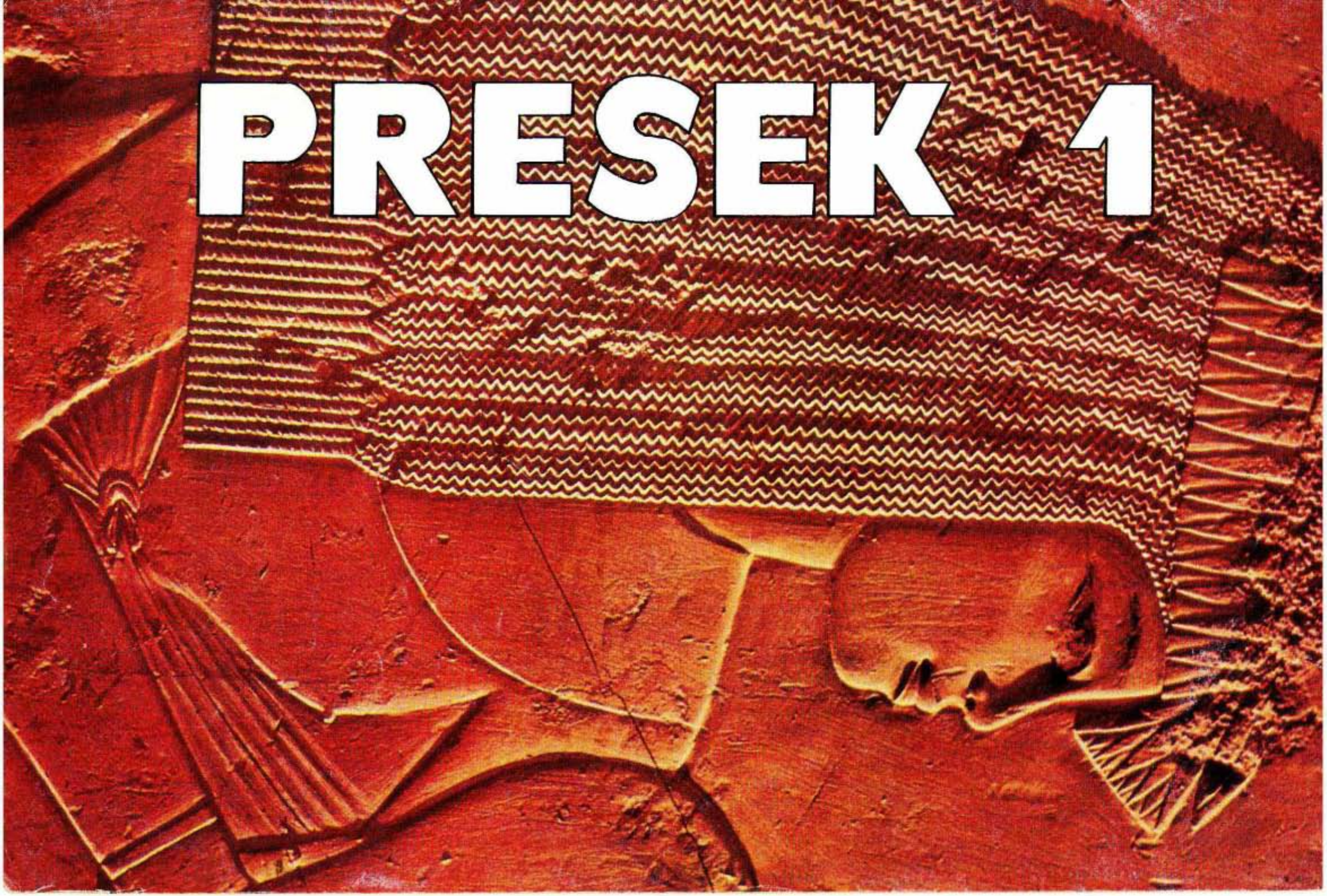

PRESEK 1

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

18 letnik, leto 1990/91, številka 1, strani 1-64

VSEBINA

UVODNIK

"Ste vretenčar?"
"Da."
"Dihate dvojno?"
"Ne, samo zrak ..."
"S katerega planeta, če smem vprašati?"
"Z Zemlje."
"Potem pa, prosim, k naslednjemu okencu."

Stopil sem tja. Pogledal sem noter in se prepričal, da imam pred seboj istega uradnika, pravzaprav njegov nadaljnji del. Brskal je po veliki knjigi.

"A! Že imam," je rekel, "Zemlja ... hm, zelo dobro. Ste kot turist ali kot trgovec?"

"Kot turist."

"Potem pa dovolite ..."

Z eno od tipalk je izpolnil obrazec, z drugo pa mi je istočasno dal drug obrazec v podpis, potem pa rekel:

"Vmed* se bo začel čez teden dni. Bi hoteli, prosim, s tem v zvezi stopiti do sobe 116, tam je naša izdelovalnica rezerv, ki se bo ukvarjala z vami. Potem prosim, če stopite v sobo 67, kjer je farmacevtska kabina. Tam boste dobili pilule Evfrugium, ki jih morate jemati vsake tri ure, da bi nevtralizirali za vaš organ škodljivo radioaktivno delovanje našega planeta ... Ali se želite svetiti med vašim bivanjem na Enteropiji?"

"Ne, hvala."

"Kakor želite. Prosim, tukaj so vaši dokumenti. Vi ste sesalec, ali ne?"

"Da."

"Potem pa prijetno sesanje!"

---

* vesoljski meteorski dež

Iz romana *Zvezdni utrinki Iljina Tihega* Stanisława Lema.

MATEMATIKA

KITE – SPLETI – VOZLI

1. Kulturna zgodovina nam kaže, da se je človek že od davnine zanimal za pletenje in vozlanje. Kite občudujemo v raznih pleteninah, vzbujajo nam zaradi praktičnosti in lepega občutek urejenosti in naravnosti; z vozli se ukvarjajo praktično vsepovsod: od tehnike, medicine do umetnosti.

V geometriji poznamo razne like, telesa, računamo jim razne prirejene količine: ploščine, površine, prostornine. Pa se seznanimo še z nekimi drugimi "bitji" geometrijskega prostora; za ogrevanje si jih oglejmo na slikah:

Poskusi, ali je ta vozel zavozlan?

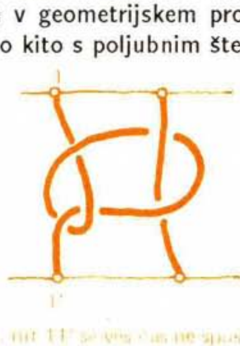
Splet dveh uverižemih krožnic

Boromejski splet: poljubni krožnici tega spleta nista uveriženi, trojica je

Matematiki so v prejšnjem stoletju pričeli več razmišljati o načinih obravnave in računanju s kitami in vozli. S temi vrsticami usmerimo v to področje nekaj prvih korakov.

2. Na vsaki od dveh vzporednih vodoravnih daljic ("deščic") na skupni navpični ravnini izberimo na enakih medsebojnih razdaljah štiri točke ("žebljičke"), na zgornji 1, 2, 3, 4 in na spodnji daljici točke 1', 2', 3', 4'. Pa jih povežimo s štirimi nitmi; to je mogoče narediti na različne načine, vedno pa pazimo na to, da se niti vedno spuščajo, kar pomeni, da vsaka nit kvečjemu enkrat seče vsako ravnino R, ki je vzporedna deščicama in je pravokotna na navpično ravnino. Tako nastane v geometrijskem prostoru kita s štirimi nitmi. Na podoben način oblikujemo kito s poljubnim številom

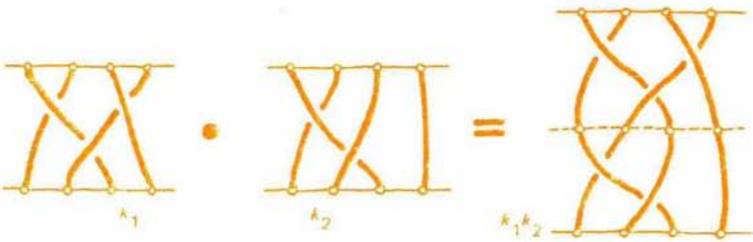
Kita s štirimi nitmi



To ni kita: nit 11' se ves čas ne spušča niti (pri nas bo to število 1, 2, 3, 4).

Enakost kit. Kito smemo po prostoru premikati z vzporednimi togimi premiki, njene niti smemo tudi premikati npr. levo-desno, pri čemer si mislimo, da so te niti raztegljive ali pa skrčljive, pazimo pa na to, da ne prekršimo zgornjega pogoja o ravnini R. Niti se naj med seboj ne sečejo ali dotikajo.

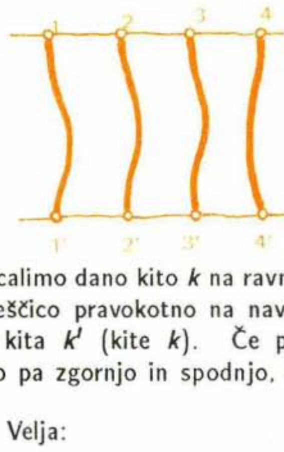
Zmnožek dveh kit k_1 in k_2 (z enakima številoma niti) uvedemo preprosto takole: prvi kiti k_1 prilepimo drugo kito (in srednjo deščico odstranimo):



Enotska kita (na kratko enota e): kito, ki ji lahko vse niti "poravnamo", imenujemo enota.

Vidimo, da je poimenovanje enota upravičeno, saj za poljubno kito k velja:

$$ke = ek = k$$



Zrcalna ali obratna kita dane kite. Prezrcalimo dano kito k na ravnini R (primerjaj na sliki), ki gre skozi spodnjo deščico pravokotno na navpično ravnino, pa nastane zrcalna (ali obratna) kita k' (kite k). Če potem odmislimo srednjo deščico 1'2'3'4, ohranimo pa zgornjo in spodnjo, lahko niti poravnamo, tako da nastane enota e:

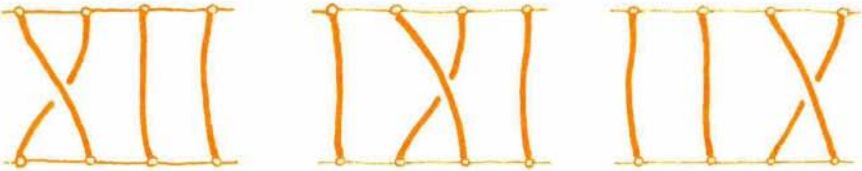
Velja:

$$(k')' = k$$
$$e' = e$$
$$kk' = k'k = e$$

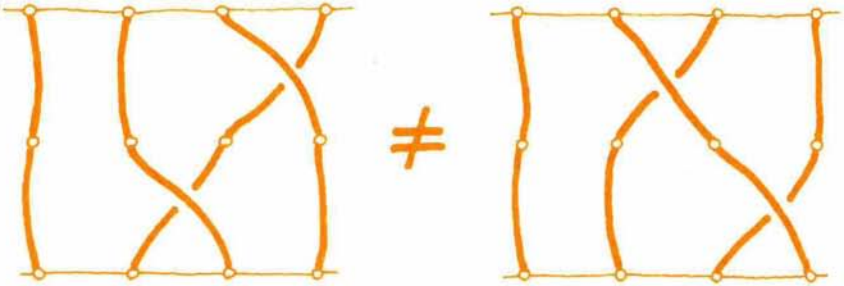
Razvidno je, da za poljubne tri kite k_1, k_2, k_3 velja pri množenju združljivost (asociativnost)

$$(k_1 k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 k_3)$$

Žal pa v splošnem množenje kit ni zamenljivo (komutativno), kot kaže zgled s kitama a in b (ali b in c):



a b c



ab ba

Kite a, b, c in njihove zrcalne kite imenujemo *osnovne kite* (s štirimi nitmi).

Pri kitah a in b opazimo, da sta njuna "nadvoza" za en "korak" vsaksebi. Pravimo, da sta a in b sosednji kiti; po prejšnjem sodilu prav lahko ugotovimo, da sta si kiti v tehle parih tudi sosednji:

a' in b	b in c
a in b'	b' in c
a' in b'	b in c'
	b' in c'

Drugače sta osnovni kiti nesosednji, npr. a in c.

Prav lahko s sliko ugotoviš: Zmnožek nesosednjih osnovnih kit je zamenljiv. Torej: $ac = ca$, $a'c = ca'$, $ac' = c'a$, $a'c' = c'a'$.

Za vajo potrdi, da veljata enakosti

$$aba = bab \quad \text{in} \quad bcb = cbc$$

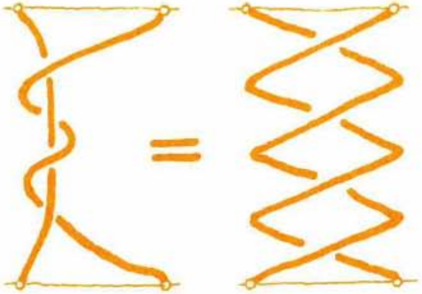
medtem ko ne velja

$$aca = cac$$

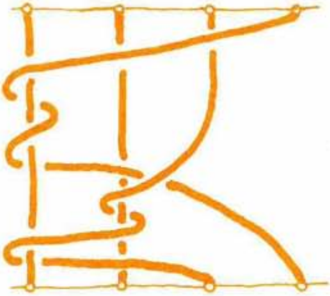
Pomen osnovnih kit je razviden iz te trditve:

S pripravnimi dovoljenimi premiki niti je mogoče doseči, da je dana kita zmnožek osnovnih kit.

Zgled. S kito z dvema nitima ni posebno mnogo dela, precej več ga je s kito s štirimi nitmi:



$k_1 = aaaa = a^4$

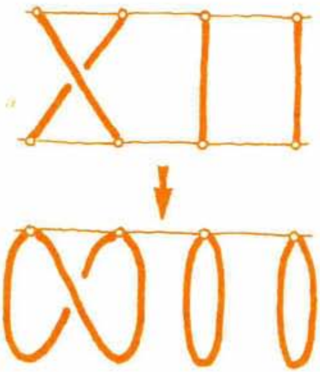


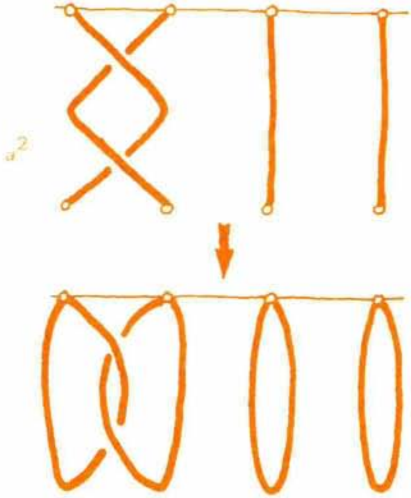
Upoštevajoč zgornje lastnosti (osnovnih) kit se da za dano kito tudi računsko ugotoviti, ali je (ni) enota.

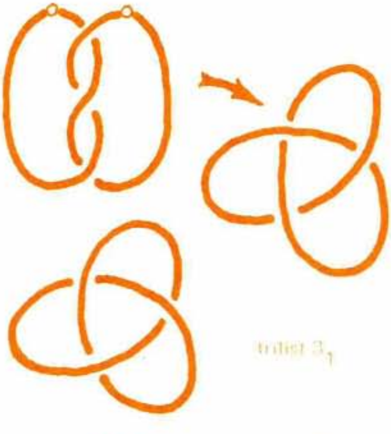
Zgled. Kita $k = bac'a'cb'aca'c'$ je enota, saj je mogoče zapisati $k = b(ac')a'cb'(ac)a'c' = b(c'aa')cb'(ca)a'c' = bc'cb'cc' = bb' = e$. Nariši za kito k ustrezno sliko.

3. Zlepimo pri dani kiti k obe deščici, tako da se poistovetijo točke **1** in **1'**, **2** in **2'**, **3** in **3'**, **4** in **4'**. Iz kite k nastane *splet*. Ima lahko več enostavno sklenjenih krivulj (na kratko rečemo tudi krožnic). Če nastane samo ena sklenjena krivulja, govorimo o *vozlu*.

Zgledi. Iz osnovne kite a nastane splet treh krožnic. Iz kite $aa = a^2$ oblikujemo splet štirih krožnic, prvi dve sta med seboj uveriženi. Kita a^3 daje vozel s tremi nadvozi. Znak tega vozla je 3_1, imenujemo ga tudi *trilist*.







trilist 3_1

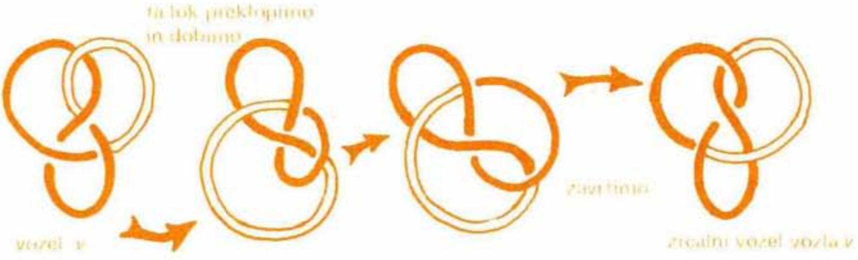
Izberimo na trilistu smer obhoda in to označimo s puščicami; pravimo, da smo vozel orientirali. Če pa zamenjamo na vozlu vlogi nadvoz-podvoz, dobimo zrcalni vozel

levi trilist

desni trilist

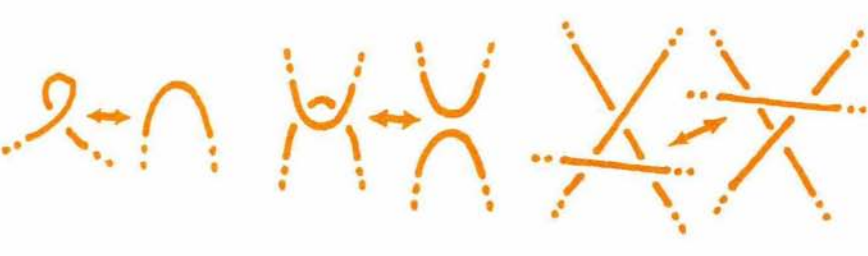
Seveda lahko to naredimo z vsakim vozlom v.

Obstajajo vozli, ki so sami sebi zrcalni. Tak je npr. vozel 4_1 s štirimi nadvozi, ki ga imenujemo na kratko *osmica*:



4. V praksi oblikujemo (sklenjen) vozel tako, da "zavozlamo" vrv in konca vrvi združimo:

Vrv in njene dele smemo potem še premikati, le pretrgati (ali celo presekati, kot je naredil neki vojskovodja z gordijskim vozlom) je ne smemo, pa dobimo k danemu vozlu ekvivalentni vozel. Trije osnovni dovoljeni premiki delov so vidni na tej sliki:



V geometriji pravimo, da nastane vozel z *vložitvijo* krožnice v (trirazsežni) prostor. Tudi tu dobimo iz vozla *ekvivalentnega*, če (končno krat) uporabimo osnovne premike (te je v geometrijo uvedel nemški matematik K. Reidemeister in se po njem poimenujejo Reidemeisterovi premiki vozla).

Vozel je razvozlan, če s temi osnovnimi premiki nastane iz danega vozla *v* "navadna krožnica" (tako kot pri kiti *a*) v prostoru. Zanjo uporabljamo v nadaljevanju znak ◯.

Vozle razvrstimo nekako po številu nadvozov:

Vidimo, da so prvi trije vozli v zgornji preglednici nezavozlani, vsi so ekvivalentni ◯. Za naslednje tri nam geometrijska nazornost pravi, da so zavozlani (da jih ni mogoče razvozlati).

Omenili smo dva načina oblikovanja vozlov. Pa se vprašajmo: Ali dobimo po obeh opisanih načinih iste vozle? Ali je mogoče ugotoviti (ne)zavozlanost tudi z računsko metodo?

Oba problema sodita v *topologijo*, lepo panogo sodobne matematike.

Prvi problem je leta 1925 pritrdilno rešil ameriški topolog J.W.Alexander: vse vozle je mogoče narediti z lepljenjem kit.

Glede drugega problema povejmo, da so topologi dognali to: vsakemu usmerjenemu vozlu v (spletu) je mogoče prirediti izraz $i(v)$ dveh spremenljivk x in y, tako da sta izpolnjeni dve lastnosti:

(1) Za nezavozlan vozel ◯ je $i(◯) = 1$

(2) Če se trije usmerjeni vozli (spleti) v^+, v^- in v^0 ujemajo povsod razen v okolici ene točke, kot kaže slika

velja enakost $xi(v^+) + \frac{1}{x}i(v^-) + yi(v^0) = 0$.

Pri uporabi je treba vedeti, da iz enakosti $i(v_1) = i(v_2)$ ne smemo sklepati na ekvivalentnost vozlov v_1 in v_2 (ali spletov), pač pa zagotovo vozla v_1 in v_2 nista med seboj ekvivalentna, če izraza $i(v_1)$ in $i(v_2)$ nista med seboj enaka. (Pravimo, da je enakost izrazov $i(v_1)$ in $i(v_2)$ potrebni pogoj ekvivalentnosti vozlov, ni pa zadostni.)

Preden preidemo k zgledom, pokažimo, kako iz dveh vozlov v_1 in v_2 oblikujemo njuno *povezano vsoto* $v_1 \rfloor v_2$: Oba vozla (v prostoru si ju mislimo vsaksebi) povežemo s trakom (možna sta dva načina), oblikovani usmerjeni vozel (torej povezana vsota) je označen s krepko črto:

Pokazati je mogoče, da je tako povezana vsota vozel, ki je določen do ekvivalence, in da velja enakost

(3) $i(v_1/v_2) = i(v_1)i(v_2)$

5. Zgledi.

a) Vemo že, da je vozel, ki nastane iz osnovne kite a ali a' (z dvema nitima), nezavozlan; splet, ki nastane iz enote e, pa ima dve neuveriženi krožnici. Vidno je, da lahko uporabimo (1) in (2):

in dobimo od tod izraz $i(v^0)$ dveh nespletenih krožnic

$$i(v^0) = -\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x})$$

b) Na podoben način dobimo po (2) in a) za tele splete

nespleteni krožnici spleteni krožnici nespletena krožnica

enakost $x(-\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x})) + \frac{1}{x}i(v^-) + y1 = 0$ in po lahkem računu sledi izraz spleta dveh uveriženih krožnic

$$i(v^-) = \frac{1}{y}(x^3 + x) - xy$$

Od tod sklepamo, da si spleta v^0 v a) in v^- v b) nista ekvivalentna.

Za vajo pokaži, da splet v^- v zgledu b) ni ekvivalenten spletu na tejle sliki:

c) Določimo izraz $i(3_1)$. Pozorno poglejmo sliko

pa lahko po (1), (2) pišemo: $x\mathbf{1} + \frac{1}{x}i(3_1) + yi(v^0) = 0$. Zaradi b) dobimo potem izraz za levi trilist

$$i(3_1 \text{ levi }) = -2x^3 - x^4 + x^2y^2$$

Izkaže se: če zamenjamo x z $\frac{1}{x}$, dobimo izraz i za desni trilist

$$i(3_1 \text{ desni }) = -2(\frac{1}{x})^3 - (\frac{1}{x})^4 + (\frac{1}{x})^2y^2$$

Ker noben teh izrazov ni $\mathbf{1}$, sklepamo, da sta trilista zavozlana; še več, trilista si nista ekvivalentna vozla (to velja zaradi neenakosti njunih izrazov).

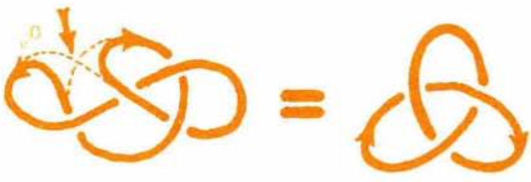
č) Tudi osmica 4_1 je zavozlan vozel, kot je vidno na podlagi slike in računov:

$$xi(4_1) = \frac{1}{x}\mathbf{1} + yi(v^0) = 0, \quad i(4_1) = -(\frac{1}{x})^2 - x^2 - 1 + y^2$$

Zanimivo je, da je ta izraz neobčutljiv na zamenjavo x z $\frac{1}{x}$, presenetljivo pa to ni, saj smo že pokazali (s poskusom), da je osmica sebi zrcalen vozel.

d) Na kraju pokažimo, da Whiteheadov splet (glej sliko) ni ekvivalenten niti spletu dveh neuveriženih niti spletu dveh uveriženih krožnic. To ugotovimo na podlagi slik in računov (puščice kažejo tudi, na katerih točkah se spleti razlikujejo):

v^+ (Whiteheadov splet W) v^- (uveriženi krožnici)



v^0 (trilist)

$$xi(W) = \frac{1}{x}i(v^-) + yi(v^0) = 0$$

Upoštevajoč zgleda b) in c) izračunamo

$$i(W) = -\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x}) + y(\frac{1}{x} + 2x + x^3) - xy^3$$

kar ni niti izraz v b) niti v c).

Ob koncu tega kratkega potepanja povejmo, da mnogo pomembnih matematičnih problemov privede do študija kit in vozlov.

Ivan Pucelj

REZANJE VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

Vzemimo v ravnini poljuben **izbočen** ali **konveksen** večkotnik. Z rezanjem ga lahko razdelimo na same trikotnike na neskončno mnogo načinov. Tukaj se bomo omejili na naslednji način rezanja: **Večkotnik režemo z njegovimi diagonalami, ki se ne sekajo v notranjosti.** Nekoč so nam v osnovni šoli pripovedovali, da je diagonalo odkril sam Pitagora, ki je imel prekratko posteljo, po diagonali iz kota v kot pa mu je bila ravno pravšnja.

Naj ima naš večkotnik n oglišč, kjer je $n \geq 3$. Z našim načinom rezanja povežemo nekatera oglišča z diagonalami. Stranicam in diagonalam skupaj bomo rekli **povezave**, ker povezujejo oglišča večkotnika. Ne pozabimo, režemo na **same trikotnike.** Rešili bomo naslednje naloge:

1. Izračunaj število E_n povezav, ki jih dobimo na ta način!
2. Izračunaj število T_n trikotnikov, na katere smo razrezali n-kotnik!
3. Poišči število D_n vseh različnih rezanj danega n-kotnika na same trikotnike na prej opisani način!

Odgovor na prvo vprašanje je preprost. Pri trikotniku imamo 3 povezave, torej $E_3 = 3$, pri štirikotniku nastane pri dogovorjenem načinu rezanja 5 povezav, to se pravi $E_4 = 5$. Ni težko videti, da dobimo pri $n+1$-kotniku le dve povezavi več kot pri n-kotniku, to pomeni, da velja preprosta zveza $E_{n+1} = E_n + 2$. Iz te pa hitro najdemo formulo

$$E_n = 2n - 3 \ , \quad n \geq 3$$

Podobno izračunamo število T_n. Najprej je očitno $T_3 = 1$ in $T_4 = 2$. Pri dogovorjenem načinu rezanja dobimo pri $n+1$-kotniku le en trikotnik več kot pri rezanju n-kotnika, to pomeni, da velja zveza $T_{n+1} = T_n + 1$, iz katere takoj sledi

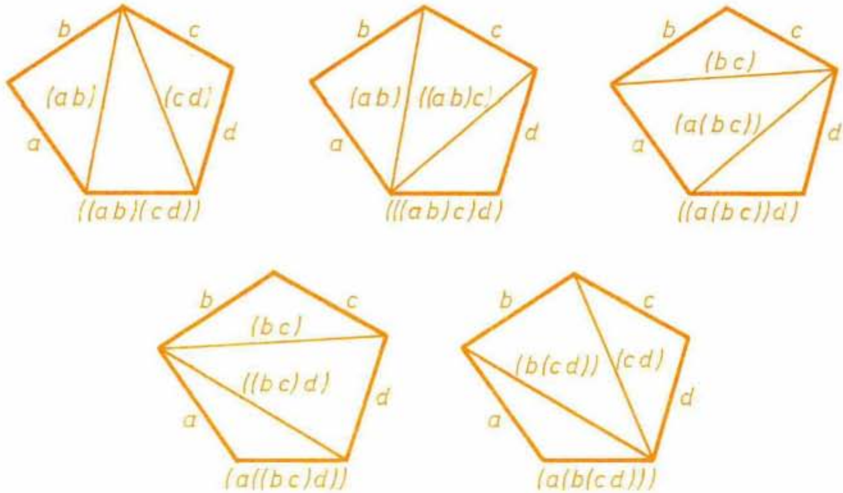
$$T_n = n - 2 \ , \quad n \geq 3$$

Zaradi popolnosti označimo z O_n število oglišč, ki nastopajo v naših nalogah. Seveda je $O_n = n$. Pri tem velja enakost

$$O_n - E_n + T_n = 1 \ , \ n \geq 3$$

v kateri bodo starejši bralci spoznali *Eulerjev izrek.*

Precej teže pa je rešiti tretjo nalogo. Za n-kotnike z majhnim številom oglišč n pridemo do števil D_n z risanjem vseh možnosti. Za $n = 3$ imamo



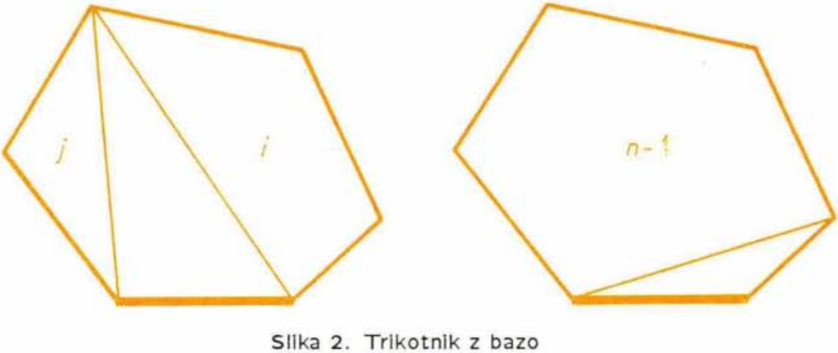
Slika 1. Rezanje petkotnika na trikotnike

trikotnik in tu ni kaj rezati. To pomeni $D_3 = 1$. Za $n = 4$ dobimo štirikotnik in $D_4 = 2$. Za petkotnik dobimo že 5 možnosti (slika 1): $D_5 = 5$.

Števila D_n za $n \geq 5$ bomo izračunali *rekurzivno*, to je z že znanimi števili

$$D_3, D_4, \ldots, D_{n-1}$$

Mislimo si, da imamo n-kotnik in v njem izbrano neko stranico, ki ji pravimo **baza** (slika 2). Iz krajišč te baze povlecimo diagonali v neko drugo oglišče našega n-kotnika. Naj ima večkotnik desno od trikotnika z bazo i, oni na levi strani pa j stranic, kjer je $i \geq 3$ in $j \geq 3$. Števili i in j nista neodvisni.



Slika 2. Trikotnik z bazo

Očitno mora veljati enakost $i+j-2+1=n$, torej $i+j=n+1$. Oglišče trikotnika z bazo naj se sedaj spreminja po vseh tistih ogliščih n-kotnika, ki niso krajišča baze. Za $i \geq 3$ in $j \geq 3$ lahko dobljene i- in j-kotnike desno in levo od trikotnika z bazo še naprej režemo na trikotnike na D_i oziroma D_j načinov, pri tem je $i \geq 3$, $j \geq 3$ in $i+j=n+1$. Pri izbranem trikotniku z bazo lahko to naredimo na $D_i D_j$ načinov. Če pa se zgodi, da je $j=n-1$, ko se desno od trikotnika z bazo večkotnik izrodi v daljico (slika 2 desno), lahko dalje delimo na trikotnike le $n-1$-kotnik levo od trikotnika z bazo, in to na D_{n-1} načinov. Podobno je s to rečjo v primeru $i=n-1$. Za $n \geq 5$ velja torej enakost

$$D_n = D_{n-1} + D_3 D_{n-2} + D_4 D_{n-3} + \ldots + D_{n-2} D_3 + D_{n-1}$$

ki jo lahko krajše zapišemo tudi takole:

$$D_n = 2D_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-2} D_i D_{n+1-i}\ ,\ n \geq 5$$

Z zadnjo formulo lahko izračunamo še nadaljnje člene zaporedja D_n :

$$D_6 = 14,\ D_7 = 42,\ D_8 = 132,\ D_9 = 429,\ D_{10} = 1430, \ldots$$

Seveda nas zanima končna formula za števila D_n. Te tu ne bomo dokazovali, glasi pa se takole:

$$D_n = \frac{1}{n-1} \cdot \binom{2n-4}{n-2}$$

pri tem smo uporabili binomski koeficient

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

o katerem smo v PRESEKU že dosti pisali.

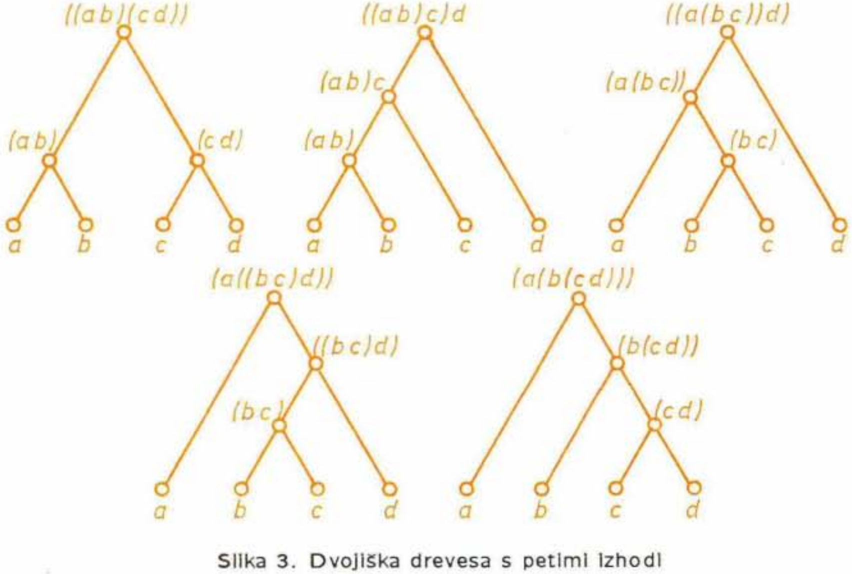
Naloga: Pokaži, da iz zgornje formule sledi

$$D_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot D_n$$

Števila D_n se ne pojavljajo samo pri našem problemu, ampak tudi drugod. Oglejmo si **problem postavljanja oklepajev**. Denimo,da imamo znake a, b, c, d v tem vrstnem redu. Zanima nas, na koliko načinov lahko mednje postavimo tri predklepaje "(" in tri zaklepaje ")" tako, da nikjer ne nastopata predklepaj "(" in zaklepaj ")" eden za drugim, ne da bi kaj oklepala, to se pravi, izločevali bomo možnost "()". Poudarimo, da je vrstni red znakov a, b, c, d stalen. Te možnosti so:

$$((ab)(cd)),\ (((ab)c)d),\ ((a(bc))d),\ (a((bc)d)),\ (a(b(cd)))$$

Možnosti je torej 5, to je D_5. Ali je kakšna zveza med številom rezanja večkotnika na trikotnike in postavljanjem oklepajev na opisani način v splošnem primeru? Je. Med n znake lahko tako postavimo $n-1$ predklepajev "(" in $n-1$ zaklepajev ")" tako, da se "(" in ")" nikdar ne srečata skupaj, na D_{n+1} načinov. To vidimo tako. Stranice $n+1$-kotnika označimo z n znaki, ena pa ostane zaenkrat neoznačena. Na opisani način razrežemo $n+1$-kotnik na trikotnike na vseh D_{n+1} možnih načinov. Če lahko v danem primeru stranici a, b (a, b sta katerikoli stranici) zaključimo v trikotnik, označimo tretjo stranico z (ab). Prej ali slej pridemo po večkotniku naokrog in nazadnje lahko označimo tudi prvotno neoznačeno stranico večkotnika (slika 1).



Slika 3. Dvojiška drevesa s petimi izhodi

Znan je še en primer, v katerem imamo opraviti s števili D_n. To je **primer dvojiških ali binarnih dreves**. Dvojiško drevo (primerjaj ga z rodovnikom, tudi v PRESEKU je bilo o drevesih že marsikaj napisanega) ima eno točko posebej odlikovano, pravimo ji **koren**. Iz njega izstopata dve veji, v vsako drugo točko pa vstopa ena veja, izstopata pa dve ali nobena. Tistim točkam, v katere vstopa ena veja, izstopa pa nobena, pravimo **izhodi drevesa**. Dvojiška drevesa z izhodi a,b,c,d v predpisanem vrstnem redu so na sliki 3. Očitno vsakemu dvojiškemu drevesu pripada neka postavitev oklepajev med znake a,b,c,d. Vsakokrat označimo točko, iz katere izhajata veji do a in b, z (ab), če vodita veji do b in (cd), označimo izhodno točko z $(b(cd))$ in tako naprej. Dvojiških dreves z n izhodi, ki so označeni v danem vrstnem redu, je natančno D_{n+1}.

Večkotnik smo v našem primeru rezali na trikotnike. Podobno bi lahko rezali tudi na štirikotnike, petkotnike ... Lahko pa bi dovolili tudi druge možnosti: večkotnik bi rezali deloma na trikotnike, deloma na štirikotnike itd. V tem primeru bi dobili števila, ki so v tesni zvezi z onimi, ki smo jih srečali pri šahovskem kralju.

Uporabljena literatura: H. G. Forder: *Some Problems in Combinatorics*, The Math. Gazette **45** (1961), str. 199-201 G. Pólya, R. E. Tarjan, D. R. Woods: *Notes on Introductory Combinatorics*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983

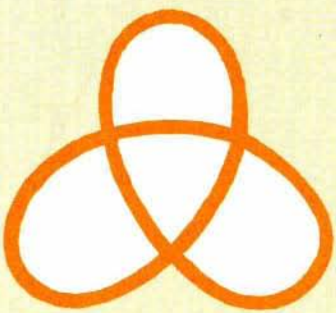
P. S.: V tretji številki Preseka **16** se je v program KINGPATH prikradla napaka. Vrstica 320 se pravilno glasi : `B[Y]:=0;`

Marko Razpet

GLEJ GA!

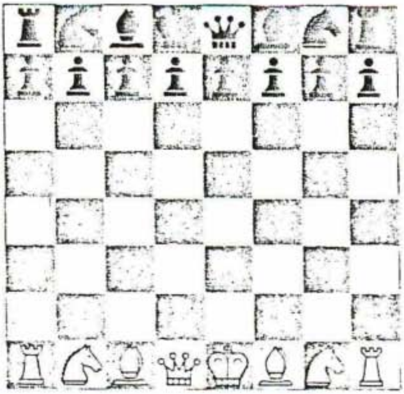
Daleč, daleč spodaj na tleh vidiš vozel - tak kot je prikazan na sliki. Predaleč je torej, da bi zmogel jasno razbrati, kako se križa njegova vrv.

Povej, kolikšna je verjetnost, da je vozel na tleh zavozlan (oziroma kolikšna je verjetnost, da je vozel detelja in ne trivialni vozel)!



Vilko Domajnko

MAT V ŠTIRIH POTEZAH



Ljubiteljem literature irskega pisatelja *Lorda Dunsanyja* ni potrebno posebej poudarjati, da je bil velik ljubitelj šaha. Manj pa je znano, da se je ukvarjal tudi s šahovskimi problemi, v katerih se, prav tako kot v njegovih leposlovnih delih, prepletata humor in fantazija. Problem, predstavljen na šahovski deski, je *Dunsany* objavil v knjigi *The Week-End Problem Book*. Pot do rešitve problema zahteva več logičnega mišljenja kot šahovskih veščin, seveda brez poznavanja osnovnih pravil kraljevske igre ne gre. Pozicija je dokaj nenavadna, vendar se lahko pojavi med igranjem partije.

Janez Aleš

PRESEK
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18.letnik, šolsko leto 1990/91, številka 1, strani 1–64

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64, tel (061) 265-061/53, št. žiro računa 50101-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1990/91 vplačana do izida druge številke, je za posamezne naročnike 100.-din, za skupinska naročila šol 80.- din, posamezna številka 20.- din (16.- din).

List sofinancirajo RKRDT, RKVITK in RKK
Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje DELO, Ljubljana

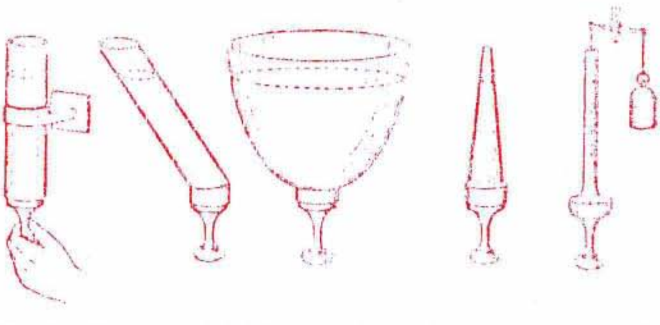
"PARADOKSA" S TEKOČINAMI

Nekateri slovarji pojasnijo *paradoks* kot trditev, ki se zdi na prvi pogled napačna, a se izkaže pri podrobnejšem pogledu za pravilno. Tudi v fiziki naletimo večkrat na besedo v tem pomenu. Včasih z narekovaji poudarimo, da ne gre za pravi paradoks, pri katerem je s trditvijo ali s sklepanjem nekaj zares narobe. V fiziki so navidezni paradoksi pogosto povezani z njenim razvojem. Kak pojav primerjamo z drugim, ki ga že obvladamo, toda pozneje se pokaže, da primerjava ni umestna. Novi pojav je treba pojasniti drugače in je pri njem zato izid drugačen, kot bi ga pričakovali, če bi bil novi pojav zares podoben prejšnjemu.

Obdelajmo dva pojava, ki ju včasih zaznamujemo kot "paradoksa". Opišimo ju, osvetlimo njuno zgodovinsko ozadje in pojasnimo. Oba sodita v poglavje o tekočinah, prvi v del, ki obravnava mirujoče tekočine, ***hidrostatiko***, drugi v del o tekočinskem toku, ***hidrodinamiko***. Oba dela menda ne sodita med kratkočasne in nekatere učne knjige drugega ali kar oba obidejo.

Vzemimo posode različnih oblik z enako velikim dnom in nalijmo v vse vodo do enake višine (slika **1**). Sila vode na dno je v vseh primerih enaka in ni odvisna od oblike posode. Nekdaj se je zdelo to tako nenavadno, da so govorili o *"paradoksu" mirujoče tekočine* (*hidrostatičnem paradoksu*). Ali mislite, da spoznanje zasluži to ime?

Ni težko razumeti, zakaj se je zdelo spoznanje nekdaj bolj nenavadno kot dandanes. Pojav sodi v *statiko*, ki obravnava mirovanje teles. Nekaj njenih spoznanj izvira od Arhimeda iz 3. stoletja pred našim štetjem. Šele v šestnajstem stoletju so to znanje rešili pozabe in obnovili. Eden



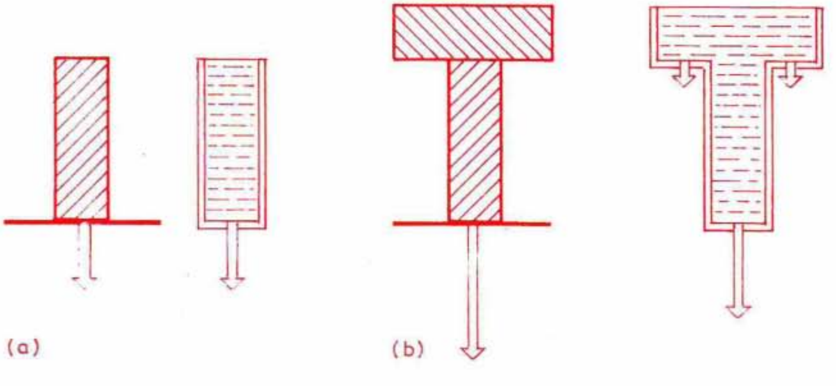
Slika 1. Pascalove posode iz njegove *Razprave o ravnovesju kapljevin*. Sila na dno je v vseh enaka, ker imajo posode enako veliko dno in sega vodna gladina v njih do enake višine.

izmed zaslužnih mož je bil Simon Stevin, ki je živel na Nizozemskem in leta 1586 izdal knjigo o umetnosti tehtanja. Tedaj so pogosto primerjali kapljevino s trdnim telesom. Stevin si je zamislil, da so deli kapljevine v posodi trdni, in dognal, da morajo biti gladine v povezanih posodah enako visoke. Toda zavedal se je že bistvene razlike med trdnim telesom in kapljevino (slika 2).

V tem so mu sledili še nekateri drugi fiziki, med njimi Evangelista Torricelli, ki ima zasluge za prvo meritev zračnega tlaka. Da je bilo nekaterim tedanjim fizikom težko uvideti razloček med trdnim telesom in kapljevino, priča zabaven Torricellijev zapis iz leta 1644: "Nekoč je živel filozof, ki je enega izmed svojih služabnikov videl, kako je vstavil cevko v steklenico z vinom. Okaral ga je češ, da vino nikoli ne bo steklo po cevki, ker težka telesa silijo navpično navzdol, a ne vodoravno v stran. Toda služabnik ga je z dejanjem prepričal, da sicer sili po naravi tudi kapljevina navzdol, a poleg tega sili na vse strani, celo navzgor, ker išče kraj, na katerega se bo premestila, tako da bo na njem odpor manjši kot sila kapljevine."

Deset let prej so fiziki, med njimi tudi Galileo Galilei, mislili še, da ima voda samo "absolutno težo". Del vode naj bi imel težo samo, če ga ne bi obdajali drugi deli vode. "Voda v vodi nima teže, ker se ne spušča." Niso uvideli, da za vsak del vode težo uravnovesi *vzgon*, to je sila okolnih delov vode.

Podrobno je pojave obdelal Blaise Pascal v *Razpravi o ravnovesju kap-*



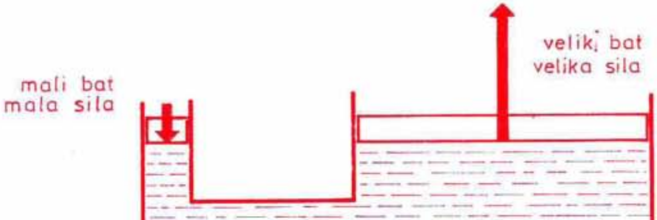
Slika 2. Razlika med trdnim telesom in kapljevino z enako gostoto v posodi. Sila opeke na podlago zaradi teže je enaka sili enako težke kapljevine na dno posode z enako obliko (a). Sila dveh opek na podlago zaradi teže pa ni enaka sili enako težke kapljevine na dno posode z enako obliko. Treba je upoštevati še navpično silo kapljevine na stranske vodoravne dele posode (črtkano) (b).

ljevin in teži mase zraka, ki je izšla leta 1663, leto po njegovi smrti. Jasneje kot drugi pred njim, na primer Simon Stevin, je opredelil tlak v mirujoči kapljevini. "Tlak, ki ga izvajamo kjerkoli na kapljevino v zaprti posodi, se prenaša nezmanjšan po vsej kapljevini in deluje pravokotno na vse stene." To trditev so imenovali *Pascalov izrek*. Pascalu se je na osnovi izreka porodila zamisel za napravo, ki so jo več kot sto let pozneje patentirali kot *kapljevinsko stiskalnico* (slika 3). "Posoda, polna vode, a sicer povsem zaprta, ima dve odprtini, od katerih je ena stokrat večja kot druga. Postavimo v odprtini bata, ki ju tesno zapirata. Mož, ki potiska mali bat, deluje s silo, enako sili, s katero potiska sto mož veliki bat, ki je stokrat večji... Za večjo jasnost lahko dodamo, da je tlak vode enak pod obema batoma; kajti, če je eden stokrat večji kot drugi, se tudi dotika stokrat več delov vode."

Pascal je pri poskusih raziskal odvisnost tlaka v mirujoči tekočini od višine, o kateri smo doslej molčali. Z dobrih deset metrov visokim stolpcem vode je uravnovesil zračni tlak. Svaka je pripravil do tega, da je izmeril zračni tlak ob vznožju in na vrhu gore. Merjenje je potrdilo misel, da tudi zračni tlak z višino pojema. Odvisnost tlaka od višine in njegovo neodvisnost od oblike posode je pokazal s sodom. V sod je vstavil dolgo navpično cevko z razmeroma majhnim premerom. Ko je dolil dovolj vode v cevko, je sod počil (slika 4).

Ker je Pascal med prvimi spoznal vlogo tlaka v mirujoči tekočini in razčistil nekatera vprašanja v zvezi z zračnim tlakom, ni neupravičeno, da

Slika 3. Poenostavljena shema kapljevinske stiskalnice.



Slika 4. Sod z navpično cevjo, v katero je B.Pascal dolil malo vode, in dosegel, da je sod počil.

so enoto za tlak poimenovali po njem:

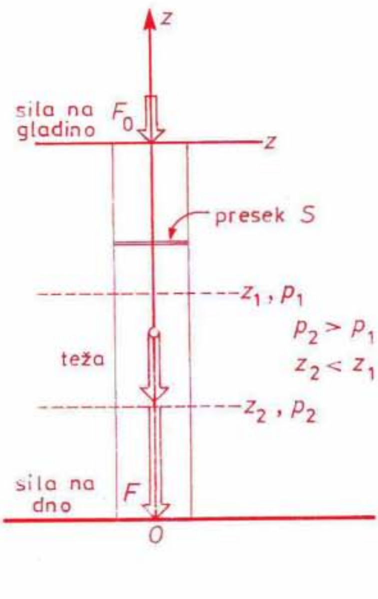
1 newton na kvadratni meter = 1 pascal   ali $1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{Pa}$.

Naredimo kratek račun. Vzemimo, da je v posodi z ravnim dnom voda. Ker je tlak na dno neodvisen od oblike posode, si lahko mislimo, da ima posoda obliko prizme. Težo vode dobimo, če njeno maso m pomnožimo s težnim pospeškom g. Za to težo je sila na dno F večja od sile F_0 na gladino vode: $F = F_0 + mg$. Tlak dobimo, ko silo delimo s presekom S osnovne ploskve: $p = p_0 - \rho gz$. Pri tem je $p_0 = F_0/S$ tlak na gladini in prostornina prizme $V = Sz$. *Gostoto vode* vpeljemo kot kvocient mase in prostornine $\rho = m/V$. Višino prizme smo zaznamovali z z in opremili drugi člen z minusom, če merimo z od dna navzgor (slika 5). Tako upoštevamo, da z naraščajočo višino tlak pojema. Enačbi lahko damo obliko, ki poveže tlak p_2 v višini z_2 s tlakom p_1 v višini z_1:

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1) \qquad \text{ali} \qquad p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1$$

Enačba velja, če se med višinima z_2 in z_1 ne spremeni gostota. Pri kapljevinah, ki jih smemo imeti za nestisljive, je vedno tako, pri plinih pa samo, če višinska razlika ni prevelika. Spomnimo se, da zajamemo s *tekočinami* pline in kapljevine.

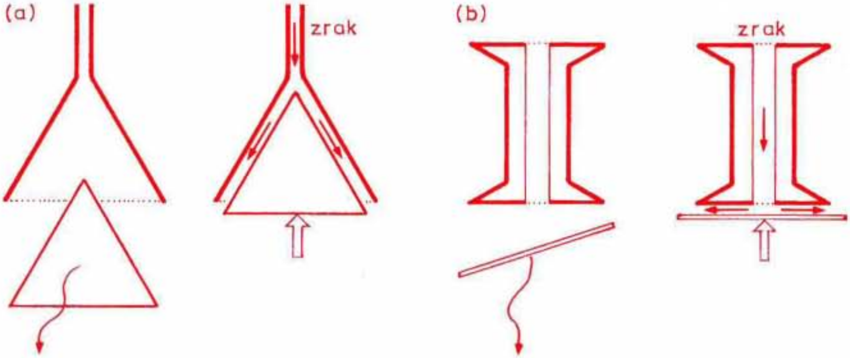
Preidimo k drugemu poskusu. Iz risalnega lista izrežimo krožni izsek,



Slika 5. Sila tlaka na dno $F = pS$ je večja kot sila tlaka na gladino $F_0 = p_0 S$ za težo kapljevine $mg = \rho Vg = \rho Szg$. Tlak z naraščajočo globino narašča in z naraščajočo višino pojema, zato velja $p = p_0 - \rho gz$, če usmerimo os z navpično navzgor.

ga zvijmo v plašč stožca in zalepimo, tako da se prilega lijaku. V navpično postavljeni lijak dajmo papirnati stožec. Zaradi teže stožec pade. Pridržimo stožec v lijaku, pihajmo v lijak in spustimo stožec. Dokler pihamo, stožec ostane v lijaku in pade na tla, šele ko nam zmanjka sape. Podoben poskus se posreči tudi z vretenom za sukanec in s kosom papirja (slika 6). Izid marsikoga preseneti, saj bi pričakoval, da stožec zaradi upora v zračnem curku še hitreje pade na tla. Pojav včasih imenujejo *"paradoks" gibajoče se tekočine* (*hidrodinamični paradoks*). Povedati pa je treba, da nadenejo to ime zadnje čase tudi nekaterim drugim izidom.

Da bomo pojav razumeli, nadaljujmo prejšnjo razpravo. Torricelli je leta 1643, malo pred Galilejevo smrtjo, postal njegov sodelavec. Že prej je napisal rokopisni *Dve knjigi o gibanju prosto padajočih in vrženih težkih teles*. V njiju je mimogrede obravnaval tudi iztekanje vode iz posode skozi dovolj veliko odprtino. Iztekajoči curek je usmeril tudi navpično navzgor in ugotovil, da curek ni dosegel gladine. Vendar pri dobro oblikovani odprtini razlika ni bila velika. Po tem je sklepal, da bi curek dosegel gladino, če ne bi bilo upora. "Voda, ki izteka iz posode, ima v točki iztekanja enako hitrost, kot bi jo imelo poljubno težko telo, tudi kaplja te vode, ko bi prosto padla od gladine do višine odprtine." Trditev je postala znana kot *Torricellijev izrek*. Za hitrost iztekajoče vode v velja tedaj enačba $\frac{1}{2}v^2 = gz$, če je z višina gladine nad odprtino.



Slika 6. Poskus, pri katerem pihamo skozi lijak navpično navzdol in s tem dosežemo, da miruje v njem stožec iz papirja. Ko ne pihamo, stožec pade (a). Poskus se posreči tudi z vretenom za sukanec in kosom papirja (b). V ožini je hitrost zraka velika in tlak nižji od zunanjega zračnega tlaka.

* * *

Torricelli je naredil še drug poskus, ki ga najbolje razumemo na osnovi računa. Hitrost iztekanja vode $v = \sqrt{2hz}$ skozi odprtino s presekom S_d na dnu posode povežimo s hitrostjo zniževanja gladine $-dz/dt$ v prizmatični posodi s presekom S. Prostornina vode, ki izteče skozi odprtino na sekundo, je enaka prostornini med lego gladine in njeno lego sekundo pozneje:

$$vS_d = -S\frac{dz}{dt}$$

Enačbo $\sqrt{2gz}\ S_d = -Sdz/dt$ preuredimo v $dz/\sqrt{z} = -\sqrt{2g}(S_d/S)dt$ in integriramo od začetne višine gladine z_0 do višine z in od začetnega časa 0 do časa t:

$$2(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}) = -\sqrt{2g}\frac{S_d}{S}\ t \qquad \text{ali} \qquad \sqrt{z} = \sqrt{z_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\ \frac{S_d}{S}\ t.$$

Iz enačbe izhaja, da se gladina zniža do dna pri $z = 0$ v času $t_d = \sqrt{2z_0/g}\ S/S_d$. Ta čas razdelimo na N delov in vpeljemo $t_n = nt_d/N$, $n \leq N$. Vstavimo to v enačbo za višino gladine in enačbo kvadriramo:

$$z_n = z_0(1 - \frac{n}{N})^2$$

Naposled poiščemo razmerja višinskih razlik:

$$...(z_{N-3} - z_{N-2}) : (z_{N-2} - z_{N-1}) : (z_{N-1} - z_N) = ...5 : 3 : 1.$$

Torricelli je opazoval, kako se je v enakomernih časovnih razmikih nižala gladina v posodi proti koncu iztekanja in po ugotovljenem razmerju ...5.3.1 sklepal, da gre za kvadratno odvisnost. To razmerje so tedaj poznali od prostega padanja. Računa, kakršen je naš, v tej obliki še ni mogel narediti.

* * *

Privzeli smo, da deli vode na gladini pri višini z mirujejo. Če se pri višini z_1 gibljejo s hitrostjo v_1, se gibljejo pri višini z_2 s hitrostjo v_2 in velja

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1$$

Vstavimo $v_1 = 0$ in $z_1 = z$ ter $z_2 = 0$ in $v_2 = v$, pa dobimo prejšnjo zvezo $\frac{1}{2}v^2 = gz$. Obe strani enačbe smo še pomnožili z gostoto kapljevine ρ.

Če se ne spreminjata samo višina delov vode in njihova hitrost ampak tudi tlak, moramo povezati obe enačbi. Dobimo znamenito *Bernoullijevo enačbo*:

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 \ .$$

Enačbo, ki smo jo v Preseku že srečali (**6** (1978/79), str.241), je Daniel Bernoulli objavil v *Hidrodinamiki* leta 1738. Del kapljevine se lahko dvigne, če se mu zmanjša hitrost. Ker je višina povezana s tlakom, lahko preide tudi na območje s povišanim tlakom, če se mu zmanjša hitrost. Danes vemo, da velja enačba samo približno, in to tem bolje, čim manjše delo opravijo sile med plastmi kapljevine, čim manjše je "trenje" med deli kapljevine.

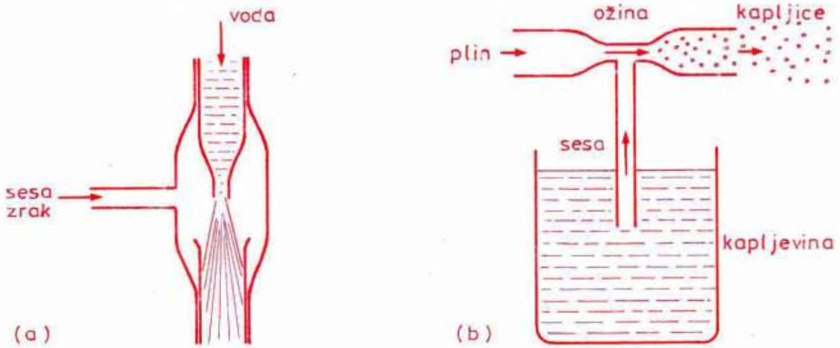
Potrebujemo samo enačbo za primer, da se ne spremeni višina:

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \ .$$

Enačba pove, da je tlak manjši na mestu, kjer ima kapljevina večjo hitrost. Vzemimo, da teče kapljevina skozi cev s spremenljivim presekom. Na mestu, kjer je hitrost v_1, je presek S_1, na mestu, kjer je hitrost v_2, pa presek S_2. Kapljevina je nestisljiva, zato se ne spremeni njena prostornina, ki preteče skozi določen presek v časovni enoti. Hitrosti potemtakem povezuje s presekoma enačba (ki smo jo uporabili tudi prej):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \ .$$

Čim manjši je presek, tem večja je hitrost in skupaj s prejšnjim: čim manjši je presek, tem manjši je tlak. Dobljeni sklepi obveljajo tudi za plin, če se njegova gostota ne spremeni znatno. Enačbe veljajo v tem primeru manj natančno.



Slika 7. Sesalka na vodni curek (a) in razpršilo (b)

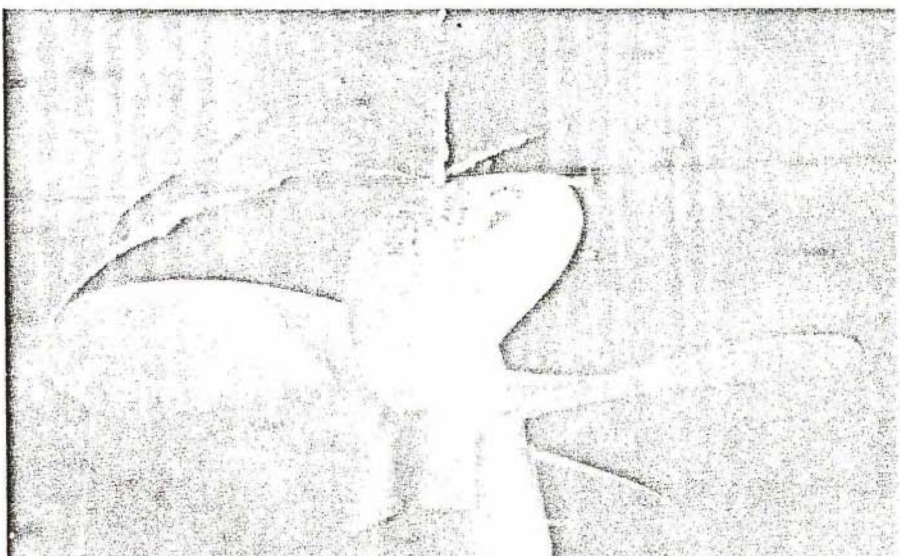
S tem ni težko pojasniti poskusa, katerega izid se je prej zdel nenavaden. V cevki lijaka, v katero pihamo, je tlak malo večji od zunanjega zračnega tlaka, hitrost delov zraka pa razmeroma majhna. V ožini med stožcem in lijakom je presek zelo majhen, hitrost velika in tlak manjši od zunanjega zračnega tlaka. Sila zaradi razlike tlakov uravnovesi težo stožca.

* * *

Kdor tega pojava še ni videl, se mu zdi čuden in nerazumljiv. Predstavlja si morda, da bi moral biti v ožini, kjer je voda utesnjena na manjši presek, tlak večji. Pri tem se človek nehote spomni na gnečo ljudi, ki bolj pritiskajo drug na drugega, kjer rinejo skozi vrata. Vendar je pri vodi poskus pokazal ravno nasprotno; v ožini je tlak zmanjšan. Ljudje se ne dajo dosti deformirati, kaplje pa čisto lahko.

I.Kuščer in A.Moljk, *Fizika*, 1.del, DZS, Ljubljana 1980, str. 250

* * *



Slika 8. Sled mehurjev, ki nastanejo ob vrtečem se vijaku na mestih, na katerih je hitrost delov vode zelo velika in tlak močno znižan.

Pojav izkorišča na primer *sesalka na vodni curek* (slika 7a). Curek vode iz pipe vodimo skozi ožino, po kateri se giblje z veliko hitrostjo. Na tem mestu in v njegovi okolici je tlak precej manjši od zunanjega zračnega tlaka. Skozi cevko iz dela posode, ki obdaja ožino, sesa naprava zrak. Podobno deluje razpršilo, le da sta v njem vlogi zamenjani. Namesto vodnega curka imamo curek zraka ali kakega drugega plina, ki sesa in razpršuje vodo ali dišečo kapljevino (slika 7b).

Menda sta zaradi tega pojava trčili ladji, ki sta vozili vštric po kanalu. Deli vode med njima so imeli večjo hitrost glede na njiju kot deli vode na nasprotni strani, zato je bil tlak na območju med ladjama manjši kot na nasprotnih straneh. Ladjo je tiščala proti drugi ladji sila zaradi razlike obeh tlakov. Če se je to zares primerilo, sta morala biti kapitana dokaj nepazljiva.

Pojav lahko moti še drugače. V vodnem toku okoli vrtečih se delov turbin ali ladijskih vijakov imajo deli vode zelo veliko hitrost. Hitrost je tolikšna, da je tlak manjši od izparilnega tlaka, voda izpareva in nastanejo mehurji vodne pare. Pojav, znan kot *kavitacija*, je škodljiv, ker mehurji zmanjšajo učinkovitost turbin ali vijakov in praskajo vrtljive dele, da se prej obrabijo (slika 8).

Tako smo dva "paradoksa" povezali v kramljanju, v katerem ni manjkal ščepec prave fizike. Ali ste se pri tem dolgočasili?

Janez Strnad

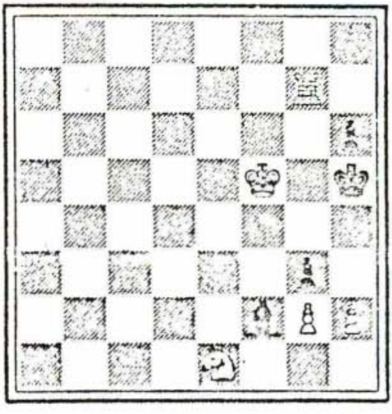
ŠAHOVSKE UGANKE

Oglejmo si tri zanimive uganke, povezane s šahom.

1. Ali lahko postavimo komplet šestnajstih belih figur na šahovsko desko tako, da vsaka figura ščiti le eno drugo figuro?
2. Kako moramo razvrstiti 8 belih figur (brez kmetov), da bo napadeno ali zasedeno največje število polj?
3. Kako pa bi razvrstili 8 belih figur (brez kmetov), da bo napadeno najmanjše število polj?

Janez Aleš

ŠAHOVSKI PROBLEM SAMA LOYDA



Zdaleč največkrat ponatisnjen šahovski problem *Sama Loyda*, sestavljen pri njegovih osemnajstih letih, prikazuje očarljiv način podajanja šahovskih problemov, zavitih v zanimive anekdote.

Leta 1713, v času, ko so Turki oblegali švedskega kralja *Karla XII* v taborišču *Bender*, je kralj pogosto preživljal čas ob igranju šaha z enim izmed svojih ministrov. Med neko partijo je *Karel*, v poziciji prikazani na sliki, kot beli naznanil mat v treh potezah. Hip za tem je zablodela krogla razbila belega skakača na polju e1. *Karel* je ponovno preučil pozicijo, se nasmehnil in dejal, da skakača tako ali tako ne potrebuje, saj ima še vedno mat v štirih potezah. Toda druga krogla je belemu razbila tudi kmeta na h2. Kralj je neprizadet ponovno pretehtal svojo pozicijo in napovedal mat v petih potezah.

Zgodbe pa tu še ni konec, če bi namreč prva krogla odstrelila belemu trdnjavo na g7 namesto skakača, bi lahko *Karel* še vedno matiral nasprotnika, tokrat v šestih potezah.

Janez Aleš

TEŽJI TRIKOTNIKI

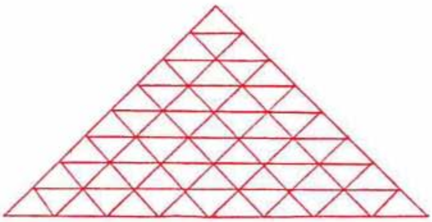
Poišči vse trikotnike s stranicami dolžine *a*, *b* in *c*, če za vsak naraven *n* iz daljic, ki merijo a^n, b^n in c^n lahko sestavimo trikotnik.

Boris Lavrič

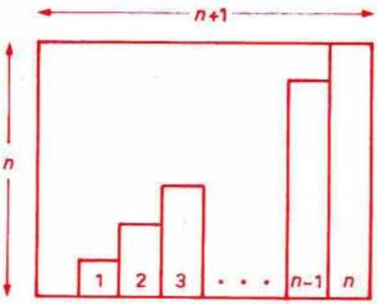
REŠITVE NALOG

KOLIKO TRIKOTNIKOV - Rešitev iz P-XVII/2

V P XVII-2 je Sandi Klavžar zastavil nalogo, koliko trikotnikov je na sliki 1.



Slika 1. Koliko trikotnikov je na sliki?



Slika 2. Grafična predstavitev vsote prvih n naravnih števil.

Najprej bomo nalogo posplošili, poiskali rešitev splošnejše naloge, odgovor na zgornje vprašanje pa potem ne bo težak.

Trikotniku, ki ima za osnovo n najmanjših trikotnikov, bomo rekli n-trikotnik. Na sliki 1 imamo torej 8-trikotnik. Splošnejša naloge se sedaj glasi: Koliko trikotnikov je v n-trikotniku? Preden začnemo z reševanjem, potrebujemo nekaj matematičnega orodja. Večina verjetno ve, da je vsota prvih n naravnih števil enaka

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

V veljavnost te identitete se lahko prepričamo tudi s pomočjo slike 2. Potrebovali bomo še vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formulo dokažimo z matematično indukcijo. Najprej pokažimo, da velja za $n = 1$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\dot{}(1+1)\dot{}(2\dot{}1+1)}{6} = 1$$

Naj sedaj formula velja za $(n-1)$. Tedaj:

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\\
&=\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}+n^2=\frac{(n^2-n)(2n-1)+6n^2}{6}=\\
&=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Za krajši zapis vpeljimo še sumacijski znak $\sum$. Vsoto števil a_1, a_2, a_3, ... a_n bomo krajše zapisali kot $\sum_{i=1}^{n}(a_i)$, torej velja

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i)$$

Seznaniti se moramo še z oklepaji [...], s katerimi označujemo zaokroževanje na prvo celo število navzdol, npr.: $[\pi]=3$. Potrebovali jih bomo pri celoštevilskem deljenju naravnega števila n z 2, kar bomo označili $[n/2]$. Velja

$$[n/2]=\begin{cases}\frac{n}{2}; & n \text{ sod}\\ \frac{n-1}{2}; & n \text{ lih}\end{cases}$$

Kdor pozna programski jezik pascal, ve, da lahko izvede operacijo celoštevilskega deljenja z operatorjem **div**, v našem primeru velja $[n/2]=n$ **div** 2.

In sedaj k reševanju splošne naloge. Vse trikotnike razdelimo na dva razreda, na pokončne trikotnike (tiste s horizontalno stranico spodaj) in obrnjene. Pokončnih 1-trikotnikov je v prvi vrsti n, v drugi $n-1$, v tretji $n-2$, ..., v predzadnji 2 in v zadnji 1. Vseh 1-trikotnikov je torej $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$. Podobno preštejemo še vse ostale trikotnike:

pokončni trikotniki		obrnjeni trikotniki	
1-trikotnikov	$\frac{n(n-1)}{2}$	1-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$
2-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$	2-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$
3-trikotnikov	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$	3-trikotnikov	$\frac{(n-5)(n-4)}{2}$
4-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$	4-trikotnikov	$\frac{(n-7)(n-6)}{2}$
...		...	
k-trikotnikov	$\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$	k-trikotnikov	$\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}$
...		...	
$(n-2)$-trikotnikov 6		$([n/2]-2)$-trikotnikov	$\begin{cases}15; & n \text{ sod}\\ 21; & n \text{ lih}\end{cases}$
$(n-1)$-trikotnikov 3		$([n/2]-1)$-trikotnikov	$\begin{cases}6; & n \text{ sod}\\ 10; & n \text{ lih}\end{cases}$
n-trikotnikov 1		$[n/2]$-trikotnikov	$\begin{cases}1; & n \text{ sod}\\ 3; & n \text{ lih}\end{cases}$

Z $N(n)$ označimo število trikotnikov v n-trikotniku.

$$N(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2} = S_1 + S_2$$

Izračunajmo najprej vsoto S_1

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(n-k+2) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (n^2 - 2nk + 3n + k^2 - 3k + 2) =$$
$$= \frac{1}{2} n^3 - n \sum_{k=1}^{n} k + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} k + n =$$
$$= \frac{1}{2} n^3 - n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} + n =$$
$$= \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n$$

Z vsoto S_2 je nekaj več dela:
n je sod:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} /2 \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}$$
$$= - [(n-1)n + (n-3)(n-2) + \ldots + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2] =$$
$$= \frac{1}{2} [1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + (n-3)(n-2) + (n-1)n] =$$
$$= \frac{1}{2} [(2 \cdot 2 - 2) + (4 \cdot 4 - 4) + (6 \cdot 6 - 6) + \ldots +$$
$$+ \ldots + ((n-2)(n-2) - (n-2)) + (n \cdot n - n)] =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n/2} ((2k)^2 - 2k) = 2 \sum_{k=1}^{n/2} k^2 - \sum_{k=1}^{n/2} k =$$
$$= 2[\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{2} (\frac{n}{2} + 1)(2\frac{n}{2} + 1)] - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} + 1) = \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{8} n^2 - \frac{1}{12} n$$

n je lih:

$$
\begin{aligned}
S_2 = &\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-2k+1)(n_2k+2)}{2} = \\
=&\frac{1}{2}[(n-1)n+(n-3)(n-2)+...+4\cdot 5+2\cdot 3] = \\
=&\frac{1}{2}[2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+...+(n-3)(n-2)+(n-1)n] = \\
=&\frac{1}{2}[(2\cdot 2+2)+(4\cdot 4+4)+(6\cdot 6+6)+...+ \\
&+...+((n-2)(n-2)+(n-2))+(n\cdot n+n)] = \\
=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(n-1)/2}((2k)^2+2k) = 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}k^2+\sum_{k=1}^{(n-1)/2}k = \\
=&2[\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)(2\frac{n-1}{2}+1)]+\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1) = \\
=&\frac{1}{12}n^3+\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{12}n-\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Po seštetju obeh vsot S_1 in S_2 dobimo,

$$
N(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}n^3+\frac{5}{8}n^2+\frac{1}{4}n; & n \text{ sod} \\ \frac{1}{4}n^3+\frac{5}{8}n^2+\frac{1}{4}n-\frac{1}{8}; & n \text{ lih} \end{cases}
$$

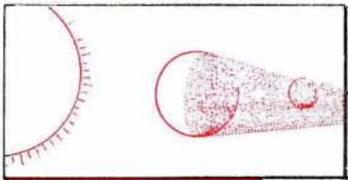
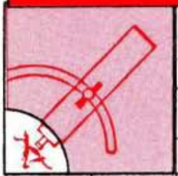
Kdor zna iskati ničle polinomov, pa lahko rezultat pretvori v

$$
N(n) = \begin{cases} \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1); & n \text{ lih} \end{cases}
$$

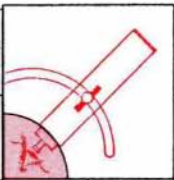
In končno številčni rezultat: $N(8) = 170$. Na sliki 1 je torej 170 trikotnikov.

Ciril Pezdir

SLIKOVNA KRIŽANKA

				FRANC. MATEMATIK IN ASTRONOM	LJUBLJAN PIVOVARNA	NEKDANJI JAPONSKI PREMIER	KRAJ PRI OPATIJI	NUŠA ROMIH	KRIŽANEC MED KONJEM IN OSLICO	KRČEVINA, LAZ
				L	U	N	I	N	M	R
			STARO-GRŠ.LIRIK / TROPSKO ZDRAVILO	A	N	A	K	R	E	O
				P	I	K	A	ROLA	S	V
		AGAVI PODOBNA RASTLINA		L	O	A	VELIKA ZAČETNICA	NARODOSLOVEC / STRMINA KLANCA	E	T
		GL.MESTO MICHIGANA / OPIS POTOVANJA	L	A	N	S	I	N	G	ZDRAVILIŠČE V BELGIJI
ZVEZA DRŽAV IZVOZNIC NAFTE	O	P	E	C	OSEBNI ZAIMEK / UNIČEVALKA ŽELEZA	O	N	A	SMUČARSKA DISCIPLINA	S
POLJSKI ASTRONOM (NIKOLAJ)	K	O	P	E	R	N	I	K	MANJŠA UJEDA / JAN NERUDA	
UGO TONAZZI	U	T	VODNA ŽIVAL	ČLOVEK Z GOVORNO NAPAKO / GOTOVINA	J	E	C	L	J	A
ŠPANSKI PESNIK (GARCIA)	L	O	R	C	A	NABIT DELEC / SL.PESNIK (MATEJ)	I	O	N	MOŠKO IME / 60 MINUT
GLAVNO MESTO SAMOE	A	P	I	A	SL.IGRALEC (IVO) / TANTAL	B	A	N	PLANET OSONČJA / BROM	U
ŠVEDSKA LESTEV	R	I	B	S	T	O	L	ŽENSKA, KI BERE	B	R
AVTOR: MARKO BOKALIČ	NAJVEČJA PUŠČAVA NA SVETU	S	A	H	A	R	A	KOTNA MERA V MATEMATIKI	R	A

POJMI IZ ASTRONOMIJE

ESTO V OTRANJI ALMACIJI			ODPRTJE GROBA	BERNHARD RIEMANN	PRIPRAVLJENA HRANA	LEPOSLOVNA RAZPRAVA	POTAPLJAŠKI ZVON	TRESENJE, DRGET	BOLEZEN ZARADI IKER TRAKULJE	FIZIKALNA ENOTA ZA MOČ
K			O	B	J	E	K	T	I	V
N	SVITEK, KOTAČ	VADITELJICA ŽIVALI / STAR USMERNIK	D	R	E	S	E	R	K	A
I	T	E	K	POOBEDEK / ITAL. NARAVOSLOVEC	D	E	S	E	R	T
N	O	L	O	G	VOLNENO OBLAČILO Z GUMBI	J	O	P	A	KIP GOLEGA TELESA
RMNA STLINA / ČRNO JMENA ŽIVAL	R	E	P	A	MRK	ŽEN.IME / NEMŠKI FILOZOF	N	E	V	A
M	U	K	ZDRAVILO / TUJ DVOGLASNIK	L	E	K	GIBANJE, STRUJANJE	T	O	K
O	S	T		V	K	A	OZVEZDJE SEVER. NEBA	SPLIT / PRIIMEK SLIKARJA RAFAELA	S	T
Č	STVARNOST / ŠP.SLIKAR (SALVADOR)	R	E	A	L	N	O	S	T	RISBA:
E	D	O	REKA IN MESTO NA SLOVAŠKEM	N	I	T	R		ODMEV	DALJŠE OBDOBJE
R	A	N	IVAN PUCELJ / ANDREJ NOVAK	I	P	IVJE / MAURICE RAVEL	J		J	E
A	L	K	A	CILJ, NAMEN	S	M	A		E	R
D	I	A	N	ZDRAVILNA ROŽA	A	R	K		K	A

MISS PRESEKA

V članku "Nenavadne krivulje" preberemo, kako lahko konstruiramo zanimive ravninske krivulje. Priloženi program zahteva kot podatke le nekaj števil in že nariše krivuljo. Zakaj ravno táko, razberemo v članku.

In sedaj vabilo. Na Presekov naslov (PRESEK, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 64 (za Miss Preseka)) nam **pošljite eno ali več izvirnih slik, ki ste jih ustvarili s programom "Generiranje_Fraktalov"**. Avtor slik je lahko en sam, zelo zanimive krivulje pa lahko nastanejo tudi s skupinskim delom (npr. v krožku), saj verjetno nima vsakdo možnosti samostojnega dela na osebnem računalniku. Seveda pa lahko program iz turbo pascala (ki smo ga dobro spoznali v zadnjih treh številkah lanskega Preseka) prevedete tudi v pascal vašega računalnika, ali v kak drug jezik. Nič hudega, če slike ne morete z zaslona spraviti na papir, zadostovalo bo že, da nam pošljete številske podatke, ki ustrezajo dani krivulji. Seveda je nemogoče reči, katera krivulja je najlepša (kot je to navadno na običajnih lepotnih tekmovanjih), zato bomo objavili sliko vsake zanimive krivulje. **Rok za oddajo "lepotic" je konec koledarskega leta 1990**.

Preden se lotite dela, še nekaj splošnih napotkov za konstrukcijo lastnih krivulj.

Najenostavnejši način konstruiranja je seveda, da si nadaljne delitve v tabeli kar izmislimo. Če nam je krivulja potem všeč, jo lahko poskušamo še izboljšati.

Drugemu načinu bomo rekli metoda *iniciatorja in generatorja*, pri kateri je *iniciator* nekakšno seme, iz katerega se razvija krivulja po pravilih, ki jih podaja *generator*. Po tej metodi dobimo Kochovo snežinko, Peanovo krivuljo in Sierpinskijevo preprogo. Pri Kochovi snežinki je iniciator enakostraničen trikotnik (slika 1a) in generator Davidova zvezda (slika 1b). Pri Peanovi krivulji je iniciator diagonala kvadrata (slika 4a), generator pa povezane diagonale devetih kvadratov (slika 4b). Pri Sierpinskijevi preprogi je iniciator daljica (slika 7a) in generator lik s slike 7b. Enostavno je, če vzamemo za iniciator daljico, za generator pa si izmislimo lik. Vsakemu vektorju potem priredimo celico, ki se v naslednjem koraku nadomesti z ustrezno orientiranim likom.

Konstrukcija krivulj bo šla seveda tembolj od rok, čim bolj se bomo poglobili v delovanja samega postopka risanja. Seveda lahko tudi sami izumite postopek, s katerim boste prišli do zanimivih krivulj.

Če boste veliko eksperimentirali, še tole. Program je avtor napisal na kratko, kolikor se je dalo. Da si prihranimo mukotrpen vnos podatkov za vsako posamezno krivuljo, lahko program razširimo tako, da vsako krivuljo shranimo v obliki datoteke. V datoteko shranimo vse parametre potrebne za risanje krivulje, število smeri, tabelo, rojstno celico, dolžino celice in koordinate začetka risanja krivulje.

Dodajmo še, da je lahko predstavitev celic poljubna. V vseh primerih v članku so predstavitve namreč enako dolgi, različno usmerjeni vektorji, vendar je predstavitev celice lahko kakršenkoli objekt (npr. zaporedje črk, geomtrijski liki, ...).

Sandi Klavžar in Ciril Pezdir

EULERJEVA NALOGA

Med drugim se je švicarski matematik **Euler** ukvarjal tudi z naslednjo nalogo:

Na koliko različnih načinov lahko razrežemo pravilni n- kotnik s pomočjo njegovih diagonal na same trikotnike tako, da se začrtane diagonale pri tem ne sečejo?

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Bralci naj za začetek preverijo pravilnost podatkov v naslednji tabeli

n	3	4	5	6
število rešitev Eulerjeve naloge za pravilni n-kotnik	1	2	5	14

zatem pa se naj tudi sami poskusijo v reševanju te naloge v primerih, ko je $n = 7$ in $n = 8$.

Vilko Domajnko

Z GRAFI GRE LAŽJE

PRESEKOVA NADLOGA

Niz letošnjih Presekovih nadlog bomo začeli z zbirko rekreacijskih nalog, ki v teoriji grafov pogosto služijo kot slikovito dopolnilo.

Poglejmo torej!

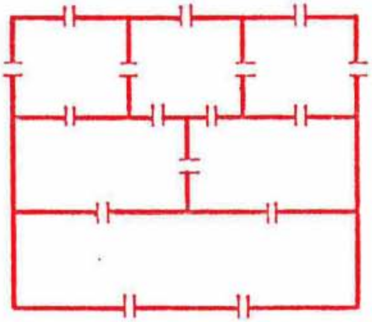
1. Prva je iz zbirke znamenitega ameriškega sestavljalca ugank *Sama Loyda* (1841 - 1911).

V začetku tega stoletja je planet Mars seveda še zmogel na vse pretege buriti domišljijo Zemljanov. In tako je zviti Loyd narisal zemljevid Marsa z nekaterimi "tedaj pravkar odkritimi" mesti in z vodnimi kanali, ki povezujejo ta mesta. Od reševalcev uganke je zahteval, da poiščejo pot, ki vodi skozi vsako izmed označenih mest natanko po enkrat. Toda pri tem je treba začeti in končati v mestu, ki leži ob južnem polu planeta in je označeno s črko S (glej sliko 1). Pot, ki jo bo predlagal reševalec, pa mora nositi v sebi še nek dodatni pomen, ki ga še nočemo izdati. Močno se namreč nadejamo, da ga bo odkril kar reševalec sam.

Še tole zanimivost je vredno omeniti pri tej uganki. Loyd jo je objavil kar dvakrat. In to kljub temu, da je že po prvi objavi uganke dobil pravcato goro pisem, v katerih so mu reševalci sporočali: "Saj sploh ni takšne poti."

Res je bil nabrit, ta Loyd, ni kaj!

Slika 1



Slika 2

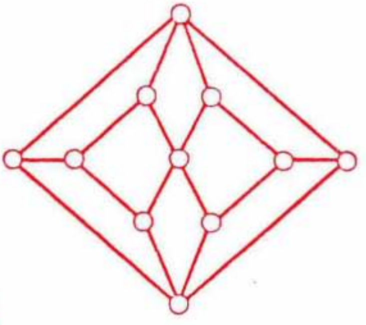
2. Na sliki 2 je načrt neobičajne zgradbe z mnogo vrati. Povejte, ali se je mogoče sprehoditi skozi to zgradbo tako, da gre sprehajalec skozi sleherna vrata natanko enkrat.

3. Z labirinti in z zamotano hojo po njih ste se v lanskem letniku Preseka že spopadli (glej Presek 3). Tokrat je pred vami primer, ob katerem boste lahko uporabili pridobljeno znanje.

V kraju Hampton Court v Angliji imajo znamenit labirint. Domnevam, da vas takle labirintek ne bo spravil v prehudo zadrego in da vam torej ne bo pretežko poiskati kakšne izmed odrešilnih poti, ki vodijo ven iz sredine labirinta (od točke A do točke Ž). Nekoliko težje pa je najbrž poiskati vse take različne poti. In glej, prav to zahteva ta naloga! Pravzaprav - dovolj bo, če poveste le, koliko teh poti je.

Pri tem iskanju ne štejte tistih, pri katerih je treba iti po kakšnem delu več kakor le enkrat.

Slika 3



Slika 4

4. Slika 4 nam predstavlja načrt mestnega parka. Njegovi skrbniki so se odločili, da bo v zabavo vseh meščanov po poteh parka vozil majhen otroški vlakec. Skozi park bi naj vozil po krožni poti, ki bi naj bila speljana tako, da bi skozi vsako izmed križišč parka peljala natanko enkrat. Pri tem ni nujno, da bi vlak vozil po vseh poteh parka. Obenem pa načrtovalci takšne krožne vožnje tudi ne želijo, da bi šel vlak po kakšni izmed poti večkrat.

Toda, glej, nesreča res nikoli ne počiva - krožne vožnje, ki bi ustrezala vsem opisanim zahtevam, sploh ni mogoče speljati.

Ali znate pojasniti, zakaj ne?

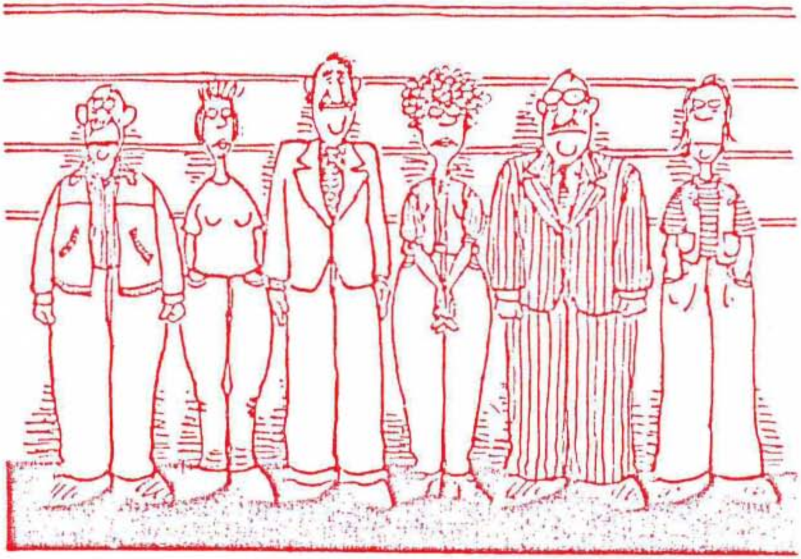
5. Šest dobrih prijateljev živi v šestih različnih mestih. Ker nočejo, da bi njihovo prijateljstvo in poznanstvo sčasoma usahnilo, so se domenili, da se bodo vsak teden v sredo poklicali po telefonu in si med seboj pripovedovali vsaj šale, če že ne kaj drugega.

Trdijo, da so uspeli svoje sredine telefonske pogovore sčasoma že tako izmojstriti, da jim sedaj zadošča že vsega skupaj samo osem pogovorov, da vsak izmed njih izve vse šale preostalih petih prijateljev.

Vendar se mi zdi, da je osem presneto nizko število pogovorov in tako res ne vem, če naj jim verjamem.

Pomagajte!

6. Mož in žena iz družine Belčevi sta priredila hišno zabavo in nanjo povabila še dvoje zakonskih parov - Modrinjakova in Rumenjakova dva. Vsi stari znanci so se ob snidenju, kakor se seveda spodobi, najprej rokovali. Vendar pa je bilo med tedaj zbranimi tudi nekaj takšnih, ki se še niso poznali. Ti se niso med seboj rokovali.



Ko so bili že vsi zbrani, je Belec kot prireditelj zabave povprašal vsakega izmed prisotnih, kolikokrat se je rokoval. Pri tem je začuda dobil od njih same različne odgovore.

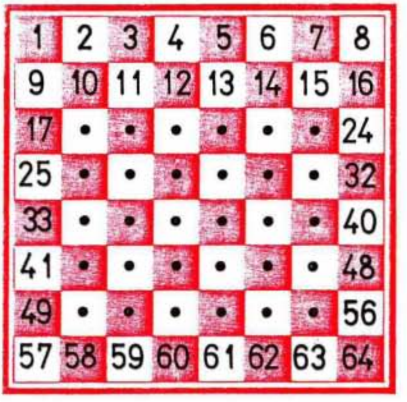
Povej, kolikokrat se je rokovala Belčeva žena. Pri tem upoštevaj, da

- se mož in žena z enakim priimkom med seboj nista rokovala;
- se nihče ni rokoval s samim seboj;
- se nihče ni z nikomer rokoval več kakor enkrat.

Vilko Domajnko

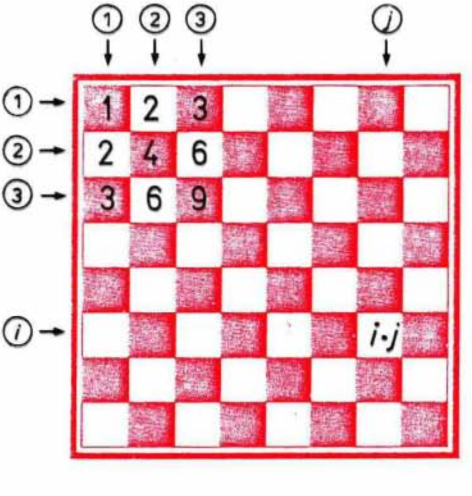
ŠTEVILA IN TRDNJAVE NA ŠAHOVNICI

1 Na polja šahovnice zapišemo po vrsti, kot kaže slika, naravna števila od 1 do 64. Na osem polj postavimo šahovske trdnjave, tako da se paroma ne bijejo, torej tako, da nobeni dve trdnjavi nista v isti vrstici ali v istem stolpcu šahovnice. Kolikšna je vsota števil na poljjih, kjer stoje trdnjave?



2 Na slepo izberimo tri polja navadne šahovnice in nanje postavimo tri trdnjave - vsako na svoje polje. Je bolj verjetno, da se bo med seboj bil vsaj en par trdnjav ali da se ne bo nobeden?

3 Na polju, ki je v i–ti vrstici in j–tem stolpcu šahovnice, je zapisan produkt števil i in j (glej sliko). Postavi na osem polj te šahovnice trdnjave, tako da se paroma ne bodo bile in da bo vsota števil na teh poljih največja.



Boris Lavrič

NOVE KNJIGE

PRESEK TUDI ZA PETI IN ŠESTI RAZRED OSNOVNE ŠOLE?

V zapisu o temeljnih vsebinskih zasnovah je Presek označen kot list za učence zadnjih dveh razredov osemletnih šol in prvih razredov srednjih šol ter seveda za ostale, ki se zanimajo za matematiko, fiziko, astronomijo in računalništvo. Anketa med osnovnošolskimi učitelji pa je pokazala, da Presek berejo tudi petošolci in šestošolci.

Na našo anketo so odgovorili aktivi 28 osnovnih šol, kjer so naročili lani skupaj 570 primerov revije Presek. 26 učiteljev iz teh šol uči matematiko, 18 fiziko, 3 računalništvo in eden fizikalni praktikum, tehnično vzgojo in gospodinjstvo.

V skoraj vseh odgovorih se pojavljajo misli: zanimivo, a včasih premalo razumljivo za osnovnošolce, prispevki naj bodo na nivoju osnovnošolskega znanja, Presek je prezahteven za 5., 6., 7. razred; več nalog za osnovnošolce; več vsebin, zanimivih za osnovnošolce...

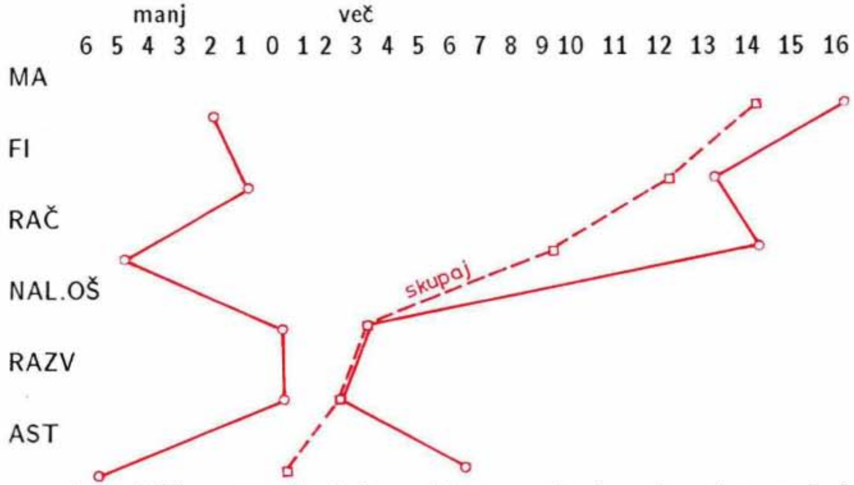
Vsebinsko bi naj bil torej Presek bolj prilagojen osnovnošolski snovi od 5. do 8. razreda, predvsem bi naj vseboval več nalog za te razrede. Učitelji pišejo, da pri pouku ali interesnih dejavnostih najbolj koristno uporabijo:

* naloge (matematične - 12, vse - 8, tekmovanja - 7, fizikalne - 3),
* razne članke, ki predstavljajo literaturo za referate pri fiziki in astronomiji,
* članke o fizikih in matematikih,
* razvedrilne prispevke.

Skladno s tem pišejo tudi o pogrešanih prispevkih. V ospredju so katerikoli prispevki, članki ali naloge primerne za osnovnošolce. Najbolj pogrešajo fizikalne prispevke, opise poskusov, aktualne dogodke v astronomiji, mogoče tudi nasvete ali ideje za naravoslovne dni. Koristno bi lahko uporabili spise o fizikih in matematikih, logične in razvedrilne naloge, pa tudi več rekreativne matematike si želijo.

Količinsko bi povečali obseg matematični rubriki, sledi fizika in računalništvo. Astronomiji so dali enako število glasov za "več" in "manj". Več prostora bi 28 aktivov osnovnošolskih učiteljev namenilo tudi razvedrilu in nalogam za osnovnošolce.

Že vrsto let se trudimo učitelje privabiti k ustvarjanju revije. Z anketo smo želeli zvedeti, zakaj večinomo ne sodelujejo. Vsi so se strinjali, da bi bilo tako sodelovanje potrebno. Kje pa se zatakne? Večina jih misli, da je temu vzrok preobremenjenost (16). Verjetno se za tem skriva občutek premajhne



sposobnosti (4) oz. mnenje, da je za njihovo znanje nivo prispevkov previsok (2) ter da dobijo premalo vzpodbud uredniškega odbora.

Velikokrat sem že vabila bralce naj pišejo. Ob tej priložnosti ponujam nekaj konkretnih idej iz ankete:

* Člani krožkov, pišite nam o svojem delu, o vaših uspešnih tekmovalcih, njihovih občutkih ob pripravi na tekmovanja, o vaših mentorjih. Pošljite nam kakšno težko nalogo za člane drugih krožkov.
* Predstavite svoje raziskovalne naloge, kako je potekala priprava in sodelovanje z mentorji, odkod ideja, kokliko časa ste vložili.
* Kateri razred piše "najlepše" šolske naloge? Objavili jih bomo. Lahko jih boste primerjali z drugimi in se ob njih pripravljali na naslednje preizkuse znanja.
* Pošljite "cvetke" iz šolskih klopi. Tukaj je že ena:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{in}{co}$$

(Kaj bi si delali probleme s tangensom, krajšajmo.)

Seveda je bilo nekaj konkretnih idej namenjenih tudi uredniškemu odboru:

* Uvesti dopisni krožek.
* Članek "Kako zbrusiti zrcalo za daljnogled, kadar nimamo brusnega prahu?"

Tako! Ideje so tu. Zavihajmo rokave!

Lep pozdrav!

Dušica Boben

STEPHEN W. HAWKING, KRATKA ZGODOVINA ČASA, Cankarjeva založba, 1990, 189 str., cena 195.- din (156.-din).

Hawkingova knjižica je izjemna iz več razlogov. V njej pisec razgrinja današnje poglede na razvoj vesolja. Pri tem lahko iz prve roke poroča o dognanjih astrofizike, h katerim je v veliki meri prispeval. Tu in tam navede tudi svoje spomine in mnenja. Prostodušno pričevanje o tem, kako je na osnovi novih spoznanj večkrat spremenil svoje sklepe, pove o bistvu raziskovanja več kot dolge razprave. Po človeški strani je knjižica velik uspeh, ker je Hawking zaradi težke bolezni že več let priklenjen na bolniški voziček in se zadnji čas sporazumeva z okolico le preko posebnega računalnika. Sam pravi, da je pač za delo v teorijski fiziki potrebna le glava in da ga telesna prizadetost ni ovirala.

Knjižica ima deset poglavij. Prva tri opišejo razvoj naših pogledov na vesolje. Prostor so nekdaj obravnavali popolnoma ločeno od časa. Povezala ju je posebna teorija relativnosti. Splošna teorija relativnosti je zajela še gravitacijo. S to teorijo bi bilo mogoče predvideti, da se vesolje širi. Merjenja so namreč pokazala, da se galaksije, veliki zvezdni otoki, oddaljujejo druga od druge. Hawking je skupaj s sodelavcem prišel do sklepa, da se v teoriji ni mogoče izogniti velikemu poku, ko se je začelo širjenje iz ene same točke in ko sta bili temperatura in gostota snovi neomejeni.

Naslednja štiri poglavja zajamejo najprej pregled kvantne fizike, ki obravnava najmanjše delce. Gibanja teh delcev ne moremo opisati tako, kot smo vajeni opisovati gibanje večjih teles. Splošna teorija relativnosti ni usklajena s tem spoznanjem. Vso snov sestavljajo delci in sile med njimi določajo lastnosti snovi, od njih pa je odvisen razvoj zvezd. Kako zvezda konča svoj razvoj, določa njena masa. Zvezda z dovolj veliko maso se sesede vase in nastane črna luknja. Hawking je ugotovil, da črne luknje zaradi kvantnih pojavov sevajo, kar se je zdelo dotlej izključeno.

Zadnja tri poglavja se vračajo k začetku vesolja, za katerega se je Hawking pozneje zopet začel zanimati, ker pač črna luknja v nekaterih pogledih spominja na vesolje v malem. Razmere ob velikem poku bi bilo treba opisati s kvantno teorijo gravitacije, ki je za zdaj še ni. Hawking je prišel do nekaterih delnih rezultatov, ko je privzel, v nasprotju s prejšnjimi trditvami, da je vesolje končno, a neomejeno in nima ne začetka in ne konca.

Od bralca knjižica ne zahteva kakega posebnega fizikalnega znanja in v njej je ena sama enačba, znamenita Einsteinova zveza med maso in energijo. Vendar mora biti bralec dovolj zbran in pripravljen prebrati nekatere odstavke tudi po večkrat. Vse kaže, da to ni ovira, saj se je knjižica ponekod prebila med uspešnice. Upamo, da bo tudi pri nas veliko bralcev seglo po njej. Čez dolga leta se bo marsikateri strokovnjak spominjal, kako je v svoji mladosti navdušeno prebiral Hawkingovo *Kratko zgodovino časa*.

Janez Strnad

ZBIRKE NALOG Z REPUBLIŠKIH TEKMOVANJ

Tekmovanja naj ne bodo sama sebi namen. Pomembneje je samostojno reševati naloge, dobljene rezultate primerjati z rezultati drugih ali pa s pravilnimi rešitvami. Primerno vzpodbudo in pomoč za tako delo boste našli v knjigah Knjižice Sigma, kjer so zbrane naloge in rešitve z dosedanjih republiških tekmovanj matematikov, fizikov in računalnikarjev. Reševalce vabimo, da nam pošljejo svoje originalne in elegantne rešitve, ki jih bomo v Preseku z veseljem objavili. Navedene knjige po enotni ceni 100,00 din (80,00 din) lahko dobijo člani društva in naročniki Preseka pri skupinskem naročilu šol z 20% popustom.

Matematika

24. Batagelj V., Pisanski T., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 1. del, 1950-1966, 180 str.
25. Batagelj V., Pisanski T., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 2. del, 1967-1975, 188 str.
43. Lavrič B., Rešene naloge iz matematike z republiških tekmovanj, 3. del, 1976-1987, 116 str.
46. Jurišić A., Rešene naloge z mednarodnih matematičnih olimpiad, 1. del, 1978-1988, 92 str.

Fizika

21. Hribar M., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 1. del, 1951-1970, 168 str.
37. Golli B., Žitnik J., Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj, 2. del, 1971-1983, 112 str.

Računalništvo

44 Batagelj V., Dolenc T., Martinec M., Mohar B., Reinhardt R., Tvrdy I., Vitek A., Enajsta šola računalništva. Rešene naloge z republiških tekmovanj 1977-1987, 396 str.

Ciril Velkovrh

UČBENIKI IN PRIROČNIKI ZA OSNOVNO IN SREDNJO ŠOLO V LETU 1990/91

1. **ZBIRKE VAJ IZ ARITMETIKE IN ANALIZE ZA SREDNJE ŠOLE** (Ivan Štalec)
   1. razred, 100 str., 100.00 din (80.00 din)
   2. razred, 88 str., 100.00 din (80.00 din)
   3. razred, 204 str., 150.00 din (120.00 din)
   4. razred, 120 str., 100.00 din (80.00 din)
2. **MATEMATIČNE TABELE IN FORMULE** (Stanko Uršič) 96 str., 100.00 din (80.00 din)
3. **GEOMETRIJA ZA SREDNJE ŠOLE, 2. del** (Ivan Pucelj, Ivan Štalec) 176 str., 100.00 din (80.00 din)
4. **MALI PRIROČNIK OPERACIJSKEGA SISTEMA MS DOS** (Sandi Klavžar) 50 str., 75.00 din (60.00 din)
5. **PROGRAMSKI JEZIK PASCAL** (Bojan Mohar, Egon Zakrajšek) 196 str. 125.00 din (100.00 din)
6. **TURBO PASCAL** (Matija Lokar) 100 str., 125.- din (100.- din)
7. **ASTRONOMIJA ZA SREDNJE ŠOLE** (France Avsec, Marijan Prosén) 176 str., 100.00 din (80.00 din)
8. **KARTI SEVERNEGA IN JUŽNEGA NEBA 2,000 s katalogom** 28 str., 125.- din (100.- din)
9. **NAJNUJNEJŠE O GRAFIH** (Drago Bajc, Tomaž Pisanski) 64 str., 50.00 din (40.00 din)
10. **KAKO REŠUJEMO MATEMATIČNE PROBLEME** (George Polya) 272 str., 150.00 din (120.00 din)

ŠE DVE ECCOVI NALOGI

1. ZABAVA

Na neki zabavi je vsakdo segel v roko trem ljudem, razen enega, ki se je rokoval samo z eno drugo osebo.

* Kakšno je najmanjše možno število ljudi na zabavi?
* Ali je lahko na taki zabavi 21 ljudi?
* Ali obstaja splošno pravilo, ki pove, koliko ljudi je lahko na taki zabavi?

STRNAD J., ZGODBE IZ FIZIKE, Ljubljana, Slovenska matica 1990, 380 str. (Naravoslovna knjižnica ; 4) Cena 330.- din (264.- din)

Marsikdo izmed bralcev Preseka pozna - to velja za večino ljudi - fiziko predvsem kot šolski predmet. Ponavadi je predstavljena kt skupek zakonov nad pojmi, ki jih vpeljemo, da bi ob njih lažje govorili o naravnih pojavih in jih podrobno opisali. Le redko lahko ob obravnavi kakih zanimivejših stvari zaslutimo uporabnost in moč največkrat težko razumljivih pojmov in zakonov. Skoraj nikoli pa ne pomislimo na mučna iskanja, ki so na koncu privedla do preprostih in učinkovitih današnjih spoznanj.

Toliko bolj je zato dragocena najnovejša knjiga J. Strnada z naslovom **Zgodbe iz fizike**. Kakor predstavi knjigo avtor sam, je to zbirka zgodb iz razvoja fizike od Aristotela do danes. V zgodbah zvemo, kako so nastajali danes vsem znani osnovni zakoni od mehanike, termodinamike in elektrike do kvantne mehanike in kako je mnogokrat zgolj slučajno prišlo do pomembnih odkritij. Tudi o stranpoteh govorijo zgodbe, pa o tekmovalnosti in o okoriščanju s tujimi rezultati. Delo v fiziki se nam pokaže kot področje iskanj in naporov mnogih ljudi. Uspehi se menjujejo z zmotami in neuspehi - tako kot pri vsakem drugem človeškem delu. Prav predstavitev fizike kot človeške dejavnosti je glavni namen knjige.

Knjiga bo zanimivo branje za vse, ki so se učili fiziko in ki kdaj preberejo kako časopisno novico o novih odkritjih. Bralcem Preseka pa jo še posebej toplo priporočamo.

Marjan Hribar

2. PONAREJENI KOVANCI

Imate 20 kovancev. Nekaj je ponarejenih, nekaj pa je pravih. Pravi kovanci imajo težo med 11 in 11.1 grama. Ponarejeni kovanci pa imajo težo med 10.6 in 10.7 grama. Dovoljenih vam je 15 tehtanj na vzmetni tehtnici (ne vzvodni, tako da ne morete primerjati teže dveh kovancev z enim tehtanjem), da določite, kateri kovanci so pravi in kateri ponarejeni.

Bodite pazljivi! Med štirimi kovanci, ki skupaj tehtajo 44 gramov so lahko trije pravi (po 11.1 grama) in en ponarejen (za 10.7 grama), ali pa štirje pravi (po 11 gramov).

Iz knjige Dennis Shasha: Zagonetne dogodivščine Dr. Ecca
izbrala in prevedla Neža Mramor

PRESEKOVA KNJIŽNICA

V Presekovi knjižnici je izšlo že 32 različnih naslovov. Med njimi smo nekatere že večkrat ponatisnili, druge pa imamo na zalogi še v večjem številu. Po nekaj letih so se generacije učencev že zamenjale, zato vam ob izidu prve letošnje številke Preseka ponovno pošiljamo na ogled naslednje brošure:

5. Strnad J., Relativnost za začetnike, 64 str., (50.- /40.- din)
7. Križanič F., Ukročena matematike, 64 str., (50.- /40.- din)
9. Strnad J., Začetki kvantne fizike, 48 str., (40.-/32.- din)
16. Šporer Z., Oh, ta matematike, 226 str., (100.-/80.- din)

V tej zbirki imamo na zalogi tudi še naslednje brošure:

1. Vidav I., Josip Plemelj - Ob stoletnici rojstva (50.- /40.- din)
2. Prosen M., Astronomska opazovanja (50.-/40.- din)
4. Strnad J., Začetki sodobne fizike (50.-/40.- din)
6. Landau L.D., Kaj je teorija relativnosti (50.-/40.- din)
8. Ranzinger P., Presekova zvezdna karta (50.-/40.- din)
10. Kuščer I., Enajsta šola za fizike (50.-/40.- din)
22. Bajc D., Pisanski T., Najnujnejše o grafih (50.-/40.- din)
24. Strnad J., Jožef Stefan - Ob stopetdesetletnici rojstva (50.-/40.- din)
26. Vidav I., Josip Plemelj - Ob dvajseti obletnici smrti (30.-/24.- din)
27. Strnad J., Do Newtonovih zakonov (30.-/24.- din)

Učitelje matematike in fizike prosimo, da prve štiri brošure pokažejo učencem v razredih, vse pa jim s primernim strokovnim dopolnilom tudi ponudijo. Pri skupinskem naročilu imajo poleg članov društva tudi naročniki Preseka 20% popust. Prosimo, da nam neprodane izvode in dodatna naročila vrnete vsaj do 31. oktobra 1990 na naslov Komisija za tisk DMFA, 61111 Ljubljana, Jadranska c. 19, pp 64.

Ciril Velkovrh

OB DVAJSETLETNICI REVIJE *KVANT*

Na začetku leta 1970 je izšla prva številka sovjetske matematično-fizikalne revije za učence *Kvant*. Že prej so trije matematiki M.A.Lavrent'ev, A.N.Kolmogorov in P.S.Aleksandrov in trije fiziki P.L.Kapica, I.K.Kikoin in I.V.Obreimov v posebnem pismu utemeljili potrebo po taki reviji.

"Vemo, da se znanost uspešno razvija samo, če v znanstveno-raziskovalne ustanove prihaja dobro izbrana in nadarjena mladina. Da bi bila izbira čim uspešnejša, je treba že od šolskih klopi vzgajati poteze, ki so nujno potrebne pri raziskovalnem delu. To so: ustvarjalna domišljija, pogum in ljubezen do raziskovanja. Naša šola zdaj v polni meri ne more izvajati te naloge. Tako vzgojo bi tudi zahteval samo razmeroma majhen del naših učencev. Da bi zajeli po možnosti vse naše šole, je treba osnovati posebno revijo. Za razliko od obstoječih dobrih poljudnoznanstvenih revij bi si morala nova revija kot osnovno nalogo postaviti razvijanje ustvarjalnega zanimanja učencev in vzgojo aktivnega sprejemanja znanja in zmožnosti za povezovanje teorije s prakso. Čeprav bi bilo tako vzgojo smiselno uvesti za vse veje naravoslovja, predlagamo, da začnemo z izdajanjem matematično-fizikalne revije..."

Zanimivo je, da so izhajali vsi trije matematični *Kvantovi* očetje iz moskovske matematične šole N.N.Luzina, ki ji šaljivo pravijo Luzitanija, in vsi trije fizikalni z Leningrajskega fiziko-tehničnega inštituta A.F.Ioffeja. Predlog v znanstvenem svetu uveljavljenih akademikov je naletel na odobravanje in tako je pred dvajsetimi leti začel izhajati pri založbi *Nauka* in pod pokroviteljstvom Akademije znanosti *Kvant*. Ime je revija dobila po obroku energije v elektromagnetnem valovanju, s katerim je Max Planck leta 1900 začel v fiziki novo, kvantno obdobje. Urednik je postal I.K.Kikoin, njegov namestnik pa A.N.Kolmogorov.

Ob dvajsetletnici se *Kvant* spominja svojih korenin. Te segajo v trideseta leta, ko so se začela matematična in fizikalna tekmovanja učencev v Moskvi, Leningradu in Novosibirsku. V šestdesetih letih so prerasla v vsezvezne olimpiade. Nastale so posebne matematično-fizikalne šole z internati in večerne in dopisne šole. V tem nizu ustanov, ki so vse bile namenjene iskanju nadarjenih učencev in njihovemu čim hitrejšemu strokovnemu razvoju, je manjkala le še revija z namenom, ki ga je opredelilo pismo akademikov.

Kvant je izpolnil pričakovanja. Če nič drugega, priča o tem prva številka revije *Quantum*, angleške izdaje *Kvanta*, ki je pravkar izšla v ZDA. Pri načrtu sodelujeta ameriški Nobelovec S.Glashow in sovjetski fizik Ju.Osip'jan kot glavna urednika in Američani B.Aldridge kot odgovorni urednik, E.Lozanski kot mednarodni svetovalec in H.Andersen kot zastopnik izdajatelja.

V dvajsetih letih se je *Kvant* precej spremenil. Vseh šest očetov in nekateri drugi stalni sodelavci so umrli. Starim rubrikam, na primer *Kvantovi zbirki nalog*, *Kvantovemu laboratoriju*, *Praktikumu abiturientov*, *Matematičnemu krožku*, *Olimpiadam*, *Obvestilom*, so se pridružile nove, na primer: *Šola v Kvantu*, *Informatika in programiranje*, *Igrice in uganke*, *Kvant se smehlja*, *R* (za rakete in raziskovanje vesolja), *Ali imate idejo?*. Načrtujejo pa še nove, na primer *Poročila o knjigah*, *Raziskovalne naloge*, *Vprašajte - odgovarjamo*.

Kvant je zahtevnejši od štiri leta mlajšega *Preseka*. Že od prve številke zagotavlja, da je treba "reševati naloge, brati prispevke s svinčnikom in papirjem in se pobrigati, da sami naredite opisane poskuse." *Kvant* je obsežnejši, saj na leto izide dvanajst številk. Toda *Presek* z več kot stokrat manjšim zaledjem je v svojem okolju tudi zavidljiv dosežek. Zato se *Kvantu* zagotovo ne bo zdelo za malo, če se čestitkam ob njegovi dvajsetletnici pridruži *Presek* in njemu in novorojenemu *Quantumu* zaželeli še dolgo in uspešno izhajanje.

Janez Strnad

PISMA BRALCEV

Aleš Jesenšek je poslal Preseku prijazno pismo, ki se začenja takole: "Rad prebiram Presek. Še posebno všeč so mi članki iz fizike. Z branjem sem začel v osnovni šoli, nadaljeval v srednji šoli, potem na fakulteti in tudi zdaj, ko sem nekako odrasel, z veseljem vzamem revijo v roke. Ob članku *Tokovni top* sem se spomnil, kako zagnano sem se v srednji šoli lotil posebne teorije relativnosti."

V nadaljevanju samo povzemamo bistvo pisma, v katerem je več enačb. Naelektren ploščati kondenzator opazujemo v lastnem opazovalnem sistemu, v katerem miruje, in v laboratorijskem sistemu, v katerem se giblje. Če se kondenzator giblje v smeri, ki je pravokotna na njegovo električno polje, je sila, ki deluje na naelektreno telo med ploščama kondenzatorja, v laboratorijskem sistemu manjša kot v lastnem. Ali se zaradi podobnega pojava v ionskem kristalu zmanjša sila med ioni v laboratorijskem sistemu, v katerem se kristal hitro giblje? Ali je v tem sistemu tališče kristala nižje kot v lastnem sistemu, v katerem miruje?

Kratek odgovor brez enačb utegne biti zanimiv tudi za druge bralce Preseka. Na začetku posebne teorije relativnosti se naučimo prevesti opis kakega pojava v nepospešenem opazovalnem sistemu (opazovalni sistem sestavljajo koordinatni sistem in ure) v opis tega pojava v drugem takem sistemu. En opis prevedemo v drugega z *Lorentzovimi transformacijami*, kot prevedemo latinski odlomek s slovarjem v slovenščino. Lorentzove transformacije so kolikor mogoče preproste, *linearne*, in pri prevajanju samem ne more priti do težav. Do navideznih težav, ki jim nekateri pravijo "paradoksi", lahko pride, če začetni opis v nepospešenem opazovalnem sistemu ni popoln ali neoporečen. Pri obravnavanju naelektrenega kondenzatorja ali mirujočega naboja v električnem polju lahko zaidemo v težave, če ne upoštevamo tega, da na plošči kondenzatorja ali na naelektreno telo v polju deluje kako drugo telo s silo, ki uravnoveša električno silo. To telo, ki je obremenjeno na stisk ali nateg, moramo vključiti v račune, potem pa opis v enem opazovalnem sistemu ustreza opisu v drugem. Podroben račun je narejen za ploščati kondenzator, ki se giblje v smeri električnega polja, v članku W.Rindlerja in J.Denurja *A simple relativistic paradox about electrostatic energy*, American Journal of Physics **56** (1988) 795.

V ionskem kristalu delujejo na izbrani ion neposredni sosedi s privlačno silo, nekoliko bolj oddaljeni sosedi z odbojno silo,... in elektroni sosednjih ionov na njegove elektrone z odbojno silo... Zaradi tega so razmere v kristalu tako zapletene, da jih ne moremo obvladati, če se menimo samo za transformacijo polja sosednjih ionov.

Ker po tej poti ne pridemo zlahka do odgovora, se mu poskusimo približati po drugi. Vprašamo se po tališču kristala v laboratorijskem sistemu, če ga poznamo v lastnem sistemu. Potrebujemo samo Lorentzovo transformacijo za temperaturo. Vendar poznamo tri različne transformacije, po prvi je temperatura T' v laboratorijskem sistemu nižja kot temperatura T v lastnem, $T' = T/\gamma$, po drugi je enaka, $T' = T$ in po tretji je višja, $T' = \gamma T$. Pri tem je $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, če je v hitrost lastnega sistema v laboratorijskem. Vse je odvisno od tega, kako vpeljemo temperaturo in druge termodinamične količine in kakšen način merjenja imamo v mislih. Več o tem je mogoče prebrati v članku H.Callena in G.Horwitza *Relativistic Thermodynamics*, American Journal of Physics **39** (1971) 938. Razprava o tem še ni končana.

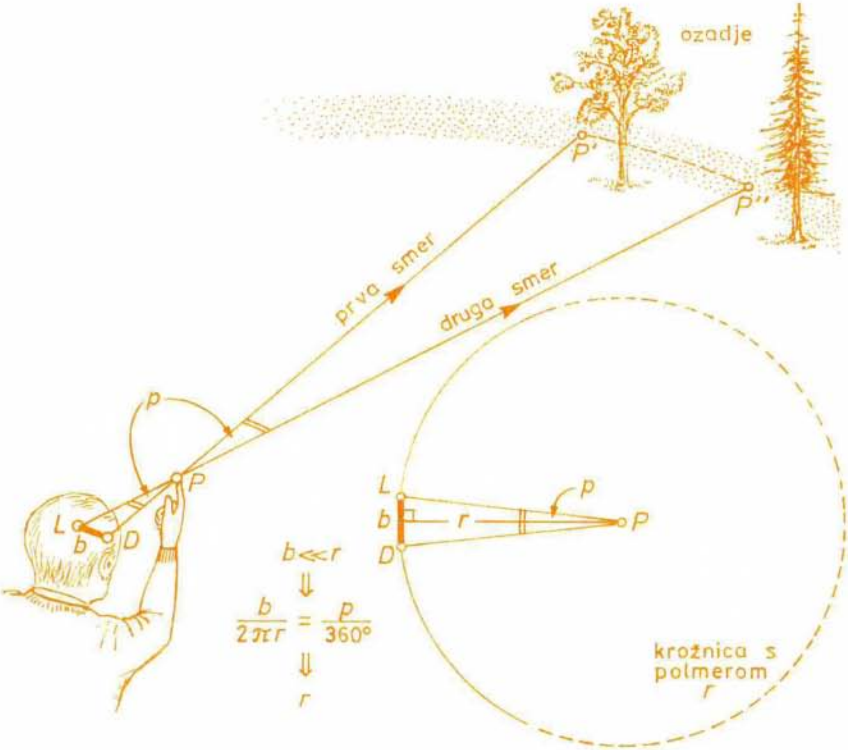
Morda naš dopisnik in drugi bralci z odgovorom ne bodo čisto zadovoljni. Sodi pač med primere, ko na razmeroma preprosto vprašanje ni preprostega odgovora. Takih vprašanj je v fiziki veliko.

Janez Strnad

ASTRONOMIJA

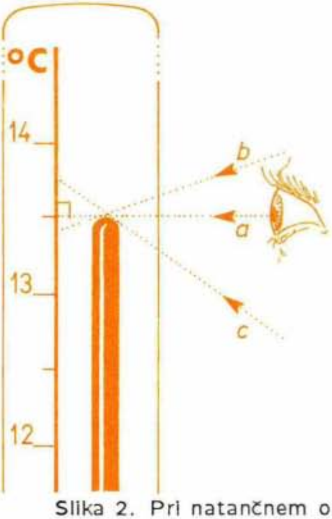
PARALAKSA

Poglej na predse iztegnjeni prst roke najprej z desnim, nato pa z levim očesom. Glave ne premikaj. Na steni sobe ali na ozadju oddaljenih predmetov vidiš prst v različnih smereh. Opisano spremembo smeri merimo s kotom, ki ima vrh v opazovanem prstu, kraka pa sta usmerjena k očema. Temu kotu rečemo *paralaksa* (iz grške besede parallaxis - menjava, sprememba,



Slika 1. K ugotavljanju paralakse. *P* prst (opazovano telo), *D* desno oko (prvo opazovališče), *L* levo oko (drugo opazovališče), *P'* navidezna lega prsta na ozadju, če ga gledamo z desnim očesom, *P"* navidezna lega prsta na ozadju, če ga gledamo z levim očesom, $|DL| = b$ baza, $\sphericalangle DPL = \sphericalangle P'PP'' = p$ paralaksa prsta (opazovanega telesa), *r* oddaljenost (razdalja). Ker je *b* dosti manjši od *r*, lahko vzamemo *b* kar za lok na krožnici s polmerom *r*, če loku pripada središčni kot *p*. Sestavimo enačbo $p/360° = b/(2\pi r)$, ki pove, da sta si paralaksa in oddaljenost obratno sorazmerni količini. Če *p* izmerimo, lahko pri znani bazi *b* določimo *r*.

odstopanje), razmiku med očema pa *baza* (slika 1). Namesto očes si lahko mislimo opazovališči, namesto prsta pa oddaljeno telo, ki ga opazujemo iz obeh opazovališč. Paralaksa je torej kot, v katerem iz oddaljenega telesa vidimo izbrano bazo, pravokotno na zorno smer.

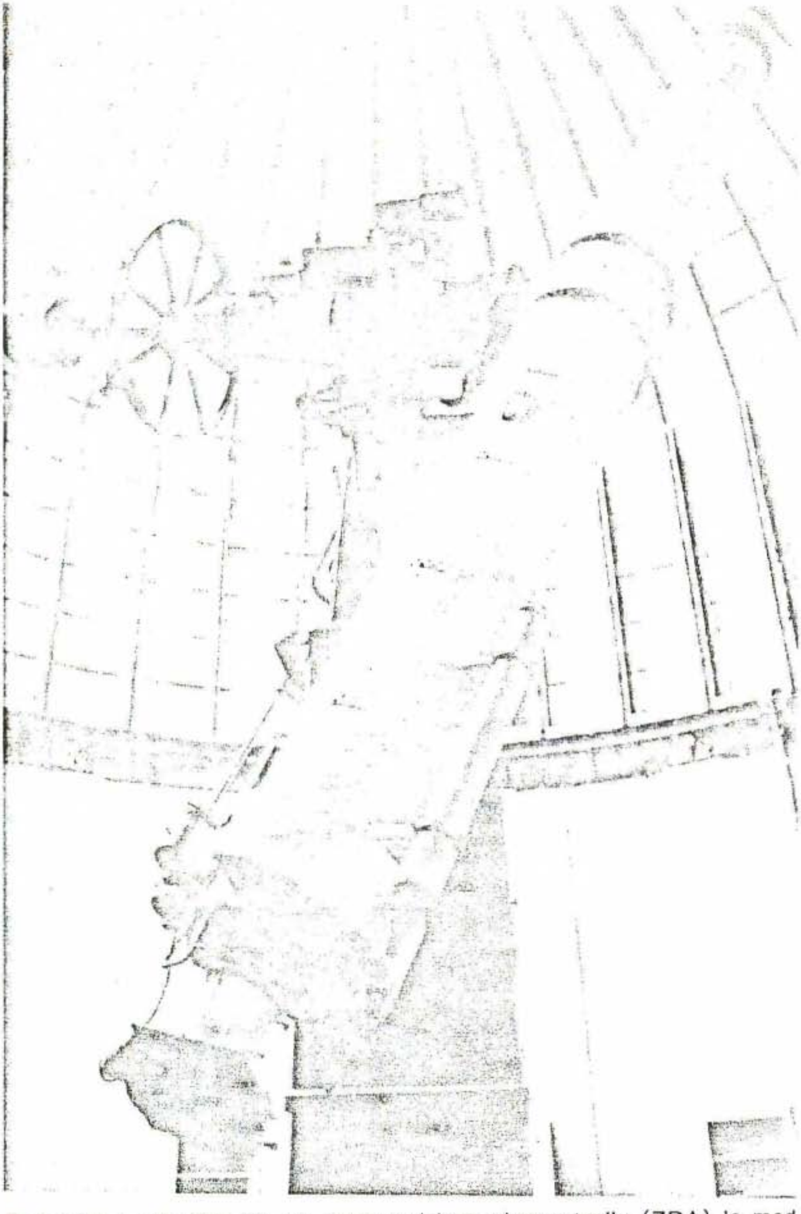


Slika 2. Pri natančnem odčitavanju skale nekaterih merilnikov moramo paziti na paralakso. Ni vseeno, kako odbiramo vrednost. Pravilno odčitavamo tako, da gledamo vedno z enim očesom in pravokotno na skalo; *a* - pravilno odčitavanje, *b*,*c* - nepravilno.

Če primikamo prst očesoma, se paralaksa veča, če ga odmikamo, se manjša. Ta preprost poskus s prstom nas pripelje na misel, da sta si paralaksa in oddaljenost (razdalja) telesa obratno sorazmerni. O tem nas prepriča enačba, ki smo jo zapisali v besedilo pod sliko 1.

Izračunajmo paralakso prsta, ki ga držimo v oddaljenosti r = 50 cm od očes, če je razmik med očesoma $b = 6$ cm. V enačbo vstavimo podatke in dobimo $p = b \cdot 360°/(2\pi r) = 6 \text{ cm} \cdot 360°/(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50) \text{ cm} = 6{,}9°$. Ali zasledimo to paralakso? Seveda jo, saj naše oko loči mnogo manjše kote od izračunanega. (Čim manjši kot med dvema razmaknjenima točkamaločimo, boljša je ločljivost našega očesa. Ločljivost človeškega očesa je nekaj kotnih minut.)

Ločljivost najboljšega očesa je 1' (ena kotna minuta). Recimo, da nimamo najboljših oči. Naj bo ločljivost našega očesa okoli 3'. Koliko meri oddaljenost točkastega telesa, da pri gledanju enkrat z enim, drugič z drugim očesom še zapazimo navidezni premik telesa glede na oddaljene predmete, da torej zasledimo njegovo paralakso? Postavimo $p = 3'$, $b = 6$ cm in izračunamo oddaljenost $r = 6 \text{ cm} \cdot 360 \cdot 60'/(2 \cdot 3{,}14 \cdot 3') = 68{,}8$ m. Če bi gledali točkasto telo v razdalji večji od 68,8 m najprej z enim in nato z drugim očesom, ne bi več zaznali njegove paralakse. Zasledili pa bi jo, če bi povečali bazo, če bi opazovali dano točko iz dveh bolj razmaknjenih opazovališč, kot sta razmaknjeni očesi. (Naredi ta poskus.) Z večjo bazo torej lahko ugotovimo večjo oddaljenost telesa. Tak način merjenja oddaljenosti uporabljajo v



Refraktor z odprtino 60 cm na sproulskem observatoriju (ZDA) je med najbolj znanimi daljnogledi, s katerim na fotografski način merijo paralakse zvezd. Dosegli so natančnost meritev pod 0,005" (pet tisočink kotne sekunde).

geodeziji, vojski (daljinomer) in predvsem v astronomiji. Ogledali si bomo omenjeni način merjenja v astronomiji.

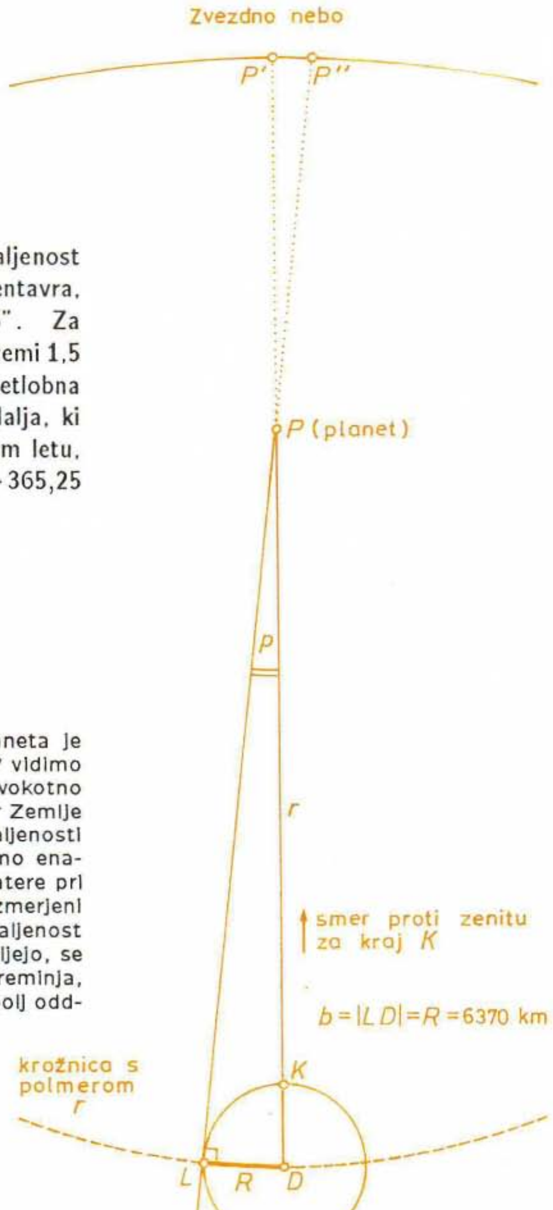
Če bi iz dveh zelo razmaknjenih krajev na zemeljskem površju istočasno opazovali ali pa fotografirali Luno ali kak planet, bi ju na ozadju zvezdnega neba zaznali v različnih legah. Če pa bi na tak način opazovali zvezde, ne bi zasledili spremembe njihovih leg. To pomeni, da je za Luno in druga telesa Osončja (planete, komete, meteorje itn.) izbrana baza na zemeljskem površju dovolj velika, da bi z njo določili oddaljenost teh teles, za zvezde pa premajhna. Sklepamo tudi: Ker ne ugotovimo navideznega premika zvezd, morajo biti zvezde vsekakor mnogo dalj od nas, kot so Luna in planeti.

Res je. Spremembo lege kake bližnje zvezde glede na mnogo bolj oddaljene bi zaznali šele, če bi jo opazovali iz dveh zelo razmaknjenih leg Zemlje na njeni poti okrog Sonca. Pri zelo oddaljenih zvezdah pa tudi tega ne bi mogli zaslediti. Torej so zvezde zares zelo daleč.

Za določanje oddaljenosti teles Osončja jemljemo za bazo kar polmer Zemlje. Kot, v katerem je iz planeta (ali kakega drugega telesa Osončja) viden polmer Zemlje, pravokotno na zorno smer, je (dnevna) *paralaksa planeta* (slika 3). Paralakso planeta bi načeloma ugotovili takole: Planet bi opazovali istočasno iz dveh krajev, ki ležita na istem poldnevniku. Za prvi kraj L bi bil planet na obzorju, v drugem kraju K pa bi ga videli v zenitu. Kot med smerema od obeh opazovališč proti planetu je enak paralaksi planeta. Ko torej določijo (fotografirajo) legi planeta glede na zvezde, ugotovijo kot med legama - to je paralakso planeta, oddaljenost planeta pa izračunajo iz enačbe, ki je zapisana pod sliko 3.

Za vajo izračunaj oddaljenost planeta Marsa od Zemlje v trenutku, ko je bila njegova paralaksa 18". Za polmer Zemlje vzemi 6370 km. (Rezultat: $7{,}3 \cdot 10^7$ km)

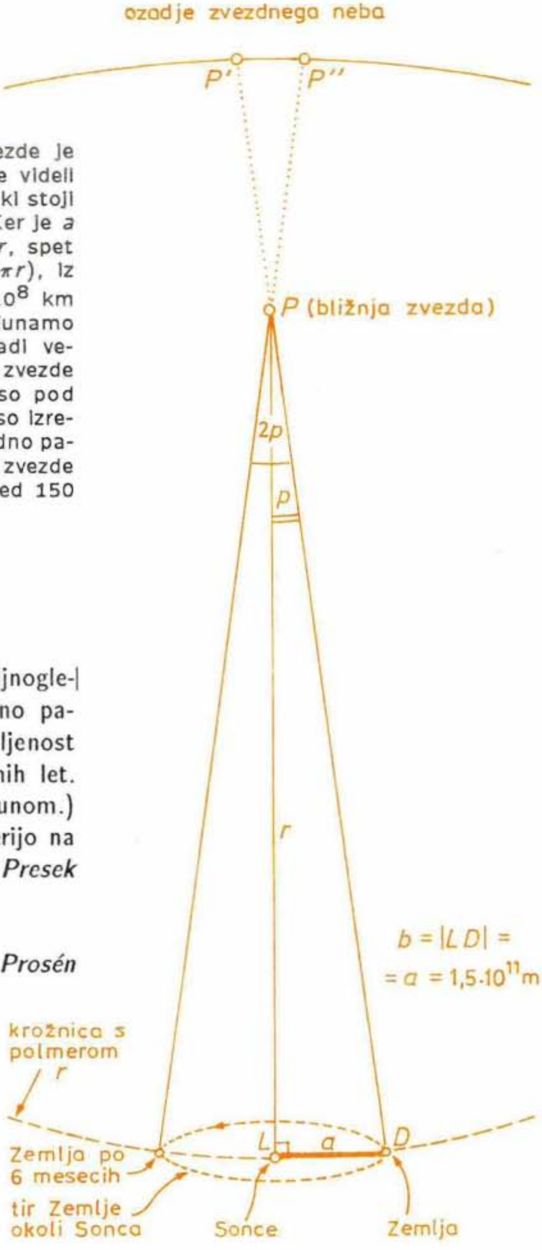
Pri merjenju oddaljenosti zvezd pa vzamemo mnogo večjo bazo, kot je polmer Zemlje. Za bazo vzamemo polmer krožnice, po kateri kroži Zemlja okrog Sonca (slika 4). Kot, v katerem bi iz zvezde videli polmer zemeljske krožnice ali kar razdaljo med Soncem in Zemljo, pravokotno na zorno smer, imenujemo (letno) *paralakso zvezde*. Paralakso bližnje zvezde določijo takole: Zvezdo opazujejo (fotografirajo) v časovnem presledku pol leta, ko je Zemlja v nasprotnih legah na svoji krožnici okrog Sonca. Ugotovijo smeri, v katerih vidijo zvezdo glede na ozadje zvezdnega neba iz obeh leg Zemlje. Polovični kot med obema smerema pa je enak paralaksi zvezde. Izkazalo se je, da je za večino zvezd še ta baza premajhna. Uporabna je le za določevanje oddaljenosti najbližjih zvezd.



Za vajo izračunaj oddaljenost najbližje zvezde Proksime Kentavra, če je njena paralaksa 0,75". Za polmer zemeljske krožnice vzemi 1,5 $\cdot 10^8$ km. (Rezultat: 4,3 svetlobna leta. Svetlobno leto je razdalja, ki jo prepotuje svetloba v enem letu, to je $3 \cdot 10^8$ m/s $\cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365{,}25$ s $= 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km.)

Slika 3. Paralaksa planeta je kot p, v katerem iz planeta P vidimo polmer Zemlje R, ki stoji pravokotno na zorni smeri. Ker je polmer Zemlje neprimerno manjši od oddaljenosti planeta, spet lahko sestavimo enačbo $p/360^\circ = R/(2\pi r)$, iz katere pri znanem $R = 6370$ km in izmerjeni paralaksi p izračunamo oddaljenost r planeta. Ker se planeti gibljejo, se njihova paralaksa stalno spreminja, pri bližnjih planetih bolj, pri bolj oddaljenih pa manj.

Slika 4. Paralaksa zvezde je kot p, v katerem bi iz zvezde videli polmer zemeljske krožnice a, ki stoji pravokotno na zorno smer. Ker je a skrajno majhen v primeri z r, spet velja enačba $p/360^\circ = a/(2\pi r)$, iz katere pri znanem $a = 1{,}5 \cdot 10^8$ km in izmerjeni paralaksi p izračunamo oddaljenost r zvezde. Zaradi velikanskih oddaljenosti imajo zvezde zelo majhno paralakso (vse so pod 1"). Zato je zvezdno paralakso izredno težko izmeriti. Prvo zvezdno paralakso in s tem oddaljenost zvezde so astronomi izmerili šele pred 150 leti.



Z najbolj zmogljivimi daljnogledi danes izmerijo še zvezdno paralakso 0,005" in s tem oddaljenost zvezd do okoli 650 svetlobnih let. (Prepričaj se o tem z računom.) Večje oddaljenosti zvezd merijo na druge načine. O tem pa je *Presek* pisal pred kratkim.

Marijan Prosén

NENAVADNE KRIVULJE

Najprej si bomo ogledali nekaj znanih krivulj in o vsaki povedali kaj zanimivega. Potem se bomo seznanili z enostavnim načinom generiranja vseh teh krivulj. Napisali pa bomo tudi program, s katerim bomo lahko vse te krivulje risali in si izmišljali svoje.

1. Kochova snežinka

Začnimo z enakostraničnim trikotnikom (slika 1a). V prvem koraku razdelimo vsako stranico trikotnika na tretjine, srednje odseke stranic pa nadomestimo z novimi, za tretjino manjšimi enakostraničnimi trikotniki (slika 1b). V drugem koraku naredimo enako z vsako od stranic tako dobljenega poligona, ki spominja na Davidovo zvezdo. Postopek lahko ponavljamo, dokler nam to dopušča natančnost risanja. Če po nekaj korakih postopka lahko približno vidimo, kakšen bo izgled krivulje, obris lika, če bi postopek izvedli neskončnokrat (slika 1e, glej 4. stran ovitka).

Krivulja, ki jo dobimo, če postopek izvedemo neskončnokrat, se imenuje *Kochova snežinka*, saj je podobna pravi snežinki. Prvi jo je raziskoval v začetku tega stoletja Helge von Koch. Zelo je zanimiva, saj ima neskončno velik obseg, pa vendar obsega končno površino. Komur so domača geometrijska zaporedja, mu obsega in površine ne bo težko izračunati.

Poglejmo, kakšen lik dobimo, če srednje dele stranic nadomeščamo s trikotniki obrnjenimi navznoter (slike 2a do 2e). Obseg lika, če postopek ponovimo neskončnokrat, je enak obsegu *Kochove snežinke*, površina lika pa je manjša od površine začetnega trikotnika za toliko, kot je površina *Kochove snežinke* večja od površine istega začetnega trikotnika. Imenujmo ta lik *obratna Kochova snežinka*. Ravnino lahko popolnoma prekrijemo z izmenjajočima se likoma *Kochove snežinke* in *obratne Kochove snežinke* (slika 3, glej 4. stran ovitka).

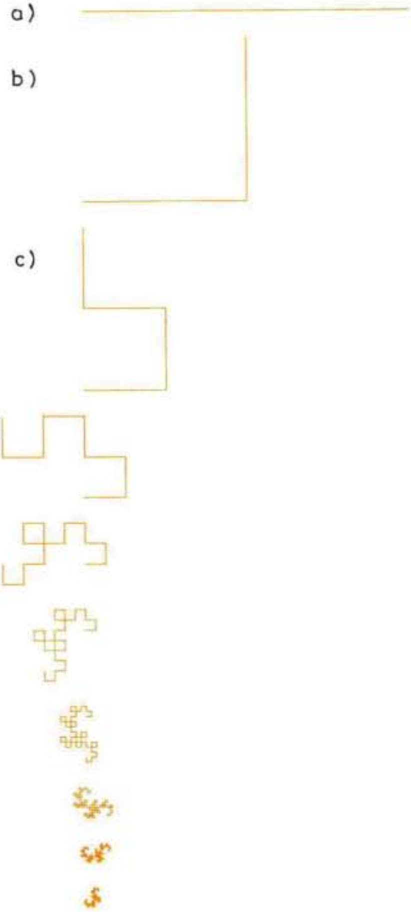
2. Peanova krivulja

Peanovo krivuljo dobimo z naslednjim postopkom. V prvem koraku kvadratu narišemo diagonalo (slika 4a). V drugem koraku kvadrat razdelimo na devet enakih kvadratov in sedaj njim narišemo vse diagonale z eno potezo, tako da nikjer ne sekamo svoje poti (slika 4b). V tretjem koraku naredimo enako z vsakim od manjših kvadratov (slika 4c). Ker se na slikah 4 diagonale kvadratov v kotih stikajo, ni jasno, kako krivuljo narišemo. Jasno pa bo, če zavoje krivulje zaoblimo (slika 4cc). Krivulja, ki jo dobimo, če postopek ponovimo neskončnokrat, se imenuje *Peanova krivulja*. Opazimo, da se krivulja z vsakim naslednjim korakom vedno bolj gosto vije po površini, omejeni s kvadratom. Peanova krivulja je prostor *zapolnjujoča krivulja*, kar pomeni, da gre skozi vsako točko površine, omejene s kvadratom. To krivuljo je v drugi polovici prejšnjega stoletja odkril italijanski matematik in logik Giuseppe Peano (glej 3. stran ovitka).

3. Zmajeva krivulja

Zmajevo krivuljo lahko le za nekaj prvih korakov razvoja dobimo s prepogibanjem papirja. Vzemimo dolg papirnati trak, ki predstavlja začetek razvoja *zmajeve krivulje* (slika 5a). Trak prepognimo po polovici in odprimo do pravega kota (slika 5b). Trak potem dvakrat zaporedoma prepognimo po polovici in ga odprimo do pravih kotov (slika 5c), trak trikrat zaporedoma prepognimo po polovici... Kdor ima izkušnje s prepogibanjem papirja ve, da se papir ne da prepogniti več kot sedemkrat, pa naj bo še tako tanek in dolg.

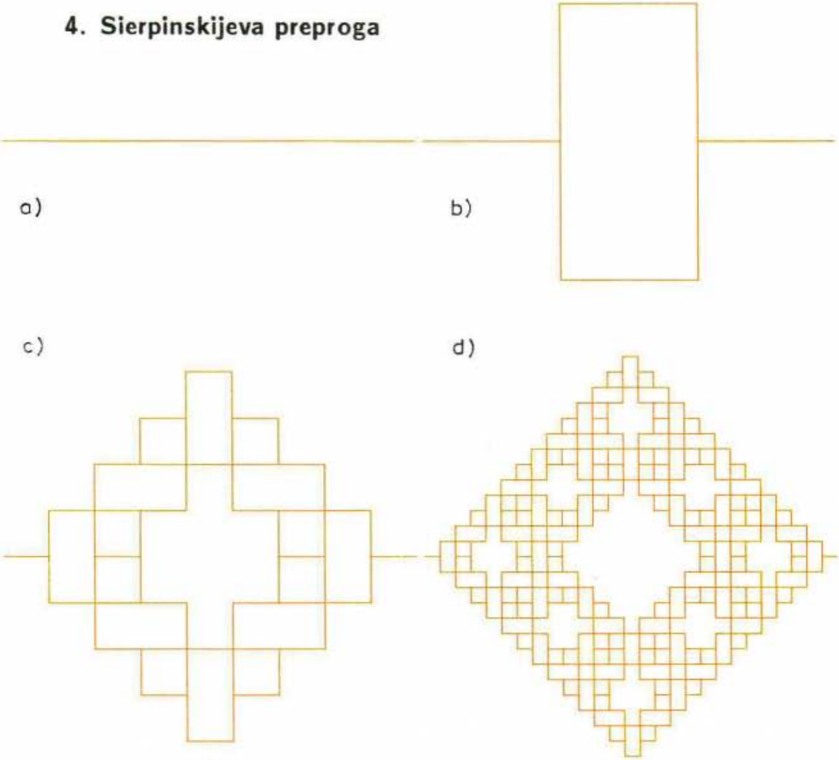
Naj bo papir na začetku še tako dolg, je prostor, ki ga zaseda zmajeva krivulja, po vsakem koraku manjši. Vendar pa je *zmajeva krivulja*, dobljena z neskončno mnogo prepogibanj, *prostor zapolnjujoča krivulja*, če na vsakem koraku dolžino papirja ustrezno podaljšamo. Če želimo, da je razdalja med začetkom in koncem *zmajeve krivulje* na vsakem koraku enaka, moramo krivuljo na vsakem koraku podaljšati za $\sqrt{r}$-krat. Štiri zmajeve krivulje lahko lepo zložimo skupaj, kot prikazuje slika 6 na 3. strani ovitka.



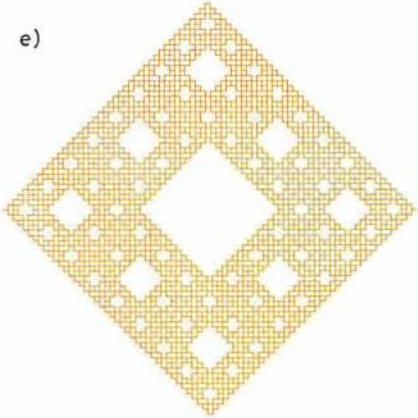
Slika 5

Prvi je zmajevo krivuljo opisal fizik John E. Heighway leta 1960 in po njem krivuljo imenujemo tudi *Heighwayev zmaj*.

4. Sierpinskijeva preproga



e)



Slika 7

Začnemo z daljico (slika 7a), potem pa v vsakem naslednjem koraku vsako daljico zamenjamo z likom (slika 7b), ki je sestavljen iz osmih za tretjino krajših daljic. Če postopek ponovimo neskončnokrat, dobimo krivuljo z imenom *Sierpinskijeva preproga*. *Sierpinskijeva preproga* ni *prostor zapolnjujoča krivulja*. Vsota površin vseh 'lukenj' v preprogi je enaka najmanjši površini kvadrata, ki jo potrebujemo, da vanj vrišemo krivuljo. Torej sama krivulja ne prekrije nobene površine.

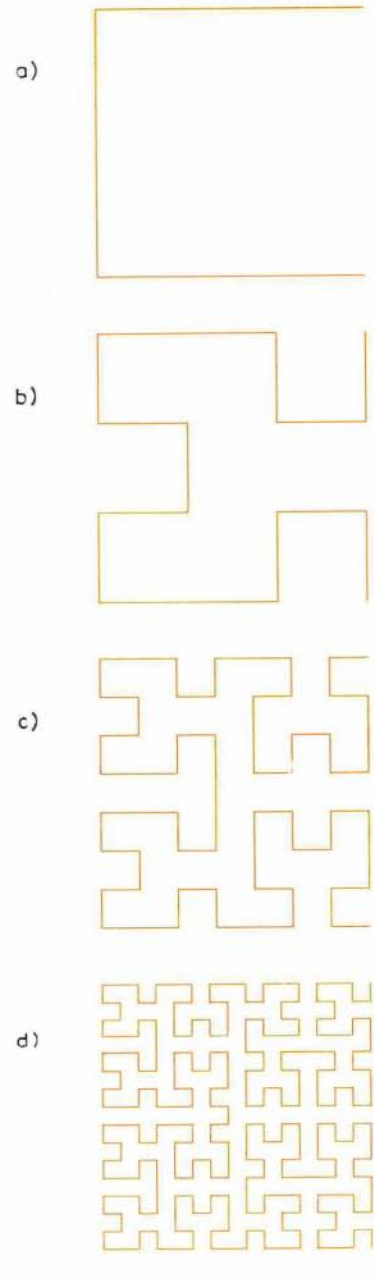
5. Hilbertova krivulja

Osnovni element te krivulje je lik na sliki 8a. V prvem koraku uporabimo štiri osnovne elemente in jih povežemo med seboj s tremi daljicami, kot prikazuje slika 8b. Za vsak naslednji korak uporabimo zadnjo dobljeno sliko kot osnovni element. Krivulja, ki jo dobimo po neskončno mnogo korakih, se imenuje *Hilbertova krivulja* in je *prostor zapolnjujoča krivulja*.

RISANJE KRIVULJ

Z risanjem teh krivulj je podobno kot z risanjem premice, trikotnika, kroga,... Vse kar narišemo, pa naj bo še tako natančno, je le približek, pripomoček za nazorno predstavo ideje. Vsaka črta, ki jo narišemo, ima neko debelino, končno dolžino in tudi popolnoma ravna ni. Vse zgoraj opisane krivulje so dobljene s postopkom deljenja, ponovljenim neskončnokrat. Mi bomo risali le krivulje na začetnih stopnjah njihovega razvoja.

Generiranje krivulj si oglejmo kar na primeru Kochove snežinke, ki je zelo enostavna. Kateri so osnovni elementi potrebni za risanje Kochove snežinke? To je šest vektorjev določene dolžine, ki jih bomo oštevilčili od 0 do 5, kot prikazuje slika 9. Krivuljo, ki je sestavljena iz

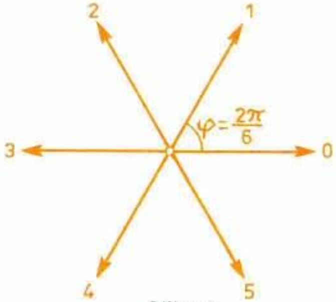


Slika 8

teh vektorjev, lahko sedaj opišemo z nizom vektorjev. Npr.: niz 024 predstavlja enakostraničen trikotnik (slika 1a), niz 051021324354 pa *Kochovo snežinko* na prvi stopnji razvoja (slika 1b).

Videli smo, da se na vsakem naslednjem koraku vse stranice poligona nadomestijo z likom, sestavljenim iz štirih za tretjino krajših daljic. To lahko opišemo z naslednjimi pravili: vektor 0 se nadomesti z nizom vektorjev 0510, vektor 1 se nadomesti z nizom vektorjev 1021,... Podajmo ta pravila v tabeli:

celica	nadaljne delitve	predstavitev
0	0 5 1 0	0
1	1 0 2 1	1
2	2 1 3 2	2
3	3 2 4 3	3
4	4 3 5 4	4
5	5 4 0 5	5
6	0 2 4	-1



Slika 9

V prvem stolpcu so *celice*. Vsaka *celica* ima svoje ime, to je število. V zadnjem stolpcu je podana grafična *predstavitev*, interpretacija *celic*. *Celicam* 0 do 5 smo priredili vektorje s slike 9, celica 6 pa nima nobene grafične predstavitve in smo jo označili z -1. V srednjem delu tabele, imenovanem *nadaljnje delitve*, pa so podani nizi *celic*, ki nadomestijo celico v naslednjem koraku.

Celico, ki jo vzamemo kot začetno in iz nje potem v nadaljnih korakih razvijamo krivuljo v skladu s pravili v tabeli, imenujemo *rojstno celico*. Na sliki 10 je predstavljen razvoj *celice 6*. *Generacija* označuje, kolikokrat *celice* nadomestimo z njim ustreznimi nizi *celic*.

Oglejmo si sedaj program (str. 61) za risanje krivulj, ki so predstavljene s tabelo. Program je napisan v *turbo pascalu*, ne bo pa ga težko prilagoditi za katerikoli prevajalnik na drugem računalniku, ki omogoča risanje.

Ko program poženemo, vpišemo število smeri, t.j. vektorjev, ki so potrebni za risanje krivulje. Pri *Kochovi snežinki* je to število 6. Potem vpisujemo nadaljne delitve *celic* in za vsako *celico* niz končamo z -1. Za vsakim nizom *nadaljnih delitev* vnesemo še predstavitev celice. Vpisovanje v tabelo končamo z dvema -1, prvič ob prvi nadaljni delitvi celice, ki je ne potrebujemo več, in drugič ob predstavitvi te celice.

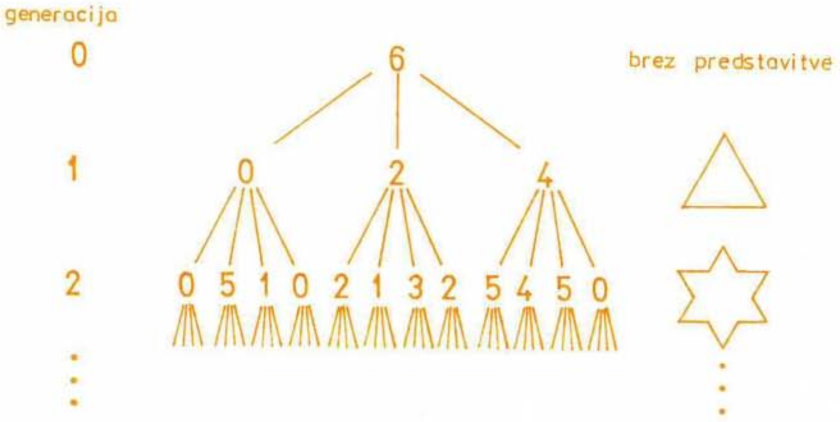
Po vnosu osnovnih podatkov krivulje v zanki spreminjamo naslednje parametre: dolžino celice, rojstno celico, generacijo in koordinati začetka

```
program Generiranje_Fraktalov;
uses Crt,Graph;
var nadaljneDelitve:array[0..50,0..50]of integer;
    predstavitev:array[0..50]of integer;
    stSmeri,dolzinaCelice,generacija,rojstnaCelica,zacetekX,zacetekY,i,j:integer;
    grDriver,grMode:integer;
    ch:char;


procedure narisi(celica:integer);
var dx,dy:integer;
begin
  if predstavitev[celica]>=0 then begin
    dx:=round(dolzinaCelice*cos(predstavitev[celica]mod
stSmeri*2*Pi/stSmeri));
    dy:=-round(dolzinaCelice*sin(predstavitev[celica]mod
stSmeri*2*Pi/stSmeri));
    if (predstavitev[celica]>=0)and(predstavitev[celica]<stSmeri)
      then LineRel(dx,dy)
      else MoveRel(dx,dy);
  end;
end; { narisi }


procedure krivulja(generacija,celica:integer);
var i:integer;
begin
  if generacija=0
    then narisi(celica)
    else begin
      i:=0;
      while nadaljneDelitve[celica,i]>=0 do begin
        krivulja(generacija-1,nadaljneDelitve[celica,i]);
        i:=i+1;
      end; { while }
    end; { else }
end; { krivulja }


begin { glavni }
  ClrScr;
  write('stevilo smeri = ');readln(stSmeri);
  i:=0;
  repeat
    j:=0;
    repeat
      write(j+1:3,'. nadaljna delitev celice ',i:3,' = ');readln(nadaljneDelitve[i,j]);
      j:=j+1;
    until nadaljneDelitve[i,j-1]<0;
    write('predstavitev celice ',i:3,' = ');readln(predstavitev[i]);
    i:=i+1;
  until nadaljneDelitve[i-1,0]<0;
  ch:=#0;
  repeat { spreminjanje parametrov in risanje }
    write('dolzina celice = ');readln(dolzinaCelice);
    write('rojstna celica = ');readln(rojstnaCelica);
    write('generacija = ');readln(generacija);
    write('zacetek risanja X koordinata = ');readln(zacetekX);
    write('zacetek risanja Y koordinata = ');readln(zacetekY);
    grDriver:=detect; { vstop v graficni nacin }
    InitGraph(grDriver,grMode,'');
    MoveTo(zacetekX,zacetekY);
    krivulja(generacija,rojstnaCelica);
    repeat until KeyPressed; { cakaj na pritisk katerekoli tipke }
    ch:=ReadKey; { preberi katera tipka je bila pritisnjena }
    CloseGraph; { nazaj v tekstovni nacin }
  until ch=#27; { koncaj ob pritisku na tipko ESC }
end. { glavni }
```



Slika 10

risanja. Po vsakem vnosu parametrov se krivulja nariše, in če želimo končati, pritisnemo tipko ESC, drugače pa katerokoli drugo tipko.

Celice imajo lahko naslednje grafične predstavitve p, če je število vseh smeri enako n: če je $0<p<n-1$, potem se nariše vektor pod kotom $p\frac{2\varphi}{n}$, če je $n<p<2n-1$, potem se le premaknemo v smeri $p\frac{2\varphi}{n}$ za dolžino vektorja, če pa je p negativno število, celica nima predstavitve.

Podajmo še tabele za ostale krivulje, ki smo jih spoznali:

Peanova krivulja
število smeri = 8
rojstna celica = katerakoli

celica	nadaljne delitve	predstavitev
0	010323010	1
1	121030121	3
2	232101232	5
3	303212303	7

Zmajeva krivulja
število smeri = 4
rojstna celica = katerakoli

celica	nadaljne delitve	predstavitev
0	01	0
1	21	1
2	23	2
3	03	3

Sierpinskijeva preproga
število smeri = 4
rojstna celica =
= katerakoli od 0 do 3

celica	nadaljne delitve	predstavitev
0	010363010	0
1	121070121	1
2	232141232	2
3	303252303	3
4	444	4
5	555	5
6	666	6
7	777	7

Hilbertova krivulja
število smeri = 4
rojstna celica = 8 ali 9

celica	nadaljne delitve	predstavitev
0	1034	0
1	0125	1
2	0126	2
3	1037	3
4	6740	0
5	7651	1
6	7652	2
7	6743	3
8	1039	-1
9	6748	-1

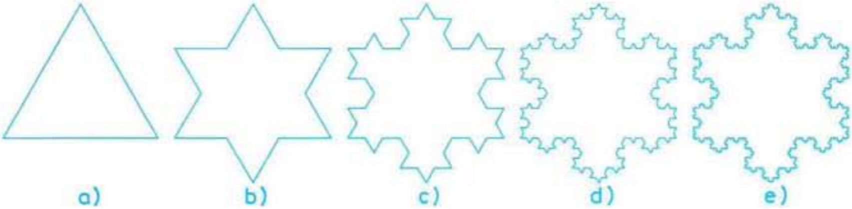
Napotki za konstrukcijo lastnih krivulj

Najenostavnejši način za konstrukcijo lastne krivulje je seveda, da si nadaljne delitve v tabeli kar izmislimo. Če nam je krivulja potem všeč, jo lahko poskušamo še izboljšati. Drugemu načinu bomo rekli metoda iniciatorja in generatorja, pri kateri je iniciator nekakšno seme, iz katerega se razvija krivulja po pravilih, ki jih podaja generator. Po tej metodi je dobljena Kochova snežinka, Peanova krivulja in Sierpinskijeva preproga. Pri Kochovi snežinki je iniciator enakostraničen trikotnik (slika 1a), generator pa Davidova zvezda (slika 1b). Pri Peanovi krivulji je iniciator diagonala kvadrata (slika 4a), generator pa povezane diagonale devetih kvadratov (slika 4b). Pri Sierpinskijevi preprogi je iniciator daljica (slika 7a), generator pa lik na sliki 7b. Enostavno je če vzamemo za iniciator daljico, za generator pa si izmislimo lik. Vsakemu vektorju potem priredimo celico, ki se v naslednjem koraku nadomesti z ustrezno orientiranim likom. Konstrukcija krivulj bo šla seveda tembolj od rok, čim bolj se bomo poglobili v delovanja samega postopka risanja.

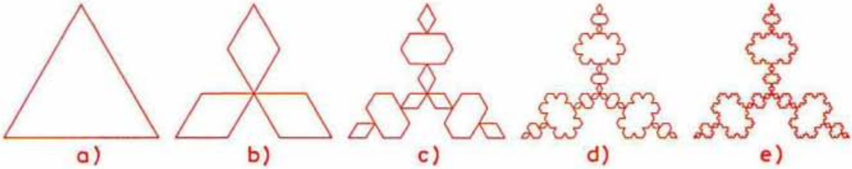
Ideje za razširitev programa

Vsako krivuljo lahko shranimo na disk v obliki datoteke. V datoteko shranimo vse parametre potrebne za risanje krivulje, število smeri, celotno tabelo, rojstno celico, dolžino celice, koordinate začetka risanja krivulje. Tako si prihranimo veliko dela s tipkanjem tabel v program. Ni nujno, da so celice predstavljene z različno usmerjenimi, enako dolgimi daljicami. Predstavitev celic bi lahko bila tudi tridimenzionalna.

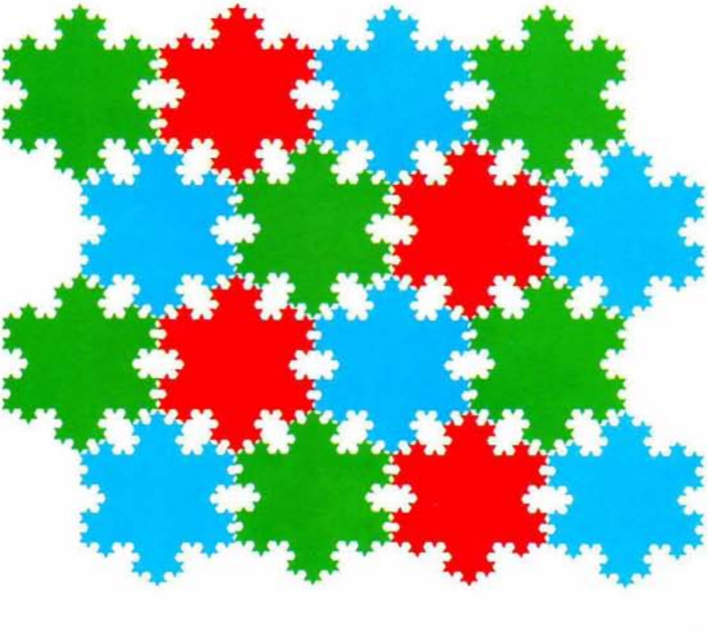
Ciril Pezdir



Slika 1

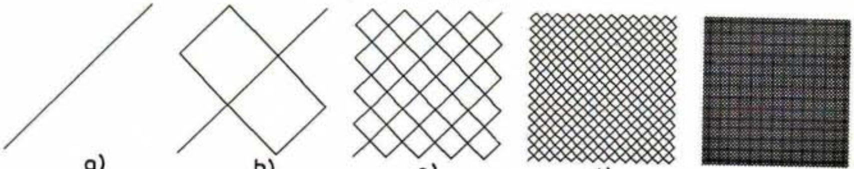


Slika 2



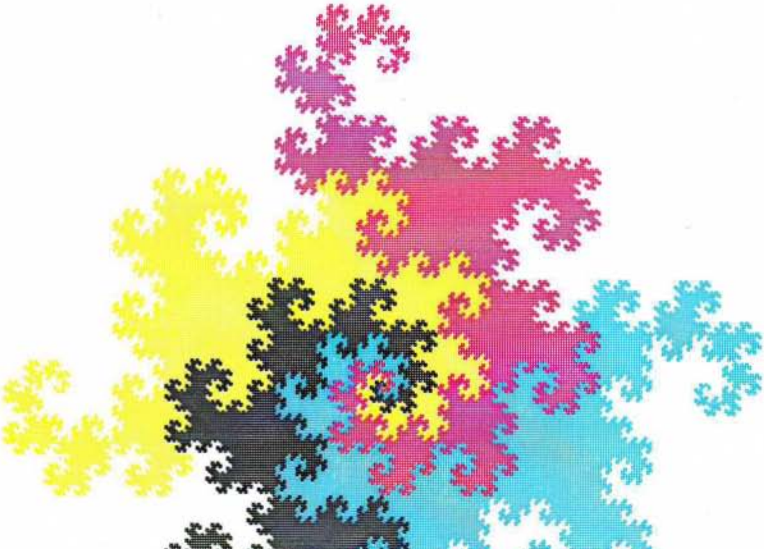
Slika 3

Slika 4 cc)



a) b) c) d) e)

Slika 4



Slika 6

YU ISSN 0351-6652