

Modeliranje vertikalnega gradienta težnosti za obdelavo gravimetričnih meritev

Klemen Medved¹, Oleg Odalović², Božo Koler³

Povzetek

Vertikalni gradient težnosti (VGT) določa spremembo težnega pospeška po višini (vzdolž vertikale) in ga dobimo z odvajanjem vektorja težnega pospeška g oziroma z drugimi odvodi težnostnega potenciala W . Pri izvajanju gravimetričnih meritev ima poznavanje oz. nepoznavanje vertikalnega gradienta težnostnega polja velik pomen, saj moramo težni pospešek, izmerjen z instrumentom reducirati na stabilizirano točko. Ker so meritve dolgotrajne in drage običajno uporabljamo vrednosti normalnega težnostnega polja, ki pa se zaradi nehomogene strukture Zemlje, razlikuje od dejanskega. Zato je smiselno, da z razpoložljivimi podatki modeliramo vrednosti vertikalnega gradienta težnosti in le-te uporabimo v gravimetričnih izmerah, saj s tem bistveno izboljšamo končne vrednosti težnih pospeškov na posameznih točkah.

Ključne besede: težnostno polje Zemlje, gravimetrija, vertikalni gradient težnosti, modeliranje, gravimeter, gravimetrične meritve, digitalni model reliefa

Key words: Earth's gravitational field, gravimetry, vertical gravity gradient, modeling, gravimeter, gravimetric measurements, digital terrain model

Uvod

Gravimetrični podatki se uporabljajo tako v geodeziji (npr. določanje ploskve geoida, določanje geopotencialnih kot) kot v geofiziki in geologiji (interpretacija notranjih struktur Zemlje). Vertikalni gradient predstavlja spremembo pospeška sile teže v prostoru vzdolž vertikale (Hofmann-Wellenhof in Moritz, 2006). Pri izvajanju gravimetričnih meritev ima poznavanje oz. nepoznavanje vertikalnega gradienta težnostnega polja velik pomen, saj moramo težni pospešek, izmerjen z instrumentom reducirati na izmeritveno točko.

V splošnem velja, da z današnjimi gravimetri lahko izmerimo vrednost težnega pospeška z natančnostjo nekaj μGal (Scintrex, 2017, LaCoste & Romberg, 2004), pri tem pa se te meritve nanašajo na merski senzor instrumenta. V praksi se meritve reducirajo na neko trajno ali začasno stabilizirano točko (npr. reper), ki po višini lahko odstopa (od senzorja instrumenta) od nekaj mm pa do več kot en meter. Ta popravek imenujemo »popravek višine gravimetra« (Torge, 1989) in pri redukciji uporabimo vrednost vertikalnega gradienta težnosti nad točko. Vertikalni gradient težnosti na površju Zemlje žal ni konstanten, zaradi nehomogene geološke strukture Zemlje se razlikuje od točke do točke. Dejansko vrednost vertikalnega gradienta težnosti lahko določimo z gravimetričnimi meritvami na različnih višinah nad posamezno točko (Dykowski, 2012, Repanič in sod., 2015), vendar pa so te meritve dolgotrajne in drage in jih ne moremo izvesti na vseh gravimetričnih točkah neke države, npr. v Sloveniji jih imamo več kot 3000. V praksi se zato pri izračunih uporablja vrednost normalnega vertikalnega gradienta, ki se nanaša na nivojski elipsoid in je matematično definiran. Nepoznavanje dejanskih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti torej povzroča relativno velike napake pri obdelavi gravimetričnih meritev in posledično

¹ Geodetska uprava RS, Zemljemerska 12, 1000 Ljubljana

² Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Srbija

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, 1000 Ljubljana

končnih vrednostih težnega pospeška na površju Zemlje. Te napake so tudi nekajkrat večje od natančnosti meritev, ki jo omogočajo sodobni relativni gravimetri, npr. Scintrex CG-5, s katerim lahko dosežemo natančnost $0,010 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$ (Crossley in sod., 2013).

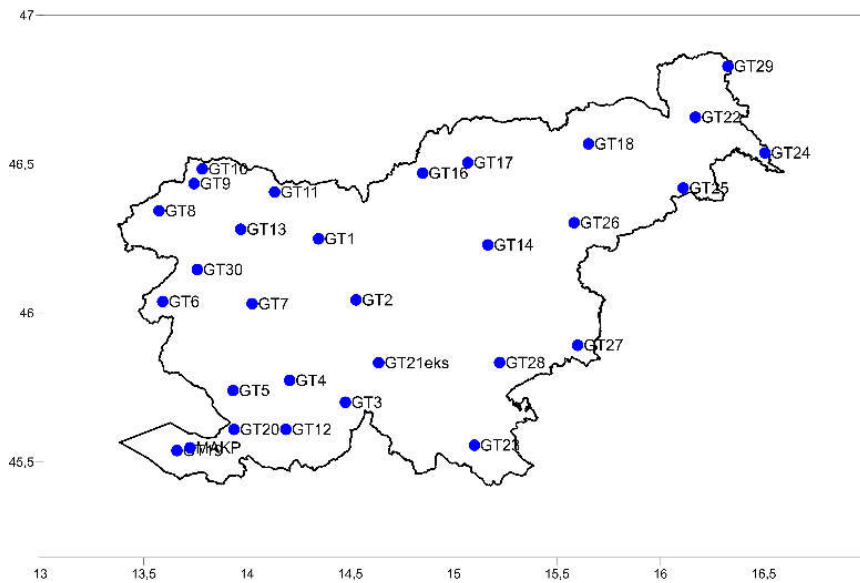
Osnovna ideja raziskave je, da model vertikalnih gradientov težnosti lahko izračunamo na osnovi odvodov težnostnega potenciala. Le-te je možno pridobiti z izračunanim topografskim popravkom ob predpostavki, da uporabimo kvaliteten digitalni model reliefa in potencialno tudi digitalni model gostot topografskih mas (Zahorec in sod., 2017). Za točko na površju Zemlje lahko izračunamo topografski popravek na dveh višinah. Razlika med njima predstavlja vpliv topografskega popravka na normalni vertikalni gradient. Po teoriji se topografski popravek na posamezni točki računa do standardne zunanje razdalje 166,7 km (Torge, 1989), največji vpliv pa imajo okoliške mase do razdalje nekaj 100 m (Hinze in sod., 2005). Iz teh podatkov lahko modeliramo vrednosti vertikalnih gradientov težnosti.

Meritve vertikalnega gradienta težnosti

Z relativnimi gravimetri ne moremo neposredno izmeriti vertikalnega gradienta, lahko pa ga določimo na osnovi relativnih merenj na različnih višinah nad isto točko. Postopek je vesplošno znan in se uporablja predvsem pri reduciranju absolutnih gravimetričnih meritev na nivo stabilizirane točke. Do sedaj so bile v Sloveniji gravimetrične meritve za potrebe določitve vertikalnega gradienta izvedene samo na šestih absolutnih gravimetričnih točkah, ki so vključene v slovensko gravimetrično mrežo 0. reda. To so točke: AGT100 (Bogenšperk), AGT200 (Gotenica), AGT 300 (Sevnica), AGT 400 (Sv. Arh na Pohorju), AGT 500 (Socerb) in AGT 600 (Kluže). Meritve so bile izvedene leta 1996, 1998, 2000 in 2014, hkrati s samo izvedbo absolutnih gravimetričnih meritev. Skupno vsem tem točkam je, da so stabilizirane v večjih stabilnih objektih (gradovi, cerkve), večinoma v kletnih etažah, kar pomeni, da ni nezanemarljiv vpliv mas (topografskih in umetnih), ki se nahajajo nad samim nivojem točke.

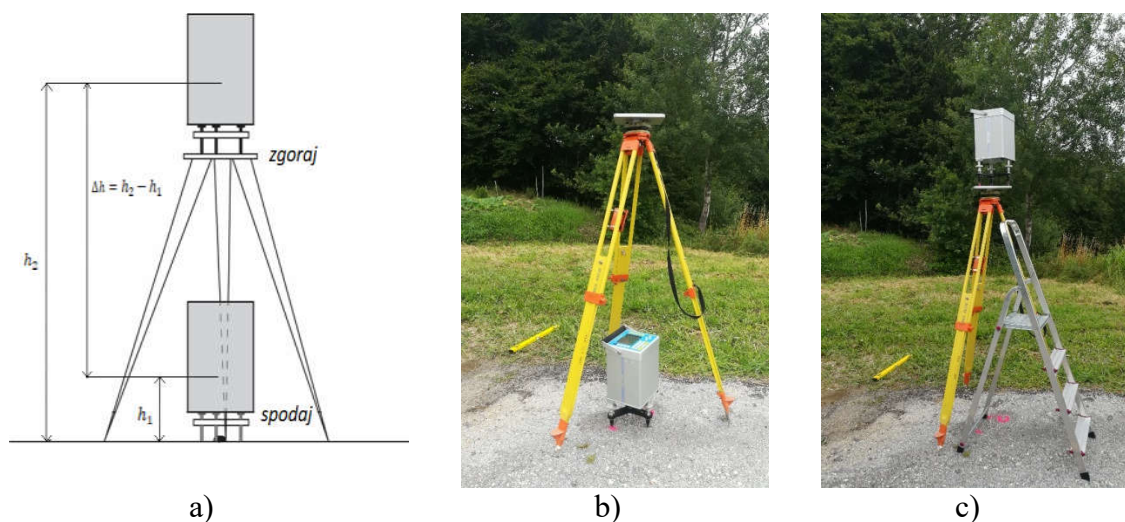
Zato smo za potrebe te raziskave izvedli niz meritev vertikalnih gradientov na točkah razporejenih po celotnem ozemlju Slovenije. V testno izmero so bile tako vzete vse točke gravimetrične mreže 1. reda (Koler in sod., 2012). Grafični prikaz razporeditve izmerjenih točk je na sliki 1. Meritve so se izvajale skozi daljše časovno obdobje in sicer v letu 2018 z instrumentom Scintrex CG-3M, v letu 2019 in 2020 pa z instrumentom Scintrex CG-5.

Položaj in višina detajlne gravimetrične točke je bila določena z GNSS-RTK metodo izmere, s tremi neodvisnimi serijami izmere v trajanju po 30 sekund, z dvofrekvenčnimi sprejemniki GNSS in navezavo na omrežje SIGNAL. Na nekaterih točkah so višine določene z nivelmansko izmero – navezavo na nivelmansko mrežo.



Slika 1: Testno območje z izmerjenimi točkami.

Sam postopek izmere na točki je bil sledeč: Nad stabilizirano točko smo postavili stativ in nanj namestili posebej v ta namen izdelano ploščo, ki omogoči postavitev podnožja instrumenta. Zaradi tresljajev pri transportu z avtom, smo pred meritvami počakali vsaj 15 minut, da se instrument umiri in stabilizira. S tem tudi preprečimo temperaturne šoke in zmanjšamo pogreške zaradi vpliva histereze. Na vsaki točki je izvedeno vsaj 11 nizov meritev, izmenjujoče na obeh višinah nad gravimetrično točko (6 spodaj, 5 zgoraj), pri čemer vsak niz tvori 60 eno-sekundnih meritev. Primer izmere je prikazan na sliki 2. Meritve so opravljene v naslednjem zaporedju: 1–2–1–2–1 ..., pri čemer je 1 – meritev spodaj in 2 – meritev zgoraj. Za vsak niz posebej izmerimo višino instrumenta (glej sliko 2) in jo zabeležimo v zapisnik. Prav tako zapišemo izmerjene vrednosti težnega pospeška za vsak niz, ki jih poda instrument. Temperaturo zraka in zračni tlak smo merili s prenosno meteorološko postajo Thommen HM-30 s serijsko številko B111225, proizvajalca Huber, ki je bil ustrezno certificiran. Na vseh točkah so meritve izvedene na dveh višinah na razmiku, ki je približno 1,5 m. Srednja višina senzorja vseh meritev znaša 0,255 m za postavitev spodaj in 1,705 m za postavitev zgoraj. Srednja razlika v višinah med postavitvijo spodaj in zgoraj znaša 1,450 m.



Slika 2: a) Položaj instrumenta med meritvami vertikalnega gradienta težnosti, b) meritev spodaj in c) meritev zgoraj.

Izračun vertikalnih gradientov

V okviru obdelave podatkov meritev izračunamo ustrezne popravke in redukcije za meritve na vsaki točki. Relativna gravimetra Scintrex CG-3M in Scintrex CG-5 omogočata uporabo nekaterih redukcij v realnem času, ki smo jih upoštevali med samimi meritvami. To so:

- popravek dolgoročnega hoda gravimetra,
- popravek za nehorizontalnost gravimetra,
- popravek zaradi spremembe temperature senzorja,
- redukcijo meritev za kalibracijski faktor in
- popravek zaradi plimovanja trdne Zemlje (po modelu Longman).

Naknadno pa smo upoštevali še naslednje (Torge, 1989):

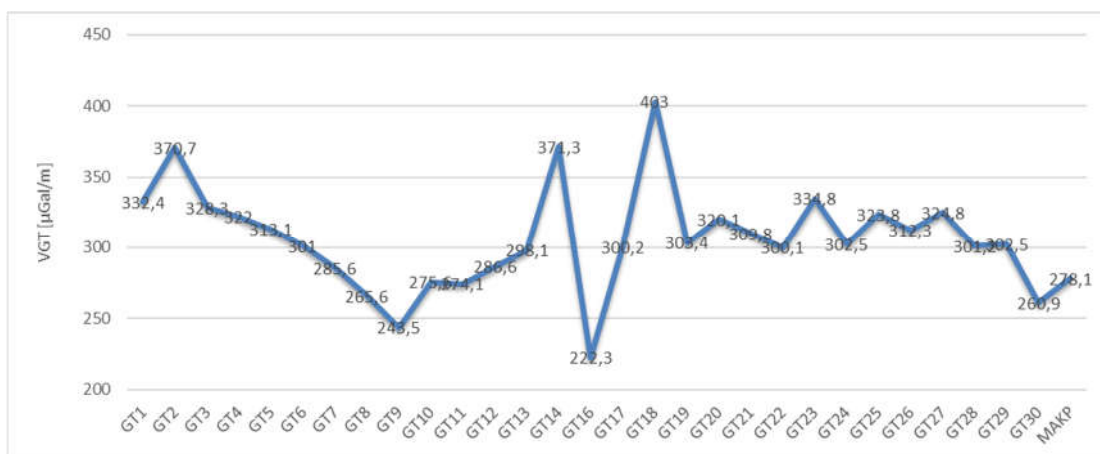
- redukcijo izmerjene vrednosti težnega pospeška z nivoja senzorja instrumenta na nivo,
- točke oz. redukcijo za višino instrumenta,
- popravek zaradi vpliva zračnega tlaka,
- popravek zaradi gibanja Zemljinih polov,
- redukcijo opazovanj za preostali hod instrumenta.

V naši raziskavi smo meritve izvajali na dveh višinah, torej se nad točko izmere predpostavlja konstantni vertikalni gradient, ki se izračuna z:

$$VGT = \frac{g_j - g_k}{h_j - h_k} = \frac{\Delta g_{jk}}{\Delta h_{jk}}, \quad (1)$$

kjer so: $g_{j,k}$ – odčitki gravimetra na stojiščih j in k , $h_{j,k}$ – referenčne višine gravimetra na stojiščih j in k , Δg_{jk} – razlika odčitkov in Δh_{jk} – razlika referenčnih višin gravimetra.

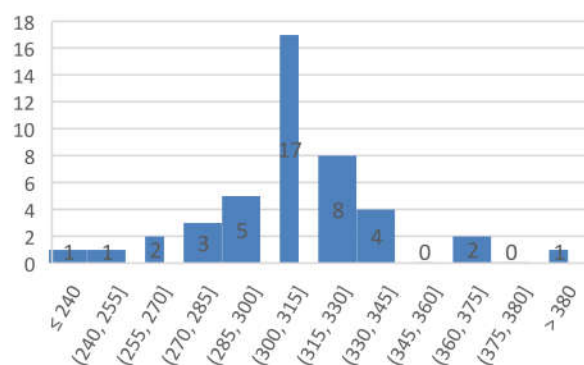
Na sliki 3 so prikazane izmerjene vrednosti vertikalnih gradientov na vseh obravnavanih točkah.



Slika

3: Grafični prikaz vrednosti VGT za vse izmerjene točke.

Na sliki 4 je prikazan histogram porazdelitve vseh merjenih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti v 12 velikostnih razredov. Več kot 60 % vrednosti se nahaja v intervalu [285, 330], kar pomeni da ima več kot 60 % rezultatov vrednost, ki je izjemno blizu teoretični vrednosti, to je vrednosti normalnega gradienta težnosti (308,6 $\mu\text{Gal/m}$).



Slika 4: Frekvence porazdelitve merjenih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti

Razlike med minimalnim in maksimalnim izmerjenim vertikalnim gradientom težnosti na tem območju znašajo 180,7 $\mu\text{Gal/m}$. Torej gre za relativno velike spremembe. Največji vertikalni gradient (403,0 $\mu\text{Gal/m}$) je izmerjen na točki GT18 (Maribor), najmanjši (222,3 $\mu\text{Gal/m}$) pa na točki GT16 (Črna na Koroškem). Srednja vrednost na vseh izmerjenih točkah je 306,2 $\mu\text{Gal/m}$, kar je zelo blizu vrednosti normalnega gradienta težnosti (308,6 $\mu\text{Gal/m}$). Iz tega stališča lahko rečemo, da je izbor točk za nadaljnje analize modeliranja vertikalnega gradienta zelo primeren, saj vsebuje odstopanja od normalne (srednje) vrednosti tako v eno kot v drugo stran. Standardni odkloni izvedenih meritev ($\bar{\sigma}_{\Delta g} = 2,52 \mu\text{Gal}$) so pridobljeni iz ocene natančnosti posameznih odčitkov in predstavljajo t. i. notranjo natančnost meritev. Zanima pa nas kakšna je dejanska ocena natančnosti izvedenih gravimetričnih meritev vertikalnega gradienta z relativnim gravimetrom Scintrex, oziroma t. i. zunanja natančnost. V izraz (1) vpeljemo zakon o prenosu varianc in kovarianc za nekorelirana merjenja in tako dobimo vpogled, kako vpliva natančnost razlike pospeška sile teže Δg in natančnost spremembe višinske razlike stojišča Δh na natančnost izračunanega vertikalnega gradienta. Velja:

$$\sigma_{VGT}^2 = \left(\frac{1}{\Delta h}\right)^2 \sigma_{\Delta g}^2 + \left(-\frac{\Delta g}{\Delta h^2}\right)^2 \sigma_{\Delta h}^2. \quad (2)$$

V preglednici 1 so zbrane minimalne, maksimalne in srednje vrednosti izmerjenih razlik težnih pospeškov, izmerjenih višinskih razlik in pripadajoče izračunane ocene natančnosti določitve vertikalnega gradienta težnosti.

Preglednica 1: Ocene natančnosti izmerjenih vertikalnih gradientov težnosti

	Min.	Maks.	Sred.
Δg [μGal]	222,3	403,0	465,0
Δh [m]	1,238	1,651	1,505
σ_{VGT} [$\mu\text{Gal/m}$]	5,6	4,2	4,6

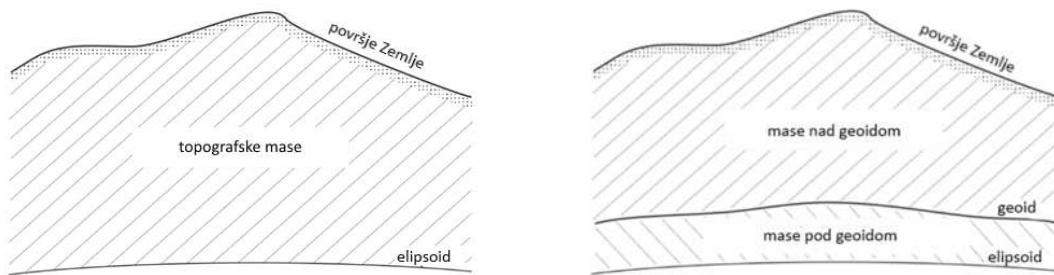
Pri izmeri vertikalnih gradientov težnosti z uporabo relativnega gravimetra Scintrex CG-3M oz. CG-5 in metodo izmere, kot je predhodno opisana, znašajo ocenjene natančnosti določitve vertikalnih gradientov težnosti do maks. 5,6 $\mu\text{Gal/m}$. To vrednost v nadaljevanju obravnavamo kot kriterij za oceno natančnosti pri obdelavi oz. analizi modeliranih vrednosti vertikalnih gradientov.

Modeliranje vertikalnih gradientov težnosti

Za modeliranje težnostnega polja Zemlje smo uporabili t.i. z metodo »forward-modelling«. Vse mase nad elipsoidom smo obravnavali kot topografske mase (slika 5a), pri čemer smo sprejeli predpostavko, da lahko vertikalni gradient težnosti modeliramo z naslednjo enačbo:

$$VGT = W_{zz} = U_{zz} + \delta W_{zz}^{TOPO}, \quad (3)$$

kjer je δW_{zz}^{TOPO} predstavlja vpliv topografskih mas na vertikalni gradient težnosti. Nato v vseh izračunih topografske mase razdelimo na mase nad geoidom in mase pod geoidom, kot je prikazano na sliki 5b.



Slika 5: a) Topografske mase med površjem Zemlje in elipsoidom in b) njihova razdelitev na mase nad geoidom in mase pod geoidom.

Posledično smo tudi učinek topografskih mas na vertikalni gradient težnosti razdelili na vpliv mas nad geoidom in vpliv mas pod geoidom:

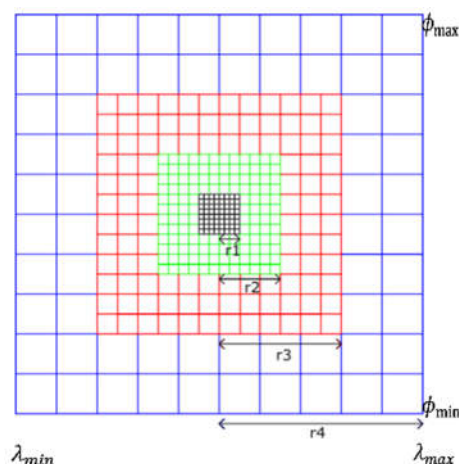
$$VGT = W_{zz} = U_{zz} + \delta W_{zz}^{NG} + \delta W_{zz}^{PG}, \quad (4)$$

kjer je δW_{zz}^{NG} vpliv topografskih mas, ki se nahajajo med ploskvijo geoida in fizičnim površjem Zemlje in δW_{zz}^{PG} vpliv topografskih mas med ploskvijo geoida in elipsoidom.

Vse topografske mase nad geoidom se razdelijo v elementarna telesa s konstantno gostoto, kot so kvadri, tesoroidi ali poliedri. Za ta telesa se nato izračunajo Newtonovi prostorski integrali v obliki zaprtih izrazov. Gradienti težnostnega potenciala vseh topografskih mas se nato dobijo s seštevanjem posameznih drugih odvodov težnostnega potenciala vseh elementarnih teles (Hirt, 2016). V našem pristopu smo modelirali gravitacijski vpliv topografskih mas v obliki seštevanja topografskih mas med elipsoidom in geoidom in topografske mase med geoidom in fizično površino Zemlje (Odalović in sod., 2022) pri čemer smo kot osnovno telo uporabili kvader.

Uporabili smo maksimalno razdaljo 166,74 km (Tsoulis, 1999), le da smo namesto krožnice kot omejitvenega lika uporabili kvadrat, vse z namenom izboljšanja hitrosti izračuna. DMR je namreč podan v obliki kvadratov s poljubno dimenzijo. Na tak način je bila vsaka obravnavana točka P pozicionirana v središče kvadrata, ki ga omejujejo geografska širina ϕ_{min} in ϕ_{max} in geografska dolžina λ_{min} in λ_{max} . Vse izbrane topografske mase so bile s presekom z DMR-ji razdeljene tudi na kvadre (Nagy in sod., 2000). Za

dotatno izboljšanje hitrosti izračunov pa smo, kot je običajno, uporabili različne DMR-je glede na razdaljo med točko P in središčem mase vsakega upoštevanega kvadra. Tako smo opredelili do štiri referenčne razdalje r_i , $i = 1, \dots, 4$, (slika 6).



Slika 6: Razdelitev topografskih mas okoli obravnavane točke na cone z različnimi resolucijami DMR.

Na koncu smo izračunali skupni vpliv izbranih topografskih mas na vertikalni gradient težnosti z :

$$\delta W_{zz}^{TOPO} = \sum_{i=1}^n (\delta W_{zz}^{Kvader})_i, \quad (5)$$

kjer je n skupno število kvadrov na obravnavanem območju in se δW_{zz}^{Kvader} izračuna z enačbo po Nagy in sod., 2000.

Med celotnim procesom računanja vertikalnih gradientov težnosti preverjamo skladnost vseh izračunov z uporabo dveh drugih odvodov po koordinatnih oseh x in y , da velja pogoj:

$$\delta W_{xx}^{TOPO} + \delta W_{yy}^{TOPO} + \delta W_{zz}^{TOPO} = 0. \quad (6)$$

Upoštevan je tudi vpliv ukrivljenosti Zemlje in sicer se gravitacijski vpliv posameznega kvadra (enačbe Nagy in sod., 2000) popravi, če je kvader oddaljen več kot 10 km od obravnavane točke P . Uporabi se metodo transformacije; opis postopkov in uporabljene enačbe določitve tega vpliva so detajlno podani v Makhloof (2007).

Dodaten izziv v postopku modeliranja vertikalnega gradienta težnosti predstavlja nekonsistentnost višin na obravnavanih točkah. Točke imajo višine določene večinoma z geodetskimi merskimi tehnikami (nivelman, trigonometrično višinomerstvo, GNSS višinomerstvo), medtem ko so višine DMR določene s tehnikami daljinskega zaznavanja. Seveda se tako pojavi neskladnost (ΔH) med merjeno višino stabilizirane točke in višino iste točke določene s presekom DMR. Odstopanje je odvisno predvsem od višinske kakovosti DMR, pri čemer v splošnem lahko rečemo, da višja prostorska ločljivost DMR (npr. 1×1 m) zagotavlja manjša odstopanja.

V izračunih smo uporabili različne razpoložljive DMR (preglednica 2) in različne razdalje območij r_i (slika 6). S kombiniranjem teh podatkov smo ustvarili različne modele izračuna, kot so prikazani v preglednici 2. Vse skupaj smo obravnavali 27 različnih variant modelov. Referenčne razdalje r_1, r_2, r_3 in r_4 so izražene v km, pri čemer se računa od 0,0 km naprej, glej sliko 6. Uporabljene so različne razdalje, pri čemer smo uporabili pristop podrobneje predstavljen v Zahorec in sod. (2017).

Preglednica 2: Modeli uporabljeni v izračunih.

Ime modela	Uporabljen DMR (poudarjeno) in razdalje [km]			
	r_1	r_2	r_3	r_4
1a	DMR1000	-	-	-
	166,74			
2a	DMR100	DMR1000	-	-
	28,80	166,74		
3a	DMR25	DMR1000	-	-
	28,80	166,74		
4a	DMR12,5	DMR1000	-	-
	28,80	166,74		
5a	DMR12,5	DMR100	DMR1000	-
	5,24	28,80	166,74	
	DMR1	DMR25	DMR100	DMR1000
6a	0,25			
7a	0,50	5,24	28,80	166,74
8a	1,00			
	DMR1	DMR12,5	DMR100	DMR1000
9a	0,25			
10a	0,50	5,24	28,80	166,74
11a	1,00			
	DMR1	DMR12,5	DMR25	DMR1000
12a	0,25	5,24	28,80	166,74
13a	0,50			
	DMR1	DMR12,5	DMR1000	
14a	0,25	5,24	166,74	-
	DMR1	DMR25	DMR100	DMR1000
15a	0,05	-	-	-
16a	0,10			
17a	0,25			
18a	0,50			
19a	1,00			
20a	1,50			
21a	0,50	5,24	-	-
22a	0,50	5,24	28,80	-
23a	0,50	10,00	28,80	-
24a	0,50	5,24	32,00	-
25a	0,50	5,24	28,80	50,00
26a	0,50	5,24	28,80	100,00
27a	0,50	5,24	28,80	150,00

Analiza rezultatov

Na podlagi izračunanih (modeliranih) vrednosti VGT lahko za vsako obravnavano točko izvedemo primerjavo z referenčno (merjeno) vrednostjo VGT. Dobimo razliko odstopanj za vse točke za vse modele, ki jo obravnavamo kot napako modeliranja:

$$\Delta_i = VGT_{ref} - VGT_{mod}, \quad (7)$$

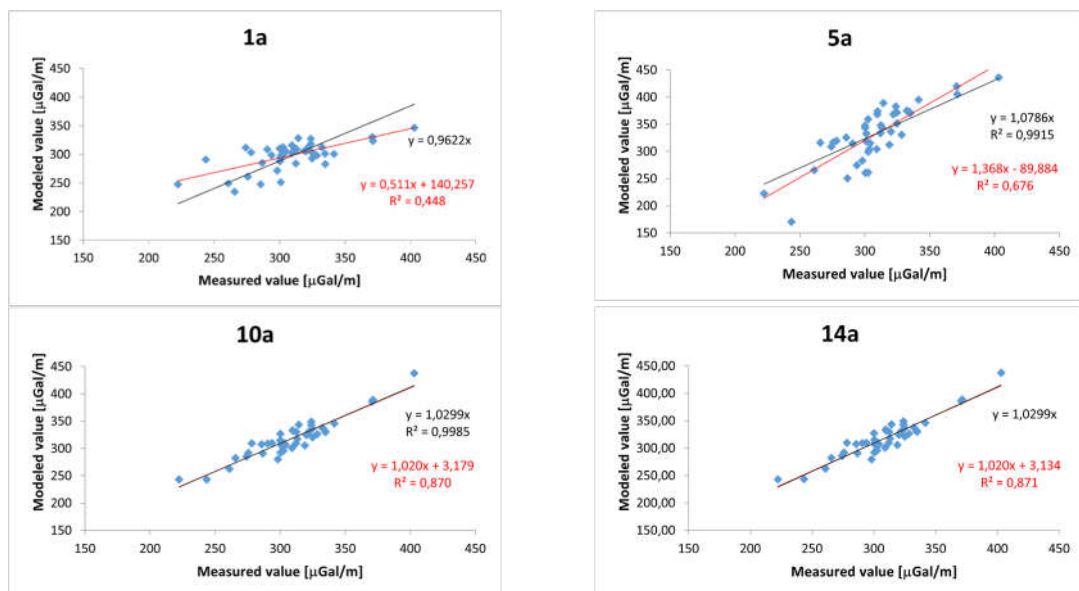
kjer je VGT_{ref} referenčna (merjena) vrednost vertikalnega gradienta težnosti in VGT_{mod} modelirana (izračunana) vrednost vertikalnega gradienta težnosti.

Za vsak posamezni model lahko na podlagi odstopanj (Δ_i) na vseh 30 testnih točkah določimo statistične kazalce odstopanj: Min. – minimum, Maks. – maksimum, Raz. – razpon, Pov. – povprečje, Med. – mediana, Std. o. – standardni odklon, RMS – korenjen srednji kvadratni pogrešek. Korelacijo med merjenimi in modeliranimi vrednostmi vertikalnih gradientov težnosti preverimo s pomočjo Pearsonovega korelacijskega testa: vrednosti R^2 (RSQ) – kvadrat korelacijskega koeficienta, r – korelacijski koeficient, m – koeficient linearne trendne regresije. Zbirnik statističnih kazalcev vseh izračunanih modelov za testno območje je prikazan v preglednici 3.

Preglednica 3: Statistični kazalci odstopanj med referenčnimi in modeliranimi vrednostmi VGT.

Model	Min [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Max [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Raz. [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Pov. [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	Std. o. [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	RMS [$\mu\text{Gal}/\text{m}$]	R^2	r	m
1a	-47,6	56,2	103,9	10,2	23,4	25,5	0,448	0,669	0,962
2a	-28,8	34,3	63,2	-0,6	14,4	14,4	0,788	0,888	1,000
3a	-62,7	28,6	91,3	-15,1	21,2	26,1	0,786	0,886	1,051
4a	-63,4	38,2	101,6	-24,1	26,0	35,5	0,714	0,845	1,080
5a	-63,9	41,3	105,2	-23,2	27,4	36,0	0,684	0,827	1,077
6a	-34,5	18,8	53,3	-9,2	12,3	15,4	0,870	0,933	1,030
7a	-34,7	18,1	52,8	-9,2	12,3	15,4	0,871	0,933	1,030
8a	-34,7	18,0	52,7	-9,4	12,3	15,4	0,871	0,933	1,030
9a	-34,5	18,8	53,3	-9,2	12,3	15,3	0,870	0,933	1,030
10a	-34,7	18,1	52,8	-9,2	12,3	15,4	0,870	0,933	1,030
11a	-34,7	18,0	52,7	-9,4	12,3	15,4	0,871	0,933	1,030
12a	-34,5	18,8	53,3	-9,2	12,3	15,3	0,871	0,933	1,030
13a	-34,7	18,1	52,7	-9,2	12,3	15,3	0,871	0,933	1,030
14a	-34,6	18,7	53,3	-9,2	12,3	15,3	0,871	0,933	1,030
15a	-190,3	-18,5	171,8	-113,7	32,0	118,1	0,143	0,378	1,358
16a	-187,9	-15,3	172,6	-112,1	30,6	116,2	0,236	0,486	1,355
17a	-168,6	-12,8	155,8	-95,0	30,5	99,7	0,329	0,573	1,302
18a	-139,4	-12,0	127,4	-71,4	28,9	77,1	0,393	0,627	1,227
19a	-108,7	-6,4	102,3	-48,2	23,3	53,5	0,538	0,733	1,152
20a	-93,4	-0,1	93,3	-38,9	20,5	44,0	0,621	0,788	1,123
21a	-41,9	9,5	51,4	-18,0	13,0	22,2	0,841	0,917	1,057
22a	-36,0	16,0	52,0	-10,6	12,3	16,2	0,869	0,932	1,034
23a	-36,0	15,9	51,9	-10,6	12,3	16,2	0,869	0,932	1,034
24a	-35,8	16,3	52,1	-10,5	12,3	16,1	0,869	0,932	1,034
25a	-35,3	17,1	52,4	-9,9	12,3	15,8	0,870	0,933	1,032
26a	-34,9	17,8	52,7	-9,5	12,3	15,5	0,870	0,933	1,031
27a	-34,7	18,1	52,8	-9,3	12,3	15,4	0,870	0,933	1,030

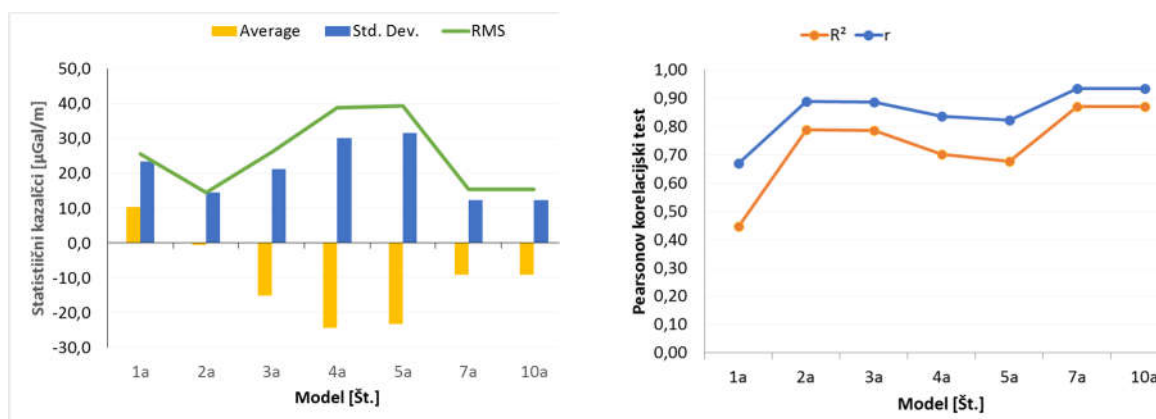
Za nekaj reprezentativnih modelov so na grafikonih izrisane linearne regresijske (trendne) funkcije in pripadajoči R^2 (RSQ) na sliki 7. Z rdečo barvo so prikazane funkcije v obliki enačbe $y = mx + a$ in s črno barvo v obliki enačbe $y = mx + 0$. Na osi x so modelirane (izračunane) vrednosti, na osi y pa referenčne (merjene) vrednosti vertikalnih gradientov težnosti. Že iz spodnjih štirih prikazanih modelov se vidi, da se korelacije močno razlikujejo glede na izbrani model.



Slika 7: Korelacije med referenčnimi (os x) in modeliranimi (os y) VGT za štiri obravnavane modele.

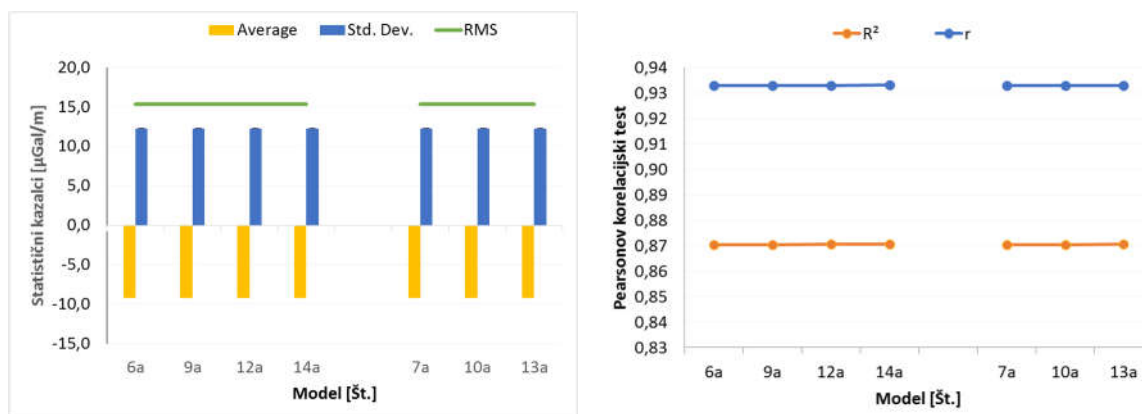
Na podlagi izvedenih računov lahko s pomočjo statističnih kazalcev in korelacijskega testa neposredno primerjamo vpliv posameznih vhodnih podatkov na končni rezultat in izvedemo analizo vpliva resolucije DMR, vpliva referenčne razdalje in vpliva položaja obravnavane točke.

Na sliki 8 so obravnavani modeli, kjer se spreminjajo podatki DMR (resolucije 1000 m, 100 m, 25 m, 12,5 m, 1 m), pri čemer so razdalje izračuna enake (166,74 km). Pričakovano se rezultati modeliranih VGT izboljšujejo z večanjem resolucije uporabljenih DMR, torej najboljši so rezultati pri uporabi DMR1 (modela 7a in 10a) in najslabši pri uporabi DMR1000 (modela 1a in 2a). Iz rezultatov sklepamo, da resolucija DMR bistveno vpliva na rezultat izračuna, pri čemer večja resolucija DMR poda boljše rezultate modeliranega vertikalnega gradienta.



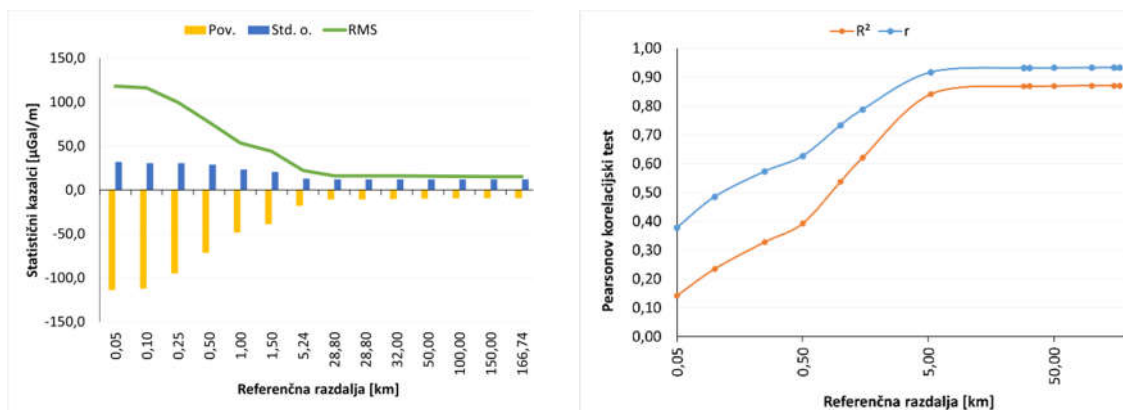
Slika 8: Statistični kazalci – uporaba različnih resolucij DMR v coni 1.

Na sliki 9 prikazujemo vpliv uporabe različnih resolucij DMR v oddaljenih conah (cona 2 in cona 3), pri čemer referenčne razdalje ostajajo nespremenjene. Pri vseh modelih je do razdalje r_1 (0,25 km ali 0,5 km) uporabljen DMR1, od r_1 naprej pa različni razpoložljivi DMR in sicer (12,5 m, 25 m, 100m) in v coni 4 DMR1000. Uporabljeni so modeli 6a, 9a, 12a, 14a, 7a, 10a in 13a. Vidimo, da sprememb med njimi dejansko ni zaznati. Iz tega sklepamo, da resolucija DMR v conah 2 in 3, torej na razdalji do 5,24 oz. 28,8 km, ne vpliva na rezultat izračuna, seveda pa se z večanjem resolucije podaljšuje računski čas.



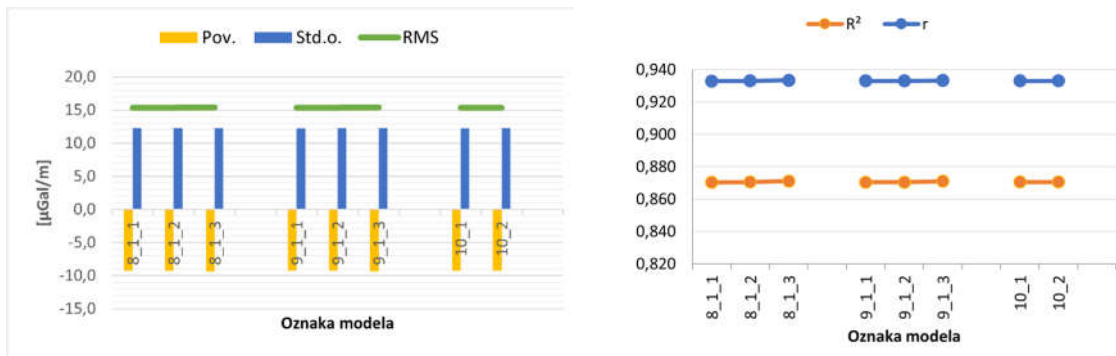
Slika 9: Statistični kazalci – uporaba različnih resolucij DMR v coni 2 in coni 3.

Na sliki 10 so prikazani statistični kazalci izračunov v odvisnosti od končne razdalje izračuna okoli posamezne točke (modeli 15a, 16a, 17a, 18a, 19a, 20a, 21a, 22a, 23a, 24a, 25a, 26a, 27a in 12a). Pri tem smo pri vseh izračunih uporabili isto kombinacijo DMR (DMR1, DMR25, DMR100 in DMR1000), spreminja se samo r_i . Vidimo, da se rezultati bistveno izboljšajo, če v izračunu upoštevamo radij vsaj 10 km okoli posamezne točke, od 30 km naprej pa ni zaznati nobenega vpliva.



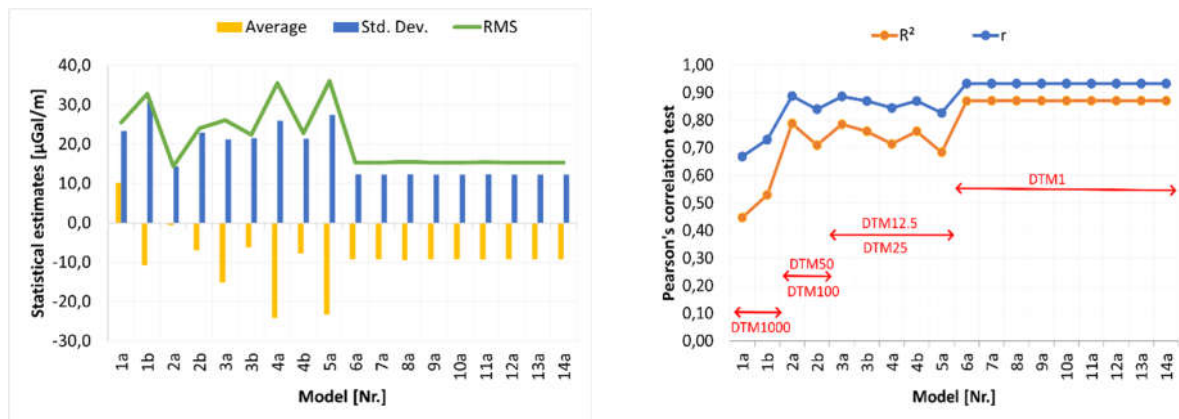
Slika 10: Statistični kazalci – vpliv končne referenčne razdalje izračuna.

Na sliki 11 so prikazane razlike med modeli, kjer spreminjamo samo razdaljo v coni 1 (r_1), torej v neposredni bližini točke (0,25 km, 0,5 km in 1km). Pri vseh variantah uporabimo isto kombinacijo DMR, v coni 1 uporabimo DMR1, v coni 2 DMR25 (modeli 8_*) oz. DMR12_5 (modeli 9_*), v coni 3 DMR100 in coni 4 DMR1000. Uporabljeni so modeli 6a, 7a, 8a, 9a, 10a, 11a, 12a in 13a. Vidimo, da sprememba r_1 dejansko ne vpliva na rezultate izračuna, saj so vsi statistični kazalci skoraj identični.



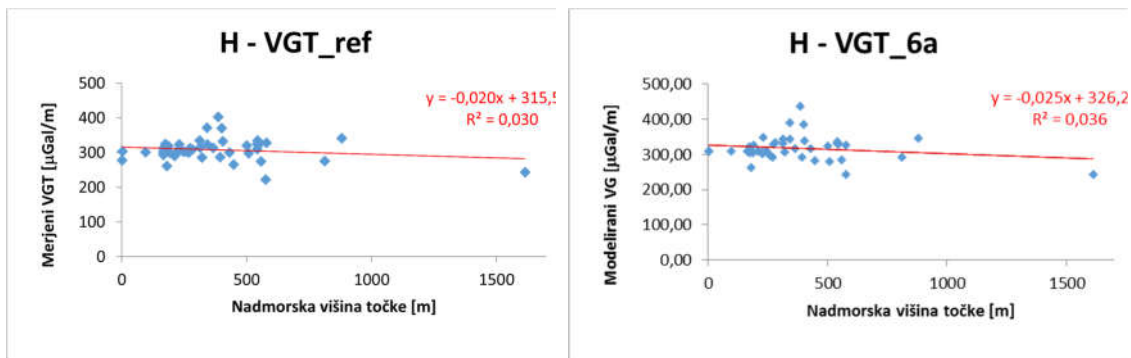
Slika 11: Statistični kazalci – vpliv referenčne razdalje v coni 1 z DMR1.

Za celovitejši pregled je smiselno grafično prikazati statistične kazalce izračunov še za vse obravnavane modele skupaj. To nam poda grobi vpogled v razmerja med posameznimi modeli in končnimi modeliranimi vrednostmi VGT. Na sliki 12 so prikazani vsi obravnavani modeli. Na desnem grafikonu so tudi označeni osnovni parametri, ki v grobem podajajo vpliv bistvenega elementa na rezultate.



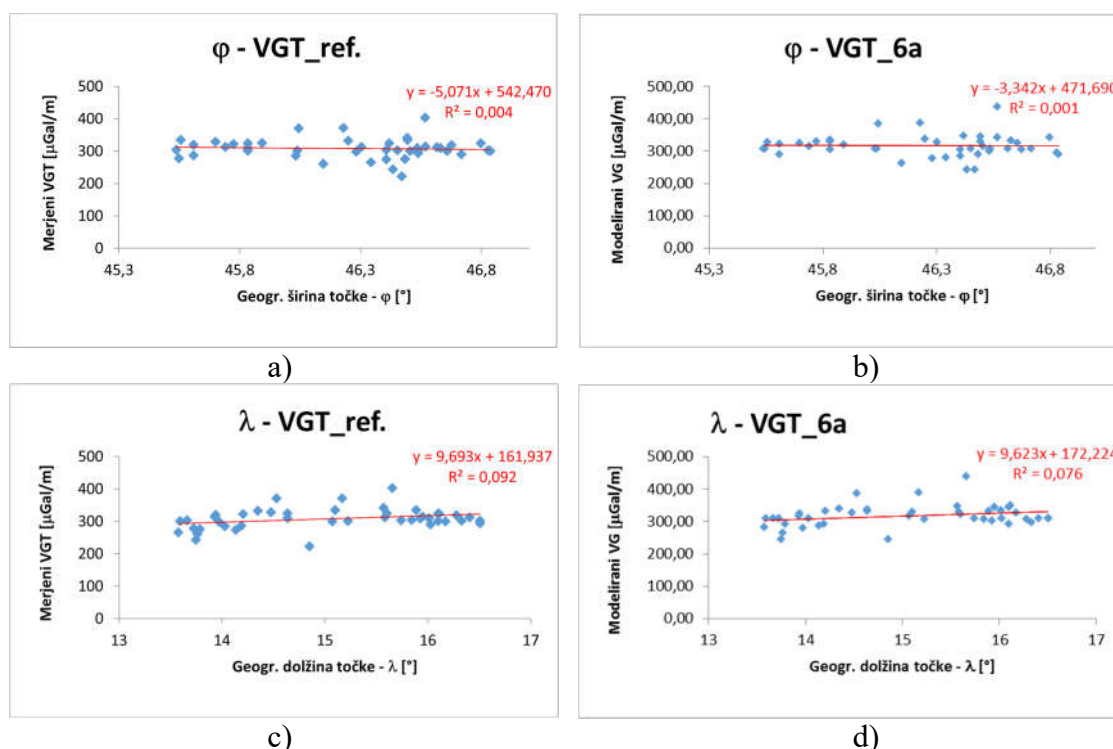
Slika 12: Prikaz statističnih cenilk za vse obravnavane modele skupaj.

Zanimajo nas morebitne korelacije med vertikalnimi gradienti težnosti (merjenimi ali modeliranimi) in ostalimi spremenljivkami – nadmorsko višino (slika 13) ter geografsko širino oz. geografsko dolžino (slika 14). Predvidevamo, da korelacije ni.



Slika 13: Prikaz korelacije med nadmorsko višino točk (H) in levo referenčnim VGT ter desno modeliranim VGT (primer modela 6a).

Prav tako ni zaznati korelacije med merjenimi oz. modeliranimi VGT in položajem točk (φ , λ), ki je prikazana na grafikonih na sliki 14.



Slika 14: Prikaz korelacij med geografsko širino (φ) in a) referenčnim VGT b) modeliranim VGT (primer modela 6a), ter geografsko dolžino (λ) in c) referenčnim VGT d) modeliranim VGT (primer modela 6a).

Kot je že navedeno je ocenjena natančnost (σ_{VGT}) izvedenih terenskih meritev vertikalnih gradientov težnosti z relativnim gravimetrom Scintrex $\sim 6 \mu\text{Gal/m}$ (glej preglednico 1). S faktorjem $k = 2$ lahko sprejmemo zgornjo kontrolno mejno vrednost razlik med izmerjenimi in modeliranimi vertikalnimi gradienti, ki tako znaša $\sim 12 \mu\text{Gal/m}$. Na podlagi te mejne vrednosti lahko ugotovimo, kateri modeli dejansko dosegajo natančnost, ki je primerljiva z merjenimi vrednostmi. Za primerljivo statistično cenilko vzamemo standardni odklon obravnavanih modelov (iz preglednice 3) in na podlagi tega kriterija lahko sklepamo naslednje:

- če želimo, da je natančnost modeliranih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti primerljiva z natančnostjo merjenih vrednosti, je potrebno v postopku modeliranja (v bližnji okolici obravnavane točke) uporabiti DMR v resoluciji $1 \times 1 \text{ m}$. Za bližnjo okolico (cona 1) se smatra razdalja vsaj 250 m.

- če želimo, da je natančnost modeliranih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti primerljiva z natančnostjo merjenih vrednosti, je potrebno poleg zgoraj navedenega v postopku modeliranja upoštevati razdaljo vsaj 28,8 km okoli obravnavane točke.

Očitno je torej, da resolucija uporabljenega DMR, predvsem v najbližji coni (cona 1), bistveno vpliva na kvaliteto rezultata. Razlika med DMR1000 in DMR1 je očitna (glej tudi slike 8 do 11), saj je korelacijski koeficient bistveno višji (od 0,6 do 0,9). Podobno pričajo tudi ostali statistični kazalci.

Zaključek

Poznane vrednosti vertikalnih gradientov težnosti imajo v geodeziji velik pomen. Pri gravimetričnih meritvah je namreč potrebno reducirati vrednosti izmerjenih težnih pospeškov, pa naj si gre za relativne ali absolutne gravimetrične meritve, iz nivoja senzorja gravimetra na nivo same merjene točke. Običajno se za to uporabi normalni vertikalni gradient težnosti ($308,6 \mu\text{Gal}/\text{m}$), ki predstavlja splošno sprejeto srednjo vrednost. Vendar pa dejanske vrednosti vertikalnih gradientov težnosti lahko tudi zelo odstopajo. Na podlagi nekaj konkretnih primerov iz prakse smo preverili smotrnost uporabe dejanskega vertikalnega gradienta pri obdelavi gravimetričnih meritev. Iz njih je razvidno, da je v nekaterih primerih pogrešek, ki ga naredimo v postopku obdelave relativnih gravimetričnih meritev, zaradi nepoznavanja dejanskega vertikalnega gradienta težnosti, zelo velik. Lahko celo preseže $100 \mu\text{Gal}$, kar bistveno presega oceno natančnosti rezultata (vrednosti težnega pospeška na točki). Na njegovo velikost vplivata dva bistvena dejavnika, ki sta vrednost dejanskega vertikalnega gradienta težnosti na točki in višinska razlika med točko in merskim senzorjem gravimetra. Iz navedenih primerov lahko zaključimo, da je za praktično implementacijo te raziskave v geodetsko prakso oz. v obdelavo gravimetričnih meritev, bistveno vprašanje, s kakšno natančnostjo želimo dobiti rezultate meritve. V splošnem lahko rečemo, da npr. za potrebe določitve geopotencialnih kot reperjev ali izračun (kvazi)geoida zadostuje uporaba normalnega vertikalnega gradienta težnosti. Nasprotno pa je poznavanje dejanskega vertikalnega gradienta težnosti bistveno pri izvedbi lokalnih mikro-gravimetričnih meritev, kjer se zahteva natančnost pod $10 \mu\text{Gal}$.

Uporabljena tehnika modeliranja vertikalnega gradienta težnosti se razlikuje od znanih in uporabljenih postopkov modeliranja vertikalnega gradienta težnosti. Prvič, namesto da bi uporabili različni metodi za izračun vpliva topografskih mas pod in nad geoidom, smo z uporabo iste metode ocenili vpliv vseh mas nad elipsoidom. Drugič, za določitev območja računanja in razdelitve na cone smo uporabili lik kvadrat, kar je v nasprotju z običajno uporabljenim likom kroga in sicer smo to izvedli z namenom izboljšanja hitrosti izračuna. Poleg tega so bile pri modeliranju uporabljene teoretične enačbe, ki omogočajo modeliranje ne glede na geografski položaj in nadmorsko višino obravnavane točke.

Prostorska ločljivost uporabljenega DMR pomembno vpliva na natančnost modeliranega VGT. Modelirane vrednosti VGT so povezane z izmerjenimi vrednostmi s korelacijskimi koeficienti v razponu od 0,669 (DMR z ločljivostjo $1000 \times 1000 \text{ m}$) do 0,933 (DMR z ločljivostjo $1 \times 1 \text{ m}$), kar kaže na velik vpliv pravilno obravnavanih topografskih mas pri modeliranju VGT. Za modeliranje VGT je treba upoštevati računsko razdaljo najmanj 10 km okoli obravnavane točke. Vpliv topografskih mas od razdalje 30 km naprej pa ne prispeva bistveno k točnosti izračuna. Največji prispevek pri modeliranju VGT ima najbližja cona, prispevek bolj oddaljenih con ima veliko manjši vpliv, zato je pomembno, da v neposredni bližini (cona 1) obravnavane točke uporabimo najbolj kakovosten DMR (npr. $1 \times 1 \text{ m}$). Analiza različnih razdalj prve oz. najbližje cone (0,25 km, 0,5 km in 1 km) kaže na bistveno naraščanje računskega časa ter rahlo in nepomembno povečanje kakovosti modeliranja. Podobno velja pri uporabi DMR z različnimi ločljivostmi ($12,5 \times 12,5 \text{ m}$, $25 \times 25 \text{ m}$ ali $100 \times 100 \text{ m}$) v conah 2 in 3. Zato je smiselno uvesti delitev obravnavanega računskega območja na posamezne cone (od 1 do 4), kjer se uporabljajo DMR z različnimi ločljivostmi. Uporaba DMR1 v coni 1 (od 0 m do 250 m), DMR25 v coni 2 (od 0,25 km do 5,24 km), DMR100 v coni 3 (od 5,24 km do 28,8 km) in DMR1000 v coni 4 (od 28,8 km do 166,7 km) se izkaže za najustreznejšo kombinacijo uporabljenih DMR z različnimi ločljivostmi, v smislu optimizacije računskega časa in točnosti rezultatov. Zato predlagamo

uporabo te kombinacije DMR in referenčnih razdalj v prihodnjih izračunih. Če želimo, da je natančnost modeliranih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti primerljiva z natančnostjo merjenih vrednosti, je potrebno v postopku modeliranja (v bližnji okolici obravnavane točke) uporabiti DMR v resoluciji 1×1 m. Za bližnjo okolico (cona 1) se smatra razdalja vsaj 250 m. Če želimo, da je natančnost modeliranih vrednosti vertikalnih gradientov težnosti primerljiva z natančnostjo merjenih vrednosti, je potrebno poleg zgoraj navedenega v postopku modeliranja upoštevati razdaljo vsaj 28,8 km okoli obravnavane točke. Na podlagi rezultatov lahko tudi sklepamo, da med višino terena in napako modeliranja ni statistično značilne korelacije. Enako velja tudi za geografski položaj obravnavane točke. Kakovost modeliranega VGT tako ni odvisna od geografske lege ali nadmorske višine. Analiza vpliva (učinkov) višine nad terenom, na katero se nanašajo izračuni, kaže, da je razlika med rezultati modeliranja za dve bližnji višini nepomembna in, da je mogoče modeliranje vertikalnega gradienta težnosti izvesti s privzeto vrednostjo višine nad terenom, ki je bila 1 m.

Ker postopek modeliranja vertikalnih gradientov težnosti, uporabljen v tej nalogi, dosega natančnost reda samih meritev že ob uporabi fiksne gostote topografskih mas (2670 kg/m^3), lahko tudi zaključimo, da uporabljena metoda ustreza trenutnim praktičnim zahtevam v geodeziji.

Literatura in viri

- Crossley D., Hinderer J., & Riccardi U. (2013). The measurement of surface gravity. *Rep Prog Phys*, 76, 4:046-101. doi: 10.1088/0034-4885/76/4/046101
- Dykowski, P. 2012. Vertical gravity gradient determination for the needs of contemporary absolute gravity measurements – first results. *Reports on Geodesy*, 92(1): 23–35.
- Hinze, W.J., Aiken, C., Brozena, J.M., Coakley, B.J., Dater, D., Flanagan, G.P., Forsberg, R., Hildenbrand, T.G., Keller, G.R., Kellogg, J.W., Kucks, R., Li, X., Mainville, A., Morin, R.J., Pilkington, M.I., Plouff, D., Ravat, D., Román, D.A., Urrutia-Fucugauchi, J., Véronneau, M., Webring, M.W., Winester, D. 2005. New standards for reducing gravity data: The North American gravity database. *Geophysics*, 70(4): 25–32. DOI: [10.1190/1.1988183](https://doi.org/10.1190/1.1988183).
- Hirt, C. (2016). Gravity forward modelling. In E. Grafarend (Ed.), *Encyclopedia of Geodesy*. Cham, Switzerland: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-02370-0_106-1
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2006). *Physical Geodesy*. Vienna: Springer. doi:10.1007/978-3-211-33545-1
- Koler, B., Medved K., Kuhar M. 2012. The New Fundamental Gravimetric Network of Slovenia. *Acta geodaetica et geophysica Hungarica*, 47(3): 271–286. DOI: [10.1556/AGeod.47.2012.3.1](https://doi.org/10.1556/AGeod.47.2012.3.1).
- LaCoste & Romberg, 2004. Instruction Manual Model G & D Gravity Meters, LaCoste & Romberg, Austin, Texas, USA.
- Makhloof, A.-E. (2007). *The Use of Topographic-Isostatic Mass Information in Geodetic Applications*. Bonn: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- Nagy, D., Papp, G., & Benedek, J. (2000). The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, 552-560. doi:10.1007/s001900000116
- Odalović, O., Medved, K., Naod, S. 2022. Modeling of vertical gravity gradient by normal gravity field and digital terrain models. *Journal of Geodesy* 96, art.74: 18.str.DOI: [10.1007/s00190-022-01669-y](https://doi.org/10.1007/s00190-022-01669-y)
- Repanić, M., Kuhar, M., Malović, I. 2015. High precision vertical gravity gradient determination in Croatia. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 50: 151–171. DOI: [10.1007/s40328-015-0102-z](https://doi.org/10.1007/s40328-015-0102-z).
- Scintrex 2017. CG-6 Autograv Gravity Meter. Operation Manual. Revision A, Concord, Canada, Scintrex Limited: 84 str.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Berlin-New York: Walter de Gruyter.

- Tsoulis, D. (1999). Analytical and Numerical Methods in Gravity Field Modelling of Ideal and Real Masses, Doctoral Dissertation. Munchen: Technischen Universitat Munchen.
- Zahorec, P., Marušiak, I., Mikuška, J., Pašteka, R., & Papčo, J. (2017). Numerical Calculation of Terrain Correction Within the Bouguer Anomaly Evaluation (Program Toposk). In J. M. Roman Pašteka (Ed.), *Understanding the Bouguer Anomaly* (pp. 79-92). Amsterdam: Elsevier. doi:10.1016/B978-0-12-812913-5.00004-X