Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani
145478

HOČEVAR-
POSTET

MANUALE DI GEOMETRIA
PER IL GINNASIO INFERIORE

31 C

95/9

209

Manuale

di

GEOMETRIA

per il

GINNASIO INFERIORE

del

Dr. Francesco Hočevar,
professore di matematica presso l' i. r. Politecnico di Graz.

Seconda edizione rimaneggiata sulla sesta edizione tedesca

da

Francesco Postet,
I. R. professore ginnasiale.

Con 184 figure intercalate nel testo.

Approvato con riv. I. R. dispaccio ministeriale di data 22 luglio 1902, N. 22205.

Legato alla rustica costa C. 1·50, legato elegantemente C. 2·—.

K. K. STRAFANSTALTS BIBLIOTHEK

Vienna.
F. Tempsky, editore,
1902.

145478

145478

Indice.

Pag.

Introduzione 1

Planimetria.

La retta 2
Il cerchio. A. 5
L'angolo 8
Le parallele 14
Il triangolo 17
L'asse di simmetria dei segmenti rettilinei 23
L'asse di simmetria dell'angolo 25
Congruenza dei triangoli 27
I triangoli particolari 32
Il cerchio. B. 34
Il quadrilatero 38
Il poligono 44
Equivalenza 48
Teoremi sull'area del triangolo rettangolo 52
Trasformazione e partizione delle figure 53
Longimetria 56
Calcolo delle superficie 59
Somiglianza 69

Stereometria.

I piani 77
Posizioni principali di rette e di piani 78
Rette e piani paralleli 79
Rette e piani perpendicolari 80
Proiezioni, distanze, angoli d'inclinazione 82
Piani vicendevolmente normali 85
L'angolo solido 86
Il prisma 88
Il cilindro 96
La piramide e il tronco di piramide 99
Il cono e il tronco di cono 104
La sfera 108
I poliedri regolari 113

F2E 149/1959

Buchdruckerei G. Freytag, Gesellschaft m. b. H., Wien.

Introduzione.

§ 1. Forme geometriche. Concetto della geometria. Ogni *corpo* ha diverse proprietà o contrassegni, che noi percepiamo coi sensi; esso occupa uno spazio, ha una certa forma ed una determinata posizione; si compone di sostanza avente colore e durezza; ha un peso determinato ecc. Fra queste proprietà differenti dei *corpi reali* in geometria non si ha riguardo che alla *forma, alla grandezza* ed alla *posizione*, prescindendo da ogni altra proprietà. In questo modo si giunge al concetto del *corpo geometrico* e si dice:

Un corpo geometrico è uno spazio interamente limitato.

Ogni corpo ha tre estensioni o dimensioni: *lunghezza, larghezza* ed *altezza* (grossezza, profondità). I limiti del corpo si chiamano *superficie;* ogni superficie ha due dimensioni: lunghezza e larghezza. I limiti delle superficie si dicono *linee*; ogni linea ha una sola dimensione: lunghezza. I limiti delle linee chiamansi *punti*; i punti non hanno estensione alcuna.

Giovi quale esempio un cubo.

Punti, linee, superficie e corpi si chiamano *forme geometriche,* e la dottrina della genesi e delle proprietà delle forme geometriche porta il nome di *geometria.*

Le forme geometriche non si percepiscono coi sensi; possono essere però rappresentate mediante corpi reali, che diconsi *modelli,* come pure mediante disegni o *figure. Costruire* vuol dire disegnare una figura date alcune parti della stessa. (Problemi geometrici.)

§ 2. Genesi delle forme geometriche mediante il movimento. Un punto che si muove descrive una linea. Si distinguono *linee rette* e *linee curve.* Secondo che il punto descrive una linea retta o curva, si dice che durante il moto esso mantiene constantemente la propria *direzione*, oppure la cambia di contuno.

Una linea che si muove descrive una *superficie,* supposto però che la linea non si muova nella propria direzione, ciò che p. e. ha luogo trattandosi di una retta. Si distinguono *superficie piane* e *superficie curve.* In ogni superficie piana si possono condurre linee rette in tutte le direzioni.

Una superficie che si muove descrive un *corpo*, supposto però che la superficie non si muova nella propria direzione, ciò che p. e. ha luogo trattandosi di un piano.

§ 3. Divisione della geometria. Secondo che le forme geometriche giacciono in un piano o nò, si chiamano *forme piane* o *forme dello spazio*.

La dottrina della forme piane si dice *geometria piana* o *planimetria*; la dottrina delle forme dello spazio si chiama *geometria dello spazio* o *stereometria*.

Planimetria.

La retta.

§ 4. Proprietà fondamentali della retta. Il concetto, che possediamo della retta, ci pone in grado di rispondere facilmente alle seguenti domande: Quante rette si possono guidare per un punto dato? Quante rette si possono condurre per due punti? Qual' è la più breve di tutte le linee, che uniscono due punti dati?

Assiomi della retta: 1. Per due punti non si può condurre che una sola retta. — 2. La retta è la via più breve fra due punti dati.

Problemi: 1. Guidare una retta per un punto dato. — Il problema è indeterminato, perchè ad esso corrisponde un numero infinito di soluzioni.

2. Guidare una retta per due punti dati. — Il problema è determinato, perchè ad esso corrisponde una sola soluzione.

Per tirare linee rette ci serviamo della riga.

§ 5. Retta illimitata, semilimitata, limitata. La retta, che s'immagina prolungata all' infinito da ambedue le parti, si chiama *retta illimitata* o *raggio;* essa viene segnata mediante una o due lettere collocate vicino alla stessa, colle quali viene anche letta, p. e. la retta AB Fig. 1.

Una retta illimitata viene divisa da uno dei suoi punti in due rette *semilimitate*; una retta semilimitata viene indicata con due lettere scritte accanto ad essa, la prima delle quali si deve collocare al suo punto limite, p. e. la retta semilimitata CA e CB Fig. 1. La direzione di una retta semilimitata, nella quale la si può immaginare prolungata, viene indicata con una punta di freccia. Una retta, interamente limitata da due punti, dicesi *retta limitata* o *segmento rettilineo*; i punti limiti di-

cousi anche *estremità* della retta o del segmento. Una retta limitata viene segnata o con due lettere scritte alle sue estremità o con una lettera collocata nel mezzo, p. e. i segmenti DE, FG, a, b (Fig. 1).

Una retta che passa per due punti è detta *retta che unisce questi due punti;* la retta limitata dai due punti chiamasi *distanza* degli stessi; cosi DE (Fig. 1) è la distanza dei punti D ed E.

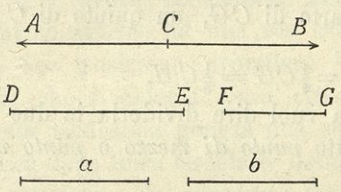

Fig. 1.

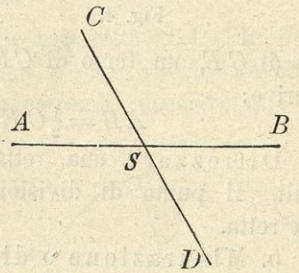

Fig. 2.

§ 6. Punto d'intersezione di due rette. Se due rette AB e CD (Fig. 2) non hanno comune che un solo punto S, si dice che s'intersecano nel punto S, il quale è detto *punto d'intersezione* delle rette.

§ 7. Confronto fra rette limitate. Due rette sono *eguali*, se possono venir sovrapposte l'una all'altra in modo che coincidano le loro estremità e quindi anche tutti i loro punti intermedi, come p. e. le rette a e b (Fig. 1) e si scrive $a = b$; in caso contrario le rette sono *disuguali*, come p. e. DE ed FG, dove DE è maggiore di FG e si scrive o $DE > FG$ od $FG < DE$.

Problema. Trasportare una retta di data lunghezza, cioè disegnare una retta eguale ad una retta data.

Per confrontare e trasportare le rette ci serviamo del compasso.

§ 8. Operazioni colle rette. Come coi numeri, così anche colle rette possiamo eseguire alcune operazioni.

1. Addizione. Se è $AB = a$ e $BC = b$ (Fig. 3), sarà AC la *somma* dei segmenti a e b, cioè

$$AC = a + b.$$

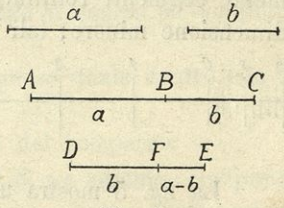

Fig. 3.

2. Sottrazione. Se è $DE = a$ e $DF = b$, sarà FE la *differenza* dei segmenti a e b, cioè

$$FE = a - b.$$

3. Moltiplicazione di un segmento rettilineo per un numero intero. Se è dato $AB = a$ (Fig. 4) e si fa $AB = CD = DE = EF = FG = GH$, sarà CE il doppio, CF il triplo, CG il quadruplo, CH il quintuplo di AB, ciò che s'indicherà così $CE = 2.a$, $CF = 3.a$, $CG = 4.a$, $CH = 5.a$.

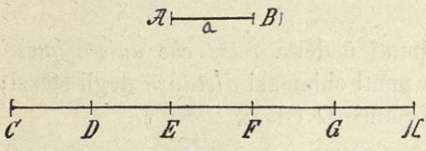

Fig. 4.

4. Partizione o divisione di un segmento rettilineo per un numero intero. AB è la metà di CE, un terzo di CF, un quarto di CG, un quinto di CH, e si scrive:

$$AB = \tfrac{1}{2}CE = \tfrac{1}{3}CF = \tfrac{1}{4}CG = \tfrac{1}{5}CH.$$

Dimezzare una retta limitata vuol dire dividerla in due parti eguali. Il punto di divisione è detto *punto di mezzo* o *punto medio* della retta.

5. Misurazione o divisione di una retta per un'altra retta limitata. Misurare una retta vuol dire cercare quante volte una retta, presa quale unità di lunghezza, è contenuta nella retta data. Il numero che indica ciò dicesi numero *esprimente la misura della retta* o più brevemente *la misura* della retta.

Per misurare le lunghezze adoperiamo il metro (m) per unità, le parti e i multipli del quale si formano secondo il sistema decimale:

0·1 m = 1 dm (decimetro),	10 m = 1 dkm (decametro),
0·01 m = 1 cm (centimetro),	100 m = 1 hm (ettometro),
0·001 m = 1 mm (millimetro),	1000 m = 1 km (chilometro),
	10000 m = 1 μm (miriametro).

Per misurare le distanze si adoperano aste di legno o di metallo, come pure corde, catene e simili, sulle quali sono riportate ed suddivise una o più unità lineari. Tali apparecchi diconsi *canne, corde, catene.* Nel disegnare piani topografici, mappe e simili si adoperano comunemente segmenti rettilinei sui quali l'unità di lunghezza è trasportata in dimensione minore; tali rette diconsi *scale ridotte.*

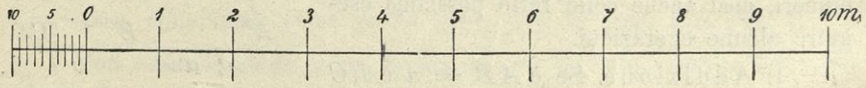

Fig. 5.

La fig. 5 mostra una semplice scala a divisione decimale, l'unità della quale rappresenta 1 m, mentre la lunghezza reale di essa è 1 cm; perciò questa scala è $\frac{1}{100}$ della grandezza naturale.

Quesiti d'esercizio. 1. Date tre rette a, b, c, e precisamente $a > b > c$, costruire le seguenti espressioni:

$$a + b,\ a + c,\ b + c,\ a - b,\ a - c,\ b - c,\ a + b + c.$$

2. Costruire il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo di una retta data.

3. Si provi a dividere una retta data in 3, 4, 5, 6 parti eguali col compasso o ad occhio.

4. È data una retta a; costruire $\frac{3}{2}a$, $\frac{2}{3}a$, $1\frac{1}{3}a$, $\frac{3}{4}a$, $2{\cdot}4\,a$.

5. Si misuri una retta col mezzo della scala della Fig. 5.

6. Col mezzo della medesima scala si disegni una retta di una lunghezza data in $\frac{1}{100}$ della propria grandezza. Supponiamo che la retta sia lunga 7·3 *m*, 65 *dm*, 240 *cm*.

Il cerchio. A.

§ 9. Genesi del cerchio. Definizioni. Se una retta OA (Fig. 6) rota nel piano attorno ad una sua estremità sino a che ritorni novamente nella sua posizione primitiva, l'altra sua estremità descrive una linea curva, che si chiama *linea circolare*, e la retta medesima genera una superficie limitata dalla linea circolare, detta *superficie circolare*. Dal contesto è facile comprendere se per cerchio si voglia intendere la linea circolare o la superficie circolare. La linea circolare è detta anche *circonferenza* o *periferia* della superficie circolare (del cerchio).

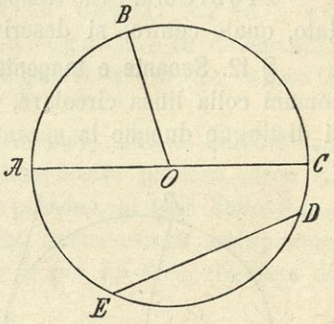

Fig. 6.

La linea circolare è dunque una linea chiusa, ciascun punto della quale dista egualmente da un punto dato, che si chiama *centro* del cerchio (O Fig. 6). Ogni retta, che unisce il centro del cerchio con un punto della periferia, si chiama *raggio;* tutti i raggi di un cerchio sono eguali: $OA = OB = OC$; perchè?

Ogni retta, che unisce due punti della periferia del cerchio, dicesi *corda,* come DE. Ogni corda, che passa pel centro, si chiama *diametro,* come AC. Tutti i diametri di un cerchio sono eguali, perchè il diametro è doppio del raggio.

Problemi: 1. Costruire un cerchio, dati il centro ed un punto della periferia.

2. Disegnare un cerchio intorno ad un punto quale centro con un dato raggio.

Per disegnare linee circolari ci serviamo del compasso.

§ 10. Posizione vicendevole di un punto e di un cerchio. Un punto, che non giace nella periferia di un cerchio, può trovarsi o dentro o fuori del medesimo. Il punto giace dentro al cerchio se la sua distanza dal centro è minore del raggio, giace fuori del cerchio se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.

Problema. Determinare la posizione di un punto, che abbia da un punto dato una distanza data.

Questo problema è indeterminato, perchè v'ha un numero infinito di punti, che sodisfanno alla condizione enunciata; tutti questi punti giacciono nella linea circolare, il cui centro è il punto dato e il raggio la distanza data. Si dice anche: Questa linea circolare è il *luogo geometrico* di tutti quei punti, la cui distanza dal punto dato è eguale alla distanza data.

§ 11. Cerchi eguali. Due cerchi, che hanno raggi eguali, si dicono *eguali* se sovrapposti l'uno all'altro in modo che i centri coincidano, si coprono anche le loro periferie.

Due cerchi di raggio disuguale si dicono *disuguali.*

Problema. Si trasporti un cerchio, cioè intorno ad un punto dato, quale centro, si descriva un cerchio eguale ad un cerchio dato.

§ 12. Secante e tangente. Una retta illimitata, che ha due punti comuni colla linea circolare, è detta *secante,* come FG (Fig. 7). In che si distingue dunque la secante dalla corda?

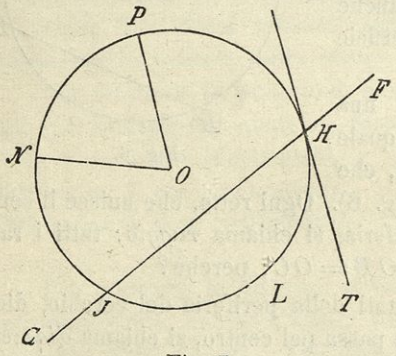

Fig. 7.

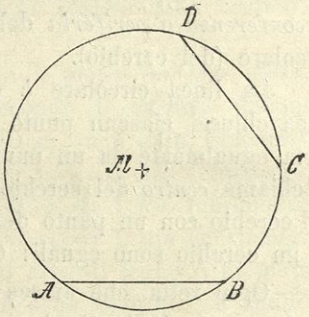

Fig. 8.

Una retta, la quale per quanto la si prolunghi non ha che un punto solo comune colla linea circolare, è detta *tangente.* Si dice che essa *tocca* il cerchio, p. e. HT; H è il *punto di contatto.*

§ 13. Arco, settore, segmento. Una porzione della periferia del cerchio è chiamata *arco circolare* NP (Fig. 7). Due archi dello stesso cerchio od di due cerchi eguali, possono, riguardo alla loro grandezza, essere confrontati fra loro come due rette.

Due archi, che hanno raggi eguali, si dicono *eguali*, se sovrapposti l'uno all'altro si coprono esattamente, altrimenti si dicono *disuguali.* Affinchè due archi eguali AB e CD (Fig. 8) possano andare a sovrap-

porsi l'uno all'altro, basta lasciare un arco fermo al suo posto e spostare in sè stessa la circonferenza assieme coll'altro arco.

Ogni diametro divide il cerchio in due parti eguali. Ogni altra corda divide il cerchio in due archi disuguali, p. e. la corda AB (Fig. 8); il minore di essi dicesi *arco corrispondente alla corda*. La porzione della superficie circolare limitata da due raggi e da un arco dicesi *settore circolare*, come NOP (Fig. 7); la porzione della superficie circolare limitata da un arco e dalla rispettiva corda, è detta *segmento circolare* come HJL e HJP (Fig. 7).

§ 14. Relazioni fra archi e corde. Se facciamo che uno degli archi eguali AB e CD (Fig. 8) vada a coprire l'altro, i punti A e C coincideranno coi punti B e D; perciò anche le corde AB e CD saranno eguali, cioè nello stesso cerchio od in cerchi eguali ad archi eguali corrispondono corde eguali. Inversamente: Nello stesso cerchio o in cerchi eguali a corde eguali corrispondono archi eguali.

Per mezzo di questo teorema si possono nello stesso cerchio od in cerchi eguali prendere archi eguali col trasportare le loro corde rispettive. Archi circolari di raggio eguale si possono, al pari delle rette, sommare e sottrarre. Un arco circolare può anche essere moltiplicato e diviso (misurato) per un numero intero o per un arco circolare di raggio eguale.

Quesiti d'esercizio. 1. Si trasporti un arco.

2. Si costruisca il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo di un arco dato.

3. Si provi a dividere un arco dato in 2, 3, 4, 5, 6 parti eguali col compasso o ad occhio.

§ 15. Partizione della periferia del cerchio. Se si divide la periferia di un cerchio in 360 archi eguali, uno di questi si dice *grado* (°), più esattamente *grado circolare*. Le 60. parte di un grado dicesi *minuto* (′) la 60. parte del minuto è detta *secondo* (″). Dunque un grado ha 60 minuti (′), un minuto 60 secondi (″).

La metà di un cerchio chiamasi *semicerchio* (EGF Fig. 9), la quarta parte *quadrante* (EG), la sesta parte *sestante* (EJ), l'ottava parte *ottante* (EH). — Quanti gradi ha un semicerchio, un quadrante, un sestante, un ottante?

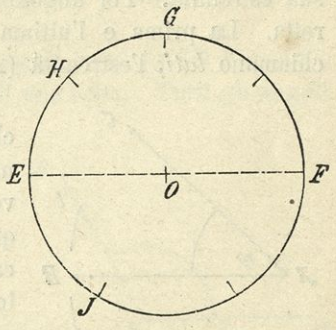

Fig. 9.

Quesiti d'esercizio. 1. Si disegni ad occhio la quarta parte di un quadrante, la terza parte di un ottante, la quinta parte di un sestante.

2. Quanti gradi ha la quinta parte del quadrante, la quarta parte del sestante ?
3. Quanti gradi ha la nona, la quindicesima parte della periferia ?

§ 16. Problemi. 1. Determinare la posizione di un punto, che abbia una data distanza e da due punti dati A, B (Fig. 10). — Il punto cercato deve giacere nella linea circolare, che ha il centro in A e il raggio e, e in pari tempo nella linea circolare, che ha il centro in B e il raggio anche e; perciò i punti d'intersezione X e Z delle due periferie corrispondono al problema proposto. Vi sono sempre due tali punti?

Quesiti d'esercizio. 1. $AB = 3\ cm$, $e = 2\ cm$. 2. $AB = 4\ cm$, $e = 4\ cm$. 3. $AB = 36\ mm$, $e = 18\ mm$.

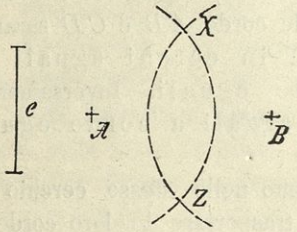

Fig. 10.

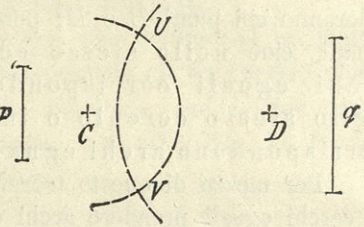

Fig. 11.

2. Determinare un punto, che abbia due distanze differenti da due punti C, D (Fig. 11), e precisamente sia p la distanza da C, q quella da D.

Quesiti d'esercizio. 1. $CD = 5\ cm$, $p = 3\ cm$, $q = 1\ cm$. 2. $CD = 3{\cdot}5\ cm$, $p = 2\ cm$, $q = 3\ cm$. 3. $CD = 36\ mm$, $p = 15\ mm$, $q = 21\ mm$. 4. Sopra una retta data determinare un punto, che abbia una data distanza da un punto dato e che sia situato fuori della retta.

L'angolo.

§ 17. Genesi dell'angolo. Definizioni. L'angolo è generato da una retta semilimitata AB (Fig. 12), che si fa rotare nel piano intorno alla sua estremità. Per angolo s'intende la porzione del piano descritta dalla retta. La prima e l'ultima posizione della retta mobile (AB, AC) si chiamano *lati*, l'estremità (A) dicesi *vertice* dell'angolo.

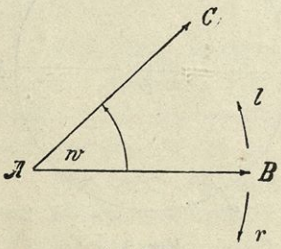

Fig. 12.

Un angolo si segna o mediante una lettera che si pone nella superficie angolare in vicinanza del vertice, o mediante una lettera al vertice preponendovi il segno dell'angolo; dunque $\sphericalangle w$ oppure $\sphericalangle A$. Spesse volte per indicare un angolo è necessario adoperare tre lettere, delle quali la prima e l'ultima stanno presso ai lati, quella in mezzo sta al vertice; dunque $\sphericalangle BAC$, oppure $\sphericalangle CAB$.

La grandezza di un angolo non dipende già dalla lunghezza dei lati, cioè è indifferente che essi sieno più o meno lunghi; noi li possiamo sempre immaginare prolungati quanto si voglia (oltre B e C).

Due angoli sono *eguali,* se possono venir sovrapposti in modo che i lati di uno coincidano coi lati dell'altro. Altrimenti si dicono *disuguali,* come p. e. gli angoli x ed y (Fig. 20). Come si riconosce mediante la sovrapposizione di due angoli disuguali quale sia l'angolo *maggiore* e quale il *minore*?

§ 18. Rotazione a sinistra e a destra. Ogni retta semilimitata può rotare nel piano intorno alla sua estremità in direzioni opposte. La retta semilimitata AB (Fig. 12) può rotare o verso l o verso r. La rotazione di AB verso l dicesi *rotazione a sinistra* (rotazione positiva), l'altra chiamasi *rotazione a destra* (rotazione negativa), e ciò perchè chi si trova sul piano orizzontale in A e guarda verso il punto B, ha l a sinistra, r a destra. — Quale rotazione fanno gli indici di un orologio?

§ 19. Distinzione degli angoli. Due rette che partono da un punto formano due angoli; il minore di questi dicesi *concavo,* il maggiore *convesso.* Nella Fig. 12 l'angolo concavo w formato dalle rette AB ed AC, e che fu originato dalla rotazione a sinistra di AB verso AC, è indicato più da vicino mediante la freccia curva; al contrario l'angolo descritto dalla rotazione a destra di AB verso AC è un convesso. Quando in seguito si parlerà di un angolo di due rette, s'intenderà sempre il minore, cioè il concavo, a meno che non venga detto espressamente il contrario.

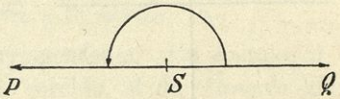

Fig. 13.

Un angolo, i cui lati giacciono in linea retta in direzione opposta, dicesi *angolo diritto* PSQ (Fig. 13); esso è generato da mezza rotazione della retta semilimitata. Tutti gli angoli diritti sono fra loro eguali; perchè?

L'angolo concavo è minore, l'angolo convesso è maggiore di un angolo diritto.

La metá di un angolo diritto dicesi *angolo retto* (ASB Fig. 14); esso è prodotto da un quarto di rotazione di una retta. Tutti gli angoli retti sono fra loro eguali; perchè?

Un angolo minore di un retto si chiama *acuto,* un angolo concavo maggiore di un retto è detto *ottuso.* (COD Fig. 15).

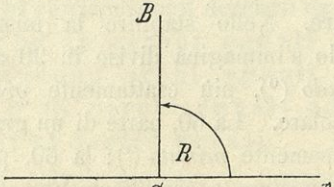

Fig. 14.

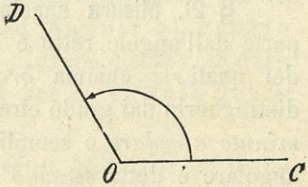

Fig. 15.

L'angolo descritto da una retta semilimitata in una completa rotazione dicesi *angolo pieno*.

L'angolo retto si segna sovente con R; perciò l'angolo diritto è $= 2R$, il pieno $= 4R$.

Nel disegno pratico per la costruzione meccanica di angoli retti, ci serviamo dei così detti „triangoli"; si darà più tardi una costruzione geometrica dell'angolo retto (mediante il compasso e la riga).

§ 20. Differenza delle direzioni fra due rette semilimitate. Posizione normale ed obliqua. La grandezza di un angolo dipende esclusivamente dalle direzioni e non già dalla lunghezza dei suoi lati. Due rette semilimitate, che partono da un punto, hanno *differenti direzioni*; l'angolo concavo, che esse formano, è la misura *della differenza delle loro direzioni*. Se esse formano un angolo diritto, hanno *direzioni opposte*, come SP ed SQ (Fig. 13).

Se due rette, che si tagliano, formano angoli retti, si dice che *s'intersecano ad angolo retto* od anche che *l'una è perpendicolare* o *normale all'altra*. Nella figura 16 CD è perpendicolare ad AB od AB è perpendicolare a CD. Ciò si scrive nel modo seguente: $CD \perp AB$ (si legge CD è perpendicolare ad AB) od $AB \perp CD$. Da un punto di una retta non si può inalzare che una sola normale alla stessa; perchè?

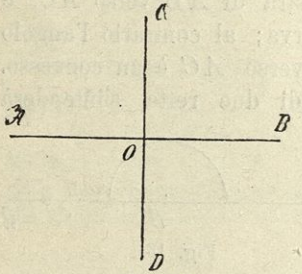

Fig. 16.

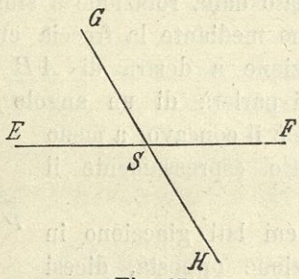

Fig. 17.

Si badi di non scambiare il concetto „normale o perpendicolare" col concetto „verticale o a piombo". La direzione verticale è data da un filo, il quale è fisso ad un'estremità ed è teso da un corpo appeso liberamente all'altra estremità. Esempi per rette normali e verticali.

Se due rette intersecantisi formano angoli acuti ed ottusi, si dice che *una* è *obliqua all'altra* o che *s'intersecano obliquamente*, p. e. EF e GH (Fig. 17).

§ 21. Misura angolare. Nello stabilire la misura dell'angolo si parte dall'angolo retto e lo s'immagina diviso in 90 angoli eguali, uno dei quali si chiama *grado* (^{0}), più esattamente *grado angolare*, per distinguerlo dal grado circolare. La 60. parte di un grado angolare dicesi *minuto angolare* o semplicemente *minuto* ($'$); la 60. parte di un minuto angolare è detta *secondo angolare* o semplicemente *secondo* ($''$).

L'angolo retto ha quindi 90^0, il diritto 180^0, il pieno 360^0.

Quesiti d'esercizio. Di esprimano in gradi, minuti, secondi:

1. 1000″, 2. 58294″, 3. 201600″,
4. 2420′ 12″, 5. $36\cdot45^0$, 6. $7\cdot36^0$,
7. $10\frac{2}{3}^0$, 8. $492\frac{5}{6}'$.

Si esprimano in gradi e in frazione decimale di grado:

9. 12° 45′, 10. 61° 52′ 30″, 11. 48° 7′ 30″,
12. 106° 13′ 12″ 13. 28° 6′ 45″, 14. 94° 0′ 10″.

Si esprimano in secondi:

15. 360°, 16. 64° 49′, 17. 57° 17′ 45″.

18. S'indichino quali fra i seguenti angoli sono acuti, ottusi, convessi:
135°, 75°, 210°, 36°, 324°, 160°, 270°, 100°.

19. Dati tre angoli x, y, z, espressi in misura angolare, e precisamente $x > y > z$, calcolare le seguenti espressioni: $x+y$, $x+z$, $y+z$, $x-y$, $x-z$, $y-z$, $x+y+z$.

P. e. $x = 78^0\ 5'\ 54''$, $y = 56^0\ 41'\ 19''$, $z = 45^0\ 12'\ 47''$.

20. Calcolare il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo di un angolo dato, p. e. di 22° 36′ 48″.

21. Calcolare la metà, il terzo, il quarto, il quinto di un angolo dato, p. e. di 44° 15′.

22. Quanti gradi importano i seguenti angoli:

$$\frac{2}{3}R, \frac{3}{4}R, \frac{3}{2}R, 1\frac{3}{5}R, 2\frac{1}{6}R?$$

23. Misurare un angolo dato mediante un secondo angolo, p. e.

a) 54° : 12°, *b*) 180° : 22° 30′, *c*) 142° : 9° 28′.

24. Quante volte sta nell'angolo pieno l'angolo di *a*) 12°, *b*) 18°, *c*) 25°, *d*) 45°?

25. Calcolare l'angolo descritto in un dato tempo *a*) dall'indice delle ore, *b*) dall'indice dei minuti di un orologio, p. e. in 4 ore e 15 minuti.

§ 22. L'angolo al centro e l'arco corrispondente. Un angolo, il vertice del quale coincide col centro di un cerchio, si dice *angolo al centro* (*AMB* Fig. 18). L'arco giacente nella superficie angolare viene detto *arco corrispondente all'angolo.*

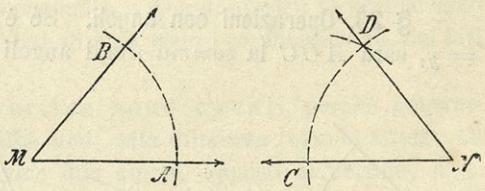

Fig. 18.

Due angoli eguali si possono sovrapporre l'uno all'altro in modo che si coprano interamente; se ciò avviene, si copriranno anche gli archi corrispondenti descritti da raggi eguali, cioè nello stesso cerchio od in cerchi eguali ad angoli al centro eguali corrispondono archi eguali. Inversamente: Nello stesso cerchio o in cerchi eguali ad archi eguali corrispondono angoli al centro eguali.

Per mezzo di questo teorema il trasporto e la partizione di un angolo si riducono al trasporto ed alla partizione di un arco.

Problema. Trasportare un angolo dato, cioè costruire un angolo eguale ad un angolo dato. — Sieno AMB (Fig. 18) l'angolo dato ed NC un lato dell'angolo, che devesi disegnare. Facendo centro in M ed N, si descrivino, con eguale raggio, gli archi AB e CD e s'immagini guidata la corda AB e trasportata nella posizione CD. — Su che si basa la costruzione?

Siccome tanto la periferia del cerchio quanto l'angolo pieno vengono divisi in 360 gradi, così ogni angolo ha tanti gradi quanti ne ha l'arco corrispondente. Ciò si può esprimere con maggiore esattezza così: Ogni angolo ha tanti gradi angolari quanti sono i gradi circolari contenuti nell'arco corrispondente.

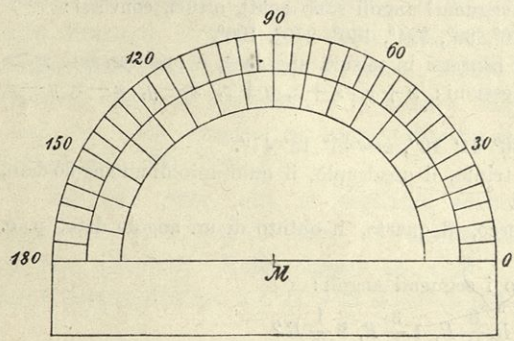

Fig. 19.

Per rapportatore s'intende un semicerchio di cartone, di ottone e simile, sul quale è riportata una divisione in gradi (Nella figura 19 la più piccola porzione del semicerchio contiene 5 gradi). Esso serve a misurare e a trasportare angoli di un dato numero di gradi.

Quesiti d'esercizio. 1. Si misuri un angolo dato col mezzo del rapportatore.
2. Si costruisca un angolo dato in misura angolare, p. e. di 54°, 72°, 130°, 215°.
3. Si trasporti un angolo col mezzo del rapportatore.
4. Si disegnino tre angoli, che formino assieme un angolo diritto e si misurino. Quanto importa la somma delle tre misure?

§ 23. Operazioni con angoli. Se è $AOB = x$ (Fig. 20) e $BOC = y$, sarà AOC la *somma* degli angoli x ed y, cioè $AOC = x + y$.

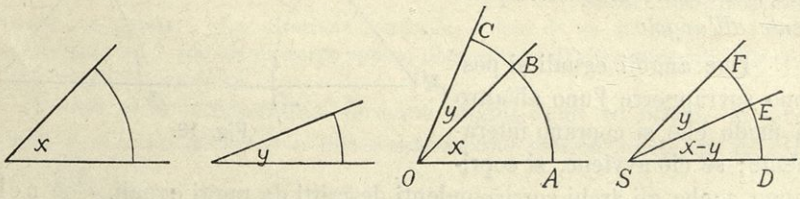

Fig. 20.

Se è inoltre $DSF = x$ ed $ESF = y$, sarà DSE la *differenza* degli angoli x ed y, cioè $DSE = x - y$. Come si ottiene un *multiplo* di un angolo dato?

Per dividere un angolo in un dato numero di parti eguali, si divide un arco ad esso corrispondente nel numero prescritto di parti eguali e

si unisce poscia il vertice coi punti di divisione. — *Dimezzare* un angolo, *bissettrice* dell'angolo.

Quesiti d'esercizio. 1. Sono dati tre angoli x, y, z, e precisamente $x > y > z$; si costruiscano le seguenti espressioni:

$$x+y,\ x+z,\ y+z,\ x-y,\ x-z,\ y-z,\ x+y+z.$$

2. Si costruisca il doppio, il triplo, il quadruplo, il quintuplo di un angolo dato.

3. Si tenti a dividere un angolo dato in 2, 3, 4, 5, 6 parti eguali col compasso o ad occhio.

4. Si disegni ad occhio un angolo retto (dividendo per metà un angolo diritto).

5. Costruisci i seguenti angoli:

$$\frac{2}{3}R,\ \frac{3}{4}R,\ \frac{3}{2}R,\ 1\frac{3}{5}R.$$

6. Si disegni una rosa dei venti e si dieno le normali alle seguenti direzioni:

NE, *SSO*, *ENE*.

7. S'indichino gli angoli fra le seguenti direzioni della rosa dei venti:

NE ed *SE*, *ENE* ed *ESE*, *OSO* ed *E*, *ENE* ed *ONO*.

§ 24. Angoli adiacenti. Se si prolunga oltre il vertice un lato di un angolo, si ottiene un *angolo adiacente* ad esso; così FSG (Fig. 17) è l'angolo adiacente all' $\sphericalangle ESG$ e inversamente. Angoli adiacenti sono adunque due angoli, che hanno comune un lato e gli altri due giacciono in linea retta.

La somma di due angoli adiacenti è un angolo diritto od $= 2R$. Se uno di due angoli adiacenti disuguali è acuto, l'altro sarà ottuso (Fig. 17); se due angoli adiacenti sono eguali, ognuno è retto (Fig. 16).

§ 25. Angoli opposti al vertice. Se si prolungano oltre il vertice ambidue i lati di un angolo, i prolungamenti formano *l'angolo opposto al vertice* dell'angolo dato; così FSH (Fig. 17) è l'angolo opposto al vertice dell'angolo ESG e inversamente. Angoli opposti al vertice sono dunque due angoli, nei quali i lati di uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro angolo.

Angoli opposti al vertice sono eguali, perchè generati dalla stessa rotazione; imperocchè una retta illimitata rotando attorno ad un punto suo qualunque, descrive due angoli opposti al vertice; p. e. EF (Fig. 17) colla rotazione a destra genera i due angoli ESG, FSH, colla rotazione a sinistra i due angoli ESH, FSG.

§ 26. Angoli complementari e supplementari. Due angoli, che insieme importano 90°, si dicono *complementari* e ciascuno di essi è detto *complemento* dell'altro. Due angoli, che assieme importano 180°, diconsi *supplementari* ed ognuno di essi è detto *supplemento* dell'altro.

Angoli eguali hanno eguali complementi ed eguali supplementi e inversamente.

Quesito d'esercizio. Calcolare *a)* il complemento, *b)* il supplemento di un angolo dato, p. e. di 60°, 44° 19′, 71° 32′ 13″.

Le parallele.

§ 27. Definizioni. Due rette in un piano, che per quanto si prolunghino non s'incontrano mai, si dicono *parallele*. Se AB e CD (Fig. 21) sono parallele, si scrive $AB \parallel CD$ (si legge AB è parallela a CD). Due rette parallele hanno direzioni eguali od opposte; così le direzioni di AB e CD sono eguali, al contrario le direzioni di CD ed EF sono opposte.

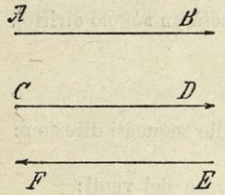

Fig. 21.

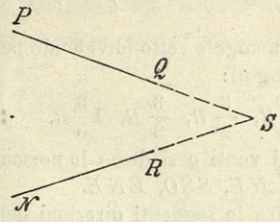

Fig. 22.

Due rette in un piano, che non sono parallele, prolungate convenientemente s'incontrano in un punto, come NR e PQ (Fig. 22). Tali rette *convergono* verso il loro punto d'intersezione e *divergono* pall'altra parte.

Sugli orli della tavola nera, di una parete si cerchino esempi di due rette parallele e di due rette intersecantisi.

§ 28. Proprietà fondamentali delle parallele. Dal concetto, che ci siamo formati delle rette parallele, possiamo riconoscere la verità del teorema seguente:

Per un punto fuori di una retta non si può condurre che una sola parallela ad essa (1. Assioma delle parallele).

Per il punto A (Fig. 23) non si può guidare che una sola retta parallela alla retta BC, cioé la DE; ogni altra retta che passa per A, p. e. FG, non è parallela a BC. Da questo assioma segue:

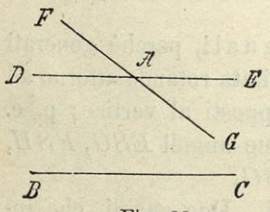

Fig. 23.

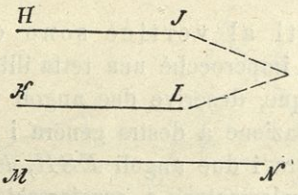

Fig. 24.

a) Due rette parallele ad una terza sono fra loro parallele. Se è $HJ \parallel MN$ e $KL \parallel MN$ (Fig. 24), dev'essere anche $HJ \parallel KL$. Infatti, se HJ non fosse parallela a KL, queste due rette convenientemente prolungate dovrebbero incontrarsi in un punto S, e per questo punto passerebbero due parallele alla retta MN, ciò che è impossibile.

b) Se due rette sono fra loro parallele ed una viene intersecata da una terza, questa deve intersecare anche

l'altra. — Se è $DE \parallel BC$ (Fig. 23), ed FG interseca la retta DE, la FG deve intersecare anche la BC, altrimenti pel punto d'intersezione A passerebbero due parallele alla retta BC, ciò che non è possibile.

§ 29. Angoli corrispondenti, alterni, conseguenti. Una retta, che interseca due o più altre rette, è detta *trasversale* delle stesse. Due rette tagliate da una trasversale (Fig. 25 o 26) danno origine ad otto angoli, di cui quelli che giacciono fra le rette intersecate diconsi *interni* (p, q, r, s), mentre gli altri sono detti *esterni* (m, n, v, u).

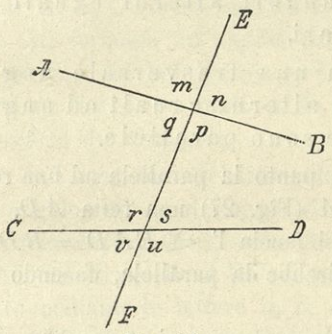

Fig. 25.

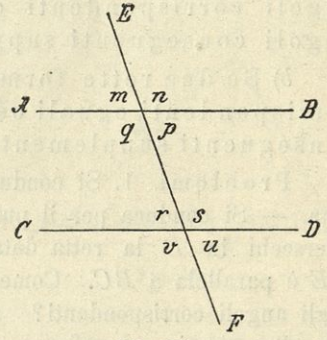

Fig. 26.

Un angolo esterno ed uno interno, che non hanno il vertice comune e giacciono dalla stessa parte della trasversale, diconsi *angoli corrispondenti;* p. e. m ed r, n ed s, p ed u, q e v.

Due angoli interni o due esterni, che non hanno il vertice comune e giacciono da parti opposte della trasversale, diconsi *angoli alterni;* p. e. m ed u, n e v, p ed r, q ed s.

Due angoli interni o due esterni, che giacciono dalla stessa banda della trasversale, si dicono *conseguenti*; p. e. m e v, q ed r, n ed u, p ed s.

Si determinino per esercizio angoli corrispondenti, alterni, conseguenti.

§ 30. Teoria delle parallele. Gli angoli formati da due rette intersecantisi rimangono invariati, se una di esse si sposta parallelamente a sè stessa (2. Assioma delle parallele).

Se AB (Fig. 26) si muove parallelamente a sè stessa sino a che giunga nella posizione CD, sarà $\sphericalangle m = r$, $n = s$, $p = u$, $q = v$, cioè: Due angoli corrispondenti sono eguali. Gli angoli corrispondenti sono disuguali, se le rette AB e CD non sono parallele (Fig. 25).

Se, nella fig. 26, la retta AB si muove parallelamente a sè stessa, l' $\sphericalangle m$ viene al posto dell' $\sphericalangle r$ e quindi diventa opposto al vertice dell' $\sphericalangle u$; perciò dev'essere $\sphericalangle m = u$; come pure $n = v$, $p = r$, $q = s$, cioè: Due angoli alterni sono eguali. Nella Fig. 25 queste eguaglianze non possono aver luogo.

Se, nella fig. 26, AB si muove parallelamente a sè stessa sino a che giunga nella posizione CD, gli angoli m e v diventano adiacenti; perciò dev'essere $m + v = 2R$; parimente $n + u = 2R$, $p + s = 2R$, $q + r = 2R$, cioè:

Due angoli conseguenti sono supplementari. Ciò non può aver luogo, se AB e CD non sono parallele (Fig. 25).

Risulta adunque che:

a) Rette parallele formano con ogni trasversale angoli corrispondenti eguali, angoli alterni eguali ed angoli conseguenti supplementari.

b) Se due rette formano con una trasversale angoli corrispondenti eguali od angoli alterni eguali od angoli conseguenti supplementari, esse sono parallele.

Problemi. 1. Si conduca per un punto la parallela ad una retta data. — Si conduca per il punto dato A (Fig. 27) una retta AD, che intersechi in D la retta data BC e si faccia l' $\sphericalangle EAD = BDA$; AE è parallela a BC. Come si costruirebbe la parallela, facendo uso degli angoli corrispondenti?

Per costruire meccanicamente le parallele si adoperano i „triangoli".

2. Si costruiscano due rette intersecantisi, che sieno parallele ai lati di un angolo dato e si espongano le relazioni esistenti fra i quattro angoli in tal modo ottenuti è l'angolo dato (*angoli delle parallele*).

Quesito d'esercizio. Dato uno degli angoli nella fig. 26 calcolare tutti gli altri; p. e. *a)* $m = 75^0$, *b)* $n = 114^0\ 17'\ 38''$.

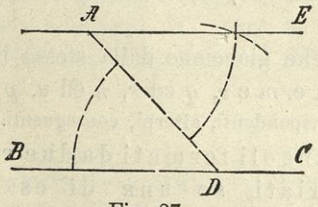

Fig. 27.

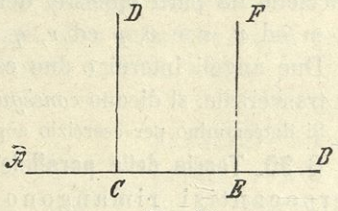

Fig. 28.

§ 31. Proprietà delle normali. Applicando alle normali la teoria delle parallele, risultano i seguenti due teoremi:

a) Due rette perpendicolari ad una terza, sono fra loro parallele. Se è $CD \perp AB$ ed $EF \perp AB$ (Fig. 28), gli angoli corrispondenti ACD e CEF sono eguali; perchè? Perciò le rette CD ed EF sono parallele.

b) Se due rette sono fra loro parallele ed una è perpendicolare ad una terza, lo è anche l'altra. Infatti, se la

retta CD, normale alla AB, si sposta parallelamente a sè stessa, sino a che giunga nella posizione EF, in base al secondo assioma delle parallele dovrà essere $EF \perp AB$.

Il triangolo.

§ 32. Definizioni. Se si uniscono con rette tre punti, che non giacciono in linea retta, si ottiene una figura piana, che si chiama *triangolo* (ABC Fig. 29). I segmenti AB, AC, BC si dicono *lati*, i punti A, B, C *vertici* del triangolo. Ogni due lati formano un angolo del triangolo. La somma dei lati dicesi *perimetro* e la porzione del piano limitata da essi dicesi *superficie* del triangolo.

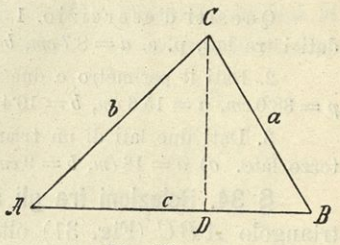

Fig. 29.

Ad ogni lato del triangolo si oppone un angolo, ad ogni angolo si oppone un lato (*elementi opposti*), come AB ed $\sphericalangle C$. I lati del triangolo ABC si segnano sovente mediante le lettere a, b, c, cosi che agli elementi opposti corrispondono lettere eguali. Accanto ad ogni lato del triangolo giacciono due angoli, che si chiamano *angoli adiacenti* a quel lato, p. e. al lato AB o c sono adiacenti gli angoli A e B. Ogni angolo del triangolo è formato da due lati e si chiama *angolo racchiuso* da quei lati, mentre questi vengono detti *lati racchiudenti*, p. e. A è l'angolo racchiuso dai lati b e c.

Un lato qualunque del triangolo, il più delle volte l'orizzontale, viene preso quale *base* e il vertice opposto ad esso quale *vertice* dello stesso. La normale abbassata dal vertice sulla base (o sul prolungamento di essa) si chiama *altezza* del triangolo. Cosi, rispetto al lato AB quale base C è il vertice e CD l'altezza.

Se si prolunga un lato di un triangolo, il prolungamento forma col lato attiguo un *angolo esterno;* come p. e. d, e, f nella fig. 32 sono angoli esterni per distinguerli dagli angoli del triangolo, che appunto perciò diconsi anche *angoli interni*. Ogni angolo esterno è un angolo adiacente ad uno degli angoli interni.

§ 33. Relazioni fra i lati. *a)* Dall'assioma che la retta è la via più breve fra due punti segue che ogni lato del triangolo, anche il maggiore, è minore della somma degli altri due lati, p. e. $c < a + b$ (Fig. 29). Dunque:

Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due lati.

b) Se nel triangolo ABC (Fig. 29) nè a nè b è maggiore di c, dev' essere certamente $c > b - a$. Se si fanno rotare il lato a intorno al punto B verso sinistra e il lato b intorno al vertice A verso destra sino a che questi due lati vadano a sovrapporsi al terzo lato c (Fig. 30), si vedrà che è $a > c - b$ e $b > c - a$. Dunque ogni lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due lati.

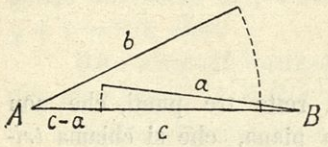

Fig. 30.

Quesiti d'esercizio. 1. Si calcoli il perimetro di un triangolo, di cui sono dati i tre lati, p. e. $a = 8{\cdot}7\ cm$, $b = 6{\cdot}5\ cm$, $c = 4{\cdot}8\ cm$.

2. Dati il perimetro e due lati di un triangolo, calcolare il terzo lato, p. e. $p = 38{\cdot}0\ cm$, $a = 15{\cdot}6\ cm$, $b = 10{\cdot}4\ cm$.

3. Dati due lati di un triangolo, si calcolino tutti è valori che può avere il terzo lato. *a)* $a = 16\ cm$, $b = 9\ cm$; *b)* $b = a = 1\ m$.

§ 34. Relazioni fra gli angoli. *a)* Se si prolunga il lato AB del triangolo ABC (Fig. 31) oltre al vertice B e si guida $BE \parallel AC$, ognuno dei lati AB e BC si può considerare quale trasversale delle parallele AC e BE; perciò dev'essere

$$\sphericalangle DBE = BAC = m,\ \sphericalangle EBC = ACB = p.$$

Indicando inoltre con n l' $\sphericalangle ABC$, e considerando che gli angoli m, n, p col vertice comune in B formano assieme un angolo diritto, si avrà:

$$m + n + p = 2R, \text{ cioè:}$$

La somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti, ovvero a 180°.

Dalla figura 31 è chiaro che $\sphericalangle CBD = m + p$; perciò:

Ogni angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti; da ciò segue che l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti.

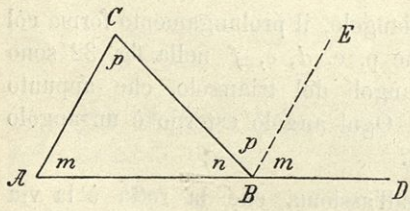

Fig. 31.

b) Se si prolungano nel medesimo senso tutti i lati del triangolo (Fig. 32), si ottengono i tre angoli esterni. Questi formano cogli angoli interni tre paia di angoli adiacenti ovvero $6R$; togliendo gli angoli interni $= 2R$, risulta che: La somma degli angoli esterni di un triangolo è eguale a quattro retti:

$$d + e + f = 4R.$$

Quesiti d'esercizio. 1. Dato un angolo di un triangolo, calcolare la somma degli altri due. *a)* $a = 90^0$, *b)* $b = 124^0$, *c)* $c = 73^0\ 15'$, *d)* $m = 60^0\ 51'\ 25''$.

2. Dati due angoli di un triangolo, calcolare il terzo. *a)* $m = 78^0\ 18'\ 11''$. $n = 53^0\ 17'\ 37''$; *b)* $m = n = 62^0\ 15'$.

3. Dati due angoli esterni di un triangolo, calcolare gli angoli interni. *a)* $d = 120^0$, $e = 135^0$ (Fig. 32); *b)* $e = 133^0\ 48'$, $f = 136^0\ 12'$.

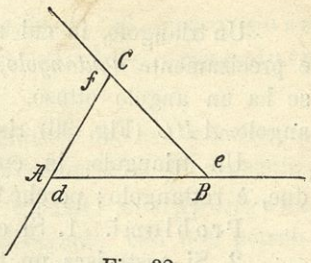

Fig. 32.

§ 35. Distinzione dei triangoli riguardo ai lati. Riguardo ai lati si distinguono triangoli scaleni, isosceli, equilateri. Un triangolo si dice *scaleno,* se ha i tre lati disuguali (*ABC,* Fig. 29); *isoscele,* se ha due lati eguali (*DEF,* Fig. 33); *equilatero,* se tutti i lati sono fra loro eguali (*HJK,* Fig. 34). Nel triangolo isoscele il lato disuguale *DE* dicesi comunemente *base.*

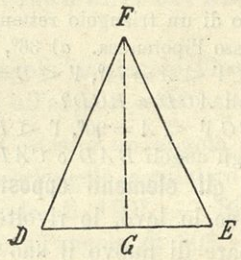

Fig. 33.

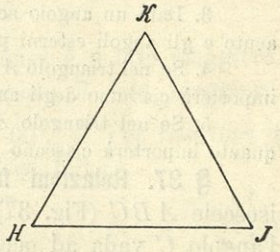

Fig. 34.

Problemi: 1. Sopra una retta, quale base, si costruisca un triangolo isoscele. (§ 16, probl. 1.) P. e. $DE = 3\ cm$, $DF = EF = 4\ cm$.

2. Si costruisca un triangolo equilatero il cui lato sia di $4\ cm$.

§ 36. Distinzione dei triangoli riguardo agli angoli. Dal teorema sulla somma degli angoli di un triangolo segue che ogni triangolo ha almeno due angoli acuti; il terzo angolo può essere acuto od anche retto od ottuso. Allora il triangolo è detto rispettivamente acutangolo, rettangolo, ottusangolo.

Un triangolo si dice *rettangolo,* se ha un angolo retto (*ABC,* Fig. 35). I lati (*AB* e *BC*) che racchiudono l'angolo retto (*B*) si dicono *cateti*; il lato (*AC*) opposto all'angolo retto è detto *ipotenusa* del triangolo. Per *altezza* di un triangolo rettangolo s'intende in via ordinaria quella che corrisponde all'ipotenusa come base. — Quanto importa la somma degli angoli adiacenti all'ipotenusa?

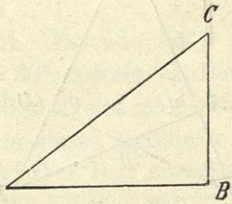

Fig. 35.

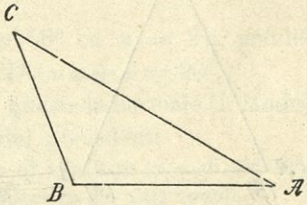

Fig. 36.

Un triangolo, in cui nessun angolo è retto, si chiama *obliquangolo*, e precisamente *acutangolo*, se non ha che soli angoli acuti; *ottusangolo*, se ha un angolo ottuso. Come è disposta l'altezza del triangolo ottusangolo ABC (Fig. 36) rispetto alla base AB o BC?

Un triangolo, in cui un angolo è eguale alla somma degli altri due, è rettangolo; perchè?

Problemi. 1. Si costruisca un triangolo rettangolo isoscele.

2. Si costruisca un triangolo ottusangolo isoscele.

Quesiti d'esercizio. 1. Dato il perimetro ($p = 124\ cm$) e la base ($b = 54\ cm$) di un triangolo isoscele, calcolare uno dei lati eguali.

2. Dato il perimetro ($p = 78\ cm$) ed uno dei lati eguali ($c = 29\ cm$) di un triangolo isoscele, calcolare la base.

3. Dato un angolo acuto di un triangolo rettangolo, calcolare l'altro angolo acuto e gli angoli esterni presso l'ipotenusa. *a)* 36°, *b)* 19° 9′ 30″.

4. Se nel triangolo ABC l'$\sphericalangle A = 74°$, l'$\sphericalangle B = 57°$ e se è $CD \perp AB$, quanto importerà ciascuno degli angoli ACD e BCD?

5. Se nel triangolo ABC l'$\sphericalangle A = 90°$, l'$\sphericalangle B = 47°\ 18'$ e se è $CD \perp AB$, quanto importerà ciascuno degli angoli BAD e CAD?

§ 37. Relazioni fra gli elementi opposti. *a)* È dato il triangolo isoscele ABC (Fig. 37); se lo levo, lo rivolto e lo pongo in modo che l'angolo C vada ad occupare di nuovo il suo posto di prima, i lati CA e CB scambieranno il loro posto ed AB cadrà sopra BA*); perchè? Perciò dev'essere $\sphericalangle A = \sphericalangle B$; cioè:

In un triangolo a lati eguali si oppongono angoli eguali.

In base a questo teorema in un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono eguali, perciò devono essere acuti. Nel triangolo equilatero tutti gli angoli sono eguali; quanti gradi importa ciascuno? Quanti gradi ha l'angolo adiacente all'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele?

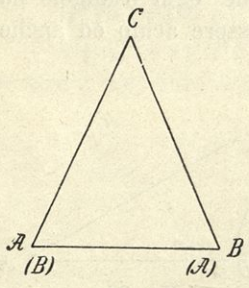

Fig. 37.

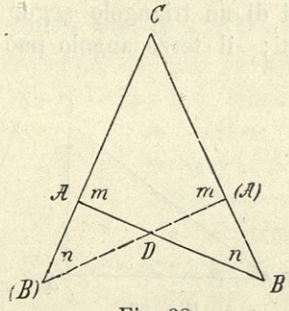

Fig. 38.

b) È dato il triangolo ABC (Fig. 38), nel quale è $BC > AC$. Se lo levo, lo rivolto e lo pongo in modo che l'angolo C ritorni novamente al posto di prima, allora l'angolo m diventa esterno del triangolo $(A)BD$; perciò $m > n$, cioè:

*) Si tagli in cartone un triangolo isoscele, e, collocatolo sulla tavola nera se ne disegni uno eguale passandovi il gesso lungo i suoi lati; poi si rivolti quel triangolo di cartone.

In ogni triangolo a lati disuguali si oppongono angoli disuguali, e precisamente al lato maggiore l'angolo maggiore.

I due teoremi ora enunciati intorno alle relazioni che hanno luogo fra gli elementi opposti del triangolo si possono invertire nel modo seguente:

c) In ogni triangolo ad angoli eguali si oppongono lati eguali; imperocchè se i lati fossero disuguali, essi non potrebbero opporsi ad angoli eguali. Si mostri l'esattezza di questo teorema anche rivolgendo il triangolo.

d) In ogni triangolo ad angoli disuguali si oppongono lati disuguali, e precisamente all'angolo maggiore il lato maggiore.

Corollari: Nel triangolo rettangolo l'ipotenusa è il lato maggiore. Nel triangolo ottusangolo all'angolo ottuso si oppone il lato maggiore.

§ 38. Problemi. 1. Costruire un angolo di 60°. — Per risolvere il problema si costruisca un triangolo equilatero (Fig. 39).

2. Costruire un angolo di 120°. — Si costruisca l'angolo adiacente all'angolo di 60°.

3. Dividere un angolo diritto in tre parti eguali.

4. Costruire un angolo retto (I. Modo). — Si costruisca un triangolo equilatero ABC (Fig. 40), si prolunghi il lato BC, sul prolungamento si faccia $CD = BC$ e si unisca poscia mediante una retta il punto D col punto A. Essendo $\sphericalangle x = 60°$ ed $x = 2z$, perchè angolo esterno, sarà $z = 30°$; perciò $\sphericalangle BAD = x + z = 90°$.

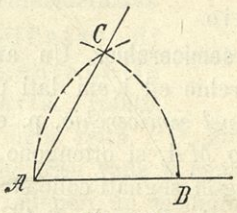

Fig. 39.

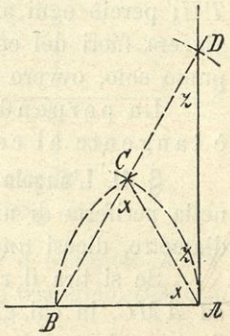

Fig. 40.

5. Dall' estremità di una retta inalzare a questa la normale (I. Modo) — Questo problema ha lo stesso significato del precedente.

Quesiti d'esercizio. 1. Dato un angolo *a)* alla base (p. e. di 34° 18'), *b)* al vertice (p. e. di 90°) di un triangolo isoscele, calcolare gli altri angoli.

2. Dato l'angolo esterno *a)* alla base (p. e. di 100°), *b)* al vertice (p. e. di 105°) di un triangolo isoscele, calcolare gli altri angoli esterni e gli angoli interni.

3. Nel triangolo ABC sia $AC = BC$ e $\sphericalangle C = 38° 28'$, inoltre $AD \perp BC$; quanto importa ciascuno degli angoli BAD, CAD?

§ 39. Distanza di un punto da una retta. Fra il punto A ed una retta MN (Fig. 41) si può tirare un numero infinito di rette; fra queste, ve n'ha una sola che cade perpendicolarmente alla retta MN. Infatti,

se è $AB \perp MN$ e se AC è una retta qualunque, nel triangolo rettangolo ABC l'angolo ABC è retto e l'angolo ACB è acuto, quindi $AB < AC$ (§ 37, *d*), cioè:

La normale è la più breve fra tutte le rette condotte da un punto ad una retta data; essa si chiama perciò *distanza* del punto dalla retta.

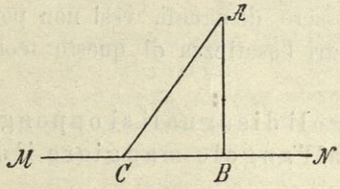

Fig. 41.

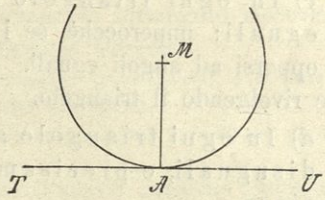

Fig. 42.

§ 40. Costruzione della tangente al cerchio. Se dall'estremità A del raggio MA di un cerchio (Fig. 42) s'inalza la perpendicolare TU, la MA sarà la più breve di tutte le rette condotte dal centro M alla retta TU; perciò ogni altro punto della retta TU, ad eccezione del punto A, giacerà fuori del cerchio; quindi la retta TU ha comune col cerchio un punto solo, ovvero essa è tangente al cerchio, cioè:

La perpendicolare inalzata dall'estremità del raggio è tangente al cerchio.

§ 41. L'angolo nel semicerchio. Un angolo, il cui vertice giace nella periferia di un cerchio ed i cui lati passano per l'estremità di un diametro, dicesi *angolo nel semicerchio*, p. e. l'$\sphericalangle BAC$ (Fig. 43).

Se si tira il raggio MA, si ottengono due triangoli isosceli AMB ed AMC, in cui gli angoli segnati colle stesse lettere sono eguali. Dalla figura suddetta si rileva che l'angolo BAC è eguale alla somma degli altri due angoli del triangolo ABC, perciò è retto, dunque:

L'angolo nel semicerchio è un retto.

Corollario: Il diametro è la massima corda del cerchio (§ 37, *d*).

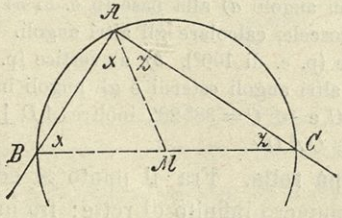

Fig. 43.

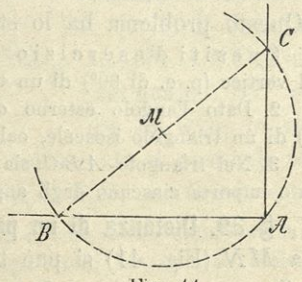

Fig. 44.

Problemi. 1. Costruire un angolo retto (II. Modo). — Si costruisca un angolo nel semicerchio.

2. Dalla estremità di una retta s'inalzi la perpendicolare alla stessa (II. Modo). — Se AB (Fig. 44) è la retta data ed A il suo punto estremo, si scelga un punto M in modo che un cerchio, descritto intorno a questo punto con raggio eguale ad AM, intersechi la retta data p. e. nel punto B; si conduca poscia il diametro BC e si unisca il punto C col punto A mediante la retta AC; questa è la perpendicolare domandata.

L'asse di simmetria dei segmenti rettilinei.

§ 42. Definizioni, proprietà dell'asse di simmetria. Se due punti A e B, giacciono rispetto alla retta illimitata PQ (Fig. 45) in modo che la retta limitata AB venga *dimezzata* dalla PQ, e sia *perpendicolare* a questa, si dice, che i punti A e B *sono simmetrici* rispetto alla retta PQ, la quale è chiamata *asse di simmetria* della retta AB. Ciò vuol dire che, se si rivolta uno dei due piani, limitati dalla PQ, intorno a questa retta, presa quale asse, fino a che vada a cadere sopra l'altro piano semilimitato, i punti A e B coincideranno.

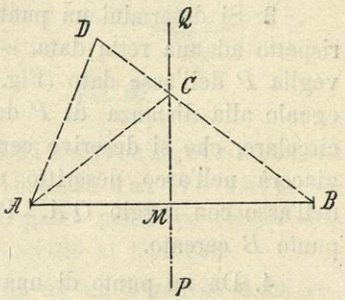

Fig. 45.

a) Ogni punto dell'asse di simmetria dista egualmente dalle due estremità della retta. Infatti se C è un punto qualunque della retta PQ, girando il triangolo AMC attorno a PQ si può fare che esso vada a coprire il triangolo BMC e allora sarà $AC = BC$. (Si adoperi un modello.)

b) Ogni punto, che giace fuori dell'asse di simmetria, ha distanze disuguali dalle due estremità della retta ed è più vicino a quella estremità, la quale si trova con esso dalla stessa parte dell'asse di simmetria. Infatti, se D è un punto qualunque, che con A giace dalla stessa parte di PQ e se C è il punto d'intersezione delle rette BD e PQ, sarà:

$$BD = BC + CD = AC + CD > AD;$$ perchè?

Inversioni: *c)* Ogni punto, che dista egualmente dalle estremità di una retta, giace nell'asse di simmetria della stessa.

d) Ogni punto, che ha distanze disuguali dalle estremità di una retta, giace fuori dell'asse di simmetria della stessa.

§ 43. Problemi. 1. Si costruisca l'asse di simmetria di una retta data. — Basta trovare due punti dell'asse di simmetria; perchè? Perciò dalle due estremità A e B della retta data (Fig. 46) si descrivano con raggio eguale due archi che s'intersechino; la retta che unisce i punti d'intersecazione C e D è l'asse di simmetria cercato. (§ 16, 1.)

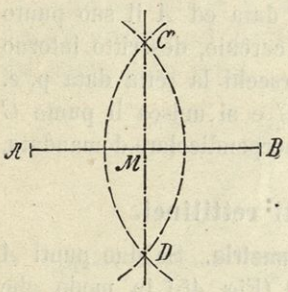

Fig. 46.

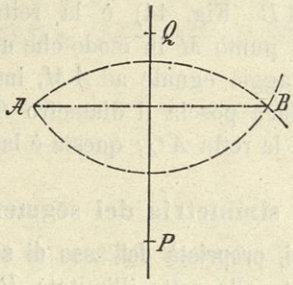

Fig. 47.

2. Si dimezzi una retta data. — Veggasi il problema precedente.

3. Si determini un punto che sia simmetrico ad un punto dato rispetto ad una retta data. — Siccome la distanza di un punto qualsivoglia P dell'asse dato (Fig. 47) dal punto B, che si cerca, dev'essere eguale alla distanza di P dal punto A dato, così B giacerà nell' arco circolare, che si descrive centrando in P con raggio PA; parimenti B giacerà nell'arco descritto centrando in un altro punto qualunque Q dell'asse con raggio QA. Perciò l'intersezione dei due archi sarà il punto B cercato.

4. Da un punto di una retta data inalzare una normale alla medesima. — Siano MN la retta data ed A il punto dato in essa (Fig. 48). Partendo da A si prendano, dall'una e dall'altra parte sulla retta MN,

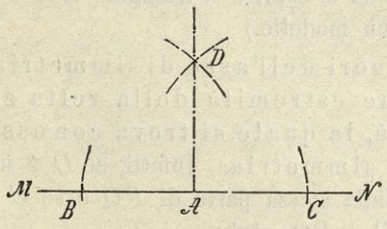

Fig. 48.

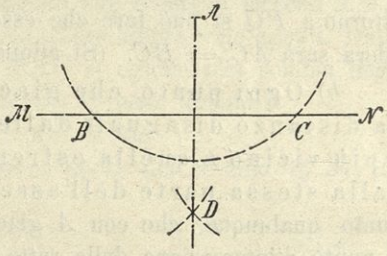

Fig. 49.

due segmenti eguali $AB = AC$ e si costruisca l'asse di simmetria della retta BC. Essendo A un punto già dato di questo asse, non rimane altro che determinare ancora un altro punto D dello stesso, il che si ottiene facendo $BD = CD$; allora sarà $AD \perp MN$.

5. Da un punto situato fuori di una retta abbassare la perpendicolare alla medesima. — Sieno MN la retta data ed A il punto dato (Fig. 49).

Fatto centro in A si descriva un arco, che intersechi MN in B e C, e si costruisca l'asse di simmetria della retta BC; allora sarà $AD \perp MN$. Oppure si determini il punto B (Fig. 47) in modo che sia simmetrico al punto A dato, rispetto alla retta data PQ; allora sarà $AB \perp PQ$.

Quesito d'esercizio. Sopra una retta, presa quale diametro, si costruisca un cerchio.

§ 44. Il cerchio circoscritto ad un triangolo. Nel triangolo ABC (Fig. 50) si costruiscano gli assi di simmetria DE ed FG dei due lati AB e BC. Il punto d'intersezione O degli stessi, siccome giace nell'asse DE, dista egualmente da A e da B, e siccome giace nell'asse FG, dista egualmente da B e da C; dunque esso dista egualmente anche da A e da C, e giace quindi nell'asse di simmetria HJ del terzo lato AC; cioè:

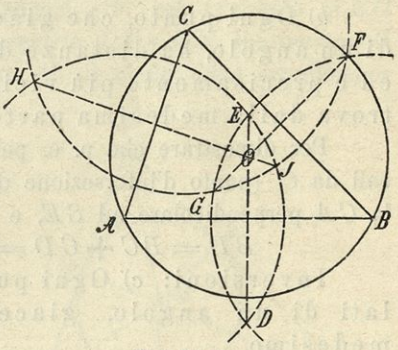

Fig. 50.

I tre assi di simmetria dei lati di un triangolo s'intersecano in un punto, che dista egualmente dai tre vertici. Questo punto è il centro di un cerchio, che passa per i tre vertici del triangolo dato e che si chiama *cerchio circoscritto* al triangolo.

Problema. Si circoscriva un cerchio ad un triangolo dato. — Si distinguano tre casi, secondo che il triangolo dato è acutangolo, rettangolo, ottusangolo.

L'asse di simmetria dell'angolo.

§ 45. Definizione. Proprietà dell'asse di simmetria. La linea, che dimezza un angolo, è detta anche *asse di simmetria* dello stesso. Ciò vuol dire che se si rivolta l'angolo ASC (Fig. 51), intorno alle bissettrice SC, presa quale asse, i lati SA ed SB dell'angolo ASB coincideranno.

a) Ciascun punto dell'asse di simmetria di un angolo dista egualmente dai lati del mede-

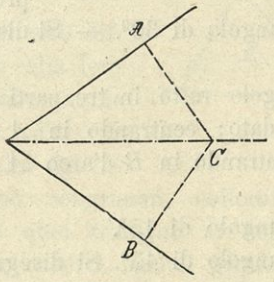

Fig. 51.

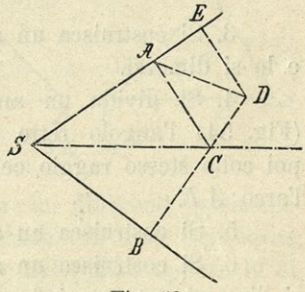

Fig. 52.

simo. Se supponiamo che sia $\sphericalangle ASC = BSC$, $CA \perp SA$ e $CB \perp SB$ (Fig. 51), possiamo far rotare i suddetti angoli attorno alla retta SC sino a che l'uno vada a coprire l'altro. In tal caso coincideranno non soltanto i lati SA ed SB, ma anche le normali CA e CB, perchè da un punto non si può abbassare che una sola perpendicolare ad una retta (§ 39); perciò $CA = CB$. (Si adoperi un modello.)

b) Ogni punto, che giace fuori dell'asse di simmetria di un angolo, ha distanze disuguali dai lati dello stesso, ed è precisamente più vicino a quel lato, che con esso si trova dalla medesima parte dell'asse di simmetria.

Per dimostrare che p. e. pel punto D (Fig. 52) è $BD > DE$, si cali da C (punto d'intersezione dell'asse di simmetria colla retta BD) la CA perpendicolare ad SE, e sarà:

$$BD = BC + CD = AC + CD > DA > DE.$$

Inversioni: *c)* Ogni punto, che dista egualmente dai lati di un angolo, giace nell'asse di simmetria del medesimo.

d) Ogni punto, che ha distanze disuguali dai lati di un angolo, giace fuori dell'asse di simmetria del medesimo.

§ 46. Problemi. 1. Si costruisca l'asse di simmetria di un angolo dato. — Centrando nel vertice S dell'angolo dato (Fig. 53) si descriva un arco, che intersechi i lati nei punti A e B; s'immagini guidata poscia la corda AB e se ne costruisca l'asse di simmetria; si ottiene $\sphericalangle ASC = BSC$. Si dimostri mediante sovrapposizione.

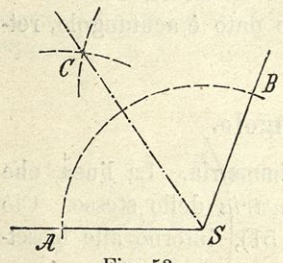

Fig. 53.

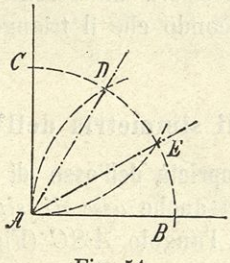

Fig. 54.

2. Si dimezzi un angolo dato. — Ha lo stesso significato del problema precedente.

3. Si costruisca un angolo di 30°. — Si disegni un angolo di 60° e lo si dimezzi.

4. Si divida un angolo retto in tre parti eguali. — Sia BAC (Fig. 54) l'angolo retto dato; centrando in A si descriva l'arco BC, poi collo stesso raggio centrando in B l'arco AD e finalmente in C l'arco AE.

5. Si costruisca un angolo di 15°.

6. Si costruisca un angolo di 45°. Si disegni un angolo retto e lo si dimezzi, oppure si faccia la somma $30° + {}^{\circ}$.

Quesiti d'esercizio. 1. Costruire i seguenti angoli: *a*) 150°, *b*) 165°, *c*) 75°, *d*) 105°.

2. Si divida un angolo diritto *a*) in 4, *b*) in 6 parti eguali.

3. Si divida un angolo retto *a*) in 4, *b*) in 6 parti eguali.

4. Si divida un angolo retto in 8 parti eguali.

5. Si costruiscano i seguenti angoli: *a*) $\frac{3}{4}R$, *b*) $1\frac{1}{8}R$, *c*) $\frac{5}{6}R$.

§ 47. Il cerchio iscritto in un triangolo. Se nel triangolo ABC (Fig. 55) si costruiscono gli assi di simmetria AM e BM dei due angoli A e B, questi s'intersecano in un punto M, il quale dista egualmente dai tre lati; perchè? Dunque il punto M giace anche nell'asse di simmetria del terzo angolo C; cioè:

I tre assi di simmetria degli angoli di un triangolo s'intersecano in un punto, che dista egualmente dai tre lati. Questo punto è il centro di un cerchio, che tocca i tre lati del triangolo dato e si dice *cerchio iscritto* nel triangolo.

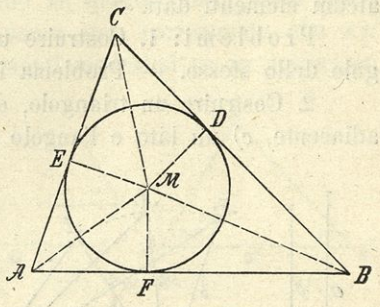

Fig. 55.

Problema. Si iscriva un cerchio in un triangolo dato.

Congruenza dei triangoli.

§ 48. Definizioni. Due figure possono venire confrontate fra loro tanto riguardo alla loro forma che alla loro grandezza. Figure, che hanno eguale forma, ma grandezza differente, si dicono *simili* (∾); figure, che hanno eguale grandezza, ma forma differente, si dicono *equivalenti* (=), e figure di forma e grandezza eguali, si chiamano *congruenti* (≅).

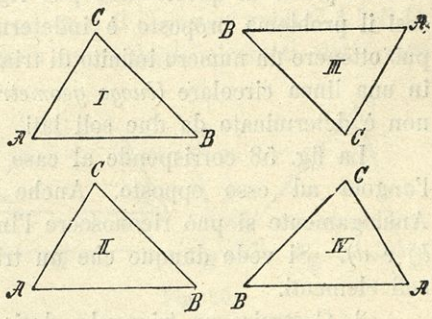

Fig. 56.

Due figure congruenti differiscono solo riguardo alla loro posizione: esse possono venir sovrapposte in modo che si coprano perfettamente. La fig. 56 mostra quattro triangoli congruenti, collocati in differenti posizioni. Per fare che due di quei triangoli si coprano, si deve spostarne uno parallelamente e, se occorre anche, girarlo nel piano, oppure lo si dovrà levar fuori dal piano e rivoltare. Quali movimenti si deve impri-

mere al triangolo I, affinchè vada a coprire ciascuno dei triangoli II, III, IV? Si spieghi mediante un modello.

Se due figure congruenti vengono sovrapposte, quei lati e quegli angoli che coincidono si dicono *elementi omologhi*; nella fig. 56 essi vengono segnati colle stesse lettere.

§ 49. Problemi indeterminati intorno al triangolo. I lati e gli angoli sono i così detti *elementi perimetrici* del triangolo; essi dipendono talmente uno dall'altro, che, conoscendone alcuni, si possono determinare anche gli altri, cioè si può costruire un triangolo, unendo convenientemente alcuni elementi dati.

Problemi: 1. Costruire un triangolo, dato *a)* un lato, *b)* un angolo dello stesso. — Problema indeterminato.

2. Costruire un triangolo, dati *a)* due lati, *b)* un lato ed un angolo adiacente, *c)* un lato e l'angolo ad esso opposto, *d)* due angoli.

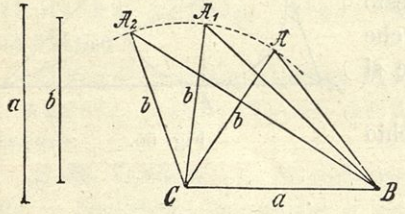

Fig. 57.

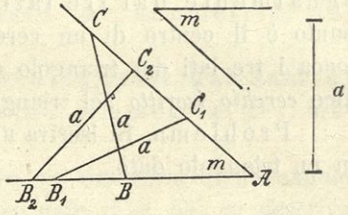

Fig. 58.

Dati due lati a e b (Fig. 57) del triangolo, si prenda $BC = a$ come base, e fatto centro in C con raggio b si descriva un arco; siccome ciascun punto di questo arco può riguardarsi quale vertice del triangolo, così il problema proposto è indeterminato, perchè coi dati elementi si può ottenere un numero infinito di triangoli, i vertici dei quali giaceranno in una linea circolare (*luogo geometrico* dei vertici). Perciò il triangolo non è determinato da due soli lati.

La fig. 58 corrisponde al caso *c)*, se sono dati cioè un lato a e l'angolo ad esso opposto. Anche questo problema è indeterminato. Analogamente si può riconoscere l'indeterminatezza anche dei problemi *b)* e *d)*. Si vede dunque che un triangolo non è determinato da due soli elementi.

3. Costruire un triangolo, dati tre angoli.

Dal teorema sulla somma degli angoli del triangolo segue che, dati due angoli, il terzo è già determinato; perciò il problema proposto o è *determinato ad esuberanza*, e ciò se la somma degli angoli dati è differente da 180° e la costruzione di un triangolo cogli elementi dati è in tal caso impossibile, oppure è *indeterminato* e coincide col problema

d) già considerato, e ciò se la somma degli angoli dati è $= 180^0$. A quale condizione devono sodisfare dunque due angoli, affinchè si possa con essi costruire un triangolo?

Da quanto è stato detto fin qui si conclude che per costruire un triangolo devono essere dati più di due elementi e fra questi ci dev'essere almeno un lato, e ciò affinchè il problema sia determinato.

§ 50. Prima costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati un lato a e i due angoli ad esso adiacenti m ed n (Fig. 59).

Si faccia $BC = a$ e si trasportino su questa retta, presa qnale lato, gli angoli m ed n. Ai dati di sopra non corrisponde che un solo triangolo, vale a dire se cogli elementi medesimi se ne costruisce un altro, questo non differirà dal primo che per la posizione.

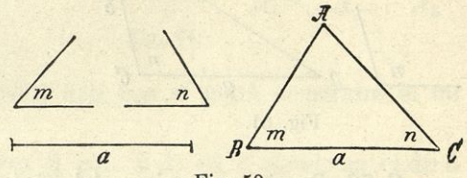

Fig. 59.

Da ciò segue il:

I. caso di congruenza: Due triangoli sono congruenti, se hanno rispettivamente eguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 6{\cdot}2\,cm$, $m = 72^0$, $n = 48^0$.

2. $a = 5{\cdot}1\,cm$, $m = 105^0$, $n = 32^0$.

3. Si trasporti un triangolo mediante un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

§ 51. Seconda costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati un lato a, un angolo adiacente m e l'angolo opposto n (Fig. 60).

Si faccia $BC = a$, $\sphericalangle CBA = m$, $\sphericalangle ABD = n$, si guidi $CA \parallel BD$. — Il triangolo è determinato in modo unico dagli elementi dati, cioè se con essi ne costruisco un altro, questo non differirà dal primo che per la posizione. Da ciò segue il:

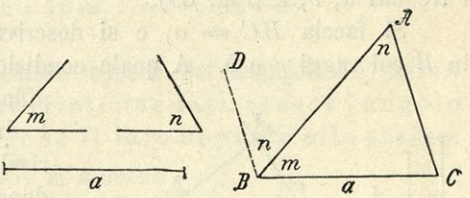

Fig. 60.

II. caso di congruenza: Due triangoli sono congruenti, se hanno rispettivamente eguali un lato, un angolo adiacente e l'angolo opposto.

I due teoremi precedenti si possono compendiare nel modo seguente: Due triangoli sono congruenti, se hanno un lato e due angoli omologhi rispettivamente eguali.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 4{\cdot}5\,cm$, $m = 68^0$, $n = 60^0$.

2. $a = 7{\cdot}0\,cm$, $m = 45^0$, $n = 100^0$.

§ 52. Terza costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati due lati a e b e l'angolo n da essi racchiuso (Fig. 61).

Si faccia $BC = a$, $\sphericalangle BCA = n$ e $CA = b$.

III. caso di congruenza: Due triangoli sono congruenti, se hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo da essi racchiuso.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 6{\cdot}7\ cm$, $b = 4{\cdot}3\ cm$, $n = 40°$.

2. Si trasporti un triangolo mediante due lati e l'angolo da essi racchiuso.

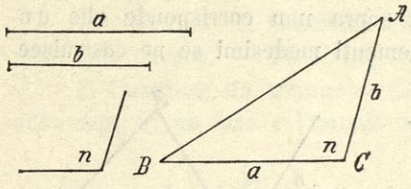

Fig. 61.

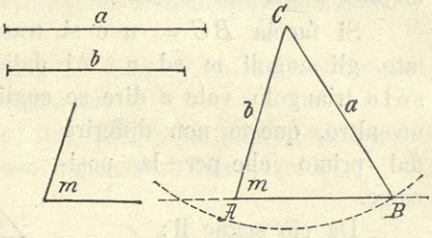

Fig. 62.

§ 53. Quarta costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati due lati a e b e l'angolo m opposto al lato maggiore a (Fig. 62).

Si faccia $\sphericalangle BAC = m$, $AC = b$ e fatto centro in C con raggio $= a$ si descriva un arco, che intersechi in B l'altro lato dell'angolo dato.

IV. caso di congruenza: Due triangoli sono congruenti, se hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo opposto al lato maggiore.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 4{\cdot}7\ cm$, $b = 3{\cdot}2\ cm$, $m = 54°$.

2. $a = 7{\cdot}3\ cm$, $b = 2{\cdot}9\ cm$, $m = 120°$.

§ 54. Quinta costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati i tre lati a, b, c (Fig. 63).

Si faccia $BC = a$, e si descrivano due archi centrando in C e in B coi raggi c e b. A quale condizione devono sodisfare i tre lati, affinchè gli archi s'intersechino? — I due triangoli ABC ed A_1BC risultanti sono congruenti. Si ottiene dunque un solo triangolo determinato.

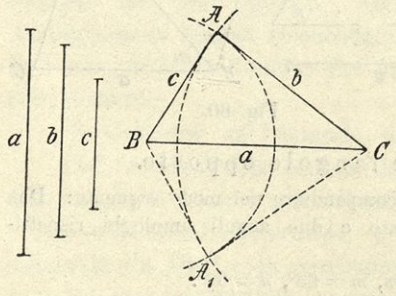

Fig. 63.

Da ciò segue il:

V. caso di congruenza: Due triangoli sono congruenti, se hanno tre lati rispettivamente eguali.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 6{\cdot}8\ cm$, $b = 5{\cdot}7\ cm$, $c = 4{\cdot}6\ cm$.
2. $a = 2{\cdot}7\ cm$, $b = 6{\cdot}4\ cm$, $c = 5{\cdot}5\ cm$.
Si trasporti un triangolo mediante i tre lati.

§ 55. Sesta costruzione del triangolo. Costruire un triangolo, dati due lati a e b e l'angolo n opposto al lato minore b (Fig. 64).

Si faccia $\sphericalangle ABC = n$, $BC = a$ e fatto centro in C si descriva un arco con raggio b. Ora possono aver luogo tre differenti casi, secondo che il lato b è maggiore, eguale o minore della normale CA, abbassata da C sull'altro lato dell'angolo B.

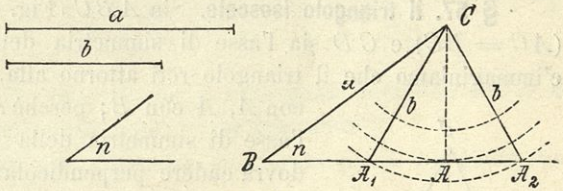

Fig. 64.

1. Se è $b < AC$, l'arco suddetto non può avere alcun punto comune col lato BA, e cogli elementi dati non si potrà costruire in tal caso alcun triangolo.

2. Se è $b = AC$, l'arco tocca il lato BA, ed il problema ci dà il triangolo rettangolo ABC.

3. Se è $b > AC$, l'arco descritto intorno a C con raggio b interseca il lato AB in due punti A_1, A_2; risultano dunque due triangoli differenti A_1BC, A_2BC, i quali, siccome contengono gli elementi dati, sodisfanno al problema proposto.

Secondo che a un problema corrispondono una, due o più soluzioni si dice *determinato in modo unico, in due modi* o in *più modi*. I cinque primi problemi della costruzione del triangolo (§§ 50 sino 54) sono determinati in modo unico, il sesto è o impossibile o è determinato in modo unico o in due modi.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 5{\cdot}6\ cm$, $b = 3{\cdot}6\ cm$, $n = 36°$.
2 $a = 5{\cdot}8\ cm$, $b = 5{\cdot}4\ cm$, $n = 65°$.

§ 56. Cambiamenti degli elementi opposti del triangolo. *a)* Se in un triangolo, rimanendo invariati due lati, cresce l'angolo da essi racchiuso, cresce anche il lato opposto allo stesso.

Nel triangolo ABC (Fig. 65) si aumenti l'angolo A in modo che AC giunga nella posizione AC_1; s'immagini poscia guidata la retta CC_1 e costruitone l'asse di simmetria AD. Siccome il punto B giace fuori dell'asse di simmetria e si trova insieme con C dalla stessa parte del medesimo, dovrà essere $BC_1 > BC$ (§ 42, *b*). Inversamente:

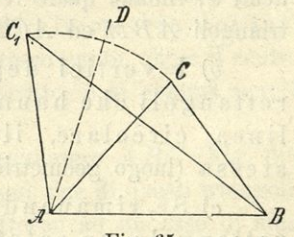

Fig. 65.

b) Se in un triangolo, rimanendo invariati due lati, cresce il terzo lato, cresce anche l'angolo ad esso opposto. Infatti, ad un angolo decrescente, dovrebbe corrispondere pel teorema precedente, un lato opposto decrescente; e ad un angolo che rimane invariato?

I triangoli particolari.

§ 57. Il triangolo isoscele. Sia ABC (Fig. 66) un triangolo isoscele ($AC = BC$) e CD sia l'asse di simmetria dell'angolo al vertice. Se c'immaginiamo che il triangolo roti attorno alla retta CD, B coinciderà con A, A con B; perchè? Perciò CD sarà anche l'asse di simmetria della base AB, e come tale dovrà cadere perpendicolarmente alla stessa; cioè:

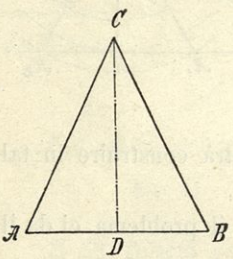

Fig. 66.

Nel triangolo isoscele l'asse di simmetria dell'angolo al vertice, l'asse di simmetria della base e l'altezza coincidono in una stessa retta.

Due figure, le quali come i triangoli ACD e BCD rivolgendole attorno ad una retta, vanno a coprirsi, si dicono *simmetriche* rispetto a questa retta. Ogni figura, che da una retta può venir divisa in due parti simmetriche, chiamasi *figura simmetria* e la retta dicesi *asse di simmetria* o brevemente *asse*. Dunque il triangolo isoscele è una figura simmetrica.

Quesiti d'esercizio. Si costruisca un triangolo isoscele dati:
1. la base ed un angolo ad essa adiacente, $AB = 3\ cm$, $A = 70^0$;
2. la base e l'angolo al vertice, $AB = 5\ cm$, $C = 90^0$;
3. uno dei lati eguali e l'angolo adiacente alla base, $AC = 6\ cm$, $A = 72^0$.
4. uno dei lati eguali e l'angolo al vertice, $BC = 62\ mm$, $C = 36^0$;
5. la base ed uno dei lati eguali, $AB = 4\ cm$, $AC = 3\ cm$.

§ 58. Il triangolo rettangolo. *a)* L'ipotenusa del triangolo rettangolo è il diametro del cerchio ad esso circoscritto. Infatti, se dall'angolo retto A (Fig. 43) si leva via uno dei due angoli acuti x, rimane quale residuo l'altro angolo acuto z; perchè? Perciò i triangoli ABM ed ACM sono isosceli, quindi $MA = MB = MC$.

b) I vertici degli angoli retti di tutti i triangoli rettangoli che hanno comune l'ipotenusa giacciono nella linea circolare, il diametro della quale è l'ipotenusa stessa (luogo geometrico dei vertici).

c) Se, rimanendo costante l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, un cateto aumenta, l'altro diminuisce.

Infatti, costruendo l'asse di simmetria MN della retta CC_1 (Fig. 67), sarà $BC_1 > BC$, a contrario $AC_1 < AC$.

d) Se un angolo di un triangolo rettangolo è di 30°, il cateto minore è la metà dell'ipotenusa. Per dimostrar ciò si rivolti il triangolo ABC (Fig. 68) intorno alla retta AC fino a che giunga nella posizione ACD e si consideri poscia la figura $ABCD$. — Inversamente?

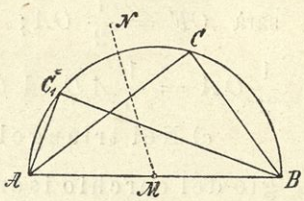

Fig. 67.

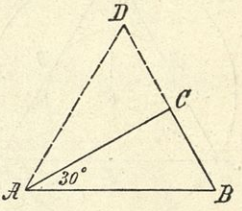

Fig. 68.

Quesiti d'esercizio. Costruire un triangolo rettangolo ABC, dati:

1. un cateto e l'angolo acuto ad esso adiacente, $AC = 2\,cm$, $A = 60°$;
2. un cateto e l'angolo ad esso opposto, $BC = 4\,cm$, $A = 40°$;
3. l'ipotenusa e l'angolo ad esso adiacente, $AB = 5\,cm$, $B = 35°$;
4. I due cateti, $AC = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$;
5. l'ipotenusa ed un cateto, $AB = 6\,cm$, $BC = 4\,cm$.

Costruire un triangolo isoscele, dati:

6. l'altezza (4 *cm*) ed un angolo adiacente alla base (76°);
7. l'altezza (5 *cm*) e l'angolo al vertice (48°);
8. l'altezza (3 *cm*) e la base (4 *cm*);
9. uno dei lati eguali (5·5 *cm*) e l'altezza (4 *cm*).

Costruire un triangolo rettangolo isoscele, dati:

10. un cateto (36 *mm*);
11. l'ipotenusa (5 *cm*);
12. l'altezza (3 *cm*).

Costruire un triangolo rettangolo, dati:

13. l'altezza (3·4 *cm*) ed un angolo acuto (36°);
14. l'altezza (3 *cm*) ed un cateto (4 *cm*).

Si iscriva in un cerchio, il cui raggio è di 3 *cm*, un triangolo rettangolo,

15. che abbia un angolo di 56°,
16. nel quale l'altezza sia di 2 *cm*.

§ 59. Il triangolo equilatero. Dal teorema del triangolo isoscele (§ 57) segue:

a) Nel triangolo equilatero i tre assi di simmetria degli angoli coincidono coi tre assi di simmetria dei lati e colle tre altezze; essi passano per lo stesso punto, che è il centro tanto del cerchio iscritto che del cerchio circoscritto, e si chiama perciò *centro del triangolo equilatero.*

b) Le tre altezze dividono il triangolo equilatero ABC (Fig. 69) in sei triangoli rettangoli eguali; perchè se ogni due di questi triangoli, che giacciono uno accanto all'altro, si girano attorno ad un asse di sim-

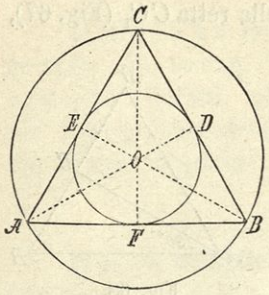

Fig. 69.

metria, vengono a coprirsi. In uno di questi triangoli, p. e. AOF, essendo $\sphericalangle FAO = 30^0$, sarà $OF = \frac{1}{2} OA$; perciò anche $OD = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{3} AD$ ed $OA = \frac{2}{3} AD$.

c) Nel triangolo equilatero il raggio del cerchio iscritto è $\frac{1}{3}$, quello del cerchio circoscritto è $\frac{2}{3}$ dell'altezza.

d) Le altezze del triangolo equilatero sono eguali.

Quesiti d'esercizio. 1. Costruire un triangolo equilatero data l'altezza (3 *cm.*)

2. Come si fa a dimostrare che un triangolo isoscele ha due altezze eguali?

3. Che cosa si può dire circa il centro del cerchio iscritto e quello del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero?

Il cerchio. B.

§ 60. Retta e cerchio. Una retta può avere rispetto a un cerchio tre differenti posizioni, secondo che la sua distanza dal centro dello stesso è minore, eguale o maggiore del raggio (Fig. 70). Nel primo caso la retta è *secante* del cerchio ed ha due punti comuni colla periferia dello stesso, nel secondo caso è *tangente* al cerchio ed ha con esso un punto solo comune, nel terzo caso giace fuori del cerchio, cioè non ha con esso alcun punto comune.

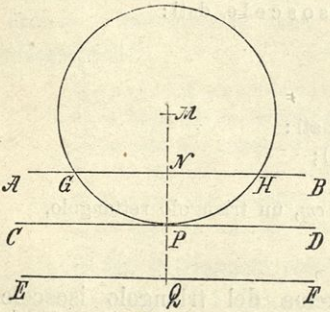

Fig. 70.

§ 61. Proprietà delle corde. *a)* Il centro di un cerchio è egualmente distante dalle estremità di una corda; perciò:

L'asse di simmetria di ogni corda del cerchio passa pel centro dello stesso. Su questo teorema si basa il modo di trovare il centro di una linea circolare, che deve passare per punti dati.

Problemi. 1. Costruire un cerchio, che passi per due punti dati. — Il problema è indeterminato.

2. Costruire un cerchio, che passi per tre punti dati. Questo problema ha lo stesso significato di quello: Circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato (§ 44, Fig. 50).

3. Cercare il centro di un cerchio o di un arco circolare dato. — Si scelgano tre punti sulla circonferenza del cerchio o sull'arco dato e si proceda come nel quesito precedente.

b) Se l'arco corrispondente alla corda è di 60°, come CD (Fig. 72), allora il triangolo CDM è equilatero; perchè? Perciò:

La corda del sestante è eguale al raggio.

Quesiti d'esercizio. 1. Costruire un cerchio, che passi per un dato punto ed abbia un dato raggio (3 *cm*).

2. In un cerchio di un dato raggio (4 *cm*) si conduca una corda di una data lunghezza (5 *cm*).

3. È' forse eguale al diametro la corda che si conduce sino alla terza divisione del cerchio?

4. Quante corde della lunghezza del raggio e succedentesi l'una all'altra si possono condurre in un cerchio?

§ 62. Relazioni fra corde e le loro distanze dal centro. *a)* Corde eguali distano egualmente dal centro.

Infatti, se le corde AB e CD (Fig. 71) sono eguali, sarà sempre possibile di far rotare uno dei due triangoli ABM, CDM attorno al punto M in modo che l'uno vada a coprire l'altro (V. caso di congruenza); in tal caso anche le distanze ME ed MF si copriranno, perchè da un punto non si può abbassare ad una retta che una sola normale; quindi $ME = MF$.

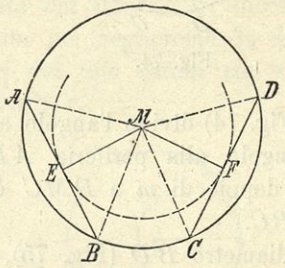

Fig. 71.

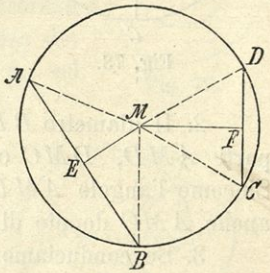

Fig. 72.

b) Corde di un cerchio disuguali hanno distanze disuguali dal centro, e precisamente la corda maggiore ha la distanza minore. Difatti, nei due triangoli rettangoli BEM e CFM (Fig. 72), essendo le ipotenuse eguali mentre $BE > CF$, dovrà essere $ME < MF$ (§ 58, *c*).

Inversioni: *c)* Corde egualmente distanti dal centro sono eguali.

d) Corde di un cerchio, che hanno distanze disuguali dal centro, sono disuguali, e precisamente la più distante è la corda minore. Confronta il corollario al § 41.

§ 63. Angolo alla periferia. Un angolo, di cui il vertice è nella periferia di un cerchio e i lati sono corde, chiamasi *angolo alla peri-*

feria; la porzione della circonferenza compresa dai lati dell'angolo si dice *arco corrispondente od arco sul quale insiste l'angolo alla periferia.*

L'angolo al semicerchio è parimente un angolo alla periferia. Qual'è la grandezza dell'arco corrispondente?

Fra un angolo alla periferia e l'angolo al centro insistente sullo stesso arco sussiste una relazione semplice nel studiare la quale devesi distinguere se il centro del cerchio giace in un lato dell'angolo alla periferia o si trova dentro o fuori dell'angolo.

1. Nel triangolo AMB (Fig. 73) gli angoli segnati con m sono eguali (perchè?); perciò l'angolo al centro AMC è doppio dell'angolo alla periferia ABC (§ 34, *a*) che insiste sul medesimo arco.

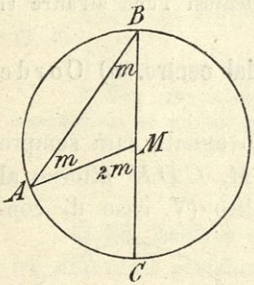

Fig. 73.

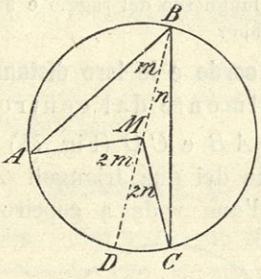

Fig. 74.

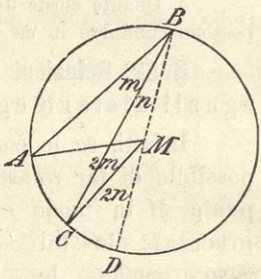

Fig. 75.

2. Il diametro BD (Fig. 74) divide l'angolo al centro AMC nelle parti AMD, DMC e l'angolo alla periferia ABC nelle parti m, n. Siccome l'angolo AMD è doppio di m e DMC è doppio di n, sarà anche AMC doppio di ABC.

3. Se conduciamo il diametro BD (Fig. 75), risulta che l'angolo al centro AMD è doppio dell'angolo alla periferia ABD, cioè di $m + n$. Siccome CMD è doppio di n, deve essere anche AMC doppio di m.

a) L'angolo alla periferia è la metà dell'angolo al centro corrispondente al medesimo arco.

b) Tutti gli angoli alla periferia, insistenti sullo stesso arco o sopra archi eguali, sono eguali.

Quesiti d'esercizio. 1. Si calcoli l'angolo alla periferia che corrisponde a un arco di $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ della periferia.

2. Come si dimostra col mezzo del teorema *a)* che l'angolo al semicerchio è un retto?

3. Si costruiscano in un cerchio dato parecchi angoli alla periferia di 30° *a)* sul medesimo arco, *b)* su archi differenti.

§ 64. Costruzioni delle tangenti. 1. Costruire la tangente al cerchio, dato il punto di contatto. — Vedi § 40.

2. Da un punto situato fuori di un cerchio condurre allo stesso le tangenti. — Si unisca il punto A dato (Fig. 76) col centro O del cerchio dato e si descriva sopra la retta AO, presa quale diametro, una circonferenza, la quale intersechi quella del cerchio dato nei punti D ed E. AD ed AE sono le tangenti cercate; perchè? — Al problema proposto corrispondono adunque due soluzioni.

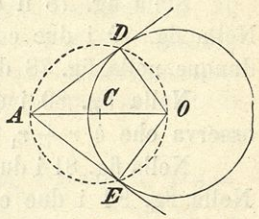

Fig. 76.

Quesito d'esercizio. Dati un cerchio con raggio $r = 2{\cdot}1\,cm$ ed un punto la cui distanza dal centro è *a)* $\frac{3}{2}\,r$, *b)* $2\,r$, condurre da questo punto le tangenti al cerchio.

§ 65. Posizione reciproca di due cerchi. Cerchi, che hanno lo stesso centro, si dicono *concentrici* (Fig. 77); la superficie limitata da due linee circolari concentriche è chiamata *anello circolare.* Due cerchi, che hanno centri differenti, si dicono *eccentrici* (Fig. 78—82); la retta illimitata che passa per i centri di due cerchi *eccentrici* si chiama *centrale;* il segmento di quella retta limitato dai due centri dicesi *distanza dei centri.* In seguito noi segneremo la distanza dei centri con c, i raggi dei due cerchi con r ed r_1, ed ammetteremo che sia $r > r_1$.

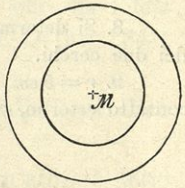

Fig. 77.

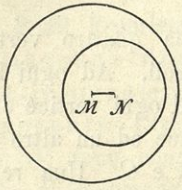

Fig. 78.

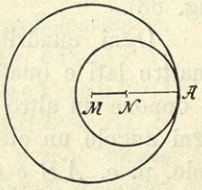

Fig. 79.

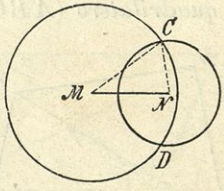

Fig. 80.

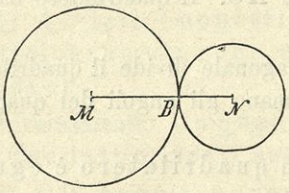

Fig. 81.

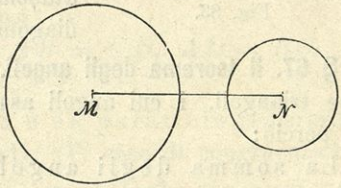

Fig. 82.

Se ora c'immaginiamo che il minore dei due cerchi nella fig. 77 si muova, esso assumerà rispetto al maggiore successivamente cinque posizioni differenti, che sono rappresentate dalla fig. 78 alla fig. 82. Modello!

Nella fig. 78 il cerchio minore giace del tutto dentro al maggiore. Nella fig. 79 i due cerchi si toccano internamente; qui è $c = r - r_1$; dunque nella fig. 78 dev'essere $c < r - r_1$. Si esprima con parole.

Nella fig. 80 i due cerchi s'intersecano e nel triangolo MNC si osserva che è $r + r_1 > c > r - r_1$ (§ 33). Si esprima con parole.

Nella fig. 81 i due cerchi si toccano esternamente; qui è $c = r + r_1$. Nella fig. 82 i due cerchi sono esterni l'uno all'altro; qui chiaramente si vede che è $c > r + r_1$. Si esprima con parole.

Quesiti d'esercizio. Costruire due cerchi, dati (in centimetri) la distanza dei centri e i raggi:

1. $c = 4{\cdot}1$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}4$;
2. $c = 0{\cdot}7$, $r = 2{\cdot}2$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
3. $c = 3{\cdot}4$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}4$
4. $c = 0{\cdot}8$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}3$;
5. $c = 0$, $r = 1{\cdot}9$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
6. $c = 1{\cdot}5$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}5$;
7. $c = 2{\cdot}5$, $r = 1{\cdot}7$, $r_1 = 1{\cdot}7$.

8. Si determini nei casi precedenti anche con calcolo la posizione vicendevole dei due cerchi.

9. $r = 5\ cm$, $r_1 = 4\ cm$, quale sarà la lunghezza di c affinchè abbia luoge *a)* un contatto esterno, *b)* un contatto interno?

Il quadrilatero.

§ 66. Definizioni. Se si uniscono con rette secondo un determinato ordine quattro punti, tre dei quali non giacciono in linea retta, si ottiene un *quadrilatero* ($ABCD$, Fig. 83).

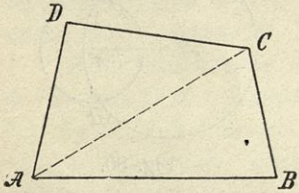

Fig. 83.

Ogni quadrilatero ha quattro vertici, quattro lati e quattro angoli. Ad ogni lato si oppone un altro lato, ad ogni vertice e ad ogni angolo un altro vertice ed un altro angolo, p. e. AB e CD, A e C. Una retta, che congiunge due vertici opposti, dicesi *diagonale*, come AC. Il quadrilatero ha due diagonali.

§ 67. Il teorema degli angoli. Ogni diagonale divide il quadrilatero in due triangoli, i cui angoli assieme formano gli angoli del quadrilatero; perciò:

La somma degli angoli di un quadrilatero è eguale a quattro retti, cioè a 360°.

Perchè non si può conchiudere nel modo seguente: Siccome le due diagonali dividono il quadrilatero in quattro triangoli, perciò la somma degli angoli del quadrilatero è eguale a quattro volte due retti, cioè a $8R$?

Un quadrilatero non può avere più di un angolo convesso. — In seguito si considereranno soltanto quadrilateri con soli angoli concavi.

Quesiti d'esercizio. 1. Si disegni un quadrilatero con un angolo convesso.

2. Quanti angoli acuti e quanti angoli ottusi può avere un quadrilatero? Si disegnino i casi possibili.

Costruire un quadrilatero $ABCD$, dati:

3. i quattro lati e un angolo, $AB = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$, $CD = 4\,cm$, $DA = cm$, $A = 90^0$;

4. i quattro lati ed una diagonale, $AB = 5\,cm$, $BC = 4{\cdot}5\,cm$, $CD = 3\,cm$, $DA = 6\,cm$, $AC = 4\,cm$;

5. tre lati e i due angoli da essi racchiusi, $AB = 35\,mm$, $BC = CD = 3\,cm$, $B = 90^0$, $C = 120^0$;

6. tre lati e le due diagonali, $AB = 4\,cm$, $BC = 5{\cdot}5\,cm$, $BD = 5\,cm$, $AC = 5\,cm$, $AD = 3\,cm$.

7. Dati tre angoli di un quadrilatero, calcolare il quarto:

a) $64^0\ 37'$, $84^0\ 12'$, $113^0\ 48'$; *b)* 67^0, 45^0, 36^0.

8. Determinare la somma degli angoli esterni di un quadrilatero.

§ 68. Distinzione dei quadrilateri. Un quadrilatero, che ha i lati opposti paralleli, si chiama *parallelogrammo,* come $ABCD$ (Fig. 84); $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Un quadrilatero, che ha soli due lati opposti paralleli, si dice *trapezio* come $ABCD$ (Fig. 89); $AB \parallel DC$.

Un quadrilatero, nel quale nessun lato è parallelo ad un altro, è detto *trapezoide* (Fig. 83). Un trapezoide si chiama *deltoide,* se ha due paia di lati attigui eguali, come $ABCD$ (Fig. 92); $AB = BC$ ed $AD = CD$.

§ 69. Proprietà del parallelogrammo. *a)* Ciascuna diagonale divide il parallelogrammo in due triangoli congruenti. I triangoli ABD e BCD (Fig. 84) sono congruenti, perchè hanno il lato BD comune e gli angoli adiacenti m ed n eguali.

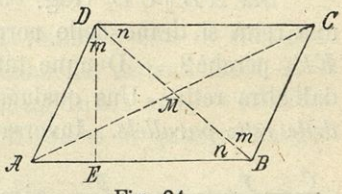

Fig. 84.

b) I lati opposti di un parallelogrammo sono eguali; $AB = CD$, $AD = BC$. Ciò segue da *a)*.

Inversamente: Un quadrilatero è un parallelogrammo se ogni due lati opposti sono eguali. (V. caso di congruenza.)

c) Gli angoli opposti di un parallelogrammo sono eguali; $\sphericalangle A = C$, $\sphericalangle B = D$. Ciò segue da *a)*.

Inversamente: Un quadrilatero è un parallelogrammo se ha gli angoli opposti eguali. Essendo $\sphericalangle A = C$ e $\sphericalangle B = D$, sarà $A + B = 2R$; perciò $AD \parallel BC$ (§ 30, *b*) ecc.

d) Le diagonali di un parallelogrammo si dividono a vicenda in due parti eguali. Imperocchè se M è il punto d'intersezione delle due diagonali, si può fare che i triangoli ABM e CDM vadano a coprirsi, facendo coincidere mediante rotazione nel piano AB con CD (I. caso di congruenza; $AB = CD$, $\sphericalangle ABM = CDM$, $\sphericalangle BAM = DCM$); allora AM coincide con CM e BM con DM; perciò $AM = CM$ e $BM = DM$.

Inversamente: Se in un quadrilatero le diagonali si intersecano a vicenda in due parti eguali, il quadrilatero è un parallelogrammo. (V. caso di congruenza,)

e) Un quadrilatero, che ha due lati opposti eguali e paralleli, è un parallelogrammo. Essendo p. e. $AB = DC$ ed $AB \parallel CD$, siccome $\triangle ABD \cong CDB$ (III. caso di congruenza), perciò sarà $\sphericalangle ADB = CBD$ ed $AB \parallel BC$.

Quesiti d'esercizio. Costruire un parallelogrammo $ABCD$, dati:

1. due lati attigui e l'angolo da essi racchiuso, $AB = 4\ cm$, $BC = 3\ cm$, $B = 110°$;
2. due lati attigui ed una diagonale, $AB = 4{\cdot}5\ cm$, $BC = 3{\cdot}6\ cm$, $BD = 5\ cm$;
3. le due diagonali e un lato, $AC = 6\ cm$, $BD = 5\ cm$, $BC = 3\ cm$;
4. le due diagonali e l'angolo da esse racchiuso, $AC = 5{\cdot}2\ cm$, $BD = 6{\cdot}2\ cm$, $AMB = 115°$.
5. Dato un angolo di un parallelogrammo, calcolare gli altri angoli, *a)* 72°, *b)* 118° 19′, *c)* 98° 12′ 34″.

§ 70. Distanza di due rette parallele. Dal § 69, *b)* segue:

a) Rette parallele comprese fra parallele sono eguali.

Sia $AB \parallel CD$ (Fig. 85); se da due punti qualunque B ed E di una retta si tirano delle normali all' altra, questesaranno eguali, $BD = EF$; perchè? — Dunque tutti i punti di una retta distano egualmente dall'altra retta. Una qualunque di queste normali si chiama *distanza delle rette parallele*. Inversamente:

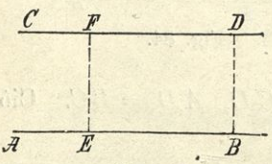

Fig. 85.

b) Tutti i punti, che dalla medesima parte di una retta, distano egualmente dalla medesima, giacciono in una parallela alla retta data (luogo geometrico di quei punti).

Ogni lato del parallelogrammo si può prendere quale base. La distanza della base dal lato parallelo si chiama *altezza*; p. e. DE è l'altezza rispetto al lato AB preso quale base (Fig. 84).

Quesito d'esercizio. Costruire un triangolo rettangolo, date l'ipotenusa (5 *cm*) e l'altezza rispettiva (2 *cm*).

§ 71. Distinzione dei parallelogrammi. Se il parallelogrammo ha un angolo retto, anche gli altri angoli devono essere retti, ed il parallelo-

grammo dicesi *rettangolo.* Se due lati contigui sono eguali, anche gli altri lati devono essere eguali, ed il parallelogrammo è detto *equilatero.*

Il parallelogrammo rettangolo si dice anche propriamente *rettangolo,* l'equilatero *rombo.* Un parallelogrammo rettangolo ed equilatero si chiama *quadrato,* l'obliquangolo e non equilatero *romboide.*

§ 72. Il rettangolo. Nel rettangolo (Fig. 86) i triangoli ABC ed ABD sono perfettamente eguali; perchè? Quindi le diagonali $AC = BD$ sono eguali, ed essendo eguali anche le loro metà, cosi il loro punto d'intersezione M è egualmente distante dai vertici; perciò: Ad ogni rettangolo si può circoscrivere un cerchio. È il rettangolo una figura simmetrica?

Quesiti d'esercizio. Costruire un rettangolo $ABCD$, dati:

1. due lati attigui, $AB = 4{\cdot}7\ cm$, $BC = 0{\cdot}32\ dm$;
2. un lato e la diagonale, $AD = 4\ cm$, $AC = 5\ cm$;
3. una diagonale e l'angolo racchiuso dalle diagonali, $AC = 5{\cdot}4\ cm$, $BMC = 60°$.

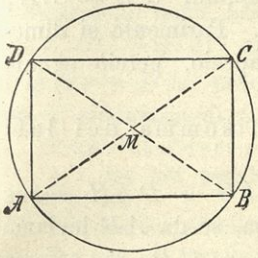

Fig. 86.

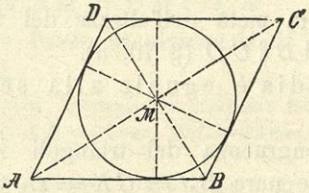

Fig. 87.

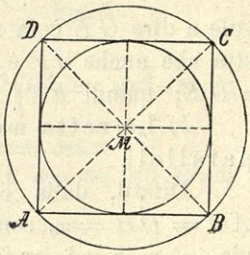

Fig. 88.

§ 73. Il rombo. Ogni diagonale di un rombo è asse di simmetria dell'altra; perchè A e C (Fig. 87) sono egualmente distanti tanto da B che da D. (Modello!) Da ciò segue che le diagonali sono vicendevolmente perpendicolari e dividono il rombo in quattro triangoli congruenti.

Ogni diagonale del rombo è anche asse di simmetria dei due angoli da essa intersecati; perchè? Dunque il punto M è egualmente distante dai lati e perciò in ogni rombo si può iscrivere un cerchio.

Quesiti d'esercizio. Costruire un rombo $ABCD$, dati:

1. un lato e un angolo, $AB = 3\ cm$, $B = 120°$;
2. un lato ed una diagonale, $AD = 4\ cm$, $BD = 3\ cm$;
3. le due diagonali, $AC = 6\ cm$, $BD = 4{\cdot}8\ cm$;
4. un angolo e il raggio del cerchio iscritto, $A = 50°$, $r = 2\ cm$.

§ 74. Il quadrato. Le due diagonali del quadrato (Fig. 88) sono eguali e vicendevolmente perpendicolari. Al quadrato si può iscrivere e circoscrivere un cerchio. Centro del quadrato. È il quadrato una figura simmetrica?

Quesiti d'esercizio. 1. Costruire un quadrato, dati *a)* il lato, *b)* la diagonale.

2. In quali parallelogrammi le diagonali sono eguali e in quali sono vicendevolmente perpendicolari?

§ 75. Proprietà del trapezio. Nel trapezio ciascuno dei due lati paralleli può riguardarsi quale *base*; la distanza degli stessi è *l'altezza* del trapezio. La retta, che unisce i punti di mezzo dei due lati non paralleli, è detta *retta media* (*EF*, Fig. 89).

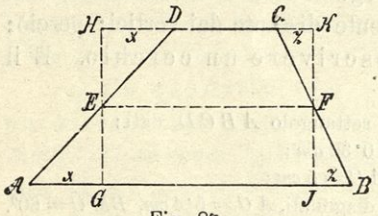

Fig. 89.

a) La retta media del trapezio è parallela ai lati paralleli dello stesso.

Infatti, essendo $AE = ED$ e $GH \perp AB$, facendo rotare il triangolo AEG intorno al punto E, lo si può collocare sopra il triangolo HED così che lo copra. Quindi $GE = EH$; vale a dire GE è la metà dell'altezza del trapezio. Parimente si dimostra che anche JF è la metà dell'altezza del trapezio, perciò eguale a GE; quindi $EF \parallel AB \parallel CD$ (§ 70, *a*).

b) La retta media è eguale alla semisomma dei lati paralleli.

Difatti, dalla congruenza dei triangoli AEG e DEH segue $AG = DH = x$, come pure $BJ = CK = z$. Ora, se da AB leviamo via x e z ed aggiungiamo queste due rette a CD, la somma di AB e CD diventa il doppio di EF, cioè $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

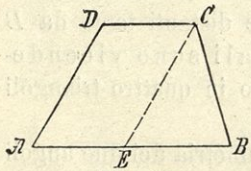

Fig. 90.

Quesiti d'esercizio.*) 1. Costruire un trapezio $ABCD$, dati tutti i quattro lati, $AB = 6\ cm$, $BC = 5\ cm$, $CD = 2\ cm$, $DA = 3\ cm$. Avviamento. Si costruisca prima il triangolo BCE (Fig. 90) con la differenza dei due lati paralleli e coi due lati non paralleli.

2. Costruire un trapezio, dati tre lati e un angolo:
a) $AB = 5{\cdot}2\ cm$, $BC = 3{\cdot}5\ cm$, $CD = 4\ cm$, $B = 70^0$;
b) $BC = 4\ cm$, $CD = 4\ cm$, $DA = 3\ cm$, $D = 120^0$.

3. Costruire un trapezio, dati tre lati ed una diagonale: $AB = 5\ cm$, $BC = 4{\cdot}4\ cm$, $CD = 4{\cdot}4\ cm$, $AC = 6\ cm$.

4. Costruire un trapezio, dati tre lati e l'altezza h:
a) $AB = 4\ cm$, $CD = 3{\cdot}6\ cm$, $DA = 4{\cdot}2\ cm$, $h = 3\ cm$;
b) $BC = 3\ cm$, $CD = 2\ cm$, $DA = 3{\cdot}6\ cm$, $h = 2{\cdot}5\ cm$.

5. Dati due angoli di un trapezio (i quali non siano adiacenti ad uno dei lati non paralleli), calcolare gli altri angoli: *a)* $A = 63^0$, $B = 96^0$; *b)* $C = 125^0\ 12'\ 40''$, $D = 87^0\ 34'\ 28''$; *c)* $A = 76^0\ 26'\ 34''$, $C = 85^0\ 23'\ 17''$.

*) Nei quesiti seguenti sul trapezio $ABCD$, si presuppone che sia sempre $AB \parallel CD$.

§ 76. Il trapezio isoscele. *a*) Un trapezio, che ha i lati non paralleli eguali, dicesi *trapezio isoscele*. Nel trapezio isoscele gli angoli adiacenti ad ognuno dei lati paralleli sono eguali. Se è $CE \parallel DA$ (Fig. 90) e $BC = AD$, dev' essere anche $BC = EC$, dunque $\sphericalangle B = CEB = A$. Siccome gli angoli ADC e DCB del trapezio sono supplementi degli angoli A e B, così essi sono parimente eguali.

b) Il trapezio isoscele è una figura simmetrica, e precisamente l'asse di simmetria di uno dei lati paralleli è in pari tempo asse di simmetria del trapezio. Si dimostri facendo rotare il trapezio intorno all'asse di simmetria del lato AB. Modello!

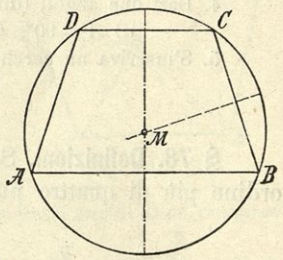

Fig. 91.

c) Al trapezio isoscele si può circoscrivere un cerchio. Infatti, se M è il punto d'intersezione degli assi di simmetria dei lati AB e BC (Fig. 91), sarà $AM = BM = CM$ ed anche $= DM$, perchè l'asse di simmetria di AB è in pari tempo asse di simmetria di CD.

Quesiti d'esercizio. Costruire un trapezio isoscele dati:

1. i due lati paralleli $AB = 62\,mm$, $DC = 32\,mm$, e uno dei lati eguali $AD = 44\,mm$;
2. i due lati paralleli $AB = 5\,cm$, $DC = 4\,cm$, e $\sphericalangle D = 100°$;
3. i due lati paralleli $AB = 4\,cm$, $DC = 2{\cdot}5\,cm$, e l'altezza $h = 3\,cm$;
4. il lato parallelo $AB = 5\,cm$, uno dei lati non paralleli $AD = 3{\cdot}6\,cm$ e l'angolo $C = 120°$;
5. il lato parallelo $DC = 3\,cm$, uno dei lati non paralleli $AD = 3{\cdot}6\,cm$, e l'altezza $h = 2{\cdot}8\,cm$.
6. Dato un angolo di un trapezio isoscele, calcolare tutti gli altri angoli: *a*) 57° 17′ 45″, *b*) 142° 16′ 35″.

§ 77. Proprietà del deltoide. La diagonale BD divide il deltoide $ABCD$ (Fig. 92) in due triangoli congruenti, che facendoli rotare attorno a BD uno va a coprire l'altro. Perciò il deltoide è *una figura simmetria* e la diagonale (BD) ne è l'asse di simmetria; essa dimezza perpendicolarmente l'altra diagonale AC, nonchè gli angoli B e D (si mostri col rivolgere la figura attorno all'asse di simmetria). Modello!

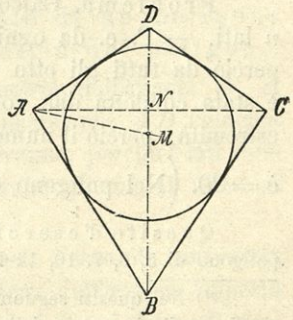

Fig. 92.

Se si costruisce l'asse di simmetria dell'angolo A, si ottiene nella BD un punto M, che dista egualmente dai lati del deltoide; perciò: In ogni deltoide si può iscrivere un cerchio.

Quesiti d'esercizio.*) Costruire un deltoide, dati:

1. due lati disuguali ed una diagonale:
a) $AB = 5\ cm$, $AD = 3\ cm$, $BD = 7\ cm$;
b) $AB = 4\ cm$, $AD = 5{\cdot}2\ cm$, $AC = 6\ cm$;
2. un lato e le due diagonali:
$AB = 4\ cm$, $AC = 3\ cm$, $BD = 5\ cm$;
3. le due diagonali e un angolo:
$AC = 3\ cm$, $BD = 5\ cm$, $\sphericalangle D = 75^0$.
4. Dati due angoli (disuguali) di un deltoide, calcolare tutti gli altri angoli:
a) $A = 90^0$, $B = 60^0$; *b)* $B = 42^0\ 15'\ 12''$, $D = 170^0\ 28'\ 30''$.
5. S'inscriva un cerchio in un deltoide.

Il poligono.

§ 78. Definizioni. Se si uniscono con rette secondo un determinato ordine più di quattro punti, si ottiene un *poligono* (*A B C D E F*, Fig. 93).

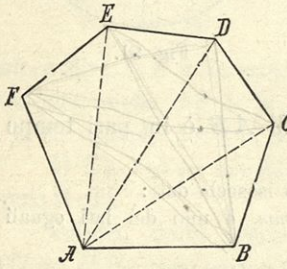

Fig. 93.

Il numero dei vertici di un poligono è eguale a quello dei lati e degli angoli. Secondo che il numero dei lati è 5, 6, 7 . . . *n*, il poligono è detto *pentagono, esagono, ettagono* . . . . . di *n* lati.

In senso lato si computano fra i poligoni anche il triangolo ed il quadrilatero. In seguito si considereranno soltanto poligoni con soli *angoli concavi.*

§ 79. Diagonali. Una retta, che congiunge due vertici di un poligono, che non si succedono immediatamente, dicesi *diagonale.* Se da un vertice del poligono si tirano tutte le diagonali possibili, risulta che a tre vertici non si possono condurre diagonali, cioè al vertice stesso dal quale si sono condotte le diagonali e ai vertici attigui; perciò: Il numero delle diagonali che si possono condurre da un vertice è di tre unità minore del numero dei lati. [Nel poligono di *n* lati è $(n-3)$.]

Problema. Calcolare il numero delle diagonali di un poligono di *n* lati. — P. e. da ogni vertice di un ottagono si possono guidare 5, perciò da tutti gli otto vertici $5 \cdot 8 = 40$ diagonali. Ma ogni diagonale è stata condotta due volte, cioè tanto dall'una che dall'altra delle sue estremità; perciò il numero di tutte le diagonali possibili di un ottagono è $= 20$. $\left(\text{Nel poligono di } n \text{ lati è } \frac{n\ (n-3)}{2}.\right)$

Quesito d'esercizio. Calcolare il numero di tutte le diagonali di un poligono di 5, 6, 7, 10, 12 lati.

*) Nei quesiti seguenti sul deltoide *A B C D*, si presuppone sempre che *BD* sia l'asse di simmetria dello stesso.

§ 80. Il teorema degli angoli. Se si unisce mediante altrettante rette un punto O, situato nell'interno del poligono (Fig. 94), con tutti i vertici, il poligono viene scomposto in tanti triangoli quanti sono i lati. Siccome ora gli angoli dei triangoli, ad eccezione di quelli che giacciono attorno il punto O, formano iusieme gli angoli del poligono, cosi la somma degli angoli di tutti i triangoli dev'essere di quattro retti maggiore di quella degli angoli del poligono; perciò: La somma degli angoli di un poligono è eguale a tante volte due retti quanti sono i lati meno quattro retti (nel poligono di n lati è $2nR - 4R$).

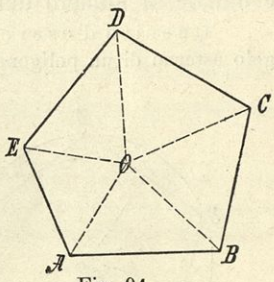

Fig. 94.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la somma degli angoli di un poligono di 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 24 lati.

2. Nel pentagono $ABCDE$ è $A = 36°\,42'\,58''$, B è $2\frac{1}{2}$ volte maggiore di A, C è di $13°\,44'\,51''$ minore di B e inoltre è $D = E$. Si calcolino gli angoli B, C, D ed E.

3. La somma degli angoli esterni di un poligono importa quattro retti; perchè? — (Vedi § 34, *b*.)

§ 81. Il poligono regolare. Simmetria dello stesso. Un poligono, che ha i lati e gli angoli eguali, dicesi *regolare*.

a) L'asse di simmetria d'ogni lato del poligono regolare è in pari tempo asse di simmetria del poligono.

Perchè, se FM (Fig. 95) è l'asse di simmetria del lato AB, si può far rotare il poligono attorno ad FM in modo che A coincida con B; allora anche AE e BC si copriranno, perchè gli angoli A e B sono eguali ed anche i punti C ed E coincideranno, perchè i lati sono eguali ecc.

Quale modello si faccia uso di un esagono regolare, che si possa rivolgere intorno ad un asse di simmetria di un lato e ad un asse di simmetria di un angolo.

b) L'asse di simmetria d'ogni angolo di un poligono regolare è in pari tempo asse di simmetria del poligono.

Perchè, se AM (Fig. 95) è l'asse di simmetria dell'angolo A, si può rivolgere il poligono attorno ad AM in modo che AB coincida con AE; allora anche i punti B ed E coincideranno, perchè i lati sono eguali, parimenti BC coinciderà con ED, perchè gli angoli B ed E sono eguali ecc.

Se il poligono ha un numero *dispari* di lati, l'asse di simmetria di ogni lato è in pari tempo asse di simmetria dell'angolo opposto (Fig. 95). Se il poligono ha un numero *pari* di lati, ogni asse di sim-

metria di un angolo è asse di simmetria dell'angolo opposto ed ogni asse di simmetria di un lato è asse di simmetria del lato opposto (Fig. 96).

Dunque il numero degli assi di simmetria di un poligono regolare è uguale al numero dei lati.

Quesito d'esercizio. Quanto importa *a)* un angolo interno, *b)* un angolo esterno di un poligono regolare di 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16, 24 lati?

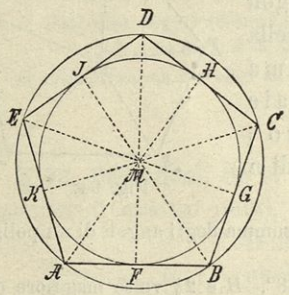

Fig. 95.

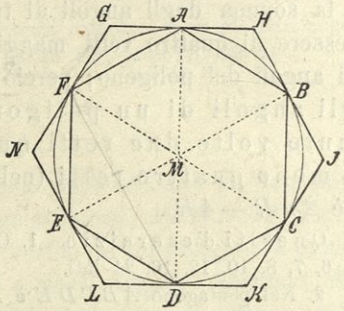

Fig. 96.

§ 82. Il poligono regolare e il cerchio. *a)* Ad ogni poligono regolare si può circoscrivere ed iscrivere un cerchio.

L'asse di simmetria FM del lato AB (Fig. 95) e l'asse di simmetria GM del lato BC s'intersecano nel punto M, che dista egualmente dai tre vertici A, B, C. Siccome ora C ed E sono punti simmetrici rispetto ad FM, sarà $CM = EM$; siccome ancora A e D sono punti simmetrici rispetto a GM, sarà $AM = DM$. Dunque M è il centro di un cerchio, che passa per tutti i vertici del poligono.

Siccome corde eguali distano egualmente dal centro, così $FM = GM = HM = \ldots$; cioè M è il centro di un altro cerchio, che tocca tutti i lati del poligono. Perciò il punto M è detto anche centro del poligono regolare.

b) Se si divide la periferia di un cerchio in parti eguali, i punti di divisione sono tanto i vertici di un poligono regolare iscritto, che i punti di contatto dei lati di un poligono regolare circoscritto.

Se gli archi AB, BC, CD . . . (Fig. 96) sono eguali, devono corrispondere ad essi corde eguali, cioè $AB = BC = CD = \ldots$ Noi possiamo ora far rotare il poligono $ABCD\ldots$ attorno al punto M in modo che il vertice A coincida con un vertice qualunque, p. e. con B; allora B cadrà su C, C su D ecc.; dunque tutti gli angoli sono eguali; quindi $ABCD\ldots$ è un poligono regolare.

Nella suaccennata rotazione la tangente GH cadrà sopra un'altra tangente, p. e. sopra HJ, HJ sopra JK ecc. La seconda posizione

del poligono $GHJK \ldots$ coprirà esattamente la prima; perciò esso avrà i lati e gli angoli rispettivamente eguali; quindi $GHJK \ldots$ sarà un poligono regolare.

Problemi. 1. Ad un cerchio dato *a)* iscrivere, *b)* circoscrivere un triangolo equilatero.

2. Ad un cerchio dato *a)* iscrivere e *b)* circoscrivere un quadrato.

3. Ad un cerchio dato *a)* iscrivere e *b)* circoscrivere un esagono regolare.

Quesiti d'esercizio. Ad un cerchio dato iscrivere e circoscrivere: 1. un ottagono regolare, 2. un dodecagono regolare, 3. un pentagono regolare, 4. un decagono regolare. — Nel 3 e 4 caso si tenti di dividere ad occhio la periferia del cerchio in cinque e rispettivamente in dieci parti eguali.

§ 83. Trasporto di un poligono. Problema. Costruire un poligono congruente ad un poligono dato (trasporto del poligono).

a) Determinandone i vertici sulla base del V. caso di congruenza. Si faccia (Fig. 97) $A_1 B_1 = AB$; fatto centro in A_1 con raggio AC ed in B_1 con raggio BC, si descrivino archi, che s'intersecano in C_1; nella stessa guisa si determinino i vertici D_1 E_1 ecc. — Si dimostri mediante sovrapposizione.

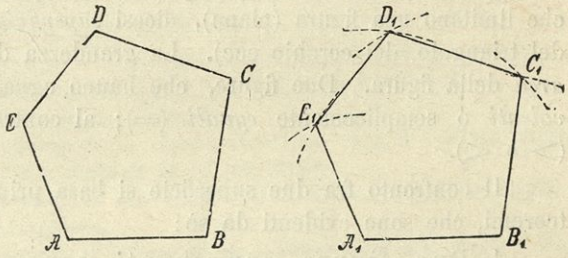

Fig. 97.

b) Mediante le coordinate rettangolari dei vertici. Dai vertici del poligono dato (Fig. 98) si abbassino le normali ad una retta qualunque e si costruiscano sopra un altra retta $O_1 X_1$ i segmenti $O_1 M_1 = OM$, $O_1 N_1 = ON$ ecc.; poscia dai punti $M_1, N_1 \ldots$ s'inalzino le normali ad $O_1 X_1$ e si faccia $M_1 A_1 = MA$, $N_1 B_1 = NB$ ecc. — Si dimostri mediante sovrapposizione.

Le normali MA, $NB \ldots$ si dicono *ordinate* e le rette OM, $ON \ldots$ *ascisse*; l'ascissa OM e l'ordi-

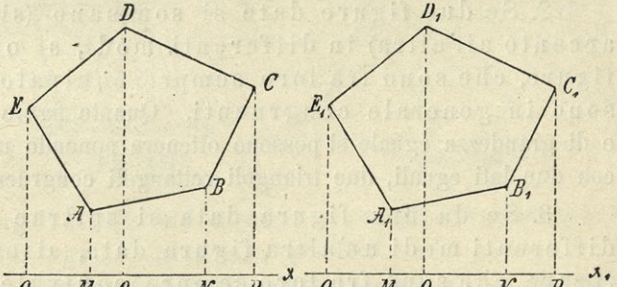

Fig. 98.

nata MA sono dette *coordinate rettangolari* del punto A rispetto ad O quale *origine* e ad OX quale *asse delle ascisse*. — Si faccia cenno delle coordinate sferiche nel fissare la posizione geografica di un luogo.

Quesiti d'esercizio. Si costruisca un quadrilatero tale che possa andare a coprire un quadrilatero dato 1. spostandolo semplicemente, 2. rivolgendolo intorno ad una retta, p. e. intorno a un lato, 3. imprimendogli mezza rotazione attorno ad un punto dato, p. e. attorno a un vertice.

4. Si trasporti *a)* un parallelogrammo, *b)* un pentagono, *c)* un esagono.

5. Si costruisca un quadrilatero, date le coordinate dei suoi vertici:

	A	B	C	D
ascisse	1,	4,	5,	3 *cm*
ordinate	1,	0,	4,	5 *cm*.

6. Costruire un pentagono, date le coordinate dei vertici:

	A	B	C	D	E
ascisse:	0,	1·4,	4·6,	6·0,	3·0 *cm*;
ordinate:	2·9,	5·6,	5·0,	4·3,	0·9 *cm*.

Equivalenza.

§ 84. Definizioni. Quella porzione di piano compresa dalle linee, che limitano una figura (piana), dicesi *superficie* della figura (superficie del triangolo, del cerchio ecc). La grandezza della superficie si chiama *area* della figura. Due figure, che hanno eguale area, si dicono *equivalenti* o semplicemente *eguali* ($=$); al contrario si dicono *disuguali* ($>$ o $<$).

Il confronto fra due superficie si basa principalmente sui seguenti teoremi, che sono evidenti da sè:

1. Due figure congruenti sono anche equivalenti. Da ciò segue che p. e. un parallelogrammo vien diviso in due parti eguali da una diagonale, e parimente un poligono regolare viene diviso in due parti eguali dall'asse di simmetria di un lato o di un angolo.

2. Se due figure date si sommano (si collocano una accanto all'altra) in differenti modi, si ottengono nuove figure, che sono fra loro sempre equivalenti, ma che non sono in generale congruenti. Quante figure di forma differente e di grandezza eguale si possono ottenere ponendo uno accanto all'altro, con due lati eguali, due triangoli rettangoli congruenti?

3. Se da una figura data si sottrae (si leva via) in differenti modi un'altra figura data, si ottengono nuove figure, che sono fra loro sempre equivalenti, ma che non sono in generale congruenti. Vedi p. e. § 85.

Per *rettangolo di due rette* s'intende quel rettangolo, i cui lati sono le rette date. Il quadrato costruito sopra una retta quale lato dicesi *il quadrato di questa retta.*

§ 85. Il parallelogrammo. Se due parallelogrammi hanno basi eguali ed eguali altezze, si possono sovrappore in modo che le basi coincidano e i lati opposti giacciano in una retta (Fig. 99). Qui è il $\triangle AFD \cong BEC$; perchè? Se ora dal trapezio $ABED$ si sottrae il triangolo AFD, rimane il parallelogrammo $ABEF$; se dallo stesso trapezio si sottrae il triangolo BEC, vale a dire il triangolo AFD collocato in un'altra posizione, si ottiene il parallelogrammo $ABCD$; perciò $ABCD = ABEF$. Si adoperi un modello in cartone.

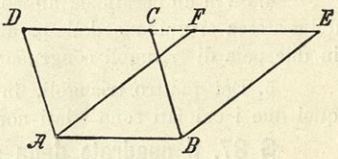

Fig. 99.

Parallelogrammi, che hanno basi eguali ed eguali altezze, sono equivalenti; perciò:

Ogni parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo di base eguale e di eguale altezza.

Quesiti d'esercizio. 1. Si ripetano le considerazioni precedenti, supposto che il punto C coincida con F, oppure che F si trovi fra C e D.

Si diano le ragioni dei seguenti teoremi:

2. L'area di un parallelogrammo rimane invariata, se si fa scorrere un lato suo qualsivoglia lungo la retta condotta per il lato stesso.

3. Di due parallelogrammi di base eguale e di altezza diseguale, quello è maggiore che ha l'altezza maggiore.

4. Di due parallelogrammi di altezza eguale e di base diseguale, quello è maggiore che ha la base maggiore.

§ 86. Il triangolo. Il triangolo ABC (Fig. 100) è la metà del parallelogrammo $ABDC$, che ha la medesima base e la stessa altezza.

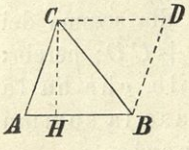

Fig. 100.

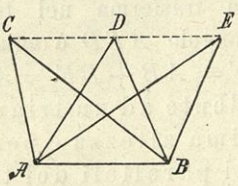

Fig. 101.

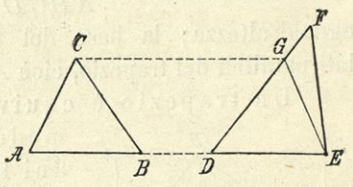

Fig. 102.

Ogni triangolo è la metà di un parallelogrammo di base eguale e di eguale altezza; perciò:

Triangoli, che hanno basi eguali ed eguali altezze, sono equivalenti.

Quesiti d'esercizio. Si dia la ragione dei seguenti teoremi:

1. L'area di un triangolo rimane invariata, se si sposta il suo vertice lungo una retta parallela alla base. (Fig. 101.)

2. Di due triangoli di base (altezza) eguale e di altezza (base) diseguale quello è maggiore che ha maggiore altezza (base). (Fig. 102.)

3. Ogni parallelogrammo viene diviso dalle due diagonali in quattro triangoli equivalenti.

4. Se in un parallelogrammo si tira una diagonale e se per un punto qualsivoglia della stessa si guidano delle parallele ai lati, queste scompongono il parallelogrammo in due paia di triangoli congruenti e in due parallelogrammi equivalenti.

5. Dei quattro triangoli, in cui un trapezio è scomposto dalle sue diagonali, quei due i cui lati sono i lati non paralleli sono equivalenti.

§ 87. Il quadrato della somma di due segmenti rettilinei. Se a e b sono due segmenti rettilinei e si fa $AB = a$, $BC = b$, sarà $AC = a + b$.

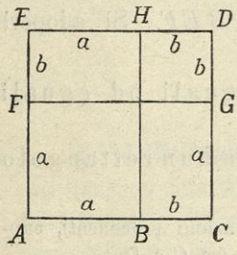

Fig. 103.

Il quadrato $ACDE$ costruito sul lato AC (Fig. 103) si può dividere mediante le rette BH ed FG in due quadrati i cui lati sono rispettivamente a e b e in due rettangoli i cui lati sono a e b. Da ciò segue:

Il quadrato della somma di due segmenti rettilinei si compone del quadrato del primo segmento, di due rettangoli di ambidue i segmenti e del quadrato del secondo segmento.

§ 88. Il trapezio. Se si divide per metà il lato BC del trapezio $ABCD$ (Fig. 104) e se pel punto E di divisione e pel verticie D si tira una retta, che incontri in F il prolungamento del lato AB, si ottengono due triangoli congruenti EBF ed ECD. Se ora si gira il triangolo ECD intorno al punto E sino a che arrivi nella posizione EBF, allora il trapezio $ABCD$ si trasforma nel triangolo AFD di eguale altezza; la base del triangolo AFD è uguale alla somma dei lati paralleli del trapezio, cioè $AF = AB + BF = AB + CD$; perciò:

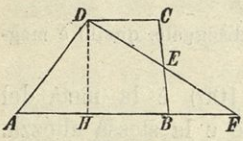

Fig. 104.

Un trapezio è equivalente ad un triangolo, che ha la medesima altezza e per base la somma dei lati paralleli del trapezio.

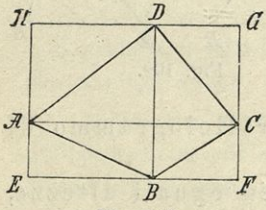

Fig. 105.

Quesito d'esercizio. Col mezzo della fig. 89 si mostri che il trapezio è equivalente ad un rettangolo che ha eguale altezza e per base la retta media del trapezio.

§ 89. Il quadrilatero a diagonali vicendevolmente perpendicolari. Nel quadrilatero $ABCD$ (Fig. 105) sia $AC \perp DB$. Si conducano pei suoi

vertici le parallele alle diagonali. Così viene circoscritto al quadrilatero il rettangolo $EFGH$, i lati del quale sono rispettivamente eguali alle diagonali parallele del quadrilatero $ABCD$. Essendo ora $ACD = \frac{1}{2}ACGH$, ed $ABC = \frac{1}{2}AEFC$, sarà anche $ABCD = \frac{1}{2}EFGH$.

Un quadrilatero a diagonali vicendevolmente perpendicolari è la metà di un rettangolo, i lati del quale sono le due diagonali.

Quesiti d'esercizio. 1. Per quali specie di quadrilateri vale il teorema precedente?

2. Come sona questo teorema applicato al quadrato?

3. Si dimostri che un quadrilatero è la metà di un parallelogrammo circoscritto, i cui lati sono paralleli alle diagonali del quadrilatero.

§ 90. Il poligono regolare ed un suo settore. *a)* Se O è il centro dell'esagono regolare $ABCDEF$ (Fig. 106), è evidente, che $ABCDEF = 6.ABO$. Se ora sul prolungamento di AB si trasportano gli altri lati del poligono, cosicchè HL sia eguale al perimetro dello stesso, sarà $HGO = GAO = ABO = \ldots$; perciò: $HLO = 6.ABO$. Quindi: $ABCDEF = HLO$.

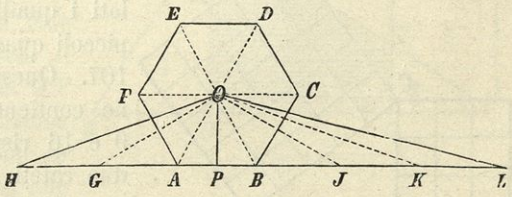

Fig. 106.

Il poligono regolare è equivalente ad un triangolo, che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio del cerchio iscritto al poligono medesimo.

b) Se si unisce il centro di un poligono regolare con due vertici qualunque, si ottengono due *settori* dello stesso; tali sono p. e. $ABCO$ e $CDEFAO$, dove ABC si dice *base* del primo e $CDEFA$ *base* del secondo settore.

Ogni settore di un poligono regolare è equivalente ad un triangolo, che ha per base la base del settore e per altezza il raggio del cerchio iscritto al poligono.

Quesiti d'esercizio. 1. Ogni triangolo è equivalente ad un altro, che ha per base il perimetro del primo e per altezza il raggio del cerchio iscritto allo stesso; perchè?

2. Come sona il teorema corrispondente ad un poligono qualunque circoscritto al cerchio?

§ 91. Il cerchio ed il settore circolare. Quanto più grande è il numero dei lati di un poligono regolare, tanto meno il suo perimetro e l'area differiscono dal perimetro e dall'area del cerchio iscritto nello stesso.

Questo numero si può prendere sempre tale, che la suddetta differenza, anche nelle figure disegnate con tutta esattezza, e nei calcoli eseguiti con ogni precisione, riesca insensibile. Da qui deriva che i due teoremi precedenti, che furono enunciati per un poligono regolare qualsivoglia e per un settore dello stesso, si possono applicare al cerchio ed al settore circolare, e si può dire:

a) La superficie circolare è equivalente ad un triangolo, che ha per base la periferia del cerchio e per altezza il raggio dello stesso.

b) Il settore circolare è equivalente ad un triangolo, che ha per base l'arco e per altezza il raggio.

Teoremi sull'area del triangolo rettangolo.

§ 92. Teorema di Pitagora. Se si costruisce un triangolo rettangolo in modo che un cateto contenga tre segmenti eguali e l'altro cateto ne contenga quattro, l'ipotenusa ne conterrà cinque. Si costruiscano poscia su questi lati i quadrati e si dividano questi in piccoli quadrati come lo mostra la Fig. 107. Questi quadrati sono eguali e 25 ne contiene il quadrato dell'ipotenusa, 9 e 16 rispettivamente i quadrati dei due cateti. Si vede dunque che:

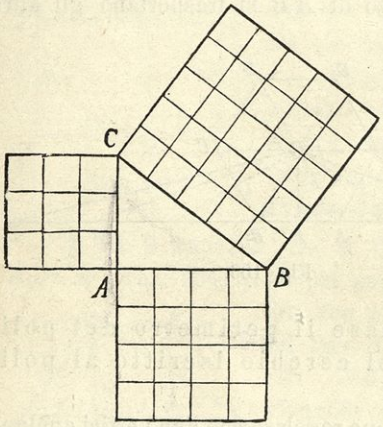

Fig. 107.

Il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti.

Questo teorema, che vale per qualsivoglia triangolo rettangolo, si attribuisce al filosofo Pitagora (nato a Samo verso l'anno 580 a. C.), e porta anche il suo nome. Per mostrare che questo teorema vale per un triangolo qualunque, si può fare la seguente considerazione:

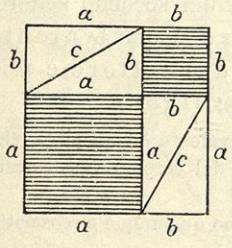

Fig. 108.

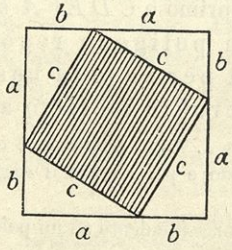

Fig. 109.

Se a e b sono i cateti e c è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, sopra la retta $a + b$ si costruiscano due quadrati e si decomponga il primo corrispondentemente alla Fig. 108, il secondo corrispondentemente alla Fig. 109. Se ora dal quadrato della somma $a + b$ si tolgono quattro triangoli rettangoli congruenti, nel

primo caso rimangono i quadrati dei due cateti e nel secondo rimane il quadrato dell'ipotenusa. (Modello!)

Dal teorema di Pitagora segue:

Il quadrato di un cateto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto.

Quesiti d'esercizio. Costruire un quadrato eguale:

1. alla somma di due quadrati dati,
2. alla somma di tre quadrati dati,
3. al doppio, al triplo, al quadruplo di un quadrato dato,
4. alla differenza di due quadrati dati,
5. alla metà di un quadrato dato.

§ 93. Teorema dell'altezza. Sia ABC (Fig. 110) un triangolo rettangolo (l'angolo in $C = 90^0$). Dal vertice C si abbassi l'altezza CD; essa divide il triangolo ABC nei triangoli ADC (che indichiamo con I) e CDB. Se ora si fa rotare il triangolo I intorno al punto C fino a che arrivi nella posizione CEF e si prolunga EF sino in G, si ottiene il quadrato dell'altezza, cioè $CDGE$. Se si sposta poscia il triangolo I lungo l'ipotenusa CF fino a che arrivi nella posizione HJB e si prolunga JH sino in K, si ottiene il rettangolo dei due segmenti dell'ipotenusa, cioè $DBJK$. ($AD = FE = BJ = DK$.) Il quadrato $CDGE$ e il rettangolo $DBJK$ sono equivalenti, perchè ognuno si compone del pentagono $DGFHK$ e dei triangoli I e II. (I triangoli indicati con II hanno la ipotenusa e gli angoli rispettivamente eguali perchè è $HC = BC - AC$ e $BF = BC - AC$.) Da ciò segue:

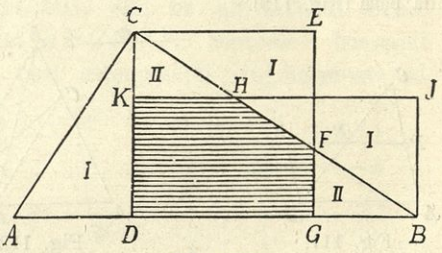

Fig. 110.

Il quadrato dell'altezza di un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo dei segmenti dell'ipotenusa.

Trasformazione e partizione delle figure.

§ 94. Trasformazione delle figure. Trasformare una figura in un'altra vuol dire, costruire una figura equivalente alla data.

1. Problema. Trasformare un parallelogrammo obbliquangolo in un rettangolo.

Soluzione. Dalle estremità di un lato s'innalzino le perpendicolari al lato opposto (§ 85).

2. Problema. Trasformare un triangolo in un parallelogrammo *a)* di base eguale, *b)* di altezza eguale.

Soluzione. *a)* Sia ABC (Fig. 111) il triangolo dato. Si faccia $AD = DC$ e si conducano $DF \parallel AB$ e $BF \parallel AD$; $ABFD$ è il parallelogrammo cercato. *b)* Analogamente come in *a)*.

3. Problema. Trasformare un triangolo in un altro in modo che abbia un angolo invariato ed uno dei lati che lo racchiudono sia di una data lunghezza.

Soluzione. Siano ABC (Fig. 112) il triangolo dato, BAC l'angolo che deve rimanere invariato, ed $AD = a$ il lato che deve sostituire il lato AB. Si guidi la CD e da B si tracci la BE parallela a CD, che intersechi il prolungamento del lato AC in E; si unisca E con D mediante una retta e sarà AED il triangolo cercato. Infatti $CDB = CDE$, perciò $ACD + CDB = ACD + CDE$, ovvero $ABC = ADE$.

Quesiti d'esercizio. 1. Trasformare *a)* un parallelogrammo, *b)* un triangolo in un altro di base eguale, che abbia un dato angolo come angolo adiacente alla base (Fig. 113).

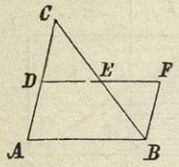

Fig. 111.

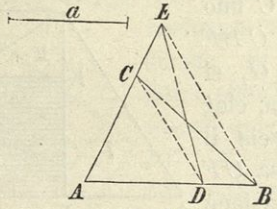

Fig. 112.

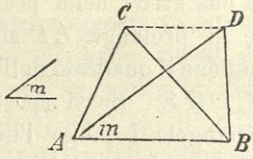

Fig. 113.

2. Trasformare un triangolo in un altro di base eguale *a)* isoscele, *b)* con un angolo retto alla base, *c)* con un angolo retto al vertice. Solo quando l'ultimo problema può essere risolto?

3. Trasformare un triangolo in un parallelogrammo rettangolo di base eguale.

4. Trasformare un parallelogrammo in un triangolo *a)* di altezza eguale, *b)* di base eguale.

5. Trasformare un triangolo in un altro, che conservi un angolo invariato ed uno dei lati che lo racchiudono venga sostituito da un lato più lungo. Se ADE (Fig. 112) è il triangolo dato e se AB è la nuova base data, si guidi $DC \parallel BE$ e si unisca B con C mediante una retta; sarà $ABC = ADE$.

6. Costruire un parallelogrammo equivalente *a)* alla somma, *b)* alla differenza di due parallelogrammi dati di altezza eguale. Se $ABCD$ e $BEFG$ (Fig. 114) sono

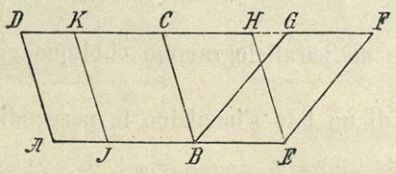

Fig. 114.

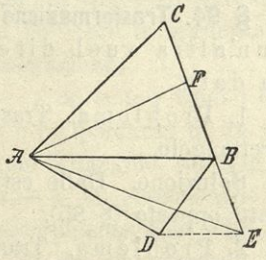

Fig. 115.

i due parallelogrammi dati di altezza eguale, $AEHD$ sarà la somma ed $AJKD$ la differenza degli stessi. $BJ = BE$, $EH \parallel AD$, $JK \parallel AD$.

7. Costruire un triangolo equivalente *a)* alla somma, *b)* alla differenza di due triangoli dati di base eguale. Se ABC ed ABD (Fig. 115) sono i due triangoli dati di base eguale, ACE sarà la somma ed ACF la differenza degli stessi. $DE \parallel AB$, $BF = BE$.

8. Trasformare un trapezio *a)* in un triangolo (Fig. 104), *b)* in un rettangolo (Fig. 89), *c)* in un parallelogrammo obbliquangolo di altezza eguale.

9. Trasformare un deltoide *a)* in un rettangolo, *b)* in un rombo.

10. Trasformare *a)* un rettangolo, *b)* un rombo in un deltoide, i cui lati disuguali racchiudano angoli retti.

4. Problema. Trasformare un poligono dato in un altro che abbia un lato di meno.

Soluzione. Nel poligono proposto $ABCDEF$ (Fig. 116) si guidino la diagonale DF ed $EG \parallel DF$; se si uniscono D eon G mediante una retta, si ottiene il poligono cercato $ABCDG$, che ha un lato di meno, e che è equivalente al poligono dato $ABCDEF$. Siccome i triangoli DEF e DGF sono equivalenti, così sommandoli singolarmente al poligono $ABCDF$, si ottengono due figure equivalenti.

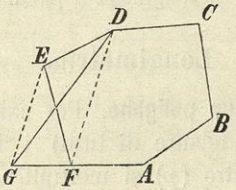

Fig. 116.

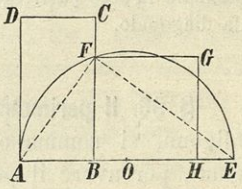

Fig. 117.

5. Problema. Trasformare un rettangolo in un quadrato.

Soluzione. Si prolunghi il lato AB (Fig. 117) del rettangolo dato $ABCD$, si faccia $BE = BC$ e sopra la retta AE, presa quale diametro, si descriva un semicerchio. Se ora F è il punto d'intersezione del semicerchio col lato BC, il quadrato della retta BF, cioè $BHGF$, corrisponde al problema proposto, perchè nel triangolo rettangolo AEF, il quadrato dell'altezza è equivalente al rettangolo $ABCD$, i cui lati sono i segmenti AB e BE dell'ipotenusa.

6. Problema. Trasformare un poligono in un quadrato.

Soluzione. Si trasformi il poligono dato in un triangolo, questo in un rettangolo e questo poi in un quadrato.

Quesiti d'esercizio. 11. Trasformare un quadrilatero in un triangolo in due modi diversi.

12. Trasformare *a)* un pentagono, *b)* un esagono in un triangolo.

13. Trasformare *a)* un triangolo isoscele *b)* un triangolo scaleno in un quadrato.

14. Trasformare un quadrilatero qualunque in un quadrato.

§ 95. Partizione delle figure. 1. Problema. Dividere un triangolo in n parti eguali con rette, che passano per uno dei suoi vertici.

Soluzione. Si divida un lato del triangolo in n parti eguali e si uniscano i punti di divisione col vertice opposto mediante altrettante rette. P. e. $n = 4$.

2. Problema. Dividere un parallelogrammo in n parti equivalenti con rette parallele ad un lato.

Soluzione. Si divida un lato in n parti eguali e da ciascun punto di divisione si guidino delle parallele ai lati contigui. P. e. $n = 8$.

Quesiti d'esercizio. 1. Dividere un triangolo ad occhio *a)* in tre, *b)* in cinque parti eguali con rette, che partono dallo stesso vertice.

2. Dividere un parallelogrammo *a)* in due, *b)* in sei parti eguali con rette parallele ad un lato.

3. Dividere un parallelogrammo *a)* in due, *b)* in quattro, *c)* in sei parti eguali con rette, che partono dallo stesso vertice.

4. Dividere un parallelogrammo in tre parti eguali con rette, che partono dal- o stesso vertice. — Si scomponga il parallelogrammo prima in sei parti eguali.

5. Dividere un trapezio in n parti eguali con rette, che passano pei lati paralleli.

6. Dividere un quadrilatero qualsivoglia in due parti eguali. — Si divida una diagonale in due parti eguali e si congiunga il punto di divisione coi vertici opposti alla diagonale.

Longimetria.

§ 96. Il perimetro di un poligono. Per calcolare il perimetro di un poligono, si sommano (le misure di tutti) i lati. Se tutti i lati sono eguali, per avere il perimetro (p) si moltiplica un lato (a) per il numero dei lati (n); $p = n\,a$.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare il perimetro *a)* di un quadrato, 2. di un rombo, 3. di un decagono regolare, il cui lato è *a)* di $2\ cm$, *b)* di $3{\cdot}15\ m$, *c)* eguale ad a.

4. Calcolare il perimetro di un rettangolo, di cui sono date la base b e l'altezza h: *a)* in generale, *b)* per $b = 2{\cdot}5\ cm$, $h = 1{\cdot}5\ m$.

5. Calcolare la base di un rettangolo, di cui sono dati il perimetro p e l'altezza h: *a)* in generale, *b)* per $p = 18\ cm$, $h = 6\ cm$.

6. Calcolare l'altezza di un rettangolo dati il perimetro p e la base b: *a)* in generale, *b)* per $p = 236\ m$, $b = 86\ m$.

§ 97. Calcolo della linea circolare. Siccome una linea retta non si può portare sopra una curva, così invece di determinare la lunghezza di una linea circolare direttamente, la si determina in via indiretta.

Si misura *meccanicamente* la linea circolare, formando con un filo un cerchio, che si tende poscia in linea retta e si misura col diametro o con una retta qualsivoglia presa quale unità di lunghezza. Per procedere con maggiore esattezza si avvolge un filo sottile in parecchi giri attorno ad un cilindro a sezione circolare, e dalla lunghezza del filo già misurata e dal numero dei giri ottenuti si calcola la lunghezza di un

solo giro, che poi si divide per la lunghezza del diametro del cilindro. (Si faccia un esercizio.) Anche questo processo non ammette che una esattezza assai limitata e non ha per la geometria alcuna importanza.

Si misura *geometricamente* la linea circolare confrontandola coi perimetri del poligono iscritto e circoscritto.

Se ad un cerchio s'iscrive un esagono regolare, essendo ogni lato minore dell'arco corrispondente, il perimetro sarà minore della periferia del cerchio. Perciò la periferia è maggiore del triplo del diametro; $p > 3d$.

Ma se al cerchio si circoscrive un quadrato, la somma delle porzioni dei lati del quadrato concorrenti in un vertice, le quali sono limitate da due successivi punti di contatto, è maggiore dell'arco da esse compreso, e quindi anche il perimetro del quadrato è maggiore della periferia del cerchio. Perciò la periferia è minore del quadruplo del diametro; $p < 4d$.

Quanto maggiore è il numero dei lati dei poligoni regolari, iscritto e circoscritto, tanto minore è la differenza dei loro perimetri e perciò tanto più vanno avvicinandosi i valori dei medesimi fra i quali è contenuta la periferia del cerchio. Se p. e. il numero dei lati è di 3072, si ottiene mediante calcolo, di cui più tardi si darà ragione, $p > 3{\cdot}141591\ d$ e $p < 3{\cdot}141593\,d$. Dunque il primo coefficiente del d è minore ed il secondo è maggiore di quel numero, che multiplicato per d dà per prodotto esattamente p. Perciò questo numero è 3·14159 .. e, se si ritengono soltanto cinque cifre decimali, è $p = 3{\cdot}14159\ .. \times d$.

Il numero 3·14159 . . ., che esprime il rapporto fra la periferia e il diametro, si chiama numero di Ludolf (da Ludolf Van Ceulen, che circa l'anno 1600 lo ha calcolato a 35 cifre decimali) e per brevità viene comunemente indicato con π. In alcuni casi basta assumere per π il valore approssimativo $3^1/_7$ (il rapporto di Archimede), mentre nei calcoli di una certa esattezza si deve prendere il richiesto numero di decimali dall'eguaglianza $\pi = 3{\cdot}1415926536\ ..$ (Il numero di Ludolf non può essere espresso esattamente nè mediante una frazione ordinaria, nè mediante una frazione decimale finita, come non lo può essere p. e. neppure la $\sqrt{2}$). Da ciò segue che:

a) La periferia di un cerchio è eguale al prodotto del diametro o del doppio raggio pel numero di Ludolf. $p = d\pi$, $p = 2r\pi$.

b) Il diametro è eguale alla periferia divisa pel numero di Ludolf. $d = p : \pi$, $r = p : 2\pi$.

c) Le periferie di due cerchi stanno fra loro come i diametri o come i raggi. $p : p_1 = d : d_1 = r : r_1$.

Osservazioni. 1. Nei teoremi precedenti per „periferia, diametro, raggio" si possono intendere tanto le dette linee che le loro misure.

2. Nei calcoli numerici della periferia, dato il diametro, o del raggio, data la periferia ecc., si devono eseguire comunemente col numero di Ludolf le moltiplicazioni e le divisioni abbreviate. Il richiesto numero di cifre decimali dipende dalla natura del problema, oppure anche dal riflesso, che si deve tener conto di tutte le cifre del resultato ad eccezione tutt'al più dell'ultima. Se p. e. si trova, che il diametro di un cerchio è eguale a 42 *mm* e se nella misurazione è stata trascurata la frazione di *mm*, anche la lunghezza della periferia non può essere espressa mediante la frazione di *mm*. Perchè se il diametro fu preso circa $\frac{1}{8}$ di *mm* più piccolo, si trova che la periferia è più di 1 *mm* più piccola. In questi casi devesi determinare il risultato con la maggior possibile esattezza.

Quesiti d'esercizio. 1. Data una delle tre grandezze r, d, p (raggio diametro e periferia di un cerchio), calcolare le altre due.

a) $r = 1{\cdot}344\,m$; *b)* $d = 122\,m$; *c)* $p = 42{\cdot}33\,m$; *d)* $p = 478{\cdot}192\,km$.

2. Quanti *km* importa il diametro di un meridiano terrestre, supponendolo un cerchio di 40000 *km* di lunghezza?

3. Calcolare il diametro di un tronco d'albero a sezione circolare, data la periferia del tronco. P. e. $p = 4{\cdot}32\,mm$.

4. Quale deve essere il diametro di un cerchio, affinchè la sua periferia diventi quadrupla di quella di un secondo cerchio, il diametro del quale è di 12 *cm*?

5. Quanti giri fa la ruota di un carro del diametro di 64 *cm* sopra una via lunga 1 *km*?

6. Quale via descrive in un anno la punta dell'indice dei minuti lungo 20 *mm* di un orologio?

7. Si descriva un cerchio la cui periferia è uguale *a)* alla somma, *b)* alla differenza delle periferie di due cerchi dati.

§ 98. Calcolo degli archi. *a)* Problema. Calcolare la lunghezza di un grado circolare, di un minuto circolare e di un secondo circolare.

Essendo un grado circolare la 360ma parte della periferia, sarà

$$1 \text{ grado circolare} = \frac{p}{360} = \frac{d\pi}{360} = \frac{r\pi}{180};$$

$$1 \text{ minuto circolare} = \frac{p}{21600} = \frac{d\pi}{21600} = \frac{r\pi}{10800};$$

$$1 \text{ secondo circolare} = \frac{p}{1296000} = \frac{d\pi}{1296000} = \frac{r\pi}{648000}.$$

b) Ad angoli al centro eguali corrispondono nello stesso cerchio archi eguali. Perciò ad un angolo al centro 2, 3, . . n volte maggiore corrisponde anche un arco 2, 3, . . . n volte maggiore; quindi:

Archi del medesimo cerchio stanno fra loro come gli angoli al centro corrispondenti.

$$a : a_1 = \alpha : \alpha_1.$$

c) Problema. Calcolare la lunghezza di un arco a, dati il raggio r e l'angolo al centro α (espresso in misura circolare dell'arco).

Se si confronta l'arco colla metà della periferia, si trova giusta il teorema precedente:

$$a : r\pi = \alpha : 180, \text{ da cui } a = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

In questa formola l'angolo α deve essere espresso in gradi (eventualmente in frazione di grado).

d) Problema. Calcolare l'angolo al centro α, dati il raggio r e la lunghezza dell'arco a.

Dall'ultima proporzione si trova $\alpha = \frac{180\,a}{r\pi}$.

e) Problema. Calcolare il raggio r, dati la lunghezza dell'arco a e l'angolo al centro α.

Dalla stessa proporzione si ottiene $r\pi = \frac{180\,a}{\alpha}$, quindi $r = \frac{180\,a}{\alpha\pi}$.

Come si vede, dalla proporzione $a : r\pi = \alpha : 180$, date due delle grandezze a, α, r, si può calcolare la terza.

Quesiti d'esercizio. 1. Se un grado dell'equatore importa 15 miglia geografiche, qual' è il diametro dello stesso?

2. Si calcoli la lunghezza *a)* di un grado circolare, *b)* di un minuto circolare, *c)* di un secondo circolare in un cerchio, che ha il raggio di 1 *m* (7 decimali).

3. Se si suppone che la via descritta dalla terra sia un cerchio col raggio di 148·6 milioni di *km*, e che la durata di una rivoluzione dalla terra attorno al sole sia di 365·25 giorni, si deve calcolare la via, che essa descrive con moto uniforme *a)* in un giorno, *b)* in un minuto, *c)* in un secondo. Si adoperi l'unità di lunghezza adottata di sopra e si eseguiscano le operazioni con la maggior possibile esattezza. I risultati non sono del tutto esatti, giacchè le supposizioni fatte non sono che approssimative.

4. Calcolare la lunghezza di un arco di cerchio, la periferia del quale è di 32 *m*, se la misura circolare dell'arco è *a)* 45°, *b)* 122° 22′, *c)* 42° 13′ 24″.

5. Calcolare il raggio di quel cerchio, nel quale l'arco, a cui corrisponde l'angolo al centro $\alpha = 30° 42'$, è lungo 1·421 *m*.

6. Calcolare l'angolo al centro, al quale corrisponde un arco $a = 44\ cm$, se il raggio del cerchio è di 12 *cm*.

7. Calcolare la misura circolare dell'arco, la cui lunghezza è eguale al raggio.

Calcolo delle superficie.

§ 99. Definizioni. Quale *unità* di superficie si prendeun quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza. Secondo che l'unità di lunghezza presa è 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm* . ., la superficie del corrispondente quadrato si chiama *un metro quadrato, un decimetro quadrato, un centimetro quadrato* ecc.

Misurare una data superficie vuol dire ricercare quante volte l'un'tà sia in essa contenuta. Il numero che lo indica esprime la *misura* della superficie proposta. Se p. e. si devono sommare 3 metri quadrati ed $\frac{1}{4}$ di metro quadrato per ottenere una figura equivalente ad un dato triangolo, 3·25 sarà la misura del triangolo rispetto al metro quadrato, o detto più semplicemente, *l'area* del triangolo sarà di 3:25 metri quadrati.

Per misurare *meccanicamente* l'area di una figura data, si tagliano in latta (di uniforme grossezza) o in cartone tanto la figura che l'unità, e, pesandole, si determina quante volte il peso dell'unità sia contenuto in quello della figura.

In geometria per calcolare l'area di una figura, si misurano quelle rette, quegli angoli ecc. da cui essa dipende. Applicare immediatamente l'unità di superficie nella figura data, sino a che essa sia pienamente misurata, il più delle volte è impossibile.

§ 100. Il quadrato. Se si divide ciascun lato del quadrato $ABCD$ (Fig. 118) in tre parti eguali, le rette che uniscono i punti opposti di divisione, scompongono il quadrato in $3 \times 3 = 9$ quadrati congruenti. In generale, se il lato del quadrato è diviso in a parti eguali, si ottengono $a \times a = a^2$ quadrati congruenti.

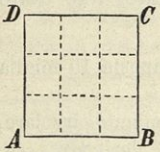

Fig. 118.

Se ora l'unità di lunghezza è contenuta a volte nel lato del quadrato, a sarà la misura di un lato, ed il quadrato si comporrà di $a \times a = a^2$ quadrati, ognuno eguale all'unità di superficie; perciò a^2 è la misura della superficie del quadrato. Dunque:

La misura della superficie di un quadrato si trova col moltiplicare la misura di un lato per sè stessa, o più brevemente: L'area di un quadrato si trova coll'elevare un lato alla seconda potenza.

$$S = a^2; \quad a = \sqrt{S}.$$

Osservazioni. 1. L'espressione dell'aritmetica „elevare un numero al quadrato" proviene da ciò, che col moltiplicare un numero per sè stesso, si calcola l'area di un quadrato, il lato del quale ha per misura quel numero.

Dalla formola $S = a^2$ si può spiegare il motivo per cui s'indicano 1 metro quadrato, 1 decimetro quadrato, 1 centimetro quadrato, 1 millimetro quadrato mediante $1\ m^2$, $1\ dm^2$, $1\ cm^2$, $1\ mm^2$.

2. $1\ cm^2 = 100\ mm^2$; $1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2$; $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$ ecc.; perchè? Nella misurazione di grandi estensioni si prende quale unitá *l'aro (a)* che equivale a $100\ m^2$; 100 ari è un *ettaro (ha)*.

3. Se il lato di un quadrato è $= 4{\cdot}23\ m = 423\ cm$, l'area sarà $S = (423 \times 423)\ cm^2 = 178929\ cm^2 = 17{\cdot}8929\ m^2$. Si ottiene lo stesso risultato anche col seguente calcolo: $S = (4{\cdot}23 \times 4{\cdot}23)\ m^2 = 17{\cdot}8929\ m^2$. Come si vede, si ottiene l'area di un quadrato adoperando direttamente la formola $S = a^2$, anche se a non è un numero intero.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area di un quadrato, il lato del quale è *a)* $10{\cdot}24\,m$, *b)* $3{\cdot}6\,m$, *c)* $16\,cm$. Dovendosi riguardare $10{\cdot}24$ quale un numero decimale incompleto, si eseguisca la moltiplicazione $10{\cdot}24 \times 10{\cdot}24$ abbreviata con la maggior possibile esattezza.

2. L'area di un quadrato è *a)* di $3{\cdot}61\,m^2$, *b)* di $18{\cdot}49\,ha$, *c)* di $16{\cdot}6284\,m^2$; calcolare il lato.

3. Dato il perimetro p di un quadrato, calcolare l'area S. *a)* $p = 32\,cm$; *b)* $p = 2{\cdot}78\,m$.

4. Data l'area S di un quadrato, calcolare il perimetro p.

a) $S = 169\,a$, *b)* $S = 2{\cdot}89\,m^2$.

5. La cornice di un'immagine di forma quadrata, di cui il lato è $a = 62\,cm$, è larga $12\,cm$; calcolare l'area ed il perimetro esterno della cornice.

§ 101. Il rettangolo. Se la base del rettangolo $ABCD$ (Fig. 119) è di $6\,cm$ e l'altezza di $4\,cm$., esso si potrà scomporre in 4 file, di cui ciascuna contiene sei cm^2; perciò l'area del rettangolo sarà $(6 \times 4)\,cm^2 = 24\,cm^2$. In generale, se una determinata unità di lunghezza è contenuta nella base b volte e nell'altezza h volte, cioè se b ed h sono le misure della base e dell'altezza, il rettangolo verrà scomposto in h file ciascuna di b quadrati, dunque in tutto in $b \,.\, h$ quadrati, ognuno dei quali è l'unità di superficie; perciò:

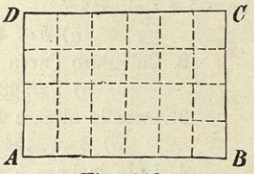

Fig. 119.

L'area di un rettangolo è eguale al prodotto della base per l'altezza; $S = b.h$.

Si dimostri, che questa formola vale anche se b ed h non sono numeri interi.

Quesiti d'esercizio. 1. Si calcoli l'area di una tavola nera, di una lastra di vetro, di un foglio di carta, misurandone i lati.

2. Quante lastre quadrate di pietra, il cui lato è di $22\,cm$, occorreranno per selciare una piazza rettangolare lunga $25{\cdot}3\,m$ e larga $9{\cdot}9\,m$?

3. Un'area lunga $52{\cdot}2\,m$, larga $36{\cdot}4\,m$ costa C. 14250·6. Quanto vale $1\,m^2$?

4. In un giardino rettangolare lungo $70\,m$ e largo $45{\cdot}5\,m$ trovasi lunghesso il perimetro una strada larga $1\,m$. Oltre a ciò le metà dei lati più lunghi sono congiunte mediante una via larga $0{\cdot}6\,m$. Quanti ari contiene la parte coltivata del giardino?

5. Da un quadrato, il cui lato è $a = 15\,cm$, si formino diversi rettangoli di eguale perimetro, aumentandone successivamente la base di $1\,cm$ e diminuendone d'altrettanto la altezza e si confrontino poi le aree delle figure ottenute.

6. Come si calcola l'altezza h di un rettangolo, data l'area S e la base b? $S = 12\,a$, $b = 1\,km$.

7. Si calcoli la base b di un rettangolo, data l'area S e l'altezza h. $S = 33\,dm^2$, $h = 2\,m$.

8. Qual' è il siguificato geometrico dell'equazione $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$, dove a, b c sono segmenti rettilinei?

9. Parimente l'equazione $(a - b)\,c = a\,c - b\,c$.

10. Parimente l'equazione $(a + b)\,(c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$.

§ 102. Il parallelogrammo obbliquangolo e il triangolo. *a)* Ogni parallelogrammo obbliquangolo può trasformarsi in un rettangolo di base eguale e di eguale altezza (§ 85). Se dunque b ed h sono le misure della base e dell'altezza del parallelogrammo e del rettangolo equivalente, in ambidue i casi l'area sarà $S = b \,.\, h$.

L'area di un parallelogrammo è eguale al prodotto della base per l'altezza.

b) Ogni triangolo è la metà di un parallelogrammo di base eguale e di eguale altezza; perciò:

L'area di un triangolo è eguale alla metà del prodotto della base per l'altezza.

$$S = \frac{b \,.\, h}{2}, \quad S = \frac{b}{2} \,.\, h, \quad S = b \,.\, \frac{h}{2}.$$

Si esprimano con parole le due ultime formole.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area di un parallelogrammo date la base b e l'altezza h

a) $b = 4\,m$, $h = 0{\cdot}5\,m$; *b)* $b = 524\,cm$, $h = 16\,dm$.

2. Calcolare l'area di un triangolo, date la base b e l'altezza h.

a) $b = 235\,mm$, $h = 172\,mm$; *b)* $b = 5\frac{1}{2}\,m$, $h = 4\frac{1}{2}\,m$.

3. Date la altezza h e l'area S di un triangolo, calcolare la base b.

a) $S = 9424\,cm^2$, $h = 1{\cdot}52\,m$; *b)* $S = 4{\cdot}3\,m^2$, $h = 1{\cdot}72\,m$.

4. Date la base b e l'area S di un triangolo, calcolare l'altezza.

a) $S = 0{\cdot}7\,a$, $b = 14\,m$; *b)* $S = 4{\cdot}08\,dm^2$, $b = 34\,cm$.

5. Calcolare l'area di un triangolo rettangolo dati i due cateti a e b.

a) $a = 12\,cm$, $b = 1\,dm$; *b)* $a = 2{\cdot}04\,m$, $b = 1{\cdot}73\,m$.

§ 103. Il trapezio. *a)* Con riguardo al § 88 si ottiene il seguente teorema:

L'area di un trapezio è eguale al semiprodotto della somma dei lati paralleli per l'altezza.

Se indichiamo dunque con a e b i lati paralleli e con h l'altezza del trapezio, sarà:

$$S = \frac{(a + b) \,.\, h}{2}, \quad S = \frac{a + b}{2} \,.\, h, \quad S = (a + b) \,.\, \frac{h}{2}.$$

Siccome poi la semisomma dei lati paralleli è eguale alla retta media m del trapezio (§ 75), così si può anche dire:

L'area di un trapezio è eguale al prodotto della retta media per l'altezza. (§ 88, ques.)

$$S = m \,.\, h.$$

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area di un trapezio, dati i lati paralleli a, b e l'altezza h. *a)* $a = 3\,m$, $b = 2\,m$, $h = 2\,m$; *b)* $a = 6{\cdot}2\,m$, $b = 4{\cdot}5\,m$, $h = 2{\cdot}2\,m$.

2. Calcolare l'altezza h di un trapezio, dati i lati paralleli a, b e l'area S. $a = 6{\cdot}247\,m$, $b = 3{\cdot}948\,m$, $S = 275265\,cm^2$.

3. Calcolare la retta media m di un trapezio, date l'altezza h e l'area S. $h = 8\,cm$, $S = 0{\cdot}76\,dm^2$.

4. Dati l'altezza h, il lato parallelo a, l'area S di un trapezio, calcolare il secondo lato parallelo b. $h = 4\,dm$, $a = 3{\cdot}5\,m$, $S = 1\,m^2$.

5. Calcolare l'area di un trapezio isoscele, conoscendone i due lati paralleli ($a = 8\,cm$, $b = 6\,cm$) ed un angolo ($\alpha = 45^0$).

6. Si determinino mediante una scala (Fig. 5) le aree dei trapezi nelle fig. 89 e 91.

§ 104. Il quadrilatero a diagonali vicendevolmente perpendicolari. L'area di un quadrilatero a diagonali vicendevolmente perpendicolari è eguale al semiprodotto delle due diagonali (§ 89).

$$S = \frac{d_1\, d_2}{2}.$$

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area S di un quadrato, data la diagonale d. *a)* $d = 5\,cm$, *b)* $d = 0{\cdot}24\,m$.

2. Data l'area S di un quadrato, calcolare la diagonale d. *a)* $S = 1\,m^2$, *b)* $S = 2{\cdot}89\,m^2$.

3. Calcolare l'area di un rombo, date le diagonali d_1 e d_2. P. e. $d_1 = 16\,cm$, $d_2 = 24\,cm$.

4. L'area di un deltoide è $= 42\,cm^2$, una diagonale è $= 7\,cm$; calcolare l'altra diagonale.

§ 105. Il poligono regolare ed un settore dello stesso. *a)* L'area di un poligono regolare è eguale al semiprodotto del perimetro pel raggio del cerchio iscritto allo stesso (§ 90, *a*).

$$S = \frac{p\, r}{2}.$$

b) L'area di un settore di un poligono regolare è eguale al semiprodotto della base del settore pel raggio del cerchio iscritto al poligono (§ 90, *b*).

$$S = \frac{b\, r}{2}.$$

Quesiti d'esercizio. Se ad un cerchio, il cui raggio è $= r$, si circoscrive un decagono regolare, si trova che il lato di questo è $= 0{\cdot}64984\,r$. Si calcolino *a)* l'area del decagono, *b)* l'area di un settore, di cui la base è composta di tre lati del decagono.

§ 106. Il poligono irregolare. *a)* Per calcolare l'area di un poligono irregolare, lo si scompone in triangoli e se ne calcolano le aree; la loro somma sarà l'area del poligono irregolare.

Volendo calcolare p. e. l'area del quadrilatero $ABCD$ (Fig. 120), si fanno le misurazioni seguenti:

$AC = 4\,dm$, $BE = 3\,dm$, $DF = 1\,dm$.

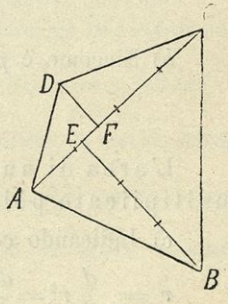

Fig. 120.

Si avrà

$$\triangle ABC = \frac{4 \times 3}{2} = 6\,dm^2.$$

$$\triangle ACD = \frac{4 \times 1}{2} = 2\,dm^2.$$

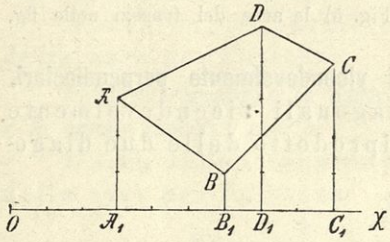

Fig. 121.

Perciò $ABCD = 8\,dm^2$.

b) Se sono date le coordinate dei vertici del poligono, si opera nel modo seguente:

$OA_1 = 3$, $OB_1 = 6$, $OC_1 = 9$, $OD_1 = 7$ siano le ascisse e $A_1A = 3$, $B_1B = 1$, $C_1C = 4$, $D_1D = 5$ le ordinate dei vertici del poligono $ABCD$ (Fig. 121) rispetto all'asse OX.

Dalla stessa figura si ottiene:

$$ABCD = AA_1DD_1 + DD_1C_1C - AA_1B_1B - BB_1C_1C =$$

$$\frac{(3+5).4}{2} + \frac{(5+4).2}{2} - \frac{(3+1).3}{2} - \frac{(1+4).3}{2} = 11{\cdot}5.$$

L'area del poligono $ABCD$ contiene dunque 11·5 unità di superficie. Se è p. e. $B_1B = 1\,cm$, l'area di $ABCD$ è di $11{\cdot}5\,cm^2$.

Quesiti d'esercizio. 1. Si calcoli l'area di un pentagono $ABCDE$, avendone misurato le lunghezze dei lati BC, CD, DE e le loro distanze dal punto A.

2. Si determini l'area di un triangolo *a)* misurandone la base e l'altezza, *b)* misurandone le coordinate dei vertici rispetto ad un asse, che giace fuori del triangolo.

3. Si scelgano su di una carta murale quattro punti importanti, e, considerandoli quali vertici di un quadrilatero, se ne calcoli l'area.

§ 107. Il cerchio. *a)* L'area di un cerchio è eguale al semiprodotto della periferia pel raggio (§ 91, *a*).

$$S = \frac{pr}{2}.$$

b) Siccome è $p = 2r\pi$, così:

$$S = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi.$$

L'area di un cerchio è eguale al quadrato del raggio moltiplicato pel numero di Ludolf.

c) Indicando con d il diametro del cerchio, si avrà:

$r = \frac{d}{2}$ $r^2 = \frac{d^2}{4}$ ed $S = \frac{d^2\pi}{4}$. (Si esprima con parole.)

d) Per un secondo cerchio sussistono le formole:

$$S_1 = r_1^2 \pi = \frac{d_1^2 \pi}{4}; \text{ perciò:}$$

$$S : S_1 = r^2 \pi : r_1^2 \pi = r^2 : r_1^2,$$

$$S : S_1 = \frac{d^2 \pi}{4} : \frac{d_1^2 \pi}{4} = d^2 : d_1^2, \text{ cioè:}$$

Le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi o dei diametri.

e) Da $r^2 \pi = S$ segue $r^2 = \frac{S}{\pi}$ ed $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. (Si esprima con parole.)

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area di un cerchio, il cui raggio è *a)* di 12 *m*, *b)* di 1·3 *cm*, *c)* di 0·236 *m*. Si eseguisca con π la moltiplicazione abbreviata a due decimali.

2. In seguito ad una misurazione eseguita si trovò che il raggio di un cerchio è di 5·623 *m*, e si tratta di calcolare l'area di questo cerchio. Siccome 5·623 si deve riguardare quale un numero decimale incompleto, si devono eseguire le moltiplicazioni $5{\cdot}623 \times 5{\cdot}623 \times \pi$ con il maggior possibile grado di esattezza.

3. Data la periferia di un cerchio se ne calcoli l'area. *a)* $p = 1\,m$, *b)* $p = 17\,cm$, *c)* $p = 60{\cdot}378\,m$.

4. Qual'è la periferia di un cerchio, la cui area è *a)* di 1 m^2, *b)* di 3·26 m^2, *c)* $= S$?

5. Calcolare il raggio di un cerchio, la cui area è uguale alla somma delle aree di tre cerchi coi raggi $r_1 = 5\,cm$, $r_2 = 7\,cm$, $r_3 = 8\,cm$. Quí si potrebbero evitare le operazioni con π.

6. Dato il raggio di un cerchio ($r = 1\,m$), calcolare il lato del quadrato ad esso equivalente.

Si costruisca un cerchio eguale

7. alla somma di due cerchi dati,

8. alla somma di tre cerchi dati,

9. al doppio, al triplo, al quadruplo di un cerchio dato,

10. alla differenza di due cerchi dati,

11. alla metà di un cerchio dato.

§ 108. L'anello circolare. Si trova:

$$S = r^2\pi - r_1^2 \pi = (r^2 - r_1^2)\ \pi,$$

od anche $S = (r + r_1)\ (r - r_1)\ \pi$. (Si esprima con parole.)

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area compresa fra due cerchi concentrici, i cui raggi sono $r = 57{\cdot}236\,m$ ed $r_1 = 32{\cdot}147\,m$.

2. Calcolare l'area di un anello circolare, date l'area del cerchio interno ($S_1 = 42{\cdot}18\,cm^2$) e la larghezza dell'anello ($l = 4\,cm$).

3. Calcolare l'area di un anello circolare, date la periferia del cerchio esterno ($p = 162{\cdot}7834\,m$) e la larghezza dell'anello ($l = 2{\cdot}56\,m$).

4. Calcolare il raggio del cerchio esterno, dati il raggio del cerchie interno ($r_1 = 3\,cm$) e l'area dell'anello circolare ($S = 10\,cm^2$).

5. Calcolare il raggio di un cerchio equivalente ad un anello circolare ($r_1 = 1\,dm$, $r_2 = 6\,cm$).

6. Si trasformi un dato anello circolare in un cerchio.

§ 109. Il settore circolare. *a)* L'area di un settore circolare è eguale al semiprodotto dell'arco (a), pel raggio (r) (§ 91, *b*).

$$S = \frac{a\,r}{2}.$$

b) Ad archi eguali corrispondono nello stesso cerchio settori eguali; perciò ad un arco 2, 3 . . . n volte maggiore corrisponde un settore 2, 3 . . . n volte maggiore; quindi:

Settori dello stesso cerchio stanno fra loro come gli archi corrispondenti.

$$S : S_1 = a : a_1.$$

c) Ad angoli al centro eguali corrispondono nello stesso cerchio anche settori eguali; perciò ad un angolo al centro 2, 3 . . . n volte maggiore corrisponde un settore 2, 3 . . . n volte maggiore; quindi:

Settori dello stesso cerchio stanno fra loro come gli angoli al centro corrispondenti.

$$S : S_1 = \alpha : \alpha_1.$$

d) Siccome la superficie circolare può considerarsi quale un settore, che corrisponde ad un angolo al centro di 360°, così dall'ultimo teorema risulta:

$$S : r^2\,\pi = \alpha : 360.$$

E' chiaro dunque che conoscendo due delle quattro grandezze: area del settore, raggio, lunghezza dell'arco e misura circolare dell'arco (S, r, a, α), si possono calcolare le altre due.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'area di un settore circolare e l'arco rispettivo, dati il raggio $r = 2{\cdot}71\,m$ e l'angolo al centro corrispondente $\alpha = 63^0$,

2. Calcolare l'area di un settore circolare e l'angolo al centro corrispondente, dati il raggio $r = 0{\cdot}944\,m$ e la lunghezza dell'arco $a = 1{\cdot}237\,m$.

3. Calcolare il raggio e l'area di un settore circolare, dati l'angolo al centro $\alpha = 45^0\ 25'$ e la lunghezza dell'arco $a = 1\,dm$.

4. Calcolare il raggio e l'arco di un settore circolare, dati l'angolo al centro $\alpha = 40^0$ e l'area $S = 25\,dm^2$.

Osservazione. Per risolvere questi quattro quesiti, fra le formole $\frac{a\,r}{2}$, $S : r^2\,\pi = \alpha : 360$, $a : r\,\pi = \alpha : 180$, si adoperi prima di tutto quella che delle grandezze r, α, a, S contiene le due date e quindi si prenda una delle altre due.

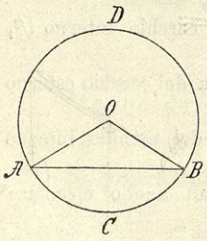

Fig. 122.

5. Qual' è il raggio di un cerchio equivalente ad un settore, al quale corrisponde il raggio $r = 5\,dm$ e l'angolo al centro $\alpha = 42^0$? Si evitino le operazioni con π.

§ 110. Il segmento circolare. Il segmento circolare è eguale alla somma od alla differenza del settore corrispondente e di un triangolo, secondo che esso è maggiore o minore del semicerchio.

Dalla fig. 122 si ottiene:

Segmento ACB = settore $AOBC$ — triangolo AOB.
Segmento ADB = settore $AOBD$ + triangolo AOB.

Quesito d'esercizio. Calcolare l'area di uno dei segmenti limitati dalla periferia di un cerchio, di cui il raggio è $r = 5\,cm$ e dai lati del quadrato iscritto (§ 104, quesito 1).

§ III. Applicazioni del teorema di Pitagora. 1. Problema. Calcolare un lato di un triangolo rettangolo, dati gli altri due lati.

Indicando con a, b, c le misure dei due cateti e dell'ipotenusa, giusta il teorema di Pitagora si ha:

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ da cui:}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)\,(c-b)}.$$

L'ipotenusa è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei due cateti.

Un cateto è eguale alla radice quadrata della differenza del quadrato dell' ipotenusa e del quadrato dell'altro cateto.

In questi due teoremi le espressioni, „ipotenusa, cateto" stanno per abbreviazione in luogo delle più lunghe „misura dell'ipotenusa, misura del cateto".

P. e. $a = 3,\ b = 4,\ c = \sqrt{9+16} = 5.$

$b = 5,\ c = 13,\ a = \sqrt{(13+5)\,(13-5)} = \sqrt{144} = 12.$

2. Problema. Calcolare la diagonale di un quadrato, di cui è dato il lato.

Indichiamo con d la (misura della) diagonale e con a il (la misura del) lato. Giusta il teorema di Pitagora si ottiene

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2\,a^2} = a\sqrt{2}.$$

P. e. $a = 3,\ d = 3 \times 1{\cdot}414 = 4{\cdot}242.$

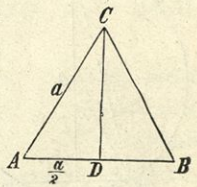

Fig. 123.

3. Problema. Dato il lato a di un triangolo equilatero (Fig. 123), calcolare l'altezza h e l'area S.

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\,a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

P. e. $a = 6\,m,\ h = 3 \times 1{\cdot}732\,m = 5{\cdot}196\,m.$

$$S = 9 \times 1{\cdot}732\,m^2 = 15{\cdot}588\,m^2.$$

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, dati i due cateti a e b. α) $a = 15\,m,\ b = 8\,m$; β) $a = 21\,dm,\ b = 20\,dm$; γ) $a = 64{\cdot}327\,m,\ b = 46{\cdot}525\,m$.

2. Data l'ipotenuza c e dato uno dei cateti di un triangolo rettangolo, calcolare l'altro cateto. α) $c = 25\,cm,\ a = 24\,cm$; β) $c = 5{\cdot}89\,m,\ b = 3{\cdot}12\,m$.

3. Una scala a piuoli lunga $8\,m$ è appoggiata ad una muraglia, ed il suo piede sul terreno dista dalla stessa di $3{\cdot}6\,m$. A quale altezza arriva la scala?

4. Calcolare il lato a di un quadrato, data la diagonale d.

$\alpha)\ d = 4\,cm,\ \beta)\ d = 13\,m.$

5. Calcolare il lato di un quadrato iscritto in un cerchio, di cui il raggio è di $1\,dm$.

6. Date le dimensioni a e b di un rettangolo, calcolare α) la diagonale, β) il raggio del cerchio circoscritto allo stesso. $a = 4\,dm,\ b = 9\,cm$.

7. Calcolare l'altezza e l'area di un triangolo isoscele, di cui la base è b ed un lato è a. $\alpha)\ b = 8\,cm,\ a = 5\,cm$; $\beta)\ b = 2{\cdot}66\,m,\ a = 2{\cdot}05\,m$.

8. Calcolare l'altezza h e l'area S di un triangolo equilatero, dato il lato a. $\alpha)\ a = 12\,cm,\ \beta)\ a = 4{\cdot}12\,m$.

9. Se r, c, d indicano rispettivamente il raggio di un cerchio, la corda e la distanza della stessa dal centro, calcolare ciascuna di queste grandezze, date le altre due. $\alpha)\ r = 5\,cm,\ c = 5\,cm$; $\beta)\ r = 3{\cdot}24\,m,\ d = 2{\cdot}18$; $\gamma)\ c = 3\,dm,\ d = 3\,dm$.

10. Calcolare il perimetro e l'area di un rettangolo, di cui la diagonale è $= d$ e l'angolo acuto racchiuso dalle due diagonali è di 60^0. $d = 12\,cm$.

11. Calcolare l'area di un trapezio isoscele, dati i lati paralleli a e b ed uno degli altri due lati c. $a = 1{\cdot}8\,dm,\ b = 1{\cdot}2\,dm,\ c = 5\,cm$.

12. Calcolare il perimetro di un rombo, date le due diagonali d_1 e d_2. $d_1 = 1{\cdot}5\,m,\ d_2 = 1\,m$.

13. Calcolare l'area dell'esagono regolare iscritto in un cerchio, di cui il raggio è R.

14. Calcolare il lato di un dodecagono regolare, dato il raggio R del cerchio circoscritto. P. e. $R = 1\,dm$. Se AB ed AC (Fig. 124) sono rispettivamente i lati dell'esagono e del dodecagono regolare, si calcoli dapprima OD, poi CD e nel triangolo rettangolo ACD, il lato AC. Si trova $AC = 0{\cdot}51764\,R$.

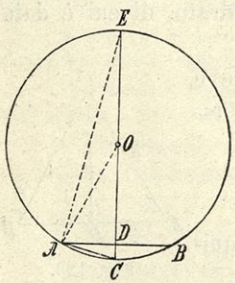

Fig. 124.

15. Si calcoli il lato di un poligono regolare di 24 lati iscritto in un cerchio, di cui il raggio è R. Vedi il quesito precedente.

16. Calcolare il perimetro di un ottagono regolare iscritto in un cerchio, di cui il raggio è R. P. e. $R = 1\,dm$.

17. Dati il raggio r di un cerchio ed una corda c, calcolare la corda che sottende mezzo arco. P. e. $r = 6\,cm$, $c = 4\,cm$.

18. Dato il lato a di un triangolo equilatero, calcolare il raggio α) del cerchio iscritto, β) del cerchio circoscritto allo stesso. P. e. $a = 1{\cdot}2\,dm$. Vedi § 59.

19. Calcolare il lato di un triangolo equilatero, di cui l' altezza è $= h$.

Da $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ si ricava $2h = a\sqrt{3}$, $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$. P. e. $h = 5\,cm$.

20. Calcolare il lato a di un triangolo equilatero, di cui è dato α) il raggio r del cerchio iscritto, β) il raggio R del cerchio circoscritto. $\alpha)\ r = 1\,m$, $\beta)\ R = 5\,cm$. Vedi § 59 ed il quesito precedente.

21. Calcolare il perimetro di un triangolo isoscele, di cui sono date la base b e l'area S. P. e. $b = 12\,mm$, $S = 6{\cdot}5\,cm^2$.

22. Calcolare α) il lato, β) l'altezza di un triangolo equilatero, di cui è data l'area S. P. e. $S = 75\,cm^2$.

23. E dato un cerchio, il cui raggio è $r = 1\ dm$; calcolare di quanto l'area di questo cerchio é maggiore di quella dell'esagono regolare iscritto e di quanto è minore di quella del quadrato circoscritto.

24. Calcolare l'area di un cerchio α) iscritto, β) circoscritto ad un quadrato, di cui l'area è S. P. e. $S = 10\ cm^2$.

Somiglianza.

§ 112. Definizioni. Secondo che due figure hanno eguale grandezza od eguale forma, o grandezza e forma eguali, si dicono rispettivamente *equivalenti* (=), *simili* ($\sim$) o *congruenti* ($\cong$) (§ 48).

Il segno $\sim$ deriva dalla lettera iniziale della parola „similis". Una più esatta definizione per la somiglianza di due poligoni (compresi i triangoli e i quadrilateri) è la seguente:

Due poligoni diconsi simili, se gli angoli di uno sono rispettivamente eguali agli angoli dell'altro e se i rapporti di ogni due lati omologhi sono eguali.

Si dicono *lati omologhi* quelli che uniscono i vertici degli angoli rispettivamente eguali. Se p. e. nella fig. 125 sono eguali i seguenti angoli: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, $D = D_1$, lati omologhi sono AB ed A_1B_1, come pure BC e B_1C_1, CD e C_1D_1, DA e D_1A_1. Se poi questi lati sodisfanno alle condizioni $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DA : D_1A_1$, i due poligoni sono simili; si scrive $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

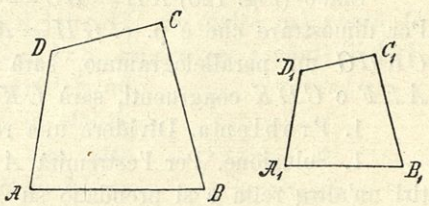

Fig. 125.

La condizione, che i rapporti di ogni due lati omologhi siano eguali, si può enunciare in una altra forma ed esprimere matematicamente nel modo seguente: Indicando con m il numero, a cui è eguale il rapporto $AB : A_1B_1$, cioè il valore o l'esponente di questo rapporto, avremo:

$AB : A_1B_1 = m$, $BC : B_1C_1 = m$, $CD : C_1D_1 = m$ . . . , dunque

$AB = m \cdot A_1B_1$, $BC = m \cdot B_1C_1$, $CD = m \cdot C_1D_1$ . . . .

Perciò si dice che i lati del primo poligono sono multipli eguali dei lati omologhi del secondo poligono, oppure che quelli sono proporzionali a questi.

Da quanto è stato detto sin qui risulta chiara l'esattezza dei teoremi seguenti:

Due poligoni sono simili, se ciascuno di essi è simile ad un terzo.

Se due poligoni simili hanno due lati omologhi eguali, sono anche perfettamente eguali.

§ 113. Partizione delle rette. Se partendo dal vertice di un angolo si divide un lato in un dato numero di segmenti eguali e per i punti di divisione si guidono verso il secondo lato delle rette fra loro parallele, questo lato riesce diviso in altrettanti segmenti eguali.

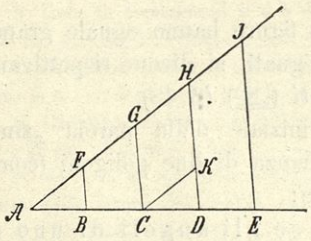

Fig. 126.

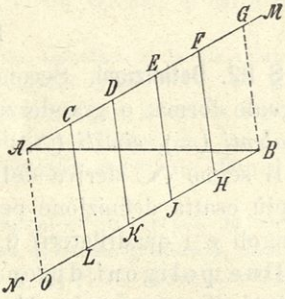

Fig. 127.

Siano (Fig. 126) $AB = BC = CD = DE$, $BF \parallel CG \parallel DH \parallel EJ$. Per dimostrare che è p. e. $GH = AF$, si conduca $CK \parallel GH$. Essendo $CKHG$ un parallelogrammo, sarà $CK = GH$, ed essendo i triangoli ABF e CDK congruenti, sarà $CK \parallel AF$; perciò $GH = AF$.

1. Problema. Dividere una retta data in n parti eguali.

1. Soluzione. Per l'estremità A della retta data AE (Fig. 126) si tiri un'altra retta e si prendano su di essa a partire da A n segmenti eguali, si unisca l'estremità J con E mediante la retta EJ e per ciascun punto di divisione si guidino delle rette parallele a questa. Del resto basta guidare solo la parallela pel punto H precedente a J; perchè?

2. Soluzione. Per dividere la retta AB (Fig. 127) in n (qui in cinque) parti eguali, alle due estremità A e B della stessa si conducano due rette AM e BN parallele e di senso opposto e partendo da A si prendano sulla retta AM n (cinque) segmenti eguali, il che si farà anche sulla retta BN partendo da B. Le rette, che uniscono C con L, D con K ecc. dividono AB in n parti eguali (§ 69, *e*).

2. Problema. Dividere una retta secondo un dato rapporto numerico.

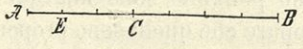

Fig. 128.

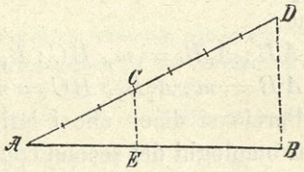

Fig. 129.

Soluzione. Per dividere la retta AB (Fig. 128) nel rapporto di 3 : 4, la si divida in $3 + 4 = 7$ parti eguali ed il punto estremo C della terza porzione sarà il punto cercato e ciò perchè $AC = 3 \cdot AE$, $CB = 4 \cdot AE$; perciò $AC : BC = 3 : 4$. — La fig. 129 mostra come si possa risolvere nel modo il più semplice il problema.

Quesiti d'esercizio. Si divida una retta:

1. in *a)* 3, *b)* 5, *c)* 6, *d)* 10 parti eguali;
2. nel rapporto *a)* 2 : 3, *b)* 1 : 4, *c)* 5 : 2;
3. nel rapporto *a)* $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$, *b)* $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{5}$, *c)* 0·6 : 1·5;
4. in tre parti, che stiano nel rapporto di 2 : 3 : 4.
5. È dato un parallelogrammo; costruire un altro parallelogrammo di base eguale e che stia al dato nel rapporto di 3 : 4. — Si badi che due parallelogrammi di egual base stanno fra loro come le altezze. $S : S_1 = bh : b_1 h_1 = h : h_1$.
6. È dato un triangolo; costruire un altro triangolo di base eguale e che stia al dato nel rapporto di 5 : 2.
7. È dato un triangolo; costruire un altro triangolo di eguale altezza, che stia al dato nel rapporto di 2 : 3.

§ 114. Proporzionalità fra segmenti rettilinei. Se in un triangolo si guida una retta parallela ad un lato, gli altri due lati vengono divisi proporzionalmente ed i lati del nuovo triangolo sono proporzionali ai lati del triangolo dato.

Sia (Fig. 130) $DE \parallel AB$ ed il lato AC sia diviso nel punto D nel rapporto di 2 : 3, cioè $AD : DC = 2 : 3$. Se ora per i punti di divisione si conducono altrettante rette parallele ad AB, anche il lato BC viene diviso in cinque parti eguali, delle quali due spettano alla retta BE e tre alla EC; perciò sarà $BE : EC = 2 : 3$; quindi anche $AD : DC = BE : EC$, cioè i segmenti del lato AC stanno nello stesso rapporto di quelli del lato BC, od in altre parole i lati AC e BC vengono divisi proporzionalmente dalla DE.

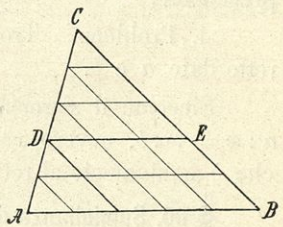

Fig. 130.

Se poi dai punti di divisione del lato AC si conducono delle parallele al lato BC, col solo osservare la figura si vede che è $AB : DE = 5 : 3$, $BC : EC = 5 : 3$, $CA : CD = 5 : 3$. Perciò:

$$AB : DE = BC : EC = CA : CD.$$

I lati del nuovo triangolo sono proporzionali a quelli del triangolo dato. Si ottengono gli stessi risultati, anche se il lato AC viene diviso nel punto D nel rapporto di $m : n$, dove m ed n indicano due numeri interi qualunque.

Quesito d'esercizio. Se nella figura 130 $AB = 12\ cm$, $BC = 15\ cm$, $AC = 11\ cm$, $AD = 3\ cm$, quanto importano i lati del triangoli CDE?

1. Problema. Dividere una retta secondo un determinato rapporto di lunghezza.

Per dividere la retta AB nel rapporto di $CD : DE$ (Fig. 131), si trasportino sui

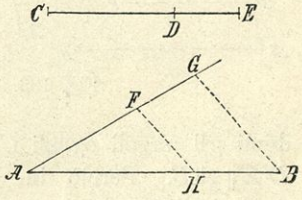

Fig. 131.

lati di un angolo concavo qualunque GAB i segmenti $AF = CD$, $FG = DE$, si congiunga G con B mediante la retta GB e da F si conduca $FH \parallel GB$; con ciò la retta AB viene divisa nel punto H nel rapporto di $CD : DE$.

2. Problema. Trovare la quarta proporzionale geometrica rispetto ai tre segmenti dati a, b, c.

Sirast portino sui lati di un angolo concavo qualunque (Fig. 132) i segmenti $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, si congiunga mediante una retta il punto D col punto B e da C si guidi $CE \parallel DB$; il segmento $DE = x$ sodisfa alla condizione $a : b = c : x$.

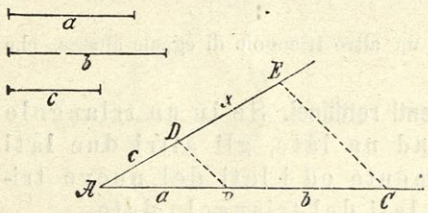

Fig. 132.

3. Problema. Trovare la terza proporzionale geometrica rispetto a due segmenti dati a e b. $a : b = b : x$.

Questo problema può considerarsi quale un caso speciale del precedente.

4. Problema. Trovare la media proporzionale geometrica fra due rette date a e b.

Siccome il segmento x domandato deve sodisfare alla condizione $a : x = x : b$, ovvero $x^2 = ab$, perciò si determina il lato x del quadrato che è equivalente al rettangolo i cui lati sono a e b. (Vedi § 94, Probl. 5.)

§ 115. Somiglianza dei triangoli. *a)* Se in un triangolo si guida una retta parallela ad un lato, i due triangoli che risultano sono simili.

Se nel triangolo ABC (Fig. 133) si tira $DE \parallel AB$, i due triangoli ABC e DEC hanno gli angoli rispettivamente eguali e i lati omologhi proporzionali (§ 114); perciò $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

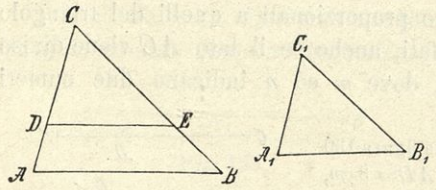

Fig. 133.

b) Due triangoli sono simili, se hanno gli angoli rispettivamente eguali.

Se nei triangoli ABC ed $A_1B_1C_1$ (Fig. 133) $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, essi possono venir sovrapposti l'uno all'altro in modo che coincidano i lati racchiudenti gli angoli eguali C e C_1 e il lato A_1B_1 cada nella posizione di $DE \parallel AB$. Perciò in base al teorema precedente i due triangoli sono simili.

Quesiti d'esercizio. Costruire un triangolo $A_1B_1C_1$ simile ad un altro ABC:

1. dato il lato A_1B_1 omologo al lato AB;

2. se il rapporto dei lati omologhi $AB : A_1B_1$ è eguale al rapporto numerico 4:3;

3. se il rapporto dei lati omologhi $BC : B_1C_1$ è eguale al rapporto fra due segmenti dati $a : a_1$;

4. se il lato A_1B_1 omologo al lato AB è la quarta proporzionale geometrica rispetto ai lati AB, BC, CA.

5. Costruire un triangolo con un lato di 4 *cm* che sia simile ad un altro ABC, in cui $AB = 6\ cm$, $BC = 4{\cdot}5\ cm$, $CA = 5\ cm$. Quante soluzioni corrispondono al quesito? Quale è in ciascun caso la lunghezza degli altri lati del nuovo triangolo?

6. Perchè due triangoli equilateri sono simili? Perchè lo sono due triangoli rettangoli isosceli?

7. Ad un cerchio, il cui raggio è r, è circoscritto un esagono regolare; se ne calcoli il lato (Fig. 134). Il $\triangle COF \sim \triangle AOE$; perciò $CF : AE = OF : OE$, da cui si può calcolare CF e quindi anche CD.

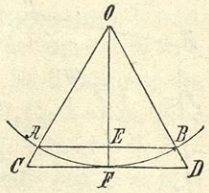

Fig. 134.

8. Ad un cerchio, il cui raggio è r, è circoscritto un dodecagono regolare; se ne calcoli il lato (§ 111, ques. 14).

9. Assegnare la lunghezza della retta ab (Fig. 135), supposto che la retta da 0 ad 1 sia $= 1\ m$. — Schiarimento. Dalla fig. 130 è chiaro che i segmenti tirati nel

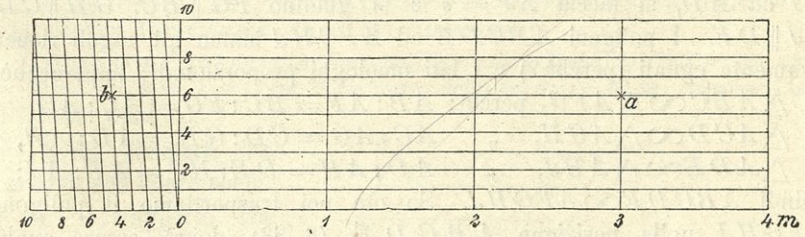

Fig. 135.

$\triangle ABC$ parallelamente ad AB sono rispettivamente $\frac{1}{5}AB, \frac{2}{5}AB$, ecc. Da una simile riflessione risulta chiaro l'uso della *scala trasversale* (Fig. 135), la costruzione della quale appare dalla medesima figura.

c) L'altezza divide il triangolo rettangolo in due triangoli simili fra loro e ciascuno simile al triangolo dato.

I triangoli rettangoli ACD e ABC (Fig. 136) sono simili, perchè hanno l'angolo $DAC = \alpha$ comune e quindi eguali anche gli angoli indicati con β. Anche i triangoli CDB ed ABC sono simili per analogo motivo. Perciò i triangoli ABC, ACD, CBD sono a due a due simili, avendo ognuno di essi gli angoli *R*. α, β ed

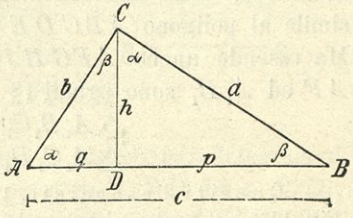

Fig. 136.

d) L'altezza è la media proporzionale geometrica fra i due segmenti dell'ipotenusa.

I lati p ed h del triangolo BCD sono proporzionali ai lati omologhi h ed q del triangolo simile CAD, cioè:

$$p : h = h : q,$$

da cui: $h^2 = pq$ (Confr. § 93).

Quesito d'esercizio. 10. Calcolare e costruire la media proporzionale geometrica fra due rette date. *a*) 3 *cm*, 12 *cm*; *b*) 2·5 *cm*, 1 *dm*.

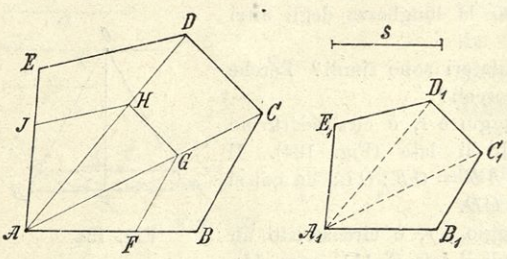

Fig. 137.

§ 116. Somiglianza dei poligoni. Problema. Sopra una retta, presa quale lato, costruire un poligono simile ad un altro dato.

Soluzione. Sia $ABCDE$ (Fig. 137) il poligono dato e sia s il lato dato del nuovo poligono omologo ad AB. Si conducano le diagonali AC ed AD, si faccia $AF = s$ e si guidino $FG \parallel BC$, $GH \parallel CD$, $HJ \parallel DE$. I poligoni $ABCDE$ ed $AFGHJ$ hanno gli angoli rispettivamente eguali (perchè?) e i lati omologhi proporzionali; imperocchè:

$\triangle ABC \sim \triangle AFG$, perciò: $AB : AF = BC : FG = AC : AG$,

$\triangle ACD \sim \triangle AGH$, „ $AC : AG = CD : GH = AD : AH$,

$\triangle ADE \sim \triangle AHJ$, „ $AD : AH = DE : HJ = AE : AJ$;

quindi $ABCDE \sim AFGHJ$. Se ora noi trasportiamo il poligono $AFGHJ$ nella posizione $A_1B_1C_1D_1E_1$ (§ 83), dovrà essere anche $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$

Teorema. Poligoni simili vengono scomposti mediante diagonali omologhe in triangoli simili.

Nei poligoni simili $ABCDE$ ed $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 137) AC e A_1C_1, AD e A_1D_1 sono le diagonali omologhe, perchè uniscono i vertici di angoli rispettivamente eguali. Si faccia ora $AF = A_1B_1$ e si costruisca, come antecedentemente, il poligono $AFGHJ$, il quale sia simile al poligono $ABCDE$ e quindi anche al poligono $A_1B_1C_1D_1E_1$. Ma essendo anche $AFGHJ \cong A_1B_1C_1D_1E_1$, perchè i lati omologhi AF ed A_1B_1 sono eguali (§ 112), sarà

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle AFG \sim ABC,$$
$$\triangle A_1C_1D_1 \cong \triangle AGH \sim ACD, \text{ ecc.}$$

Quesiti d'esercizio. 1. Costruire un poligono simile al poligono $ABCDE$ (Fig. 137), nel quale il lato omologo a BC sia eguale ad un segmento dato s.

2. Si dimostri che due poligoni regolari di eguale numero di lati sono simili.

3. Costruire un poligono simile ad un altro dato (p. e. ad un esagono) in modo che il rapporto di due lati omologhi sia eguale *a)* ad un dato rapporto di lunghezza, *b)* ad un dato rapporto numerico 2 : 3.

4. Sopra una carta topografica costruita nel rapporto di 1 : 1200 la distanza di due punti è di 82 *mm*. Qual' è la distanza dei detti punti *a)* in natura, *b)* sopra una seconda carta costruita nel rapporto di 1 : 5000? — Osservazione: Ogni poligono disegnato sopra una carta, una pianta ecc. è simile a quel poligono, che ad esso corrisponde in natura. Il rapporto di ogni due lati omologhi è dato da una apposita scala.

5. Sopra una carta topografica costruita sulla scala di 1 : 150000 che lunghezza ha la distanza di 1 *km*?

6. Si ingrandisca il pentagono $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (Fig. 137) nel rapporto di 2 : 3.

7. Si disegni un quadrilatero qualunque e lo si dimiunisca nel rapporto di 5 : 3.

§ 117. Rapporti fra i perimetri di due figure simili. Se il rapporto fra due lati omologhi di due triangoli simili ABC ed $A_1B_1C_1$ è $= m$, cioè se è $AB = m \,.\, A_1B_1$, $BC = m.\, B_1C_1$, $CA = m.\, C_1A_1$, sarà $AB + BC + CA = m\ (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$, oppure, indicando con p e p_1 i perimetri dei due triangoli, sarà $p = mp_1$, perciò:

$$p : p_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1.$$

Egualmente si procede per i poligoni; perciò:

I perimetri di due triangoli o di due poligoni simili stanno fra loro come due lati omologhi.

Quesito d'esercizio. Sono dati due triangoli simili; i lati di uno sono $a = 12\ cm$, $b = 9\ cm$, $c = 14\ cm$, il perimetro dell'altro è $p_1 = 56\ cm$; calcolare i lati del secondo triangolo.

§ 118. Rapporti fra le aree di due figure simili. *a)* Se il rapporto fra due lati omologhi di due parallelogrammi simili $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ (Fig. 138) è $= 5 : 3$, il parallelogrammo $ABCD$ si potrà scomporre in $5 \times 5 = 25$ ed il parallelogrammo $A_1B_1C_1D_1$ in $3 \times 3 = 9$ piccoli parallelogrammi, i quali sono tutti fra loro congruenti. Se ora indichiamo con s l'area di uno dei triangoli, nei quali i piccoli parallelogrammi vengono scomposti mediante le diagonali parallele a BD ed a B_1D_1, si trova che $ABCD = 50s$, $A_1B_1C_1D_1 = 18s$, dunque $\triangle ABD = 25s$, $\triangle A_1B_1D_1 = 9s$.

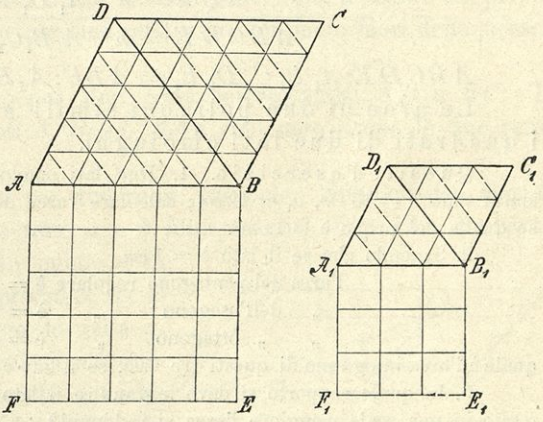

Fig. 138.

Da ciò segue che $\triangle ABD : \triangle A_1B_1D_1 = 25 : 9$. Per i quadrati costruiti sui lati omologhi AB e A_1B_1 si ottiene oltre a ciò la proporzione $ABEF : A_1B_1E_1F_1 = 25 : 9$, dunque $\triangle ABD : \triangle A_1B_1D_1 = ABEF : A_1B_1E_1F_1$, oppure indicando con S ed S_1 le aree con a ed a_1 i lati dei due triangoli, sarà:

$$S : S_1 = a^2 : a_1^2, \text{ cioè:}$$

Le aree di due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.

Per esercizio si ripeta la derivazione di questo teorema, supposto che $AB : A_1B_1 = m : n$, dove m ed n sono due numeri interi qualunque.

Se il lato a di un triangolo è 2, 3, 4 .... m volte maggiore del lato omologo a_1 di un secondo triangolo simile, anche l'area S del primo triangolo sarà 4, 9, 16 .... m^2 volte maggiore dell'area S_1 del secondo triangolo; se è $a = m\,a_1$, sarà $S = m^2 S_1$. Ciò vale anche se m non è un numero intero, come p. e. nella fig. 138, dove:

$$AB = 5.\frac{A_1B_1}{3} = \frac{5}{3}.A_1B_1 \text{ e } ABD = 25.\frac{A_1B_1D_1}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2.A_1B_1D_1.$$

b) Per confrontare le aree di due poligoni simili, si scompongano questi in triangoli mediante diagonali omologhe.

Se si ammette nella fig. 137, che sia $AB = m.A_1B_1$, si avrà:

$$ABC = m^2.\ A_1B_1C_1$$
$$ACD = m^2.\ A_1C_1D_1$$
$$ADE = m^2.\ A_1D_1E_1$$
$$\overline{ABCDE = m^2.\ A_1B_1C_1D_1E_1}, \text{ da cui:}$$

$$ABCDE : A_1B_1C_1D_1E_1 = ABC : A_1B_1C_1 = \overline{AB^2} : \overline{A_1B_1^2}, \text{ cioè:}$$

Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.

Quesiti d'esercizio. 1. Due lati omologhi di due triangoli (poligoni) simili sono $a = 15\ cm$, $a_1 = 12\ cm$; calcolare l'area del secondo triangolo (poligono), se quella del primo è $= 1\ dm^2$.

2. Sapendo che se il lato è $= 1\ cm$,

l'area del pentagono regolare è $= 1{\cdot}7205\ cm^2$,
„ dell'esagono „ è $= 2{\cdot}5981\ cm^2$,
„ „ ottagono „ è $= 4{\cdot}8285\ cm^2$;

quale è l'area in ognuno di questi tre casi, se il lato è di *a)* $1\ m$, *b)* $23\ cm$, *c)* $2{\cdot}15\ m$?

3. In quale rapporto si deve ingrandire il lato di un poligono, affinchè disegnato in una scala maggiore l'area si raddoppi?

4. Se l'ingrandimento lineare di un microscopio è di 80 volte, quale sarà l'ingrandimento in superficie?

5. Sopra una carta topografica disegnata secondo la scala di 1 : 100 l'area di un triangolo è di $1{\cdot}5423\ dm^2$. Quale sarà l'area del corrispondente triangolo simile *a)* in natura, *b)* sopra una carta topografica disegnata secondo la scala di 1 : 150?

Stereometria.

I piani.

§ 119. Assioma del piano. Il concetto, che possediamo della retta e del piano, ci pone in grado di riconoscere l'esattezza del seguente teorema:

Una retta, che ha due punti comuni con un piano, coincide in tutta la sua estensione collo stesso (assioma del piano).

Tanto qui che in seguito è d'uopo immaginare illimitati non solo la retta ma anche il piano, purchè non si presupponga espressamente il contrario. Per rendere anche visibili con modelli e con disegni piani illimitati, non possiamo evidentemente adoperare che porzioni limitate dei medesimi.

Sull' assioma suesposto si basa il metodo di provare un piano col mezzo di una riga.

§ 120. Determinazione di un piano. Problemi. Guidare un piano 1. per un punto, 2. per due punti, 3. per una retta, 4. per più punti giacenti in una retta. — Problemi indeterminati.

Si renda intuitivä la costruzione richiesta, ponendo un foglietto piano od una tavoletta sull'angolo e sullo spigolo del tavolino.

5. Guidare un piano per tre punti non situati in linea retta. Si conduca il piano per due punti e poi lo si faccia rotare attorno alla retta che li congiunge, sino a che anche il terzo punto vada a cadere sul piano.

6. Guidare un piano per una retta e per un punto fuori della stessa. (Probl. 5.)

7. Guidare un piano per due rette intersecantisi AB e BC. Il piano condotto per i punti A, B e C deve contenere anche le due rette date. (Perchè?)

8. Guidare un piano per due rette parallele. Supponiamo che il piano MN passi per due rette a e b intersecantisi (Fig. 139) e che la retta b roti attorno ad un punto A in modo che il punto d'intersezione D si sposti continuamente lungo la retta a. Con ciò la retta b rimane constantemente nel piano MN (perchè?) anche quando b diventa parallela ad a. Se dunque due rette sono parallele e se un piano passa per una (a) di esse e per un punto (A) dell'altra (c), questa deve giacere anche in quel piano.

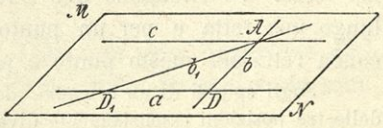

Fig. 139.

Da ciò è chiaro che anche nello spazio per un punto non si può condurre che una sola parallela ad una retta data.

Gli ultimi quattro problemi sono determinati in modo unico, perchè ad ognuno non corrisponde che una sola soluzione; perciò:

Un piano è determinato:

a) da tre punti non situati in linea retta;

b) da una retta e da un punto situato fuori della stessa;

c) da due rette intersecantisi;

d) da due rette parallele.

Quesiti d'esercizio. 1. Che cosa si potrebbe dire di due piani ai quali sono comuni tre punti non giacenti in una retta?

2. Quale vantaggio presenta un sedile a tre piedi rimpetto ad uno a quattro piedi?

§ 121. Genesi del piano. Un piano può immaginarsi generato:

1. da una retta, che scorre lungo due rette intersecantisi;

2. da una retta, che rotando attorno ad un suo punto, scorre lungo un'altra retta;

3. da una retta, che scorre lungo una seconda retta parallelamente a sè stessa;

4. da una retta, che scorre lungo due rette parallele.

La retta, che nel suo movimento genera il piano, si chiama *retta generatrice*; se questa scorre in pari tempo lungo altre rette, queste vengono chiamate *linee direttrici*, o in particolare *rette direttrici* od anche semplicemente *direttrici* (*direttive*).

Quesiti d'esercizio. Si cerchi un esempio nella Fig. 139. per ciascuno dei quattro modi, secondo i quali si genera un piano.

Posizioni principali di rette e di piani.

§ 122. Due rette. Due rette possono avere una rispetto all'altra tre posizioni essenzialmente diverse: 1. *s'intersecano*; 2. *sono vicendevolmente parallele*; o 3. nè s'intersecano, nè sono parallele; in tal caso si dice che le due rette *s'incrociano*.

Nei due primi casi le rette giacciono nello stesso piano; non però nel terzo. Si ottengono due rette incrociantisi, facendo passare un piano lungo una retta e per un punto fuori della stessa e guidando una seconda retta per questo punto e per un altro che trovasi fuori del piano.

Sugli spigoli di un armadio, della scuola ecc. si dieno esempi per ciascuna delle tre posizioni essenzialmente diverse di due rette.

§ 123. Due piani. Due piani si dicono *paralleli*, se non hanno alcun punto comune per quanto possano venire estesi. Se essi hanno dei punti comuni, questi sono punti di una retta, che si chiama *linea d'intersezione* dei due piani, e in questo caso si dice che i *piani s'intersecano*. Infatti, se per due punti comuni a due piani guidiamo una retta data, essa deve giacere in ciascuno di essi e sarà quindi la loro *linea d'inter-*

sezione. Ad eccezione di questa retta, i piani non possono avere comune alcun altro punto; giacchè per una retta e per un punto fuori della stessa non si può condurre che un solo piano.

Si cerchino sulle pareti di un armadio, di una stanza ecc. esempi di due piani paralleli e di due piani intersecantisi.

§ 124. Retta e piano. Una retta ed un piano si dicono *paralleli*, se non hanno comune alcun punto per quanto la retta si prolunghi e il piano si estenda. Se la retta e il piano non sono paralleli e se hanno comune un solo punto, questo si chiama *punto d'intersezione* della retta col piano od il *piede* della retta nel piano e si dice che *la retta incontra il piano* o che *il piano interseca la retta.* Se infine una retta ha più di un punto comune con un piano, essa coincide col medesimo in tutta la sua estensione (§ 119).

Si dieno esempi per le tre suaccennate posizioni di una retta rispetto ad un piano.

Rette e piani paralleli.

§ 125. Due rette. Se due rette intersecantisi si muovono parallelamente a sè stesse, gli angoli da esse formati rimangono invariati. Se supponiamo che in un dato piano sia $AB \parallel A_1B_1$ (Fig. 140) e che in un altro piano sia $CD \parallel C_1D_1$, sarà anche $\sphericalangle AOC = A_1O_1C_1$. Da ciò segue che:

Anche nello spazio angoli formati da rette parallele e rivolte nello stesso senso sono eguali.

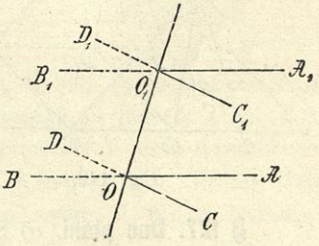

Fig. 140.

Per *angolo di due rette incrociantisi* si intende d'angolo che si ottiene conducendo per un punto di una retta una parallela all'altra. In questo senso si deve intendere che l'angolo AOC (Fig. 140) è l'angolo delle rette incrociantisi AB e C_1D_1.

§ 126. Rette e piani. *a*) Problema. Guidare per un punto dato una retta parallela ad un piano dato.

Si guidi nel piano dato MN (Fig. 141) una retta qualunque BC e pel punto dato A la $DE \parallel BC$; sarà $DE \parallel MN$. Perchè, se la retta DE prolungata sufficientemente incontrasse il piano MN, il suo piede dovrebbe coincidere tanto col piano MN che con quello determinato dalle parallele BC e DE, dunque questo piede sarebbe un punto della linea d'intersezione BC dei due piani, e quindi le rette BC e DE non sarebbero parallele; perciò il teorema:

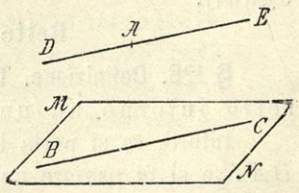

Fig. 141.

Se una retta è parallela ad un'altra situata in un piano, è parallela anche al piano stesso.

Quante soluzioni corrispondono al problema dato di sopra?

b) Se una retta è parallela ad un piano, è anche parallela ad ogni retta nel medesimo, la quale giace con essa nello stesso piano.

Infatti, se la retta AB è parallela al piano MN (Fig. 142) e se attorno ad AB, presa quale asse, si fa rotare un altro piano, la linea d'intersezione dei due piani, in tutte le sue posizioni CD, C_1D_1, C_2D_2..., rimane parallela ad AB. Giacchè, se p. e. AB e CD avessero un punto comune, questo dovrebbe appartenere anche al piano MN, e quindi AB non sarebbe parallela ad MN.

Si cerchino esempi corrispondenti a questo teorema sugli angoli e sulle pareti della scuola ecc.

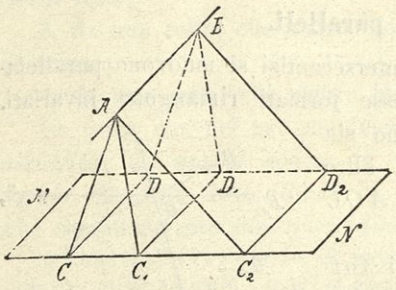

Fig. 142.

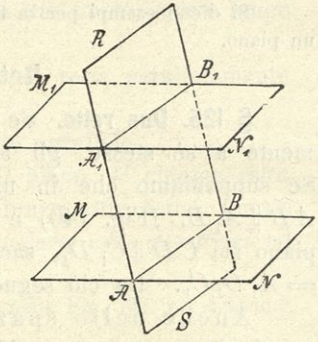

Fig. 143.

§ 127. Due piani. *a*) Se MN ed M_1N_1 (Fig. 143) sono due piani paralleli, AB ed A_1B_1 le rette nelle quali questi piani vengono tagliati dal piano RS, queste rette devono essere parallele, perchè esse giacciono nel medesimo piano (RS) e non s'intersecano. Dunque:

Se due piani paralleli vengono tagliati da un terzo, le linee d'intersezione devono essere parallele.

Essendo $AA_1 \parallel BB_1$ (Fig. 143), il quadrilatero AA_1BB_1 è un parallelogrammo, quindi $AA_1 = BB_1$. Perciò:

b) Rette parallele frapposte a piani paralleli sono eguali.

Rette e piani perpendicolari.

§ 128. Definizione. Teoremi. *a*) Se si fa rotare un angolo retto intorno ad un lato, l'altro lato descrive un piano.

Infatti, se si porta l'angolo retto BAC (Fig. 144) nella posizione BAE e si fa passare un piano MN per le rette AC ed AE, qualunque retta, p. e. AD, che passa per A dev' essere perpendicolare ad AB.

Per dimostrar ciò si conduca la retta CE in modo che intersechi le rette AC, AD, AE, si faccia $AB = AB_1$ e si uniscano mediante altrettante rette i punti C, D, E con B e con B_1. Siccome AC ed AE sono assi di simmetria della retta BB_1, dev' essere $BC = B_1C$, $BE = B_1E$, perciò $\triangle BCE \cong B_1CE$. Questi triangoli si coprono, se si fa rotare uno di essi intorno a CE, presa quale asse, fino a che B cada su B_1. Allora anche le rette BD ed B_1D coincidono, perciò sono eguali, ed essendo AD asse di simmetria di BB_1, sarà $AD \perp BB_1$.

b) Se una retta è perpendicolare a tutte le rette condotte in un piano per il suo piede, si dice che essa è *perpendicolare al piano* o che *la retta* e *il piano sono vicendevolmente perpendicolari*. Dalla dimostrazione del teorema *a*) segue che una retta, la quale è perpendicolare a due rette condotte in un piano per il suo piede, è perpendicolare anche al piano. Se è (Fig. 144) $AB \perp AC$ e $AB \perp AD$, dev' essere $AB \perp MN$.

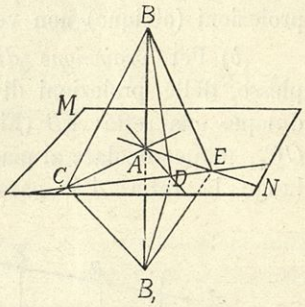

Fig. 144.

Una retta si dice *obliqua* a un piano, se non è nè parallela nè perpendicolare ad esso.

c) Da un punto esterno a un piano non si può abbassare che una sola retta perpendicolare a questo. Imperocchè se fossero p. e. BA e BC (Fig. 144) due rette perpendicolari al piano MN, esse dovrebbero essere perpendicolari anche ad AC, ciò che è impossibile. Inoltre due rette normali allo stesso piano non possono avere il piede comune. Perchè?

d) Se una retta è normale ad un piano e si muovono o l'una o l'altro in modo che si mantengano sempre paralleli a sè stessi, la retta e il piano rimangono sempre vicendevolmente perpendicolari.

Se di due rette parallele una è perpendicolare a un piano, lo deve essere anche l'altra.

Se di due piani paralleli uno è perpendicolare ad una retta, lo deve essere anche l'altro.

Gli inversi a questi teoremi sono:

Rette perpendicolari a un piano sono parallele.

Piani perpendicolari a una retta sono paralleli.

Infatti, se si muove una delle rette normali in modo che si mantenga sempre parallela a sè stessa fino a che raggiunga un punto comune con l'altra normale, le due rette coincideranno.

Quesiti d'esercizio. 1. Come si chiama un piano normale ad una linea verticale?

2. Che cosa fa il muratore per persuadersi se un piano sia orizzontale?

3. E' una retta perpendicolare a un piano se è perpendicolare solo ad una retta condotta nel piano per il suo piede?

Proiezioni, distanze, angoli d'inclinazione.

§ 129. Proiezioni normali. *a*) Per *proiezione normale di un punto sopra un piano* s'intende il piede della perpendicolare abbassata dal punto al piano. In seguito si farà uso sovente per brevità dell'espressione „proiezione" invece della „proiezione normale", giacchè altre proiezioni (oblique) non vengono in questo libro considerate.

b) Per *proiezione di una linea sopra un piano* s'intende il complesso delle proiezioni di tutti i punti di questa linea. Per proiettare dunque una retta AB (Fig. 145) sul piano MN, facciamo che una retta CC_1, perpendicolare al piano, si muova lungo la retta AB parallelamente a

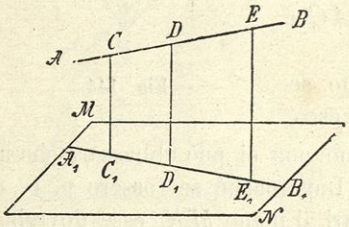

Fig. 145.

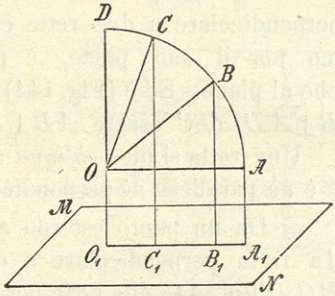

Fig. 146.

sè stessa in modo che si mantenga sempre normale al piano. Durante questo moto la normale descrive un piano, la cui linea d'intersezione A_1B_1 col piano MN è la proiezione cercata. Quindi si può dire che:

La proiezione di una retta è parimente in generale una retta; ma se la retta è perpendicolare al piano, la sua proiezione è un punto.

c) La proiezione di un segmento rettilineo su di un piano è determinata dalle proiezioni dei suoi punti estremi. Se si confronta un segmento rettilineo posto nelle posizioni OA, OB, OC, OD (Fig. 146) con le proiezioni dello stesso, risulta il teorema:

Secondo che una retta limitata è parallela, obliqua, o normale a un piano, la sua proiezione è eguale ad essa minore di essa o è un punto.

Quesiti d'esercizio. 1. Che cosa è la proiezione di nn triangolo, in generale di un poligono su di un piano?

2. Quando una figura ha la proiezione perfettamente eguale a sè stessa?

3. Se le rette AC, AC_1, AC_2, . ., che congiungono un punto esterno A (Fig. 147) con vari punti di un piano MN, sono eguali, anche le loro proiezioni devono essere eguali. Perchè? Che cosa sarà dunque il luogo geometrico dei piedi C, C_1, C_2 . . . di quelle rette?

d) Problema. Da un punto esterno a un piano si abbassi una perpendicolare a questo. Si conduca sul piano MN (Fig. 148) una retta C_1C_2 e da A si abbassi la AD perpendicolare ad essa; si faccia

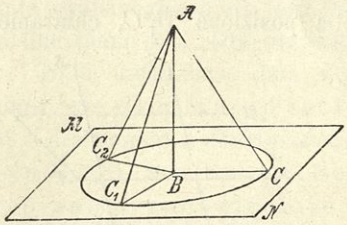

Fig. 147.

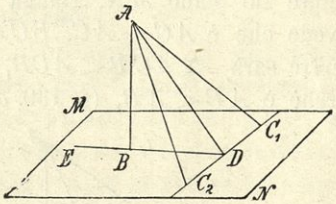

Fig. 148.

$DC_1 = DC_2$, poi si unisca il punto A coi punti C_1 e C_2 mediante le rette AC_1 e AC_2; queste rette sono eguali (perchè?); perciò C_1C_2 è la corda del cerchio, il cui centro B deve essere la proiezione del punto A sul piano.

Se si conduce dunque nel piano MN l'asse di simmetria DE del segmento C_1C_2, questo asse deve passare per il piede della perpendicolare domandata. Si faccia dunque $AB \perp DE$.

§ 130. Distanze. *a*) Se AB (Fig. 147) è una perpendicolare al piano MN e C un punto qualsivoglia di questo; siccome è $AB < AC$, sarà:

La perpendicolare abbassata da un punto ad un piano è la più breve di tutte le rette che si possono condurre dal punto sino al piano. Essa dicesi *distanza del punto dal piano.*

b) Se una retta è parallela a un piano, tutti i punti di essa hanno eguali distanze dal piano. Una di queste distanze dicesi *distanza della retta dal piano parallelo.*

c) Se un piano è parallelo a un altro piano, tutti i punti del primo distano egualmente dal secondo piano. Una di queste distanze dicesi *distanza dei due piani paralleli* (Fig. 149).

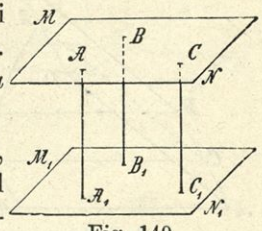

Fig. 149.

Quesito d'esercizio. Che cosa è il luogo geometrico di tutti i punti che *a*) distano egualmente da un piano, *b*) distano egualmente da due piani paralleli?

§ 131. Angolo d'inclinazione di una retta verso un piano. *a*) Per *angolo d'inclinazione di una retta verso un piano* s'intende l'angolo che la retta forma con la sua proiezione sul piano. Così se è p. e. $AB \perp MN$

(Fig. 150), l'angolo d'inclinazione della retta AC verso il piano MN è l'angolo ACB.

b) L'angolo d'inclinazione di una retta è il più piccolo di tutti gli angoli che essa forma con le rette condotte nel piano per il suo piede.

Infatti, se si proietta la retta AC nel piano MN (Fig. 150) e si fa rotare la proiezione BC intorno al punto C, sino a che, rimanendo sempre sul piano MN, giunga p. e. nella posizione B_1C, chiaramente si vede che è $AC = AC$, $BC = B_1C$, mentre sarà $\sphericalangle ACB < ACB_1$ (§ 56), perchè è $AB < AB_1$ (§ 130, *a*).

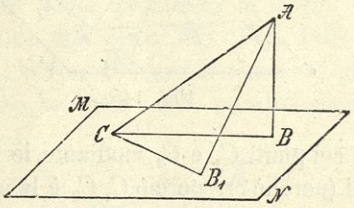

Fig. 150.

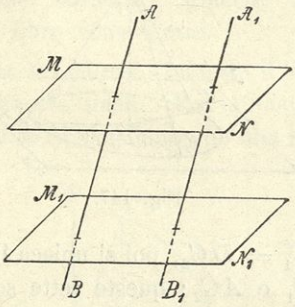

Fig. 151.

c) Se un piano taglia una retta, e si spostano o l'uno o l'altra sempre parallelamente a sè stessi, l'inclinazione della retta verso il piano rimane inalterata (Fig. 151). Da ciò segue che:

Rette parallele formano con un piano intersecante eguali angoli d'inclinazione.

Piani paralleli formano con una retta che viene da essi intersecata eguali angoli d'inclinazione.

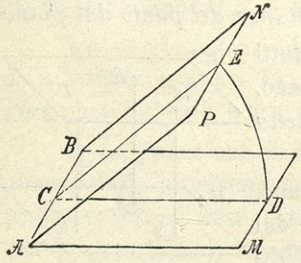

Fig. 152.

§ 132. Diedro. Un piano illimitato viene diviso da una retta illimitata in due piani semilimitati. Se si fa rotare un piano semilimitato intorno alla sua linea limitante, la porzione di spazio da esso descritta dicesi *angolo diedro* o semplicemente *diedro*.

La linea d'intersezione AB (Fig. 152) dicesi *spigolo;* i piani semilimitati BM ed AN vengono detti *facce* del diedro. Il diedro della Fig. 152 si indica con $M(AB)N$.

Quesiti d'esercizio. 1. Come si può mostrare mediante un libro, una porta il modo secondo il quale si genera un diedro?

2. Quanti diedri si ottengono da due piani intersecantisi?

§ 133. Angolo d'inclinazione di due piani. *a)* Sia $CD \perp AB$ (Fig. 152), e si giri il piano BM sino a che giunga nella posizione BP. In questa

rotazione la retta CD descrive l'angolo DCE. La grandezza di questo angolo non dipende già dalla posizione, in cui è stato preso il vertice C sullo spigolo AB. P. e. se è $AM \perp AB$, dunque anche $AP \perp AB$, sarà pure $MAP = DCE$; perchè? Questo angolo serve quindi a misurare il diedro e viene chiamato *angolo d'inclinazione* dei due piani. Modello!

Per costruire dunque l'angolo d'inclinazione di due piani, da un punto qualsivoglia della loro linea d'intersezione si conduca in ognuno dei due piani una retta perpendicolare ad essa.

Dalla definizione data dell'angolo d'inclinazione di due piani è chiaro che il piano d'inclinazione, cioè il piano condotto per i lati dell'angolo d'inclinazione è perpendicolare allo spigolo (§ 128). Inversamente: Se s' interseca un diedro mediante un piano perpendicolare allo spigolo, la sezione è l'angolo d'inclinazione delle due facce del diedro.

b) Se si sposta il piano MN (Fig. 143) parallelamente a sè stesso fino a che giunga nella posizione $M_1 N_1$, il suo angolo d'inclinazione verso il piano RS rimane invariato.

Piani paralleli formano con qualunque piano intersecante eguali angoli d'inclinazione.

Piani vicendevolmente normali.

§ 134. Definizione. Teoremi. *a)* Se l'angolo d'inclinazione di due piani è un retto, si dice che ognuno di essi è perpendicolare all'altro o che i due *piani sono vicendevolmente perpendicolari.*

b) Se RS è un piano perpendicolare ad MN (Fig. 153), per una qualunque rotazione di RS intorno alla retta AB, l'angolo d'inclinazione DCE aumenta o diminuisce. Da ciò segue:

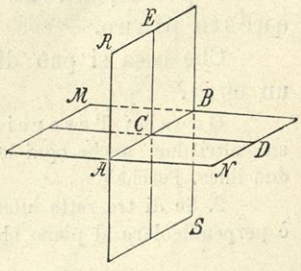

Fig. 153.

Da una retta in un piano non si può inalzare a questo che un solo piano normale.

c) Essendo $CE \perp AB$ e $CE \perp CD$, sarà $CE \perp MN$ (§ 128). Si dimostri che p. e. è anche $CD \perp RS$; quindi:

Se due piani sono vicendevolmente perpendicolari, ogni retta tirata in uno perpendicolarmente alla linea d'intersezione è normale all'altro piano.

Problema. Da un punto dato abbassare un piano normale ad un piano dato.

d) Si abbassi dal punto dato A (Fig. 154) la AB perpendicolare al piano dato MN. Qualunque piano, come PQ, RS ecc., guidato per AB corrisponde al problema, il quale sarà perciò indeterminato. Per dimostrare che è p. e. $RS \perp MN$, si costruisca l'angolo d'inclinazione dei due piani. Ora è $AB \perp BS$ nel piano RS; si tiri ancora $BC \perp BS$ nel piano MN e sarà ABC l'angolo d'inclinazione cercato, e precisamente $= 90°$, essendo per costruzione $AB \perp MN$; perciò:

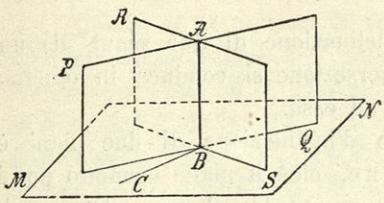

Fig. 154.

Se per una retta perpendicolare ad un piano si guida un piano qualsivoglia, questo riesce perpendicolare al primo. Inversamente:

e) Se due piani che s'intersecano sono perpendicolari ad un terzo, anche la loro linea d'intersezione è perpendicolare a questo piano.

Sieno dunque PQ ed RS i due piani perpendicolari ad MN ed AB la loro linea d'intersezione. Se dal piede B di questa linea s'innalza una retta perpendicolare al piano MN, essa deve coincidere con quella linea. Conduciamo ora per AB e BQ un piano; esso dev'essere perpendicolare a MN, cioè è lo stesso piano PQ. Egualmente si può dimostrare che il piano che passa per AB e BS coincide col piano RS. Perciò la normale AB è comune ai due piani; essa è quindi la loro linea d'intersezione.

f) Se di due piani paralleli uno è perpendicolare a un terzo piano, anche l'altro dev' essere perpendicolare a questo piano.

Che cosa si può dire di due piani, che sono perpendicolari a un terzo?

Quesiti d'esercizio. 1. Se di tre piani intersecantisi ognuno è normale agli altri due, anche ogni loro linea d'intersezione sarà perpendicolare alle altre due linee. Perchè?

2. Se di tre rette intersecantisi ognuna è perpendicolare alle altre due, essa è perpendicolare al piano che passa per esse. Perchè?

L'angolo solido.

§ 135. Definizioni. Una retta semilimitata, che rimanendo ferma alla sua estremità, si muove intorno al perimetro di un poligono, genera uno spazio illimitato da una sola parte, il quale dicesi *angolo solido.*

La retta mobile dicesi *retta generatrice* ed il poligono, intorno cui la retta scorre, si chiama *poligono direttivo.* Il punto fisso (Fig. 155) è detto *vertice;* esso non può giacere nel piano del poligono. Le super-

ficie piane descritte della retta mobile si dicono *facce*; le linee d'intersezione delle stesse, cioè OA, OB . . ., si chiamano *spigoli* dell'angolo solido. Gli angoli formati da due spigoli, p. e. AOB, BOC diconsi *angoli piani* o *facce* dell'angolo solido; gli angoli di due facce successive vengono detti *diedri* od *angoli* dell'angolo solido.

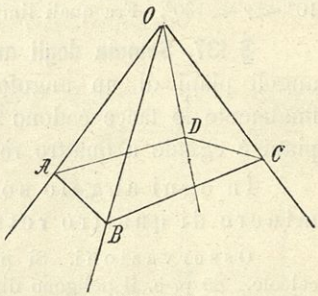

Fig. 155.

Il numero delle facce di un angolo solido è uguale a quello degli spigoli, e precisamente a quello dei lati o dei vertici del poligono direttivo. Secondo il numero delle facce o degli spigoli, l'angolo solido dicesi *angolo solido triedro* o *trilatero*, *tetraedro* o *quadrilatero* . . . *n-latero* o *di n lati*.

Un angolo solido si dice *equilatero*, se ha tutti gli angoli piani o tutte le facce eguali; si dice *equiangolo*, se ha tutti i diedri eguali; un angolo solido equilatero ed equiangolo si chiama *regolare*.

Per costruire in cartone modelli stereometrici noi ci serviamo delle *reti*. Una rete è una figura piana, che si può tagliar fuori e comporre poi assieme in modo da ottenere il modello domandato.

Quesiti d'esercizio. Costruire *a*) la rete di un triedro con angoli piani dati, *b*) la rete di un triedro equilatero, *c*) la rete di un angolo solido tetraedro. — In quali di questi casi l'angolo solido viene completamente determinato mediante la sua rete? Gli angoli solidi in *b*) e *c*) sono regolari?

§ 136. Relazioni fra le facce del triedro. *a)* Per formare colla rete un triedro (Fig. 156), si girano una verso l'altra le facce AOB e COD attorno agli spigoli OB ed OC in modo che gli spigoli OA ed OD vadano a coincidere (fuori del piano BOC). Affinchè ciò abbia luogo dev'essere $\beta < \alpha + \gamma$, anche se β è il maggiore degli angoli piani α, β, γ. Parimente si trova che è $\alpha < \beta + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$.

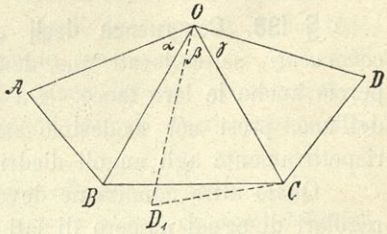

Fig. 156.

Si provi a costruire un triedro se è $\beta = \alpha + \gamma$.

b) Se β è il maggiore degli angoli piani del triedro e si gira la faccia COD attorno allo spigolo OC, sino a che coincida col piano BOC, allora sarà $BOD_1 = \beta - \gamma$. Se si gira analogamente la faccia AOB, lo spigolo OA deve cadere oltre OD_1; perciò $\alpha > \beta - \gamma$. (Del resto questa disuguaglianza si potrebbe derivare anche in via aritmetica della disuguaglianza $\alpha + \gamma > \beta$.) Parimente si trova $\gamma > \beta - \alpha$ e inoltre $\beta > \alpha - \gamma$, ovvero $\beta > \gamma - \alpha$. Ciò prova che:

In un triedro ogni angolo piano è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due.

Quale è il teorema analogo di planimetria?

Se è p. e. $\alpha = 60^0$, $\beta = 70^0$, dev'essere $\gamma < 60^0 + 70^0$ e $\gamma > 70^0 - 60^0$, cioè $10^0 < \gamma < 130^0$. Fra quali limiti giace l'angolo, se è $\beta = 96^c$, $\gamma = 114^0$?

§ 137. Somma degli angoli piani. Quanto più grandi diventano gli angoli piani di un angolo solido tanto più esso diventa ottuso, e se finalmente le facce cadono sopra un piano, la somma di tutti gli angoli piani è eguale a quattro retti; perciò:

In ogni angolo solido la somma degli angoli piani è minore di quattro retti.

Osservazioni. Si può pervenire a questo teorema anche mediante il calcolo. Se p. e. il poligono direttivo è un decagono (piano), la somma dei suoi angoli è eguale a $16\,R$. Ora il decagono forma colle facce dell'angolo solido 10 triangoli, la somma degli angoli dei quali è $= 20\,R$. Fra questi appartengono agli angoli delle basi più di $16\,R$; giacchè ogni due di essi formano col corrispondente angolo delle decagono un triedro, e perciò la loro somma sarà maggiore di quella degli angoli del decagono. Si conchiude che la somma degli angoli piani deve essere minore di $4\,R$.

Si potrebbe analogamente dimostrare il teorema, se l'angolo solido fosse di n lati.

2. Col mezzo di una rete noi possiamo facilmente persuaderci che il teorema testè dedotto vale in generale solo per angoli solidi a spigoli sporgenti in fuori, cioè per diedri concavi. Tuttavia in questo libro non si prenderanno mai in considerazione che angoli solidi, i quali osservati dall'interno, posseggono anche diedri convessi; perciò il teorema suesposto sarà valevole in tutti i casi.

Quesiti d'esercizio. 1. Qual' è il massimo valore, che può avere un angolo piano di un angolo solido regolare: *a*) triedro, *b*) tetraedro, *c*) di n lati?

2. Quanti angoli solidi regolari si possono formare con angoli piani *a*) di un triangolo equilatero, *b*) di un quadrato, *c*) di un pentagono regolare, *d*) di un esagono regolare?

§ 138. Congruenza degli angoli solidi. Due angoli solidi sono *congruenti,* se collocati uno dentro all'altro coincidono i loro spigoli e perciò anche le loro facce. Da ciò segue che gli angoli piani e diedri dell'uno, presi nel medesimo ordine, sono eguali agli angoli piani e rispettivamente agli angoli diedri dell'altro.

Quale altra condizione deve sussistere, affinchè due angoli solidi regolari di egual numero di lati sieno fra loro congruenti?

Il prisma.

§ 139. Genesi. *a)* Una retta illimitata, che scorre parallelamente a sè stessa lungo il perimetro di un poligono, genera uno spazio illimitato da due parti, che si chiama *spazio prismatico.* Nella fig. 157 si mostrino la retta generatrice e il poligono direttivo.

La porzione di uno spazio prismatico, compresa fra due piani paralleli, si chiama *prisma*.

b) Un prisma viene anche generato, movendo un poligono in modo che tutti i suoi vertici descrivano rette parallele. Nelle figure 157, 158 e 159 si mostrino il poligono generatore e le linee direttrici.

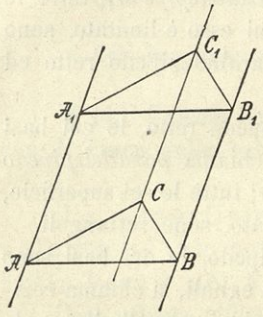

Fig. 157.

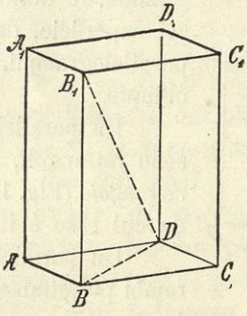

Fig. 158.

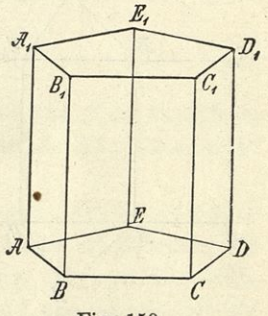

Fig. 159.

§ 140. Descrizione. Ogni prisma è un *poliedro,* cioè un corpo limitato soltanto da superficie piane. La somma di tutte le superficie, che limitano il prisma, si chiama *superficie* dello stesso.

I due poligoni, che *a*) risultano praticando nello spazio prismatico sezioni parallele o che *b*) sono la prima e l'ultima posizione del poligono generatore, si chiamano *basi* del prisma; esse sono poligoni congruenti in piani paralleli. Tutte le altre superficie, che limitano il prisma, si chiamano *facce laterali* e la loro somma è detta *superficie laterale (manto)* del prisma. Le facce laterali sono parallelogrammi; perchè?

Le linee d'intersezione delle facce laterali colle basi, oppure i lati delle basi, si dicono *spigoli* delle basi. Ogni due spigoli delle basi, che si trovano nella stessa faccia laterale, sono eguali e paralleli; perchè? — Le intersezioni d'ogni due facce laterali consecutive si chiamano *spigoli laterali.* Tutti gli spigoli laterali di un prisma sono eguali e paralleli; perchè?

La distanza delle due basi si chiama *altezza* del prisma.

Nelle fig. 157—159 si mostrino le basi, le facce laterali, gli spigoli delle basi, gli spigoli laterali, i vertici degli angoli solidi e si guidi l'altezza.

§ 141. Distinzioni e denominazioni. Secondo il numero delle facce laterali, il prisma si dice *trilatero, quadrilatero. . . . . .* di *n lati* o *n-latero.*

Conforme la disposizione degli spigoli laterali rispetto alle basi, i prismi possono essere *retti* ed *obliqui.* Un prisma dicesi retto od obliquo, secondo che gli spigoli laterali sono perpendicolari od obliqui

alle basi. Le facce laterali di un prisma retto sono rettangoli e perpendicolari alle basi; gli spigoli laterali sono eguali all'altezza; perchè?

Un prisma, che ha tutti gli spigoli eguali, si chiama *equilatero*. Un prisma retto, le cui basi sono poligoni regolari, dicesi *regolare*.

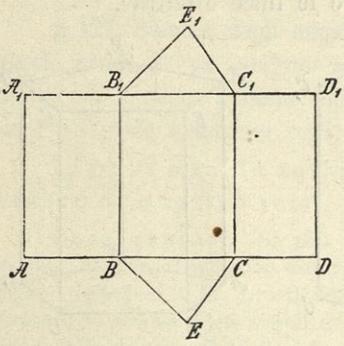

Fig. 160.

Un prisma, che ha per basi parallelogrammi, è detto *parallelepipedo*; tutte le sei superficie, da cui esso è limitato, sono parallelogrammi. Parallelepipedo retto ed obliquo.

Un parallelepipedo retto, le cui basi sono rettangoli, si chiama *parallelepipedo rettangolo* (Fig. 158); tutte le sei superficie, da cui esso è limitato, sono rettangoli.

Un parallelepipedo, le cui basi sono rombi perfettamente eguali, si chiama *romboedro*. Un parallelepipedo limitato da quadrati è detto *dado, cubo* od *esaedro*.

Quesiti d'esercizio. 1. Si espongano il numero e le specie delle superficie limitanti e degli angoli solidi, come pure il numero degli spigoli *a*) di un prisma trilatero ed equilatero, *b*) di un parallelepipedo retto, *c*) di un prisma pentilatero regolare, *d*) di un prisma di *n* lati. — Dopo alcuni esercizi fatti coi modelli e disegni, queste descrizioni possono venir fatte senza una diretta intuizione.

2. Si costruisca la rete *a*) di un prisma trilatero regolare, *b*) di un parallelepipedo rettangolo, *c*) di un cubo, *d*) di nn prisma esalatero regolare. — La fig. 160 è la rete di un prisma trilatero retto; $AB = BE$, $CD = CE$. — La fig. 162 è la rete per la superficie laterale del prisma trilatero obliquo (Fig. 161).

§ 142. Sezioni piane. Ogni sezione parallela alla base del prisma è un poligono congruente alla base; perchè?

Una sezione normale ad uno spigolo, risulta normale a tutti gli spigoli, e dicesi *sezione normale o trasversale* del prisma (*DEF* Fig. 161). In quali prismi la sezione normale è parallela alle basi? Se si guida un piano per due spigoli laterali non consecutivi, si ottiene una *sezione diagonale*, la quale è sempre un parallelogrammo. In un prisma si possono ottenere tante sezioni diagonali quante sono le diagonali di una base.

In un parallelepipedo ogni diagonale di una sezione diagonale è detta *diagonale* del parallelepipedo; essa è la retta, che unisce due vertici di angoli solidi, che non giacciono nella stessa faccia che limita il corpo (vertici opposti). Un parallelepipedo ha quattro diagonali.

Problema. Calcolare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, date la lunghezza, la larghezza e l'altezza.

Nel triangolo rettangolo BCD (Fig. 158) si calcola prima $\overline{BD}^2$, poscia dal triangolo rettangolo B_1BD si avrà la diagonale cercata. Si eseguisca il calcolo per valori speciali delle dimensioni indicate ed anche in generale. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Quesiti d'esercizio. 1. $a = 1\,cm$, $b = 1{\cdot}4\,cm$, $c = 3{\cdot}5\,cm$; $d = ?$

2. Qual' è la diagonale di un cubo, il cui spigolo è a?

a) $a = 3\,cm$, *b*) $a = 1\,m$.

3. Calcolare lo spigolo di un cubo, data la diagonale d.

a) $d = 12\,cm$, *b*) $d = 2\,m$.

§ 143. Calcolo della superficie. Se indichiamo con S la superficie, con B l'area della base e con M la superficie laterale del prisma, sarà:

$$S = 2B + M.$$

La superficie laterale di un prisma retto è equivalente ad un rettangolo, che ha per base il perimetro della base e per altezza quella del prisma. $M = ph$ (Fig. 160).

Nel prisma obliquo (Fig. 161) indicando con l uno spigolo laterale con a, b, c, . . . i lati di una sezione normale, sarà $M = al + bl + cl + \ldots = (a + b + c + \ldots)\,l$, perciò:

La superficie laterale di un prisma obliquo è equivalente ad un rettangolo, che ha per base il perimetro di una sezione normale e per altezza lo spigolo laterale del prisma.

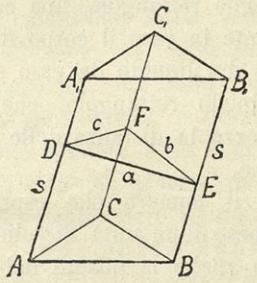

Fig. 161.

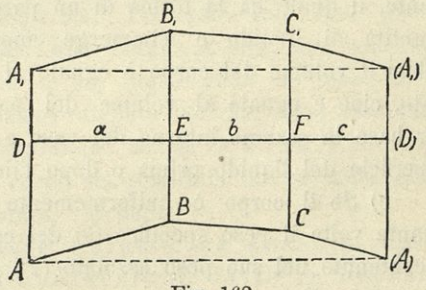

Fig. 162.

La verità di questo teorema risulta anche se si considera la rete che corrisponde alla superficie laterale del prisma obliquo, trilatero o di n lati (Fig. 162).

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie di un cubo dato lo spigolo a.

a) $a = 3\,dm$, *b*) $a = 2{\cdot}135\,m$, *c*) $a = 0{\cdot}324\,m$.

2. Data la diagonale d di un cubo, calcolare la superficie.

a) $d = 16\,cm$, *b*) $d = 12{\cdot}64\,m$, *c*) $d = 4{\cdot}23\,m$.

3. Lo spigolo di un cubo è di $6\,cm$; calcolare la superficie.

4. Data la superficie S di un cubo, calcolare uno spigolo.

a) $S = 8{\cdot}64\,m^2$, *b*) $S = 1\,m^2$.

5. Se la superficie di un cubo è di $3\ dm^2$, qual'è uno spigolo e la diagonale?

6. Calcolare α) la diagonale, β) la superficie di un parallelepipedo rettangolo, date le dimensioni a, b, c (lunghezza, larghezza, altezza). P. e. $a = 1{\cdot}6\ m$, $b = 0{\cdot}9\ m$, $c = 0{\cdot}4\ m$.

7. Con $1\ m^2$ di lamiera si vuol formare un vaso aperto superiormente di forma di un parallelepipedo rettangolo. Quale sarà la sua altezza, se dev'essere lungo $0{\cdot}5\ m$ e largo $0{\cdot}35\ m$?

8. Calcolare la superficie di un prisma regolare α) trilatero, β) quadrilatero, γ) esalatero, se lo spigolo della base è $= a$, lo spigolo laterale è $= l$. *a)* $a = 4\ dm$, $l = 6\ dm$; *b)* $a = l = 1\ m$.

§ 144. Determinazione del volume: definizioni. La grandezza dello spazio occupato da un corpo si dice la sua capacità o il suo *volume*. Per *unità di volume* si prende un dado, il lato del quale è eguale all'unità di lunghezza. Secondo che l'unità che si sceglie è $1\ m$, $1\ dm$, $1\ cm$ ecc., il volume del dado corrispondente si chiama 1 *metro cubo*, 1 *decimetro cubo*, 1 *centimetro cubo* ecc. Determinare la capacità di un corpo, o misurare il suo volume, vuol dire cercare quante volte l'unità di volume è contenuta nel corpo dato. Questo numero si chiama *misura* del volume dato.

§ 145. Misurazione empirica del volume. *a)* Si determina la capacità di un recipiente vuoto col riempirlo di un liquido, che poscia si versa in un vaso provveduto di una scala volumetrica.

b) Per misurare il volume di un corpo solido, si versa in un recipiente, il quale ha la forma di un parallelepipedo rettangolo, una certa quantità di liquido e s'immerge completamente in esso il corpo dato. Allora il volume del corpo è eguale al volume del liquido da esso spostato, cioè è eguale al volume del parallelepipedo rettangolo, che ha per base la sezione interna del vaso e per altezza la distanza delle due superficie del liquido prima e dopo l'immersione.

c) Se il corpo è uniformemente denso, il numero che esprime quante volte il peso specifico (s) del corpo (il peso di un'unità di volume) è contenuto nel suo peso assoluto (P) esprime anche la misura del volume, $V = \frac{P}{s}$. P. e. $1\ cm^3$ di ferro fuso pesa $7{\cdot}2\ g$. Per ottenere dunque il volume, espresso in centimetri cubi, di $1\ kg = 1000\ g$ di ferro fuso, si divide 1000 per 7·2, cioè $V = 138{\cdot}9\ cm^3$. Si calcoli parimente il volume di un chilogrammo di mercurio ($s = 13{\cdot}59$).

Còmpito della *geometria* è d'insegnare il modo di calcolare il volume di un corpo, conoscendo i numeri che esprimono le misure di quelle rette, superficie ecc., dalle quali esso dipende. Applicare immediatamente l'unità di volume nello spazio dato, sino a che esso sia completamente misurato, il più delle volte è impossibile.

§ 146. Il principio di Cavalieri. Se si collocano sopra un piano MN (Fig. 163) un parallelepipedo retto ed uno obliquo di base congruente e di eguale altezza, le due basi superiori giaceranno in un piano parallelo ad MN, ed ogni piano, come PQ, condotto parallelamente ad MN taglierà i due parallelepipedi in parallelogrammi congruenti; perchè?

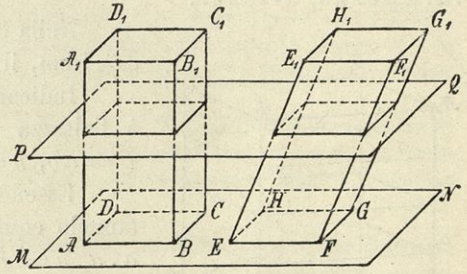

Fig. 163.

I due parallelepipedi hanno volumi eguali e di ciò potremo persuaderci nel seguente modo: Tagliamo fuori da una lamiera sottile delle figure congruenti ad $ABCD$ e collochiamole in numero conveniente una sopra l'altra in modo da formare il primo parallelepipedo. Se ora noi spostiamo le piastre così che $ABCD$ venga portata in $EFGH$ e due serie di vertici si dispongano lungo le rette EE_1 ed FF_1, otteniamo il secondo parallelepipedo. (Si possono trascurare le piccole scabrosità a guisa di scala delle facce laterali inclinate, giacchè queste riescono tanto più piccole quanto più sottile è la lamiera.) Dunque i due parallelepipedi hanno volume eguale, che è precisamente quello del materiale della lamiera adoperata. Possiamo fare una identica conclusione se confrontiamo altri due corpi, le cui basi non siano congruenti, ma solo equivalenti, e se, imprimendo ad uno di essi uno spostamento parallelo, le sezioni ottenute nei due corpi mediante il piano segante sono equivalenti qualunque ne sia la forma. Allora basta solo che una piastra del primo corpo sia sostituita da un' altra piastra equivalente, però di un' altra forma. Modello!

Due corpi hanno eguale volume, se possono essere disposti in modo che ogni due sezioni, fatte in entrambi parallelamente a un piano comune, sieno equivalenti. (Principio di Cavalieri.)

Da ciò segue che: Prismi di base equivalente e di eguale altezza sono equivalenti.

Perciò il volume di un prisma qualunque si trova calcolando quello di un parallelepipedo rettangolo di base equivalente e di eguale altezza.

§ 147. Volume del parallelepipedo rettangolo. La lunghezza di un parallelepipedo rettangolo sia di a, la larghezza di b, l'altezza di c unità. Mediante sezioni parallele alle basi si può scomporre il parallelepipedo in c piastre, le cui altezze sono eguali all'unità di lunghezza.

Mediante sezioni parallele alle facce laterali ogni piastra si può scomporre in tante unità di volume quante sono quelle di superficie contenute nella base. Il numero di queste è ab, perciò il volume è $V = abc$.

Il volume di un parallelepipedo rettangolo si trova col moltiplicare fra loro (le misure della) lunghezza, larghezza, altezza.

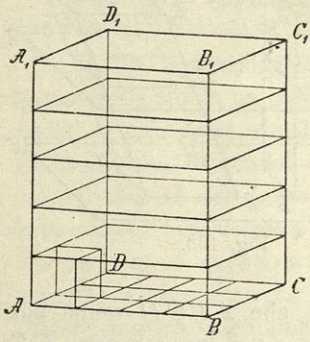

Fig. 164.

Nella fig. 164 se è $a = 4\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, il volume sarà $V = 60\,cm^3$.

Indicando con B l'area della base, con h l'altezza del parallelepipedo, siccome è $B = ab$, $h = c$, sarà $V = Bh$.

Essendo il cubo un parallelepipedo rettangolo equilatero, il suo volume sarà $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, dove a è lo spigolo dello stesso.

Il volume di un dado o di un cubo si trova coll'elevare alla terza potenza la misura dello spigolo, o più brevemente coll'elevare al cubo uno spigolo.

Osservazioni. 1. Come si possono spiegare ora le espressioni „il cubo di un numero“ e le indicazioni $1\,m^3$, $1\,dm^3$, $1\,cm^3$ ecc. invece di un metro cubo, un decimetro cubo, un centimetro cubo?

2. Col mezzo dell'ultimo teorema si trova:

$$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1.000.000\,cm^3 = 1.000,000.000\,mm^3$$
$$1\,dm^3 = \quad 1.000\,cm^3 = \quad 1,000.000\,mm^3 \text{ ecc.}$$

L'unità di misura di capacità per i liquidi è $1\,dm^3 = 1\,l$ (litro); $100\,l = 1\,hl$ (ettolitro).

3. Da $V = a^3$ segue $a = \sqrt[3]{V}$. Si esprima con parole. — Radice terza = radice cubica.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare il volume di un cubo dato lo spigolo a.

a) $a = 12\,cm$, *b)* $a = 0{\cdot}34\,m$, *c)* $a = 1{\cdot}74 \ldots m$.

2. Calcolare il volume di un cubo data la diagonale d.

Avviamento. $a^2 = \frac{d^2}{3}$, $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $V = a^2 \cdot a = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$.

a) $d = 6\,cm$, *b)* $d = 1{\cdot}26\,m$, *c)* $d = 0{\cdot}369 \ldots m$.

3. Calcolare il volume di un cubo data la superficie S.

Avviamento. $a^2 = \frac{S}{6}$, $a = \frac{\sqrt{6S}}{6}$, $V = \frac{S\sqrt{6S}}{36}$.

a) $S = 54\,cm^2$, *b)* $S = 1\,m^2$, *c)* $S = 0{\cdot}3246\,m^2$.

4. Quanto pesa un cubo di marmo, che ha lo spigolo di $62\,cm$? (Peso spec. $= 2{\cdot}84$.)

5. Qual' è lo spigolo di un cubo, il cui volume è $= V$?

a) $V = 1728\,cm^3$, *b)* $V = 5{\cdot}237\,m^3$.

6. Dato il volume V di un cubo, si calcoli la sua superficie.

a) $V = 9{\cdot}261\,dm^3$, *b)* $V = 1\,hl$, *c)* $V = 0{\cdot}379\,m^3$.

7. Dato lo spigolo a di un cubo, calcolare quello di un cubo doppio *a)* $a = 1\,dm$, *b)* $a = 0{\cdot}214\,m$.

8. Un cubo di piombo pesa $1\,kg$; calcolare lo spigolo del cubo (peso specif. $s = 11{\cdot}35$).

9. Si misurino o si stimino ad occhio le dimensioni di un corpo o di uno spazio, che ha la forma di un parallelepipedo rettangolo (p. e. di una stanza, di un armadio, della tavola nera ecc.) e se ne calcoli poscia il volume.

10. Quanti ettolitri contiene una cassa lunga $3\,m$, larga $2\,m$ ed alta $1{\cdot}2\,m$?

11. Un modello in legno di un parallelepipedo rettangolo ha il peso P e le dimensioni a, b, c; qual' è il peso specifico del legno? P. e. $P = 79{\cdot}04\,g$, $a = 52\,mm$, $b = 38\,mm$, $c = 80\,mm$.

12. In un recipiente lungo $64\,cm$ e largo $25\,cm$, che ha la forma di un parallelepipedo rettangolo e che è solo in parte riempito d'acqua, si pone una pietra di forma irregolare, e con ciò l'acqua ascende di $35\,cm$ e copre la pietra. Qual' è il volume della pietra?

§ 148. Volume del prisma in generale. Se B è l'area della base ed h l'altezza di un prisma, il suo volume sarà $V = Bh$ e ciò perchè giusta il § 146, esso è eguale al volume di un parallelepipedo rettangolo, di cui la base è B e l'altezza è h.

Il volume di un prisma si trova col moltiplicare la misura della superficie della base per la misura dell'altezza o più brevemente è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

Per un secondo prisma si trova $V_1 = B_1 h_1$ e quindi:

in generale $V : V_1 = Bh : B_1 h_1$;
per $B = B_1$, $V : V_1 = h : h_1$;
per $h = h_1$, $V : V_1 = B : B_1$.

Si esprimano queste tre proporzioni in forma di teorema.

Se in un prisma è $B = 2{\cdot}14\,m^2 = 214\,dm^2$, $h = 0{\cdot}7\,m = 7\,dm$, sarà $V = (214 \times 7)\,dm^3 = 1{\cdot}498\,dm^3 = 1{\cdot}498\,m^3$. Si ottiene lo stesso risultato col seguente calcolo: $V = (2{\cdot}14 \times 0{\cdot}7)\,m^3 = 1{\cdot}498\,m^3$. In questo modo si può persuadersi che la formola $V = Bh$ può essere direttamente adoperata per qualunque prisma, anche se B ed h non sono numeri interi.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare il volume di un prisma date la base B e l'altezza h.

a) $B = 1\,m^2$, $h = 4\,dm$; *b)* $B = 0{\cdot}2\,m^2$, $h = 1{\cdot}3\,m$.

2. Qual' è l'altezza di un prisma, di cui la base è di $45\,cm^2$, e il volume è di $1\,dm^3$?

3. Qual' è la base di un prisma, di cui l'altezza è $h = 35\,cm$ e il volume è $V = 45{\cdot}5\,dm^3$?

4. Calcolare il volume di un prisma trilatero regolare, dati lo spigolo della base a e l'altezza h.

a) $a = 1\,dm$, $h = 2{\cdot}4\,dm$; *b)* $a = h = 8\,cm$.

5. Qual' è lo spigolo della base di un prisma esalatero regolare, se l'altezza è di $12\,cm$, e il volume è di $124{\cdot}7\,cm^3$?

6. Il tetto di una casa ha la forma di un prisma trilatero con una faccia orizzontale lunga $8{\cdot}4\,m$, larga $5{\cdot}2\,m$ e la cui distanza dal comignolo è di $3\,m$. Quale è il volume di questo prisma trilatero?

7. La sezione di una muraglia, lunga $42\,m$ ed alta $3{\cdot}5\,m$, ha la forma di un trapezio coi lati paralleli $a = 1\,m$, $b = 0{\cdot}64\,m$. Qual' è il volume della muraglia, e quanto è stato pagato $1\,m^3$ se per fabbricarla si spesero *C.* $1024{\cdot}59$?

8. Un prisma esalatero e regolare, di cui lo spigolo della base è a e l'altezza è h, viene scomposto mediante una sezione diagonale in un prisma trilatero ed in uno pentilatero. Calcolare le superficie ed i volumi di questi due prismi.

Il cilindro.

§ 149. Genesi. *a)* Una retta che scorre parallelamente a sè stessa lungo la periferia di un cerchio genera uno *spazio cilindrico* (Fig. 165). Retta generatrice, cerchio direttivo.

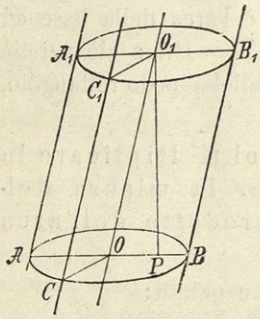

Fig. 165.

La superficie descritta dalla retta generatrice dicesi *superficie cilindrica*; la retta $O\,O_1$, guidata pel centro del cerchio direttivo parallelamente alla retta generatrice, si chiama *asse* della superficie cilindrica.

Ogni sezione fatta nello spazio cilindrico mediante un piano parallelo al cerchio direttivo è un cerchio, il centro del quale (O_1) è in pari tempo il punto, in cui l'asse interseca il piano segante. Essendo $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1$ . . . le porzioni della generatrice comprese dai due piani paralleli, quando essa si trova in diverse posizioni, i quadrilateri $A\,O\,O_1\,A_1$, $B\,O\,O_1\,B_1$, $C\,O\,O_1\,C_1$ . . . sono parallelogrammi; perchè? Perciò $A_1\,O_1 = A\,O$, $B_1\,O_1 = B\,O$, $C_1\,O_1 = C\,O$ . . . ed anche $A_1\,O_1 = B_1\,O_1 = C_1\,O_1 = \ldots$

La porzione dello spazio cilindrico, compresa fra due piani seganti paralleli al piano del cerchio direttivo, chiamasi *cilindro* (più esattamente *cilindro circolare*).

b) Un cilindro viene anche generato, movendo una superficie circolare parallelamente a sè stessa in modo che il suo centro descriva una retta. Cerchio generatore, retta direttrice od asse.

Si confronti la genesi del prisma con quella del cilindro.

§ 150. Descrizione. La superficie del cilindro consta delle due *basi*, che sono cerchi perfettamente eguali in piani paralleli e della superficie curva laterale, che si chiama *superficie convessa (manto)*. La retta, che unisce i centri delle due basi, dicesi *asse*; la distanza delle due basi $(O_1\,P)$ *altezza* del cilindro.

La porzione della retta generatrice compresa fra le due basi è detta *lato* del cilindro. Ogni piano condotto per l'asse interseca la super-

ficie convessa in due lati. Tutti i lati e l'asse del cilindro sono fra loro eguali e paralleli.

§ 151. Distinzione e denominazione. Secondo che l'asse è normale od obliquo alla base, il cilindro si dice *retto* od *obliquo*.

Nel cilindro retto (Fig. 166) l'asse è in pari tempo altezza. Siccome il cilindro retto si può immaginare generato anche dalla rotazione di un rettangolo attorno ad un lato, così esso viene annoverato fra i corpi di rotazione.

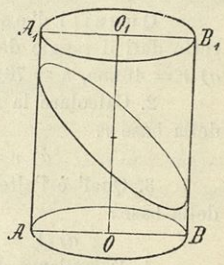

Fig. 166.

Un cilindro retto, nel quale il diametro della base è eguale all'altezza, si chiama *cilindro equilatero*.

§ 152. Sezioni piane. Ogni sezione parallela alla base è congruente alla stessa; perciò essa è anche un *cerchio*. Qualunque altra sezione che incontra tutti i tali del cilindro è un'*ellisse*.

La figura, che si ottiene intersecando il cilindro mediante un piano, che passa per l'asse, chiamasi *sezione assiale*; essa è sempre un parallelogrammo; perchè? Tutte le sezioni assiali del cilindro obliquo (ad eccezione di una sola) sono parallelogrammi obliquangoli, quelle del cilindro retto sono rettangoli e quelle del cilindro equilatero sono quadrati.

§ 153. Calcolo della superficie. $S = 2B + M$.

Se c'immaginiamo la superficie convessa di un cilindro retto, tagliata lungo un lato e svolta sopra un piano, otteniamo un rettangolo, che ha per base la periferia della base del cilindro e per altezza quella dello stesso (Fig. 167), perciò si avrà $M = 2r\pi h$; quindi:

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi\,(r + h).$$

Siccome nel cilindro equilatero è $h = 2r$, così $S = 6r^2\pi$.

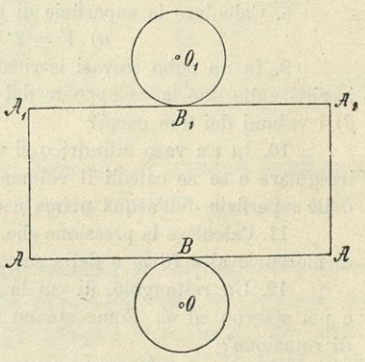

Fig. 167.

In questo stadio d'istruzione no nsi può dar regole pel calcolo della superficie convessa di un cilindro obliquo.

§ 154. Calcolo del volume. Se un cilindro ed un prisma di base equivalente (B) e di eguale altezza (h), posano sullo stesso piano MN, ogni due sezioni fatte nei due corpi mediante un piano parallelo ad MN sono equivalenti ($= B$); perciò i corpi sono equivalenti, quindi:

Il volume di un cilindro si trova col moltiplicare la misura della superficie della base per la misura dell'altezza o più brevemente: è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

$$V = Bh = r^2 \pi h.$$

Pel cilindro equilatero è: $V = 2r^3\pi$.

Per un secondo cilindro è: $V_1 = r_1{}^2 \pi h_1$; perciò:

in generale $V : V_1 = r^2 h : r_1{}^2 h_1$;

per $h = h_1$, $V : V_1 = r^2 : r_1{}^2$,

per $r = r_1$, $V : V_1 = h : h_1$. Si esprima con parole.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie e il volume di un cilindro retto dati il raggio della base r e l'altezza h.

a) $r = 46\,mm$, $h = 76\,mm$; *b)* $r = 13\,cm$, $h = 25{\cdot}7\,cm$; *c)* $r = 0{\cdot}23\,m$, $h = 4{\cdot}25\,m$.

2. Calcolare la superficie e il volume di un cilindro equilatero dato il raggio della base r.

a) $r = 3\,cm$, *b)* $r = 1{\cdot}2\,dm$, *c)* $r = 0{\cdot}253 \ldots m$.

3. Qual' è l'altezza di un cilindro retto, di cui sono dati il volume e l'area della base?

a) $V = 78\,cm^3$, $B = 26\,cm^2$; *b)* $V = 1\,m^3$, $B = 1{\cdot}25\,m^2$.

4. Date l'area della base e l'altezza di un cilindro retto, calcolare la superficie e il volume. $B = 24\,cm^2$, $h = 5\,cm$.

5. Calcolare l'altezza di un cilindro equilatero data la superficie.

a) $S = 10\,m^2$, *b)* $S = 0{\cdot}188496\,m^2$.

6. Calcolare il volume di un cilindro equilatero data la superficie.

a) $S = 1\,m^2$, *b)* $S = 15{\cdot}26\,m^2$.

7. Calcolare il raggio della base di un cilindro equilatero se ne è dato il volume.

a) $V = 1\,m^3$, *b)* $V = 235\,cm^3$.

8. Calcolare la superficie di un cilindro equilatero se ne è dato il volume.

a) $V = 2{\cdot}4\,dm^3$, *b)* $V = 3478\,cm^3$.

9. In un cubo trovasi iscritto un cilindro, cioè le basi del cilindro sono cerchi iscritti nelle due facce opposte del cubo. Come stanno fra loro α) le superficie β) i volumi dei due corpi?

10. In un vaso cilindrico si versi dell'acqua, vi si immerga un corpo di forma irregolare e se ne calcoli il volume, se sono dati il diametro del vaso e la distanza delle superficie dell'acqua prima e dopo l'immersione.

11. Calcolare la pressione che esercita sul fondo una colonna verticale cilindrica di mercurio alta $76\,cm$ e della sezione di $1\,cm^2$. (Peso sp. 13·59.).

12. Un rettangolo, di cui la base è b e l'altezza è a, rota prima attorno a b e poi attorno ad a. Come stanno fra loro α) le superficie, β) i volumi dei due corpi di rotazione?

13. Quale dev'essere il diametro interno di un vaso cilindrico alto $18\,cm$, perchè contenga $1\,l$?

14. In un sottile tubo cilindrico di vetro si trova una colonnetta di mercurio lunga $47\,mm$ e che pesa $585{\cdot}5\,mg$. Qual'è il diametro interno del cannello, se il peso specif. del mercurio è 13·59?

15. Un cilindro è circoscritto ad un cubo, cioè le basi del cilindro sono cerchi circoscritti alle due facce opposte del cubo. Come stanno fra loro α) le superficie, β) i volumi dei due corpi?

16. Ad un prisma trilatero regolare, di cui lo spigolo della base è a e l'altezza è h, trovasi circoscritto un cilindro. Qual'è il volume di questo cilindro? $a = 42\,cm$, $h = 55\,cm$.

17. Calcolare la superficie ed il volume di un tubo cilindrico retto, di cui sono dati i raggi della periferia esterna ed interna e la lunghezza del tubo.

Avviamento. $S = 2(R^2 - r^2)\pi + 2R\pi h + 2r\pi h = 2\pi[(R^2 - r^2) + Rh + rh] = 2\pi[(R+r)(R-r) + (R+r)h] = 2\pi(R+r)(R-r+h)$. P. e. $R = 12\,cm$, $r = 9\,cm$, $h = 5\,m$.

18. Un pozzo di forma cilindrica della profondità di $6\,m$ fu circondato da una muraglia grossa $4\,dm$ e il cui diametro interno misura ancora $2{\cdot}2\,m$. Si domanda a quanto ascese la spesa di costruzione, se per estrarre $1\,m^3$ di terreno si sono spese in media $C.\,6{\cdot}4$, calcolando l'opera di muratore a $C.\,13$ al m^3?

La piramide e il tronco di piramide.

§ 155. Genesi. Descrizione. Se si taglia un angolo solido con un piano che passi attraverso a tutti gli spigoli, le facce ed il piano segante limitano un poliedro, che si chiama *piramide* (Fig. 168). Per questo motivo l'angolo solido vien detto anche *spazio piramidale*.

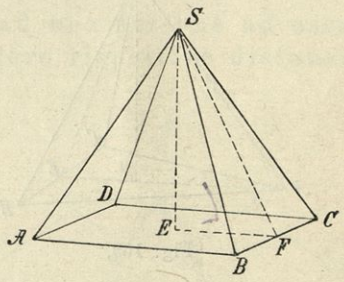

Fig. 168.

Dalla descrizione del prisma si spiega senz'altro il significato delle espressioni: *Base, facce laterali, superficie laterale (manto), spigoli della base, spigoli laterali* della piramide.

Le facce laterali sono sempre triangoli; gli angoli solidi alla base sono sempre triedri. Il punto d'intersezione di tutti gli spigoli laterali si chiama *vertice*; la normale abbassata dal vertice alla base dicesi *altezza* della piramide.

§ 156. Distinzione e denominazione. Secondo il numero degli spigoli laterali, la piramide si dice *trilatera, quadrilatera . . . di n lati* o *n-latera*.

Secondo la lunghezza degli spigoli laterali si distinguono *piramidi a spigoli laterali eguali* (dette anche *piramidi rette* od *isosceli*) ed a *spigoli laterali disuguali* (dette *piramidi oblique o scalene*). Se tutti gli spigoli laterali di una piramide sono eguali, i vertici della base distano egualmente dal piede dell'altezza.

Perciò la base di una piramide a spigoli laterali eguali è un poligono iscritto in un cerchio, il centro del quale coincide col piede dell'altezza. Le facce laterali sono triangoli isosceli.

Una piramide, nella quale gli spigoli laterali sono eguali, si dice *regolare*, se la base è un poligono regolare. In questa piramide le facce laterali sono triangoli isosceli congruenti e l'angolo solido al vertice è regolare.

Una piramide, che ha tutti gli spigoli eguali, si chiama *piramide equilatera*. Siccome gli spigoli laterali sono eguali, così la base è un poligono iscritto in un cerchio, e siccome anche la base è equilatera, così essa è un poligono regolare. Perciò ogni piramide equilatera è regolare. Le facce laterali della piramide equilatera sono triangoli equilateri congruenti. Risulta dunque che le piramidi equilatere possono essere soltanto trilatere, quadrilatere e pentilatere; perchè?

La piramide trilatera ed equilatera si chiama anche *tetraedro* (Fig. 169); *l'ottaedro* (Fig. 182) è composto di due piramidi quadrilatere ed equilatere.

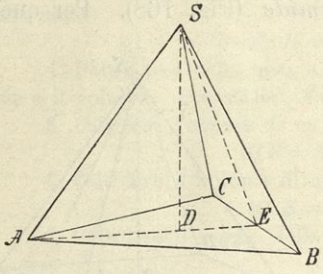

Fig. 169.

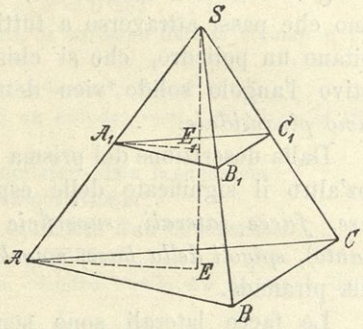

Fig. 170.

§ 157. Sezioni piane. Il tronco di piramide. *a*) Se si interseca una piramide con un piano, che passa per due spigoli laterali non consecutivi, si ottiene una *sezione diagonale*, la quale è un triangolo. Ogni piramide quadrilatera o di n lati si può scomporre, con sezioni diagonali, in piramidi trilatere di eguale altezza.

b) Ogni sezione parallela alla base di una piramide è un poligono simile alla base. Se $ABC\ldots$ (Fig. 170) è la base ed $A_1B_1C_1\ldots$ è una sezione ottenuta mediante un piano ad essa parallelo, sarà:

$$\sphericalangle ABC = A_1B_1C_1,\quad \sphericalangle BCA = B_1C_1A_1\ \ldots \text{ (perchè?)}$$

Siccome il $\triangle ABS \sim \triangle A_1B_1S$, il $\triangle BCS \sim \triangle B_1C_1S\ldots$, così si avrà $SA : SA_1 = AB : A_1B_1 = SB : SB_1 = BC : B_1C_1 = \ldots$; dunque

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1 = \ldots$$

I due poligoni $ABC\ldots$ e $A_1B_1C_1\ldots$ hanno gli angoli rispettivamente eguali e i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili.

Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, si ottengono due poliedri, cioè il *tronco di piramide* e la *piramide comple-*

mentare. Il tronco di piramide è la porzione della piramide compresa fra la base e il piano segante parallelo. I poligoni, che giacciono nei piani paralleli, si chiamano *basi*, e la loro distanza (EE_1) *altezza* del tronco di piramide. Le basi sono poligoni simili, le facce laterali trapezi.

Se la piramide intera ha gli spigoli laterali eguali, li dovranno avere eguali anche la piramide complementare ed il tronco di piramide. Se la piramide intera è regolare, anche il tronco corrispondente sarà *regolare.*

c) Si conduca $SE \perp ABC$ (Fig. 170) e sarà il $\triangle AES \sim \triangle A_1E_1S$; perciò $SE : SE_1 = SA : SA_1 = AB : A_1B_1$ dunque anche $\overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{SE}^2 : \overline{SE_1}^2$; ed essendo i poligoni $ABC\ldots, A_1B_1C_1\ldots$ simili, giusta il § 118 si avrà

$$ABC\ldots : A_1B_1C_1 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{SE}^2 : \overline{SE_1}^2.$$

La base di una piramide sta ad una sezione ad essa parallela come i quadrati delle loro rispettive distanze dal vertice.

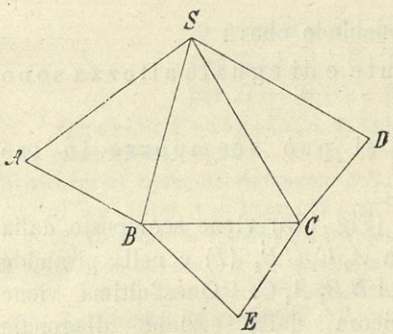

Fig. 171.

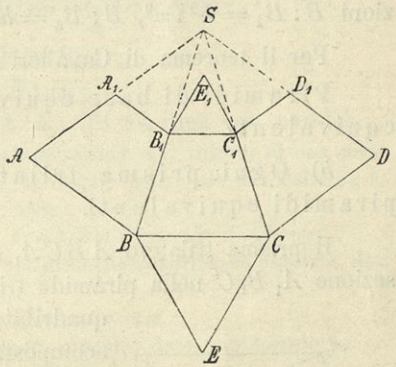

Fig. 172.

Quesiti d'esercizio. 1. S'indichino il numero, le specie delle superficie limitanti e degli angoli solidi, nonchè il numero degli spigoli dei seguenti corpi: *a)* di una piramide trilatera, *b)* di una piramide di n lati, *c)* di una piramide quadrilatera ed equilatera, *d)* di una piramide pentilatera a spigoli laterali eguali, *e)* di un tronco di piramide trilatera a spigoli laterali eguali, *f)* di un tronco di piramide di n lati.

2. Si costruisca la rete *a)* di un tetraedro, *b)* di una piramide quadrilatera regolare, *c)* di un tronco di piramide trilatera, *d)* di un tronco di piramide quadrilatera regolare. La fig. 171 è la rete di una piramide trilatera; la fig. 172 è la rete di un tronco di piramide trilatera regolare.

3. Si divida l'altezza h di una piramide, di cui la base è B, in tre parti eguali e per i punti di divisione si guidino dei piani seganti paralleli alla base e si calcolino le aree delle due sezioni. $B = 9\ cm^2$.

4. In una piramide, di cui la base è B, l'altezza è h ed una sezione parallela alla base è *a)* $= \frac{1}{2}B$, *b)* $= \frac{1}{10}B$, a quale distanza dal vertice è stato condotto il piano segante?

§ 158. Calcolo della superficie. Per la superficie di una piramide vale la formola: $S = B + M$.

In una piramide di n lati regolare è $M = n\frac{a\,k}{2}$ dove a indica lo spigolo della base e k l'altezza di una faccia laterale (altezza laterale). Se ora indichiamo con p il perimetro della base, essendo $p = n\,a$, sarà $M = \frac{p\,k}{2}$. (Si esprima con parole.)

§ 159. Calcolo del volume. *a)* Se due piramidi, di base equivalente (B) e di eguale altezza (h), posano sullo stesso piano MN, ogni due sezioni fatte nei due corpi con un piano parallelo ad MN sono equivalenti. Infatti il piano segante deve avere distanze eguali (x) dai vertici delle piramidi; perciò le sezioni B_1 e B_2 risultano equivalenti dalle proporzioni $B : B_1 = h^2 : x^2$, $B : B_2 = h^2 : x^2$.

Per il teorema di Cavalieri si conchiude che:

Piramidi di base equivalente e di eguale altezza sono equivalenti.

b) Ogni prisma trilatero si può scomporre in tre piramidi equivalenti.

Il prisma trilatero $ABCA_1B_1C_1$ (Fig. 173) viene scomposto dalla sezione A_1B_1C nella piramide trilatera $A_1C_1CB_1$ (I) e nella piramide quadrilatera ABB_1A_1C. Quest'ultima viene scomposta ancora dalla sezione diagonale AB_1C nelle piramidi trilatere AA_1B_1C (II) ed ABB_1C (III). Le piramidi I e II sono equivalenti, perchè hanno basi congruenti, cioè $A_1C_1C \cong AA_1C$ ed altezza comune, che è la normale abbassata dal vertice comune B_1 sul piano ACC_1A_1. Anche le piramidi II e III sono equivalenti, perchè hanno basi congruenti, cioè $AA_1B_1 \cong ABB_1$ ed altezza comune, che è la normale abbassata dal vertice comune C sul piano ABB_1A_1. Siccome le tre piramidi sono fra loro equivalenti, ognuna sarà la terza parte del prisma trilatero. Se indichiamo con B l'area della base ABC e con h l'altezza del prisma trilatero, il suo volume sarà $= Bh$. La

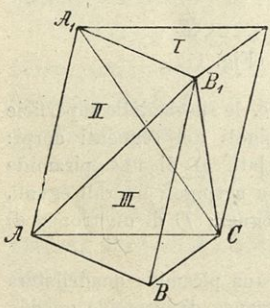

Fig. 173.

piramide $ABCB_1$ ha anche la base B e l'altezza h, perciò dal suesposto è chiaro che il suo volume sarà $\frac{Bh}{3}$; dunque:

Il volume di una piramide trilatera si trova col moltiplicare la (misura della) superficie della base per la (misura della) altezza e col dividere il prodotto per 3.

$$V = \frac{Bh}{3} = B \cdot \frac{h}{3} = \frac{B}{3} \cdot h; \quad B = \frac{3V}{h}; \quad h = \frac{3V}{B}.$$

c) Una piramide n-latera, che ha la base B e l'altezza h, è per quanto è stato detto in *a)*, equivalente ad una piramide trilatera, della quale la base è B e l'altezza è h. Per ognuna delle due piramidi dev'essere quindi $V = \frac{Bh}{3}$.

Il volume di una piramide qualunque è eguale alla terza parte del prodotto della (misura della) superficie della base per la (misura della) altezza.

Per una seconda piramide si ha $V_1 = \frac{B_1 h_1}{3}$; perciò:

in generale $V : V_1 = Bh : B_1 h_1$;
per $h : h_1$, $V : V_1 = B : B_1$;
per $B = B_1$, $V : V_1 = h : h_1$. (Si esprima con parole).

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie e il volume di una piramide quadrilatera regolare di cui sono dati lo spigolo della base a e l'altezza h. (Si ricorra al triangolo rettangolo SEF, Fig. 168).

a) $a = 12\,cm$, $h = 16\,cm$; *b)* $a = 233\,m$, $h = 149\,m$ (Piramide di Cheope).

2. Calcolare la superficie e il volume di una piramide quadrilatera regolare, dati lo spigolo della base a e lo spigolo laterale l.

a) $a = 6\,dm$, $l = 5\,dm$; *b)* $a = l = 1\,m$.

3. Calcolare la superficie e il volume di un ottaedro dato uno spigolo l.

a) $l = 5\,cm$, *b)* $l = 0{\cdot}362\,m$.

4. Un ottaedro è iscritto in un cubo, vale a dire i vertici dell'ottaedro coincidono coi centri delle facce del cubo. In quale rapporto stanno i volumi dei due corpi?

5. Una piramide, a spigoli laterali eguali, ha per base un rettangolo. Calcolare la superficie e il volume di questa piramide, se uno degli spigoli laterali è $l = 1\,dm$, e le dimensioni della base sono $a = 14\,cm$, $b = 6{\cdot}4\,cm$.

6. Quanto pesa una piramide di marmo, la cui base è un quadrato, se lo spigolo della base è di $1{\cdot}2\,m$, l'altezza è di $3\,m$ e se il peso specifico del marmo è 2·84?

7. In un parallelepipedo rettangolo è iscritta una piramide quadrilatera in modo che le basi si coprano e il vertice della piramide coincida con uno degli angoli solidi superiori del parallelepipedo. Date le dimensioni a, b, c del parallelepipedo, calcola la superficie e il volume della piramide.

$a = 15\,cm$, $b = 8\,cm$, $c = 6\,cm$.

8. Calcolare la superficie e il volume di una piramide trilatera regolare, se sono dati lo spigolo della base a e l'altezza h.

Avviamento. $AE \perp BC$ (Fig. 169), $AE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $DE\,3 = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ (§ 59);

$SE = \sqrt{h^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$. $M = \frac{3a}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$.

a) $a = 18\,cm$, $h = 13\,cm$; *b)* $a = h = 1\,m$.

9. Calcolare la superficie e il volume di una piramide trilatera regolare se sono dati lo spigolo laterale l e lo spigolo della base a.

Avviamento. (Fig. 169) $AD = \frac{2}{3}AE = \frac{a}{3}\sqrt{3}$; $h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{3}}$.

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{3}\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{3\,l^2 - a^2}.$$

a) $a = 17\,cm$, $l = 20\,cm$; *b)* $a = l = 1\,m$.

10. Qual' è uno spigolo del tetraedro, la cui superficie è $= S$? P. e. $S = 10\,dm^2$.

11. Qual' è uno spigolo del tetraedro, il cui volume è $= V$? P. e. $V = 1\,m^3$.

12. Calcolare la superficie e il volume di una piramide esalatera regolare, dati lo spigolo della base a e l'altezza h.

a) $a = 2\,cm$, $h = 8\,cm$; *b)* $a = h = 1\,dm$.

13. Calcolare la superficie e il volume di una piramide esalatera regolare, dati lo spigolo della base a e lo spigolo laterale l.

Avviamento. $V = 6\frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{l^2 - a^2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3\,(l^2 - a^2)}$.

a) $a = 12\,cm$, $l = 2\,dm$; *b)* $l = 2a = 1\,m$.

Il cono e il tronco di cono.

§ 160. Genesi, descrizione. Una retta semilimitata, che, rimanendo ferma alla sua estremità, si muove intorno alla periferia di un cerchio, genera uno *spazio coniforme* (Fig. 174). Retta generatrice, cerchio direttivo. La superficie descritta dalla retta generatrice dicesi *superficie conica*. La retta tracciata pel punto immobile (S) della generatrice e pel centro (O) del cerchio direttivo si dice *asse* della superficie conica.

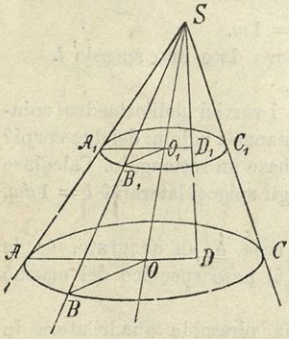

Fig. 174.

Ogni sezione fatta nello spazio coniforme con un piano parallelo al cerchio direttivo è un cerchio, il centro del quale (O_1) è in pari tempo il punto in cui l'asse viene intersecato dal piano segante. Infatti, essendo A ed A_1, B e B_1 i punti in cui i due piani paralleli tagliano la generatrice, che si trova in differenti posizioni, sarà il $\triangle AOS \sim \triangle A_1 O_1 S$ ed anche il $\triangle BOS \sim \triangle B_1 O_1 S$. Da queste somiglianze risulta $AO : A_1 O_1 = OS : O_1 S = BO : B_1 O_1$, da cui $A_1 O_1 = B_1 O_1$, perchè è $AO = BO$.

La porzione dello spazio coniforme compresa fra il punto immobile e il piano del cerchio direttivo, o il piano di una sezione ad esso parallela, si chiama *cono* (più esattamente *cono circolare*).

Si confronti il modo con cui si genera la piramide con quello con cui si genera il cono.

Dalla descrizione del cilindro e della piramide è senza altro chiaro il significato delle espressioni: *Base, superficie convessa (manto), vertice, lato, asse, altezza* del cono.

§ 161. Distinzione e denominazione. Secondo che l'asse è normale od obliquo alla base, il cono chiamasi *retto* od *obliquo*.

Nel cono retto, l'asse è in pari tempo l'altezza (Fig. 175). Tutti i lati di un cono retto sono fra loro eguali; perchè? Siccome il cono retto si può immaginare generato anche dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un cateto, così esso viene annoverato fra i corpi di rotazione.

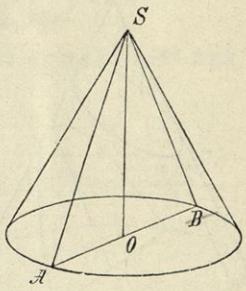

Fig. 175.

Un cono retto, che ha il diametro della base eguale al lato, si chiama *cono equilatero*.

§ 162. Sezioni piane; il tronco di cono. *a)* Se si taglia un cono con un piano, che passa per l'asse, la figura che si ottiene si dice *sezione assiale*; essa è sempre un triangolo. Le sezioni assiali di un cono obliquo sono in generale triangoli scaleni, quelle di un cono retto sono triangoli isosceli congruenti, e quelle di un cono equilatero sono triangoli equilateri congruenti.

b) Ogni sezione parallela alla base di un cono è un cerchio (§ 160).

Se si taglia un cono con un piano parallelo alla base, si ottengono due corpi, cioè il *tronco di cono* e il *cono complementare*. I cerchi, che giacciono nei due piani paralleli, si dicono *basi* e la loro distanza (DD_1 nella fig. 174) *altezza* del tronco di cono. La porzione della superficie convessa del cono corrispondente a questa altezza, dicesi *superficie convessa* del tronco di cono. Il tronco di cono dicesi *retto* od *obliquo*, secondo che l'intero cono, e perciò anche il cono complementare, è retto od obliquo. Ogni sezione assiale di un tronco di cono retto è un trapezio isoscele. Che figure sono le sezioni assiali di un tronco di cono obliquo?

c) Essendo nella fig. 174 $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$ e $\triangle DOS \sim \triangle D_1O_1S$, sarà

$AO : A_1O_1 = OS : O_1S = DS : D_1S$, quindi anche
$\overline{AO^2} : \overline{A_1O_1^2} = \overline{DS^2} : \overline{D_1S^2}$.

Se indichiamo quindi con B e B_1 le superficie della base e della sezione parallela, avremo

$$B : B_1 = \overline{AO^2} : \overline{A_1O_1^2} = \overline{DS^2} : \overline{D_1S^2}.$$

La base di un cono sta ad una sezione parallela come i quadrati delle loro rispettive distanze dal vertice.

§ 163. Sezioni coniche. Se la generatrice di una superficie conica è una retta illimitata, la superficie da essa generata dicesi *superficie conica completa* (cono doppio). Se si taglia una superficie conica mediante un piano che ne altraversi tutti i lati, la sezione che si ottiene dicesi *ellisse* (*cerchio*, se il piano segante è parallelo al cerchio direttivo). Se si conduce il piano segante parallelamente ad un lato, la sezione risultante si chiama *parabola*; ma se il piano segante è parallelo a due lati, si ottiene è l'*iperbole* (Fig. 176 e 177). In questo ultimo caso il piano segante incontra entrambi le porzioni della superficie conica completa, ed il piano guidato pel vertice parallelamente ad esso interseca la superficie conica in quei due lati, ai quali il piano dell'iperbole è parallelo.

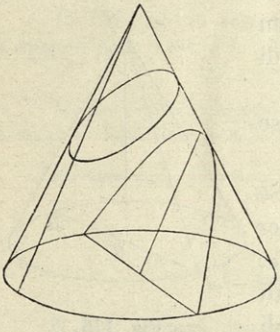

Fig. 176.

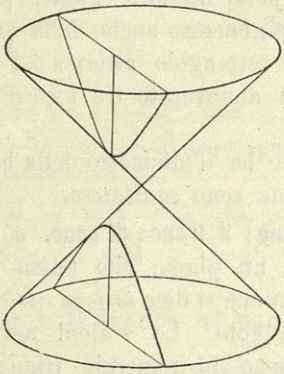

Fig. 177.

Noi possiamo ottenere tutte le specie delle sezioni coniche, facendo rotare continuamente il piano segante attorno ad un asse parallelo alla base.

Per rendere intuitive le sezioni coniche, si può adoperare un conó doppio cavo di vetro, coi vertici riuniti insieme e pieno in parte di un liquido colorato.

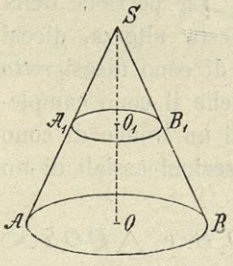

Fig. 178.

§ 164. Calcolo della superficie. Per la superficie di ogni cono vale la formola: $S = B + M$. Se c'immaginiamo la superficie convessa di un cono retto (Fig. 178) tagliata lungo un lato e svolta sopra un piano, otteniamo un settore circolare (Fig. 179), di cui l'arco è la periferia della base ed il raggio è il lato del cono; perciò

$$M = 2r\pi\frac{l}{2} = r\pi l \text{ ed } S = r^2\pi l + r\pi = r\pi(r + l).$$

Per il cono equilatero è $l = 2r$, perciò $S = 3r^2\pi$.

Quesiti d'esercizio. Disegna la rete di un tronco di cono retto (Fig. 179).

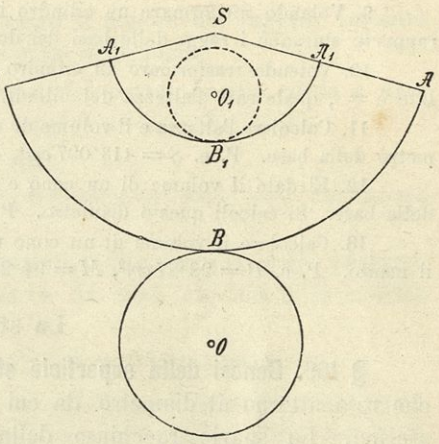

Fig. 179.

§ 165. Calcolo del volume. Se c'immaginiamo collocati sopra un piano MN un cono ed una piramide di base equivalente (B) e di eguale altezza (h), risulta che ogni due sezioni fatte in questi due corpi con un piano parallelo ad MN sono equivalenti $(= B)$. Dimostrazione giusta il § 159, *a)*. Perciò:

Un cono è equivalente ad una piramide di base equivalente e di eguale altezza.

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{r^2\pi h}{3}.$$

Per il cono equilatero è $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$, $V = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Per due coni differenti abbiamo

$$V = \frac{r^2\pi h}{3},\ V_1 = \frac{r_1{}^2\pi h_1}{3};\ \text{da cui}$$

in generale $V : V_1 = r^2\ h : r_1{}^2 h_1$;

per $h = h_1$, $V : V_1 = r^2 : r_1{}^2$;

per $r = r_1$, $V_1 : V_1 = h : h_1$. (Si esprima con parole.)

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie e il volume di un cono retto, dati il raggio r della base e l'altezza h.

a) $r = 6\,cm$, $h = 8\,cm$; *b)* $r = 1\,dm$, $h = 13\,cm$.

2. Calcolare la superficie e il volume di un cono retto, dati il raggio r della base e il lato l.

a) $r = 2\,m$, $l = 2{\cdot}9\,m$; *b)* $r = 15\,cm$, $l = 32\,cm$.

3. Calcolare la superficie e il volume di un cono equilatero dato il lato l.

a) $l = 1\,dm$, *b)* $l = 0{\cdot}41\,m$.

4. Calcolare la superficie e il volume di un cono retto iscritto in un cubo, il cui spigolo è a.

5. Un triangolo rettangolo, i cui cateti sono a e b, rota intorno a ciascuno dei suoi lati. Calcolare le superficie e i volumi dei tre corpi di rotazione. P. e. $a = 3\,dm$, $b = 4\,dm$.

6. Un cono di legno pesa $1{\cdot}378\,kg$; il diametro della base è di $15\,cm$, l'altezza di $2\,dm$. Qual' è il peso specifico del legno?

7. Data la superficie di un cono equilatero, calcolare l'altezza. P. e. $S = 10\,dm^2$.

8. Dato il volume di un cono equilatero, calcolarne il diametro della base. P. e. $V = 1{\cdot}5\,m^3$.

9. Volendo trasformare un cilindro in un cono di eguale altezza, in quale rapporto staranno i raggi delle basi dei due corpi?

10. Volendo trasformare un cilindro equilatero in un cono equilatero, il cui lato è $= l$, quale sarà l'altezza del cilindro?

11. Calcolare l'altezza e il volume di un cono retto, dati la superficie e il diametro della base. P. e. $S = 113{\cdot}097\ cm^2$, $d = 8\ cm$.

12. E' dato il volume di un cono e si sa che l'altezza è il triplo del diametro della base. Si calcoli questo diametro. P. e. $V = 1\ dm^3$.

13. Calcolare il volume di un cono retto, di cui sono dati l'area della base e il manto. P. e. $B = 28{\cdot}27\ cm^2$, $M = 94{\cdot}25\ cm^2$.

La sfera.

§ 166. Genesi della superficie sferica. Definizioni. Un semicerchio, che rota attorno al diametro da cui è limitato, descrive una *superficie sferica*. Lo spazio racchiuso della superficie sferica si chiama *sfera*. La sfera è un corpo di rotazione.

Siccome un punto qualunque del semicerchio non cambia durante la rotazione la sua distanza dal centro, così tutti i punti della superficie sferica distano egualmente dal centro. Perciò: La superficie sferica è il luogo geometrico di tutti i punti nello spazio, che distano egualmente da un punto dato. Questo punto si chiama *centro* della superficie sferica o della sfera. La retta, che unisce il centro con un punto della superficie sferica, si chiama *raggio*. Tutti i raggi della sfera sono eguali. La retta, che unisce due punti della superficie sferica, dicesi *corda* e, se questa passa pel centro, si chiama *diametro* della sfera. Tutti i diametri della sfera sono eguali e ciascuno è eguale al diametro del semicerchio generatore od al doppio del raggio.

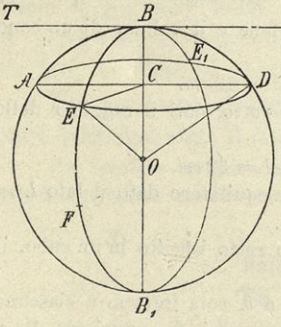

Fig. 180.

Un punto giace nella superficie sferica, o dentro o fuori della stessa, secondo che la sua distanza dal centro è eguale al raggio, oppure è minore o maggiore dello stesso.

§ 167. Superficie sferica e retta. La retta, la cui distanza dal centro è maggiore del raggio della sfera, non ha alcun punto comune colla superficie sferica. La retta, la cui distanza dal centro è eguale al raggio, ha un punto solo comune colla superficie sferica; mentre tutti gli altri punti della stessa retta giacciono fuori della sfera; perchè? — Questa retta (TT_1, Fig. 180) si chiama *tangente* alla superficie sferica e il punto B è detto *punto di contatto*.

La retta, la cui distanza dal centro è minore del raggio, incontra la superficie sferica in due punti. Corda della sfera.

Problema. Data la distanza d del centro da una corda e dato il raggio r della sfera, calcolare la lunghezza (c) della corda.

Si trova $c = \sqrt{r^2 - d^2}$; da cui:

a) Corde, che distano egualmente dal centro, sono eguali e inversamente.

b) Corde, che hanno distanze disuguali dal centro, sono disuguali, e precisamente la più vicina è la corda maggiore e inversamente.

c) Il diametro della sfera è la massima corda.

§ 168. Sfera e piano. Il piano, la cui distanza dal centro è maggiore del raggio della sfera, non ha alcun punto comune colla superficie sferica. Il piano, la cui distanza dal centro è eguale al raggio, ha un punto solo comune colla superficie sferica. Questo punto si dice *punto di contatto,* e il piano è detto *piano di contatto o tangenziale.* Si ottiene un piano di contatto, facendo rotare un cerchio assieme ad una sua tangente (TT_1) attorno al diametro (BB_1) perpendicolare alla tangente. Perciò:

a) Il piano tangenziale contiene in sè tutte le tangenti, che si possono condurre alla sfera nel punto di contatto.

b) Il piano tangenziale è perpendicolare al raggio della sfera condotto pel punto di contatto.

Il piano, la cui distanza dal centro è minore del raggio della sfera, interseca la superficie sferica. Ogni sezione piana fatta in una sfera è un cerchio detto *cerchio della sfera.*

Essendo le rette OD, OE . . . . eguali, anche le loro proiezioni CD, CD . . . (Fig. 180) devono essere eguali.

Problema. Calcolare il raggio ϱ di un cerchio della sfera, data la sua distanza d dal centro e dato il raggio r della sfera. Si trova $\varrho = \sqrt{r^2 - d^2}$, da cui:

c) Cerchi, che distano egualmente dal centro, sono eguali e inversamente.

d) Cerchi, che hanno distanze disuguali dal centro, sono disuguali, e precisamente il più vicino è il cerchio maggiore e inversamente.

e) I più grandi fra tutti i cerchi sono quelli che passano pel centro della sfera; essi sono eguali fra loro e si chiamano *cerchi massimi* o *principali*; un altro

cerchio qualunque dicesi *cerchio minore* o *secondario*. (Cerchi massimi e secondari sopra un mappamondo.)

Quesiti d'esercizio. 1. Dati i raggi r della sfera e ϱ di un cerchio secondario, calcolare la distanza di questo cerchio dal centro.

a) $r = 1\,dm$, $\varrho = 8\,cm$; *b)* $r = 13\,cm$, $\varrho = 6{\cdot}4\,cm$.

2. Date le aree S_1 ed S_2 di un cerchio principale e secondario, calcolare la distanza del secondo cerchio dal centro. $\left(\text{Si trova } d^2 = \frac{S_1 - S_2}{\pi}.\right)$ P. e. $S_1 = 40\,cm^2$, $S_2 = 25\,cm^2$.

3. Calcolare il volume di quel cono, il quale ha per base un cerchio secondario e il vertice del quale coincide col centro della sfera, se sono dati i raggi della sfera e del cerchio secondario.

a) $r = 1\,m$, $\varrho = 0{\cdot}6\,m$; *b)* $r = 6\,cm$, $\varrho = 5\,cm$.

§ 169. Figure sulla superficie sferica. *a)* Per le estremità di un diametro si può condurre un numero infinito di cerchi principali (meridiani terrestri); ma per due altri punti della superficie sferica non si può guidare che un solo cerchio massimo; perchè?

Per *distanza sferica* di due punti della superficie della sfera s'intende l'arco minore compreso fra questi due punti del cerchio massimo, che passa per gli stessi. Nella fig. 180 si determini la distanza sferica dei punti E ed F, B ed F, A e D, B e B_1. Come si fa per calcolare la distanza sferica di due punti dell'equatore col mezzo delle longitudini geografiche, la distanza sferica di due punti di un meridiano col mezzo delle latitudini geografiche dei detti due punti?

b) Il diametro della sfera perpendicolare al piano di un cerchio della stessa dicesi *asse*; le sue estremità diconsi *poli* di quel cerchio. S'indichino l'asse e i poli del cerchio AED. Un cerchio massimo è determinato dai due poli (B, B_1) di un cerchio secondario e da un terzo punto F della superficie sferica. Questo cerchio massimo interseca il cerchio secondario in due punti (E, E_1). Delle distanze sferiche FE ed FE_1 la minore è detta *distanza sferica del punto F dal cerchio della sfera.*

Si fissino sul globo terracqueo i poli di un circolo parallelo. Come si chiama sul globo la distanza sferica di un punto dall'equatore?

Si dimostri inoltre l'esattezza dei seguenti teoremi:

Tutti i cerchi paralleli della sfera hanno lo stesso asse e i poli comuni.

Ogni polo di un cerchio della sfera ha eguali distanze sferiche da tutti i punti dello stesso, che si chiamano raggi sferici del cerchio.

Ogni cerchio della sfera ha sulla superficie sferica due raggi sferici.

Ogni polo di un cerchio massimo dista di 90° da tutti i punti dello stesso, oppure: Il raggio sferico di un cerchio massimo importa 90°.

Come si calcola il raggio sferico di un circolo parallelo col mezzo della latitudine geografica dello stesso?

c) Per *angolo sferico* s'intende l'angolo di due cerchi massimi; p. e. ABC (Fig. 181). Gli archi BA e BC diconsi *lati* e il punto B dicesi *vertice* dell'angolo sferico. Ogni angolo sferico viene misurato dall'angolo MBN formato dalle due tangenti condotte ai cerchi massimi nel punto in cui s' intersecano, ovvero, ciò che è lo stesso, dall'angolo d'inclinazione dei piani dei due cerchi massimi.

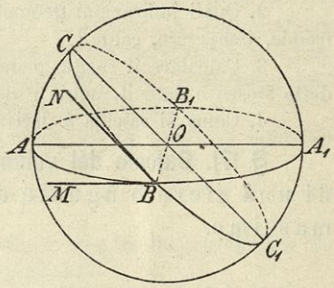

Fig. 181.

d) Due cerchi massimi dividono la superficie sferica in quattro parti, che si chiamano *fusi sferici*, p. e. BAB_1CB. I due angoli sferici di un fuso sferico sono fra loro eguali.

e) Tre cerchi massimi, i cui piani non s'intersechino in una medesima retta, dividono la superficie sferica in otto parti, che si dicono *triangoli sferici*, p. e. ABC. Gli archi AB, BC, CA si dicono *lati* e gli angoli sferici CAB, ABC, BCA *angoli* del triangolo sferico ABC.

Quesiti d'esercizio. 1. Nella Fig. 181 mostra tutti i triangoli sferici. 2. Si cerchino su di un mappamondo angoli, fusi e triangoli sferici.

§ 170. Segmenti sferici, settore sferico. Un piano divide la sfera in due parti, che si chiamono *sezioni sferiche* o *segmenti sferici*, dei quali quello è maggiore che contiene in sè il centro della sfera. Se il piano segante passa pel centro della sfera, esso la scompone in due parti eguali, che si dicono *emisferi*. Il piano segante divide la superficie della sfera in due *calotte sferiche*. La superficie di un segmento sferico si compone di un cerchio della sfera (base) e di una calotta (manto). L' asse di un cerchio della sfera viene da questo diviso in due parti, le quali sono in pari tempo le altezze dei segmenti sferici e delle calotte corrispondenti (BC e B_1C nella fig. 180).

La porzione di una sfera compresa da due piani seganti paralleli si chiama *strato sferico*. La superficie dello stesso si compone di due cerchi paralleli (basi) e della porzione della superficie della sfera compresa dai due piani seganti paralleli, detta *zona sferica* (manto). La distanza delle basi si chiama *altezza* dello strato o della zona sferica.

Un settore circolare di un cerchio massimo (BOD, fig. 180), che rota attorno ad uno dei raggi (OB), da cui è limitato, descrive un

settore sferico. Una sezione piana scompone questo corpo in un segmento sferico ed in un cono. La sua superficie si compone dunque di una calotta e della superficie convessa di un cono retto.

Quesiti d'esercizio. 1. S'indichi la superficie, che produce mediante rotazione α) un segmento sferico, β) uno strato sferico.

2. Quali indicazioni geometriche corrispondono ai concetti geografici: zone fredde, temperate, calde?

3. Calcolare il raggio ϱ della base di un segmento sferico data l'altezza h dello stesso e dato il raggio r della sfera.

4. Come si calcola h dati r e ϱ?

§ 171. Calcolo del volume e della superficie. *a)* La superficie di una sfera è uguale al quadruplo di quella di un cerchio massimo.

$$S = 4\pi r^2.$$

La derivazione di questa formola viene ommessa in questo libro.

Per una seconda sfera è $S_1 = 4\pi r_1^2$. Da cui

$S : S_1 = r^2 : r_1^2$. Si esprima con parole.

Osservazione. La sfera non si può svolgere nel piano; perciò una costruzione esatta della sua rete è impossibile.

b) Ad una sfera sia ora circoscritto un poliedro di un numero qualsivoglia di facce B_1, B_2, B_3 . . . B_n, cioè ogni faccia del poliedro tocchi la sfera. Se si scompone il poliedro in piramidi, i cui vertici coincidano col centro e le cui basi sieno le facce B_1, B_2, B_3 . . B_n, il suo volume sarà:

$$V = B_1 \cdot \frac{r}{3} + B_2 \cdot \frac{r}{3} + .. + B_n \cdot \frac{r}{3} = (B_1 + B_2 + .. + B_n)\frac{r}{3} = S \cdot \frac{r}{3}.$$

Questa formola vale anche per la sfera; giacchè essa differisce tanto meno dal poliedro circoscritto quanto più piccole sono le sue facce, cioè quanto più grande è il loro numero. In tal caso V è il volume ed S è la superficie della sfera; perciò il teorema:

La sfera è equivalente ad una piramide, che ha per base la superficie della sfera e per altezza il raggio.

$V = S \cdot \frac{r}{3}$; ma essendo $S = 4\pi r^2$, sarà

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Per una seconda sfera è $V_1 = \frac{4\pi r^3}{3}$. Perciò

$V : V_1 = r^3 : r_1^3$. Si esprima a parole.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie e il volume di una sfera di un dato raggio r.

a) $r = 1\,m$, *b)* $r = 2{\cdot}821\,m$.

2. Calcolare la superficie e il volume di una sfera di un dato diametro d.

$a)\ d = 134\ mm,\ b)\ d = 1{\cdot}2407\ m.$

3. Calcolare la superficie e il volume di una sfera, di cui è data l'area di un cerchio massimo.

$a)\ s = 1\ m^2,\ b)\ s = 14{\cdot}2976\ m^2.$

4. Qual' è la superficie e il volume della terra, supponendola una sfera perfetta, la cui periferia di un cerchio massimo è α) di 40000 km, β) di 5400 miglia geografiche?

5. Quanto pesa una palla di legno di bosso (peso spec. 0·92) del diametro di 12 cm?

6. Quante volte è contenuto il volume della luna in quello della terra, se il diametro della luna è di 3482 km, quello della terra è di 12756 km?

7. Calcolare il raggio e il volume di una sfera, di cui è data la superficie. P. e. $S = 125\ cm^2$.

8. Calcolare il raggio e la superficie di una sfera, di cui è dato il volume. P. e. $V = 1\ m^3$.

9. Sono date due sfere di egual materiale, di cui una ha un peso doppio dell'altra. Come stanno fra loro i diametri delle due sfere?

10. Volendo rappresentare la terra mediante un mappamondo, in quale rapporto essa viene impiccolita, se il diametro del mappamondo è di 42 cm? (V. ques. 6.)

11. Il volume di una sfera è eguale a quello di un cilindro equilatero, di cui l'altezza è h. Qual' è il raggio della sfera? P. e. $h = 12\ cm$.

12. Una sfera viene trasformata in un cubo, di cui lo spigolo è a. Di quanto ne viene con ciò aumentata la superficie? P. e. $a = 16\ cm$.

13. Ad un cubo, di cui lo spigolo è a, è circoscritta una sfera. Calcolare la differenza dei due volumi. P. e. $a = 23\ cm$.

14. Ad un cilindro retto (ϱ, h) è circoscritta una sfera. Calcolare la superficie e il volume della stessa. P. e. $\varrho = 4\ dm$. $h = 6\ dm$.

15. Ad un emisfero è circoscritto un cilindro e nello stesso emisfero è iscritto un cono retto. Come stanno fra loro i volumi di questi tre corpi? (Teorema d'Archimede.)

16. Un pallone aerostatico di forma sferica col raggio di 10 m viene riempito di gas d'illuminazione. Si calcoli la forza ascensiva del pallone, se la densità del gas è la metà di quella dell'aria, se 1 m^3 d'aria pesa 1·293 kg e se il peso delle parti componenti il pallone (eccettuato il peso del gas cho lo riempie) è di 130 kg.

17. Il diametro esterno di una sfera cava di rame è di 12 cm e la grossezza dell'involucro metallico è di 2 mm. Qual' è il peso della sfera, se il peso specifico del rame è 8·8?

I poliedri regolari.

§ 172. Definizione e teorema. Si dicono *poliedri regolari* quelli, di cui le facce sono poligoni regolari congruenti e gli angoli solidi sono congruenti e regolari.[1])

Vi sono soltanto cinque poliedri regolari.

Prendendo per facce del poliedro triangoli equilateri, questi possono formare soltanto angoli solidi triedri o tetraedri o pentaedri; giacchè la somma degli angoli piani dev'essere minore di quattro retti. Si otten-

[1]) Qui la parola „regolare" viene adoperata in un senso ben diverso a quello nei §§ 141 e 156.

gono dunque tre soli poliedri regolari limitati da triangoli equilateri; essi sono: il *tetraedro*, l'*ottaedro* e l'*icosaedro*.

Prendendo per facce quadrati, questi possono formare soltanto angoli solidi triedri; perchè? V'ha un solo poliedro regolare limitato da quadrati: l'*esaedro* (cubo, dado). Prendendo per facce pentagoni regolari, questi possono formare soltanto angoli solidi triedri; perchè? V'ha un solo poliedro regolare limitato da pentagoni regolari: il *dodecaedro*.

Perchè non vi può essere alcun poliedro che abbia per facce soltanto esagoni od ettagoni ecc. regolari?

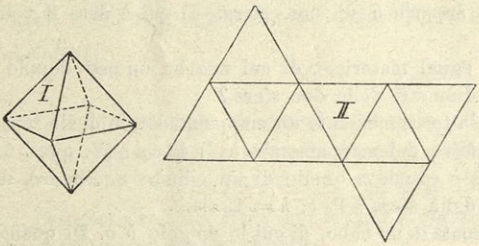

Fig. 182.

§ 173. Descrizione. Noi ci siamo di già occupati del *tetraedro*, dell' *ottaedro* e dell' *esaedro*. La fig. 182 rappresenta un ottaedro colla sua rete.

L'*icosaedro* è determinato da venti triangoli equilateri congruenti. I $3 \times 20 = 60$ lati dei triangoli concorrono a due a due a formare uno spigolo; perciò l'icosaedro ha 30 spigoli eguali. I 60 angoli dei 20 triangoli formano cinque a cinque un angolo solido; perciò l'icosaedro ha 12 angoli solidi congruenti. La fig. 183 mostra un icosaedro e la sua rete.

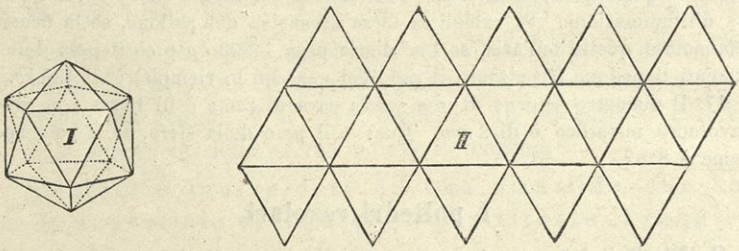

Fig. 183.

Il *dodecaedro* è limitato da 12 pentagoni regolari e congruenti. Quanti spigoli e quanti angoli solidi ha esso? — La fig. 184 mostra un dodecaedro colla sua rete.

Nell'interno di ogni poliedro regolare v' è un punto, che dista egualmente da tutti i vertici degli angoli ed anche da tutte la facce; esso è perciò il centro tanto della sfera circoscritta che iscritta nel poliedro e si chiama *centro* del poliedro. Come si trova il centro α) dell'esaedro, β) dell'ottaedro?

Se noi prendiamo il centro del poliedro regolare come vertice e le facce quali basi di piramidi, il poliedro potrà venir scomposto in tante piramidi regolari quante ne sono le facce. Quanti spigoli laterali ha ciascuna di queste piramidi?

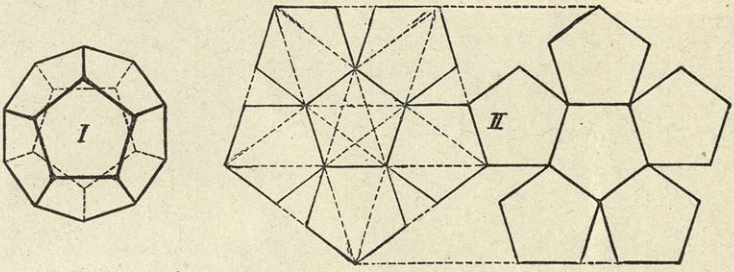

Fig. 184.

Quesiti d'esercizio. 1. Calcolare la superficie α) di un ottaedro, β) di un icosaedro, di cui lo spigolo è $= a$. P. e. $a = 12{\cdot}7\ cm$.

2. Calcolare uno spigolo e il volume di un ottaedro, di cui la superficie è S. P. e. $S = 40\ cm^2$.

3. Calcolare lo spigolo e la superficie di un tetraedro, di cui è dato il volume V. P. e. $V = 172\ cm^3$.

4. La superficie di un tetraedro, di cui lo spigolo è a, è eguale a quella di un icosaedro. Calcolare lo spigolo di quest'ultimo. P. e. $a = 1\ dm$.

5. Il volume di un ottaedro, di cui lo spigolo è a, è eguale a quello di un prisma esalatero ed equilatero regolare. Si calcoli lo spigolo di questo corpo. P. e. $a = 12\ cm$.

6. Il volume di un tetraedro, di cui lo spigolo è a, è eguale a quello di una sfera; qual'è il diametro della stessa? P. e. $a = 2\ dm$.

7. Ad un tetraedro trovasi circoscritto un cono; come stanno i volumi di questi due corpi?

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA
00000509424