

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 24 (1996/1997)

Številka 5

Strani 158-269, XVII

Peter Legiša:

## FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA I – upodabljanje

Ključne besede: fizika, optika, fotografija, leče, fotografski objektiv.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/24/1306-Legisa.pdf>

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

5

**PRE  
SEK**

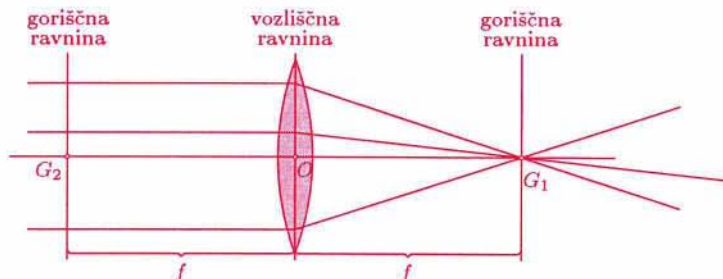
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 24 (1996-1997)  
ISSN 0351-6652



## FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA I – UPODABLJANJE

### Upodabljanje

Pri fiziki se učimo, da tanka zbiralna leča žarke, vzporedne osi leče, zbere v gorišču (slika 1).



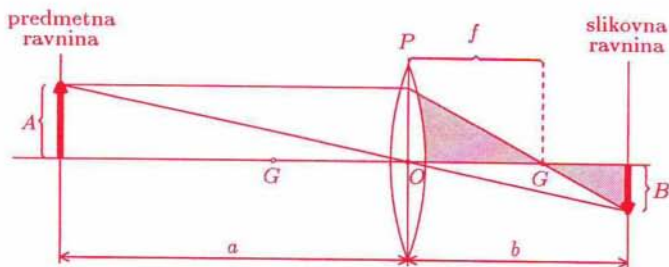
Slika 1.

*Optično središče leče*  $O$  je okarakterizirano s tem, da žarki, ki gredo skozenj, ne spremenijo svoje smeri. Natančneje: žarek, ki vpade na lečo in se lomi skozi  $O$ , je po izhodu iz leče vzporeden prvotni smeri. Če tak žarek oklepa majhen kot z optično osjo, lahko zaradi tankosti leče morebitni vzporedni premik zanemarimo.

Skozi optično središče leče narišemo ravnino  $P$ , pravokotno na os leče. Ravnini  $P$  pravimo *ravnina leče* (tudi *kardinalna* ali *vozliščna ravnina*). Leča ima dve gorišči:  $G_1$  in  $G_2$ . Razdalja med goriščem in ravnino leče je *goriščna razdalja* ali *goriščnica*. Navadno jo označimo s črko  $f$ .

Skozi vsako od gorišč leče narišemo še ravnini, pravokotni na os. To sta *goriščni ravnini*. V oddaljenosti  $a > f$  od (ravnine) leče narišemo še eno ravnino, pravokotno na os. To bo naša *predmetna ravnina*. V njej vzemimo manjši predmet kot na sliki 2. Kot vemo, leča napravi obrnjeno sliko predmeta v *slikovni ravnini*, ki je spet pravokotna na os. Razdaljo slikovne ravnine od (ravnine) leče označimo z  $b$ .

Leča nam, kot vemo, napravi podobnostno transformacijo predmetne ravnine na slikovno ravnino. Koefficient podobnosti označimo z  $m$  in imenujemo *povečava*. Pri običajnem slikanju je  $m$  mnogo bliže 0 kot 1, saj na filmu nastane pomanjšana slika stvarnosti.



Slika 2.

Na sliki 2 s podobnostjo trikotnikov vidimo, da je

$$m = B : A = b : a$$

in

$$B : A = (b - f) : f.$$

Tako je

$$b : a = (b - f) : f$$

in od tod

$$bf = ab - af.$$

Ali

$$(b + a)f = ab, \quad (1)$$

se pravi

$$\frac{b + a}{ab} = \frac{1}{f}$$

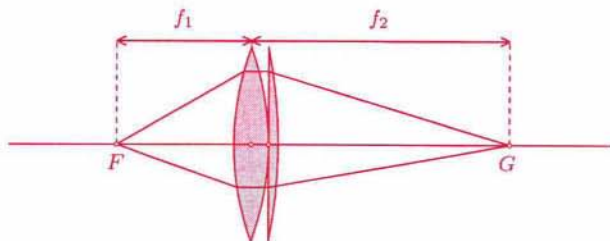
ali

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Razdalji  $a$  in  $b$  sta konjugirani razdalji.

## Dioptrija

Recipročna vrednost goriščne razdalje leče je *lomnost* ali *optična moč* leče. Enota za lomnost je *dioptrija*, ki ni nič drugega kot  $m^{-1}$ . Npr.: leča z goriščnico 20 cm ima  $1 : 0,2 \text{ m} = 5$  dioptrij. Leča z goriščno razdaljo 5 cm ima 20 dioptrij.



Slika 3.

Če tesno zložimo dve tanki leči, se sestav obnaša kot leča, katere moč je vsota moči obeh leč. To ni težko videti (slika 3). Žarke, ki izhajajo iz gorišča  $F$  prve leče, ta pretvori v snop vzporednih žarkov. Druga leča te žarke združi v svojem gorišču  $G$ . Po (1) je

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f},$$

kjer sta  $f_1, f_2$  goriščni razdalji obeh leč,  $f$  pa goriščna razdalja sestava. Npr.: če zložimo lečo z goriščno razdaljo 20 cm in lečo z goriščno razdaljo 5 cm, ima sestav  $5+20 = 25$  dioptrij. Goriščna razdalja sestava je torej 4 cm.

Omenimo še, da imajo razpršilne leče (kakrašne nosijo kratkovidni) negativno optično moč.

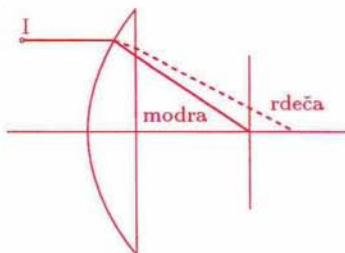
### Fotografski objektiv

Pri slikanju s fotoaparatom naj bi nam leča fotoaparata napravila obrnjeno sliko predmeta na film. Vendar stvari niso tako preproste. Naša razglabljanja so veljala za *tanko lečo*. Kritično razpoloženi bralci bi lahko vprašali: kako tanko?

Moj prvi fotoaparat danes že izumrle znamke Ferrania je dejansko imel eno samo majčkeno lečo. Ker je skozi aparat prihajalo zelo malo svetlobe, je bil osvetlitveni čas precej dolg in so slike bile ponavadi "stresene". Tudi kadar se mi je posrečilo držati aparat pri miru, slike niso bile ostre.

Vzrok je med drugim v tem, da steklo ne lomi svetlobe vseh barv enako. Modro barvo denimo lomi bolj kot rdečo. Pravimo, da v leči (enako kot v stekleni prizmi) pride do *disperzije* (razklona) bele svetlobe. Nekatera stekla svetlobo razklonijo bolj, druga manj. Pri kristalnih kozarcih je velika disperzija celo zaželeno, saj so mavrični razlomi lepi. V fotografiji, pri izdelavi očal, teleskopov itd. pa nam disperzija povzroča težave še danes.

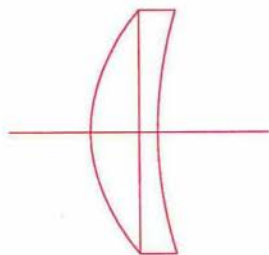
Na sliki 4 imamo točkast izvir  $I$  bele svetlobe. Če se modri žarki iz  $I$  srečajo ravno na filmu, se rdeči žarki srečajo šele za filmom. Tako namesto bele točke na filmu dobimo mavrično pego – z modro sredino in rdečim robom. Tej napaki, ki pokvari ostrino tudi pri slikanju črnobelih motivov, pravimo *barvna napaka* ali *kromatična aberacija*. (To ni edina, je pa najbolj opazna napaka enostavnih leč.)



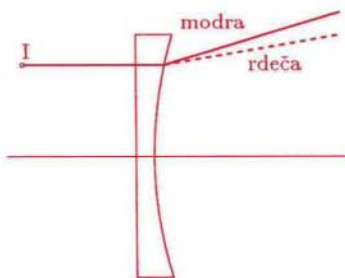
Slika 4. Leča razprši belo svetlobo.

Vsak, ki nosi očala z debelejšimi stekli, pozna barvno napako, ki je opazna predvsem na robu vidnega polja. Zaradi te in drugih optičnih napak enostavnih leč močno kratkovidnim ali daljnovidnim ljudem tudi očala ne pričarajo povsem ostre slike. Če pa ti “slabovidni” ljudje pogledajo skozi dober daljnogled, pogosto vidijo povsem ostro. Zakaj?

Pred več kot 250 leti sta dva angleška optika neodvisno ugotovila, da je s kombinacijo leč iz različnih stekel mogoče barvno napako močno zmanjšati. Vzela sta konveksno lečo iz navadnega stekla in dodala šibkejšo konkavno lečo iz svinčevega stekla, ki svetlobo bolj razkloni kot navadno steklo. Sestav je imel pozitivno optično moč (slika 5).



Slika 5. Akromat je sestavljen iz dveh različnih vrst stekel.



Slika 6. Konkavna leča belo svetlobo razprši v drugo smer kot konveksna.

Konveksna leča je belo svetlobo razklonila v eno smer, konkavna pa v drugo (slika 6). S primerno kombinacijo oblik obeh leč sta se učinka obeh razklonov bolj ali manj uničila.

Večkrat obe leči kar zlepijo skupaj. Takim kombinacijam leč rečemo *akromati* in so optično neprimerno boljši od enostavnih leč. Uporaba akromatov je omogočila izdelavo dobrih daljnogledov, mikroskopov itd.

Danes imajo celo najcenejši fotoaparati namesto ene leče *objektiv*, sestavljen iz dveh ali več leč. To je eden od čudežev masovne proizvodnje in potrošnje.

Dobri objektivni so sestavljeni iz najmanj štirih leč. Trud konstruktorjev je usmerjen k temu, da bi taki objektivni dajali kar se da verno sliko stvarnosti. Pri mnogih objektivnih lahko brez večjih problemov računamo, kot da imamo namesto objektivna eno samo tanko lečo, postavljeno v *optičnem središču* objektivna.

### Izteg

Vrnimo se torej k enačbi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Če gre  $a$  v  $\infty$ , gre  $a^{-1}$  k 0 in tako  $b^{-1}$  k  $f^{-1}$ . Lahko rečemo, da za  $a = \infty$  velja  $b = f$ : **Slika neskončno oddaljenega predmeta nastane v goriščni ravnini objektivna.**

Če je  $a < \infty$ , je  $a^{-1} > 0$  in tako

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} < \frac{1}{f},$$

se pravi  $b > f$ . Slike bližnjih predmetov so torej za več kot  $f$  oddaljene od optičnega središča objektivna. Če hočemo torej na filmu dobiti ostro sliko bližnjega predmeta, moramo povečati razdaljo med objektivom in filmom. Ponavadi se to zgodi tako, da se objektiv odmakne od filma. Odmik ali izteg označimo z  $x'$ , kjer je

$$x' = b - f.$$

Večina objektivov je vgrajena v nekakšno vijačnico. Če v pravo smer vrtimo obroč za ostrenje, se objektiv odmika od filma. (Danes navadno to namesto nas opravlja elektromotorček.) Označimo še

$$x = a - f.$$

Potem je

$$xx' = (a - f)(b - f) = ab - (a + b)f + f^2 = f^2$$

po (1). Zapomnimo si:

$$xx' = f^2.$$

Na mnogih objektivih imamo lestvico razdalj. Ker bi bilo težko označiti optično središče objektiva, te razdalje pomenijo *oddaljenost med predmetno ravnino in ravnino filma*, se pravi

$$d = a + b.$$

### Primeri:

1. Vzemimo objektiv z goriščno razdaljo 5 cm. Če je  $x = 2,5$  m, je

$$x' = \frac{f^2}{x} = \frac{25 \text{ cm}^2}{250 \text{ cm}} = 1 \text{ mm}.$$

Izteg je majhen. Razdalja med predmetno ravnino in ravnino filma je

$$d = x + x' + 2f \doteq x + 2f = 2,6 \text{ cm}.$$

Povečava je

$$m = \frac{b}{a} = \frac{x' + f}{x + f} = \frac{5,1 \text{ cm}}{255 \text{ cm}} = \frac{1}{50} = 0,02.$$

Če je objekt dolg 1 dm, je njegova slika na filmu dolga 2 mm.

2. Če je  $f = 25$  mm in  $x = 2,5$  m, je  $x' = \frac{f^2}{x} = \frac{1}{4}$  mm. Izteg je komaj opazen! Tu je

$$d \doteq x + 2f = 255 \text{ cm}$$

in

$$m = \frac{x' + f}{x + f} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Objekt, dolg 1 dm, ima 1 mm dolgo sliko na filmu.

Posplošimo nauke gornjih zgledov. Vzemimo, da je  $x$  **bistveno večji** od  $f$ . Potem je  $x'$  zelo majhen. Razdalja med ravninama filma in predmeta je  $x + 2f \doteq x$ . Dolžina slike je

$$B = mA = \frac{x' + f}{x + f} A \doteq \frac{f}{x} A$$

in izteg

$$x' = \frac{f^2}{x}.$$



Pri (približno) enaki razdalji je dolžina slike sorazmerna  $f$ . Izteg pa je sorazmeren  $f^2$ .

Če npr.  $f$  podvojimo, se dolžina slike podvoji, izteg pa se pomnoži z  $2^2 = 4$ .

### Povečave

Vrnimo se k enačbi  $a^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$ . Upoštevajmo, da je  $b = ma$ , pa je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

in od tod

$$a = (1 + m^{-1})f,$$

$$b = (m + 1)f.$$

Ker je  $b = x' + f$ , je

$$x' = mf, \quad x = m^{-1}f \quad (2)$$

ter

$$d = (2 + m + m^{-1})f. \quad (3)$$

Če je  $m = 1$ , se pravi slika enako velika kot original, je  $a = b = 2f$  in  $d = 4f$ . Če je  $m = \frac{1}{2}$ , je  $a = 3f, b = \frac{3}{2}f$  in  $d = \frac{9}{2}f$ . Če je  $m = 2$ , je  $a = \frac{3}{2}f, b = 3f$  in  $d = \frac{9}{2}f$ .

V tem zadnjem primeru je leča bliže originalu kot sliki. Izteg znaša  $x' = 2f$ . Tako velik izteg ponavadi dosežemo tako, da med lečo in telo aparata vstavimo meh.

### Primeri:

3. Naj bo  $f = 5$  cm in  $d = 45$  cm. Koliko je  $m$ ?

*Rešitev.* Stvari se lotimo takole. Ker je, kot vemo iz prakse, izteg  $x'$  sorazmerno majhen, je  $d \doteq x + 2f$  in torej  $x \doteq 35$  cm. Iz enačbe  $xx' = f^2$  ugotovimo

$$x' = \frac{f^2}{x} \doteq \frac{25}{35} \text{ cm} \doteq 7 \text{ mm}.$$

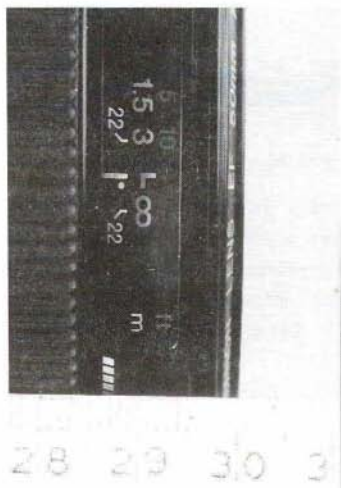
Če smo (preveč) natančni, postopek še enkrat ponovimo z upoštevanjem izračunane vrednosti za  $x'$ :

$$x = d - 2f - x' \doteq 34,3\text{cm}$$

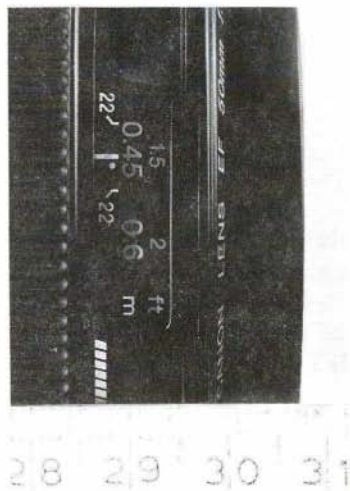
in

$$x' = \frac{f^2}{x} \doteq \frac{25}{34,3}\text{cm} \doteq 0,73\text{cm} \quad (\text{sliki 7 in 8}).$$

Po (2) je  $m = \frac{x'}{f} = \frac{0,73}{5} \doteq 0,15$ .



Slika 7. Objektiv, naravnana na  $\infty$ .

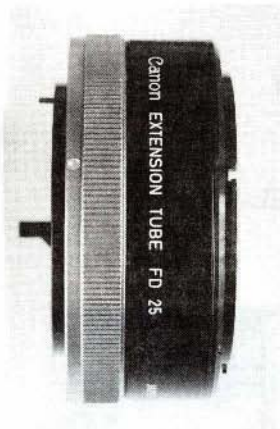


Slika 8. Objektiv, naravnana na 0,45 m.

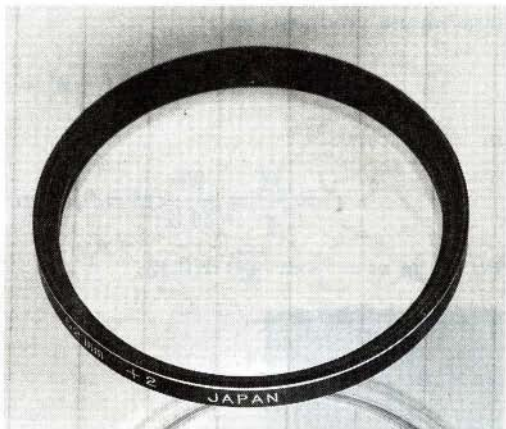
4. Objektiv iz prejšnjega zglada lahko naravnamo na razdalje  $d$  od 45 cm do  $\infty$ . Med objektiv in telo aparata vstavimo vmesni obroček dolžine 25 mm (podoben tistemu na sliki 9). Kakšne so mogoče povečave in razdalje slikanja?

*Rešitev:* Objektiv sam ima izteg od 0 do 7,3 mm. Z obročkom vred ima izteg od 25 mm do 32,3 mm. Iz enačbe (2) je  $m$  med  $\frac{25}{30}$  in  $\frac{32,3}{50}$ , se pravi od 0,5 do 0,65. Ustrezne razdalje slikanja izračunamo iz (3) in znašajo od 22,5 cm do 21 cm.

5. Na objektiv iz prejšnjega zglada (brez vmesnega obročka) privijemo predlečo z 2 dioptrijama (slika 10). Kakšne so mogoče povečave in razdalje slikanja?



Slika 9. Vmesni obroček.



Slika 10. Predleča s +2 dioptrijama.

**Rešitev:** Računamo, kot da bi tesno zložili dve tanki leči. Objektiv ima 20 dioptrij, predleča 2 dioptriji; sestav obeh torej 22 dioptrij ali goriščno razdaljo 45,5 mm. Goriščna razdalja sestava se je torej *zmanjšala* za 4,5 mm; za toliko vzamemo, da se je *povečal* izteg. Torej je novi izteg  $X'$  med 4,5 mm in  $7,3 + 4,5 = 11,8$  mm, in to pri novem  $F = 45,5$  mm. Iz enačbe

$$X' = MF$$

dobimo, da je povečava med

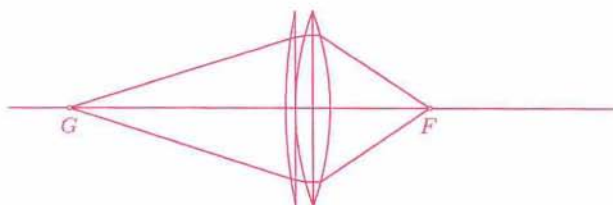
$$\frac{4,5}{45,5} \text{ in } \frac{11,8}{45,5},$$

se pravi med 0,1 in 0,26. Drugače povedano, med 1 : 10 in (približno) 1 : 4. Ustrezne razdalje izračunamo po (3) in znašajo od 55 cm do 28 cm.

### Formule za predleče

Če je bil objektiv naravnan na  $\infty$ , preden smo privili predlečo, je zdaj razdalja med ravninama predleče in predmeta enaka goriščni razdalji predleče.

To vidimo takole (slika 11). Če imamo točkast izvor svetlobe v gorišču predleče, nam predleča proti objektivu pošlje snop, vzporeden optični osi. Objektiv ta snop združi v svojem gorišču na filmu in tako napravi ostro sliko izvora.

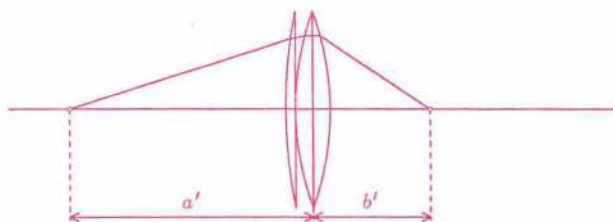


Slika 11.

Torej: če smo privili predlečo z dvema dioptrijama, bo razdalja od predleče do ravnine predmeta 50 cm. Če smo privili predlečo z goriščno razdaljo 250 mm, bo razdalja od predleče do ravnine predmeta 25 cm.

Pri starejših ljudeh leča v očesu izgubi prožnost in ne more toliko spreminjati goriščne razdalje kot v mladosti. Mnogi ostro vidijo oddaljene predmete, ne morejo pa brati. Kot pri fotoaparatu predleča v obliki očal pomaga zmanjšati goriščno razdaljo očesa. Z dvema dioptrijama bodo zgoraj omenjeni zanesljivo videli ostro na pol metra, z 2,5 dioptrijami pa na 40 cm.

Izpeljimo sedaj formule za majhen objektiv z dodatno predlečo (slika 12). Privzamemo, da se z dodatkom predleče optično središče ne premakne in torej  $b$  ostane isti. Objektiv s predlečo naj ima goriščno razdaljo  $f$ , predleča pa goriščno  $g$ . Kot prej privzamemo, da je optična moč sestava enaka  $f^{-1} + g^{-1}$ .



Slika 12.

Za objektiv brez predleče je (slika 2)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

s predlečo pa

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

Od tod je

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{g}. \quad (4)$$

**Primeri:**

6. Babica brez očal vidi ostro od 1 metra naprej. Z očali z 2 dioptrijama bo ostro videla že na razdalji  $a'$ , kjer je

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{1} + 2 = 3\text{m}^{-1},$$

se pravi na 33 cm. Z 2,5 dioptrije bo ostro videla že na 30 cm.

7. Z očali z  $-5$  dioptrijami kratkovidni vidi ostro od 25 cm do 2 m. Na kakšnih razdaljah vidi ostro brez očal?

*Rešitev.* Iz enačbe

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 5 \quad (\text{m}^{-1})$$

dobimo za  $a' = 2\text{m}$ , da je  $a = \frac{2}{11}\text{m} \doteq 18\text{cm}$ . Za  $a' = \frac{1}{4}\text{m}$  pa  $a = \frac{1}{9}\text{m} \doteq 11\text{cm}$ . Brez očal torej vidi ostro od 11 cm do 20 cm.

Izračunajmo novo povečavo  $m'$  za objektiv s predlečo, če je bila prejšnja povečava za objektiv brez predleče  $m$ .

Vemo, da je (slika 6 in formula 4)

$$m' = \frac{b}{a'} = b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{g}\right) = \frac{b}{a} + \frac{b}{g} = m + \frac{b}{g}.$$

Tu je  $b = x' + f = mf + f = (1 + m)f$  po (2). Torej je

$$m' = m + (1 + m)\frac{f}{g}.$$

Če je bil  $m = 0$ , je  $m' = \frac{f}{g}$ .

**Omejitve**

Tovrstni računi se prav dobro ujemajo s stvarnostjo, dokler imamo opravka z enostavnimi objektivi majhnih razsežnosti. Upoštevati pa moramo, da lahko dejanska goriščna razdalja za 6% odstopa od deklarirane. Objektiv, ki ga prodajajo kot 50 milimetrskega, ima lahko dejansko goriščno razdaljo 53 mm ali pa 47 mm.

Kako pa je z bolj zapletenimi objektivimi? Čas je, da priznamo, da večlečni objektiv nima samo ene vozliščne ravnine, ampak dve. Enačbe kot

$$a^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$$

še zmeraj veljajo, če  $a$  merimo od predmetne ravnine do prve vozliščne ravnine,  $b$  pa od slikovne ravnine do druge vozliščne ravnine. Torej je razdalja med predmetno ravnino in filmom enaka

$$d = a + b + h,$$

kjer je  $h$  lahko tudi negativen,  $|h|$  pa je razdalja med vozliščnima ravninama. Običajni prospekti ne navajajo vrednosti za  $h$ , kaj šele lege vozlišč, to je presečišč vozliščnih ravnin z optično osjo. Na srečo sta vozlišči pogosto blizu skupaj in  $h$  blizu 0. V tem primeru ni poseben greh, če si računanje poenostavimo tako, kot smo storili mi. Opozorimo naj, da sta pri teleobjektivih vozlišči lahko pred objektivom. To ni presenetljivo, saj tak objektiv z goriščno razdaljo 300 mm v dolžino lahko meri le dobrih 20 cm.

Če si ogledamo proizvajalčev prospekt za tak dober kilogram težak teleobjektiv (ki je pogost del opreme fotoreporterjev), opazimo, da je na razdalji 2,5 m povečava enaka 0,13. Če bi računali kot v primeru 3, bi dobili vrednost 0,16. Glavni vzrok za neskladje ni neupoštevanje dvojnosti vozliščnih ravnin, ampak dejstvo, da ima tak objektiv *notranje ostrenje* (angleško "internal focusing", od tod oznaka IF). Namesto da bi se za slikanje od blizu celotni sestav leč odmikal od filma, se s premikanjem nekaj manjših leč znotraj objektiva zmanjšuje goriščna razdalja. (Podobno na sicer na mnogo enostavnejši način dela naše oko.) Na razdalji 2,5 m je goriščnica zaznavno manjša od 300 mm. Dolžina objektiva ostane ves čas enaka, premiki pa so majhni in se dogajajo v zatesnjenem prostoru znotraj objektiva, kar povečuje hitrost in zanesljivost delovanja.

Specialni objektivni s tako imenovano *plavajočo optiko* ostrijo z iztegom in obenem s spreminjanjem goriščne razdalje.

Najmanj pregledne so razmere pri objektivih s spremenljivo goriščnico – popularnih *zoomih*. Podatki proizvajalcev o goriščnicah se že pri slikanju zelo oddaljenih predmetov neredko razlikujejo od dejanskih za več kot dovoljenih 6%. Pri slikanju iz bližine se goriščnice še dodatno spremenijo. Če pa znamo kolikor toliko oceniti resnično goriščno razdaljo, bodo naši računi dovolj natančni.