt{0.00283024} = ?$

Pri vajah 1.), 2.), 3.), 4.), 5.) in 6.) določi pred korenjenjem število korenovih številke.

- 7.) $\sqrt{\frac{1\frac{3}{5}\frac{1}{4}}{7\frac{1}{4}}} = ?$ 8.) $\sqrt{\frac{1\frac{4}{5}\frac{4}{9}}{5\frac{2}{5}}} = ?$ 9.) $\sqrt{\frac{1\frac{6}{5}\frac{3}{8}}{2\frac{5}{8}}} = ?$
10.) $\sqrt{5\frac{4}{9}} = ?$ 11.) $\sqrt{7\frac{2}{5}\frac{1}{5}} = ?$ 12.) $\sqrt{153\frac{9}{4}} = ?$
13.) $\sqrt{3} = ?$ (na 4 decim.) 14.) $\sqrt{435} = ?$ (na 3 decim.)
15.) $\sqrt{0.83} = ?$ (na 5 decim.) 16.) $\sqrt{6.375} = ?$ (na 4 decim.)
17.) $\sqrt{1\frac{2}{3}\frac{7}{2}} = ?$ 18.) $\sqrt{\frac{2}{4}\frac{3}{5}} = ?$ 19.) $\sqrt{30\frac{2}{3}} = ?$
20.) $\sqrt{15.2379} = ?$
21.) Kolika je hipotenuza pravokotnega trikotnika, v katerem je jedna kateta 165 m , druga pa 52 m dolga?
22.) Tetiva nekega kroga je 42 cm dolga in je od središča za 20 cm oddaljena; kolik je polomer tega kroga?
23.) Kako dolga je dijagonala kvadrata, ki ima 100 m dolgo stran?
24.) V pravokotnem trikotu je hipotenuza $= 37 \text{ m}$, jedna kateta $= 25 \text{ m}$; kako dolga je druga kateta?
25.) Za koliko je oddaljena 3.74 m dolga tetiva od središča kroga, ki ima za polomer 2.05 m ?
26.) Dijagonala pravokotnika je 169 m dolga; kako dolg je pravokotnik, ako je 119 m širok?
27.) Kolika je stran kvadrata, ki je ravno tolik, kakor pravokotnik s 544 m dolgo podložnico in s 306 m dolgo višočico?
28.) Kvadratni prostor je pokrit z 2304 enakimi kvadratnimi ploščami; koliko plošč je na vsakej strani?

29.) Rob neke kocke je $1\ m$ dolg; kolika je dijagonala med dvema nasprotnima ogloma?

30.) Kolik je polomer kroga, ki ima za ploščino $1\ \square\ m^2$?

31.) Ako je radij kroga $1\ m$ dolg, je obseg
vpisanega pravilnega deseterokota $= 5(\sqrt{5} - 1)$ metrov
opisanega " " $= 4\sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})}$ 5 "
vpisanega " peterokota $= 5\sqrt{5(5 - \sqrt{5})\frac{1}{2}}$ "
opisanega " " $= 10\sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})}$ "
in ploščina teh mnogokotov oziroma

$$\frac{5}{4}\sqrt{5(5 - \sqrt{5})} \text{ kvadratnih metrov}$$

$$2\sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})} \text{ 5 " "}$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{5(5 + \sqrt{5})\frac{1}{2}} \text{ " "}$$

$$5\sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})} \text{ " "}$$

izračunaj navedene veljave na 5 decimalk.

32.) Ako sta krogu s polomerom r vpisana pravilen n -kot in pravilen $2n$ -kot, oni se stranjo S , ta se stranjo s , potem je
 $s = \sqrt{[2r - \sqrt{4r^2 - S^2}]}r$;

iz tega izračunaj stran vpisanega pravilnega dvanajstero-kota, ako je polomer $r = 1$.

33.) Kolik je polomer kroglje s površjem $1\ \square\ m^2$?

34.) Kolik je polomer krožnine, katera je dvakrat večja od krož-nine s polomerom $r = 1\ m$?

35.) Načrtaj ta-le iracionalna števila: $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{2}m^2$.

Rešitev: (Glej §. 59, nalogo s.)

Kubični koren posebnih števil.

§. 119. V §. 107 spoznali smo zakon, po katerem so se-stavljene številke danega števila v njegovem kubusu. Iz tega zakona pa moremo narobe dobiti pravilo za iskanje tretjega ko-rena kakega števila. Ako n. pr. povzdignemo število 6487 na kubus, dobimo

$$5487^3 =$$

$5^3 \dots \dots \dots$	125			
$3 \times 5^2 \times 4 \dots \dots \dots$	30	0		
$3 \times 5 \times 4^2 \dots \dots \dots$	2	40		
$4^3 \dots \dots \dots$			64	
$3 \times 54^2 \times 8 \dots \dots \dots$	6	998	4	
$3 \times 54 \times 8^2 \dots \dots \dots$		103	68	
$8^3 \dots \dots \dots$			512	
$3 \times 584^2 \times 7 \dots \dots \dots$	630	638	4	
$3 \times 584 \times 7^2 \dots \dots \dots$		805	56	
$7^3 \dots \dots \dots$			343	
165 198 036 303				

Ker dobimo iz prve korenove številke jedno ali dve ali tri številke v kubusu (glej §. 104), vsled vsake sledeče številke pa še po tri številke, ima kubus kakega števila ali trikrat toliko števil, kakor njegov kubični koren ali pa dve ali pa jedno številko manj. Ako tedaj razdelimo kubus od desne proti levi v razrede po tri številke, dobimo toliko razredov, kolikor ima koren števil. V prvem razredu na levi, ki more tudi imeti le dve ali tudi jedno samo številko, nahajamo kubus prve korenove številke; v vsakem sledečem razredu pa trojni kvadrat pred sledečo številko v korenu stoječega števila pomnožen s številko, trojno pred številko v korenu stoječe število pomnoženo s kvadratom številke in kubus te številke; prvi omenjeni del seže do predzadnje številke, drugi do zadnje in kubus do konca razreda.

Deli katerekoli korenove številke pa dajo večkrat jednote, katere moramo prišteti v višji razred; posamezni razredi torej némajo navadno čistih delov korenove številke, ampak so za nekoliko večji.

Iz vsega tega posnemamo to-le pravilo za iskanje tretjega korena kakega števila:

1. Razdeli dano število od desne proti levi v razrede po 3 številke; kolikor razredov ima število, toliko števil ima koren.

2. Iz vsakega razreda dobiš po jedno korenovo številko in sicer tako-le:

a) Poišči največjo številko, katere kubus še ne preseza števila v prvem razredu, ona je prva korenova številka; kubus te številke odštevaj od prvega razreda.

(Zakaj moraš odšteti od prvega razreda kubus prve korenove številke?)

b) K ostanku pripiši sledeči razred — (kaj dobiš s tem?), odreži prve dve številki na desni in deli število iz ostalih števil s trojnim kvadratom dobljenega korenovega dela, kvocijent daje drugi del korena, ter ga pripiši k že dobljenemu.

(Zakaj izpuščaš najnižji dve številki pristavljenega razreda, da dobiš dividend? Zakaj moraš deliti s trojnim kvadratom dobljenega korenovega dela, da dobiš novo korenovo številko?)

c) Potem naredi te-le produkte:

α) Množi z dobljeno korenovo številko rabljeni divizor, produkt pa piši pod dividend, preziraje odrezani številki.

β) Množi trojni prvi del korena s kvadratom dobljenega družega dela korena in piši ta produkt pod prvega tako, da stoji za jedno mesto bolj proti desnej od prvega.

γ) Naredi kubus dobljene korenove številke in ga piši tako pod prejšnji produkt, da stoji za jedno mesto bolj proti desnej od prejšnjega produkta. Vsoto vseh teh treh delov odštevej od števila nad njimi stoječega.

(Zakaj moraš te tri dele na omenjeni način pisati? Zakaj moraš odštevati njihovo vsoto od števila iz ostanka in pripisane razreda?)

d) Dobljene korenove številke si misli kot jeden del korena in ponavljaj tako vršitev, kakor je zahtevana v točkah b) in c), dokler nimaš nobednega razreda več, da bi ga pripisal k ostanku.

e) Ako je dividend manjši od divizorja, pripiši v korenu ničlo kot kvocijent in dividendu pa sledeči razred. — (Zakaj?)

Vaje.

1.) Povzdigni števila 53, 72, 406, 7802 na kubus in poišči tretji koren iz dobljenih potenc; a opravičuj računanje s potoma.

$$2.) \sqrt[3]{2048383} = ? \quad 3.) \sqrt[3]{132651} = ? \quad 4.) \sqrt[3]{21952} = ?$$

Iskanje tretjega korena iz decimalnih ulomkov.

§. 120. Naloga. Išči tretji koren iz $91 \cdot 125$.

$$\sqrt[3]{91 \cdot 125} = \sqrt[3]{\frac{91125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{91125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{45}{10} = 4.5$$

ali krajše $\sqrt[3]{91 \cdot 125} = 4.5$

$$\begin{array}{r} 271 \overline{) 271.25} : 48 \\ 240 \\ \hline 300 \\ 125 \\ \hline 0 \end{array}$$

Išči še tretji koren števil $10 \cdot 360232$, $17 \cdot 576$, $0 \cdot 132651$, $0 \cdot 014348907$ po daljšej in krajšej poti.

Iz takih primerov vidimo, da korenimo decimalne ulomke ravno tako, kakor cela števila; zapomniti si pa moramo, da delimo v razrede po tri številke od decimalne točke proti desnej in proti levej. Decimalno točko v korenu takrat postavimo, kedar pridemo do prvega razreda iz decimalk.

Kako navadne ulomke korenimo, nam je znano iz §. 110.

§. 121. Kubična števila od

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

V drugej vrsti ne nahajamo gotovih števil, kakor n. pr. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i. t. d.; ta števila niso kubična. Njihovih korenov ne moremo izraževati ni s celimi števili, ni z ulomki, ni z mešanimi števili, ker je tudi kubus ulomka ali mešanega števila spet ulomek ali mešano število. Tudi te vrste koreni so neizračunljivi (primerjaj §. 113), vendar pa koren iz takega števila z decimalnim ulomkom tako blizo lahko izrazimo, kakor ga le hočemo.

Poišči n. pr. tretji koren števila 139.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{139} = \sqrt[3]{139 \cdot 1000 | 000 | 000 \dots} = 5 \cdot 17 \dots \\ \quad \quad \quad 140,00 : 75 \\ \quad \quad \quad 75 \\ \quad \quad \quad 15 \\ \quad \quad \quad 1 \\ \hline \quad \quad 63490,00 : 7803 \\ \quad \quad 54621 \\ \quad \quad \quad 7497 \\ \quad \quad \quad 343 \\ \hline \quad 811587000 : 801867 \\ \quad \quad \quad \text{i. t. d.} \end{array}$$

Na tem primeru vidimo, da postane računanje zmerom bolj nespretno, kolikor več števil v korenu dobiti hočemo; pa tudi tukaj moremo račun priprostejši narediti, ako prve številke korena iščemo na navadni način, druge pa z okrajšanim deljenjem. Ko bi hoteli n. pr. koren prejšnjega primera s 5 decimalkami izraziti, morali bi tam, kjer smo prenehali račun, tako-le nadaljevati:

$$\begin{array}{r} 811,587 : 8,01867 = 101 \\ 9 \\ 1 \end{array}$$

Ako oba ta dva računa združimo, dobimo približavno

$$\sqrt[3]{139} = 5 \cdot 17101 \dots$$

Vaje.

- 1.) $\sqrt[3]{1367631} = ?$ 2.) $\sqrt[3]{1144445336} = ?$
- 3.) $\sqrt[3]{2720547136} = ?$ 4.) $\sqrt[3]{1 \cdot 036433728} = ?$
- 5.) $\sqrt[3]{65110 \cdot 360167} = ?$ — Določi v primerih 1.), 2.), 3.), 4.), 5.) pred korenjenjem, koliko številk ima koren.
- 6.) $\sqrt[3]{\frac{4879}{8000}} = ?$ 7.) $\sqrt[3]{\frac{1331}{29791}} = ?$ 8.) $\sqrt[3]{5 \cdot 8} = ?$ (na 4 decim.)
- 9.) $\sqrt[3]{99} = ?$ (na 3 decim.) 10.) $\sqrt[3]{102 \cdot 875} = ?$ (na 4 decim.)
- 11.) $\sqrt[3]{0 \cdot 125} = ?$ (na 4 decim.) 12.) $\sqrt[3]{3\frac{1}{4}} = ?$ 13.) $\sqrt[3]{\frac{19}{40}} = ?$
- 14.) $\sqrt[3]{15\frac{2}{3}} = ?$ 15.) Kolik je rob kocke s telesnino $13 \cdot 824$ kub m ?
- 16.) Kolik je rob kocke, katera ima telesnino dvakrat toliko, kolikoršna kocka z robom 1 m ?
- 17.) Izračuni radij krogle, ki ima za telesnino 1 kub. m .
- 18.) Izračuni neznana člena te-le razmere: $288 : x^2 = x : 48$.
- 19.) Jedna kocka je 3 m druga pa 5 m visoka; kako visoka je kocka, ki ima toliko telesnino, kolikoršna obe dani kocki skupaj?
- 20.) Ako zmanjšaš 7 m visoko kocko za 6 m visoko kocko in ostanek spet v kocko izpremeniš, kako visoka je nova kocka?
- 21.) Ako zaznačimo površje krogle s p in telesnino s t , potem je $p = \sqrt[3]{36 \cdot t^2 \cdot \pi}$; koliko je površje krogle s telesnino 10 kub. m ?
- 22.) Kolik je radij krogle, katera je ravno toliko, kolikoršna krogla s $\frac{1}{2} m$ in še druga krogla s $\frac{1}{4} m$ dolgim radijem?
- 22.) Kako visoka je kocka, katera je ravno toliko, kakor krogla s premerom 1 m ?

C. O logaritmih.

§. 122. Iz nakazane potence a^m dobimo število 6, tako da je

$$a^m = b \text{ (glej §. 38.)};$$

in narobe sledi iz tega

$$a = \sqrt[m]{b} \text{ (glej §. 108.)}$$

V prvem slučaju določita potenco b koren a in eksponent m , v drugem je izražen koren a s številom b in eksponentom m . Razven teh dveh slučajev imamo še tretjega, v katerem govorimo o odvisnosti eksponenta m od števil a in b ; eksponent m imenujemo **logaritem logaritmanda** ali na kratko **števila b za podlago a** ali **osnovno število a** ; to napišemo $m = \log_a b$ ali tudi priprav-

neje $m = \log b$, kedar imamo zmerom jedno in isto podlago na mislih. —

Imenuj logaritem, logaritmand in podlago v izrazih: $3^4 = 81$, $5^3 = 125$, $10^5 = 100000$, $10^m = c$, $b^n = d$.

§. 123. Ako povzdignemo zaporedoma na 0, 1, 2, 3, 4, ... mto potenco

število

1	dobimo	$1^0 = 1$, $1^1 = 1$, $1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $1^4 = 1$, ... $1^m = 1$
2	„	$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, ... $2^m = \check{2}_m$
3	„	$3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, ... $3^m = \check{3}_m$
4	„	$4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, ... $4^m = \check{4}_m$

.....
 p „ $p^0 = 1$, $p^1 = p$, $p^m = \check{p}_m$

ker si moremo misliti tudi števila ležeča med števili 1, 2, 4, 8, 16, i. t. d. kot potence števila 2, ravno tako tudi števila ležeča med 1, 3, 9, 27, 81 i. t. d. kot potence števila 3 i. t. d., je jasno, da moremo dobiti logaritme teh števil za podlago 2 oziroma podlago 3 i. t. d. Ako izračunimo logaritme vseh števil zaporedoma, kakor jih nahajamo v naravni številni vrsti, za jedno in isto podlago, t. j. ako določimo, kolika potenca omenjene podlage je vsako teh števil, dobimo **logaritemsko sestavo**.

Ker ne moremo dobiti s potencovanjem negativnega števila vsako pozitivno število in ker je vsaka potenca od 1 spet 1, moremo za podlago logaritemске sestave samo pozitivno število vzeti, ki je različno od števila 1. Večidel se poslužujemo navadne ali **Briggove** logaritemске sestave, katera ima za podlago število 10. Za višo analizo je posebno važna **naravna** ali **Neperjeva** logaritemska sestava s podlago $2.78182818 \dots$ iracionalno število navadno zaznačeno s črko e .

Naravnost razvidamo iz gornjih potenc števil 1, 2, 3, 4, ... p te le izreke:

1. Logaritem števila 1 je za vsako podlago jednak 0.
2. Logaritem katerekoli podlage je enak 1.
3. Logaritem je večji, ako je število večje.
4. Logaritmi raznih podlag za jedno in isto število so različni.

§. 124. a) Logaritem produkta je jednak vsoti iz logaritmov faktorjev.

$$\log (a.b) = \log a + \log b$$

Dokaz. Naj je za podlago p

$$\log a = \alpha, \log b = \beta \text{ tedaj}$$

$$a = p^\alpha, b = p^\beta, \text{ potem je}$$

$$ab = p^{\alpha + \beta} \text{ t. j.}$$

$$\log (ab) = \alpha + \beta \text{ ali}$$

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Dokaži to še za te-le produkte z ozirom na podlago 10:

$$10.100, 100.1000, 10.1000, 2.3, 5.7, a.b.$$

b) Logaritem kvocijenta (ulomka) je jednak diferenci iz logaritmov dividenda in divizorja (števeca in imeniveca).

$$\log. \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Dokaz. Naj je za podlago p

$$\log a = \alpha, \log b = \beta \text{ tedaj}$$

$$a = p^\alpha, b = p^\beta, \text{ potem je}$$

$$\frac{a}{b} = p^{\alpha - \beta} \text{ t. j.}$$

$$\log \frac{a}{b} = \alpha - \beta$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Dokaži to še za te-le kvocijente z ozirom na podlago 10:

$$\frac{100}{10}, \frac{1000}{100}, \frac{10000}{1000}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{m}{n}.$$

c) Logaritem potence je jednak logaritmu podlage pomnoženemu s potenčnim eksponentom.

$$\log a^m = m \log a$$

Dokaz. Naj je za podlago p

$$\log a = \alpha \text{ ter tudi}$$

$$a = p^\alpha, \text{ potem je}$$

$$a^m = p^{\alpha m}, \text{ t. j.}$$

$$\log a^m = \alpha . m \text{ ali}$$

$$\log a^m = m \log a.$$

Dokaži to še za te-le potence z ozirom na podlago 10: $3^5, 5^7, 32^4, a^m$.

d) Logaritem korena je jednak logaritmu radikanda deljenemu s korenovim eksponentom.

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}$$

Dokaz. Po prejšnjem je

$$\log b^m = m \log b \text{ ter tudi}$$

$$\log b = \frac{\log b^m}{m},$$

ako je $b^m = a$, torej $b = \sqrt[m]{a}$, potem je

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}$$

Dokaži to še za te-le korene z ozirom na podlago 10:
 $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[5]{100000}$, $\sqrt[n]{b}$.

Vaje.

- 1.) $\log 5mng = ?$ 2.) $\log 8xyz = ?$ 3.) $\log b(c + d) = ?$
- 4.) $\log a(x^2 - 1) = ?$ 5.) $\log \frac{2ab}{3x} = ?$ 6.) $\log \frac{1}{ab} = ?$
- 7.) $\log \frac{3x-2y}{2a+3b} = ?$ 8.) $\log \frac{a^2-b^2}{2ab} = ?$ 9.) $\log \frac{5mx}{1-m^2} = ?$
- 10.) $\log 2a^3 = ?$ 11.) $\log 5a^2x^3 = ?$ 12.) $\frac{5^5 \cdot a^3}{26^4} = ?$
- 13.) $\log \frac{2a^3}{3bx^2} = ?$ 14.) $\log \frac{8mn^2x^3}{9pgy^5} = ?$
- 15.) $\log \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n} \right)^3 \right] = ?$ 16.) $\log \frac{1}{(2a^2)^3 (5b^3)^2} = ?$
- 17.) $\log \sqrt{x^2 \cdot a^3} = ?$ 18.) $\sqrt{\frac{a^5}{b^4}} = ?$ 19.) $\log \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}} = ?$
- 20.) $\log \sqrt[3]{x^7} \sqrt[8]{y^3} = ?$ 21.) $\sqrt[n]{a^2b^2c^2} = ?$
- 22.) $\log m \sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}} = ?$ 23.) $\log \frac{1}{a^2 \sqrt[5]{a^3c}} = ?$
- 24.) $\sqrt{\frac{3^4 \cdot \sqrt{17 \cdot 13}}{7 \cdot 14^2 \cdot \sqrt[3]{69}}} = ?$

O Briggovih logaritmih.

§. 125. Po Briggovej logaritemskeji sestavi (podlaga 10) je

0	logaritem	od 1
1	„	10
2	„	100
3	„	1000
4	„	10000
	i. t. d.	

Logaritmi celih potenc števila 10 so cela števila ter racionalni. Njim nasproti pa stojé iracionalni logaritmi vseh števil ležečih med 1, 10, 100, 1000, 10000 i. t. d.

Ker je logaritem večjega števila večji, je n. pr. logaritem števil med 1 in 10 večji od 0 in manjši od 1, tedaj ulomek, ki je toliko večji, kolikor bolj se bliža logaritmand številu 10. Števila med 10 in 100 imajo logaritem, ki je za neki ulomek večji od 1 in večji za večje število. Logaritem vseh števil med 100 in 1000 je 2 in še neki ulomek, ki raste s temi števili i. t. d. Tako je n. pr.

$$\log 101 = 2.004321$$

$$\log 108 = 2.033424$$

$$\log 491 = 2.691081$$

$$\log 899 = 2.953760$$

i. t. d.

Iz teh primerov ob jednom spoznaš, da logaritme z decimalnimi ulomki izražujemo, in sicer sè 7 (glej Vegove logaritme) ali tudi s 6 decimalkami (glej Močnikove logaritme leta 1858) ali pa tudi še z manjšim številom decimalk (Adamovi logaritmi s 5 decimalkami). Vsak iracionalen logaritem obstoji iz dveh delov. Ta dva sta: a) cele, katere imenujemo tudi značajko ali karakteristiko; b) decimalke, katere imenujemo pridavek, mantiso.

Tako je n. pr. v $\log 491 = 2.691081$ število 2 karakteristika in decimalke 691081 mantisa.

Karakteristika odvisi od mesta decimalne točke v številu. Ako ima n. pr. število v celih 4 številke, je karakteristika $= 4 - 1 = 3$. Cele s petimi zahtevajo $5 - 1 = 4$ za karakteristiko njihovega logaritma. Sploh je karakteristika $n - 1$, ako ima število v celih n številk.

Decimalke števila ne določujejo čisto nič karakteristike logaritma. V logaritmovniku, kjer so sestavljeni logaritmi števil, je navedena samo mantisa logaritmov, ker karakteristiko tako kar naravnost iz množine števil v celih določiti moremo, kakor vemo iz prejšnjega.

§. 126. Izračunjanje logaritmov je jako težavno posebno, ako jih hočemo dobiti po elementarnej poti. Brigg je izračunil logaritem kakega števila s tem, da ga je oklepil v zmerom ožje meje. Ako imamo n. pr. logaritem števila 2 izračuniti, delamo tako-le:

2 leži med 1 in 10

$$\log 2 \text{ „ „ } \log 1 = 0 \text{ in } \log 10 = 1$$

Razlika med veljavama mej: $1 - 0 = 1$.

$$\sqrt[10]{1.10} = 3.16227766 = a, \log a = \frac{1}{10} (\log 1 + \log 10) = 0.5$$

2 leži med 1 in a

$$\log 2 \text{ „ „ } \log 1 = 0 \text{ in } \log a = 0.5$$

Razlika med vrednostima mej: $0.5 - 0 = 0.5$

$$\sqrt{1.a} = 1.77827 = b, \log b = \frac{1}{2} (\log 1 + \log a) = 0.25$$

2 leži med b in a

$$\log 2 \text{ „ „ } \log b = 0.25 \text{ in } \log a = 0.5$$

Razlika med mejnima vrednostima $0.5 - 0.25 = 0.25$. Razvidno je, da se meji logaritmanda 2 zmerom bolj bližati jedna drugej. Z nadaljevano vršitvijo dobimo:

$$\sqrt{b.a} = 2.37137 = c, \log c = \frac{1}{2} (\log b + \log a) = 0.375$$

$$\sqrt{b.c} = 2.05352 = d, \log d = \frac{1}{2} (\log b + \log c) = 0.3125$$

$$\sqrt{b.d} = 1.91095 = f, \log f = \frac{1}{2} (\log b + \log d) = 0.28125$$

$$\sqrt{f.d} = 1.98095 = g, \log g = \frac{1}{2} (\log f + \log d) = 0.296875$$

$$\sqrt{g.d} = 2.01691 = h, \log h = \frac{1}{2} (\log g + \log d) = 0.3046875$$

$$\sqrt{g.h} = 1.99885 = i, \log i = \frac{1}{2} (\log g + \log h) = 0.3007812$$

$$\sqrt{h.i} = 2.00786 = k, \log k = \frac{1}{2} (\log h + \log i) = 0.3027343$$

$$\sqrt{k.i} = 2.00335 = l, \log l = \frac{1}{2} (\log k + \log i) = 0.3017577$$

$$\sqrt{i.l} = 2.0011 = m, \log m = \frac{1}{2} (\log i + \log l) = 0.3012695$$

$$\sqrt{i.m} = 1.999977 = n, \log n = \frac{1}{2} (\log i + \log m) = 0.3010253$$

Tukaj moremo prenehati in namesto 1.999977 vzeti število 2 in namesto 0.3010253 logaritem 0.30103, kar nam dá

$$\log 2 = 0.30103$$

Kako moremo logaritme še na drug način izračuniti, o tem v tej knjigi ne moremo govoriti. Ko izračunamo mantise logaritmov vseh števil od 1 do 10000 ali od 1 do 100000, jih sestavimo v posebnih tabelah, katero imenujemo logaritmovnik; ta sestava je taka (glej Močnikove logaritme leta 1858 stran 7):

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
367	564666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
368	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
369	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257	117
371	9374	9491	9608	9725	9842	9959	1.0076	1.0193	1.0309	1.0426	117
372	570543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592	117
373	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

Iskanje logaritma za dano število.

§. 127. a) V logaritmovniku navadno nahajamo mantise logaritmov za štiridevilkasta števila (v našem načrtu od 3670 do 3739), in sicer dobimo prve tri številke takega števila v razredku Z, četrto številko pa v najgornjej ali pa v najdolnjeji z 0, 1, 2 ... 9 zaznačenjej povprečenjej vrsti. Zadnje 4 decimalke dotične mantise nahajamo v razredku 4. številke danega števila in sicer v ravno istej vrsti, v katerej nahajamo prve 3 številke, prvi dve decimalki moramo pa iskati od začetka vrste v razredku 0, ali če je tam prazen prostor, bolj zgoraj, ali tudi bolj zdolaj od začetka najbližnje popolne vrste, in sicer na zadnji način, ako nahajaš točko pred štirimi števkami mantise. Tako n. pr. dobimo za 3694 mantiso 567497, torej $\log 3694 = 3.567497$ in za logaritem števila 3717 mantiso 570193 torej $\log 3717 = 3.570193$. Poišči logaritme števil 3679, 3693, 3712, 3738.

Z logaritmi za štiridevilkasta cela števila dobimo tudi uže logaritme vseh onih, katera sledé iz množenja ali deljenja štiridevilkastih števil z 10 ali potencami števila 10. Ako imamo n. pr. poiskati logaritem 36940, vemo da je $\log 36940 = \log 3694 + \log 10 = 3.567497 + 1 = 4.567497$. Ravno tako je $\log 371700 = \log 3717 + \log 100 = 3.570193 + 2 = 5.570193$. Iz logaritma za število 3694 pa dobimo tudi na jedenkrat logaritme števil 369.4 , 36.94 , 3.694 , 0.3694 , 0.03694 , 0.003694 i. t. d. Ker je namreč $369.4 = \frac{3694}{10}$, $36.94 = \frac{3694}{100}$, $3.694 = \frac{3694}{1000}$ i. t. d. moramo od logaritma števila 3694 zaporedoma 1, 2, 3, 4, 5 i. t. d. odštevati.

Potem je :

$$\log 3694 = 3.567497$$

$$\log 369.4 = 3.567497 - 1 = 2.567497$$

$$\log 36.94 = 3.567497 - 2 = 1.567497$$

$$\log 3.694 = 3.567497 - 3 = 0.567497$$

$$\log 0.3694 = 3.567497 - 4 = 0.567497 - 1$$

$$\log 0.03694 = 3.567497 - 5 = 0.567497 - 2$$

$$\log 0.003694 = 3.567497 - 6 = 0.567497 - 3$$

V zadnjih treh slučajih samo toliko odštevamo, kolikor imamo celih v log 2694, drugo odštevanje pa le nakazujemo, da se ogibamo negativnim logaritmom. S tem dobivamo logaritme z negativno karakteristiko. Logaritem pravega ulomka je zmerom negativen. Iz prejšnjega je torej razvidno :

Mantisa ne odvisi od kraja decimalne točke, ampak samo od številke števila, t. j. logaritmi vseh števil, katera obstojé iz istih števil v istem redu pisanih, imajo isto mantiso, naj so

cela števila ali decimalni ulomki, naj je decimalna točka na kateremkoli mestu in naj stojé še ničle pred temi števkami ali za njimi.

b) Ako ima število, za katero moremo iskati logaritem, manj nego 4 številke, si mislimo še toliko ničel pripisanih, da dobimo štirištevkasto število. Tako je mantisa števila 369 jednaka mantisi števila 3690.

c) Ako ima število, za katero iščemo logaritem, več nego 4 številke, n. pr. število 3688·527, poišči v logaritmovniku mantiso za najvišje 4 številke, za sledeče številke pa išči popravo, katero prišteješ k dobljeni mantisi. Popravo pa dobiš tako-le. Najpred išči diferenco med mantiso za 4 najvišje številke in med sledečo mantiso, torej v našem primeru diferenco med mantisama za števili 3688 in 3689; s tem pozveš, da je mantisa števila 3689 od mantise števila 3688 za 118 večja. Naše število pa nij večje za 1 jedinico od števila 3688 ampak za 0·527, torej njegova mantisa za $118 \times 0·527 = 62·186$ večja od mantise za število 3688. Da torej popravo dobiš, moraš omenjeno diferenco množiti z ostalimi številkami števila vzete kot decimalke; cele dobljenega produkta so poprava, katero moraš prišteti k mantisi najvišjih števk. Diferenco mantis dobiš večjidel uže izračunljano v razredku *D* in sicer v vrsti mantis. — Poišči n. pr. logaritem števila 37135·26; za število 3713 dobiš mantiso 569725 in diferenco 117; ker je pa $0·526 \times 117 = 61·542$ je

mantisa za 3713.....	569725
poprava za številke 526.....	62
torej mantisa za 37135·26....	569787;

karakteristika je 4, ker imajo cele 5 števk, tedaj je

$$\log 37135·26 = 4·569787.$$

Iskanje števila danega logaritma.

§. 128. Iskanje števila danega logaritma nakazujemo s tem, da stavimo pred logaritem num. log. (numerus logarithmus.)

Število dobiš, ako poiščeš v logaritmovniku mantiso danega logaritma in k mantisi dotično štirištevkasto število; za cele vzemi jedno številko več, nego karakteristika veli.

Mogoča sta pa dva slučaja:

1. Ali nahajaš mantiso danega logaritma natančno v logaritmovniku; potem tudi dobiš naravnost iz logaritmovnika število danega logaritma.

2. Ali pa ne nahajaš mantise danega logaritma natančno v logaritmovniku, kar je navadno; potem pa poišči mantiso v logaritmovniku, ki je za najmanj manjša od dane mantise; v dotičnem številu te mantise so najvišje številke iskanega števila; nižje številke iskanega števila pa dobiš, ako manjšo mantiso od dane odštevaš in dobljeno diferenco z diferenco mantis v logaritmovniku deliš; decimalke kvocijenta so nižje številke iskanega števila.

Naj je n. pr. dani logaritem 0.568563
manjši logaritem.....54

$$\begin{array}{r} 9_0 : 1,17 = 0.077; \\ 8 \end{array}$$

vse številke iskanega števila so 3703077 in sicer imajo cele jedno številko, ker je karakteristika 0; potem je

$$\text{num. log. } 9.568563 = 3.703077.$$

Vaje.

1. Poišči iz logaritmovnika logaritme teh-le števil: 9, 52, 325, 873, 2136, 5709, 7312, 9247, 39070, 678200, 39.12, 8.016 92729, 43009, 0.67425, 85.201, 0.091457, 0.003628, 4.48197.

2. Poišči dotična števila k tem-le logaritmom:

5.872036, 3.530219, 1.027801, 0.923570, 9.072861 — 1, 2.000358, 0.864009 — 3, 3.123456, 0.426000 — 2, 3.200007, 4.821321, 4.821321, 0.998877 — 4, 2.580321.

Poraba Briggovih logaritmov.

§. 129. S porabo občnih izrekov, katere smo razvili v §. 124 moremo izpremeniti množenje v seštevanje, deljenje v odštevanje, potencovanje v množenje in korénjenje v deljenje.

Ako nahajamo med danimi števili negativna, mislimo si jih med računanjem kot absolutna števila in znak določimo potem, ko smo dobili znesek.

1. Množenje števil s porabo logaritmov.

Poišči produkt iz 1.0954, 0.91567, — 3.1571 in 1.00782.

$$\begin{array}{l} \text{Rešitev.} \quad \log 1.0954 = 0.039573 \\ \log 0.91567 = 0.961739 - 1 \\ \log 3.1571 = 9.499289 \\ \log 1.00782 = 0.003383 \\ \hline \log \text{produkta} = 0.503984 \end{array}$$

$$\text{num. log. } 0.503984 = 3.191419$$

$$\text{tedaj } 1.0954 \times 0.91567 \times -3.1571 \times 1.00782 = -3.191419$$

2. Deljenje števil s porabo logaritmov.

1. Deli 321 : 608.

$$\text{Rešitev. } \log 321 = 2.506505 = 3.506505 - 1$$

$$\log 608 = 2.783904 = 2.783904$$

$$\log \frac{321}{608} = 0.722691 - 1$$

$$\text{num. log. } 0.722691 - 1 = 0.527959.$$

3. Potencovanje s porabo logaritmov.

Išči 6. potenco števila 2.307.

$$\text{Rešitev. } \log 2.307 = 0.363048_{\times 6}$$

$$\log 2.307^6 = 2.178288$$

$$\text{num. log. } 2.178288 = 150.76$$

$$2.307^6 = 150.76$$

4. Korenjenje števila s porabo logaritmov.

Poišči 10. koren iz 100.

$$\text{Rešitev. } \log 100 = 2 :_{10}$$

$$\log \sqrt[10]{100} = 0.2$$

$$\text{num. log. } 0.2 = 1.58489$$

$$\sqrt[10]{100} = 1.58489$$

Vaje.

Izračunaj s porabo logaritmov te-le izraze:

$$1.) 3.2576 \times 1.386 = ? \quad 2.) 58.6873 \times 0.19758 = ?$$

$$3.) 0.27649 \times 5.31872 \times 1.2764 = ?$$

$$4.) 2.00415 \times 0.28 \times 0.00278 \times 10 = ?$$

$$5.) \frac{25.25}{12.12} = ? \quad 6.) \frac{1}{3.562} = ? \quad 7.) \frac{23.83 \times 315}{-4.527} = ?$$

$$8.) \frac{432 \times 518 \times 3.24}{0.0056 \times 28.4} = ? \quad 9.) 1.07^{35} = ?$$

$$10.) \frac{(425 \times 7.256)^2}{(3.26 \times 56.2)^5} = ? \quad 11.) \frac{3.278^3 \times 5.629^4 \times 329}{5.72^3 \times 3.8693^3} = ?$$

$$12.) \sqrt[3]{612} = ? \quad 13.) \sqrt[3]{343} = ? \quad 14.) \sqrt[4]{5762} = ?$$

$$\begin{aligned}
 15.) \sqrt[7]{32 \cdot 56431} &= ? & 16.) \sqrt[5]{\frac{4592}{5724}} &= ? & 17.) \sqrt[7]{\frac{a}{13} \sqrt[3]{6}} &= ? \\
 18.) \frac{\sqrt[8]{8 \sqrt[4]{6}}}{11 \sqrt[5]{5 \sqrt[4]{124}}} &= ? & 19.) \sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^7} &= ? \\
 20.) \frac{\sqrt[3]{378} \cdot \sqrt[4]{12^2}}{\sqrt[5]{7 \cdot 139456^3}} &= ? & 21.) \sqrt[4]{\frac{58 \sqrt[3]{10 \cdot 189}}{\sqrt[2]{2 \cdot 40373}}} &= ? \\
 22.) \frac{347 \sqrt[5]{0.35} + \sqrt[5]{55 \cdot 33^3}}{4 \cdot 927481} &= ? \\
 23.) \sqrt[5]{\frac{4 \cdot 3268^4 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 1996} \cdot \sqrt[5]{17 \cdot 39}}{15^4 \cdot \sqrt[7]{94 \cdot 34} - 9 \sqrt[5]{3 \cdot 4071}}} &= ?
 \end{aligned}$$

Izračunjanje obrestnih obresti s porabo logaritmov.

Kedar obresti kakega kapitala zraven kapitala puščamo in jih tudi na obresti nalagamo, pravimo: kapital je naložen na obrestne obresti.

§. 130. Naloga. Kapital (k) je naložen na obrestne obresti ($p\%$) dano število let (l); na koliko (k_l) se naraste ta kapital?

100 fl. se naraste do konca leta na $100 + p$ fl.

1 " " " " " " " " $\frac{100+p}{100}$ "

k " " " " " " " " $k \frac{100+p}{100}$ "

Zarad krajšega naj je v sledečem

$$\frac{p}{100} = a. \text{ Potem}$$

k fl. se naraste do konca 1. leta na $k(1+a)$ fl.

$k(1+a)$ " " " " " 2. " " $k(1+a)^2$ "

$k(1+a)^2$ " " " " " 3. " " $k(1+a)^3$ "

.....

$k(1+a)^{l-1}$ " " " " " $l.$ " " $k(1+a)^l$ "

ker je vsak kapital konec leta $(1+a)$ krat večji, kakor od začetka leta. Vrednost kapitala k je torej čez l let

$$k_l = k(1+a)^l$$

Vaje.

- 1.) Ako naložiš 6000 fl. s 5% na obrestne obresti, na koliko se narastejo v 4 letih?

$$k_4 = 6000 \cdot 1.05^4$$

$$\log k_4 = \log 6000 + 4 \log 1.05$$

$$\log 6000 = 3.77815$$

$$4 \log 1.05 = 0.08476$$

$$\log k_4 = 3.86291$$

$$k_4 = 7293 \text{ fl.}$$

Odgovor: 6000 fl. se naraste v 4 letih na 7293 fl.

- 2.) Na koliko se naraste 100 fl. po 5% obrestnih obresti v 40 letih?
- 3.) Koliko dobiš za 1000 fl. čez 25 let, ako jih naložiš na obrestne obresti po 5%?
- 4.) Nekdo nese 6028 fl. v hranilnico, katera plačuje po 4½%, obresti pa vsakega pol leta zaračunja. Čez 20 let vzame denar z obresti in obrestnimi obresti iz hranilnice; koliko je dobil vsega skupaj?

Take račune pa tudi takrat rabimo, kedar druge količine v stanovitej omeri rastejo, kakor n. pr. pri narastanju prebivalcev kakega kraja ali dežele, drevja kakega gozda i. dr. t.

- 5.) V nekem gozdu je drevja za 20840 metrov derv; ako vsako leto še 3% drevja zraste, koliko ga bo čez 10 let v gozdu?
- 6.) Neko mesto ima 896000 prebivalcev; koliko prebivalcev bo imelo čez 16 let, ako se število prebivalcev vsako leto za 1½% povekša.
- 7.) Reši gornji izraz za kl z ozirom na število k , potem dobiš

$$k = \frac{kl}{(1+a)^l}$$

- 8.) Kolik kapital moraš na obrestne obresti po 5% naložiti, da dobiš 15 letih 8000 fl. nazaj?
- 9.) Kolik kapital je nekdo naložil na obrestne obresti po 4½%, ko je v 9 letih 13490 fl. dobil nazaj?
- 10.) Od nekega kapitala, ki je s 5% na obrestne obresti naložen, dobi nekdo v 25 letih 5492 fl. 73 kr.; kolik kapital je moral od začetka vložiti?
- 11.) Neko mesto ima 6000 ljudi, koliko ljudi je bilo v tem mestu pred 30 leti, ako je znesel naraščaj vsako leto po 2%?

- 12.) Reši jednačbo za kl z ozirom na $(1 + a)$ in potem z ozirom na p , potem dobiš

$$\log(1 + a) = \frac{\log kl - \log k}{l} = m$$

Num $\log m = n = 1 + a$, in

$$a = n - 1 \text{ ter } p = 100(n - 1).$$

- 13.) Po koliko % moraš 6000 fl. na obrestne obresti naložiti, da dobiš v 4 letih 7294 fl.
 14.) V nekem gozdu se je v 12 letih drevja od 27000 metrov na 35000 metrov narastlo; po koliko % se je drevje vsako leto narastlo?
 15.) Reši jednačbo za kl z ozirom na l , potem dobiš

$$l = \frac{\log kl - \log k}{\log(1 + a)}$$

- 16.) Nek bogat mož je zapustil 2. januarja 1844 nekemu mestu za uboge 12000 fl. pod tem pogojem, da so ta kapital naložili na obrestne obresti po 5% in da ga toliko časa ležati pusté, dokler se ne naraste na 30000 fl. Katerega leta sme mesto kapital za uboge porabiti?
 17.) V kolikih letih se podvoji 5000 fl. kapitala, ako so naloženi po $4\frac{1}{2}\%$ na obrestne obresti; v kolikih letih postane 3krat (m -krat) večji?
 18.) V kolikih letih se zviša število prebivalcev nekega kraja od 5200 na 9433 ljudi, ako pride na narastaj po $1\frac{1}{4}\%$?

§. 131. Zračunjanje gotovine (g) čez l let, ako priložimo vsako leto d fl. na obrestne obresti po $p\%$.

Na obrestnih obrestih leži prvi donesek l let, drugi $l-1$ let, tretji $l-2$ let i. t. d. predzadnji 2 leti in zadnji 1 leto.

Potem se naraste (glej §. 127)

prvi donesek	na	$d(1+a)^l$	fl.
drugi	„	$d(1+a)^{l-1}$	fl.
tretji	„	$d(1+a)^{l-2}$	„
.....			
predzadnji	„	$d(1+a)^2$	„
in zadnji	„	$d(1+a)$	„

vsii doneski skupaj na

$$g = d(1+a)^l + d(1+a)^{l-1} + d(1+a)^{l-2} + \dots + d(1+a)^2 + d(1+a)$$

$$\text{ali } g = d(1+a) [(1+a)^{l-1} + (1+a)^{l-2} + (1+a)^{l-3} + \dots + (1+a) + 1]$$

Naj je $x = (1+a)^{l-1} + (1+a)^{l-2} + (1+a)^{l-3} + \dots + (1+a) + 1$
 ter $(1+a)x = (1+a)^l + (1+a)^{l-1} + (1+a)^{l-2} + \dots + (1+a)^2 + (1+a)$

In ako odšteješ gornji izraz od dolnjega, dobiš

$$(1+a)x - x = (1+a)^l - 1 \text{ ali } x = \frac{(1+a)^l - 1}{a}$$

Potem je pa tudi

$$g = d(1+a) \frac{(1+a)^l - 1}{a}$$

Kedar nakladamo doneske na koncu in ne od začetka vsakega leta, dobimo

$$g = \frac{d [(1+a)^l - 1]}{a}$$

Če pa naložimo zraven kapitala k še donesek d na konec vsakega leta na obrestne obresti, dobimo (glej §. 130)

$$g = k(1+a)^l + \frac{d [(1+a)^l - 1]}{a}$$

Vaje.

- 1.) Nekdo nese od začetka vsakega leta 50 fl. v hranilnico na obrestne obresti, katera po $4\frac{1}{2}\%$ plačuje; koliko dobi čez 10 let?
- 2.) Nekdo je začel od 26. leta svoje starosti po 120 fl. od začetka vsakega leta v hranilnico na obrestne obresti nositi; ko je 50. leto svoje starosti dovršil, vzame denarje iz hranilnice; koliko je dobil vsega skupaj, ako hranilnica po 5% plačuje.
- 3.) Oče hoče svojemu sinu do njegovega 24. leta nek denar zavarovati in plača nekej banki od rojstnega dne sina do onega časa od začetka vsakega leta 100 fl. Koliko mora banka sinu povrniti, ako plačuje na leto po 4% ?
- 4.) Nekdo naloži 5000 fl. na obrestne obresti po $4\frac{1}{2}\%$; konec vsakega leta pa priloži še k kapitalu po 500 fl.; koliko dobi v 8 letih nazaj?
- 5.) Reši prvo in drugo, jednačbo za g z ozirom na d , potem dobiš

$$1.) d = \frac{a \cdot g}{(1+a) [(1+a)^l - 1]} \quad 2.) d = \frac{ag}{(1+a)^l - 1}$$

- 6.) Koliko moraš od začetka vsakega leta v hranilnico nesti na obrestne obresti, da dobiš v 12 letih 3000 fl., ako ti plačajo po 5% ?

- 7.) Nekdo si hoče v 17 letih 4000 fl. prihraniti in nese konec vsakega leta gotov denar v hranilnico, ki plačuje po $4\frac{1}{2}\%$; koliko mora vsako leto v hranilnico dati?

§. 132. Nekateri ljudje prijemajo delj časa v enakih obdobjih denar od naloženega kapitala; ta denar imenujemo prihodek (Rente).

Koliko (k) moraš na obrestne obresti po $p\%$ naložiti, da dobiš skoz l let vsako leto d fl.?

Ako naložiš k fl. na obrestne obresti po $p\%$ skoz l let, dobiš

$$kl = k(1+a)^l \text{ (glej §. 130)}$$

Ako pa konec vsakega leta d fl. proč vzameš od kapitala, je vsota vseh odneskov

$$g = \frac{d[(1+a)^l - 1]}{a} \text{ glej §. 131.}$$

Kapital k , ki je naložen na obrestne obresti, pa porabiš popolnoma, kedar je

$$k(1+a)^l = \frac{d[(1+a)^l - 1]}{a}$$

ali

$$k = \frac{d[(1+a)^l - 1]}{a(1+a)^l}$$

Vaje.

- 1.) Koliko moraš plačati nekej banki, ki plačuje po 5% , da da dobiš od nje skoz 10 let konec vsakega leta po 500 fl.
- 2.) Neka oseba, ki je 52 let stara, hoče konec vsakega leta po 600 fl. prihodkov imeti; koliko mora v nekej banki plačati, če ta računa po $4\frac{1}{2}\%$?

Opomba. Banka računa čas življenja na 16 let.

- 3.) Reši jednačbo za k z ozirom na d , potem dobiš

$$d = \frac{ka(1+a)^l}{(1+a)^l - 1}$$

- 4.) Nek človek ima 8000 gl. premoženja in misli, da bo še 12 let živel, zato nese ta denar nekej banki, ki plačuje po $4\frac{1}{2}\%$, na obrestne obresti, da bi jej skoz teh 12 let dajal prihodek. Koliko dobi konec vsakega leta?

Vprašanja.

Katera števila imenujemo cela, ulomljena, racionalna, iracionalna, imaginarna? — Na kakšen način si ta števila spoznal?

— Katera števila imenujemo algebrajska? Ali moremo vsa omenjena števila načrtati na jedni samej ravni? — S kakošnimi ulomki iracionalna števila najrajši izražujemo? — Pri katerih računih si nahajal iracionalna števila? Ponavljaj vse, kar veš o dekadičnih številih; kako so sestavljena, kako dobimo pravila za računanje z njimi? — Koliko vrst računov poznaš? — V kakšnje zvezi so ti računi?

Šesti oddelek.

● **jednačbah.**

A. Jednačbe prve stopnje.

§. 130. S seštevanjem, odštevanjem, množenjem, deljenjem, potencovanjem in korenjenjem dobimo raznovrstne matematične izraze. N. pr. $3 + 5$, $2a - 7b$, $\frac{3}{x} 6x^5$, $7\sqrt[3]{5m^2}$.

Vsak tak izraz ima gotovo vrednost. Tako n. pr. ima izraz $3 + 5$ število 8, $2a - 7b$ število c za vrednost.

Dva matematična izraza imata ali jednako vrednost ali pa razno.

Kedar hočemo povedati v matematiki, da imata dva izraza jednaki vrednosti, zapišemo med njima znak $=$ (jednačaj).

Izraza enakih vrednosti zvezana z jednačajem naredita jednačbo. (Primerjaj §. 3.)

Jednačba torej obstoji iz dveh izrazov ali iz dveh delov, izmed katerih mora imeti vsak jeden ali več členov. Tako n. pr. je v jednačbi $12a + 3b = 5c$ prvi del $12a + 3b$ s členoma $12a$ in $3b$ in drugi del $5c$.

V jednačbah nahajamo določena in nedoločena števila. Tako so n. pr. v jednačbi $3x - 4 = 5$ števila 3, 4 in 5 določena, število x pa nij določeno. Ravno tako so v jednačbi $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$ števila 3, 2, 6, 9 določena števila, a pa ne. Te dve jednačbi se pa razločite jedna od druge z ozirom na nedoločenost števil. — V prvi jednačbi smemo za x vzeti le število 3, da jej zadostujemo; vsaka druga vrednost za število x izpremeni jednačbo v nejednačbo.

Vstavi v $3x - 4 = 5$ za x število: 3, 1, 4, 5; kaj dobiš na levi, kaj na desni od jednačaja? — Drugače je pri drugi jednačbi, v njej smemo staviti za a katerokoli vrednost in jednačba ostane vsejedno resnična. Vstavi v jednačbi $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$ število: 1, 2, 3, 4, 5, 6; kaj dobiš na levi, kaj na desni od jednačaja?

Jednačbe so torej dvojne: 1. take, katere ostanejo le za gotove vrednosti njihovih nedoločenih števil veljavne in 2. take, katere ostanejo v vsakem slučaju veljavne. Jednačbe prve vrste imenujemo določilne, ker ž njimi je vrednost še nedoločenih števil določljiva; jednačbe druge vrste pa identične jednačbe.

Nedoločena števila določilne jednačbe, katera jej zadostujejo, imenujemo jednačbine neznanke. Neznanke zaznačujemo s tujkama x , y in z zadnjimi črkami alfabeta z , $ž$, v ...; moramo jih pa razločiti od znanih občnih števil. — Povej razliko med neznanko in občnim številom. — Ali imamo v identičnih jednačbah tudi neznanke?

Vrednosti neznanke, katere zadosté jednačbi, imenujemo jednačbine korene. Tako n. pr. je število 3 koren jednačbe $3x - 4 = 5$.

Kedar iščemo korene jednačbe, jo rešujemo.

V jednačbi nahajamo neznanko ali samo v prvej, ali pa tudi v drugej, tretje in višjej potenci. Najvišja potenca neznanke določi stopnjo jednačbe in z ozirom na to imamo jednačbe prve, druge, tretje... stopnje. Tako n. pr. je $3x - 7 = 2$ jednačba prve, $5x^2 - 2y = 3x$ jednačba druge, $5x^3 - 2x^2 + 3 = 0$ jednačba tretje stopnje.

V jednačbi je ali samo jedna ali pa več neznank, z ozirom na to imamo jednačbe z jedno, dvema, tremi in več neznankami.

Tako n. pr. je $5x - 8 = 3x$ jednačba z jedno, $3x - 2y = 5$ jednačba z dvema, $5x = 4y - 3z$ jednačba s tremi neznankami.

Rešitev jednačb prve stopnje z jedno neznanko.

§. 131. Jednačba prve stopnje z jedno neznanko je rešena, kakor hitro jo izpremenimo tako, da je neznanka s pozitivnim koeficijentom 1 sama na jednej strani jednačbe, na drugej strani pa same znanke.

Pri rešitvi jednačb se opiramo na to-le temeljno resnico:

Jednako izpremenjeno na jednaki način daje jednako!

Iz tega sledi:

1. Jednako k jednakemu prišteto daje jednako.

2. Jednako od jednakega odšteto daje jednako.

S porabo teh dveh izrekov moremo prenesti vsak člen iz jedne strani jednačbe na drugo. Tako n. pr. dobimo iz jednačbe $2x - 5 = a$ jednačbo $2x = a + 5$, ako prištejemo vsakemu delu jednačbe število 5. Iz jednačbe $x + m = 3$ dobimo jednačbo $x = 3 - m$, ako odštejemo od vsakega dela število m . Iz tega

sledi: „Vsak člen jednačbe smeš prenesti iz jedne strani na drugo stran jednačbe, ako le izpremeniš njegov znak“.

Vaje.

Prenesi v teh-le jednačbah vse člene z neznanko na levo in vse člene brez neznanke na desno stran jednačbe in skrči kolikor mogoče.

$$1.) 5x - 3 = 7; \quad 2.) 2x = 12 - 3x; \quad 3.) 78x - 8 = 6x + 5;$$

$$4.) \frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{5} + 7; \quad 5.) 5x - \frac{3x}{7} + 5 = 2x + 6;$$

$$6.) \frac{3x}{5} - 3\frac{2}{7} = \frac{x}{15} - \frac{5}{7}; \quad 7.) \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{2}{5} = \frac{x}{6} + 5;$$

$$8.) ax - m + c = bx - m; \quad 9.) 3x - 6m - 2x = 7m - ax;$$

3. Jednako z jednakim množeno daje jednako.

S porabo tega izreka moremo odpraviti iz jednačbe ulomke, ako množimo vsak člen jednačbe z najmanjšim skupnim mnogokratnikom imenivcev. Tako n. pr. dobimo iz jednačbe $\frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{6}$ jednačbo $2x - 30 = x$.

Vaje.

Odpravi ulomke iz teh-le jednačb, prenesi člene z neznanko na levo in člene brez neznanke na desno stran jednačb in potem skrči.

$$1.) \frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{5} + 7; \quad 2.) 5x - \frac{3x}{7} + 5 = 2x + 6;$$

$$3.) \frac{5x}{3} - 4 = \frac{2x}{3}; \quad 4.) \frac{x}{3} + \frac{5}{6} - \frac{x}{8} = 3x + 7;$$

$$5.) \frac{5x}{8} - 4 = \frac{3x}{8} = 1; \quad 6.) \frac{x}{3} = \frac{5}{8}; \quad 7.) \frac{2x}{7} = 12\frac{5}{7};$$

$$8.) \frac{x}{7} - 1 = \frac{5}{7}; \quad 9.) \frac{x}{m} - n = \frac{x}{a} + b;$$

$$10.) \frac{y}{n} - a = \frac{m}{n}; \quad 11.) \frac{5x}{a} - c = \frac{2x}{a};$$

$$12.) \frac{gx}{h} - f = \frac{ax}{b} + g; \quad 13.) \frac{16}{x-5} = 12; \quad 14.) \frac{8}{3x+2} = 7;$$

$$15.) \frac{6+x}{6-x} = 2; \quad 16.) \frac{2x+4}{y+15} = 1; \quad 17.) \frac{a}{x-b} = c;$$

$$18.) \frac{a-x}{a+x} = b; \quad 19.) \frac{ax-b}{bx-a} = c.$$

4. Jednako z jednakim deljeno daje jednako.

S porabo tega izreka moremo v jednačbi odpraviti koeficient neznanke, ako delimo vsako stran jednačbe z neznaničnim koeficijentom. Tako n. pr. dobimo iz jednačbe $5x - 10 = 24$ jednačbo $x - 2 = \frac{24}{5}$. Pa tudi okrajšati moremo jednačbo s pomočjo tega izreka, ako je le vsak člen vsake strani jednačbe deljiv z jednim in istim številom. Tako n. pr. dobimo z jednačbe $25x - 40 = 15$ priprostejšo jednačbo $5x - 8 = 3$.

Vaje.

Odpravi ulomke iz teh-le jednačb, prenesi člene z neznanko na levo in člene brez neznanke na desno. Vsako stran jednačbe skrči in odpravi koeficijent neznanke.

- 1.) $\frac{5x}{7} - 2 = \frac{x}{5} + 2$; 2.) $\frac{ax}{b} + b = \frac{bx}{c}$;
- 3.) $\frac{5}{3x} - \frac{6}{x} = 4$; 4.) $\frac{3x-4}{3x+4} = 12$;
- 5.) $\frac{ax-b}{cx-a} = b-d$; 6.) $\frac{ax}{m} + \frac{b}{m} = \frac{cx}{2m} - d$

Okrajšaj te-le jednačbe.

- 1.) $5x - 10 = 15x - 5$; 2.) $24x = 6x + 18$;
- 3.) $ax - ma = na$.

Potem jednačbe prve stopnje tako-le rešuj :

1. Ako nahajaš v jednačbi oklepe, jih razreši.
2. Ako v jednačbi nahajaš ulomke, jih odpravi s tem, da množiš vsak člen na vsakej strani jednačbe z najm. skupnim imenoivcem.
3. Prenesi vse člene z neznanko na jedno stran in vse člene brez neznanke na drugo stran.
4. Skrči, kar moreš.
5. Oprosti neznanko od koeficijenta s tem, da deliš z njim vsak člen jednačbe; tudi koeficijent -1 moraš odpraviti.

O pravej rešitvi jednačbe se prepričamo, ako v njej dobljeno vrednost neznanke namesto neznanke vstavimo in vsako stran kolikor mogoče skrčimo. Zneska obeh strani morata biti jednaka; če nijsta jednaka, je jednačba napačno rešena.

Vaje.

(Bolj priproste rešuj na pamet).

- 1.) $x + 5 = 7$ Rešitev na pamet: Število 7 je za 2 večje od števila 5; torej je $x = 2$.

- 2.) $x + a = b$; 3.) $x - 4 = 5$;
 4.) $x - a = b$; 5.) $8 - x = 7$;
 6.) $a - x = b$; 7.) $5x = 15$;
 8.) $ax = b$; 9.) $\frac{x}{7} = 3$;
 10.) $\frac{x}{a} = c$; 11.) $\frac{56}{x} = 7$;
 12.) $\frac{a}{x} = b$; 13.) $45 - 4x = 2x + 15$;
 14.) $a - bx = cx + d$; 15.) $\frac{25}{4x} = 150$;
 16.) $\frac{3}{2x} = 4\frac{1}{2}$; 17.) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$;
 18.) $\frac{x}{4} + 12 = 17$; 19.) $\frac{x}{8} - 14 = 11$;
 20.) $\frac{x}{a} + b = c$; 21.) $\frac{x}{a} - b = c$;
 22.) $(a + b) - \frac{a}{x} = a$; 23.) $9x - 60 = -3x$;
 24.) $ax = c - bx$; 25.) $8x = 72 + 5x$;
 26.) $ax = b + cx$; 27.) $5x + 6 = 2x + 30$;
 28.) $ax + c = bx + d$; 29.) $8x - 20 = 5x - 8$;
 30.) $ax - c = bx - d$; 31.) $3 - 9x = 4x - 7 - 15x$;
 32.) $4x - 6 = 9x - 18 - 3x$;
 33.) $16 + 7x + 4 - 2x = 12x - 3x + 4 - 2x$;
 34.) $4(x - 2) + 11(3x - 10) = 80 - x - 8(6 - x)$;
 35.) $a - (b + c)x = (b - c)x$;
 36.) $a - (x - m)n = (n - x)m$;
 37.) $m^2(m - x) - n^2(n + x) = mnx$;
 38.) $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 8$; 39.) $\frac{x}{a} + \frac{x}{a} = b$;
 40.) $\frac{2x}{7} + \frac{5x}{7} = 4$; 41.) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{b} = d$;
 42.) $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{5} = 1$; 43.) $\frac{ax}{b} - \frac{cx}{b} = d$;
 44.) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 5 = x$;
 45.) $\frac{7x}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{12} + \frac{3x}{4} = 2x - 10$;
 46.) $\frac{ax}{2d} - \frac{bx}{5d} + \frac{cx}{4d} = mx - n$;
 47.) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = ?$;
 48.) $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = \frac{x+2}{6} - \frac{7x-8}{9}$

$$49.) a \left(\frac{2x-a}{a+2b} \right) + b \left(\frac{2x-b}{b+2a} \right) = x$$

$$50.) 5 - \frac{6}{x} = \frac{x-3a}{x}$$

$$51.) a + m \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = c$$

$$52.) \frac{4}{7(x-3)} - \frac{11}{7(x-4)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2}$$

$$53.) \frac{14}{3-x} - \frac{2}{3-x} = 12; \quad 54.) \frac{2x+4}{x+15} = 1;$$

$$55.) \frac{6}{x-3} - \frac{9}{x-2} + \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4}$$

$$56.) 20 - \frac{2x-3}{5} - \frac{2x+3}{7} = 26 - \frac{3x-7}{4} - \frac{4x-1}{5};$$

$$57.) 100 - \frac{3(2x+4)}{5} - \frac{5(5x-4)}{6} = 69 + \frac{3(3x-4)}{9} - \frac{2(5x-1)}{3}$$

$$58.) (12x^3 - x^2 - 26x + 15) : (3x^2 + 2x - 5) = 5x - 8.$$

Poraba jednačb za rešitev nalog.

§. 132. Jednačbe, katere smo zdaj rešili, so bile uže dane; naša slednja naloga je pa, da jednačbe še le naredimo ali — kakor pravijo — nastavimo. — Za to početje je bistroumnosti in vaje treba, ako hočemo dano nalogo prenarediti v jednačbo.

V obče si zapomni to-le:

Iskano število zaznači z x , potem sestavi člene in jih združi sè znaki, kakor zahteva naloga. Zraven tega pa skrbi, da dobiš dva izraza jednake vrednosti in postavi med nja jednačaj. Kakor hitro je jednačba nastavljena, moreš uže neznanko izračunati, ako rešiš jednačbo. — V sledečem reši priproste naloge tudi na pamet.

Vaje.

Opomba. Vaje prejšnjega paragrafa izrazi tako sè stavki, da slišimo vsak matematičen znak. N. pr. x več 5 je jednako 7. V sledečih nalogah povej besede, katere zahtevajo matematičen znak, in ko nastavljaš jednačbo, izrekaj pri vsakem znaku besedo, katero zahteva ta znak.

1.) Poišči število, katero dvakrat in še trikrat vzeto 75 dá.

Na pamet. Dvojno in trojno število je petero; 75 je torej petero iskanega števila ali iskano število je peti del od 75, tedaj 15. Algebrasko: Iskano število naj je x , dvojno to število je $2x$ in trojno $3x$, dvojno in trojno $2x + 3x$. Po pogoju dane naloge mora tedaj biti

$$2x + 3x = 75$$

Ako to nalogo rešimo dobimo $x = 15$.

$$\text{Poskus: } 2 \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 30 + 45 = 75.$$

2.) Oče je star 32 (a) sin pa 2 (b) leti; čez koliko let bo oče ravno trikrat (m -krat) starejši kakor sin?

Čez x let. In takrat bo oče 32 in x t. j. $32 + x$ ($a + x$) in sin 2 in x t. j. $2 + x$ ($b + x$) let star; očetova starost $32 + x$ v obče $a + x$ je pa trikrat tolika kakor sinova starost $2 + x$ ($b + x$); da bi bili te dve starosti jednaki, morala bi biti sinova starost 3 ($2 + x$); imamo tedaj

$$32 + x = 3(2 + x) \quad a + x = 3(b + x)$$

$$\text{Ako rešimo to jednačbo, dobimo } x = 13, \quad x = \frac{a - 3b}{2}$$

Poskus. Čez 13 let ima oče 45 in sin 15 let; oče je torej v resnici trikrat stareji od sina.

Sledeče naloge nastavi sam. Priproste reši tudi na pamet. Občna števila v oklepih porabi za izračunjanje občnih oblik za neznanke.

3. Katero število moramo za 123 (a) zvekšati, da dobimo 321 (b)?

Povej še sam kako tako nalogo, in jo reši; n. pr. katero število moramo za 25 zvekšati, da dobimo 42? — Zdaj pa še povej kakšno ravno tako nalogo, samo s tem razločkom, da to neznano število pomeni gotove stvari; n. pr. katero število ovac (hrušk, jabelk, učencev i. t. d.) moramo za 12 zvekšati, da dobimo 25 ovac (hrušk, jabelk i. t. d.)? —

Izrazi take naloge v obliki, ki se še bolj razloči od matematičnega jezika! — N. pr.: Nekdo ima več ovac, kupi jih pa še 12, da ima vseh skupaj 25; koliko ovac je imel od začetka?

V sledečem ponavljali bomo isto zahtevanje pri nekterih nalogah. — Zarad krajšega hočemo pred take naloge postaviti znak *.

*4.) Katero število moremo zmanjšati za 345 (a), da dobimo 543 (b)?

*5.) Ako od 900 (a) gotovo število odštejemo, ostane 444 (b), koliko je neznano število?

*6.) Katero število moramo množiti s 63 (a), da dobimo 2268 (b) za produkt?

*7.) Katero število moramo deliti s $4\frac{3}{4}$ (a), da je kvocijent enak $3\frac{2}{5}$ (b)?

*8.) Ako 4200 (a) delimo s številom, dobimo za kvocijent 56 (b); katero je to število?

- *9.) Neki delavec zasluži vsak dan 4 fl.; v koliko dneh zasluži 48 gl.?
- *10.) Osmerno (a -terno) in sedmerno (b -terno) nekega števila znaša 195 (c); katero je to število?
- *11.) Trinajsterno (a -terno) nekega števila je za 9 (b) manjše od 100 (c); katero je to število?
- *12.) Ako 16erno (a -terno) nekega števila odštevamo od 1000 (b) znese ostanek 440 (c); katero je to število?
- *13.) Ako neko število delimo sè 24 (a) in kvocijent za $2\frac{1}{2}$ (b) zvekšamo, dobimo 7 (c); katero je to število?
- 14.) Nekdo ima pri sebi dvanajstino svojega čistega premoženja, poravna s tem neki račun čez $37\frac{1}{2}$ fl. in ostane mu še $62\frac{1}{2}$ fl.; koliko čistega premoženja je imel?
- *15.) Ako delimo 864 (a) z nekim številom in kvocijent odštevamo od 180 (b), je ostanek jednak 72 (c); koliko je neznano število?
- *16.) Ako množimo neko število z 18 (a), produkt za 19 (b) zvekšamo in vsoto delimo z 20, dobimo za kvocijent 5 (d); koliko je neznano število?
- *17.) Neko število dobimo, ako $\frac{3}{4}$ ($\frac{n}{m}$) tega števila odštevamo od 140 (a); koliko je to število?
- *18.) Katero število je tako, da dobimo isto, ako to število zvekšamo za 8 (a) ali pa ako to število trikrat (b -krat) vzamemo?
- *19.) Ako neko število delimo s 4 (n), ali pa to število od 4 (n) odštevamo, dobimo v obeh slučajih isto; katero je to število?
- *20.) Osmerno (n -terno) nekega števila za 4 (a) zvekšano, je ravno toliko, kakor deseterno (m -terno) tega števila za 20 (b) zmanjšano; koliko je to število?
- 21.) Neki oče je 40 (a), njegov sin 4 (b) leta star; čez koliko let bo oče 3krat (n -krat) toliko star, kakor sin?

Rešitev :

$$40 + x = 3(4 + x); x = 14$$

$$a + x = n(b + x); x = \frac{a - nb}{n - 1}$$

Kaj dobimo, ako v občnem izrazu za x vzamemo:

- 1.) $n = 1$; čez koliko let bo torej oče ravno toliko star kakor sin?
- 2.) $a = 30$, $b = 10$, $n = 2$; 3.) $a = 48$, $b = 8$, $n = 5$;
- 4.) $a = 52$, $b = 12$, $n = 5$; ali bo tedaj oče kedaj 5krat starejši od sina? Ali nam znak — pred vrednostjo za x vendar kaj pove?

- 5.) $a = 30$, $b = 9$, $n = 4$; ali bo ta oče kedaj 4krat stareji od sina? Kaj nam pove tukaj znak — pred vrednostjo za x ?

Kedaj je x pozitiven, kedaj negativen? — Ako je $a > nb$ oziroma $a < nb$; povej to z besedami primernimi k nalogi. Kedar je starost očeta večja od produkta i. t. d.

Kedar preiskavamo, kakšen pomen ima neznanka za razne vrednosti občnih števil, **pretresavamo** (diskutujemo) znesek. — Pretresavaj na tak način, kakor v tej nalogi, tudi zneske drugih nalog.

- 22.) Neki oče je 58 (a), njegov sin pa 14 (b) let star; pred koliko leti je bil oče 5(m)krat starejši kakor sin?
- 23.) Neka mati je 5krat (n) starejša od svoje hčere, čez 8 (a) let pa bo 3krat (m -krat) stareja od nje; koliko let ima ta mati?
- 24.) Razdeli med osebi A in B 4000 (a) fl. tako, da se imata deleža oseb A in B kakor 3 in 5 ($m : n$); koliko dobi vsak?
- 25.) V dveh blagajnicah je 6000 fl. (a) skupaj in sicer je v jednej 600 fl. več kakor v drugej; koliko je v vsakej blagajnici?
- 26.) Med tri brate, izmed katerih je A 32 (a), B 28 (b), C 24 (c) let star, imamo razdeliti 8400 (m) goldinarjev po omeri njihove starosti; koliko dobi vsak?
- 27.) Dve gospodinji kupite 150 kilogramov sladkorja. A vzame 80 $\frac{h}{g}$; B obdrži ostanek. Prva porabi vsak teden $1\frac{1}{2}$, zadnja pa le 1 $\frac{h}{g}$ sladkorja; čez koliko tednov imate obe gospodinji jednako sladkorja?
- 28.) V nekež družbi hočejo nabrati miloščino za reveža. Ako dá vsak navzočnih $1\frac{1}{4}$ gold., dobi ubogi $2\frac{1}{4}$ gold. manj, kakor potrebuje. Ako pa dá vsak navzočnih $1\frac{1}{2}$ gold., dobi revež $1\frac{1}{2}$ gold. čez potrebo; koliko oseb je v tej družbi?
- 29.) V katera dva dela moramo razdeliti število 100 (a), da dobimo večji del z manjšim delé 6 (b) za kvocijent in 9 (c) za ostanek?
- 30.) 8mi (n -ti) del nekega števila je za 1 (a) manjši kakor deveti (m -ti) del za 3 zveksanega števila; katero je to število?
- 31.) Neki služabnik dobi za letno plačilo 120 fl. (a) in obleko. Čez 8 (m) mesecev zapusti službo in dobi 69 fl. in še obleko; za koliko so mu zaračunili obleko?
- 32.) Nekdo porabi za razveseljevanje $\frac{1}{3}$ svojih prihodkov. Ko mu pa prihodke za 300 fl. povekšajo, porabi v isti namen $\frac{1}{6}$ svojih prihodkov in vendar mu še ostane 212·5 fl. čez potrebne stroške več kakor pred zveksanimi prihodki; koliki so njegovi prihodki?

- 33.) Neki tovorni vlak, ki preleti vsako uro $3\frac{1}{2}$ milj, zapusti kraj A ob osmih zjutraj, brzovlak, ki preleti vsako uro 6 milj, zapusti kraj A ob jednej popoldne in zateče prvi vlak v kraji B ; za koliko sta kraja A in B oddaljena?
- 34.) Dva prijatelja A in B gresta jeden drugemu nasproti in sicer prehodi A vsak dan 4, B pa 3 milje; vendar A zapusti svoj dom 2 dni pozneje, kakor B ; kedaj in kje prideta skupaj, ako sta njijina doma 20 milj jeden od drugega oddaljena?
- 35.) Za nekim poslom pošljejo čez 2 dni drugega, ki mora prvega v 4 dneh zateči; koliko milj prehodi prvi posel vsak dan, ako drugi posel vsak dan $1\frac{1}{2}$ milj več prehodi kakor prvi?
- 36.) Dva prijatelja si gresta nasproti in sicer zapustita oba ob istem času svoja doma; jeden bi potreboval 8 ur za vso pot, drugi pa 12 ur; v kolikih urah se srečata?
- 37.) Dve telesi se ob istem času začnete enakosno vsako od svojega kraja v tistej meri premikati; ta dva kraja ste za 6 metrov oddaljeni; sprednji preteče v vsakej minuti $\frac{3}{8}$ in zadnji $\frac{7}{8}$ metrov; kedaj ste te dve telesi za 4 metre oddaljeni?
- 38.) Neka gospodinja kupi za 11·875 fl. pol kosa platna manj 5 metrov; čez nekoliko dni pa vzame še ostanek kosa, in plača 18·125 fl.; koliko metrov meri celi kos?
- 39.) Neki mojster obljubi svojemu pomagaču za vsak dan, kedar dela, 1 fl. in hrano; mora pa za vsak dan, kedar dela, 25 krajcarjev za hrano plačati. Čez 30 dni dobi pomagač 20 fl.; koliko dni je delal?
- 40.) Neki igravec zgubi pri prvi igri $\frac{3}{8}$ od denarja, kar ga je prinesel sè seboj, dobi potem $\frac{1}{5}$ ostanka, v tretjej igri zgubi $\frac{5}{8}$ od vsega, kar je imel po drugej igri, v četrtej igri dobi polovico vega ostanka, potem pa zgubi $\frac{1}{3}$ od tega, kar je imel na zadnje in neha igrati. Zgubil je 25 fl.; koliko je imel od začetka?
- 41.) Neki kmet prinese v košu jajca na semenj in prodaja po 20 jaje za 0·5 fl. Nekdo pa pride memo njega, mu prevrže koš in ubije 5 jaje. Ko je bil kmet odškodovan, premisli se in proda vsako ostalo jajce po 0·03 fl., tako da je s tem razen odškodbe še 0·15 fl. dobička naredil; koliko jajc je prinesel v mesto?
- 42.) V nekej družbi je bilo od začetka dvakrat (n -krat) toliko gospodov kolikor gospá. Ko je pa še 6 (a) gospodov zraven prišlo in ko ste 2 (b) gospe odšli, bilo je v družbi 3krat (m -krat) toliko gospodov kolikor gospá; koliko gospodov in koliko gospá bilo je od začetka v družbi?

- 43.) Neka kmetica prinese v mesto gosi in race, vseh skupaj 10, in speča zanje 17.5 fl. Proda pa vsako gos po 2.25 fl. in vsako raco po goldinarji; koliko gosi in koliko rac je prinesla se sabo?
- 44.) Nek kupec zgubi $2\frac{1}{2}\%$, ako proda neko blago za 24 $\frac{3}{8}$ fl.; koliko odstotkov zgubi ali zasluži, ako isto blago proda za 26 fl.
- 45.) Kolika je specifična težkota srebrne stopljave, katera obstoji iz 42 kub. $\frac{\%}{m}$ čistega srebra, 6 kub. $\frac{\%}{m}$ bakra, ako je specifična težkota srebra = 10 $\frac{1}{2}$, in težkota bakra = 8 $\frac{7}{10}$?
- 46.) Prostornini dveh teles ste v in V , in specifični težkoti s oziroma S ; kolika je specifična težkota zmesi, ako se pri stopljavi nobedno teles ne zgosti?
- 47.) Nekdo stavi pri vsakej igri 4 fl. proti 3 fl. V 28 igrah nij nič zgubil in nič dobil, koliko iger je zgubil, koliko dobil?
- 48.) Neki oče obljubi svojemu sinu za vsako nalogo brez pomote 10 krajcarjev, za vsako nalogo s pomotami mora pa sin očetu 5 krajcarjev plačati; pri 20 nalogah je ostalo sinu od očetovih daril 80 kr.; koliko nalog je naredil brez pomot in koliko s pomotami?

Jednačbe z dvema neznankama.

§. 133. Naloga. Reši to-le jednačbo z ozirom na x

$$3x + 4y = 24$$

Rešitev: $x = \frac{24 - 4y}{3}$

Vrednost neznanke x nij določena, ker moremo za y vzeti katerokoli število.

Tako n. pr. je

$$\begin{array}{ll} \text{za } y = 1, & x = 6\frac{2}{3} \\ \text{" } y = 2, & x = 5\frac{1}{3} \end{array}$$

Ako imamo torej jednačbo z dvema neznankama, potrebujemo še drugo od prve neodvisno jednačbo, da določimo z obema vrednostmi neznank, kateri njima zadostujete. Iz obeh jednačb namreč moremo dobiti jedno jednačbo z jedno samo neznanko; to jednačbo moremo rešiti in ostalo neznanko določiti.

Ako iz dveh ali več jednačb odpravimo kako neznanko, pravimo, da to neznanko iztrebimo. Dobljeno jednačbo imenujemo iztrebljeno jednačbo.

Navadno rabijo tri načine za iztrebljevanje:

1. primerjalni način, 2. zamenjalni način in 3. način enakih koeficijentov.

1. Po primerjalnem načinu rešimo vsako jednačbo z ozirom na isto neznanko; dobljeni vrednosti ste jednaki (glej §. 4., IV), ter daste jednačbo, iz katere dobimo vrednost druge neznanke. N. pr.

$$1.) \ 5x - 4y = 23 \text{ in } 2.) \ 3x + 7y = 42$$

$$y = \frac{5x-23}{4} \qquad y = \frac{42-3x}{8}$$

ter

$$\frac{5x-23}{4} = \frac{42-3x}{8}$$

in

$$x = 7$$

potem je

$$y = 3 \text{ (po 1. ali po 2. jednačbi).}$$

2. Po zamenjalnem načinu rešujemo jedno jednačbo z ozirom na jedno neznanko, vrednost te neznanke namestujemo v drugej jednačbi, iz katere dobimo vrednost druge neznanke. N. pr.

$$1.) \ x + y = 14 \text{ iz te jednačbe } y = 14 - x; \ y = 6$$

$$2.) \ 3x - 2y = 12 \text{ „ „ „ } 3x - 2(14 - x) = 12; \ x = 8$$

3. Po načinu jednakih koeficijentov skrbimo, da dobimo v vsakej jednačbi pri jedneji in istej neznanki jednaka koeficijenta; to pa dosežemo, ako množimo vsak člen vsake jednačbe s primernim faktorjem. Jednačbi potem seštevamo ali odštevamo, ako imata jednaka koeficijenta razna oziroma jednaka znaka; dobljeno jednačbo z jedno neznanko potem rešimo. N. pr.

$$1.) \ 5x + 3y = 45$$

$$2.) \ 7x - 2y = 32$$

1. jednačbo množimo sè 7

2. „ „ „ 5

$$35x + 21y = 315$$

$$35x - 10y = 160$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ 31y = 155 \\ y = 5 \end{array}$$

1. jednačbo množimo z 2

2. „ „ s 3

$$10x + 6y = 90$$

$$21x - 6y = 96$$

$$\begin{array}{r} 31x = 186 \\ x = 6 \end{array}$$

Vaje.

$$1.) \ x + y = 5555 \text{ in } x - y = 3087$$

$$2.) \ x + y = 2a \text{ „ } x - y = 2b$$

$$3.) \ x + 19y = 207 \text{ „ } x + 12y = 137$$

$$4.) \ x + ay = c \text{ „ } bx + y = d$$

$$5.) \ x + 3\frac{2}{5}y = 80 \text{ „ } 4\frac{3}{4}y - x = 83$$

$$6.) \ ax + y = c \text{ „ } bx - y = d$$

- 7.) $x + 13y = 99$ in $9x - y = 65$
 8.) $x + ay = c$ „ $bx - y = d$
 9.) $12x + 7y = 81$ „ $12x - 7y = 39$
 10.) $ax + by = m$ „ $ax - by = n$
 11.) $\frac{x + 187}{7y + 16} = 2$ „ $\frac{253 - x}{8y - 16} = 3$
 12.) $\frac{x + c}{ay + b} = m$ „ $\frac{d - x}{fg - g} = n$
 13.) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 10$ „ $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 13$
 14.) $\frac{x}{a + b} - \frac{y}{a - b} = \frac{1}{a + b}$ in $\frac{x}{a + b} + \frac{y}{a + b} = \frac{1}{a - b}$
 15.) $\frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y}$ „ $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 2$
 16.) $\frac{1}{x} = m - \frac{1}{y}$ „ $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - n$
 17.) $3\frac{1}{3}x = 4\frac{1}{2}y + 1\frac{1}{2}$ „ $2\frac{5}{6}x = 5\frac{1}{3}y - 18\frac{1}{3}$
 18.) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = c$ „ $\frac{m}{y} - \frac{n}{x} = p$.

Poraba jednačb z dvema naznankama za rešitev nalog.

§. 134. Opomba. Bolj lahke naloge reši tudi z jedno nezanko, in tudi na pamet.

- 1.) Dve osebi ste stari 100 (n) let skupaj; B je pa za 12 let mlajši od A ; koliko je stara vsaka oseba?
- 2.) Vsota dveh števil znaša 560 ($2v$), njihova diferenca pa 286 ($2d$); kateri ste te dve števili?
- 3.) Vsota dveh števil je jednaka 210 (a), njihov kvocijent pa 4 (b); povej te dve števili?
- 4.) Diferenca dveh števil znaša 844 (d), njihov kvocijent pa 18 (b); koliki ste te dve števili?
- 5.) A pravi k B : „Daj mi 30 fl., potem imam ravno toliko, kakor ti. Ne, odgovori mu B , daj mi ti 30 fl., potem imam jaz dvakrat toliko kakor ti; koliko ima vsak?
- 6.) A in B imata skupaj 1200 fl., šesterno premoženje od A in osmerno premoženje od B bi pa znašalo 8000 fl.; koliko ima vsaka oseba?
- 7.) Mislimo si dve števili. Ako povekšamo jedno za 20, je dvakrat toliko, kakor drugo. Ako pa drugo za 20 povekšamo, je pa le $\frac{3}{4}$ krat večje od prvega. Kateri ste te dve števili?

- 8.) A prodal 2 $\mathcal{H}_6$ rži in 3 $\mathcal{H}_6$ pšenice vse skupaj za 37·5 fl., drugokrat pa prodal po istej ceni 3 $\mathcal{H}_6$ rži in 2 $\mathcal{H}_6$ pšenice vse skupaj za 35·75 fl. Po čem je rž, po čem je pšenica?
- 9.) Neki oče pravi svojemu sinu: Pred osmimi leti sem bil 8krat stareji od tebe; v 16 letih bom pa 2krat toliko star, kakor ti. Koliko je star oče in koliko sin?
- 10.) Nekdo ima dve čaši in jeden pokrov, s katerim more vsako čašo pokriti. Brez pokrova je vsaka čaša 15 fl. manj vredna, kakor s pokrovom. Ako pokrijemo prvo čašo s pokrovom, je ta $1\frac{2}{3}$ krat več vredna od druge. Ako pa položimo pokrov na drugo čašo, je ta ravno toliko vredna, kakor prva čaša. Koliko stane vsaka čaša?
- 11.) Nekdo ima dva konja in dve sedli; jedno sedlo stane 50 fl. Ako dene boljše sedlo na prvega konja, slabše pa na drugega, je prvi konj 100 fl. več vreden, kakor drugi. Ako pa slabše sedlo položi na prvega konja, boljše pa na drugega, je pa drugi konj le $\frac{9}{11}$ krat toliko vreden, kakor prvi konj. Koliko je vsak konj vreden?
- 12.) Ako prištevamo k števcu in imenivcu nekega ulomka 1, je njegova veljava jednaka $\frac{9}{10}$; ako pa od števca in imenivca odštevamo 1, je njegova vrednost $= \frac{9}{8}$; kateri je ta ulomek?
- 13.) V neki vodnjak teče voda po dveh ceveh. Ako je prva cev $4\frac{1}{2}$, druga pa 3 ure odprta, priteče po obeh 24 kub.^m/ vode. Ako je pa prva cev 5, druga cev 4 ure odprta, priteče po po njih 29 kub.^m/ vode. Koliko vode priteče skozi vsako cev v jedni uri?
- 14.) Neki vinski kupec ima dvoje vino. Ako zmeša 2 litra slabšega s 3 litri boljšega, stane liter zmesi 1·14 fl. Ako pa zmeša 2 litra boljšega in 3 litre slabšega, mora pa prodati liter zmesi po 1·11 fl. Koliko stane liter vsakega vina?
- 15.) Neki mojster in njegov pomočnik dobita 55 fl. za plačilo. Mojster je delal 12, pomočnik 20 dnij. Koliko je zaslužil vsak na dan, ako mojster v 3 dneh $2\frac{1}{2}$ fl. več zasluži, kakor pomočnik v 4 dneh?
- 16.) Neki gospod najame služabnika in voznika; vsakemu obljubi na leto 120 fl., jedno obleko in 1 par črevljev. Čez 9 mesecev zapusti služabnik službo in dobi zraven obljubljenе obleke še $85\frac{1}{2}$ fl. Mesec pozneje pa odide tudi voznik iz iz službe; dobi obljubljen par črevljev in $133\frac{3}{4}$ fl. Po čem računa gospod obleko in po čem črevlje?
- 17.) Poišči dve števili, katerih diferenca je $\frac{1}{4}(a)$ krat, produkt pa $7\frac{1}{2}(b)$ krat večji od njihove vsote.

- 18.) Poišči dve števili, katerih diferenca, vsota in produkt se imajo, kakor

$$1 : 2 : 3 \text{ ali } a : b : c$$

- 19.) Dve števili se imate kakor $4 : 3$, njihova diferenca in produkt pa kakor $1 : 36$. Kateri ste te dve števili?
- 20.) Dve števili se imate kakor $a : b$, njihova vsota in produkt pa kakor $c : d$. Poišči te dve števili.
- 21.) Nekega očeta vprašajo po številu otrok in njegov sin odgovori: Jaz imam toliko sestrá kakor bratov. Hči pa reče: jaz imam dvakrat toliko bratov kakor sester. Koliko sinov in koliko hčerá je imel ta oče?
- 22.) 21 gramov srebra izgubi v vodi 2 grama na težkoti, in 96 gramov zlata pa 5 gramov. Stopljava iz zlata in srebra, ki tehta $1 \cdot 14$ kilogramov, izgubi v vodi 92 gramov. Koliko srebra, koliko zlata je v tej stopljavi?
- 23.) Iz zlata in srebra narejena krona kralja Hierona iz Sirakuza je tehtala $11 \cdot 2012$ kilogramov, pod vodo pa le $10 \cdot 57891 \frac{4}{9}$. Ako zlato pod vodo $\frac{1}{19}$ in srebro $\frac{1}{10}$ svoje težkote izgubi, koliko zlata in koliko srebra je bilo v kroni?
- 24.) Dva prijatelja A in B stanujeta 32 milj narazen. Ako si gresta ob enem nasproti, prideta v 4 dneh skupaj. Ako pa B gre za A in sicer ob istem času od doma, ga zateče v 16 dneh. Koliko milj prehodi vsak na 1 dan?
- 25.) 24 mark $13\frac{1}{2}$ lotnega srebra stopimo z 12 markami nekega družega srebra in dobimo 12lotno srebro; koliko lotov čistega srebra ima marka družega srebra?
- 26.) Stopi čisto in 800tisočno delo srebro tako, da dobiš 920-tisočdelno srebro. Koliko vsakega srebra potrebuješ, da dobiš $30 \frac{4}{9}$ zmesi?
- 27.) Koliko bakra moraš 6 kilogramom 900tisočdelnega srebra primešati, da dobiš 750tisočdelno srebro?
- 28.) Ako zmešaš 8 kilogramov slabše kave s 24 kilogrami boljše kave, stane kilogram te zmesi 95 kr.; ako pa zmešaš $12 \frac{4}{9}$ slabše kave z 20 kilogrami boljše kave, stane kilogram te zmesi $92\frac{1}{2}$ kr.; po čem je slabša in po čem boljša kava?

Jednačbe s tremi ali več nezankami.

§. 135. Jednačbe s tremi ali več neznankami rešujemo na iste načine, kakor jednačbe z dvema neznankama; o tem se pre-pričamo na teh primerih.

1. primer.

$$1.) 4x - 3y + 5z = 23, \quad 2.) 3x + 2y - 4z = 11,$$

$$3.) 5x - y + 2z = 27.$$

Ako množimo 3.) z 2 in množeno jednačbo prištejemo k 2.) dobimo $13x = 65$, tedaj

$$x = 5$$

za x namestimo v 1.) in 2.) njogovo vrednost, in dobimo

$$5z - 3y = 3, \quad 4z - 2y = 4$$

Iz teh jednačb dobimo $2y = 8$, tedaj

$$y = 4, \quad z = 3$$

2. primer.

$$1.) 8x + 5y + 2z = 24, \quad 2.) 6x - 3y + z = 3,$$

$$3.) 4x + 9y - 6z = 4.$$

$$x = \frac{24 - 5y - 2z}{8}, \quad x = \frac{3 + 3y - z}{6}, \quad x = \frac{4 - 9y + 6z}{4}$$

tedaj

$$\frac{24 - 5y - 2z}{8} = \frac{3 + 3y - z}{6}, \quad \frac{3 + 3y - z}{6} = \frac{4 - 9y + 6z}{4}$$

In iz teh jednačb

$$y = \frac{60 - 2z}{27}, \quad y = \frac{6 + 20z}{33}, \quad \text{tedaj}$$

$$\frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33}$$

in končno $z = 3$. Ako za z namestimo njegovo vrednost v jednem dobljenih izrazov za y , dobimo

$$y = 2$$

In ako za y in z namestimo njihovi vrednosti v jednem dobljenih izrazov za x , dobimo

$$x = 1$$

3. primer.

$$1.) 3x + 4y = 31, \quad 2.) 2y + 3z = 17, \quad 3.) 4z + 5u = 22,$$

$$4.) 2x + 3u = 16.$$

Ako množimo 2.) z 2 in od nje odštevamo 1.) dobimo

$$\alpha) 2z - x = 1$$

Ako množimo α) z dvema in jo odštevamo od 3.), dobimo

$$\beta) 2x + 5u = 20$$

Ako odštevamo 4.) od β) dobimo $2u = 4$, tedaj

$$u = 2$$

$$\text{iz 3.)} \quad z = 3$$

$$\text{iz 2.)} \quad y = 4$$

$$\text{iz 1.) ali 4.)} \quad x = 5$$

4. primer.

$$1.) 3x + y + z = 18, \quad 2.) 2x + 3y + 2z = 28,$$

$$3.) 5x + 2y + 3z = 38.$$

Iz prve jednačbe dobimo $x = \frac{18-y-z}{3}$. Ako to vrednost namestimo v 2. in v 3. dobimo po urejenji

$$7y + 4z = 48, \quad y + 4z = 24$$

Iz zadnje jednačbe sledi $y = 24 - 4z$; ako to vrednost v predzadnji jednačbi namestimo, dobimo $24z = 120$ tedaj

$$z = 5$$

$$\text{iz zadnje jednačbe} \quad y = 4,$$

$$\text{iz izraza za } x \quad x = 3.$$

Vaje.

$$1.) x + y = 24, x + z = 20, y + z = 18$$

$$2.) x + y = 2a, x + z = 2b, y + z = 2c$$

$$3.) x + 3y = 21, 2x + 5z = 27, 3y + 7z = 36$$

$$4.) ax + by = m, cx + dz = n, fy + gz = p$$

$$5.) x = 22 - 2y, y = 22 - 3z, z = 37 - 4x$$

$$6.) x + y - z = 14, x - y + z = 10, y + z - x = 6$$

$$7.) \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 2, \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}z = 7, 2\frac{1}{2}y - z = 10$$

$$8.) x + y + z = 18, x - y - z = 0, y - \frac{2x}{3} + \frac{z}{2} = 2$$

$$9.) x + y + z = 50, \frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} + \frac{3}{4} = 9, 3x = 2(y + z)$$

$$10.) 3x + y + 2z = 80, x - 2y + 3z = 16, 2x + 3y - 4z = 50$$

$$11.) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 58, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 50, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 48$$

$$12.) x : y : z = 2 : 3 : 4, 3x + 2y + z = 96$$

$$13.) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$$

- 14.) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6}$
- 15.) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = c$
- 16.) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{60}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{23}{60}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{17}{60}$
- 17.) $\frac{9}{x} + \frac{12}{y} + \frac{6}{z} = 1\frac{1}{4}$, $\frac{12}{x} + \frac{18}{y} + \frac{8}{z} = 1\frac{3}{4}$, $\frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = \frac{7}{12}$
- 18.) $\frac{60}{x} + \frac{48}{y} + \frac{36}{z} = 34$, $\frac{48}{x} + \frac{36}{y} + \frac{60}{z} = 37$, $\frac{36}{x} + \frac{60}{y} + \frac{48}{z} = 37$
- 19.) $x + y + z + u = 18$
 $x + y - z - u = 4$
 $x - y + z - u = 2$
 $3x + y - z = 19$
- 20.) $x + y + z = 21$
 $x + y + u = 18$
 $z + u = 7$
 $x - y = 2$
- 21.) $x + 2y - z = 24$
 $3y - 2z + u = 18$
 $4z - 2x + y = 20$
 $x - 2u = 1$
- 22.) $x + y = 22$
 $y + z = 18$
 $z + u = 14$
 $x - u = 16$

Poraba jednačb z mnogoterimi neznankami za rešitev nalog.

§. 136. 1.) Poišči 3 strani x, y, z trokota, ako je

$$x + y = 179^m, x + z = 166^m \text{ in } y + z = 155^m$$

- 2.) Vsota 3 števil znaša 200; prvo deljeno z drugim dá 2 za kvocijent in 14 za ostanek; drugo deljeno s tretjim dá za kvocijent 3 in 12 za ostanek. Katera so ta števila?
- 3.) Osebe A, B in C dolžé skupaj 8800 fl. Ves dolg pa morejo le plačati, ako B dá $\frac{2}{3}$ svojega premoženja k celemu premoženju od A , ali A $\frac{7}{12}$ svojega premoženja k celemu premoženju od B , ali B $\frac{3}{5}$ svojega premoženja k celemu premoženju od C . Koliko ima vsak premoženja?
- 4.) Neki oče je dejal svojim sinoma, izmed katerih je jeden 4 leta starejši od drugega: Pred 4 leti bil sem 3krat toliko star, kakor vidva oba skupaj. Ako pa še 20 let živim, bom pa ravno toliko star, kakor vidva skupaj. Koliko je star oče, koliko vsak sin?
- 5.) A, B in C primerjajo svoje imetje. A pravi osebi B : Daj mi 500 fl., potem imam ravno toliko kakor ti. C pa pravi osebi A : Daj ti meni 500 fl., potem imam 4krat toliko kakor ti. Nazadnje pa še pravi B osebi C : Daj ti meni 625 fl., potem imam 3krat toliko kakor ti. Koliko ima vsaka oseba?

- 6.) Nekdo ima dva polna soda, A , B in prazen sod C , kateri je največji. Vsi 3 sodi držé 1900 litrov. Da napolni sod C , mora prelití ves sod A in $\frac{2}{3}$ od B , ali pa ves sod B in polovico soda A . Koliko litrov drži vsak sod?
- 7.) Nekdo ima 3 kovinske stopljave; prva obstoji iz 35 gr. zlata, 50 gr. srebra in 75 gr. bakra, druga iz 28 gr. zlata 32 gr. srebra in 60 gr. bakra, tretja iz 12 gr. zlata, 18 gr. srebra in 30 gr. bakra. On hoče od vsake stopljave nekoliko tako stopiti, da je v dobljeni stopljavi 18 gr. zlata, 24 gr. srebra in 40 gr. bakra. Koliko vsake stopljave mora vzeti v ta namen?
- 8.) A , B , C in D imajo vsi skupaj 512 zlatov à 8 fl. Sklenejo pa, pri vsakej igri, katere hočejo igrati, mora vsak, ki izgubi, vsakemu drugemu toliko plačati, kolikor ima denarja. Najpred izgubi A , potem B , potem C in nazadnje D in pokazalo se je po teh igrah, da ima vsak jednako zlatov. Koliko zlatov je imel vsak od začetka?
- 9.) Osebe A , B , C in D se usedejo k igri in sklenejo, da mora izgubeči vsakemu drugemu polovico od tega plačati, kar ima ravno ta. Najpred izgubi A , potem B , potem C in na zadnje D ; po teh igrah ima vsak 162 fl. Koliko je imel vsak od začetka igre?
- 10.) Tri števila znašajo vsa skupaj 200. Ako odštevamo 10 od prvega in od drugega, se imata ostanka, kakor 3 : 5. Ako pa odštevamo 10 od drugega in tretjega se imata ostanka kakor 5 : 9. Katera so ta števila?
- 11.) Neko število pišemo s 3 številkami, izmed katerih je notranja jednaka polovici vsote vnanjih dveh. Ako pa delimo omenjeno troštevilkasto število s številčno vsoto, dobimo za kvocijent 48. In ako to število zmanjšamo za 396, dobimo število, v katerem stojé številke ravno narobe od števil iskanega števila. Katero je to troštevilkasto število?

B. Jednačbe druge stopnje z jedno neznanko.

Čisto kvadratne jednačbe.

§. 136. Kvadratno jednačbo imenujemo čisto, ako ima neznanko samo v drugej potenci; n. pr.

$$x^2 = a$$

in to je oblika, v kakoršno moremo izpremeniti vsako čisto kvadratno jednačbo.

Naj je n. pr. dana jednačba.

$$3x^2 - 12 = 4x^2 + 42 - 7x^2$$

Ako v tej jednačbi prenesemo člene v neznanko na levo in člene brez neznanke na desno, dobimo po krčenji

$$6x^2 = 54 \text{ tedaj} \\ x^2 = 9$$

Čisto kvadratno jednačbo rešujemo, ako korenimo dvakrat vsako stran jednačbe izpremenjene na osnovno obliko. Iz $x^2 = a$ dobimo

$$x = \pm \sqrt{a} \text{ t. j.} \\ x_1 = + \sqrt{a}, x_2 = - \sqrt{a}$$

Čisto kvadratna jednačba ima dva protivna korena, ker dobimo isto, ako pozitivno ali negativno število z isto številno vrednostjo povzdignemo na drugo potenco. To razvidimo še iz teh-le primerov:

- a) $x^2 = 9$, $x = \pm 3$, $x_1 = + 3$, $x_2 = - 3$
 b) $x^2 = 25$, $x = \pm 5$, $x_1 = + 5$, $x_2 = - 5$
 c) $x^2 = 100$, $x = \pm 10$, $x_1 = + 10$, $x_2 = - 10$.

Vaje.

- 1.) $13x^2 = 2206672$ 2.) $ax^2 = b$, 3.) $2x^2 - 32 = 148 - 3x^2$
 4.) $\frac{3x}{14-x} = \frac{14+x}{x}$, 5.) $\frac{ax}{b-x} = \frac{b+x}{x}$, 6.) $12 = 120 - \frac{3}{4}x^2$
 7.) $2ab + x^2 = a^2 + b^2$, 8.) $\frac{a}{x} = \frac{4x}{b}$, 9.) $x^2 - 169 = 0$
 10.) $x^2 - a = 0$, 11.) $1 - \frac{x+3}{x^2} = \frac{4}{8} - \frac{x-3}{x^2}$
 12.) $a - \frac{x+c}{x^2} = b - \frac{x-c}{x^2}$

- 13.) Poišči število, katerega četrtna pomnožena z njegovo tretjino 9408 za produkt dá.
 14.) m ti del nekega števila pomnožen z njegovim n tim delom, dá a za produkt. Katero je to število?
 15.) Ako množimo $2\frac{3}{8}$ kratno (m -kratno) nekega število z njegovim $3\frac{1}{8}$ kratnim (n -kratnim), dobimo za produkt 2200 (a). Koliko je to število?
 16.) Kolika je dijagonala kvadrata sè stranjo 20 (a) metrov?
 17.) Kako visok je istostransk trokot, ki ima za stran $s = 20$ (a) metrov?
 18.) Pravokoten vrt je 87^m / dolg in 29^m / širok. Naredijo pa ta vrt za neko število metrov širji in za 3krat toliko metrov krajši, ter ga zmanjšajo za $507 \square^m$ /. Za koliko so širokost vrta zvečkali?

- 19.) Kolik je obseg kvadrata, ako je za 40^m daljši od obsega drugega kvadrata, ki ima za ploščino $\frac{2}{3}\frac{5}{8}$ od prvega?
- 20.) Kako dolga je stran kvadrata, ako je njegova ploščina $\frac{9}{16}$ -krat večja za 5^m daljšo stran?
- 21.) V nekem pravokotnem trokotu, ki ima 360^m dolgo hipotenuzo, je jedna kateta $2\frac{2}{5}$ -kratno od druge. Kako dolgi ste obe kateti?
- 22.) Kako dolg in širok je pravokotnik, ki ima 246^m dolgo dijagonalo, ako se ima dolgost proti širokosti kakor $40 : 9$?
- 23.) A in B zapustita ob istem času isti kraj. A gre proti severu in prehodi vsak dan $3\frac{3}{4}$ milj. B gre proti zahodu in prehodi vsak dan 5 milj. V koliko dneh sta 25 milj narazen.

Nečisto kvadratne jednačbe.

§. 138. Kvadratno jednačbo imenujemo nečisto, ako v njej nahajamo neznanko v drugej in prvej stopnji. N. pr.

$$x^2 + ax = b$$

V tej jednačbi ima najvišja potencia neznanke (x^2) koeficijent 1, neznanko nahajamo samo na jedne strani, člen brez neznanke pa na drugej strani. In v tako obliko moremo spremeniti vsako nečisto kvadratno jednačbo s koeficijentom druge potence neznanke i. t. d., t. j. ako jednačbo uredimo.

$$4x + 17 = \frac{587}{4x}$$

Ureditev

$$16x^2 + 17x = 587$$

$$x^2 + \frac{17}{16}x = \frac{587}{16}$$

Ako je nečisto kvadratna jednačba urejena, moremo jo rešiti. Naj je dana jednačba

$$x^2 + ax = b$$

Ker iz izraza $x^2 + ax$ ne moremo drugega korena poiskati, je treba, da pridenemo temu izrazu še tretji člen, tako imenovano kvadratno dopolnitev, s katerim dobimo na levi strani kvadrat binoma.

V izrazu $x^2 + ax$ manjka samo kvadrat drugega člena, ako si mislimo člen ax kot dvojni produkt binomovih členov. Drugi člen je potem $\frac{a}{2}$, ker je $2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x = ax$. Da pa ostane jednačba resnična, moramo obema stranema prišteti kvadrat drugega člena t. j. $\frac{a^2}{4}$. S tem dobimo

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4} \text{ ali}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4} \text{ ter}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \text{ in}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

V urejenj nečisto kvadratnej jednačbi je tedaj neznanka jednaka polovici koeficijenta prve potence neznanke z nasprotnim znakom, več ali manj kvadratnemu korenu iz znanega člena povečanega za kvadrat one koeficijentove polovice.

Pokaži še na teh-le jednačbah, kako do rešitve nečisto kvadratne jednačbe pridemo:

- 1.) $x^2 + 8x = 20$, 2.) $x^2 + 5x = -6$, 3.) $x^2 - 9x = -20$,
4.) $x^2 - 4x = 12$, 5.) $x^2 - 8x = -15$, 6.) $x^2 \pm mx = n$

Vaje.

1.) $x^2 - 6x = 16$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -2$$

Poskus:

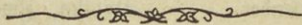
$$8^2 - 6 \cdot 8 = 16$$

$$(-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 16$$

- 2.) $x^2 + 8x = 240$, 3.) $x^2 + 2ax = b$, 4.) $3x^2 + 18x = 216$
5.) $ax^2 + bx = c$, 6.) $x^2 - 4x = 117$, 7.) $x^2 - ax = b$,
8.) $9x^2 - 72x = -135$, 9.) $ax^2 - bx = c$,
10.) $9000x^2 - 25x^2 = -9025$, 11.) $ax - bx^2 = c$,
12.) $4x + 17 = \frac{587}{4x}$, 13.) $\frac{x}{4} + \frac{20}{x+5} = 3\frac{5}{8}$,
14.) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{30}$, 15.) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4} = -\frac{1}{24}$,
15.) $\frac{5x+2}{x} = \frac{40}{5x-2} + 5$, 16.) $\frac{5x+1}{2x+3} + \frac{3x-1}{3x+3} + 3 = 0$

- 17.) Neka njiva, ki ima podobo pravokotnika, meri 2·58 hektárov. Njena dolgost je 22 metrov daljša od širokosti. Kako dolga in kako široka je ta njiva?
18.) Razdeli 36^m/ dolgo črto tako v dva dela, da pravokotnik iz teh dveh delov meri 320 □^m/.
19.) Neka družba hoče od svojih udov 1080 fl. nabrati. Koliko oseb je v tej družbi, ako bi morala vsaka oseba 6 fl. več dati, če 6 udov izstopi?
20.) Nek kupec ima dve vrsti nekega blaga. 10^m/ boljše vrste stane 2·5 fl. več kakor 10^m/ slabše vrste, Ako kupiš vsakega blaga za 10 fl., dobiš slabšega blaga 2^m/ več kakor boljšega. Koliko stane meter vsake vrste?

- 21.) Nekdo kupi vrt za nek denar, kmalo potem ga prodá za 750 fl. Dobička ima toliko odstotkov od kupnine, kolikor je njeni 20. del. Za koliko je kupil vrt?
- 22.) Nekdo kupi za 225 fl. ovsá, hektoliter po nekej ceni. Čez jeden teden bi bil za isti denar 10 $\frac{20}{100}$ manj dobil, ker je hektoliter za 25 kr. se podražil. Koliko hektolitrov ovsá je kupil?
- 23.) Dijagonala pravokotnika s 534^m dolgim obsegom je 195^m dolga; kako dolg in kako širok je ta pravokotnik?
- 24.) V pravokotnem trokotu je jedna kateta za 1 meter daljša kakor druga, hipotenuza pa 9^m daljša od manjše katete. Kako dolge strani ima trokot?
- 25.) Delavca *A* in *B* prevzameta neko delo; delavec *B* dela $1\frac{1}{2}$ dneva sam in oba skupaj še 6 dni, da je delo dovršeno. V kolikih dneh bi vsak delavec sam to delo dovršil, ako delavec *B* za to delo 3 dni več potrebuje kakor *A*?
- 26.) Ako odpremo dve cevi, napolnite ob enem nek vodnjak v 6 urah. Po jednej cevi samej bi pa napolnili vodnjak 5 ur pozneje z vodo, kakor po drugej cevi samej; v kolikih urah napolni vsaka cev za sé vodnjak?
- 27.) Nek popotnik potrebuje 3 dni več od družega, da prebodi 60 milj, ker drugi vsak dan miljo več prebodi kakor prvi. Koliko dni potrebuje za to pot?
- 28.) Razdeliti imamo med neko število ljudi 240 fl. Ako pa 4 prepuste svoj delež ostalim, dobi vsak ostali človek 3 fl. več. Za koliko ljudi je bil ta denar namenjen?
- 29.) Nek oče je zapustil svojim otrokom 14400 fl., in vsakemu jednako. Kmalo po njegovej smrti umerjeta 2 otroka in vsled tega dobi vsak ostalih otrok 1200 fl. več, kakor bi bil drugače dobil. Koliko otrok je zapustil oni oče?



Terminologija.

A.

Abfürzen, okrajšati.
Addiren, seštevati.
Addition, seštevanje.
Achter, osmika.

Anſetzen, nastaviti.
Auflöſung, rešitev, razrešitev.
Ausdruck, izraz.
Axiom, aksijom, osnovna resnica.

B.

Baſis, podlaga.
Beweis, dokaz.

Binom, dvočlenik, binom.
Bruch, ulomek, drob.

Č.

Člen, Glied.

D.

Darſtellung, načrtanje.
Delitev, Theilung.
Deliti, dividieren.
Deljenec, Dividend.
Deljenje, Division.
Deljenje delsko, Theildivision.
Delitelj, Diviſor.
Deljiv, theilbar.
Deljivost, Theilbarkeit.
Desetast, deſatiſch.
Desetica, Zehner.
Desettisočica, Zehntauſender.

Devetika, Neuner.
Dezimale, decimalka, desetilka.
Differenz, razlika, diferenca.
Dividend, deljenec, dividend.
Division, deljenje.
Diviſor, delitelj, divizor.
Dopolnitev, Ergänzung.
Dopolnitev kvadratna, quadratiſche
Ergänzung.
Dovod, Lehrſatz.
Dreier, trojka.
Dvojka, Zweier.

E.

Einfach, jednostaven, prost.
Einheit, jednota.
Einrichten, uravnati.
Einfach, jednojka.
Einfacher, jednoštevilkast.

Eksponent (kazalo), Exponent.
" potenčni, Potenzexponent.
" korenov, Wurzelexponent.
Eliminieren, iztrebiti.

F.

Faktor, množnik, faktor.
 Folgesatz, posledek, izvodek.

Fortlaufende Proportion, zaporedna
 razmera.
 Fünfer, petika.

G.

Gesellschaftsrechnung, družni račun.
 Gleichbezeichnet, istoznačen.
 Gleichnamig, istoimensk.
 Gleichung, jednačba.
 Glied, člen.

Grad, stopnja.
 Größe, količina.
 Grundoperation, osnovni račun.
 Grundsatz, osnovni izrek.

H.

Hauptgröße, glavna količina.
 Herausheben, izločiti.

Hunderter, stotica.
 Hunderttausender, stotisočica.

I.

Imaginaren, imaginär.
 Imenivec, Menner.
 „ skupni, gemeinschaftlicher
 Menner.
 Interessen, obresti.
 Istoimensk, gleichnamig.
 Istoznačen, gleichbezeichnet.
 Izločiti, herausheben.

Izpoznamek, spoznamek, Kennzeichen.
 Izrek, Fehrsatz.
 „ osnovni, Grundsatz.
 Izraz mnogočlenkast, mehrgliedri-
 ger Ausdruck.
 Iztrebiti, eliminieren.
 Izvod, Produkt.
 Iztrebljena jednačba, Eliminations-
 gleichung.

J.

Jednačba, Gleichung.
 „ določilna, Bestimmungs-
 gleichung.
 „ identična, identische Gle-
 chung.
 „ kvadratna, quadratische
 Gleichung.
 „ čistokvadratna, reinqua-
 dratische Gleichung.
 „ nečistokvadratna, unrein-
 quadratische Gleichung.
 „ iztrebljena, Eliminations-
 gleichung.

Jednojka, Einser.
 Jednota, Einheit.
 „ prvotna, Grundeinheit.
 „ prvega reda, erster Ord-
 nung.
 „ drugega reda, zweiter Ord-
 nung.
 „ tretjega reda, dritter Ord-
 nung.
 „ i. t. d. u. f. w.
 „ desetasta, dekadische Ein-
 heit.
 „ črtna, Linieneinheit.

K.

Kapital, glavnica, kapital.	Koren izračunljiv, razionalne Wurzel.
Kazalo, Exponent.	" neizračunljiv, irrazionalne Wurzel.
Kenzeichen, spoznatek.	Koréniti, Wurzelauziehen.
Kenziiffer, značajka, karakteristika.	Korénjenec, Radikand.
Kettenregel, sovezni račun.	Krožnina, Kreisfläche.
Količina, GröÙe.	Kubus, Kubus.
Količnik, Quotient.	Kvadrat, Quadrat.
Koren, Wurzel.	Kvocijent, Quotient.
" kvadraten, Quadraturzel.	" delsk, Theilquotient.
" kubičen, Kubaturzel.	

L.

Lehrsatz, izrek, dovod.	Logaritemska sestava, logarithmisches System.
Logarithem, logaritem.	Logaritmovnik, Logarithmentafel.
Logarithmand, logaritmand.	

M.

Maß, mera.	Množenec, Multiplikand.
Mantisse, mantisa, pridavek,	Množenje, Multiplikation.
Mehrziifrig, mnogestevilkast.	Množiti, multiplizieren,
Merjenje, Messen.	Množilec, Multiplikator.
Mera, Maß, Maßzahl.	Množnik, Faktor.
" skupna, gemeinschaftliches Maß.	Monom, jednočlenik, monom.
Milijonice, Millionen.	Multiplikation, množenje.
Minuend, minuend, zmanjšanec.	Multiplikator, množilec, multiplikator.
Mnogokratnik, Vielfache.	Multiplikand, množenec, multiplikand.
" skupni, das gemeinschaftliche Vielfache.	Multiplizieren, množiti.

N.

Način, Methode.	Načrtanje, Darstellung.
" primerjalni, Comparationsmethode.	Namestiti, substituieren.
" zamenjalni, Substitutionsmethode.	Nastaviti, ansetzen.
" enakih koeficientov, Methode gleicher Coefficienten.	Neuner, imenivec.
	Neuner, devetika.
	Neznanka, Unbekannte.
	Nišla, Null.

O.

Obresti, Zinsen.	Odštevanec, Subtrahend.
Odstotek, Prozent.	Odštevanje, Subtraction.

Okrajšati, Abfürzen.

Omera, Verhältniß.

„ geometrijska, geom. Verh.

„ upadna, fallendes. Verh.

„ rastna, steigendes Verh.

„ jednakosti, Verh. d. Gleichheit.

Omera obratna, umgekehrtes Verh.

„ številna, Zahlen-Verh.

„ količinska, Größen-Verh.

Odnen, urediti.

Ordnungszahlen, redovna števila.

Osmika, Achter.

Ostane, Rest.

P.

Petika, Fünfer.

Periode, povračaj, perjoda.

Plus, več, plus.

Podlaga, Basis.

Podložnica, Grundlinie.

Polynom, mnogočlenik, polinom.

Polovica, die Hälfte.

Posledek, Folgesatz.

Potenca, Potenz.

„ upadna, fallende Potenz.

„ rastna, steigende Potenz.

Potencovati, potenzieren.

Potencovanje, Potenzieren.

Pretresavati, discutieren.

Pridobitek, Vortheil.

Pridavek, Mantisse.

Primerjanje, Vergleichen.

Pristavek, Zusatz.

Produkt, izvod.

Produkt delsk, Theilprodukt.

Proportion, razmera.

Proportionirt, razmeren.

Prozent, odstotek.

Q.

Quozient, količnik, kvocient.

R.

Razdelno število, Theilungszahl.

Razdelna vsota, Theilungssumme.

Račun, Rechnung.

Radica, korenjenec, radikand.

Razlika, Differenz.

Razložitev, Zerlegung.

Razmera, Proportion.

„ stalna, stetige Proportion.

„ številna, Zahlenproport.

„ sestavljena, zusammen=gesetzte Proportion.

„ količinska, Größenprop.

Razmeren, proportionirt.

„ ravno, gerade proport.

„ obratno, verkehrt prop.

Razmernica, Proportionale.

„ geometrijska, geome=trische Proportionale.

Raznoimensk, ungleichnami g.

Raznoznačen, ungleichbezeich net.

Razrešitev, Auflösung.

Rēchnen, številiti, računiti.

Recipročna, vzratna vrednost, rezi=profer Werth.

Reduzieren, skraćiti.

Reduktion, skrčitev,

Regeldetrija, Regelbetrie.

„ jednostavna, einfache Regelbetrie.

„ sestavljena, zusam=mengeetzte Regelbetrie.

Rest, ostanek.

Rezultat, znesek.

Rešiti, auflösen.

S.

Šestjer, šestika.
Sedmika, Siebener.
Skrčiti, reducieren.
Skrčitev, Reduction.
Seštevati, addieren.
Seštevnik, Summand.
Stopnja, Grad.
Stotina, Hunderter.

Stotisočina, Hunderttausender.
Substituieren, namestiti, substitovati.
Subtraction, odštevanje.
Subtrahend, odštevaneč, zmanjševalec, subtrahend.
Summe, vsota.
Summand, seštevnik.

Š.

Šestika, Šestjer.
Šterka, Vierer
Šteti, zählen.
Šteti nazaj, rückwärts zählen.
" naprej, vorwärts zählen.
Številka, Ziffer.
" višja, höhere Ziffer.
Številiti, rechnen.
Številna črta, Zahlenlinie.
" uredba, Zahlensystem.
" vrsta, Zahlenreihe.
Število, Zahl.
" algebrasko, algebräische Zahl.
" desetasto, dekadische "
" dodajalno, additive "
" jednoštevilkasto, einzifferige Zahl.

Število mešano, gemischte Zahl.
" mnogoštevilkasto, mehrziffrige Zahl.
" neparno, ungerade Zahl.
" nikavno, negativno, negative Zahl.
" občno, allgemeine Zahl.
" oziravno, relativno, relative Zahl.
" odjemalno, subtractive Zahl.
" parno, gerade "
" posebno, besondere "
" pozitivno, positive "
" sestavljeno, zusammengesetzte Zahl.
" osnovno, Grundzahl.

T.

Tausender, tisočica.
Theilbar, deljiv.
Theilbarkeit, deljivost.
Theilrechnung, razdelni račun.
Theilung, delitev.

Tetiva, die Sehne.
Tisočica, Tausender.
Točka decimalna.
Trinom, tročlenik, trinom.
Trojka, Dreier.

U.

Ulomek, Bruch.
" brezkončen, decimalen, unendlicher Dezimalbruch.
" čisto perjdsk, rein periodischer Dezimalbruch.
" decimalen, desetinast, Dezimalbruch.
" končen, decimalen, endlicher Dezimalbruch.
" navaden, gemeiner Bruch.

Ulomek, nečisto perjodsk, unrein periodischer Dezimalbruch.

„ nepravi, unechter Bruch.

„ neresničen, uneigentlicher Bruch.

„ perjodsk, povraten, periodischer Dezimalbruch.

„ pravi, echter Bruch.

„ razširjen, erweiterter Bruch.

Unbekannte, neznanka.

Ungleichnamig, raznoimensk.

Ungleichbezeichnet, raznoznačen.

Uravnati, einrichten.

Urediti, ordnen.

V.

Več, mehr, plus.

Vrednost, Werth.

„ številna, Zahlenwerth.

„ številčna, Ziffernwerth.

„ mestna številčna, Stellenwerth der Ziffer.

Vergleichen, primerjati.

Verhältnis, omera.

Vielfaches, mnogokratnik.

Vierer, šterka.

Visočina, Höhe.

Vortheil, pridobitek.

Vsota, Summe.

„ številčna, Ziffernsumme.

„ izvršena, ausgeführte Summe.

„ nakazana, angezeigte „

„ algebrajska, algebraische „

Vzratna vrednost, reciproker Werth.

W.

Werth, vrednost.

Wurzel, Koren.

Z.

Zahl, število.

Zahlenreihe, številna vrsta.

Zahlenystem, številna uredba.

Zählen, šteti.

Zähler, števec.

Zaporedna razmera, fortlaufende

Proportion.

Zeher, desetica.

Zehtausender, desettisočica.

Zerlegung, zerložitev.

Ziffer, številka.

Zmanjševalec, Subtrahend.

Zmanjševanec, Minuend.

Značajka, Kennziffer.

Znesek, Resultat.

Zusatz, pristavek.

Zweier, dvojka.

K a z a l o.

Predgovor	Stran III.
---------------------	---------------

Vvod.

Pojem števila in njegovo zaznačenje	1
Osnovne resnice	2
Zaznačenje posebnih števil	2
Načrtanje celih števil	6

Prvi oddelek.

Računjanje s celimi števili.

Seštevanje sploh	6
Seštevanje imenastih števil	10
Seštevanje dekadičnih celih števil	11
Odštevanje sploh	12
Odštevanje imenastih števil	18
Odštevanje dekadičnih celih števil	19
Seštevanje in odštevanje jednačb in nejednačb	20
Algebrajska števila	20
Seštevanje in odštevanje algebrajskih števil	22
Množenje sploh	23
Množenje imenastih števil	29
Množenje dekadičnih števil	29
Deljenje sploh	32
Deljenje imenastih števil	43
Deljenje dekadičnih števil	44
Množenje in deljenje algebrajskih števil	46
Množenje in deljenje jednačb in nejednačb	48

Drugi oddelek.

O deljivosti števil	50
Razložitev števila v njegove prafaktorje	52
Največja skupna mera	52
Najmanjši skupni mnogokratnik	56

Tretji oddelek.

	Stran.
O ulomkih ali drobih	58
Uravnavanje ulomkov	61
Izprememba nepravih ulomkov v mešana števila	61
Razširjenje ulomkov	62
Okrajšanje ulomkov	63
Računjanje z ulomki	64
Decimalni ulomki	71
Izprememba navadnih ulomkov v decimalne in narobe	74
Računjanje z decimalnimi ulomki	77

Četrti oddelek.

O omerah in razmerah.

A. O omerah	85
B. O razmerah	88
C. Regeldetrija	95
Č. Družni ali delni račun	100
D. Sovezni račun	102

Peti oddelek.

O potencah, korenih in logaritmih.

A. O potencah	105
B. O korenih	110
C. O logaritmih	126

Šesti oddelek.

O jednačbah.

A. Jednačbe prve stopnje	141
Jednačbe z jedno neznanko	142
Jednačba z dvema neznankama	151
Jednačbe s tremi ali več neznankami	155
B. Jednačbe druge stopnje z jedno neznanko	159
Čisto kvadratne jednačbe	159
Nečisto kvadratne jednačbe	161
Terminologija	164



3
1
2
3
4
1
4
7

35
88
95
00
02

05
10
26

141
142
151
155
159
159
161
164

Knjiga dobiva se pri pisatelji samem v Mariboru,
v koroškem predmestji št. 36.