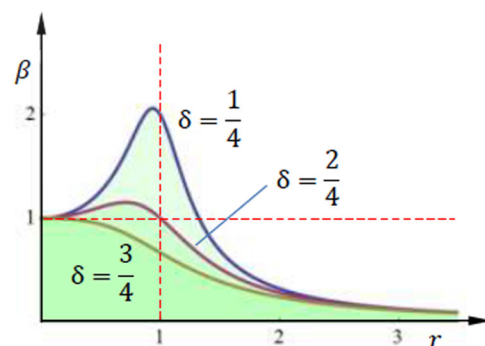
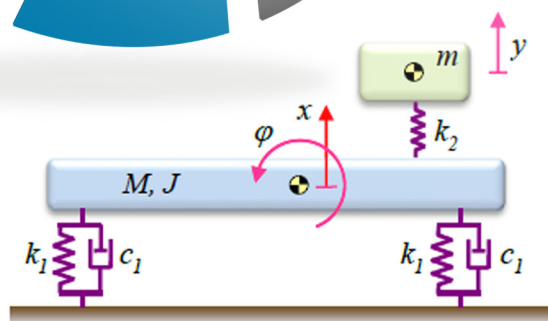




Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Dinamika masnih sistemov

Boštjan Harl Marko Kegl Timi Karner





Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo

Dinamika masnih sistemov

Avtorji

Boštjan Harl

Marko Kegl

Timi Karner

Marec 2024

| | | |
|--|---|---|
| Naslov <i>Title</i> | Dinamika masnih sistemov <i>Dynamics of Mass Systems</i> | |
| Avtor <i>Authors</i> | Boštjan Harl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo) | Marko Kegl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo) |
| | Timi Karner (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo) | |
| Recenzija <i>Review</i> | Nenad Gubelj (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo) | Boštjan Brank (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) |
| Lektoriranje <i>Language editing</i> | Amidas, d. o. o. | |
| Tehnična urednika <i>Technical editors</i> | Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba) | |
| Oblikovanje ovitka <i>Cover designer</i> | Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba) | |
| Grafika na ovitku <i>Cover graphics</i> | System web, avtor: geralt, Pixabay.com, 2024 Harl, Kegl, Karner (avtorji), 2024 | |
| Grafične priloge <i>Graphic material</i> | Viri so lastni, razen če ni navedeno drugače. Harl, Kegl, Karner (avtorji), 2024 | |

Založnik
Published by **Univerza v Mariboru**
Univerzitetna založba
Slomškov trg 15, 2000 Maribor
Slovenija
<https://press.um.si>, zalozba@um.si

Izdajatelj
Issued by **Univerza v Mariboru**
Fakulteta za strojništvo
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor
Slovenija
<https://fs.um.si>, fs@um.si

Izdaja
Edition Prva izdaja

Izdano
Published at Maribor, marec 2024

Vrsta publikacije
Publication type E-knjiga

Dostopno na
Available at <http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/854>

| |
|---|
| CIP - Kataložni zapis o publikaciji Univerzitetna knjižnica Maribor |
| 531.391(0.034.2) |
| HARL, Boštjan Dinamika masnih sistemov [Elektronski vir] / avtorji Boštjan Harl, Marko Kegl, Timi Karner. - 1. izd. - E-publikacija. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2024 |
| Način dostopa (URL): https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/854 ISBN 978-961-286-835-2 (Pdf) doi: 10.18690/um.fs.1.2024 COBISS.SI-ID 188292867 |



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba
/ University of Maribor, University Press

Besedilo / Text © Harl, Kegl, Karner, 2024

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

ISBN 978-961-286-835-2 (pdf)

DOI <https://doi.org/10.18690/um.fs.1.2024>

Cena
Price Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika
For publisher prof. dr. Zdravko Kacič,
rektor Univerze v Mariboru

Citiranje
Attribution Harl, B., Kegl, M., Karner, T. (2024). *Dinamika masnih sistemov*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba.
doi: 10.18690/um.fs.1.2024

Vsebina

| | |
|---|-----------|
| Vsebina | I |
| Predgovor | 1 |
| 1 MATEMATIČNE IN MEHANSKE OSNOVE | 3 |
| 1.1 Osnovne predpostavke in dogovori | 3 |
| 1.2 Matematične osnove | 4 |
| 1.3 Kinematične osnove | 6 |
| 1.3.1 Opis gibanja točke na osnovi gibljive baze | 7 |
| 1.3.2 Opis gibanja telesa | 9 |
| 1.3.3 Rotacijska matrika in preslikave komponent | 10 |
| 2 DINAMIKA TOGEGA TELESA | 11 |
| 2.1 Masni delec in telo | 11 |
| 2.2 Osnovni zakoni dinamike | 16 |
| 2.2.1 Newtonovi zakoni za masni delec | 16 |
| 2.2.2 Uporaba Newtonovih zakonov na sistemu delcev in na zveznem telesu končnih dimenzij | 16 |
| 2.3 Splošni zakoni dinamike in njihova uporaba | 18 |
| 2.3.1 Zakoni o gibalni količini | 18 |
| 2.3.2 Zakoni o vrtilni količini | 22 |
| 2.3.3 Zakoni o mehanski energiji | 26 |
| 2.3.3.1 Delo in moč | 26 |
| 2.3.3.2 Kinetična energija | 27 |
| 2.3.3.3 Potencialne energije | 29 |
| 3 MEHANSKA NIHANJA | 31 |
| 3.1 Uvod in definicije | 31 |
| 3.1.1 Telo | 32 |
| 3.1.2 Vzmet | 33 |
| 3.1.2.1 Togosti konstrukcijskih elementov | 33 |
| 3.1.2.2 Nadomestna togost skupine vzmeti | 35 |
| 3.1.3 Dušilka | 37 |
| 3.2 Lastna nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo | 38 |
| 3.2.1 Nedušeno lastno nihanje | 38 |
| 3.2.1.1 Eliminacija statične obremenitve | 40 |
| 3.2.1.2 Rotacija okrog fiksne osi | 40 |
| 3.2.2 Dušeno lastno nihanje | 41 |
| 3.3 Lastna nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami | 44 |
| 3.4 Vsiljena nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo | 46 |
| 3.4.1 Nedušeno vsiljeno nihanje | 47 |
| 3.4.2 Dušeno vsiljeno nihanje | 48 |
| 3.4.2.1 Primer vsiljenega nihanja z inercialnim vzbujanjem | 50 |
| 3.4.2.2 Primer vsiljenega nihanja z vzbujanjem podlage | 51 |
| 4 ANALITIČNA DINAMIKA | 53 |
| 4.1 Uvod | 53 |
| 4.2 Prostostne stopnje dinamičnih sistemov | 54 |
| 4.3 Pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa in D'Alambertovega | 54 |

| | |
|--|-----------|
| principa | 54 |
| 4.3.1 Newton-Eulerjev pristop | 54 |
| 4.3.2 D'Alembertov princip | 55 |
| 4.3.3 Newton-Eulerjev pristop in diagram prostih teles | 56 |
| 4.3.4 D'Alembertov princip in uporaba metode prerezov | 59 |
| 4.4 Posplošene oz. generalizirane koordinate | 62 |
| 4.5 Holonomni sistemi in holonomne vezi | 64 |
| 4.6 Neholonomni sistemi in neholonomne vezi | 65 |
| 4.7 Virtualno delo | 66 |
| 4.7.1 Virtualni pomik | 66 |
| 4.7.2 Odvisne in neodvisne koordinate | 67 |
| 4.8 Virtualno delo in posplošene sile | 69 |
| 4.8.1 Posplošene sile | 69 |
| 4.8.2 Virtualno delo konservativnih in nekonservativnih sil | 72 |
| 4.8.3 Virtualno delo reakcijskih sil v podporah | 72 |
| 4.9 Princip uporabe virtualnega dela v statiki oz. statičnem ravnotežju | 73 |
| 4.9.1 Virtualno delo v statiki | 73 |
| 4.9.2 Pridobivanje ravnotežnih enačb | 74 |
| 4.10 Princip uporabe virtualnega dela v dinamiki | 78 |
| 4.10.1 Virtualno delo v dinamiki | 78 |
| 4.10.2 Pridobivanje gibalnih oz. dinamičnih enačb | 78 |
| 4.11 Izpeljava Lagrangeeve enačbe | 83 |
| 4.11.1 Lagrangeeva enačba | 83 |
| 4.11.2 Upoštevanje sile vzmeti pri Lagrangeevi metodi | 88 |
| LITERATURA | 91 |
| Stvarno kazalo | 93 |

Predgovor

Ta knjiga je nastala kot učni pripomoček k predmetu *Dinamika masnih sistemov*, ki spada v učni program Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, smer Mehatronika, na Univerzi v Mariboru.

Za razumevanje knjige je potrebno relativno skromno predznanje. S področja mehanike je koristno poznavanje osnovnih pojmov iz statike in kinematike. S področja matematike pa je potrebno poznavanje osnov vektorskega in diferencialnega računa.

Zaradi preglednosti in lažjega branja so matematični in drugi objekti pisani z različnimi pisavami. Kolikor se je dalo, so uporabljena naslednja pravila označevanja:

- skalarji: $a, b, c \dots \alpha, \beta, \gamma$
- vektorji in matrike (tenzorji): $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B} \dots \mathbf{z}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \dots$
- točke: $A, B, C \dots Z$

1 MATEMATIČNE IN MEHANSKE OSNOVE

Namen:

- Opredeliti osnovne predpostavke in dogovore.
- Osvežiti matematične pojme, ki jih bomo najbolj potrebovali.
- Osvežiti najbolj nujne teme iz področja kinematike.

Cilj:

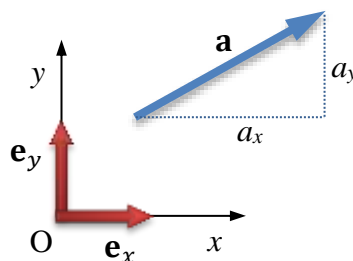
S pridobljenim znanjem bo študent sposoben predelati in razumeti snov naslednjih poglavij.

1.1 Osnovne predpostavke in dogovori

V okviru te knjige bomo privzeli naslednje dogovore in predpostavke:

- Telesa bomo obravnavali kot *homogena*. Največ opravka bomo imeli z *nedeformabilnimi* oziroma *togimi* telesi, razen kadar ko bo posebej poudarjeno, da je obravnavano telo *deformabilno* oziroma (v našem primeru) elastično.
- Vse *mehanske sklope*, kot so na primer ležaji, mehanske vezi in podpore, bomo obravnavali *idealizirano*: ni zračnosti, ni trenja in podobno.
- Za opis gibanja bomo večinoma uporabljali *Kartezijev koordinatni sistem*.

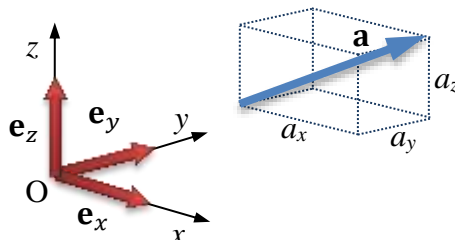
Za opis mehanskega dogajanja v ravnini bomo uvedli *fiksno* ortonormirano vektorsko bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ in koordinatni sistem Oxy , **slika 1.1**.



Slika 1.1: Ortonormiran koordinatni sistem Oxy v opazovani ravnini

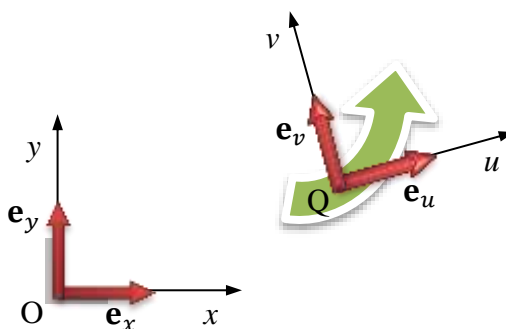
Dogovorimo se še, da bomo bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ in koordinatni sistem Oxy orientirali vedno tako, kot kaže slika. Zaradi tega dogovora bomo risanje koordinatnega sistema pogosto opuščali. Prav tako bomo običajno opuščali risanje vektorske baze.

Za opis gibanja v prostoru vektorsko bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ razširimo z vektorjem $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$, ki določa tretjo os, os z (slika 1.2). Baza $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ je ortonormirana in določa desnosučni koordinatni sistem $Oxyz$, ki ga imenujemo Kartezijev koordinatni sistem.



Slika 1.2: Ortonormiran koordinatni sistem $Oxyz$ v prostoru

Razen fiksnega koordinatnega sistema $Oxyz$ bomo uvedli še *gibljivega* $Quvw$. Vektorsko bazo gibljivega sistema bomo označili z $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$. Ravnski različici fiksnega in gibljivega koordinatnega sistema sta prikazani na **sliki 1.3**.



Slika 1.3: Fiksni koordinatni sistem Oxy in gibljivi koordinatni sistem Quv

Kot se bo izkazalo v nadaljevanju, je uvedba gibljivega koordinatnega sistema koristna zato, ker lahko s tem opis gibanja v mnogih primerih zelo poenostavimo.

1.2 Matematične osnove

Z uporabo fiksnega koordinatnega sistema $Oxyz$ lahko poljuben vektor \mathbf{a} zapišemo kot

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

kjer so $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ bazni vektorji koordinatnega sistema. Ker v tem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

lahko zapis vektorja \mathbf{a} skrajšamo na

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \quad (1.4)$$

Skalarje a_x , a_y in a_z imenujemo *koordinate* vektorja \mathbf{a} .

Pri ravninskih problemih imamo v glavnem opravka z vektorji, za katere velja $a_z = 0$. Zaradi racionalnosti v takih primerih vektor \mathbf{a} pišemo tudi kot

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Pozor: Če tak vektor uporabimo v vektorskem produktu, ga je treba pred tem obvezno razširiti s tretjo koordinato $a_z = 0$.

V izračunih pogosto potrebujemo tudi *normo* ali *dolžino* vektorja \mathbf{a} , ki je skalar in jo izračunamo

$$a = \|\mathbf{a}\| = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.6)$$

Z uvedbo dodatnega gibljivega koordinatnega sistema $Quvw$ lahko poljubni vektor \mathbf{a} zapišemo na dva načina, in sicer kot

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (1.7)$$

ter kot

$$\mathbf{a} = a_u \mathbf{e}_u + a_v \mathbf{e}_v + a_w \mathbf{e}_w \quad (1.8)$$

kjer so $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ bazni vektorji gibljivega koordinatnega sistema, ki so spremenljivi in odvisni od časa. Opozorimo na dejstvo, da so koordinate a_x , a_y in a_z vektorja \mathbf{a} v fiksnem koordinatnem sistemu v splošnem številčno drugačne od koordinat a_u , a_v in a_w istega vektorja v gibljivem koordinatnem sistemu.

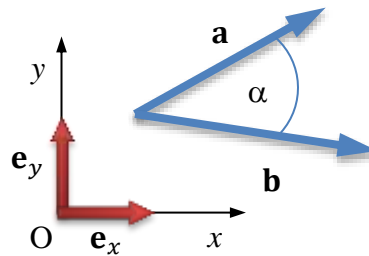
Definirajmo še operacije med vektorji in matrikami. *Skalarni produkt* dveh vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} , **slika 1.4**, je skalar c , ki se izračuna kot produkt dolžin obeh vektorjev in kosinusa vmesnega kota (vmesni kot je kot α , ki ga vektorja oklepata, če izhajata iz skupne začetne točke)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha = c \quad (1.9)$$

Skalarni produkt lahko izračunamo tudi kot vsoto produktov istoležnih komponent obeh vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b}

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = c \quad (1.10)$$

Skalarni produkt vektorja s samim seboj lahko zapišemo kot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$.

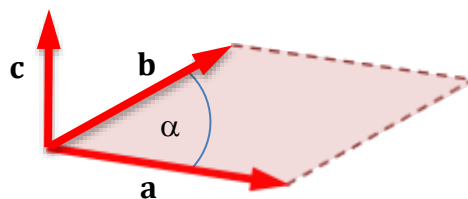


Slika 1.4: Vektorja **a** in **b** v koordinatnem sistemu Oxy

Iz definicije skalarnega produkta je očitno, da je njegova vrednost enaka *nič*, če sta vektorja **a** in **b** med seboj *ortogonalna*.

Vektorski produkt vektorjev **a** in **b** je vektor **c**, **slika 1.5**, ki je pravokoten na ravnino, ki jo tvorita vektorja **a** in **b**. Njegova absolutna vrednost je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja **a** in **b**.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (1.11)$$



Slika 1.5: Vektorski produkt vektorjev **a** in **b**

Absolutna vrednost vektorskega produkta je enaka produktu norm obeh vektorjev in sinusa vmesnega kota, oziroma $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = ab \sin \alpha$. Od tod sledi, da je vektorski produkt enak *vektorju nič*, če sta vektorja **a** in **b** med seboj *paralelna*.

Produkt matrike **A** dimenzije 3×3 in vektorja **b** dimenzije 3 da vektor **c** dimenzije 3, ki ga izračunamo kot

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_x + a_{12}b_y + a_{13}b_z \\ a_{21}b_x + a_{22}b_y + a_{23}b_z \\ a_{31}b_x + a_{32}b_y + a_{33}b_z \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (1.12)$$

1.3 Kinematične osnove

V tem poglavju bomo na kratko predstavili tiste teme iz področja kinematike, ki jih bomo nujno potrebovali pri opisu dinamike togega telesa.

1.3.1 Opis gibanja točke na osnovi gibljive baze

Eden najbolj uporabnih načinov opisa gibanja točke je s pomočjo gibljive baze. Motiv za tak način opisa je v tem, da gibljivo bazo namestimo tako, da kompleksnejše gibanje razstavimo na dve enostavnejši gibanji. To nam mnogokrat precej poenostavi zapis krajevnega vektorja in nato tudi izračun hitrosti in pospeškov točke.

Uvedimo fiksni koordinatni sistem $Oxyz$ z bazo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ in gibljiv koordinatni sistem $Quvw$ z bazo $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$, **slika 1.6**. Lego izhodišča Q gibljive baze podaja krajevni vektor \mathbf{r}_Q , njeno vrtenje v prostoru pa naj podaja vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$.

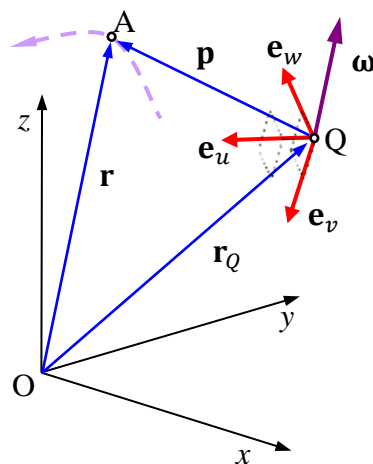
Krajevni vektor točke A lahko zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{p} \quad (1.13)$$

Vektor \mathbf{p} lahko na osnovi gibljive baze izrazimo kot

$$\mathbf{p} = u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w \quad (1.14)$$

pri čemer smo z (u, v, w) označili *lokalne koordinate* točke A – koordinate A glede na gibljivo bazo $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$.



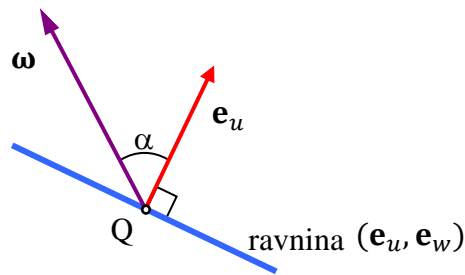
Slika 1.6: Opis gibanja na osnovi gibljive baze

Hitrost točke A dobimo, kot vedno, z odvajanjem krajevnega vektorja po času

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_Q + \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w + u\dot{\mathbf{e}}_u + v\dot{\mathbf{e}}_v + w\dot{\mathbf{e}}_w \quad (1.15)$$

Izpeljava izrazov za odvode baznih vektorjev $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ po času se verjetno najenostavneje naredi na osnovi sklepanja o lastnostih odvoda vektorja po skalarju. Oglejmo si poljubno situacijo, in sicer iz takega zornega kota, da bosta vektorja \mathbf{e}_u in $\boldsymbol{\omega}$ ležala v opazovani ravnini, **slika 1.7**.

Iz teorije vemo, da je odvod vektorja po času enak vektorju, ki kaže v smeri gibanja vrha vektorja, če bi tega risali iz fiksne točke. Ali drugače: $\dot{\mathbf{e}}_u$ kaže v smeri gibanja vrha \mathbf{e}_u , če bi tega risali iz fiksne točke. V narisani situaciji je očitno, da morata biti smer in orientacija $\dot{\mathbf{e}}_u$ *enaka* smeri in orientaciji vektorja $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u$. Glede norme odvoda pa je znano naslednje: norma odvoda vektorja po skalarju (času) je enaka absolutni hitrosti gibanja vrha vektorja \mathbf{e}_u , če bi tega risali iz fiksne točke.



Slika 1.7: Izračun odvoda baznega vektorja \mathbf{e}_u

V narisani situaciji je jasno, da je (pri fiksirani točki Q) absolutna hitrost vrha \mathbf{e}_u enaka $\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{e}_u\| \sin \alpha$. To pa je natanko norma vektorja $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u$. Iz tega torej sledi

$$\dot{\mathbf{e}}_u = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u \quad (1.16)$$

s podobnim sklepanjem pa lahko ugotovimo še

$$\dot{\mathbf{e}}_v = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_v, \dot{\mathbf{e}}_w = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_w \quad (1.17)$$

Z upoštevanjem teh ugotovitev lahko hitrost točke A torej zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w + \boldsymbol{\omega} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) \quad (1.18)$$

oziroma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (1.19)$$

Pri obravnavanem opisu gibanja lahko torej na hitrost točke A gledamo kot na vsoto naslednjih treh komponent

- \mathbf{v}_Q – hitrost izhodišča Q gibljive baze,
- $\mathbf{v}_r = \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w$ – hitrost A napram gibljivi bazi $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ – *relativna hitrost* in
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$ – hitrost A zaradi vrtenja gibljive baze $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$.

Pospešek točke A dobimo, kot običajno, z odvajanjem vektorja hitrosti po času. Sledi

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}_Q + \dot{\mathbf{v}}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (1.20)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w + \dot{u}\dot{\mathbf{e}}_u + \dot{v}\dot{\mathbf{e}}_v + \dot{w}\dot{\mathbf{e}}_w + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (u\dot{\mathbf{e}}_u + v\dot{\mathbf{e}}_v + w\dot{\mathbf{e}}_w) \quad (1.21)$$

Po preureditvi dobimo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + (\ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w)) \quad (1.22)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \quad (1.23)$$

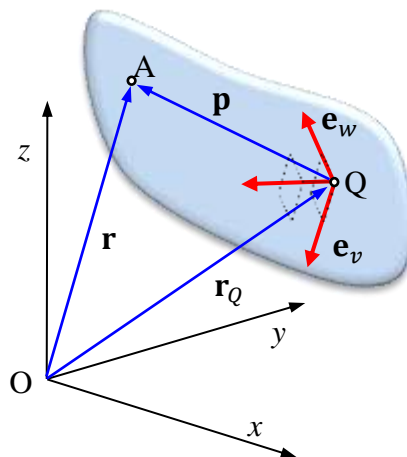
Na pospešek točke A lahko torej pri tem opisu gledamo kot na vsoto naslednjih petih komponent:

- \mathbf{a}_Q – pospešek izhodišča Q gibljive baze,
- $\mathbf{a}_r = \ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w$ – pospešek A napram gibljivi bazi $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ – *relativni pospešek*,
- $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ – pospešek A zaradi spreminjanja njene obodne hitrosti kot posledico spreminjanja krivinskega polmera tira – *Coriolisov pospešek*,
- $\mathbf{a}_t = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}$ – pospešek A zaradi spreminjanja njene obodne hitrosti kot posledico spreminjanja kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ – *tangencialni pospešek* in
- $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})$ – pospešek A zaradi ukrivljenosti tira – *normalni pospešek*.

Na koncu poudarimo, da so zgoraj omenjene komponente (tako pri hitrosti, kot tudi pri pospešku) odvisne od izbire koordinatnega sistema. *Drugačna izbira gibljive baze* da namreč *drugačne vrednosti komponent* hitrosti in pospeška pri *istem gibanju*.

1.3.2 Opis gibanja telesa

Zelo primerno izhodišče za opis gibanja telesa v prostoru predstavlja opis gibanja točke na osnovi gibljive baze. Če namreč gibljivo bazo $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ pritrdimo na opazovano telo, lahko lego, hitrost in pospešek poljubne točke A telesa, **slika 1.8**, izrazimo z enačbami, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju.



Slika 1.8: Opis gibanja telesa v prostoru

V skladu s povedanim lahko torej lego poljubne točke A telesa zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} + (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) \quad (1.24)$$

Pri tem so (u, v, w) lokalne koordinate točke A, ki so odvisne od tega, katero točko telesa opazujemo. Druge količine pa so tiste, ki določajo pozicijo in zasuk telesa v prostoru, in sicer v naslednjem smislu:

- *pozicijo telesa* določa lega točke Q oziroma parametri x_Q, y_Q in z_Q ,
- *zasuk telesa* določa gibljiva baza, oziroma bazni vektorji $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$ in \mathbf{e}_w .

Treba se je spomniti, da ima prosto telo v prostoru 6 prostostnih stopenj: 3 za pozicijo in 3 za zasuk. Trije primerni parametri za določanje pozicije so očitno x_Q , y_Q in z_Q . Pri rotacijah pa se pri izbiri primernih parametrov zaplete. Vektorji \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v in \mathbf{e}_w imajo namreč skupaj 9 komponent, ki jih je očitno treba izraziti samo s 3 parametri. Ta postopek imenujemo *parametrizacija prostorskih rotacij*.

Možnosti, kako parametrizirati rotacije, imamo več. Vsaka od njih ima svoje dobre in slabe lastnosti. Zgolj za ilustracijo omenimo le naslednji dve varianti:

- parametrizacija z uporabo *Eulerjevih kotov* in
- parametrizacija z *rotacijskim psevdovektorjem*.

Če vektorje \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v in \mathbf{e}_w po stolpcih zložimo v matriko, dobimo *rotacijsko matriko*

$$\mathbf{R} = [\mathbf{e}_u : \mathbf{e}_v : \mathbf{e}_w] \quad (1.25)$$

Zaradi tega lahko rečemo, da zasuk telesa v prostoru določa njegova rotacijska matrika \mathbf{R} , parametrizacijo zasukov pa imenujemo tudi *parametrizacija rotacijske matrike*.

1.3.3 Rotacijska matrika in preslikave komponent

Za konec si oglejmo le nekaj najpomembnejših lastnosti rotacijske matrike. Fiksni in gibljivi koordinatni sistem naj imata *isto izhodiščno točko*, eden napram drugemu pa sta lahko *poljubno zavrtena*. \mathbf{r}_{xyz} naj označuje lego neke točke A, izraženo v fiksnem koordinatnem sistemu; \mathbf{r}_{uvw} pa naj označuje lego iste točke A, izraženo v gibljivem koordinatnem sistemu. V takem primeru lahko dokaj enostavno pokažemo, da velja

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{R}\mathbf{r}_{uvw} \quad (1.26)$$

Rotacijska matrika predstavlja torej *preslikavo med koordinatami* iste točke, izraženimi v dveh koordinatnih sistemih, ki sta med seboj poljubno zavrtena. Pokazati je mogoče, da je matrika \mathbf{R} *ortogonalna matrika*. To pomeni, da ima vedno inverzno matriko, in ta je enaka njeni transponiranki. Torej velja $\mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{R}^T$, iz česar sledi, da velja tudi

$$\mathbf{r}_{uvw} = \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{xyz} \quad (1.27)$$

Ni pa rotacijska matrika uporabna le pri preslikavi vektorjev. Z njeno uporabo lahko preslikujemo tudi objekte višjega reda, kot so na primer *tenzorji* (drugega ali višjega reda). Razlaga pomena pojma *tenzor* presega okvir tega učbenika. Za nas naj bo zaenkrat dovolj le to, da lahko *preslikavo (vztrajnostnega) tenzorja* iz enega koordinatnega sistema v drugega naredimo z uporabo rotacijske matrike \mathbf{R} , in sicer kot

$$\mathbf{J}_{xyz} = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\mathbf{R}^T \quad (1.28)$$

kjer je \mathbf{J}_{xyz} vztrajnostni tenzor, izražen v koordinatnem sistemu xyz , \mathbf{J}_{uvw} pa je isti tenzor, izražen v zasukanem koordinatnem sistemu uvw . V obratni smeri je preslikava naslednja

$$\mathbf{J}_{uvw} = \mathbf{R}^T \mathbf{J}_{xyz} \mathbf{R} \quad (1.29)$$

2 DINAMIKA TOGEGA TELESA

Namen:

- Spoznati osnovne zakone dinamike za masni delec.
- Spoznati pojme gibalna in vrtilna količina ter delo, moč in energija.
- Spoznati splošne zakone dinamike za masni delec in telo.

Cilj:

S pridobljenim znanjem bo študent sposoben enostavnejše dinamične probleme iz tehniške prakse pravilno formulirati in rešiti.

Glavne oporne točke:

- Osnovni zakoni dinamike: trije Newtonovi zakoni za masni delec.
- Splošni zakoni se izpeljejo iz osnovnih zakonov dinamike ter se nanašajo na gibalno in vrtilno količino ter delo, moč in energijo.

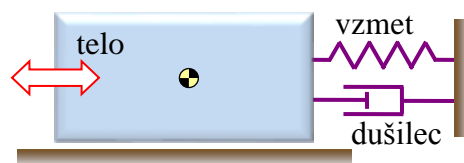
2.1 Masni delec in telo

Osnovni zakoni dinamike so formulirani za *masni delec*, vendar pa lahko iz njih izpeljemo zakone, ki veljajo za *telo*.

Masni delec imenujemo *točkasto telo* s končno *maso* m . Z besedo *točkasto* poudarimo, da so dimenzije telesa tako majhne, da lahko:

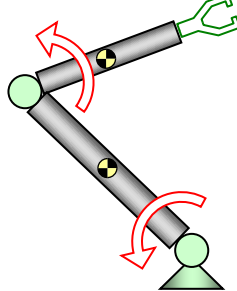
- *zanemarimo* vse *vplive*, ki so *posledica rotacije* telesa, in
- *prijemališča* vseh zunanjih sil *prestavimo v težišče* telesa.

Morda se zdi, da takšen model telesa ni kaj prida uporaben v praksi, vendar pa se izkaže, da temu ni tako. V mnogih praktičnih primerih se zaradi vezi (vodila, podpore ...) telesa lahko gibljejo samo premo, medtem ko je rotacija preprečena. Razen tega lahko pogosto prijemališča zunanjih sil brez škode prestavimo v težišče telesa. V takih primerih lahko opazovano telo upravičeno obravnavamo kot masni delec, **slika 2.1**.



Slika 2.1: Dinamičnih vplivov rotacij tukaj ni – telo lahko obravnavamo kot masni delec

Seveda se pa situacija spremeni, če se opazovano telo lahko vrti in so vplivi zaradi rotacije takšni, da jih ne moremo zanemariti, **slika 2.2**. V takem primeru moramo naš objekt obravnavati kot *telo* s končnimi *dimenzijami* in končno *maso* m .



Slika 2.2: Dinamični vplivi rotacij so tukaj veliki – teles zato ne moremo obravnavati kot masne delce

Za dinamično obravnavo teles potrebujemo nekaj pomožnih količin. Najpomembnejše med njimi so: *prostornina* in *masa* telesa, krajevni vektor *težišča*, *osni vztrajnostni momenti* in *deviacijski vztrajnostni momenti* telesa.

Prostornino in *maso* telesa B računamo z izrazoma

$$\begin{aligned} V &= \int_B dV \\ m &= \int_B \rho dV = \int_B dm \end{aligned} \quad (2.1)$$

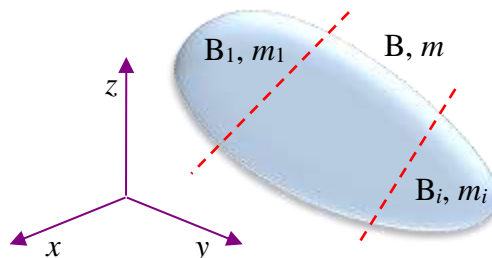
kjer operator \int_B označuje integracijo po celem telesu, dV je diferencial prostornine, ρ pa je gostota snovi telesa. Produkt $dm = \rho dV$ imenujemo diferencial mase telesa.

Težišče telesa je točka, ki ustreza *masnemu središču* telesa, če je gravitacijsko polje konstantno. V tem primeru lahko krajevni vektor težišča izračunamo kot

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{m} \int_B \mathbf{r} dm \quad (2.2)$$

kjer je krajevni vektor poljubne točke telesa označen z \mathbf{r} .

V praksi si lahko računanje težišča pogosto poenostavimo, če upoštevamo lastnost aditivnosti integrala. Poenostavljeno povedano to pomeni, da lahko integracijo po celem telesu nadomestimo z vsoto integracij po njegovih sestavnih delih. V ta namen razdelimo opazovano telo B skupne mase m na n delov $B_1 \dots B_n$ z masami $m_1 \dots m_n$, kjer je $m = \sum_{i=1}^n m_i$, **slika 2.3**.



Slika 2.3: Razcep telesa B na sestavne dele B_i lahko olajša računanje težišča

Zaradi lastnosti aditivnosti integrala lahko zapišemo

$$\int_B \mathbf{r} dm = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} \mathbf{r} dm_i \quad (2.3)$$

Ker pa je

$$\int_{B_i} \mathbf{r} dm_i = m_i \mathbf{r}_{T_i} \quad (2.4)$$

kjer je \mathbf{r}_{T_i} težišče dela B_i , sledi

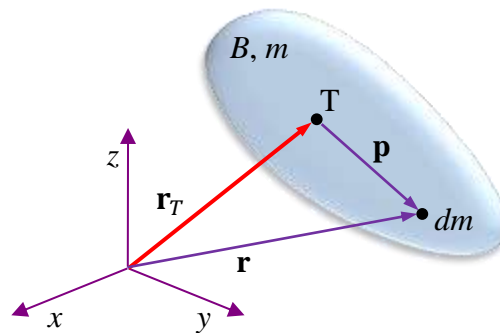
$$\mathbf{r}_T m = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{T_i} m_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{T_i} m_i}{m} \quad (2.5)$$

Ta izraz za računanje težišča telesa B je dokaj koristen, saj je v praksi pogosto lažje izračunljiv kot osnovni izraz z integralom po celem telesu.

V zvezi s težiščem telesa je koristno izpeljati še eno pomembno relacijo, ki se izkaže za zelo koristno pri izpeljavi splošnih zakonov mehanike za telo. V ta namen zapišimo definicijo težišča telesa in jo nekoliko preuredimo, kot sledi, **slika 2.4**.

$$m \mathbf{r}_T = \int_B \mathbf{r} dm = \int_B (\mathbf{r}_T + \mathbf{p}) dm \quad (2.6)$$

kjer je \mathbf{p} vektor, ki kaže od težišča telesa do točke podane z \mathbf{r} .



Slika 2.4: Razcep krajevnega vektorja \mathbf{r} na $(\mathbf{r}_T + \mathbf{p})$

Vektor \mathbf{r}_T je neodvisen od integracije po telesu, iz česar sledi

$$m \mathbf{r}_T = \mathbf{r}_T \int_B dm + \int_B \mathbf{p} dm = m \mathbf{r}_T + \int_B \mathbf{p} dm \quad (2.7)$$

Očitno mora veljati

$$\int_B \mathbf{p} dm = 0 \quad (2.8)$$

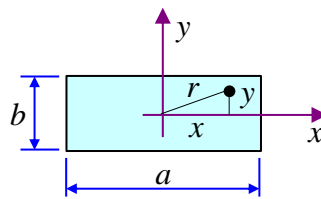
oziroma z besedami: če vektor, odmerjen iz težišča telesa do poljubne točke, integriramo po celotnem telesu, bo rezultat vedno enak nič.

Osni vztrajnostni moment telesa, je definiran kot

$$J_\alpha = \int_B r_\alpha^2 dm \quad (2.9)$$

kjer desni spodnji indeks α označuje os, glede na katero moment računamo, B označuje telo, dm je diferencial mase (masa elementarnega dela) telesa, r_α pa je oddaljenost dm od osi α .

Kot primer si oglejmo izračun osnega vztrajnostnega momenta mase homogene pravokotne prizme za os z, ki gre skozi geometrijsko središče prizme, **slika 2.5**. Dimenzije prizme so $a \times b \times c$, gostota materiala pa je enaka ρ .



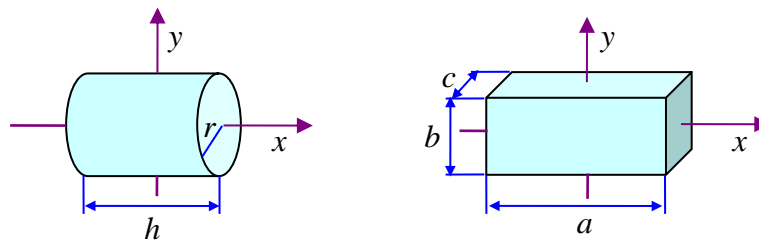
$$J_z = \int_B r^2 dm = \int_B (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

$$J_z = \rho c \left(b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx + a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \right)$$

$$J_z = \rho c \left(\frac{1}{12} a^3 b + \frac{1}{12} b^3 a \right) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

V praksi si pri računanju osnih vztrajnostnim momentov običajno pomagamo z vztrajnostnimi momenti teles pravilnih geometrijskih oblik. Formule za izračun teh vztrajnostnih momentov je zato dobro imeti izpeljane vnaprej. Morda najbolj uporabne od teh formul, kjer m označuje maso telesa, vse osi pa gredo skozi težišče teles, **slika 2.5**, so naslednje:

- za valj polmera r in višine h : $J_x = \frac{1}{2} mr^2$, $J_y = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$
- za kvader dolžine a , višine b in širine c : $J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$, $J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$
- za tanko dolgo palico dolžine l : $J_y = \frac{1}{12} ml^2$ (os y je pravokotna na geometrijsko os in $r \rightarrow 0$)

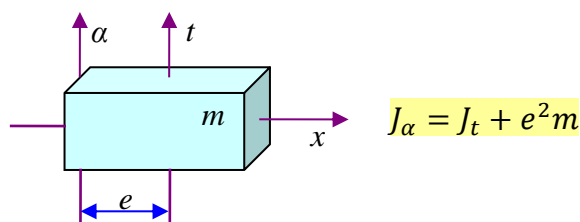


Slika 2.5: Telesa pravilnih geometrijskih oblik

Za izračun vztrajnostnega momenta *okoli osi*, ki *ne gre skozi težišče* telesa, lahko uporabimo *Huygens-Steinerjevo pravilo* (izpeljava ni težka in jo bralec lahko naredi sam), ki ga zapišemo kot

$$J_\alpha = J_t + e^2 m \quad (2.10)$$

Pri tem je J_α vztrajnostni moment glede na (netežiščno) os α , J_t je vztrajnostni moment glede na vzporedno težiščno os t , e je razdalja med osmi, m pa je masa telesa, **slika 2.6**.



Slika 2.6: Uporaba Huygens-Steinerjevega pravila

Deviacijski vztrajnostni moment telesa je definiran kot

$$J_{\alpha\beta} = - \int_B \alpha\beta dm \quad (2.11)$$

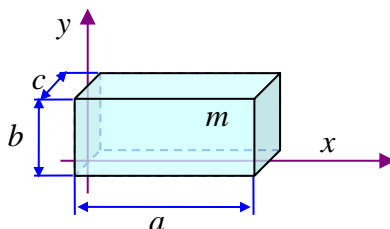
kjer indeksa α in β označujeta izbrani (medsebojno ortogonalni) osi, α in β v integralu pa sta koordinati materialnega delca glede na ti dve izbrani osi. Opozorimo na naslednji dejstvi:

- iz *definicije* očitno *sledi*, da je $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}$,
- če je *vsaj ena* od ravnin $\alpha\gamma$ ali $\beta\gamma$ *simetrijska* ravnina telesa, velja $J_{\alpha\beta} = 0$.

Če osi α , β in γ ortogonalnega koordinatnega sistema izberemo tako, da so vsi deviacijski momenti enaki nič, to je, $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\gamma} = J_{\gamma\alpha} = 0$, potem osi α , β in γ imenujemo *glavne vztrajnostne osi telesa*. V primeru, da gredo *vse* glavne vztrajnostne osi skozi *težišče* telesa, jih imenujemo *centralne glavne vztrajnostne osi* telesa.

Kot primer si oglejmo prizmo mase m v neki izbrani legi, glede na koordinatni sistem xy , **slika 2.7**. Deviacijski vztrajnostni moment mase, glede na osi x in y , se izračuna kot

$$J_{xy} = - \int_B xy dm = -\rho c \int_0^b \int_0^a xy \, dx dy = -\frac{1}{4} mab \quad (2.12)$$



Slika 2.7: Deviacijski vztrajnostni moment telesa

Osi in deviacijski vztrajnostni momenti telesa, zloženi v matriko dimenzij 3×3 , predstavljajo tako imenovani *vztrajnostni tenzor* \mathbf{J} telesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Razlaga pomena pojma *tenzor* presega okvir tega učbenika. Za nas naj bo zaenkrat dovolj le to, da lahko preslikavo (vztrajnostnega) tenzorja iz enega koordinatnega sistema v drugega naredimo z uporabo rotacijske matrike \mathbf{R} , kot je to opisano v prvem poglavju.

2.2 Osnovni zakoni dinamike

Osnovni zakoni dinamike so trije Newtonovi zakoni, ki veljajo za *masni delec*. Na osnovi teh treh zakonov lahko namreč izpeljemo vse druge zakone (zakon o ohranitvi gibalne količine ...), ki jih imenujemo *splošni zakoni* dinamike.

2.2.1 Newtonovi zakoni za masni delec

Prvi Newtonov zakon

Prvi Newtonov zakon, ki ga imenujemo tudi *zakon vztrajnosti* (ali *inercije*), lahko zapišemo tako:

❖ *Masni delec, na katerega ne delujejo nobene zunanje sile, ohranja svoje stanje mirovanja ali translatorsnega enakomernega gibanja.*

Lastnost masnega delca, da ohranja svoje stanje, če nanj ne delujejo zunanje sile, imenujemo *vztrajnost* ali *inercija* delca.

Drugi Newtonov zakon

Drugi Newtonov zakon, ki mu rečemo kar *osnovni zakon dinamike*, je Newton formuliral na osnovi gibalne količine, Euler pa ga je kasneje zapisal v bolj znani obliki, in sicer:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.14)$$

Z besedami bi ga lahko opisali tako:

❖ *Masni delec mase m , na katerega delujejo zunanje sile z rezultanto \mathbf{F} , se giblje s takim pospeškom \mathbf{a} , da je produkt $m\mathbf{a}$ enak \mathbf{F} .*

Pospešek delca in sila, ki nanj deluje, sta torej sorazmerna vektorja; njuna smer in orientacija sta vedno enaki. Sorazmernostni faktor predstavlja maso delca.

Tretji Newtonov zakon

Tretji Newtonov zakon, ki ga imenujemo tudi *zakon akcije in reakcije*, lahko zapišemo tako:

❖ *Dva masna delca delujeta drug na drugega s silo enake intenzitete in smeri, vendar nasprotno orientacije.*

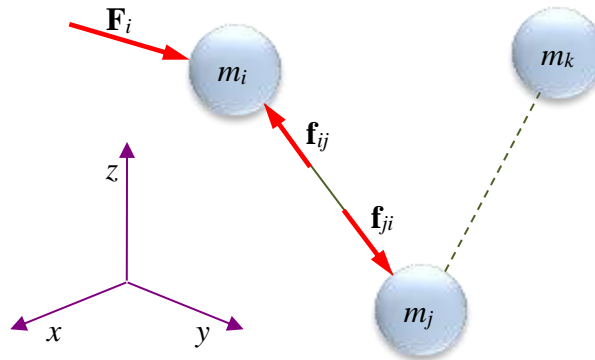
To velja ne glede na gibalno stanje obeh delcev, torej tako pri pospeševanju kot tudi v stanju mirovanja.

2.2.2 Uporaba Newtonovih zakonov na sistemu delcev in na zveznem telesu končnih dimenzij

Newton je svoje zakone zapisal za masni delec. Da lahko te zakone prevedemo tudi v obliko, ki velja za telesa končnih dimenzij, je zelo koristno uvesti *sistem masnih delcev*, **slika 2.8**. Ta

je sestavljen iz N masnih delcev z masami m_i , $i = 1 \dots N$. Posamezni delci so med seboj *lahko povezani* z vezmi ali pa tudi ne. Vsak delec m_i je lahko obremenjen z zunanjo silo \mathbf{F}_i in s silami \mathbf{f}_{ij} v vezeh, ki vežejo delce. Za sile v vezeh iz tretjega Newtonovega zakona sledi:

❖ Če na delec m_i deluje vezna sila \mathbf{f}_{ij} , potem na delec m_j deluje nasprotno enaka vezna sila $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$.



Slika 2.8: Sistem masnih delcev

Težišče sistema masnih delcev je podano z enačbo:

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i m_i \quad (2.15)$$

kjer je $m = \sum_{i=1}^N m_i$ skupna masa sistema, \mathbf{r}_i pa je krajevni vektor oziroma lega masnega delca m_i . Če to enačbo množimo z m in dvakrat odvajamo po času, dobimo

$$m \mathbf{a}_T = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \quad (2.16)$$

kjer je \mathbf{a}_T *pospešek težišča* sistema.

Uporabimo zdaj drugi Newtonov zakon za masni delec m_i . Ta se glasi: $\mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i$. Pri tem $\sum \mathbf{f}_{ij}$ označuje vsoto vseh veznih sil, s katerimi drugi delci delujejo na delec m_i . Če to enačbo vstavimo v prejšnjo, dobimo:

$$m \mathbf{a}_T = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij}) \quad (2.17)$$

Za konec se moramo samo še spomniti, da vezne sile \mathbf{f}_{ij} nastopajo paroma in da je vsota vseh teh sil v sistemu enaka nič. Ker je torej $\sum_{i=1}^N \sum \mathbf{f}_{ij} = 0$, sledi

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_T \quad (2.18)$$

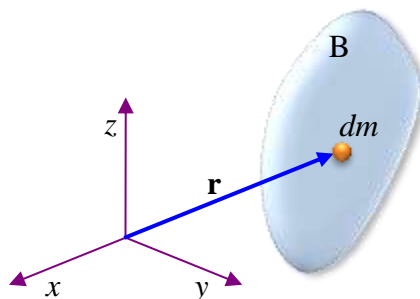
kjer $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$ označuje rezultanto vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem. Za sistem delcev torej velja, da je *vsota vseh zunanjih sil* enaka produktu *skupne mase* in *pospeška težišča* sistema. To enačbo lahko interpretiramo kot *drugi Newtonov zakon* za *sistem masnih delcev*.

Kadar na sistem delcev ne delujejo zunanje sile, je torej pospešek težišča enak nič. Iz tega sledi, da mora biti v odsotnosti zunanjih sil hitrost težišča sistema konstantna. Ali drugače, če je $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0$, sledi:

$$\mathbf{v}_T = \text{konst.} \quad (2.19)$$

To pomeni, da *brez vpliva* zunanjih sil *težišče* sistema delcev *ohranja konstantno hitrost*, ki je lahko seveda tudi enaka nič. Torej tak sistem lahko, na primer, *miruje*, se *giblje enakomerno premo*, *enakomerno rotira okrog ene od glavnih težiščnih osi* ali pa opravlja še kakšno drugačno gibanje. V vsakem primeru je vektor hitrosti težišča zagotovo konstanten, če nimamo vpliva zunanjih sil.

Sistem masnih delcev lahko *prevedemo* na *zvezno telo končnih dimenzij*, če privzamemo $N \rightarrow \infty$ in $m_i \rightarrow dm$, kjer dm označuje diferencial mase telesa, **slika 2.9**.



Slika 2.9: Zvezno telo B končnih dimenzij in njegov diferencial mase dm

Zamenjava $m_i \rightarrow dm$ formalno pomeni, da je treba vsak operator za seštevanje po N delcih sistema zamenjati z integralom po celotnem telesu B oziroma

$$\sum_{i=1}^N \rightarrow \int_B \quad (2.20)$$

V splošnem lahko ugotovimo, da po opravljenih zamenjavah vse enačbe, ki smo jih izpeljali za sistem delcev, smiselno veljajo tudi za telo končnih dimenzij. *Drugi Newtonov zakon* se torej za *telo končnih dimenzij* lahko zapiše kot

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T \quad (2.21)$$

Ali z besedami: *vsota vseh zunanjih sil*, ki delujejo na telo, je enaka produktu *mase telesa* in *pospeška* njegovega *težišča*.

2.3 Splošni zakoni dinamike in njihova uporaba

Z uporabo Newtonovih zakonov lahko načelno rešimo vse probleme klasične dinamike. Vendar pa se v praksi izkaže, da je reševanje mnogih problemov precej enostavnejše, če namesto osnovnih zakonov uporabimo njihove *izpeljanke* – torej zakonitosti, ki jih izpeljemo iz Newtonovih zakonov in jih imenujemo *splošni zakoni* dinamike. V tej knjigi bomo obravnavali le nekaj najpomembnejših.

2.3.1 Zakoni o gibalni količini

Masni delec

Za *masni delec* z maso m , ki se giblje s hitrostjo \mathbf{v} , **slika 2.10**, definiramo *gibalno količino* \mathbf{K} kot

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v} \quad (2.22)$$

Če levo in desno stran gornje enačbe odvajamo po času (in upoštevamo, da je masa konstantna), dobimo

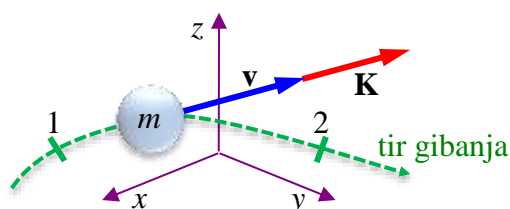
$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2.23)$$

Če upoštevamo, da je produkt $m\mathbf{a}$ enak rezultanti \mathbf{F} vseh zunanjih sil (drugi Newtonov zakon), pa sledi

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.24)$$

Gornja enačba nam pove, da je hitrost spreminjanja gibalne količine enaka rezultanti zunanjih sil. To enačbo imenujemo tudi *zakon o spremembi gibalne količine* (v diferencialni obliki). Z besedami ga lahko opišemo tako:

❖ Časovni odvod gibalne količine masnega delca je enak vsoti vseh zunanjih sil, ki delujejo na masni delec.



Slika 2.10: Gibalna količina masnega delca

Pomnožimo zdaj gornjo enačbo z diferencialom časa dt ter levo in desno stran integrirajmo od stanja 1 (v času t_1) do stanja 2 (v času t_2). Dobimo

$$\int_{\mathbf{K}_1}^{\mathbf{K}_2} d\mathbf{K} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.25)$$

Iz tega očitno sledi

$$\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.26)$$

kjer sta \mathbf{K}_1 in \mathbf{K}_2 gibalni količini masnega delca v trenutku t_1 oziroma t_2 , integral na desni strani gornje enačbe pa imenujemo *impulz* ali *sunek sile*. Gornjo enačbo, ki jo imenujemo tudi *zakon o spremembi gibalne količine* (v integralski obliki), lahko torej z besedami opišemo tako:

❖ Sprememba gibalne količine masnega delca v časovnem intervalu od t_1 do t_2 je enaka impulzu sile v tem istem časovnem intervalu.

Iz gornje razlage je očitno, da se bo gibalna količina masnega delca ohranjala, kadar bo $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. V takem primeru je namreč tudi impulz sile enak nič in torej velja

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \quad (2.27)$$

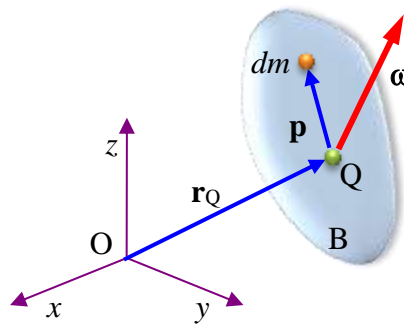
kar imenujemo *zakon o ohranitvi gibalne količine*.

Telo

Gornje enačbe, ki smo jih izpeljali za masni delec, lahko v nekem smislu posplošimo tudi na *telo končnih dimenzij*. Gibalna količina telesa B je enaka vsoti gibalnih količin vseh njegovih delcev. Torej lahko zapišemo

$$\mathbf{K} = \int_B \mathbf{v} dm \quad (2.28)$$

kjer je \mathbf{v} hitrost diferenciala mase dm .



Slika 2.11: Na telesu B izberemo točko Q

Izberimo na telesu B poljubno točko Q, **slika 2.11**. Iz poglavij o kinematiki vemo, da lahko hitrost \mathbf{v} poljubne točke telesa vedno zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (2.29)$$

kjer je \mathbf{v}_Q hitrost točke Q (translacija telesa), $\boldsymbol{\omega}$ je kotna hitrost vrtenja telesa (rotacija telesa) okrog osi, ki gre skozi Q, \mathbf{p} pa je vektor od točke Q do diferenciala dm , **slika 2.11**. Po vstavljanju te relacije v izraz za gibalno količino dobimo

$$\mathbf{K} = \int_B (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \mathbf{v}_Q \int_B dm + \boldsymbol{\omega} \times \int_B \mathbf{p} dm \quad (2.30)$$

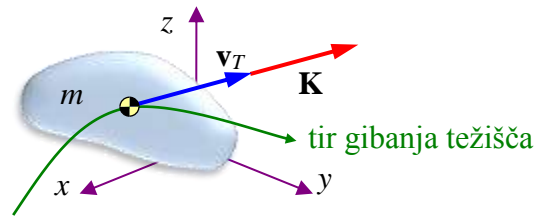
Drugi člen na desni strani enačbe vsebuje integral $\int_B \mathbf{p} dm$. Če točko Q izberemo v *težišču telesa*, se pravi, $Q \equiv T$, dobimo $\int_B \mathbf{p} dm = 0$. Razen tega vemo, da je $\int_B dm = m$, iz česar sledi

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_T \quad (2.31)$$

Gibalna količina telesa je torej enaka produktu *mase telesa* in *hitrosti njegovega težišča* in je torej *neodvisna* od *rotacije* telesa okrog njegove težiščne osi, **slika 2.12**. Če dobljeno relacijo odvajamo po času, dobimo zakon o spremembi gibalne količine telesa (v diferencialni obliki)

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\mathbf{a}_T = \mathbf{F} \quad (2.32)$$

kjer je \mathbf{F} rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, \mathbf{a}_T pa je pospešek težišča telesa.



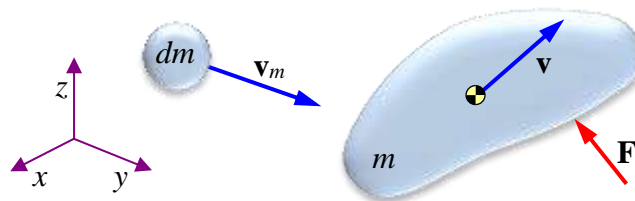
Slika 2.12: Gibalna količina telesa

Smiselno lahko seveda zapišemo tudi zakon o spremembi gibalne količine telesa v integralski obliki

$$\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.33)$$

Telo spremenljive mase

V tehniški praksi ni malo situacij, kjer je potrebno analizirati gibanje telesa, čigar masa se med gibanjem zvezno in bistveno spreminja. Primer takšne situacije je gibanje rakete z motorjem na tekoče gorivo. V takšnih primerih je potrebno gibalne enačbe zapisati z ustreznim upoštevanjem vpliva masnega toka, zaradi katerega se masa telesa spreminja (narašča ali upada).



Slika 2.13: Gibanje telesa s spremenljivo maso

Oglejmo si situacijo na **sliki 2.13**. Težišče telesa mase m se giblje s hitrostjo \mathbf{v} . Znotraj časovnega intervala dt na telo deluje zunanja sila \mathbf{F} , v telo pa trči tudi masni delec mase dm , ki se giblje s hitrostjo \mathbf{v}_m . Masni delec se pri trku spoji s telesom, katerega masa je po trku torej enaka vsoti $m + dm$. Zaradi delovanja zunanje sile in trka se spremeni tudi hitrost telesa; njegovo težišče se po trku giblje s hitrostjo $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

Za opisano situacijo lahko zapišemo zakon o spremembi gibalne količine sistema (telo + delec) znotraj časovnega intervala dt . Ta se glasi

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm\mathbf{v}_m) = \mathbf{F} dt \quad (2.34)$$

V tej enačbi se med seboj izničita dva produkta $m d\mathbf{v}$, razen tega pa lahko zanemarimo tudi diferencialno količino višjega reda $dmd\mathbf{v} \approx 0$. Z upoštevanjem slednjega lahko zakon preoblikujemo v

$$m d\mathbf{v} + dm\mathbf{v} = dm\mathbf{v}_m + \mathbf{F} dt \quad (2.35)$$

Če dobljeno enačbo delimo z dt , dobimo na levi strani časovni odvod gibalne količine telesa spremenljive mase. Zakon o spremembi gibalne količine telesa spremenljive mase se torej v diferencialni obliki lahko zapiše kot

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \dot{m}\mathbf{v}_m + \mathbf{F} \quad (2.36)$$

kjer $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ predstavlja masni tok zaradi katerega se spreminja masa opazovanega telesa. V tej enačbi na desni strani nastopa vektor \mathbf{v}_m , ki predstavlja hitrost delcev masnega toka. V tehniški praksi ta hitrost običajno ni znana, dokler ne poznamo hitrosti gibanja telesa. To je dokaj neugodna situacija, ki se ji lahko izognemo, če to enačbo predelamo v nekoliko drugačno obliko.

Za predelavo gornje enačbe najprej upoštevamo, da lahko časovni odvod gibalne količine zapišemo kot $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\mathbf{a} + \dot{m}\mathbf{v}$. Z upoštevanje te relacije lahko po preureditvi dobimo

$$m\mathbf{a} = \dot{m}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) + \mathbf{F} \quad (2.37)$$

kjer izraz v oklepaju $(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) = \mathbf{v}_r$ predstavlja relativno hitrost delcev masnega toka, merjeno napram telesu. Slednjo enačbo lahko torej zapišemo tudi kot

$$m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{v}_r + \mathbf{F} \quad (2.38)$$

To je zelo uporabna enačba za izračun gibanja rakete. Na desni strani nastopata namreč razen zunanje sile \mathbf{F} še masni tok \dot{m} in relativna hitrost \mathbf{v}_r izpušnih plinov raketnega motorja. Obe slednji količini sta torej parametra raketnega motorja in predstavljata znana podatka. Če lahko rezultanto \mathbf{F} zunanjih sil (gravitacija, zračni upor ...) dovolj dobro ovrednotimo, izračun trenutnega pospeška rakete torej ni več problematičen. Produkt $\dot{m}\mathbf{v}_r$ ima enoto sile in ga imenujemo tudi *potisk motorja*.

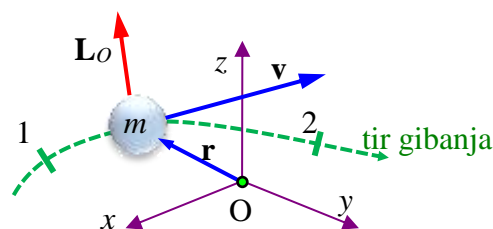
2.3.2 Zakoni o vrtilni količini

Masni delec

Opazujemo *masni delec* z maso m , ki se giblje s hitrostjo \mathbf{v} , **slika 2.14**. *Vrtilno količino* masnega delca, izračunano glede na fiksno točko O , definiramo kot

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.39)$$

kjer je \mathbf{r} krajevni vektor masnega delca.



Slika 2.14: Vrtilna količina masnega delca

Kar takoj opozorimo na dejstvo, da je vrtilna količina delca odvisna od izbire točke O (oziroma izhodišča koordinatnega sistema). Če koordinatni sistem premaknemo, se torej spremeni tudi vrednost vrtilne količine delca.

Odvajajmo vrtilno količino po času. Dobimo

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} \quad (2.40)$$

Ker je prvi vektorski produkt na desni strani enak nič in če upoštevamo drugi Newtonov zakon, sledi

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.41)$$

oziroma

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O \quad (2.42)$$

kjer smo z \mathbf{M}_O označili rezultanto momenta vseh zunanjih sil na delec. Pri tem mora biti moment zunanjih sil izračunan glede na točko O. To enačbo imenujemo *zakon o spremembi vrtilne količine* (v diferencialni obliki). Z besedami jo lahko opišemo tako:

❖ Časovni odvod vrtilne količine (izračunane glede na točko O) masnega delca je enak momentu vseh zunanjih sil (izračunanemu glede na točko O), ki delujejo na masni delec.

Pomnožimo gornjo enačbo z diferencialom časa dt ter levo in desno stran integrirajmo od stanja 1 (v času t_1) do stanja 2 (v času t_2). Dobimo

$$\int_{\mathbf{L}_{O1}}^{\mathbf{L}_{O2}} d\mathbf{L}_O = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt \quad (2.43)$$

Iz tega očitno sledi

$$\mathbf{L}_{O2} - \mathbf{L}_{O1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt \quad (2.44)$$

kjer sta \mathbf{L}_{O1} in \mathbf{L}_{O2} vrtilni količini masnega delca v trenutku t_1 oziroma t_2 , integral na desni strani gornje enačbe pa imenujemo *impulz* ali *sunek momenta sile*. Gornjo enačbo, ki jo imenujemo tudi *zakon o spremembi vrtilne količine* (v integralni obliki), lahko torej z besedami opišemo tako:

❖ Sprememba vrtilne količine masnega delca v časovnem intervalu od t_1 do t_2 je enaka impulzu momenta v tem istem časovnem intervalu.

Iz gornje razlage je očitno, da se bo vrtilna količina masnega delca ohranjala v vsakem časovnem intervalu, v katerem bo $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. V takem primeru torej velja

$$\mathbf{L}_{O2} = \mathbf{L}_{O1} \quad (2.45)$$

kar imenujemo *zakon o ohranitvi vrtilne količine*.

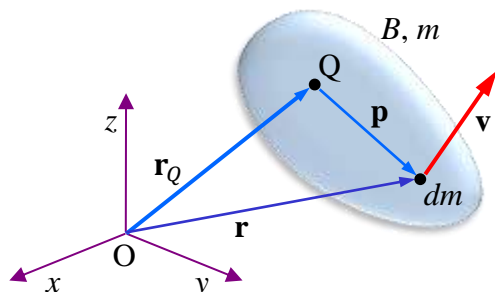
Telo

Enačbe, ki smo jih izpeljali za masni delec, lahko smiselno posplošimo tudi na *telo končnih dimenzij*. Kar takoj povejmo, da je izpeljava zakonitosti, ki so vezane na vrtilno količino telesa, precej zahtevna. Na srečo se stvari nekoliko poenostavijo, če se dogovorimo, da bomo vrtilno količino telesa računali le glede na *posebej izbrane točke telesa*.

Začnimo s splošno definicijo. Vrtlina količina telesa B, izračunana glede na izhodišče O koordinatnega sistema, **slika 2.15**, je podana z izrazom

$$\mathbf{L}_O = \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \quad (2.46)$$

kjer je \mathbf{r} krajevni vektor diferenciala mase dm , \mathbf{v} pa je njegova hitrost.



Slika 2.15: Razcep krajevnega vektorja \mathbf{r} na $(\mathbf{r}_Q + \mathbf{p})$

Splošen izraz za vrtlino količino je običajno razmeroma težko izračunljiv. Tukaj si pomagamo tako, da na telesu B izberemo točko Q, **slika 2.11**. Vrtlina količina telesa B, izračunana glede na Q, se lahko zapiše kot

$$\mathbf{L}_Q = \int_B \mathbf{p} \times \mathbf{v} dm = \int_B \mathbf{p} \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm \quad (2.47)$$

kjer je \mathbf{v}_Q hitrost točke Q telesa, $\boldsymbol{\omega}$ je kotna hitrost rotacije telesa okrog osi, ki gre skozi točko Q, \mathbf{p} pa je vektor od točke Q telesa do diferenciala dm . Dobimo

$$\mathbf{L}_Q = \int_B \mathbf{p} dm \times \mathbf{v}_Q + \int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm \quad (2.48)$$

kjer smo privzeli, da je $\int_B \mathbf{p} dm \times \mathbf{v}_Q = 0$. Ta relacija je *izpolnjena* takrat, kadar je točka Q izbrana tako, da velja *vsaj eden* od naslednjih *pogojev*:

- Točka Q je *fiksna točka*. V tem primeru namreč v vsakem trenutku velja $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ in gornja relacija je očitno izpolnjena. Kot primer take točke lahko navedemo točko na fiksni osi rotirajočega telesa.
- Točka Q je *težišče telesa*. V tem primeru je namreč $\int_B \mathbf{p} dm = \mathbf{0}$ in gornja relacija je očitno spet izpolnjena. Pri tem ni pomembno, ali se težišče telesa giblje ali ne.

Od zdaj naprej bomo predpostavljali, da točka Q *izpolnjuje vsaj enega* od navedenih pogojev.

Krajši račun nam pokaže, da lahko integral $\int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm$ zapišemo kot

$$\int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (2.49)$$

kjer je \mathbf{J} *vztrajnostni tenzor* telesa, izračunan glede na osi, ki gredo skozi točko Q telesa. Torej velja

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (2.50)$$

Vrtlina količina telesa, izračunana glede na njegovo točko Q, je torej enaka produktu *vztrajnostnega tenzorja* telesa in vektorja njegove *kotne hitrosti* in je torej *neodvisna* od *translacije* telesa. Z odvajanjem te enačbe po času in izpeljavo, ki presega okvir te knjige, lahko

dobimo

$$\frac{dL_Q}{dt} = \dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_Q \quad (2.51)$$

kjer \mathbf{M}_Q označuje moment vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, izračunan glede na točko Q. **Pozor:** Ta enačba velja le, če točka Q izpolnjuje vsaj eno od predhodno navedenih zahtev.

Uporaba te enačbe pri poljubnem gibanju telesa ni ravno enostavna. Težaven je predvsem časovni odvod $\dot{\mathbf{J}}$ vztrajnostnega tenzorja. Tukaj si pogosto pomagamo tako, da izračunamo vztrajnostni tenzor \mathbf{J}_{uvw} glede na gibljivo bazo, ki jo prednostno izberemo tako, da njene osi predstavljajo *centralne glavne vztrajnostne osi* telesa. Če v isti gibljivi bazi izrazimo še vektor kotne hitrosti telesa $\boldsymbol{\omega}_{uvw}$, lahko z uporabo rotacijske matrike \mathbf{R} vrtilno količino telesa glede na fiksne osi izrazimo kot

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{uvw} = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\boldsymbol{\omega}_{uvw} \quad (2.52)$$

kjer smo upoštevali, da je $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$. V mnogih inženirskih situacijah sta količini \mathbf{J}_{uvw} in $\boldsymbol{\omega}_{uvw}$ *glede na čas konstantni*, kar pomeni, da sta njuna časovna odvoda enaka nič. V takem primeru se odvod vrtilne količine lahko izračuna relativno enostavno, in sicer kot

$$\frac{dL_Q}{dt} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{J}_{uvw}\boldsymbol{\omega}_{uvw} = \mathbf{M}_Q \quad (2.53)$$

kjer $\dot{\mathbf{R}}$ označuje časovni odvod rotacijske matrike.

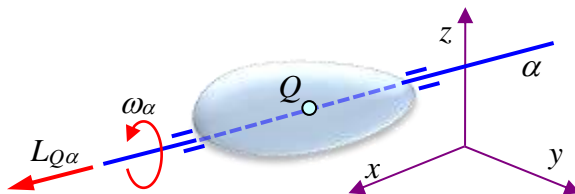
V tehniški praksi imamo na srečo pogosto opravka z razmeroma enostavnimi situacijami. Dve taki pogosti situaciji sta:

- Telo rotira okrog osi α , ki gre skozi *težišče* telesa in ima *fiksno smer*. Pri tem je rotacijska os (in torej tudi težišče telesa) lahko tudi *pospešena*. Primer takšne situacije bi lahko bilo kotaljenje valja po strmini.
- Telo rotira okrog osi α , ki gre skozi *fiksno* točko telesa in ima *fiksno smer*. Primera takšne situacije bi bila rotacija vztrajnika na gredi in nihanje telesa v ravnini okrog fiksne točke.

V obeh navedenih situacijah lahko za vrtilno količino ugotovimo, da se njena komponenta $L_{Q\alpha}$ v smeri osi α zapiše kot

$$L_{Q\alpha} = J_\alpha\omega_\alpha \quad (2.54)$$

kjer J_α označuje osni vztrajnostni moment mase telesa glede na os α , ω_α pa je kotna hitrost vrtenja telesa okrog α , **slika 2.16**.



Slika 2.16: Vrtilna količina pri rotaciji telesa okrog osi fiksne smeri

V danih razmerah je J_α konstanten in je torej njegov časovni odvod enak nič. Razen tega pa je konstantna tudi smer vektorja $\boldsymbol{\omega}$. Zakon o spremembi te komponente vrtilne količine se torej v obravnavani situaciji glasi

$$\frac{dL_{Q\alpha}}{dt} = J_\alpha\dot{\omega}_\alpha = M_{Q\alpha} \quad (2.55)$$

kjer je $M_{Q\alpha}$ komponenta (v smeri osi α) rezultante momenta vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, izračunana glede na točko Q. Z uporabo integracije lahko ta zakon zapišemo še v integralni obliki

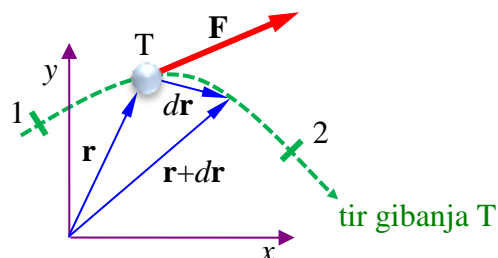
$$L_{Q\alpha 2} - L_{Q\alpha 1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Q\alpha} dt \quad (2.56)$$

ki pravi, da je sprememba (osne komponente) vrtilne količine enaka impulzu navora zunanjih sil okrog osi α .

2.3.3 Zakoni o mehanski energiji

2.3.3.1 Delo in moč

Obravnavajmo točko T, ki se giblje po nekem poljubnem tiru. Krajevni vektor točke T označimo z \mathbf{r} , njen diferencialno majhen pomik vzdolž tira pa z $d\mathbf{r}$. Na točko T naj deluje sila \mathbf{F} .



Slika 2.17: Delo sile na diferencialnem pomiku $d\mathbf{r}$

Količino

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.57)$$

imenujemo *diferencial dela*, ki ga je opravila sila \mathbf{F} pri pomiku točke T iz lege \mathbf{r} (v času t) v lego $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ (v času $t + dt$). Skalarni produkt $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ je pozitiven, kadar je kot med \mathbf{F} in $d\mathbf{r}$ oster, in negativen, če je ta kot top. Opravljeno delo sile je torej

- *pozitivno*, če sila 'pomaga' pri gibanju točke, oziroma
- *negativno*, če sila 'zavira' gibanje.

To tudi pomeni, da je v primeru, ko je sila \mathbf{F} *pravokotna* na pomik $d\mathbf{r}$, opravljeno *delo enako nič* (skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev je enak nič).

Celotno delo, ki ga sila \mathbf{F} opravi v končnem časovnem intervalu od trenutka t_1 do trenutka t_2 , dobimo z integracijo gornje enačbe in ga lahko izrazimo kot

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.58)$$

kjer smo upoštevali, da je $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$.

V tehniški praksi se pogosto zgodi, da se točka T giblje po premici, sila \mathbf{F} , ki nanjo deluje, pa je v časovnem intervalu od t_1 do t_2 konstantna. V takem primeru lahko delo, ki ga je opravila sila \mathbf{F} v intervalu od t_1 do t_2 , izrazimo kot

$$A_{12} = F_u u_{12} \quad (2.59)$$

kjer je u_{12} pomik točke T v opazovanem času, F_u pa je komponenta sile \mathbf{F} v smeri pomika u_{12} .

Drug pogost primer v tehniški praksi je, da se točka T giblje po krožnici, sila \mathbf{F} , ki nanjo deluje, pa v časovnem intervalu od t_1 do t_2 povzroča konstantni moment M_φ (glede na os rotacije). V takem primeru lahko delo, ki ga je opravil moment M_φ , v intervalu od t_1 do t_2 , izrazimo kot

$$A_{12} = M_\varphi \varphi_{12} \quad (2.60)$$

kjer je φ_{12} kot zasuka točke T v opazovanem časovnem intervalu.

Delo, ki ga sila opravi, je med drugim odvisno od dolžine $t_2 - t_1$ opazovanega časovnega intervala. Vendar nas v praksi pogosto ne zanima samo skupno opravljeno delo, ampak tudi, kako hitro narašča delo, ki ga opravlja neka sila. V ta namen vpeljemo skalarno količino, ki jo imenujemo *moč*. Definirana je kot odvod dela A , ki ga opravlja neka sila, po času t oziroma

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (2.61)$$

Z upoštevanjem definicije za diferencial dela $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dobimo

$$P = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.62)$$

Trenutna moč, ki jo dovaja sila \mathbf{F} , je torej enaka skalarnemu produktu vektorjev sile \mathbf{F} in hitrosti \mathbf{v} njenega prijemališča. Iz tega lahko izpeljemo naslednji ugotovitvi, ki ju pogosto rabimo v praksi:

Prvič: Če pri *translatornem gibanju* s potovalno hitrostjo v na sistem delujemo s silo F_v (v smeri gibanja), je trenutna moč, ki jo dobavlja sila F_v , enaka

$$P = F_v v \quad (2.63)$$

Drugič: Če pri *rotacijskem gibanju* s kotno hitrostjo ω na sistem delujemo z momentom M_ω okrog rotacijske osi, je trenutna moč, ki jo dobavlja moment M_ω , enaka

$$P = M_\omega \omega \quad (2.64)$$

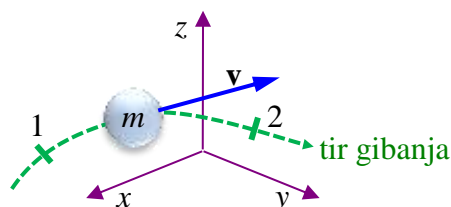
2.3.3.2 Kinetična energija

Masni delec

Opazujmo *masni delec* z maso m , ki se giblje s hitrostjo \mathbf{v} , **slika 2.18**. Skalarno količino W_k , ki jo definiramo kot

$$W_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (2.65)$$

kjer \mathbf{v}^2 predstavlja skalarni produkt vektorja hitrosti s samim seboj, imenujemo *kinetična energija masnega delca*.



Slika 2.18: Kinetična energija masnega delca

Odvod kinetične energije po času nam da

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{m}{2} 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (2.66)$$

od koder po množenju z dt in upoštevanju, da je $\mathbf{v}dt = d\mathbf{r}$, dobimo

$$dW_k = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dA \quad (2.67)$$

kjer je \mathbf{F} rezultanta zunanjih sil na masni delec, dA pa je diferencial dela, ki ga opravi \mathbf{F} na pomiku $d\mathbf{r}$. Ta enačba pomeni, da je diferencialna sprememba kinetične energija enaka diferencialu dela, ki ga je opravila *rezultanta zunanjih sil*, ki delujejo na delec.

Integrirajmo zdaj levo in desno stran enačbe od stanja 1 (v času t_1) do stanja 2 (v času t_2). Dobimo

$$W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k = A_{12} \quad (2.68)$$

Z besedami bi to lahko opisali tako:

❖ Sprememba kinetične energije masnega delca v izbranem časovnem intervalu je enaka delu, ki ga v tem istem časovnem intervalu opravi rezultanta zunanjih sil, ki delujejo na delec.

Če je torej vloženo delo pozitivno, potem kinetična energija delca naraste, v nasprotnem primeru (vloženo delo je negativno) pa kinetična energija delca upade.

Telo

Kinetična energija diferenciala mase dm telesa se lahko zapiše kot

$$dW_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dm \quad (2.69)$$

kjer je \mathbf{v} hitrost diferenciala mase dm . Z integriranjem teh prispevkov po celem telesu B dobimo izraz za kinetično energijo telesa

$$W_k = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}^2 dm \quad (2.70)$$

Kot smo to že večkrat naredili, tudi tokrat hitrost \mathbf{v} poljubne točke telesa razcepimo na

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (2.71)$$

kjer je \mathbf{v}_Q hitrost točke Q (translacija telesa), $\boldsymbol{\omega}$ je kotna hitrost vrtenja telesa (rotacija telesa) okrog osi, ki gre skozi Q, \mathbf{p} pa je vektor od točke Q do diferenciala dm . Po vstavljanju te relacije v izraz za kinetično energijo telesa, dobimo

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \int_B (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_Q^2 \int_B dm + \mathbf{v}_Q \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_B \mathbf{p} dm \right) + \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 dm \end{aligned} \quad (2.72)$$

Če točko Q izberemo v *težišču telesa*, se pravi, $Q \equiv T$, potem imamo $\int_B \mathbf{p} dm = 0$. Razen tega pa vemo, da je $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 = r^2 \omega^2$, kjer r označuje oddaljenost delca telesa od rotacijske osi, ω pa je norma rotacijske hitrosti. Iz tega sledi

$$W_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}_T^2 \quad (2.73)$$

kjer je m masa telesa, J pa je osni vztrajnostni moment telesa glede na *težiščno rotacijsko os*, podano z vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}_T$.

Izpeljava zakona o spremembi kinetične energije za telo je dokaj enostavna za telo, ki rotira okrog *osi fiksne smeri*. V tem primeru je osni vztrajnostni moment J telesa glede na to os konstanten, konstantno smer pa ima tudi vektor kotne hitrosti ω_T . Če upoštevamo te okoliščine, lahko izraz za kinetično energijo telesa odvajamo po času ter integriramo od stanja 1 (v času t_1) do stanja 2 (v času t_2) in dokaj enostavno izpeljemo

$$W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k = A_{12} \quad (2.74)$$

kjer je vloženo delo A_{12} , ki ga opravijo zunanje sile na telo, enako

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F_v v_T dt + \int_{t_1}^{t_2} M_\omega \omega_T dt \quad (2.75)$$

Pri tem je v_T potovalna hitrost težišča telesa, F_v je komponenta rezultante zunanjih sil v smeri gibanja težišča, M_ω je rezultanta momenta zunanjih sil okrog rotacijske osi, ω_T pa je kotna hitrost rotacije telesa okrog težiščne osi.

2.3.3.3 Potencialne energije

V tehniški praksi je običaj, da delo, ki ga vlagajo nekatere vrste zunanjih sil, izračunavamo na osnovi ustreznih *potencialov*. Ker se tak potencial v nekem smislu obnaša podobno kot energija opazovanega sistema, se zanj pogosto uporablja izraz *potencialna energija*. Tukaj bomo na kratko omenili samo dve vrsti potencialne energije; to sta:

- *potencialna energija* W_{pg} , s katero izračunavamo delo, ki ga opravi *teža* oziroma *gravitacijsko polje*, in
- *potencialna energija* W_{pe} , s katero izračunavamo delo, ki ga opravijo sile, ki so posledica *elastičnih deformacij (deformacijska energija)*.

Z izrazom *potencialna* poudarimo dve posebni lastnosti teh energij, in sicer:

- *Količina energije* je odvisna od *lege masnega delca* v prostoru.
- *Sprememba energije* pri spremembi lege masnega delca je odvisna samo od *začetne* in *končne lege*, ne pa tudi od tega, po kakšni poti je delec potoval od začetne v končno lego.

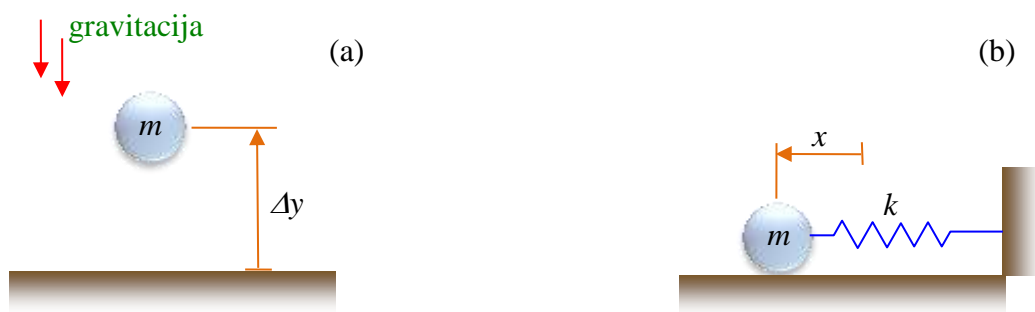
Opazujemo delec z maso m , ki ga premaknemo od vertikalne koordinate y_1 do koordinate y_2 , **slika 2.19a**. Pokažemo lahko, da je pri tem (neodvisno od oblike poti gibanja) sila teže opravila delo $A_g = -mg(y_2 - y_1)$, kjer smo z g označili velikost gravitacijskega pospeška. Če spremembo *potencialne energije* W_{pg} definiramo kot

$$\Delta W_{pg} = -A_g = mg(y_2 - y_1) \quad (2.76)$$

lahko zakon o spremembi kinetične energije preuredimo v naslednjo obliko

$$\Delta W_k + \Delta W_{pg} = A_{12}^g \quad (2.77)$$

Pri tem je ΔW_k sprememba kinetične energije, ΔW_{pg} je sprememba potencialne energije, A_{12}^g pa je delo rezultante vseh zunanjih sil *razen sile teže*. Ta enačba je uporabna tudi za *telo končnih dimenzij*, le da v tem primeru y predstavlja vertikalno koordinato *težišča telesa*. Izbira *referenčne lege* s koordinato $y = 0$ je *poljubna*. V tehniški praksi so namreč vedno zanimive le *spremembe* potencialne energije, ki ustrezajo spremembi lege masnega delca ali telesa.



Slika 2.19: Potencialni energiji W_{pg} in W_{pe}

Opazujemo masni delec m , ki se lahko giblje v horizontalni smeri, **slika 2.19b**. Na podlago je pritrjen z *linearno vzmetjo* togosti k z enoto [N/m]. Uvedimo koordinato x , ki meri horizontalno lego delca tako, da je $x = 0$, ko je vzmet nedeformirana (sila vzmeti na telo je enaka nič). V tem primeru lahko *velikost sile* pri poljubni legi delca zapišemo kot

$$F = kx \quad (2.78)$$

Če delec premaknemo od koordinate x_1 do koordinate x_2 , pri tem elastična sila v vzmeti opravi delo $A_e = -k(x_2^2 - x_1^2)/2$. Če spremembo *potencialne energije* W_{pe} , definiramo kot

$$\Delta W_{pe} = -A_e = \frac{k(x_2^2 - x_1^2)}{2} \quad (2.79)$$

lahko zakon o spremembi kinetične energije preuredimo v naslednjo obliko

$$\Delta W_k + \Delta W_{pe} = A_{12}^e \quad (2.80)$$

Pri tem je ΔW_k sprememba kinetične energije, ΔW_{pe} je sprememba elastične energije, A_{12}^e pa je delo rezultante vseh zunanjih sil *razen elastične sile vzmeti*. Za telo končnih dimenzij, ki se lahko giblje translatorsno in je pritrjeno na linearno vzmet, velja enaka enačba.

Kadar imamo opravka s telesom, ki se lahko *vrti okrog fiksne osi* in je pritrjeno na *linearno torzijsko vzmet*, je situacija načeloma podobna, le da so tukaj vpletene rotacijske količine. Velikost momenta v torzijski vzmeti je enaka

$$M = k_t \varphi \quad (2.81)$$

kjer k_t označuje *torzijsko togost* vzmeti z enoto [Nm/rad], φ pa je *zasuk telesa*, merjen iz lege, pri kateri je vzmet nedeformirana (navor vzmeti na telo je enak nič). Spremembo potenciala pri zasuku od kota φ_1 do kota φ_2 , lahko v tem primeru zapišemo kot

$$\Delta W_{pe} = \frac{k_t(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)}{2} \quad (2.82)$$

3 MEHANSKA NIHANJA

Namen:

- Spoznati osnove mehanskih nihanj.
- Spoznati osnovne gradnike nihajočih mehanskih sistemov.
- Zapisati diferencialno enačbo gibanja nihajočega mehanskega sistema.
- Rešiti enačbo gibanja sistema.

Cilj:

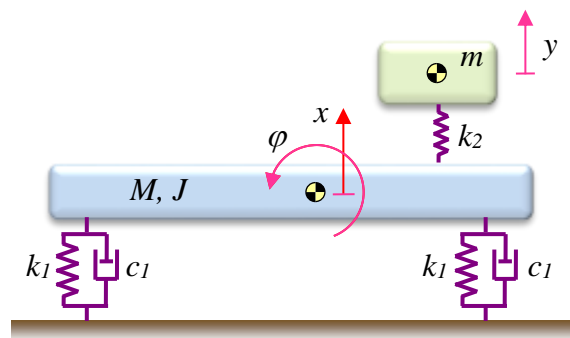
S pridobljenim znanjem bo študent sposoben opisati in analizirati enostavnejše nihajoče mehanske sisteme in njihov odziv, s poudarkom na nedušenem in dušenem lastnem nihanju.

Glavne oporne točke:

- Osnovni gradniki: telo, vzmet in dušilec.
- Diferencialna enačba gibanja sledi iz Newtonovih zakonov.
- Nihanja: lastna/vsiljena in nedušena/dušena.

3.1 Uvod in definicije

Kadar se telesa ali sistemi teles ponovljivo gibljejo okoli svojih *ravnovesnih leg*, govorimo o *mehanskem nihanju*. Enostavnejše nihajoče sisteme lahko modeliramo kot *sistem masnih delcev* ali *togih teles*, ki so med seboj povezana z *veznimi elementi*, kot so na primer *vzmeti* in *dušilci*, **slika 3.1**. Precej bolj zahtevni sistemi pa so sestavljeni iz *deformabilnih* teles, vendar obravnava takih sistemov presega okvir te knjige.



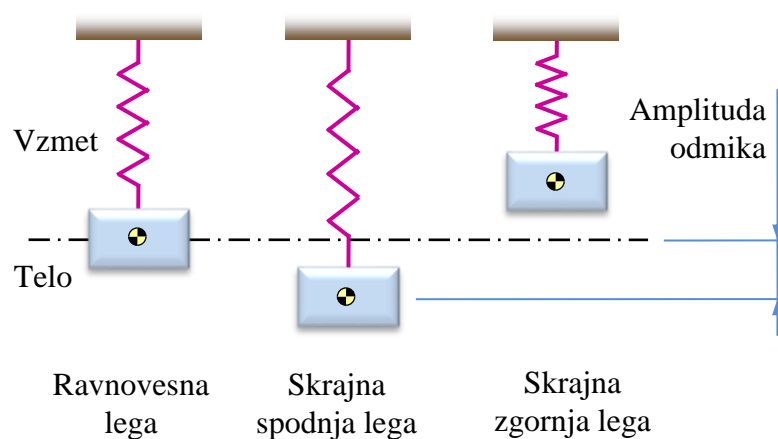
Slika 3.1: Primer nihajočega sistema – poenostavljen model vozila

Pri mehanskem nihanju imamo torej opravka z gibanjem sistema okrog ravnovesne lege. To pomeni, da moramo v sistemu imeti tako imenovane *povratne sile*, ki sistem vračajo v ravnovesno lego. Te sile običajno izvirajo iz *elastičnih podpor* in *elastičnih veznih* elementov,

ki jih v najbolj enostavnih primerih modeliramo z uporabo *linearnih elastičnih vzmeti*, **slika 3.2**. Razen povratnih sil v nihajočem sistemu praviloma nastopajo vsaj še *disipacijske sile*, ki so posledica trenja in drugih vrst *izgubljanja energije* sistema. V najbolj enostavnih primerih te sile modeliramo z uporabo *linearnih dušilnih elementov*.

Kadar pri nihanju na sistem delujejo le povratne in disipacijske sile, govorimo o *lastnem nihanju*. Če pa na nihajoči sistem razen teh sil delujejo še *aktivne sile*, govorimo o *vsiljenem nihanju* sistema.

Nihajočemu sistemu, na katerega ne delujejo aktivne sile, njegova amplituda in s tem tudi energija nihanja s časom upadata. Razlogi za to so trenje in druge vrste energijskih izgub. V nekaterih situacijah so te *izgube* lahko tako *majhne*, da jih lahko v modelu nihajočega sistema zanemarimo. Tak model ne vsebuje dušilnih elementov, njegova *energija* pa se pri odsotnosti zunanjih sil *ohranja*. Takšno nihanje imenujemo *nedušeno nihanje*. V nasprotnem primeru, kadar izgub energije ne moremo zanemariti, pa je model nihajočega sistema treba opremiti z dušilnimi elementi, ki poskrbijo za *disipacijo energije* sistema. Takšno nihanje imenujemo *dušeno nihanje*.



Slika 3.2: Nedušeno mehansko nihalo – telo na elastični vzmeti

Pri mehanskih nihanjih se vzorci gibanja posameznih delov sistema pogosto periodično ponavljajo v določenih časovnih intervalih. V takih primerih govorimo o *periodičnem nihanju*. *Časovni interval* ki je potreben, da nihajoči del opravi en *popolni cikel* oziroma *nihaj* (na primer pomik iz skrajne spodnje lege v skrajno zgornjo lego in nazaj v skrajno spodnjo lego), imenujemo *nihajna doba* ali *perioda nihanja*. Število nihajev na enoto časa pa imenujemo *frekvenca nihanja*. Frekvenco nihanja f lahko izračunamo iz periode nihanja T kot

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.1)$$

Med nihanjem se odmik posameznega dela nihajočega sistema, merjen iz ravnovesne lege, s časom spreminja. Maksimalni odmik od ravnovesne lege imenujemo *amplituda* nihanja.

Najpomembnejši elementi, ki jih uporabljamo pri modeliranju nihanj enostavnejših mehanskih sistemov, so: *telo*, *vzmet* in *dušilka*.

3.1.1 Telo

Pri nihajočem sistemu z besedo *telo* označujemo *masni element*, čigar vztrajnostnih vplivov na dinamiko nihanja ne moremo zanemariti. Karakteristični parametri telesa so njegova *masa* in njegovi *vztrajnostni momenti mase*. Te količine smo v predhodnih poglavjih že obravnavali.

3.1.2 Vzmet

Z besedo *vzmet* običajno označujemo tako imenovan *linearni vzmetni element*. To je elastični element brez mase, ki izkazuje *linearno karakteristiko*.

Za običajno linearno vzmet slednje pomeni, da je povezava med raztežno silo F in raztežkom x vzmeti linearna

$$F = kx \quad (3.2)$$

kjer proporcionalni faktor k predstavlja *togost* vzmeti z enoto [N/m], raztezek x pa je merjen tako, da je vzmet nedeformirana pri $x = 0$.

Situacija je podobna za linearno torzijsko vzmet. Tukaj je povezava med sučnim momentom M in kotom zasuka φ vzmeti linearna

$$M = k_t \varphi \quad (3.3)$$

kjer k_t označuje *torzijsko togost* vzmeti z enoto [Nm/rad], φ pa je *kot zasuka telesa*, merjen tako, da je vzmet nedeformirana pri $\varphi = 0$.

Za vsako linearno vzmet velja, da je *idealno elastična*. To pomeni, da obremenitev in razbremenitev vzmeti poteka *brez disipacije energije* oziroma brez energijskih izgub.

Pri modeliranju nihajočih sistemov vzmetni elementi nadomeščajo elastične podpore in elastične vezi med nihajočimi telesi in podlago. Elastična podprtja in vezi so pogosto izvedeni z elastičnimi konstrukcijskimi elementi, kot je na primer osno, upogibno ali torzijsko obremenjena elastična palica. Za takšne elemente moramo na osnovi njihovih geometrijskih in materialnih parametrov izračunati togost pripadajočega vzmetnega elementa.

3.1.2.1 Togosti konstrukcijskih elementov

Togost osno obremenjene elastične palice

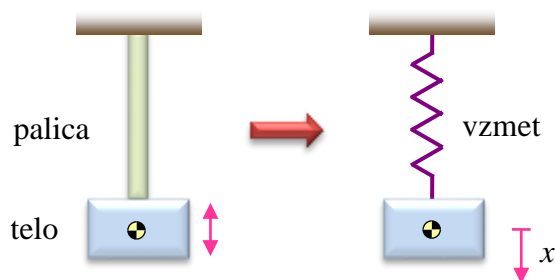
Pri osno obremenjeni palici je raztezek x palice v odvisnosti od statične osne F podan z enačbo

$$x = \frac{L}{AE} F \quad (3.4)$$

kjer je L dolžina palice, A je velikost njenega prereza, E pa je elastični modul materiala. Če to enačbo za raztezek primerjamo z ustrezno enačbo vzmetnega elementa, $F = kx$, sledi, da je togost osno obremenjene palice enaka

$$k = \frac{EA}{L} \quad (3.5)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu osno obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom, **slika 3.3**. Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.



Slika 3.3: Osno obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

Togost upogibno obremenjene elastične palice

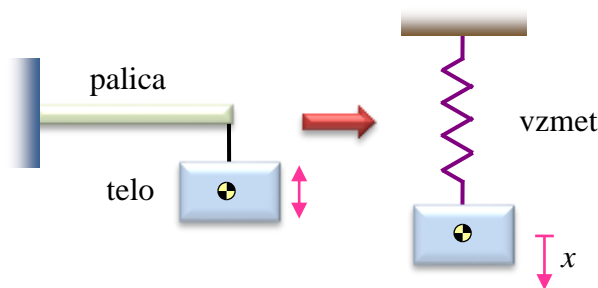
Pri upogibno obremenjeni palici je prečni povos x vrha palice v odvisnosti od statične prečne sile F podan z enačbo

$$x = \frac{L^3}{3EI} F \quad (3.6)$$

kjer je L dolžina palice, I je vztrajnostni moment njenega prereza glede na težiščno os upogiba, E pa je elastični modul materiala. Če to enačbo za prečni povos primerjamo z ustrežno enačbo vzmetnega elementa, $F = kx$, sledi, da je togost upogibno obremenjene palice enaka

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.7)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu upogibno obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom, **slika 3.4**. Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.



Slika 3.4: Upogibno obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

Togost torzijsko obremenjene elastične palice

Pri torzijskem nihanju vlogo vzmeti opravlja *linearni torzijski vzmetni element*, pri katerem je odvisnost med *kotom zasuka* φ torzijske vzmeti in obremenitvenim *torzijskim momentom* M_t podana z enačbo

$$M_t = k_t \varphi \quad (3.8)$$

kjer je k_t *torzijska togost* vzmeti z enoto [Nm/rad].

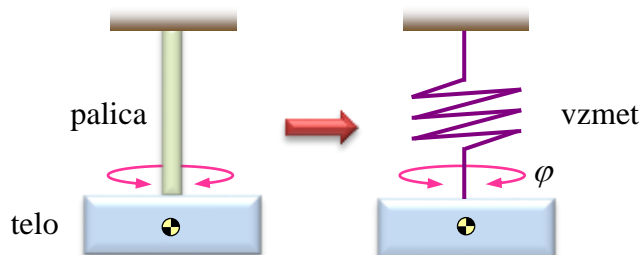
Pri torzijsko obremenjeni palici je zasuk φ vrha palice v odvisnosti od statičnega torzijskega momenta M_t podan z enačbo

$$\varphi = \frac{L}{GI_t} M_t \quad (3.9)$$

kjer je L dolžina palice, I_t je torzijski vztrajnostni moment njenega prereza, G pa je strižni modul materiala. Če to enačbo za zasuk primerjamo z ustrežno enačbo vzmetnega elementa, $M_t = k_t \varphi$, sledi, da je togost torzijsko obremenjene palice enaka

$$k_t = \frac{GI_t}{L} \quad (3.10)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu torzijsko obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom, **slika 3.5**. Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.



Slika 3.5: Torzijsko obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

Torzijsko obremenjene palice imajo pogosto okrogli prerez. Za *okrogli prerez* s premerom d je torzijski vztrajnostni moment I_t enak polarnemu vztrajnostnemu momentu I_p oziroma

$$I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.11)$$

3.1.2.2 Nadomestna togost skupine vzmeti

Nihajoči sistemi pogosto vsebujejo večje število vzmetnih elementov. Pri tem se pogosto izkaže, da lahko posamezno *skupino vzmeti* zamenjamo z enim samim vzmetnim elementom, ki pa mora izkazovati *ekvivalentno* oziroma ustrezno *nadomestno togost*. Če nam to uspe, smo s tem poenostavili tako model nihajočega sistema kot tudi zapis pripadajočih diferencialnih enačb gibanja.

Nadomeščanje skupine vzmeti z nadomestnim vzmetnim elementom je odvisno od lastnosti in konfiguracije obravnavane skupine in ga moramo izvesti v skladu s konkretno situacijo. Pri tem si lahko pomagamo z ugotovitvami, ki sledijo iz zamenjave sistema dveh vzmeti, ki sta lahko vezani

- *vzporedno* ali pa
- *zaporedno*.

Ti dve zamenjavi si je zato koristno ogledati natančneje.

Nadomestna togost vzporedno vezanih vzmeti

O *vzporedni vezavi* dveh vzmeti 1 in 2, **slika 3.6**, govorimo takrat, kadar imata obe vzmeti ves čas nihanja *enaka raztezka*

$$x_1 = x_2 = x \quad (3.12)$$

V tem primeru lahko sile v vzmeteh zapišemo kot

$$F_1 = k_1 x \quad (3.13)$$

$$F_2 = k_2 x \quad (3.14)$$

Skupna sila, ki deluje na nihajoče telo, je torej enaka

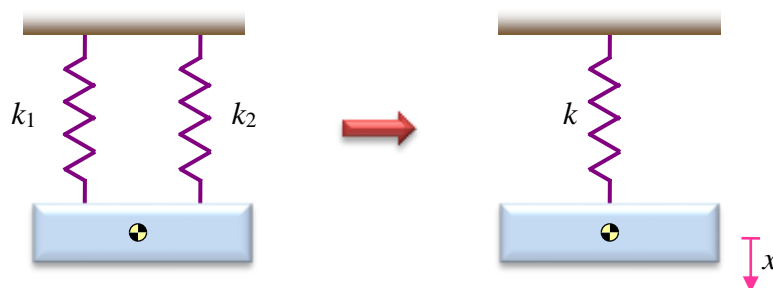
$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x \quad (3.15)$$

Enaka sila bi delovala na telo, če bi namesto vzmeti 1 in 2 uporabili nadomestno vzmet s togostjo k , ki izpolnjuje pogoj

$$k = k_1 + k_2 \quad (3.16)$$

Izkaže se, da lahko ta rezultat celo posplošimo. Nadomestna togost večjega števila vzporedno vezanih vzmeti je namreč enaka vsoti togosti posameznih vzmeti ali drugače

$$k = \sum_i k_i \quad (3.17)$$



Slika 3.6: Vzporedna vezava dveh vzmeti 1 in 2 ter nadomestni vzmetni element

Nadomestna togost zaporedno vezanih vzmeti

O *zaporedni vezavi* dveh vzmeti 1 in 2, **slika 3.7**, govorimo takrat, kadar imamo v obeh vzmeteh ves čas nihanja *enako silo*

$$F_1 = F_2 = F \quad (3.18)$$

V tem primeru raztezka v obeh vzmeteh izpolnjujeta enačbi

$$F = k_1 x_1 \quad (3.19)$$

$$F = k_2 x_2 \quad (3.20)$$

Skupni raztezek obeh vzmeti je torej enak

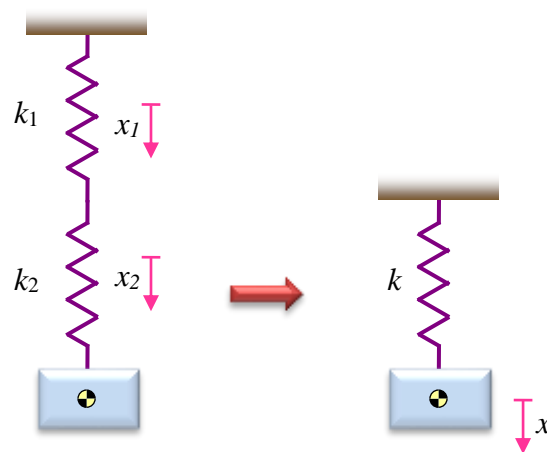
$$x = x_1 + x_2 = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (3.21)$$

Natanko tolikšen pomik telesa bi izmerili, če bi namesto vzmeti 1 in 2 uporabili nadomestno vzmet s togostjo k , ki izpolnjuje pogoj

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.22)$$

Izkaže se, da lahko ta rezultat celo posplošimo. Nadomestna togost večjega števila zaporedno vezanih vzmeti je namreč enaka

$$k = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{k_i}} \quad (3.23)$$



Slika 3.7: Zaporedna vezava dveh vzmeti 1 in 2 ter nadomestni vzmetni element

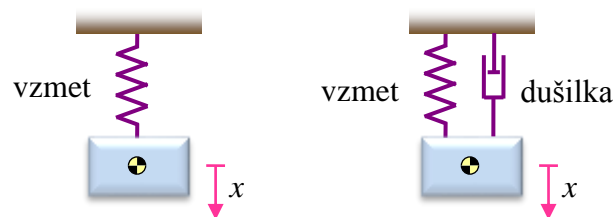
3.1.3 Dušilka

Z besedo *dušilka* običajno označujemo *linearni dušilni element*. To je element brez mase, ki je namenjen disipaciji energije in izkazuje *linearno karakteristiko*. Slednje pomeni, da je povezava med raztežno silo F in raztežno hitrostjo \dot{x} dušilke linearna

$$F = c\dot{x} \quad (3.24)$$

kjer proporcionalni faktor c predstavlja *dušilno konstanto* z enoto [Ns/m].

Linearna dušilka omogoča najbolj enostaven način za približno modeliranje tako namenskih *dušilnih mehanskih sklopov* (na primer oljni dušilci v amortizerjih) kakor tudi vse vrste nezaželenih *energijskih izgub* (na primer drsno trenje in zračni upor). V obeh primerih je ta element tisti, ki povzroča *disipacijo energije* oziroma *nepovratne energijske izgube*, **slika 3.8**.

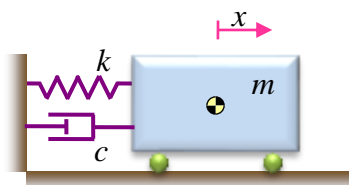


Slika 3.8: Nihajoč sistem, modeliran brez disipacije in z disipacijo energije

Podobno kot pri vzmeteh lahko teoretično tudi pri dušilkah večje skupine dušilnih elementov nadomeščamo z enim ekvivalentnim oziroma nadomestnim elementom. Vendar pa so večje skupine dušilcev v praksi precej redke, zato posebna obravnava takih situacij verjetno ni smiselna oziroma upravičena.

3.2 Lastna nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo

Kot smo že omenili, o *lastnem nihanju* govorimo takrat, kadar na gibajoč sistem delujejo le *povratne* in *disipacijske sile* brez prisotnosti aktivnih sil. Študijo lastnosti in obnašanja takih sistemov bomo obravnavali na *vzorčnem modelu*, kjer lahko togo telo translatorsno niha samo v eni smeri, **slika 3.9**. V tem modelu je togo telo običajno postavljeno na *valjčke*, za katere privzamemo, da so *brez mase* in omogočajo translatorsno gibanje telesa *brez* kakršnih koli *energijskih izgub*. To pomeni, da za disipacijo energije skrbi izključno dušilni element.



Slika 3.9: Vzorčni model z 1 PS za študij lastnega nihanja

Masa telesa vzorčnega modela je podana z m , togost linearno elastične vzmeti je k , konstanta dušilca pa je enaka c . Lego telesa podaja koordinata x , ki je merjena tako, da je pri $x = 0$ sila v vzmetnem elementu enaka nič. Iz tega sledi, da je velikost sile v vzmetnem elementu enaka $|F| = k|x|$. Ker je lega telesa natančno podana le z 1 koordinato, pravimo, da ima sistem 1 *prostostno stopnjo* (1 PS).

3.2.1 Nedušeno lastno nihanje

Nedušene lastno nihanje je nihanje brez disipacije energije. Predstavimo ga lahko z uporabo vzorčnega modela, pri katerem odstranimo dušilko, oziroma zahtevamo, da je

$$c = 0 \quad (3.25)$$

Na tak sistem deluje v horizontalni smeri samo ena sila, in sicer sila vzmetnega elementa. Njena komponenta x je enaka $F_v = -kx$, **slika 3.10**.



Slika 3.10: Model za nedušeno lastno nihanje in zunanje sile v smeri x

Za opis gibanja tega sistema uporabimo Newtonov zakon za smer x oziroma zakon o spremembi gibalne količine. Ta se glasi

$$m\ddot{x} = F_v = -kx \quad (3.26)$$

To enačbo običajno nekoliko preuredimo, in sicer tako, da vse člene prestavimo na levo stran enačaja ter obe strani delimo z maso telesa. Od tod dobimo *diferencialno enačbo* nedušenega mehanskega nihala z *eno translatorno prostostno stopnjo*

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.27)$$

Z matematičnega stališča je to homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Pri tem je x *neznana funkcija*, ki predstavlja časovno odvisen pomik telesa iz ravnovesne lege, \dot{x} pa je njen drugi odvod po času. Iz čisto praktičnih računskih razlogov konstanto k/m , ki stoji pred neznano funkcijo x , zamenjamo s pomožno količino

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.28)$$

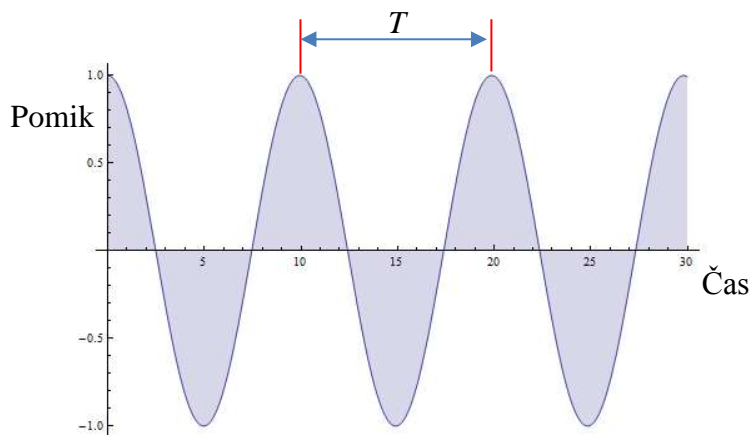
Z uvedbo te količine se torej diferencialna enačba obravnavanega sistema glasi

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.29)$$

Takšne diferencialne enačbe ne moremo rešiti z direktno integracijo, ampak je treba poiskati tako imenovani *nastavek* za njeno rešitev. Nastavek, ki reši našo diferencialno enačbo, se lahko zapiše kot

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.30)$$

kjer sta A in B zaenkrat še neznan konstanti, t pa je čas. Iz nastavka za rešitev diferencialne enačbe je očitno, da je x *zamaknjena sinusoida* oziroma *harmonična funkcija*, pomožna količina ω pa predstavlja *lastno krožno frekvenco* nedušenega nihanja, **slika 3.11**.



Slika 3.11: Lastno nihanje nedušenega sistema je harmonična funkcija

Lastna krožna frekvenca ω sistema je povezana s *frekvenco* f in *periodo* T nihanja. Ta odvisnost je podana z

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.31)$$

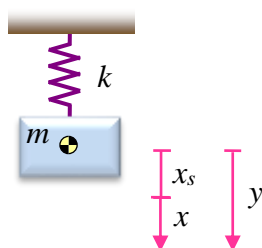
Na koncu sta ostali nedoločeni le še konstanti A in B v nastavku za rešitev diferencialne enačbe. Ti dve konstanti izračunamo iz *začetnih pogojev*. Število razpoložljivih začetnih pogojev mora ustrezati redu diferencialne enačbe. Naša diferencialna enačba je *drugega reda*, kar torej zahteva *dva začetna pogoja*. Najpogosteje se ta dva pogoja podajata v obliki naslednjih enačb

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0\end{aligned}\quad (3.32)$$

kjer sta x_0 in \dot{x}_0 znana lega in hitrost telesa v času $t = 0$. Če v ta dva začetna pogoja vstavimo nastavek za rešitev, dobimo sistem dveh navadnih linearnih enačb za neznani konstanti A in B . Rešitev teh dveh enačb nam da pravilne vrednosti za ti dve konstanti.

3.2.1.1 Eliminacija statične obremenitve

Lastno nihanje se odvija brez prisotnosti aktivnih zunanjih sil. Vendar pa obstajajo situacije, ko lahko aktivno zunanjo silo eliminiramo in na ta način nihanje vseeno obravnavamo kot lastno nihanje. Takšna situacija je prisotnost *statične* oziroma *časovno neodvisne* zunanje obremenitve, kot je na primer lastna teža.



Slika 3.12: Eliminacija statične obremenitve z uvedbo nove koordinate

Obravnavajmo primer enostavnega nihala, pri katerem mora sila v vzmeti prevzeti tudi težo telesa, **slika 3.12**. Naj bo koordinata y , ki meri lego telesa, *enaka nič* takrat, ko je vzmet *nedeformirana* (sila v vzmeti je enaka nič). Diferencialna enačba nihanja sistema v vertikalni smeri se torej lahko zapiše kot

$$m\ddot{y} = -ky + mg \quad (3.33)$$

Uvedimo zdaj novo koordinato $x = y - x_s$, kjer je $x_s = mg/k$ *statični povos* telesa pod vplivom lastne teže. Če upoštevamo to definicijo in dejstvo, da je $\ddot{x} = \ddot{y}$, lahko diferencialno enačbo predelamo v

$$m\ddot{x} = -k(x + x_s) + mg = -k(x + mg/k) + mg \quad (3.34)$$

iz česar sledi

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.35)$$

To pomeni, da lahko *statično aktivno* obremenitev *eliminiramo* preprosto z *uvedbo nove koordinate*, ki meri lego telesa iz *statične ravnovesne lege*. Po eliminaciji lahko nihanje obravnavamo kot lastno nihanje brez prisotnosti aktivnih zunanjih sil.

3.2.1.2 Rotacija okrog fiksne osi

Vse ugotovitve, vezane na lastna nihanja, smo izpeljali za sistem, kjer lahko telo niha translatorsno, lega telesa pa je podana s translatorsno koordinato x . Vendar pa imamo v praksi pogosto opravka tudi s takimi sistemi, kjer nihajoče telo *rotira okrog fiksne osi*, njegova lega pa je podana s *kotno koordinato* φ . Kadar imamo opravka z lastnim nihanjem, je takšno telo razen v rotacijski osi podprto tudi z elastičnimi vzmetmi, ki okrog rotacijske osi povzročajo povratni moment sil

$$M = -k_t\varphi \quad (3.36)$$

Pri tem je k_t nadomestna torzijska togost elastičnih vzmeti, kot φ pa je merjen iz statične ravnovesne lege sistema.

Za opis gibanja tega sistema uporabimo zakon o spremembi vrtilne količine, ki se glasi

$$J\ddot{\varphi} = M = -k_t\varphi \quad (3.37)$$

kjer je J aksialni vztrajnostni moment telesa okrog rotacijske osi. To enačbo preuredimo podobno kot pri translatorskem nihanju in dobimo *diferencialno enačbo* nedušenega mehanskega nihala z *eno rotacijsko prostostno stopnjo*

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_t}{J}\varphi = 0 \quad (3.38)$$

Iz matematičnega stališča je ta enačba enakega tipa kot diferencialna enačba translatorskega nihanja, le da je zdaj *neznana funkcija* kot φ , ki predstavlja časovno odvisen zasuk telesa iz ravnovesne lege, $\dot{\varphi}$ pa je njegov drugi odvod po času. Tako kot pri translaciji tudi tukaj vpeljemo lastno krožno frekvenco ω sistema, in sicer z relacijo

$$\omega^2 = \frac{k_t}{J} \quad (3.39)$$

Diferencialna enačba obravnavanega sistema se torej glasi

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (3.40)$$

Nastavek, ki reši našo diferencialno enačbo se lahko zapiše kot

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.41)$$

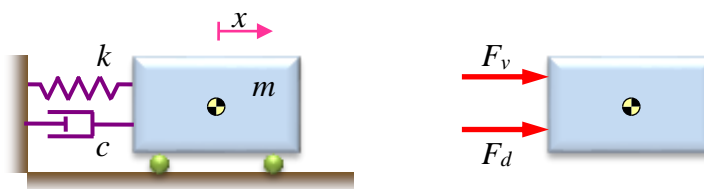
kjer sta A in B integracijski konstanti, ki ju dobimo iz začetnih pogojev, t pa je čas. Zasuk telesa pri rotacijskem lastnem nedušenem nihanju je torej, enako kot pri translaciji, harmonična funkcija časa.

3.2.2 Dušeno lastno nihanje

Dušeno lastno nihanje je nihanje z disipacijo oziroma z izgubami energije. Predstavimo ga lahko z uporabo vzorčnega modela, pri katerem zagotovimo dušenje z zahtevo

$$c > 0 \quad (3.42)$$

Na tak sistem delujeta v horizontalni smeri le dve sili, in sicer sila vzmetnega elementa in sila dušilnega elementa. Njuni komponenti x sta enaki $F_v = -kx$ in $F_d = -c\dot{x}$, **slika 3.13**.



Slika 3.13: Model za dušeno lastno nihanje in zunanje sile v smeri x

Za opis gibanja tega sistema uporabimo Newtonov zakon za smer x oziroma zakon o spremembi gibalne količine. Ta se glasi

$$m\ddot{x} = F_v + F_d = -kx - c\dot{x} \quad (3.43)$$

To enačbo običajno nekoliko preuredimo, in sicer tako, da vse člene prestavimo na levo stran enačaja. Od tod dobimo *diferencialno enačbo* dušenega mehanskega nihala z *eno translatorno prostostno stopnjo*

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.44)$$

To je linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Nastavek za rešitev ima obliko

$$x = Xe^{\lambda t} \quad (3.45)$$

kjer je X še nedoločena konstanta, λ pa neznan parameter. Po vstavljanju tega nastavka v diferencialno enačbo dobimo

$$mX\lambda^2 e^{\lambda t} + cX\lambda e^{\lambda t} + kXe^{\lambda t} = 0 \quad (3.46)$$

Če to enačbo delimo z $Xe^{\lambda t}$, dobimo kvadratno enačbo

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (3.47)$$

ki jo mora obvezno izpolnjevati parameter λ , da bo uporabljen nastavek za rešitev ustrezen. Rešitvi te kvadratne enačbe sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.48)$$

kar pogosto zapišemo v obliki

$$\lambda_{1,2} = -p \pm iq \quad (3.49)$$

kjer je

$$p = \frac{c}{2m} \quad (3.50)$$

in

$$q = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_D} \quad (3.51)$$

Pri tem količina q predstavlja *lastno krožno frekvenco*, T_D pa je *perioda* dušenega nihanja. Opazimo lahko, da je v primeru zanemarljivo majhnega dušenja, $c \approx 0$, frekvenca q enaka krožni frekvenci ω nedušenega lastnega nihanja.

Dušeno lastno nihanje je precej odvisno od tega, kolika je vrednost koeficienta dušenja c glede na mejno oziroma kritično vrednost c_{kr} , ki jo imenujemo *koeficient kritičnega dušenja*. Kritična vrednost dušenja nastopi, ko sta rešitvi karakteristične enačbe λ_1 in λ_2 realni in enaki. V tem primeru je $q = 0$, od koder lahko zapišemo enačbo za izračun c_{kr} , in sicer

$$q = \sqrt{\left(\frac{c_{kr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0 \quad (3.52)$$

Od tod sledi

$$c_{kr} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega \quad (3.53)$$

kjer je ω lastna krožna frekvenca nedušenega sistema.

Glede na vrednost koeficienta dušenja c razlikujemo tri oblike dušenja:

- **nadkritično dušenje** ($c > c_{kr}$): rešitvi karakteristične enačbe λ_1 in λ_2 sta realni in različni, splošna rešitev diferencialne enačbe gibanja pa je naslednja

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (3.54)$$

Sistem s takšnim dušenjem ne niha, pomiki pa se s časom približujejo vrednosti nič.

- **kritično dušenje** ($c = c_{kr}$): rešitvi karakteristične enačbe λ_1 in λ_2 sta realni in enaki, kar pomeni, da je $q = 0$ in

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c_{kr}}{2m} = -\omega \quad (3.55)$$

Rešitev diferencialne enačbe gibanja zapišemo kot

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_2 t} \quad (3.56)$$

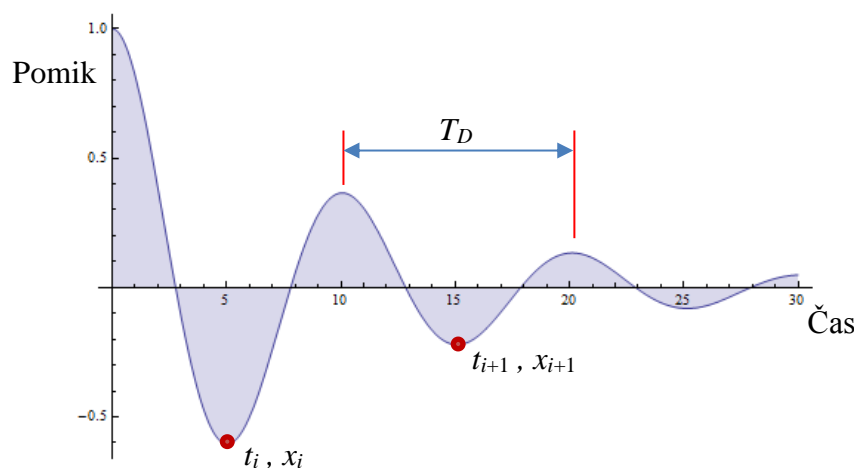
Tudi pri sistemu s kritičnim dušenjem le-ta ne niha. Sistemi s kritičnim dušenjem so pogosto uporabni za inženirske aplikacije, saj dosežejo ravnotežni položaj brez oscilacij v najkrajšem možnem času.

- **podkritično dušenje** ($c < c_{kr}$): rešitvi karakteristične enačbe λ_1 in λ_2 sta kompleksni in konjugirani. Z uporabo Eulerjeve formule, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, lahko splošno rešitev diferencialne enačbe v tem primeru zapišemo v naslednji obliki:

$$x = e^{-pt} (A \cos(qt) + B \sin(qt)) \quad (3.57)$$

Ta situacija je za inženirsko prakso najbolj zanimiva, zato si jo je vredno natančneje ogledati.

Primer odziva mehanskega nihala s **podkritičnim dušenjem** je prikazan na **sliki 3.14**. Vidimo lahko, da se amplituda nihanja zaradi dušenja postopoma zmanjšuje. Časovni interval med dvema zaporednima (pozitivnima ali negativnima) amplitudama je konstanten in je enak periodi dušenega nihanja T_D . Simboli t_i in x_i označujejo čase ekstremnih (amplitudnih) odmikov in njihove vrednosti.



Slika 3.14: Lastno nihanje podkritično dušenega sistema

V inženirski praksi je hitrost zmanjševanja amplitud pogosto zelo pomemben podatek. Za oceno te hitrosti uporabljamo količino $\Delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}}$, ki jo imenujemo **logaritemski dekrement**. Ta količina predstavlja naravni logaritem količnika dveh zaporednih amplitud. Z uporabo nastavka

$x = e^{-pt}(A \cos(qt) + B \sin(qt))$ in dejstva, da je $t_{i+1} = t_i + T_D$, lahko izraz za logaritemski dekrement zapišemo v obliki

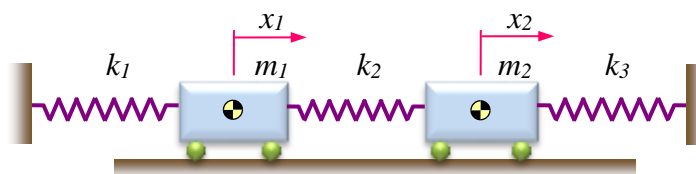
$$\Delta = pT_D \quad (3.58)$$

ki je mnogo bolj uporabna za izračunavanje vrednosti logaritemskega dekrementa.

3.3 Lastna nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami

Do zdaj smo obravnavali nihanje mehanskih sistemov z le *eno prostostno stopnjo*. V praksi so takšni sistemi še kar pogosti, vendar pa imamo mnogokrat opravka tudi s takšnimi sistemi, ki imajo *več prostostnih stopenj*. Odziv takih sistemov lahko običajno izračunamo le z uporabo ustreznih *numeričnih postopkov*, ki presegajo okvir te knjige. Zaradi tega si bomo v nadaljevanju ogledali le postopek določevanja *lastnih frekvenc* in *lastnih nihajnih oblik* nedušenega sistema z *več prostostnimi stopnjami*. Lastne frekvence in lastne nihajne oblike sistema predstavljajo namreč pomembne parametre sistema, katerih poznavanje nam koristi pri obravnavi tako nedušenih kot tudi dušenih nihajočih sistemov. Razen tega lahko z uporabo teh količin zapišemo tudi *zakon nihanja* nedušenega sistema z več prostostnimi stopnjami.

Izpeljavo splošnih enačb bomo začeli na vzorčnem modelu z dvema prostostnima stopnjama, **slika 3.15**.



Slika 3.15: Vzorčni model z dvema prostostnima stopnjama

Lego teles v vzorčnem modelu določata dva parametra:

- x_1 , ki predstavlja lego telesa z maso m_1 , in
- x_2 , ki predstavlja lego telesa z maso m_2 .

Opazovani sistem ima torej dve prostostni stopnji. Za določitev diferencialnih enačb gibanja zapišemo Newtonov zakon za vsako telo posebej

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \quad (3.59)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \quad (3.60)$$

iz česar sledi

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (3.61)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \quad (3.62)$$

Če ti dve enačbi predelamo v matrično obliko, dobimo

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

oziroma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

kjer je \mathbf{M} *masna matrika* sistema, \mathbf{K} je *togostna matrika* sistema, $\ddot{\mathbf{x}}$ je *vektor pospeškov*, \mathbf{x} pa je *vektor koordinat* oziroma prostostnih stopenj sistema. Rang vpletenih matrik in vektorjev ustreza številu prostostnih stopenj obravnavanega sistema.

Če imamo opravka z nihajočim sistemom z N prostostnimi stopnjami, ta matrična enačba predstavlja sistem N linearnih diferencialnih enačb drugega reda. Iskanja *lastnih frekvenc* takšnega sistema se lahko lotimo z uporabo nastavka v obliki

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \sin \omega t \quad (3.65)$$

kjer je \mathbf{X} vektor konstant. Po vstavljanju tega nastavka v sistem diferencialnih enačb dobimo

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

Iz takega sistema enačb lahko izračunamo netrivialen oziroma od nič različen vektor \mathbf{X} edino v primeru, ko je *karakteristična matrika* $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]$ singularna. Drugače povedano, za netrivialne rešitve moramo zahtevati, da je determinanta te matrike enaka nič oziroma

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (3.67)$$

Za sistem z N prostostnimi stopnjami lahko iz te enačbe izračunamo N *lastnih frekvenc* sistema

$$\omega_i, \quad i = 1 \dots N \quad (3.68)$$

Ko so lastne frekvence ω_i znane, lahko iz naslednjih sistemov enačb

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}]\mathbf{X}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1 \dots N \quad (3.69)$$

izračunamo še N *lastnih vektorjev* oziroma *lastnih nihajnih oblik* sistema

$$\mathbf{X}_i, \quad i = 1 \dots N \quad (3.70)$$

Vektorji \mathbf{X}_i so *medsebojno ortogonalni* glede na masno matriko \mathbf{M} , kar pomeni, da je produkt $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j = 0$ če $i \neq j$.

Znane lastne frekvence ω_i in lastne nihajne oblike \mathbf{X}_i nihajočega sistema nam omogočajo zapis splošnega *nastavka za rešitev* diferencialnih enačb gibanja sistema z N prostostnimi stopnjami. Ta nastavek se lahko zapiše kot

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (3.71)$$

kjer so A_i in B_i integracijske konstante, ki jih izračunamo iz začetnih pogojev

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t=0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t=0) &= \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Za to lahko uporabimo enačbi, ki ju izpeljemo z upoštevanje ortogonalnosti lastnih nihajnih oblik. Če namreč nastavek za rešitev množimo z leve z $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}$, po preureditvi dobimo

$$A_i = \frac{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0}{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i} \quad (3.73)$$

in

$$B_i = \frac{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0}{\omega_i \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i} \quad (3.74)$$

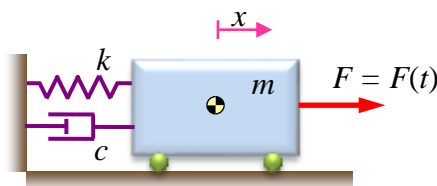
kjer je $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0$ produkt začetnih pomikov z vektorjem nihajnih oblik (izračunan glede na masno matriko \mathbf{M}), $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0$ je produkt začetnih hitrosti z vektorjem nihajnih oblik, $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i$ pa je produkt vektorja nihajnih oblik s samim seboj. Izračun konstant $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$ nam da torej *zakon nihanja* nedušenega sistema z N prostostnimi stopnjami.

3.4 Vsiljena nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo

Pri *vsiljenem nihanju* na nihajoč sistem delujejo razen *povratnih* in *disipacijskih sil* še razne vrste *aktivnih sil*, ki običajno *niso odvisne* od trenutne *lege* ali *hitrosti sistema*. Te sile so lahko posledica:

- raznih *procesov znotraj opazovanega sistema* (npr. vrtenje neuravnovešenega rotorja elektromotorja) ali
- *vplivov drugega sistema* na naš opazovani sistem (npr. tresljaji podlage, na katero je pripet naš opazovani sistem).

Študijo lastnosti in obnašanja takih sistemov bomo obravnavali na *vzorčnem modelu*, kjer lahko togo telo translatorsno niha samo v eni smeri, **slika 3.16**. Gre za enak model, kot smo ga imeli pri obravnavi lastnih nihanj. Edina razlika je prisotnost zunanje aktivne sile F , ki je odvisna od časa.



Slika 3.16: Vzorčni model z 1 PS za študij vsiljenega nihanja

Diferencialno enačbo gibanja takega sistema lahko zapišemo kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (3.75)$$

kjer je $F = F(t)$ časovno odvisna sila, ki zajema vse aktivne zunanje vplive na sistem. Splošna rešitev take diferencialne enačbe je sestavljena iz dveh delov:

- *homogenega* dela, x_h , in
- *partikularnega* dela, x_p ,

tako da imamo

$$x = x_h + x_p \quad (3.76)$$

Partikularni del reši *originalno* diferencialno enačbo, homogeni del pa pripadajočo *homogeno* enačbo $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

Sila F je aktivna sila, ki lahko mirujoč sistem spravi v gibanje. Zato pravimo, da F predstavlja *vzbujanje* dinamičnega sistema. V inženirski praksi imamo opravka z različnimi oblikami vzbujanja dinamičnih sistemov, vendar je daleč najpomembnejše *harmonično vzbujanje*. Takšno vzbujanje je definirano s harmonično funkcijo, ki jo lahko v splošni obliki zapišemo kot

$$F = F_0 \sin(\Omega t + \Phi) \quad (3.77)$$

Pri tem konstanta F_0 predstavlja *amplitudo sile* vzbujanja, Ω je *krožna frekvenca* vzbujanja, Φ pa *fazni zamik* vzbujanja. V nadaljevanju bomo obravnavali izključno harmonično motnjo, za fazni zamik pa bomo zaradi enostavnosti kar predpostavili

$$\Phi = 0 \quad (3.78)$$

Ta predpostavka nima pomembnih posledic za ugotovitve, ki bodo sledile.

3.4.1 Nedušeno vsiljeno nihanje

Za opis nedušenega vsiljenega nihanja lahko uporabimo diferencialno enačbo vzorčnega modela, če privzamemo, da je $c = 0$. Ker smo predpostavili harmonično motnjo brez faznega zamika, se enačba gibanja zapiše kot

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (3.79)$$

Če to enačbo delimo z m in uvedemo pomožne količine

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{F_0}{m} \quad (3.80)$$

dobimo

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin(\Omega t) \quad (3.81)$$

Nastavek za rešitev je v tem primeru

$$x = x_h + x_p, \quad x_h = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad x_p = C \sin(\Omega t) \quad (3.82)$$

Integracijski konstanti A in B se izračunata iz začetnih pogojev, konstanto C pa dobimo z vstavljanjem partikularnega dela rešitve x_p v diferencialno enačbo. Iz tega sledi

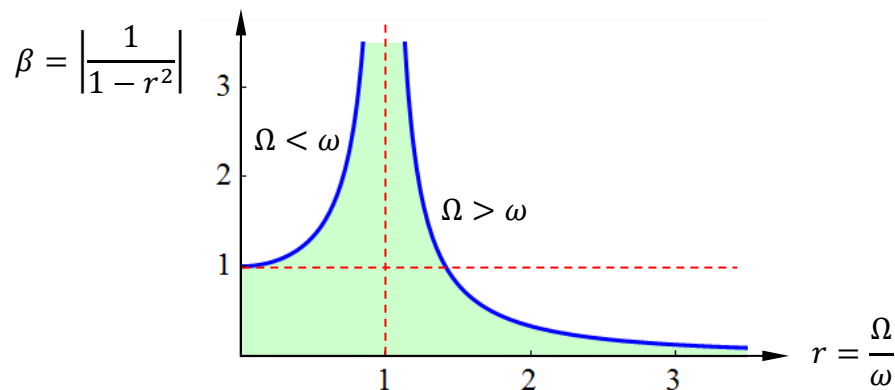
$$C = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (3.83)$$

Če bi šel $\Omega \rightarrow 0$, dobimo kvazistatično obremenitev sistema. V tem primeru je konstanta C enaka $C_{st} = \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_0}{k}$ in predstavlja odmik sistema od ravnovesne lege pri statični obremenitvi. Količnik

$$\beta = \left| \frac{C}{C_{st}} \right| = \left| \frac{1}{1-r^2} \right| \quad (3.84)$$

kjer je $r = \frac{\Omega}{\omega}$, imenujemo *dinamični faktor ojačenja*. Ta količina predstavlja relativno mero za velikost amplitud vsiljenega nihanja. Z inženirskega stališča je zelo koristen graf faktorja β v

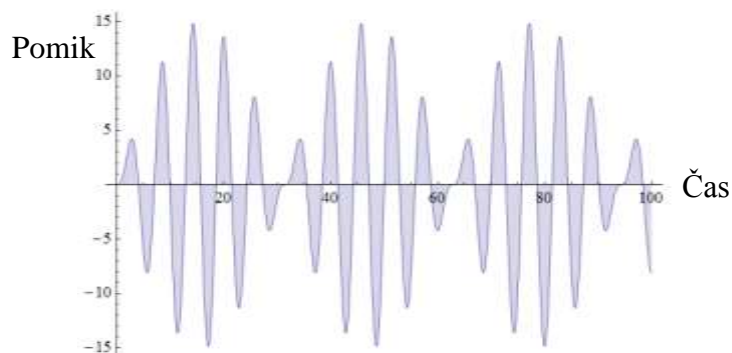
odvisnosti od količnika frekvenc r , **slika 3.17**.



Slika 3.17: Dinamični faktor ojačenja v odvisnosti od količnika frekvenc

S slike vidimo, da faktor dinamičnega ojačenja, in s tem tudi amplituda nihanja, narašča preko vseh meja takrat, ko gre $r \rightarrow 1$ oziroma $\Omega \rightarrow \omega$. Ta pojav, ki je lahko usoden za normalno delovanje sistema, imenujemo *rezonanca*.

Teoretično imamo opravka z resonanco takrat, kadar je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci sistema oziroma $\Omega = \omega$. V praksi pa so seveda problematične tudi situacije, ko sta obe frekvenci sicer različni, vendar se bistveno ne razlikujeta. Namreč, kadar imamo $\Omega \approx \omega$, lahko na dinamičnem sistemu opazimo *periodično naraščanje in upadanje amplitud* nihanja. Ta pojav, ki ga imenujemo *podrhtavanje* sistema, je lahko zaradi občasnih prevelikih amplitud prav tako usoden za dinamični sistem. V tehniški praksi se je zato vedno treba *izogibati situacijam*, ko je $\Omega \approx \omega$. Za ilustracijo podrhtavanja sistema je na **sliki 3.18** prikazan odziv sistema, pri katerem je $\Omega = 1,2 \omega$.



Slika 3.18: Podrhtavanje sistema kot posledica $\Omega \approx \omega$

3.4.2 Dušeno vsiljeno nihanje

Dušenja v opazovanem sistemu v praksi pogosto ne moremo zanemariti, kar pomeni, da imamo $c > 0$. V takem primeru se diferencialna enačba vzorčnega modela s harmoničnim vzbujanjem zapiše kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (3.85)$$

Če to enačbo delimo z m in uvedemo pomožne količine

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{F_0}{m}, \quad p = \frac{c}{2m}, \quad q = \sqrt{\frac{k}{m} - p^2} \quad (3.86)$$

dobimo

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = f \sin(\Omega t) \quad (3.87)$$

Če predpostavimo podkritično dušenje, ki se pojavlja v večini inženirskih sistemov, se nastavek za rešitev zapiše kot

$$x = x_h + x_p, \quad x_h = e^{-pt}(A \cos(qt) + B \sin(qt)), \quad x_p = C \sin(\Omega t - \gamma) \quad (3.88)$$

Konstanti A in B se izračunata iz začetnih pogojev; konstanti C in γ pa dobimo z vstavljanjem partikularnega dela rešitve x_p v diferencialno enačbo. Iz tega sledi

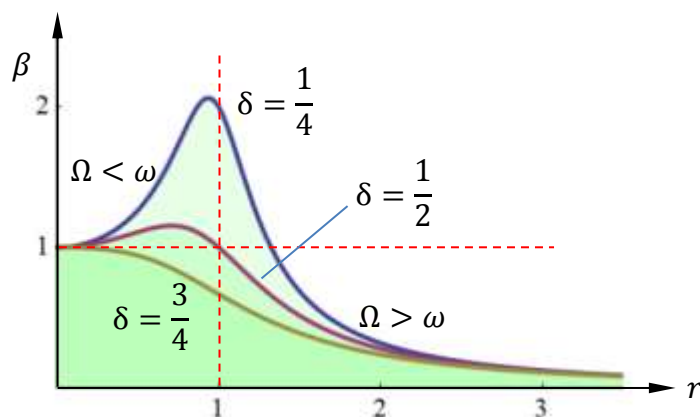
$$C = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\Omega^2}}, \quad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{2p\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad (3.89)$$

Dinamični faktor ojačenja je pri dušenem sistemu

$$\beta = \left| \frac{c}{c_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\delta^2 r^2}} \quad (3.90)$$

kjer smo uporabili $\delta = \frac{p}{\omega}$ in $r = \frac{\Omega}{\omega}$.

Dinamični faktor ojačenja je torej pri dušenem vsiljenem nihanju odvisen od količine δ , ki je sorazmerna koeficientu dušenja c . Graf odvisnosti β od r in δ prikazuje **slika 3.19**. Vidimo lahko, da bo z inženirskega stališča bližina resonance oziroma frekvenc Ω in ω problematična pri vrednostih $\delta < \frac{1}{2}$, medtem ko postane vpliv resonance pri vrednostih $\delta > \frac{1}{2}$ praktično zanemarljiv.



Slika 3.19: Dinamični faktor ojačenja v odvisnosti od r in δ

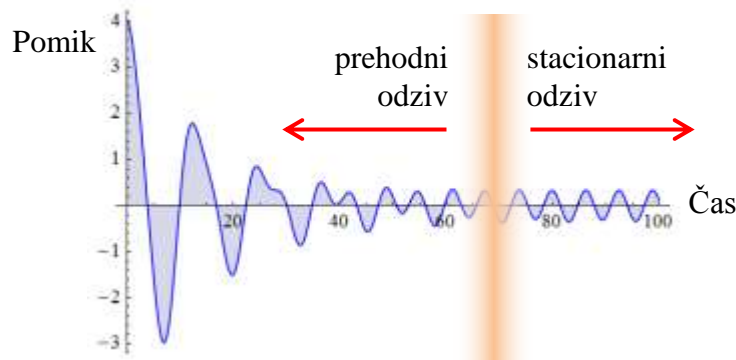
Na koncu je dobro opozoriti še na naslednje dejstvo: homogeni del rešitve dinamičnega odziva gre zaradi dušenja vedno proti nič, ko gre čas proti neskončnosti. Ali drugače

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x_h \rightarrow 0 \quad (3.91)$$

V praksi to pomeni, da bo po določenem (prehodnem) času ΔT , merjenem od začetka vzbujanja sistema, njegov odziv praktično enak partikularnemu delu rešitve. Ali drugače

$$t > \Delta T \Rightarrow x_h \approx 0 \Rightarrow x \approx x_p \quad (3.92)$$

Zaradi tega odziv sistema v času $t < \Delta T$ imenujemo *prehodni odziv*, odziv v času $t > \Delta T$ pa *stacionarni odziv* sistema. Na **sliki 3.20** je prikazan tipičen primer vsiljenega nihanja z dušenjem, pri katerem se jasno ločita prehodni in stacionarni del odziva sistema.



Slika 3.20: Prehodni in stacionarni odziv sistema

3.4.2.1 Primer vsiljenega nihanja z inercialnim vzbujanjem

Pogost vzrok nihanja sistemov so *neuravnovešene vrteče se mase*, ki povzročajo *inercialno vzbujanje*. Na **sliki 3.21** je prikazan primer, kjer masa m_u kroži s kotno hitrostjo Ω na razdalji e okoli fiksne osi na telesu mase m_s . Diferencialna enačba gibanja sistema je

$$(m_s + m_u)\ddot{y} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.93)$$

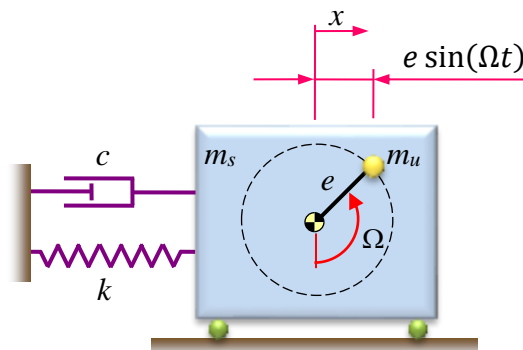
kjer y označuje lego težišča celotnega sistema mase $m_s + m_u$. Če zapišemo izraz za težišče sistema

$$(m_s + m_u)y = m_s x + m_u(x + e \sin(\Omega t)) \quad (3.94)$$

tega dvakrat odvajamo in vstavimo v izvorno diferencialno enačbo sistema, dobimo

$$(m_s + m_u)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_u e \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.95)$$

Vidimo lahko, da ta enačba *ustreza splošni diferencialni enačbi* za vsiljeno nihanje s harmoničnim vzbujanjem, pri čemer je $m_s + m_u = m$ in $m_u e \Omega^2 = F_0$.

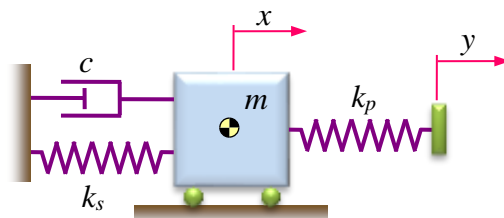


Slika 3.21: Sistem z inercialnim vzbujanjem

To pomeni, da vse enačbe, ki veljajo za harmonično vzbujan sistem, smiselno veljajo tudi za sistem z inercialnim harmoničnim vzbujanjem.

3.4.2.2 Primer vsiljenega nihanja z vzbujanjem podlage

Drug pogost vzrok vsiljenih nihanj je *vzbujanje s premikanjem podlage*, na katero je pripet opazovani dinamični sistem.



Slika 3.22: Sistem z vzbujanjem prek podlage

Primer takšnega sistema je prikazan na **sliki 3.22**. Če je pomik podlage y harmonična funkcija $y = Y \sin(\Omega t)$, lahko diferencialno enačbo gibanja zapišemo kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_s + k_p)x = k_p Y \sin(\Omega t) \quad (3.96)$$

Očitno tudi ta enačba *ustreza splošni diferencialni enačbi* za vsiljeno nihanje s harmoničnim vzbujanjem, pri čemer je $k_s + k_p = k$ in $k_p Y = F_0$.

4 ANALITIČNA DINAMIKA

Namen:

- Spoznati Newton-Eulerjev pristop.
- Spoznati D'Alambertov princip.
- Spoznati posplošene oz. generalizirane koordinate ter posplošene sile.
- Spoznati princip virtualnega pomika, virtualnega dela ter uporabe virtualnega dela v statiki in dinamiki.
- Spoznati Lagrangeevo enačbo in njeno uporabnost.

Cilj:

S pridobljenim znanjem bo študent sposoben zapisati gibalne enačbe sistema z različnimi uporabljenimi metodami.

4.1 Uvod

Kot že samo ime pove gibalne enačbe opisujejo gibanje mehanskega oz. dinamičnega sistema, ko je ta podvržen nekim zunanjim silam in ali momentom. Takšen sistem ima lahko odprto kinematično verigo, kot jo imajo roboti, ali pa ima zaprto kinematično verigo, kot jo imajo npr. štiri zgibni mehanizmi. Gibalne enačbe ne opisujejo samo gibanje sistema, temveč podajajo tudi potrebne napore in ali sile za željeno gibanje po predpisani poti, hitrosti ali pospešku. Lahko podajajo tudi pospeške, hitrosti in poti iz podanih navorov na motorju.

Pridobivanje gibalnih enačb dinamičnega sistema je za inženirja mehatronike pomembno iz več vidikov. V kolikor želimo dimenzionirati motor dinamičnega sistema, potrebujemo gibalne enačbe. S pomočjo gibalnih enačb izračunamo kolikšen navor je potreben na motorju za premagovanje gibanja po predpisani trajektoriji. Gibalne enačbe so prav tako pomembne pri vodenju dinamičnih sistemov. V kolikor želimo voditi dinamični sistem s pomočjo regulacije, potrebujemo gibalne enačbe, ki jih zapišemo v Laplaceovem prostoru ter tako dobimo stopnični odziv dinamičnega sistema. S pomočjo stopničnega sistema izberemo ustrezen regulator za vodenje obravnavanega sistema. Prav tako s pomočjo gibalnih enačb dobimo ustrezne reakcijske sile v vezeh s pomočjo katerih po tem ustrezno dimenzioniramo vezni element.

Klasičen pristop, ki smo ga do sedaj že spoznali, je pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newtonovih zakonov, še posebej z uporabo Newtonovega drugega in tretjega zakona. Newtonov pristop je vektorski pristop z uporabo prostih diagramov teles, kot bo to prikazano v nadaljevanju. Pri tem vedno dobimo poleg gibalnih enačb za dinamični sistem še reakcijske enačbe v podporah oz. vezeh dinamičnega sistema.

Analitičen pristop, na drugi strani, ne zahteva poznavanja Newtonovih zakonov. S pomočjo skalarne veličine dela, ki je razdeljeno na kinetično in potencialno energijo ter zakonom o ohranitvi energije in uporabo Lagrangeevega pristopa enostavno pridemo do

gibalnih enačb dinamičnega sistema. Z omenjenim pristopom pridemo do minimalnega števila gibalnih enačb dinamičnega sistema brez reakcijskih sil. Lahko pa iz pridobljenih gibalnih enačb pridobimo reakcijske sile v vezeh in podporah.

Dinamični sistemi so dinamično vzbujani kar pomeni, da je podan navor, ki poganja sistem in je potrebno poiskati odziv sistema v smislu opravljene poti, hitrosti, pospeška ali generirane sile. Na drugi strani lahko na dinamični sistem delujejo zunanje sile in nas zanima potreben navor na motorju, ki bo premagoval zunanje sile po v naprej predpisani trajektoriji.

Če želimo pridobiti odziv dinamičnega sistema moramo rešiti gibalne enačbe. Gibalne enačbe dinamičnega sistema so po navadi navadne diferencialne enačbe drugega reda. Za pridobivanje odziva jih je potrebno integrirati. Analitično je težko najti rešitev zato v večini primerov uporabljamo numerične metode. Večinoma se za to uporablja metoda Runge-Kutta.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na obravnavo ravninskih dinamičnih sistemov.

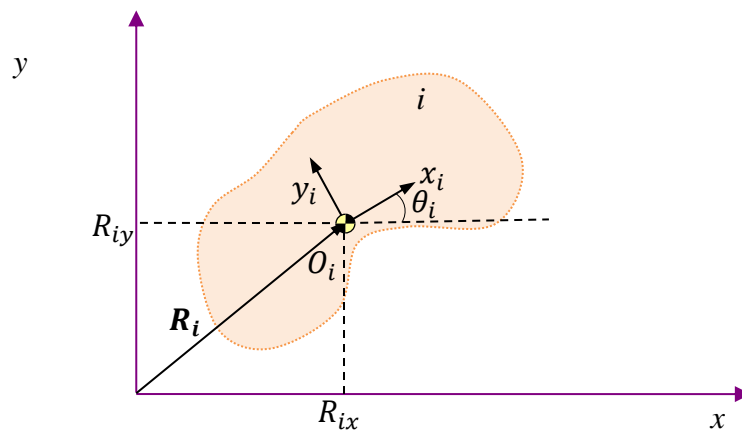
4.2 Prostostne stopnje dinamičnih sistemov

Izraz prostostne stopnje označuje najmanjše možno število položajnih parametrov, ki popolnoma opišejo dinamični sistem. Povedano drugače, če dinamični sistem potrebuje najmanj dva podatka, da popolnoma opišemo dinamični sistem, potem ima ta sistem dve prostostni stopnji. Industrijski robot ima šest prostostnih stopenj oz. šest servo motorjev, kjer s prvimi tremi motorji doseže vse pozicije točke v prostoru z zadnjimi tremi motorji pa vse orientacije točke v prostoru. Batni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo saj lahko z zasukom pogonske ročice določimo vse kote in položaj batnice.

4.3 Pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa in D'Alambertovega principa

4.3.1 Newton-Eulerjev pristop

V nadaljevanju bomo pridobili gibalne enačbe dinamičnega sistema s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, ki ga že poznate, vendar ga niste nikoli tako poimenovali saj v večini primerov uporabljamo kar izraz Newtonov pristop. Prosto togo telo i v ravnini ima tri prostostne stopnje kar lahko opišemo s tremi podatki R_{ix} , R_{iy} in θ_i , kot to prikazuje slika 4.1. Za pridobivanje dinamičnega modela telesa tako potrebujemo tri neodvisne diferencialne enačbe drugega reda, ki opisujejo neomejeno gibanje togega telesa v ravnini.



Slika 4.1: Prosto togo telo v ravnini

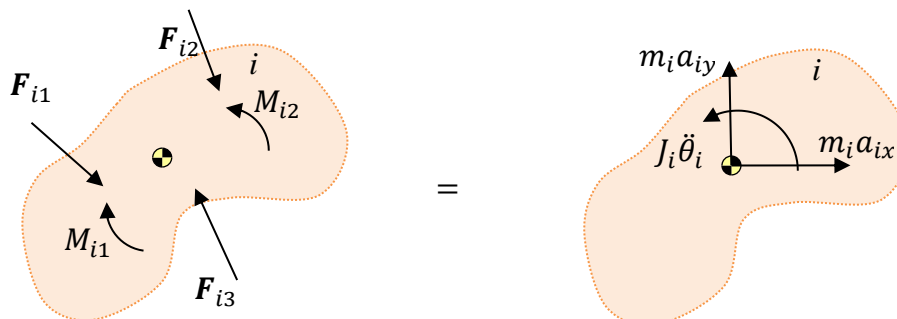
Newton-Eulerjev pristop tako pridobi naslednje tri enačbe za gibanje težišča togega telesa v ravnini.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n F_{ijx} &= m_i a_{ix} \\ \sum_{j=1}^n F_{ijy} &= m_i a_{iy} \\ \sum_{j=1}^m M_{ij} &= J_i \ddot{\theta}_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pri tem sta prvi dve enačbi Newtonovi enačbi pridobljeni iz izreka o gibalni količini, tretja pa je Eulerjeva enačba, pridobljena iz izreka o vrtilni količini. Od tod tudi izraz Newton-Eulerjev pristop.

4.3.2 D'Alembertov princip

D'Alembertov princip pravi, da so vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti togega telesa enaki vsoti vseh zunanjih sil in vsoti vseh zunanjih momentov, ki delujejo na togo telo. Slika 4.2 prikazuje grafično upodobitev principa.



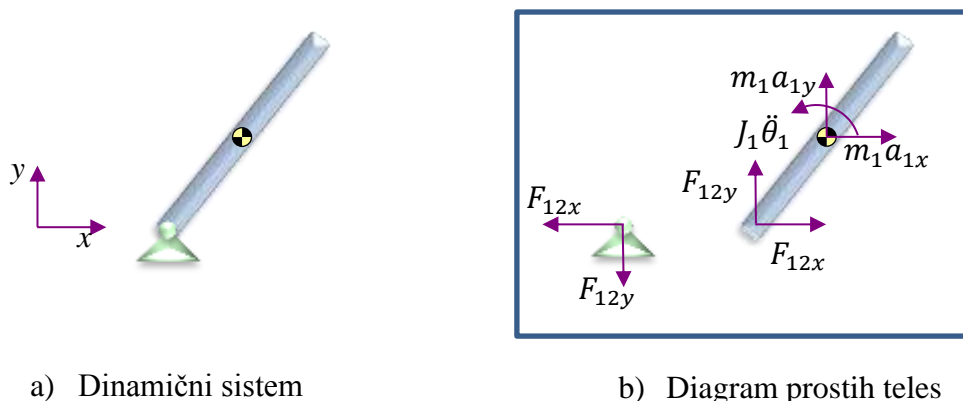
Slika 4.2: Grafična upodobitev D'Alembertovega principa.

Pri čemer se sile F_{i1}, F_{i2}, F_{i3} in momenta M_{i1}, M_{i2} obravnavata kot zunanje sile in zunanji momenti. Izrazi $m_i a_{iy}, m_i a_{ix}$ in $J_i \ddot{\theta}_i$ pa predstavljajo vztrajnostne sile obravnavanega telesa. V

kolikor bi zapisali enačbe glede na D'Alambertov princip, bi pridobili popolnoma identične gibalne enačbe, kot smo jih pridobili v enačbi (4.1).

4.3.3 Newton-Eulerjev pristop in diagram prostih teles

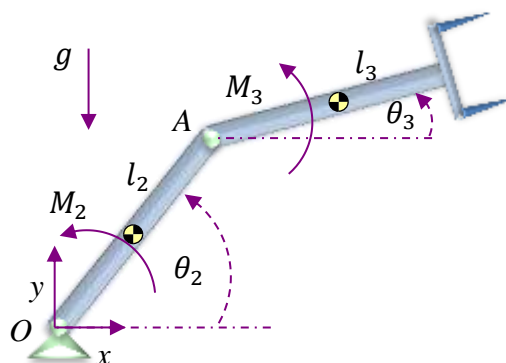
Pridobivanje gibalnih enačb dinamičnega sistema togih teles s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa poteka s pomočjo diagrama prostih teles. Predstavljajte si, da so tri toga telesa med sabo povezana z vezmi oz. sklepi. Diagram prostih teles pridobimo tako, da telesa med sabo razdružimo, kjer vezi nadomestimo z reakcijskimi silami oz. silami v vezeh, na vsako telo pa narišemo še sile in momente, ki vplivajo na telo. Za vsako posamezno telo tako zapišemo tri enačbe v obliki enačbe (4.1). Usmeritve posameznih sil predvidevamo. Če smo se pri usmeritvi zmotili, bomo kot rezultat dobili negativno vrednost.



Slika 4.3: Dinamični sistem in diagram prostih teles

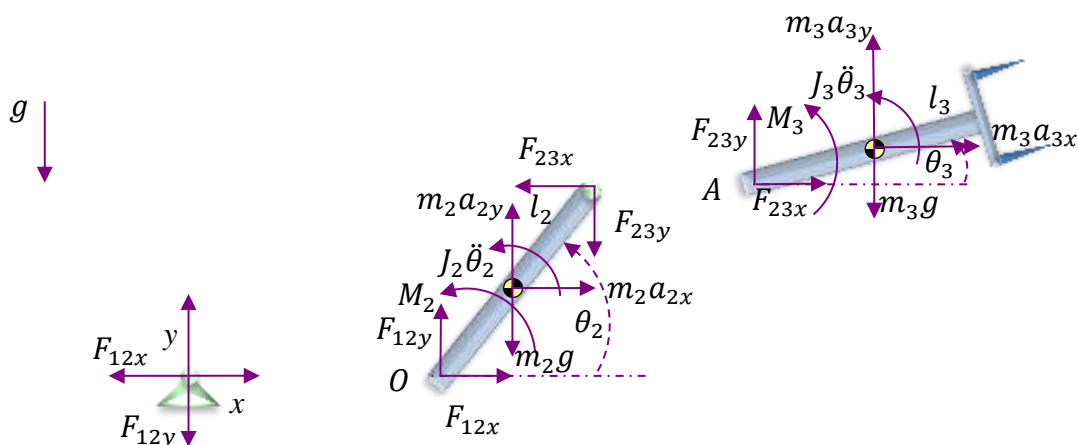
V nadaljevanju si bomo pogledali pridobivanje gibalnih enačb dinamičnih sistemov z odprto kinematično verigo, kot jo imajo npr. industrijski roboti.

Primer 4.1: Za dvoosni manipulator na sliki 4.4 zapiši gibalne enačbe s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, če so znani θ_2 in θ_3 ter $\ddot{\theta}_2$ in $\ddot{\theta}_3$.



Slika 4.4: Dvoosni manipulator

V kolikor želimo zapisati gibalne enačbe dvoosnega manipulatorja s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa je potrebno narediti diagrame prostih teles, kot to prikazuje slika 4.5. Za telo 2 in telo 3 zapišemo ravnotežne enačbe.



Slika 4.5: Diagram prostih teles dvoosnega manipulatorja

Pri zapisu ravnotežnih enačb za drugo telo moramo upoštevati, da vse momente pri tem pristopu opazujemo okoli težišča telesa 2.

$$\begin{aligned} F_{12x} - F_{23x} &= m_2 a_{2x} \\ F_{12y} - m_2 g - F_{23y} &= m_2 a_{2y} \\ F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2 + F_{23x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pri zapisu ravnotežnih enačb za tretjo telo ponovno upoštevamo vse momente okoli težišča telesa 3.

$$\begin{aligned} F_{23x} &= m_3 a_{3x} \\ F_{23y} - m_3 g &= m_3 a_{3y} \\ F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Iz obeh zgornjih enačb lahko izrazimo potreben moment na posameznem motorju.

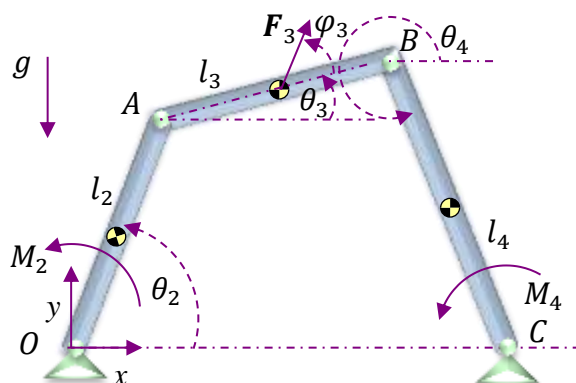
$$\begin{aligned} M_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 - F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - F_{23x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 - F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Poglejmo, koliko neznank imamo sedaj v zgornjih enačbah. Neznanke so: $M_2, M_3, F_{12x}, F_{12y}, F_{23x}, F_{23y}, a_{2x}, a_{2y}, a_{3x}, a_{3y}$. Torej imamo 6 enačb in 10 neznank. Dodatne štiri enačbe dobimo, če s pomočjo kinematike zapišemo pospeške težišča telesa 2 in 3 po x in y osi. Tako dobimo 10 enačb in 10 neznank. S tem sistem enačb postane rešljiv.

Opazimo lahko, da z Newton-Eulerjevim pristopom pridobimo še enačbe za reakcijske sile v vezeh oz. sile v posameznih podporah. Poznavanje teh sil je v določenih primerih željeno, kadar npr. želimo dimenzionirati posamezen element moramo poznati sile v podporah. V večini primerov pa je dovolj, če poznamo samo gibalne enačbe za posamezno prostostno stopnjo dinamičnega sistema.

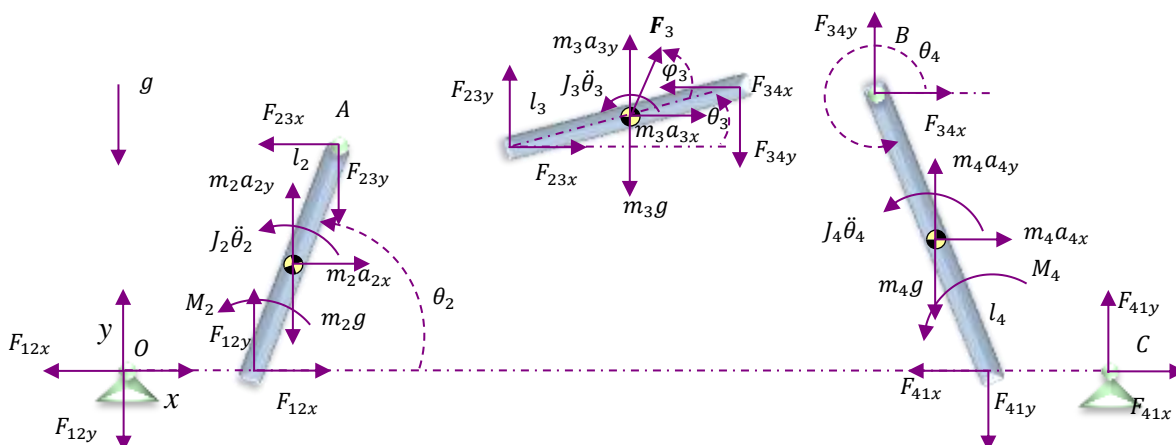
V nadaljevanju si bomo pogledali pridobivanje gibalnih enačb dinamičnih sistemov z zaprto kinematično verigo.

Primer 4.2: Za štiri zgibni mehanizem, kot je prikazan na sliki 4.6, izpeljite gibalne enačbe s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, če so znani θ_2 , θ_3 in θ_4 , $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_3$ in $\ddot{\theta}_4$ ter F_3 .



Slika 4.6: Štiri zgibni mehanizem

Ponovno je potrebno izdelati diagrame prostih teles in za posamezno prosto telo zapisati ravnotežne enačbe v obliki enačbe (4.1).



Slika 4.7: Diagram prostih teles štiri zgibnega mehanizma

Pri zapisu ravnotežnih enačb za drugo telo moramo upoštevati, da vse momente pri tem pristopu opazujemo okoli težišča telesa 2.

$$\begin{aligned} F_{12x} - F_{23x} &= m_2 a_{2x} \\ F_{12y} - m_2 g - F_{23y} &= m_2 a_{2y} \\ F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2 + F_{23x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pri zapisu ravnotežnih enačb za tretjo telo ponovno upoštevamo vse momente okoli težišča telesa 3.

$$\begin{aligned} F_{23x} + F_{3x} - F_{34x} &= m_3 a_{3x} \\ F_{23y} - m_3 g + F_{3y} - F_{34y} &= m_3 a_{3y} \\ F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + F_{34x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{34y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Enak postopek izberemo tudi pri zapisu ravnotežnih enačb za četrto telo.

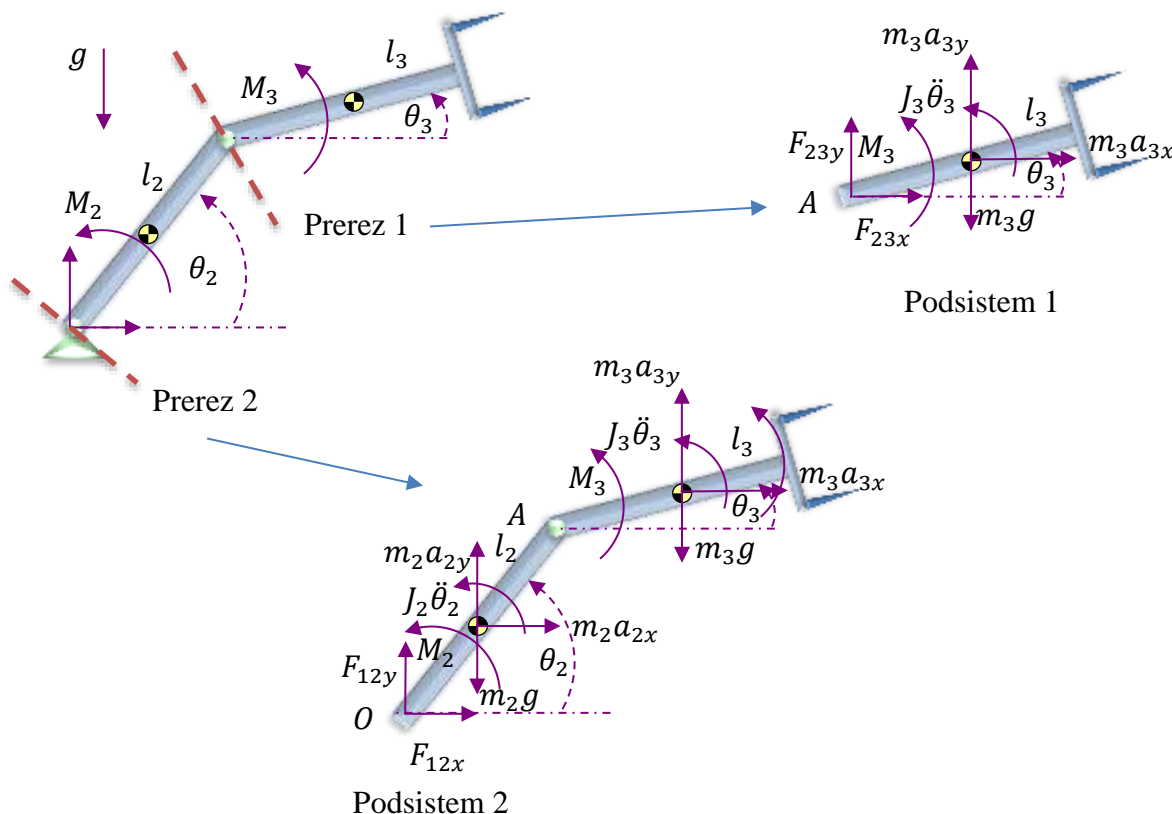
$$\begin{aligned}
 F_{34x} - F_{41x} &= m_4 a_{4x} \\
 F_{34y} - m_4 g - F_{41y} &= m_4 a_{4y} \\
 F_{34x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - F_{34y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + F_{41x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - F_{41y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + M_4 &= J_4 \ddot{\theta}_4
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ta postopek da 9 enačb. V kolikor vstavimo v zgornje enačbe še izraze za pospeške in vstavimo enačbe v momentne enačbe, dobimo sistem 8 enačb, ki podajajo reakcijske sile v podporah, in momentno enačbo iz katere lahko izrazimo potreben moment ali pa kotni pospešek, odvisno kaj točno nas zanima.

4.3.4 D'Alambertov princip in uporaba metode prerezov

V nadaljevanju bo prikazan postopek uporabe D'Alambertovega principa in metode prerezov oz. ravnovesja podsistemov na obeh prej že prikazanih primerih.

Primer 4.3: Za dvoosni manipulator zapišite gibalne enačbe s pomočjo D'Alambertovega principa in uporabo metode prerezov, če so znani θ_2 in θ_3 ter $\ddot{\theta}_2$ in $\ddot{\theta}_3$.



Slika 4.8: Dvoosni manipulator, metoda prerezov in ravnotežje podsistemov

Vsak prerez naredimo pri posameznem sklepu začevši pri zadnjem sklepu. S tem dobimo prvi podsistem. Po tem naredimo še en prerez pri sklepu 1. Tako dobimo drugi podsistem. Za oba podsistema zapišemo ravnotežne momentne enačbe glede na točko prereza, kjer upoštevamo D'Alambertov princip.

Za prvi podsistem tako zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke A. D'Alambertov princip pravi, da je vsota vseh zunanjih momentov enaka vsem vztrajnostnim momentom.

$$\sum M_{ZM} = \sum M_{VM}$$

$$M_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 = J_3 \ddot{\theta}_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \quad (4.8)$$

$$M_3 = J_3 \ddot{\theta}_3 + (m_3 a_{3y} + m_3 g) \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3$$

Za podsistem 2 zapišemo momentne ravnotežne enačbe okoli točke O s pomočjo D'Alambertovega principa.

$$\sum M_{ZM} = \sum M_{VM}$$

$$M_2 + M_3 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g \left(l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right)$$

$$= J_2 \ddot{\theta}_2 + J_3 \ddot{\theta}_3 - m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (4.9)$$

$$- m_3 a_{3x} \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right)$$

$$+ m_3 a_{3y} \left(l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right)$$

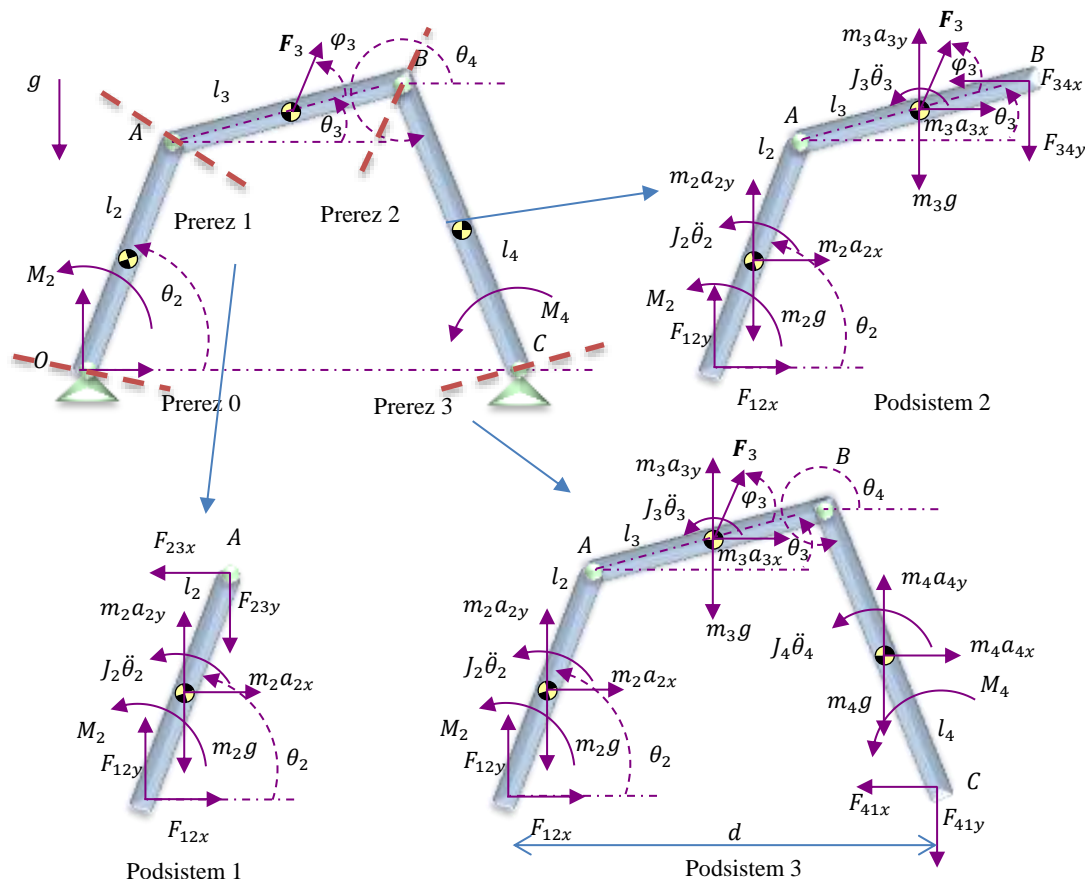
V kolikor enačbo (4.8) vstavimo v (4.9) dobimo spodnjo enačbo.

$$M_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + (m_2 g + m_2 a_{2y}) \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 \quad (4.10)$$

$$+ (m_3 g + m_3 a_{3y}) l_2 \cos \theta_2$$

Kot lahko opazimo, z uporabo metode prerezov pri mehanizmih z odprto kinematično verigo, pridobimo toliko gibalnih enačb kot ima mehanizem prostostnih stopenj.

Primer 4.4: Za štiri zgibni mehanizem zapišite gibalne enačbe s pomočjo uporabe D'Alembertovega principa in uporabo metode prerezov, če so znani θ_2, θ_3 in $\theta_4, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ in $\ddot{\theta}_4$ ter F_3 .



Slika 4.9: Štiri zgibni mehanizem, metoda prerezov in ravnotežja podsistemov

Pri zaprto zanknih verigah moramo narediti pri ročici 2 dva prereza, torej pri obeh sklepih. S tem dobimo prvi podsistem. Od tukaj dalje pa v vsakem sklepu naredimo prerez in pridobimo nov podsistem. Postopek prikazuje slika 4.9. Najprej zapišemo ravnotežne enačbe za podsistem 1 okoli točke A z upoštevanjem D'Alembertovega principa.

$$\sum M_{ZM} = \sum M_{VM}$$

$$F_{12x}l_2 \sin \theta_2 - F_{12y}l_2 \cos \theta_2 + m_2g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2$$

$$= J_2\ddot{\theta}_2 + m_2a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - m_2a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (4.11)$$

Za podsistem 2 zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke B z upoštevanjem D'Alembertovega principa.

$$\begin{aligned}
& \sum M_{ZM} = \sum M_{VM} \\
& F_{12x}(l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3) - F_{12y}(l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \\
& + m_2 g \left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \right) + M_2 + F_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \\
& + (m_3 g - F_{3y}) \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \\
& = J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_{2x} \left(\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \right) \\
& - m_2 a_{2y} \left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \right) + J_3 \ddot{\theta}_3 + m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \\
& - m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Za podsistem 3 zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke C z upoštevanjem D'Alambertovega principa.

$$\begin{aligned}
& \sum M_{ZM} = \sum M_{VM} \\
& -F_{12y}d + M_2 + m_2 g \left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) \\
& + F_{3x} \left(\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) \\
& + (m_3 g - F_{3y}) \left(\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) + M_4 + m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \\
& = J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_{2x} \left(\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) \\
& - m_2 a_{2y} \left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) + J_3 \ddot{\theta}_3 \\
& + m_3 a_{3x} \left(\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) - m_3 a_{3y} \left(\frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) \\
& + J_4 \ddot{\theta}_4 + m_4 a_{4x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - m_4 a_{4y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Kot lahko opazimo, v zgornjih treh enačbah še vedno nastopata dve reakcijski sili v podpori O. Žal, se z uporabo metode prerezov ne moremo popolnoma znebiti reakcijskih sil pri zaprti znančnih kinematičnih mehanizmih.

V zgornjih primerih so bili podani klasični pristopi za pridobivanje gibalnih enačb odprtih in zaprtih kinematičnih mehanizmov. V kolikor so znani posamezni zasuki in pospeški teles lahko s pomočjo gibalnih enačb izračunamo generirane momente in sile v podporah. V kolikor so znani momenti in zunanje sile lahko iz gibalnih enačb, s pomočjo metod numeričnih reševanj navadnih diferencialnih enačb drugega reda, pridobimo zasuke in pospeške posameznih teles.

4.4 Posplošene oz. generalizirane koordinate

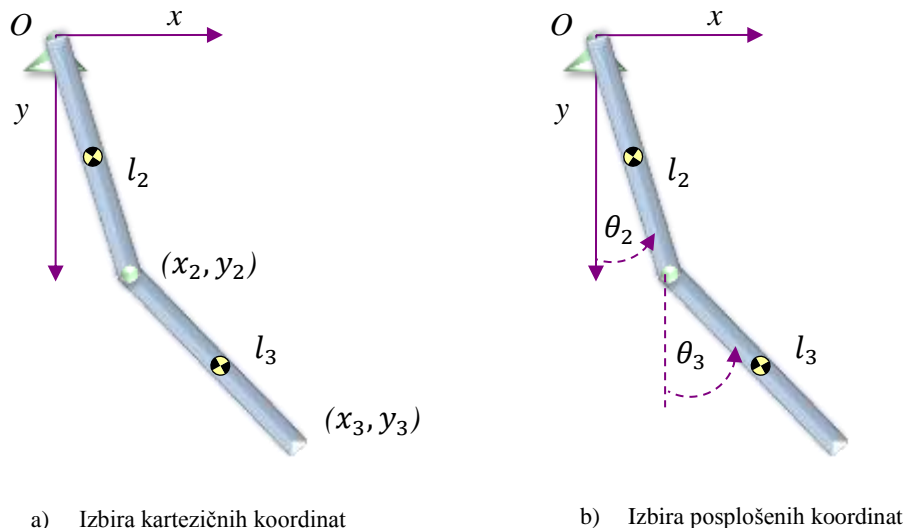
Za namen uporabe analitične mehanike potrebujemo vpeljavo oz. uporabo posplošenih oz. generaliziranih koordinat. Posplošene koordinate so bile katere koordinate, ki jih izberemo za opisovanje točke oz. objekta v prostoru. Po navadi poznamo koordinate x, y in z . Lahko

izberemo tudi polarne koordinate, torej r in φ ali pa cilindrične koordinate r , φ in z . Pri izbiri koordinat moramo paziti na sledeče:

1. Ni nujno, da izberemo kartezične koordinate.
2. Morajo biti med seboj neodvisne.
3. Morajo popolnoma opisati sistem.

Če povzamemo, posplošene koordinate so neodvisne koordinate, ki popolnoma opišejo opazovani sistem. Poglejmo si primer dvojnega nihala.

Primer 4.5: Izbira ustreznih posplošenih koordinat na primeru dvojnega nihala.



Slika 4.10: Izbira a) kartezičnih in b) posplošenih koordinat

V kolikor sedaj želimo opisati sistem na zgornji sliki, lahko to naredimo na več načinov. Prvi način je, da izberemo kartezične koordinate in tako potrebujemo štiri podatke x_2, y_2 in x_3, y_3 . Poglejmo, ali so te med seboj neodvisne? Z drugimi besedami, če izberem podatek x_2 ali je potem y_2 prosto določljiv? Opazimo lahko, da temu ni tako. Člen 2 ima v naprej znano dolžino l_2 kar pomeni, da če izberemo x_2 potem podatek za y_2 dobimo z upoštevanjem Pitagorovega

izreka $y_2 = \pm \sqrt{l_2^2 - x_2^2}$. Tako hitro ugotovimo, da takšen izbor koordinat ne more dati

posplošenih koordinat. Dvojno nihalo ima dve prostostni stopnji. Že ta podatek nam mora povedati, da za opisovanje sistema potrebujemo dve posplošeni koordinati. Lahko si za opis sistema izberemo kot med členom 2 in y osjo ter kot med členom 3 in navidezno osjo podaljšano od člena 2, kot to prikazuje zgornja slika. Izbrana kota označimo z θ_2 in θ_3 . Ta dva kota sta sedaj med sabo neodvisna. Če določimo enega izmed njiju, se drugi lahko prosto vrti. Prav tako, če določimo oba, smo s tem popolnoma opisali sistem, saj se sistem ne more več vrteti oz. premakniti. S tem lahko zagotovo trdimo, da sta kota θ_2 in θ_3 posplošeni koordinati zgornjega sistema. Posplošene koordinate splošno označimo s črko q_i . Tako bi zgoraj opisani sistem opisali s $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t))$, pri čemer sta $q_1(t) = \theta_2(t)$ in $q_2(t) = \theta_3(t)$. Vemo, da sta obe spremenljivki kota časovno odvisni spremenljivki, zato lahko posplošene koordinate zapišemo kot $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$. Ker bomo v nadaljevanju uporabljali Lagrangeeve enačbe in Lagrangeev pristop, moramo pojasniti na kakšnih dinamičnih sistemih lahko ta pristop sploh uporabimo in na katerih bi bilo potrebno uporabiti drugačno metodo.

4.5 Holonomni sistemi in holonomne vezi

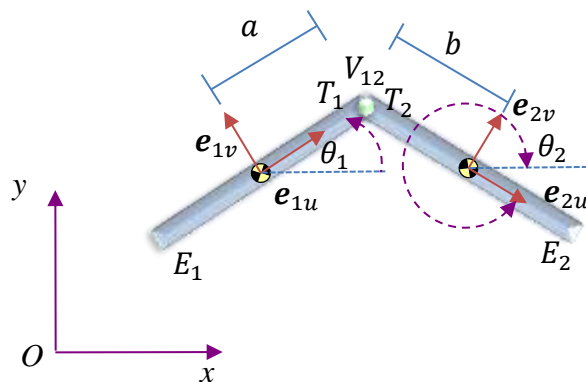
Holonomni dinamični sistemi so takšni sistemi kjer za opis sistema potrebujemo toliko podatkov, kolikor ima sistem prostostnih stopenj. En takšen primer je bil podan že v primeru 4.5. Poglejmo primer klasičnega industrijskega robota s 6 prostostnimi osmi. Kot veste, če želite določiti pozicijo in orientacijo vrha robota, po tem potrebujete točno 6 podatkov oz. zasukov posameznih motorjev. Tako hitro ugotovimo, da je industrijski robot holonomni sistem. Holonomni sistemi imajo holonomne vezi med posameznimi elementi sistema. Holonomne vezi se nanašajo na omejitve konfiguracije oz. konstrukcije, torej gre za geometrijske omejitve. Z drugimi besedami omejujejo gibanje sistema tako, da ustrezno zmanjšajo prostostno stopnjo sistema. Da je vez holonomna, mora biti izražena s funkcijo, ki vsebuje posplošene koordinate in čas.

$$\mathbf{C}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (4.14)$$

Enačba (4.14) tako predstavlja enačbo holonomnih kinematičnih omejitev posameznih vezi kjer je \mathbf{C} matrika neodvisnih omejitvenih enačb posameznega sklepa sistema, ki je odvisna od posplošenih koordinat in časa.

Prav tako so holonomne vezi lahko časovno odvisne ali pa časovno neodvisne. Časovno odvisnim vezem pravimo *rheonomne*, časovno neodvisnim pa *skleronomne* vezi. Poglejmo primer.

Primer 4.6: Zapišite enačbo vezne točke V_{12} v globalnem koordinatnem sistemu ter določite ali je vez rheonomna ali skleronomna.



Slika 4.11: Primer holonomne vezi

Za zapis enačbe vezne točke V_{12} moramo zapisati pozicijo točk T_1 in T_2 glede na globalni koordinatni sistem. Za to potrebujemo dva krajevna vektorja. Enega, ki gre skozi težišče prvega elementa do vezne točke in drugega, ki gre skozi težišče drugega elementa do vezne točke. Ta dva krajevna vektorja morata biti med sabo enaka saj opisujeta isto točko.

$$\begin{aligned} x_1 + a \cos \theta_1 - (x_2 - b \cos \theta_2) &= 0 \\ y_1 + a \sin \theta_1 - (y_2 - b \sin \theta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Kot lahko vidimo iz zgornje enačbe gre za geometrijsko omejitveno vez, kjer čas ne nastopa eksplicitno, spremenljivki za oba kota pa sta še vedno časovno odvisni. Torej gre za holonomno vez, ki je hkrati tudi skleronomna. V kolikor bi v vezno točko V_{12} vgradili motor bi se zapis za zasuk telesa dva spremenil. Ta takrat postane eksplicitno časovno odvisen $\theta_2 = c \cdot t$, kjer je c konstanta zasuka, t pa je čas. Kar pomeni, da je to sedaj holonomna vez, ki je hkrati tudi rheonomna, torej eksplicitno časovno odvisna. Enačba (4.15) se tako preoblikuje v enačbo

(4.16).

$$\begin{aligned}x_1 + a \cos \theta_1 - (x_2 - b \cos(c \cdot t)) &= 0 \\y_1 + a \sin \theta_1 - (y_2 - b \sin(c \cdot t)) &= 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

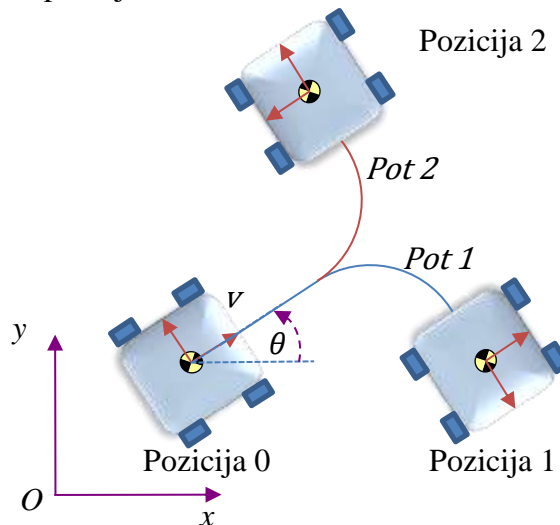
4.6 Neholonomni sistemi in neholonomne vezi

Neholonomni sistemi so dinamični sistemi, ki potrebujejo za opis sistema več podatkov, kot imajo število prostostnih stopenj. Prav tako imajo neholonomni sistemi neholonomne vezi. To so vezi, kjer je poleg posplošenih koordinat in časa potrebno definirati tudi hitrosti.

$$\mathbf{C}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (4.17)$$

Zgornja enačba tako predstavlja enačbo neholonomnih kinematičnih omejitev posameznih vezi kjer je \mathbf{C} matrika neodvisnih omejitvenih enačb posameznega sklepa sistema, ki je odvisna od posplošenih koordinat, posplošenih hitrosti in časa. Poglejmo primer.

Primer 4.7: Avtonomno vozilo ima v ravnini tri prostostne stopnje, x, y, θ . Vozilo se lahko pomika naprej in nazaj ter krmili s pomočjo sprednjih koles. Tako imamo samo dve krmilni veličini s katerima lahko pridemo iz pozicije 0 v pozicijo 1 ali 2, kot to prikazuje slika 4.12. To sta hitrost vozila in zasuk sprednjih koles.



Slika 4.12: Primer neholonomnega sistema

Za opis takšnega sistema potrebujemo začetne podatke o poziciji sistema, torej posplošene koordinate v katere je vključen zasuk θ , hitrost sistema in čas. Samo tako lahko iz pozicije 0 preidemo v pozicijo 1 ali 2. Tako ugotovimo, da poziciji 1 in 2 nista odvisni samo od pozicije vozila, temveč tudi od poti po kateri je to vozilo prišlo v določeno pozicijo.

V nadaljevanju se bomo posvečali samo holonomnim sistemom.

4.7 Virtualno delo

V nadaljevanju bo predstavljen princip virtualnega dela. Virtualno delo omogoča izpeljavo gibalnih enačb brez omejitvenih oz. reakcijskih sil v podporah. Na podlagi skalarne veličine dela tako pridobimo gibalne enačbe. Dobimo minimalno število gibalnih enačb, ki je enako številu prostostnih stopenj dinamičnega sistema. Da lahko zapišemo virtualno delo moramo najprej definirati virtualni pomik in posplošene sile.

4.7.1 Virtualni pomik

Virtualni pomik je definiran kot infinitezimalno (neskončno) majhen pomik, ki je skladen s kinematičnimi omejitvami sistema. Virtualni pomiki so imaginarni/navidezni, saj bi se naj zgodili, ko čas miruje. Virtualni pomik lahko obravnavamo kot parcialni odvod, kjer je čas fiksen, se ne spreminja. Vektor pozicije zapišemo kot $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$, kjer je \mathbf{q} vektor posplošenih koordinat. Če želimo pridobiti virtualni pomik je potrebno vektor pozicije odvajati. Tega odvajamo kot totalni odvod in dobimo enačbo (4.18).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (4.18)$$

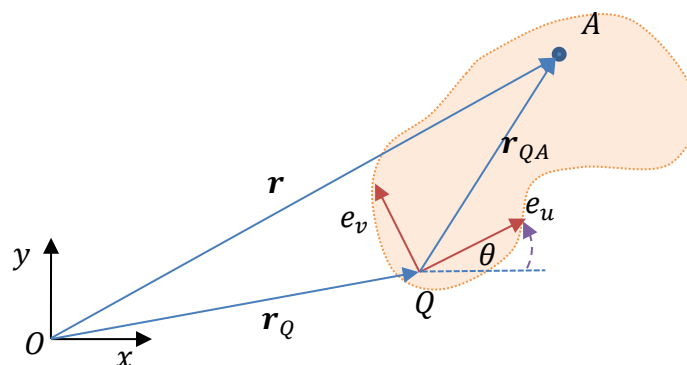
Enačbo pomnožimo na obeh straneh z dt .

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \quad (4.19)$$

Pri virtualnem pomiku \mathbf{r} ni eksplicitna funkcija časa, zato zadnji člen odpade. Prav tako za zapis virtualnega pomika uporabimo grško črko δ . Tako se enačba (4.19) pretvori v enačbo (4.20) kar predstavlja definicijo virtualnega pomika.

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (4.20)$$

Primer 4.8: Izračunajte virtualni pomik točke A prostega telesa v ravnini čigar pozicija je zapisana z uporabo gibljive baze, kot kaže slika 4.13. Vemo, da je $\mathbf{e}_u = [\cos \theta \quad \sin \theta]^T$ in $\mathbf{e}_v = [-\sin \theta \quad \cos \theta]^T$. Tako zapišemo začetno pozicijo točke A glede na globalni koordinatni sistem O .



Slika 4.13: Za izračun virtualnega pomika uporabimo krajevni vektor točke A prostega telesa v ravnini.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}_{QA} = \mathbf{r}_Q + u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v \quad (4.21)$$

Od začetne pozicije sedaj poiščemo virtualni pomik s parcialnim odvodom, kjer odvod zapišemo z grško črko δ .

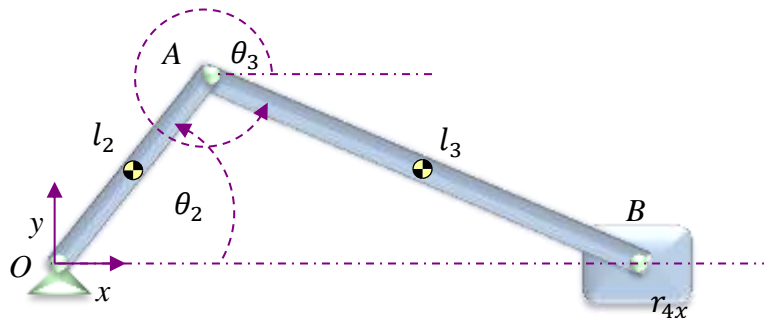
$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + \delta\mathbf{r}_{QA} = \delta\mathbf{r}_Q + \delta(u\mathbf{e}_u) + \delta(v\mathbf{e}_v) \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + u\delta \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + v\delta \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + u \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \delta\theta - v \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta\theta \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.7.2 Odvisne in neodvisne koordinate

V sistemih imamo vedno **odvisne** in **neodvisne** koordinate. Poglejmo si primer.

Primer 4.9: Za batni mehanizem izpeljite virtualne zasuke in pomike za kot θ_3 in r_{4x} glede na zasuk θ_2 .

Batni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo. Tako ima samo eno neodvisno koordinatno, koordinato θ_2 . Koordinati θ_3 in r_{4x} pa sta odvisni koordinati.



Slika 4.14: Virtualni pomik za batni mehanizem

Za opis pozicije točke B bomo sešteli vektorje od izhodiščne točke preko točke A do točke B . Po tem poiščemo virtualni pomik s pomočjo parcialnega odvoda.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} \\ \begin{bmatrix} r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_2 \\ l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \cos\theta_3 \\ l_3 \sin\theta_3 \end{bmatrix} / \delta \\ \begin{bmatrix} \delta r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 \delta\theta_3 \\ l_3 \cos\theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Iz zgornje enačbe ločimo odvisne in neodvisne koordinate tako, da dobimo na levi strani virtualni zasuk in pomik $\delta\theta_3$ in δr_{4x} , na desni pa virtualni zasuk $\delta\theta_2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 \delta\theta_3 \\ -l_3 \cos\theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 & -1 \\ -l_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \sin\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

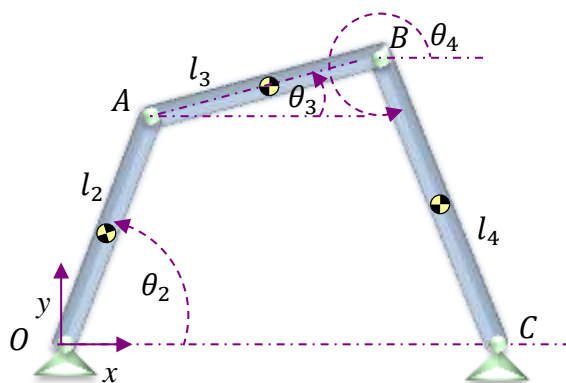
Poiščemo inverzno matriko 2×2 na levi strani in jo pomnožimo na obeh stran zgornje enačbe.

S tem pridemo do končne rešitve.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{l_3 \cos \theta_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ l_3 \cos \theta_3 & -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{l_3 \cos \theta_3} \begin{bmatrix} -1 & l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Zgornja enačba tako opisuje kolikšna je sprememba virtualnega zasuka in pomika $\delta\theta_3$ in δr_{4x} , če se zgodi virtualni zasuk $\delta\theta_2$.

Primer 4.10: Za štiri zgibni mehanizem zapišite virtualna zasuka $\delta\theta_3$ in $\delta\theta_4$ glede na virtualni zasuk $\delta\theta_2$. Štiri zgibni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo. Neodvisna koordinata je tako θ_2 , odvisni koordinati pa sta θ_3 in θ_4 .



Slika 4.15: Virtualni zasuki štiri zgibnega mehanizma

Postopamo identično, kot v prejšnjem primeru. Za opis gibanja točke C uporabimo vektorski pristop. Seštejemo vse vektorje od izhodišča O skozi točki A in B do točke C.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} \\ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \cos \theta_3 \\ l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_4 \cos \theta_4 \\ l_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} / \delta \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta\theta_3 - l_4 \sin \theta_4 \delta\theta_4 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \delta\theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Iz zgornje enačbe izrazimo na levi strani virtualna zasuka $\delta\theta_3$ in $\delta\theta_4$ na desni pa virtualni zasuk $\delta\theta_2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_3 \sin \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \delta\theta_4 \\ l_3 \cos \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_3 \sin \theta_3 & l_4 \sin \theta_4 \\ l_3 \cos \theta_3 & l_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Poiščemo inverzno matriko 2x2 na levi strani in jo pomnožimo na obeh stran zgornje enačbe. S tem pridemo do končne rešitve.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \begin{bmatrix} l_4 \cos \theta_4 & -l_4 \sin \theta_4 \\ -l_3 \cos \theta_3 & l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \\ -l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \begin{bmatrix} l_2 l_4 \sin(\theta_4 - \theta_2) \\ l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Zgornja enačba tako opisuje kolikšna je sprememba virtualnega zasuka $\delta\theta_3$ in $\delta\theta_4$, če se zgodi virtualni zasuk $\delta\theta_2$.

4.8 Virtualno delo in posplošene sile

Koncept virtualnega dela je v analitični mehaniki pomembno orodje. Sile in momente ne moremo med sabo seštevati, saj predstavljajo različne fizikalne veličine. Če pa sile in momente pretvorimo v delo, v tem konkretnem primeru v virtualno delo, pa lahko njihovo opravljeno virtualno delo enostavno med sabo seštejemo. Virtualno delo zapišemo kot δW .

Virtualno delo sile je definirano kot skalarni produkt vektorja sile in virtualnega pomika prijemališča sile.

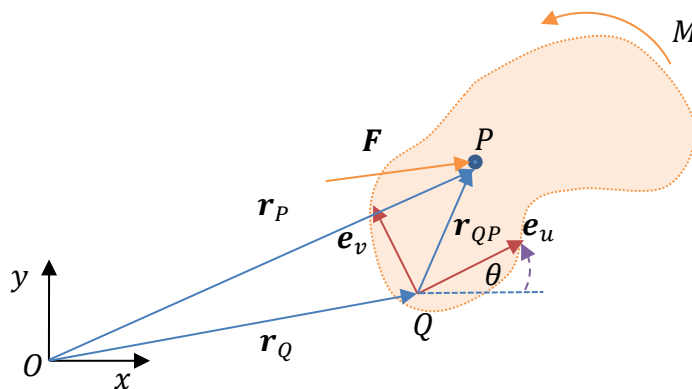
Virtualno delo momenta je definirano kot skalarni produkt momenta in virtualnega zasuka telesa.

Tako lahko virtualno delo sil in momentov zapišemo, kot je prikazano spodaj, kjer je \mathbf{F} vektor rezultante zunanjih sil in M vsota vseh zunanjih momentov.

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r} + M \delta \theta \quad (4.29)$$

4.8.1 Posplošene sile

Z vpeljavo virtualnega dela pridemo tudi do izraza posplošene sile. Posplošene sile predstavlja izraz, ki zajema vse zunanje sile in momente zapisane v posplošenih koordinatah. Na spodnji sliki imamo prikazan vpliv zunanje sile in zunanjega momenta na prosto gibajoče se telo v ravnini.



Slika 4.16: Virtualno delo zunanje sile in zunanjega momenta na prosto gibajoče se telo

Zapišimo virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov.

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r}_P + M \delta \theta \quad (4.30)$$

Izrazimo virtualni pomik točke P na katero deluje sila \mathbf{F} s pomočjo gibljive baze.

$$\delta \mathbf{r}_P = \delta \mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta \theta \quad (4.31)$$

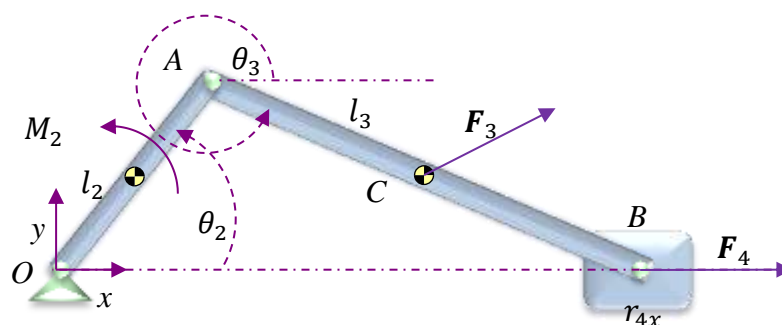
Zgornji zapis tako vstavimo v enačbo (4.30) in dobimo spodnji zapis.

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}^T \left(\delta \mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta \theta \right) + M \delta \theta \\ \delta W &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r}_Q + \left(\mathbf{F}^T \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + M \right) \delta \theta \\ \delta W &= \mathbf{Q}_R \delta \mathbf{r}_Q + Q_\theta \delta \theta \end{aligned} \quad (4.32)$$

V zgornji enačbi \mathbf{Q}_R predstavlja vektor posplošenih zunanjih sil in Q_θ predstavlja zunanje vplive, ki so povezani z rotacijo telesa. Ker po navadi zapišemo pozicije vektorjev zunanjih sil v posplošenih koordinatah, lahko za prosto telo izberemo koordinate $q_1 = x$, $q_2 = y$ in $q_3 = \theta$. Tako dobimo naslednji izraz kjer je \mathbf{Q} vektor vseh posplošenih zunanjih sil vključno z zunanji momenti in \mathbf{q} je vektor vseh posplošenih koordinat.

$$\begin{aligned} \delta W &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 \\ \delta W &= \mathbf{Q} \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Primer 4.11: Zapišite virtualno delo zunanjih sil in momentov, ki delujejo na batni mehanizem glede na virtualni zasuk $\delta\theta_2$.



Slika 4.17: Virtualno delo zunanjih sil in momentov na batnem mehanizmu

Najprej zapišemo virtualno delo posameznih zunanjih vplivov za posamezno telo in jih med sabo seštejemo.

$$\delta W = M_2 \delta\theta_2 + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_C + F_4 \delta r_{4x} \quad (4.34)$$

Za tem potrebujemo virtualni pomik za vektor \mathbf{r}_C .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta\theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Virtualni pomik vstavimo v enačbo (4.34).

$$\begin{aligned} \delta W &= M_2 \delta\theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \delta\theta_3 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 \\ &+ F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \delta\theta_3 + F_4 \delta r_{4x} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pridobljeno enačbo zapišemo v matrični obliki iz katere izpostavimo $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ in δr_{4x} .

$$\delta W = \begin{bmatrix} M_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\ -F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

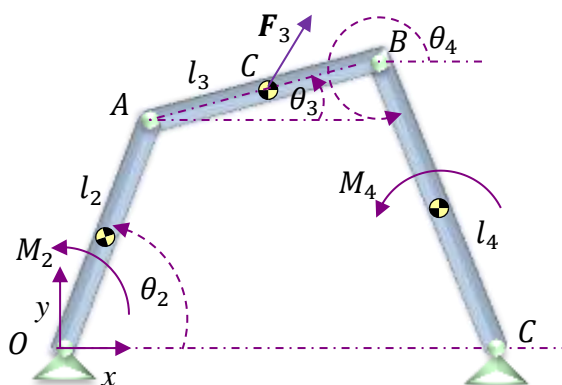
Trenutni zapis virtualnega dela še ni ustrezen, saj še vsebuje odvisne koordinate. Če želimo zapisati virtualno delo zunanjih vplivov glede na neodvisno koordinato $\delta\theta_2$, moramo $\delta\theta_3$ in δr_{4x} zapisati v odvisnosti od $\delta\theta_2$. To smo že storili v primeru 4.9 kar uporabimo tudi v tem primeru. Tako dobimo končen izraz za virtualno delo izraženo z virtualnim pomikom neodvisne koordinate $\delta\theta_2$.

$$\delta W = \begin{bmatrix} M_2 - F_{3x}l_2 \sin \theta_2 + F_{3y}l_2 \cos \theta_2 \\ -F_{3x}(l_3/2) \sin \theta_3 + F_{3y}(l_3/2) \cos \theta_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -l_2 \cos \theta_2 / l_3 \cos \theta_3 \\ -l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) / l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \delta \theta_2 \quad (4.38)$$

Skalarni produkt obeh matrik lahko zapišemo splošno, kjer Q predstavlja vse posplošene zunanje sile, ki vključujejo tudi moment.

$$\delta W = Q \delta \theta_2 \quad (4.39)$$

Primer 4.12: Zapišite virtualno delo zunanjih sil in momentov, ki delujejo na štiri zgibni mehanizem glede na virtualni zasuk $\delta \theta_2$.



Slika 4.18: Virtualno delo zunanjih sil in momentov na štiri zgibnem mehanizmu

Najprej zapišemo virtualno delo posameznih zunanjih vplivov za posamezno telo in jih med sabo seštejemo.

$$\delta W = M_2 \delta \theta_2 + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_C + M_4 \delta \theta_4 \quad (4.40)$$

Za tem potrebujemo virtualni pomik za vektor \mathbf{r}_C , ki pa je v konkretnem primeru kar enak virtualnemu pomiku v prejšnjem primeru.

$$\delta \mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Virtualni pomik $\delta \mathbf{r}_C$ vstavimo v enačbo (4.40).

$$\delta W = M_2 \delta \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 + M_4 \delta \theta_4 \quad (4.42)$$

Trenutni zapis virtualnega dela še ni ustrezen, saj vsebuje še odvisne koordinate. Če želimo zapisati virtualno delo zunanjih vplivov glede na neodvisno koordinato $\delta \theta_2$, moramo $\delta \theta_3$ in $\delta \theta_4$ zapisati v odvisnosti od $\delta \theta_2$. To smo že storili v primeru 4.10 kar uporabimo tudi v tem primeru. Tako dobimo končen izraz za virtualno delo izraženo z virtualnim pomikom neodvisne koordinate $\delta \theta_2$.

$$\begin{aligned}
\delta W = & M_2 \delta \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2 \\
& + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2 \\
& + M_4 \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2
\end{aligned} \quad (4.43)$$

Virtualni pomik $\delta \theta_2$ lahko izrazimo in tako pridemo bo posplošenih zunanjih sil Q .

$$\begin{aligned}
\delta W = & [M_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\
& + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + M_4 \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}] \delta \theta_2 \\
\delta W = & Q \delta \theta_2
\end{aligned} \quad (4.44)$$

4.8.2 Virtualno delo konservativnih in nekonservativnih sil

Določene sile, ki se pojavljajo v dinamičnih sistemih se ohranjajo, določene pa ne. Silam, ki se ohranjajo pravimo konservativne sile. Silam, ki se ne ohranjajo pa pravimo nekonservativne sile. Med konservativne sile spadata gravitacijska sila ter sila, ki se pojavi v vzmeti. Obe sili se ohranjata. Gravitacijska sila je konstanta po celotnem opazovanem prostoru v katerem se giblje dinamični sistem. Sila v vzmeti pa se ohranja tako dolgo, dokler se sila ne povrne nazaj v začetno ravnovesno stanje. Virtualno delo gravitacijske sile prikazuje spodnja enačba kjer je predznak negativen, saj gravitacija deluje v obratni smeri od predvidene y koordinate.

$$\delta W = -mg \delta y \quad (4.45)$$

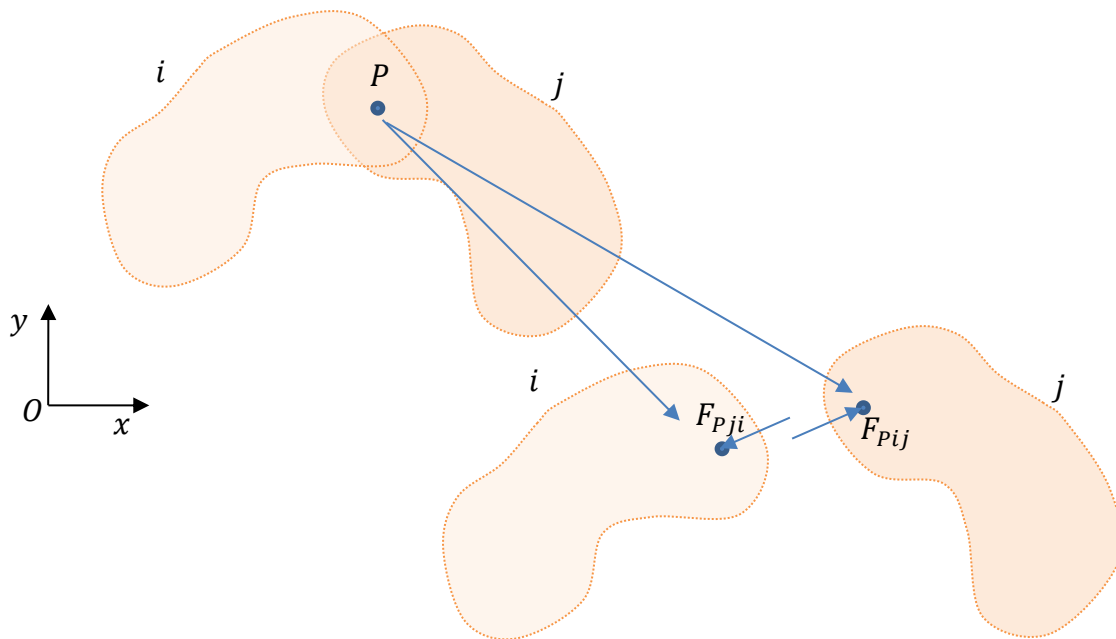
Virtualno delo sile v vzmeti pa prikazuje spodnja enačba. Virtualno delo v sili pišemo kot pozitivno. Predznak vzmeti definira raztezek, če je raztezek pozitiven, bo virtualno delo pozitivno in obratno.

$$\delta W = kx \delta x \quad (4.46)$$

Virtualno delo nekonservativnih sil smo že zapisali v prejšnjih primerih vendar jih nismo poimenovali tako. Nekonservativne sile so vse zunanje sile, zunanji momenti in momenti, generirani z motorji, ki delujejo na opazovani dinamični sistem. Virtualno delo nekonservativnih zunanjih sil zapišemo, kot prikazuje enačba (4.30).

4.8.3 Virtualno delo reakcijskih sil v podporah

Reakcijske sile, ki se pojavljajo v podporah, sledijo 3. Newtonovemu zakonu akcije in reakcije. Zato je virtualno delo reakcijskih sil v podporah vedno enako nič. Poglejmo primer rotacijskega sklepa.



Slika 4.19: Virtualno delo reakcijskih sil v podporah

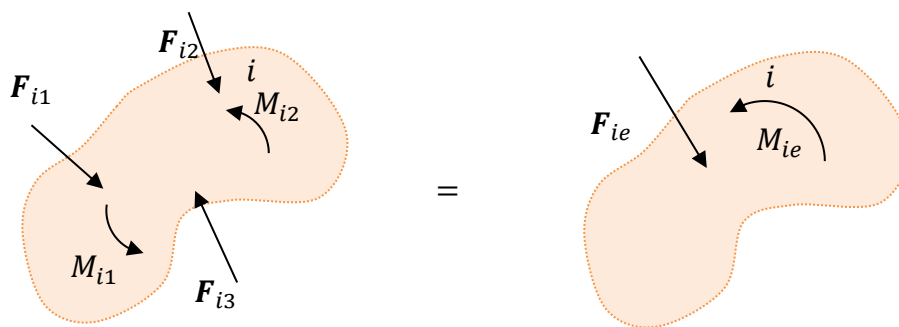
Kot lahko vidimo v točki P na telo i deluje sila F_{Pji} . Prav tako v isti točki P deluje na telo j sila F_{Pij} , ki pa je nasprotno usmerjena kot sila na telo i . Virtualno delo posameznih reakcijskih sil posameznih teles tako znaša $\delta W_i = -F_{Pji}\delta r_P$ in $\delta W_j = F_{Pij}\delta r_P$, pri čemer sta sili $F_{Pji} = F_{Pij}$. V kolikor seštejemo virtualno delo posameznih teles dobimo, da je virtualno delo enako nič.

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_j = -F_{Pji}\delta r_P + F_{Pij}\delta r_P = 0 \quad (4.47)$$

4.9 Princip uporabe virtualnega dela v statiki oz. statičnem ravnotežju

4.9.1 Virtualno delo v statiki

V nadaljevanju si bomo pogledali princip uporabe virtualnega dela v statiki oz. statičnem ravnotežju. Dostikrat se zgodi, da imamo dinamični model a nas zanima trenutni navor ali potrebna sila, ki vzdržuje dinamični sistem v statičnem ravnotežju. V takšnih primerih se princip virtualnega dela izkaže za zelo uporabnega. Na telo i naj deluje sistem zunanjih sil in sistem zunanjih momentov, kot to prikazuje slika 4.20. Ta sistem sil in momentov, ki prav tako vsebuje reakcijske sile, lahko zamenjamo z ekvivalentno silo (rezultanto) in ekvivalentnim momentom, ki predstavljata skupek vseh zunanjih sil in zunanjih momentov.



Slika 4.20: Princip uporabe virtualnega dela pri statičnem ravnotežju

Virtualno delo vseh zunanjih sil lahko zapišemo kot:

$$\delta W_z = \mathbf{F}_{i1}^T \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{i2}^T \delta \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{F}_{in}^T \delta \mathbf{r}_n + (M_{i1} + M_{i2} + \dots + M_{im}) \delta \theta_i \quad (4.48)$$

V zgornji enačbi je \mathbf{r}_n vektor prijemališča posamezne zunanje sile. Virtualno delo zunanjih sil lahko zapišemo tudi kot vsoto.

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^T \delta \mathbf{r}_j + \left(\sum_{j=1}^m M_{ij} \right) \delta \theta_i \quad (4.49)$$

Zapišimo sedaj virtualno delo ekvivalentne zunanje sile in ekvivalentnega zunanje momenta.

$$\delta W_e = \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i \quad (4.50)$$

Virtualno delo vseh zunanjih sil in momentov mora tako biti enako virtualnemu delu ekvivalentne zunanje sile in ekvivalentnemu zunanjemu momentu $\delta W_z = \delta W_e$.

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^T \delta \mathbf{r}_j + \left(\sum_{j=1}^m M_{ij} \right) \delta \theta_i = \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i \quad (4.51)$$

V kolikor je telo v statičnem ravnotežju po tem velja naslednji pogoj.

$$\mathbf{F}_{ie}^T = 0, M_{ie} = 0 \quad (4.52)$$

Prav tako velja pogoj:

$$\mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e = 0, M_{ie} \delta \theta_i = 0 \quad (4.53)$$

Tukaj je potrebno poudariti, da virtualni pomik in virtualni zasuk ne moreta biti enaka nič, saj sta po definiciji oba možna in skladna z omejitvami. S tem pridemo do končne ugotovitve, da je virtualno delo zunanjih sil in momentov pri statičnem ravnotežju enako nič.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i &= 0 \\ \delta W_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.9.2 Pridobivanje ravnotežnih enačb

Naj bo sistem n_b togih teles podvržen sistemu zunanjih sil in momentov ter zapisan tako, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_2^T \dots \mathbf{F}_n^T]^T, \mathbf{M} = [M_1 M_2 \dots M_m]^T \quad (4.55)$$

Virtualno delo sistema zunanjih sil in momentov tako zapišemo kot:

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j \quad (4.56)$$

Pri tem lahko pomik \mathbf{r}_j in θ_j zapišemo v odvisnosti od posplošenih neodvisnih koordinat \mathbf{q}_i .

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}_i), \theta_j = \theta_j(\mathbf{q}_i) \quad (4.57)$$

Virtualni pomik in zasuk tako znašata:

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \delta \theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.58)$$

Z upoštevanjem zgornje enačbe dobimo iz enačbe (4.56) zapis

$$\delta W_z = \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i. \quad (4.59)$$

Tega lahko okrajšano zapišemo kot

$$\delta W_z = \mathbf{Q}_z \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.60)$$

kjer je \mathbf{Q}_z vektor posplošenih zunanjih sil. V kolikor je sistem v statičnem ravnotežju pridemo do naslednje enačbe.

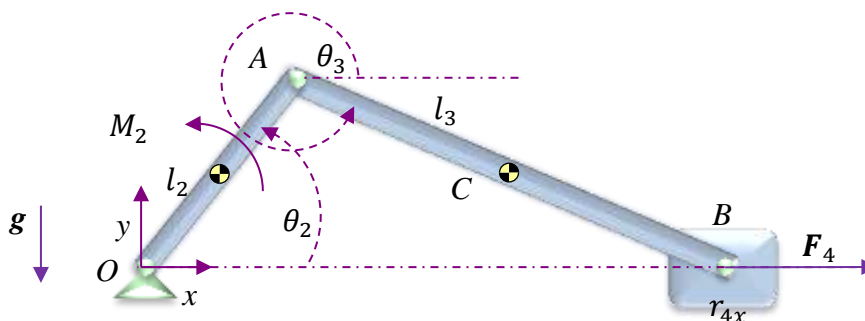
$$\delta W_z = \mathbf{Q}_z \delta \mathbf{q}_i = 0 \quad (4.61)$$

Kot smo že dejali, definicija virtualnega pomika ne dopušča, da je ta enak nič. Tako ostane edina možnost, da je \mathbf{Q}_z vektor posplošenih zunanjih sil enak nič.

$$\mathbf{Q}_z = 0 \quad (4.62)$$

V vektorju \mathbf{Q}_z je toliko ravnotežnih enačb, kolikor ima opazovani sistem prostostnih stopenj.

Primer 4.13: Za prikazan sistem na sliki 4.21 je potrebno s pomočjo virtualnega dela poiskati potreben moment M_2 , da bo sistem v statičnem ravnotežju.



Slika 4.21: Batni mehanizem v statičnem ravnotežju

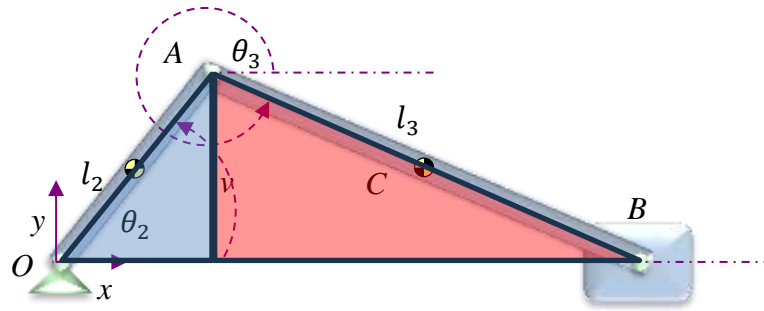
Potrebno je zapisati virtualno delo vseh zunanjih sil in momentov, kot tudi virtualno delo gravitacije. Vse to mora biti enako nič. Samo takrat bo sistem v statičnem ravnotežju.

$$\delta W_z = M_2 \delta \theta_2 - m_2 g \delta r_{2y} - m_3 g \delta r_{3y} + F_4 \delta r_{4x} = 0 \quad (4.63)$$

V zgornji enačbi je potrebno zapisati vse virtualne pomike glede na neodvisno koordinato θ_2 .

$$\begin{aligned} r_{2y} &= (l_2/2) \sin \theta_2 \rightarrow \delta r_{2y} = (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ r_{3y} &= l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \rightarrow \delta r_{3y} = l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \\ r_{4x} &= l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \rightarrow \delta r_{4x} = -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Kot lahko opazimo, v zgornji enačbi še vedno nastopa odvisna koordinata θ_3 . To odpravimo s pomočjo geometrijske relacije dveh trikotnikov v batnem mehanizmu, kot to prikazuje spodnja slika.



Slika 4.22: Geometrijska relacija dveh trikotnikov znotraj batnega mehanizma

Za skupno višino v obeh pravokotnih trikotnikov lahko zapišemo naslednjo relacijo.

$$l_2 \sin \theta_2 = -l_3 \sin \theta_3 \quad (4.65)$$

To spremenimo v virtualni pomik in izrazimo $\delta\theta_3$.

$$\delta\theta_3 = -\frac{l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2}{l_3 \cos \theta_3} \quad (4.66)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.64).

$$\begin{aligned} \delta r_{2y} &= \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta\theta_2 \\ \delta r_{3y} &= l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 - \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \delta\theta_2 = \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \delta\theta_2 \\ \delta r_{4x} &= -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta\theta_2 \\ &= (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

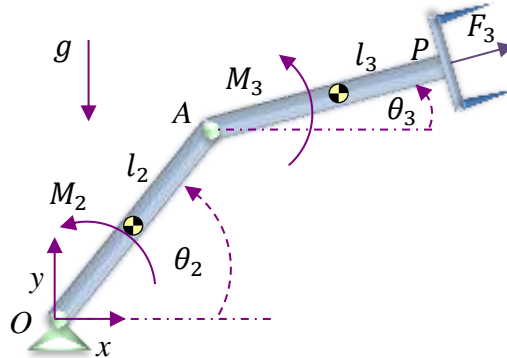
Zgornje izraze sedaj vstavimo v enačbo (4.63) in tako dobimo končno enačbo.

$$\begin{aligned} &\left[M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \right] \delta\theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Končni izraz lahko zapišemo kot $\delta W_z = Q_z \delta\theta_2 = 0$, kjer je Q_z izraz posplošenih zunanjih sil. Ta izraz bo enak nič samo v primeru, če bo Q_z enak nič, saj virtualni zasuk ne more biti enak nič. Iz Q_z lahko sedaj izrazimo potreben moment na motorju, da bo batni mehanizem v statičnem ravnotežju.

$$M_2 = m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 + m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} - F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \quad (4.69)$$

Primer 4.14: Za dvoosni manipulator prikazan na sliki 4.23, ki je v statičnem ravnotežju, poiščite potrebna momenta na motorju, ki vzdržujeta ravnotežje.



Slika 4.23: Dvoosni mehanizem v statičnem ravnotežju

Zapišimo virtualno delo sistema, ki zajema zunanje sile in momente ter vpliv gravitacije.

$$\delta W_z = M_2 \delta \theta_2 - m_2 g \delta r_{2y} + M_3 \delta \theta_3 - m_3 g \delta r_{3y} + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_{3P} = 0 \quad (4.70)$$

V zgornji enačbi je potrebno zapisati vse virtualne pomike glede na neodvisni koordinati θ_2 in θ_3 .

$$\begin{aligned} r_{2y} &= (l_2/2) \sin \theta_2 \rightarrow \delta r_{2y} = (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ r_{3y} &= l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \rightarrow \delta r_{3y} = l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \\ \mathbf{r}_{P3} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_{P3} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Pridobljene virtualne pomike vstavimo v enačbo (4.70).

$$\begin{aligned} \delta W_z &= M_2 \delta \theta_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3 \\ &\quad - m_3 g (l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3) \\ &\quad + \mathbf{F}_3^T \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Iz zgornje enačbe izpostavimo vse izraze, ki so vezani na virtualni zasuk $\delta \theta_2$ in $\delta \theta_3$ ločeno in tako pridemo do končne enačbe.

$$\begin{aligned} \delta W_z &= [M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\ &\quad + F_{3y} l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 \\ &\quad + [M_3 - m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Ker gre za statično ravnotežje, morata biti izraza v oklepajih enaka nič, saj virtualna zasuka po definiciji ne moreta biti enaka nič. Iz tega dobimo izraz za potreben moment na posameznem motorju, da bo dvoosni manipulator v statičnem ravnotežju.

$$\begin{aligned} M_2 &= m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 + m_3 g l_2 \cos \theta_2 + F_{3x} l_2 \sin \theta_2 - F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\ M_3 &= m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 + F_{3x} l_3 \sin \theta_3 - F_{3y} l_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.74)$$

4.10 Princip uporabe virtualnega dela v dinamiki

4.10.1 Virtualno delo v dinamiki

Uporaba virtualnega dela v dinamiki temelji na D'Alambertovem principu. Vpliv zunanjih sil in zunanjih momentov na sistem mora biti enak vztrajnostnim silam in vztrajnostnim momentom opazovanega sistema. To je osnova s pomočjo katere izpeljemo uporabo principa virtualnega dela v dinamiki. D'Alambertov princip zapišemo, kot prikazujeta spodnji enačbi.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i &= 0 \\ M_i - J_i \ddot{\theta}_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

V kolikor želimo seštevati sile in momente moramo le te spremeniti v virtualno delo. To storimo tako, da zgornjo enačbo s silami pomnožimo z virtualnim pomikom ter zgornjo enačbo z momenti pomnožimo z virtualnim zasukom.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i &= 0 / \delta \mathbf{r}_i \\ M_i - J_i \ddot{\theta}_i &= 0 / \delta \theta_i \end{aligned} \quad (4.76)$$

S tem spremenimo sile in momente v virtualno delo in jih lahko med sabo preprosto seštejemo.

$$(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \delta \mathbf{r}_i + (M_i - J_i \ddot{\theta}_i) \delta \theta_i = 0 \quad (4.77)$$

Virtualno delo razdelimo na delo, ki ga opravijo zunanje sile in zunanji momenti in na virtualno delo, ki ga opravijo vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti.

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i + M_i \delta \theta_i) - (m_i \mathbf{a}_i \delta \mathbf{r}_i + J_i \ddot{\theta}_i \delta \theta_i) &= 0 \\ \delta W_z &= \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i + M_i \delta \theta_i \\ \delta W_v &= m_i \mathbf{a}_i \delta \mathbf{r}_i + J_i \ddot{\theta}_i \delta \theta_i \\ \delta W_z - \delta W_v &= 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

V kolikor imamo v sistemu n teles zgornjo enačbo preuredimo.

$$\sum_{i=1}^n \delta W_{zi} - \sum_{i=1}^n \delta W_{vi} = 0 \quad (4.79)$$

Iz enačbe (4.79) ugotovimo, da je virtualno delo zunanjih sil, ki delujejo na sistem teles enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil obravnavanih teles.

4.10.2 Pridobivanje gibalnih oz. dinamičnih enačb

Naj bo sistem n_b togih teles podvržen sistemu zunanjih sil in momentov zapisan tako, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_2^T \dots \mathbf{F}_n^T]^T, \mathbf{M} = [M_1 M_2 \dots M_m]^T \quad (4.80)$$

Virtualno delo sistema zunanjih sil in momentov tako zapišemo kot:

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j \quad (4.81)$$

Na sistem n_b togih teles delujejo tudi vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti, ki jih zapišemo z virtualnim delom, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\delta W_v = \sum_j^{n_b} (m_j \mathbf{a}_j \delta \mathbf{r}_j + J_j \ddot{\theta}_j \delta \theta_j) \quad (4.82)$$

Pri tem lahko pomik \mathbf{r}_j in θ_j zapišemo v odvisnosti od posplošenih neodvisnih koordinat \mathbf{q}_i .

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}_i), \theta_j = \theta_j(\mathbf{q}_i) \quad (4.83)$$

Virtualni pomik in zasuk tako znašata:

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \delta \theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.84)$$

Z upoštevanjem zgornje enačbe tako dobimo iz enačb (4.81) in (4.82) enačbo (4.85) za virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov ter vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i \\ \delta W_v &= \sum_j^{n_b} \left(m_j \mathbf{a}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + J_j \ddot{\theta}_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (4.85)$$

Izraza iz zgornje enačbe lahko krajše zapišemo s pomočjo vektorja posplošenih zunanjih sil \mathbf{Q}_z in vektorja posplošenih vztrajnostnih sil \mathbf{Q}_v .

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \mathbf{Q}_z^T \delta \mathbf{q}_i \\ \delta W_v &= \mathbf{Q}_v^T \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (4.86)$$

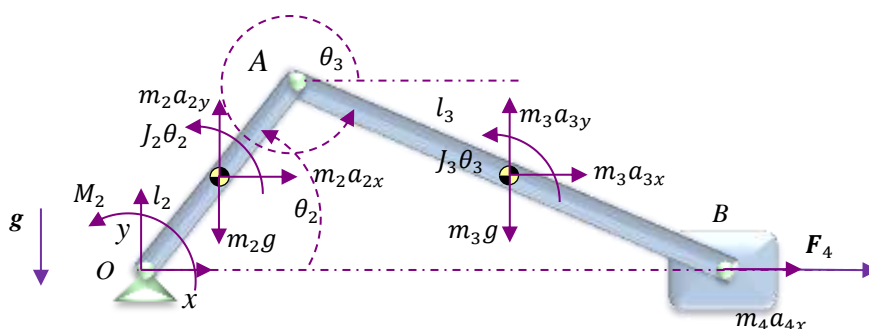
Ker mora biti virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil lahko končen izraz zapišemo, kot to prikazuje spodnja enačba.

$$\delta W_z - \delta W_v = (\mathbf{Q}_z^T - \mathbf{Q}_v^T) \delta \mathbf{q}_i = 0 \quad (4.87)$$

Virtualni pomik po definiciji ne more biti enak nič zato sledi, da je vektor posplošenih zunanjih sil enak vektorju posplošenih vztrajnostnih sil.

$$\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_v \quad (4.88)$$

Primer 4.15: Za batni mehanizem na sliki 4.24, na katerega delujeta zunanji moment in zunanja sila, pridobite gibalne enačbe s pomočjo virtualnega dela.



Slika 4.24: Uporaba virtualnega dela za pridobivanje gibalnih enačb batnega mehanizma

Batni mehanizem ima samo 1 prostostno stopnjo, kar pomeni, da pričakujemo samo eno gibalno enačbo, kjer je θ_2 neodvisna koordinata. Najprej je potrebno zapisati virtualno delo vseh zunanjih sil in zunanjih momentov glede na neodvisno koordinato θ_2 . To smo storili že v primeru 4.13. Enačbo (4.69) še enkrat uporabimo.

$$\delta W_z = \left[M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \right] \delta \theta_2 \quad (4.89)$$

V naslednjem koraku je potrebno zapisati virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov, ki delujejo na batni mehanizem.

$$\delta W_v = m_2 \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{r}_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 + m_3 \mathbf{a}_3^T \delta \mathbf{r}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 + m_4 a_{4x} \delta r_{4x} \quad (4.90)$$

V zgornji enačbi virtualni pomik ni izražen glede na neodvisno koordinato. Virtualne pomike zapišemo glede na neodvisno koordinato.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \\ r_{4x} &= l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \rightarrow \delta r_{4x} = -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.91)$$

V zgornjih enačbah imamo še vedno virtualno delo zapisano v odvisnih koordinatah. Spomnimo se razmerja, ki smo ga že uporabili pri primeru 4.13. To uporabimo tudi v tem primeru in tako pridobimo sledeče enačbe za virtualne pomike.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} -(l_2/2) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 + (l_2/2) \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta \theta_2 \\ (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \delta r_{4x} &= -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

Virtualne pomike izražene iz zgornje enačbe vstavimo sedaj v enačbo (4.90), kjer po preurejanju dobimo spodnjo enačbo za virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned} \delta W_v &= [-m_2 a_{2x} (l_2/2) \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} (l_2/2) \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 \\ &+ m_3 a_{3x} (-l_2 \sin \theta_2 + (l_2/2) \cos \theta_2 \tan \theta_3) + m_3 a_{3y} (l_2/2) \cos \theta_2 \\ &- J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{l_2 \cos \theta_2}{l_3 \cos \theta_3} + m_4 a_{4x} (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3)] \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

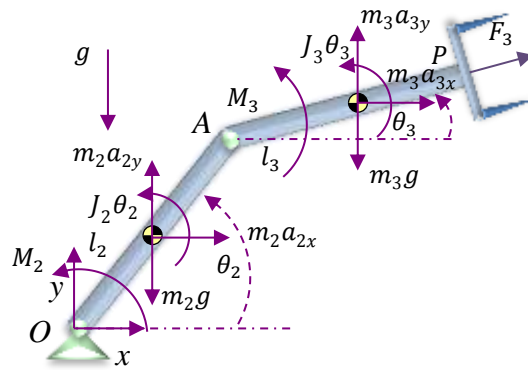
Izraz v oglatem oklepaju iz zgornje enačbe predstavlja posplošene vztrajnostne sile \mathbf{Q}_v , ki se pojavljajo na batnem mehanizmu. Sedaj je virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov v enačbi (4.89) in virtualno delo vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov v enačbi (4.93) zapisano glede na virtualno delo neodvisne koordinate $\delta \theta_2$. Tako lahko ti dve enačbi med sabo odštejemo in njuna razlika mora biti enaka nič.

$$\begin{aligned} \delta W_z - \delta W_v &= 0 \\ \mathbf{Q}_z \delta \theta_2 - \mathbf{Q}_v \delta \theta_2 &= (\mathbf{Q}_z - \mathbf{Q}_v) \delta \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ker virtualni pomik ne more biti enak nič nas to pripelje do končne gibalne enačbe, ki opisuje gibanje batnega mehanizma na katerega delujeta zunanji moment in sila.

$$\begin{aligned}
M_2 - m_2 g \left(\frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \\
= -m_2 a_{2x} \left(\frac{l_2}{2} \right) \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \left(\frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 \\
+ m_3 a_{3x} \left(-l_2 \sin \theta_2 + \left(\frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 \tan \theta_3 \right) \\
+ m_3 a_{3y} (l_2/2) \cos \theta_2 - J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{l_2 \cos \theta_2}{l_3 \cos \theta_3} \\
+ m_4 a_{4x} (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3)
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Primer 4.16: Za dinamični sistem dvoosnega manipulatorja na sliki 4.25, na katerega deluje zunanja sila in zunanja momenta motorjev, je potrebno pridobiti gibalne enačbe s pomočjo virtualnega dela.



Slika 4.25: Uporaba virtualnega dela za pridobivanje gibalnih enačb dvoosnega manipulatorja

V primeru 4.14 smo že definirali virtualno delo vseh zunanjih sil in zunanjim momentov vendar jih sedaj ne enačimo z nič, temveč z virtualnim delom vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov. Prepišemo enačbo (4.73).

$$\begin{aligned}
\delta W_z = [M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\
+ F_{3y} l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 \\
+ [M_3 - m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Zgornjo enačbo lahko poenostavimo.

$$\delta W_z = Q_{z2} \delta \theta_2 + Q_{z3} \delta \theta_3 \tag{4.97}$$

Zapišimo virtualno delo vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov dvoosnega manipulatorja.

$$\delta W_v = m_2 \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{r}_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 + m_3 \mathbf{a}_3^T \delta \mathbf{r}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 \tag{4.98}$$

V zgornji enačbi virtualni pomik ni izražen glede na neodvisni koordinati. Virtualne pomike zapišemo glede na neodvisni koordinati θ_2 in θ_3 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \\
\delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Virtualne pomike izražene iz zgornje enačbe vstavimo sedaj v enačbo (4.98), kjer po preurejanju dobimo spodnjo enačbo za virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned}
\delta W_v &= \left[-m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + m_3 a_{3y} l_2 \cos \theta_2 \right] \delta \theta_2 \\
&\quad + \left[-m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 \right] \delta \theta_3
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Če zgornjo enačbo poenostavimo, dobimo preprosti izraz.

$$\delta W_v = Q_{v2} \delta \theta_2 + Q_{v3} \delta \theta_3 \tag{4.101}$$

Iz definicije sledi, da mora biti virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil. Tako lahko enačimo enačbi (4.96) in (4.101).

$$\begin{aligned}
\delta W_z &= \delta W_v \\
Q_{z2} \delta \theta_2 + Q_{z3} \delta \theta_3 &= Q_{v2} \delta \theta_2 + Q_{v3} \delta \theta_3 \\
(Q_{z2} - Q_{v2}) \delta \theta_2 + (Q_{z3} - Q_{v3}) \delta \theta_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Zopet velja, da virtualni pomiki ne morejo biti enaki nič. Tako je edina možnost, da sta izraza v oklepajih enaka nič oz. enaka drug drugemu. Za neodvisno spremenljivko θ_2 tako dobimo sledeči izraz.

$$\begin{aligned}
M_2 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 = \\
-m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\
+ m_3 a_{3y} l_2 \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Za neodvisno spremenljivko θ_3 pa dobimo izraz zapisan spodaj.

$$\begin{aligned}
M_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3 = \\
-m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + J_3 \ddot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{4.104}$$

4.11 Izpeljava Lagrangeeve enačbe

4.11.1 Lagrangeeva enačba

Lagrangeeva enačba je še eno močno orodje za pridobivanje gibalnih enačb opazovanega dinamičnega sistema. Z uporabo kinetične in potencialne energije s pomočjo Lagrangeeve enačbe pridobimo enako število gibalnih enačb, kot ima sistem prostostnih stopenj. Izpeljavo Lagrangeeve enačbe izpeljemo s pomočjo uporabe virtualnega dela vztrajnostne sile na togem telesu.

$$\delta W_v = \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i dV_i \quad (4.105)$$

V zgornji enačbi ρ_i predstavlja gostoto togega telesa, \mathbf{r}_i predstavlja globalno pozicijo poljubne točke na togem telesu zapisane z generaliziranimi koordinatami, dV_i pa predstavlja volumen togega telesa. Izraz $\int_{V_i} \rho_i dV_i = m_i$ predstavlja maso togega telesa. Globalno pozicijo poljubne točke \mathbf{r}_i je potrebno zapisati s pomočjo posplošenih koordinat in izraziti virtualni pomik poljubne točke glede na posplošene koordinate.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \rightarrow \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (4.106)$$

Virtualni pomik iz zgornje enačbe vstavimo v enačbo (4.105) iz katere lahko zapišemo izraz za posplošeno silo.

$$\begin{aligned} \delta W_v &= \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} dV_i \\ \delta W_v &= \mathbf{Q}_v^T \delta \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}_v &= \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} dV_i = \int_{V_i} \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \end{aligned} \quad (4.107)$$

Za izpeljavo Lagrangeeve enačbe je potrebno zapisati hitrost točke $\dot{\mathbf{r}}_i$.

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (4.108)$$

Za izpeljavo Lagrangeeve enačbe potrebujemo tudi parcialni odvod od $\dot{\mathbf{r}}_i$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.109)$$

Pravilo parcialnih odvodov omogoča, da v zadnjem členu zgornje enačbe vrstni red odvajanja parcialnih odvodov zamenjamo. Zadnji člen tako postane nič.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

To enačbo razpišemo in pogledamo vrednosti parcialnih odvodov.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.111)$$

Prvi člen na desni strani zgornje enačbe je enak nič, saj vektor \mathbf{r}_i ne vsebuje hitrosti generalizirane koordinate $\dot{\mathbf{q}}$. Drugi člen na desni pa je kar enak parcialnemu odvodu vektorja \mathbf{r}_i po posplošeni koordinati \mathbf{q} .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.112)$$

Tako pridemo do pomembne relacije parcialnih odvodov položaja in hitrosti po posplošenih koordinatah in posplošenih hitrostih.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.113)$$

Zgornjo enakost uporabimo v enačbi (4.107).

$$\mathbf{Q}_v = \int_{V_i} \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i = \int_{V_i} \rho_i \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \quad (4.114)$$

V pridobljeni enačbi še vedno nastopa pospešek. Tega se znebimo s pomočjo naslednjega odvoda.

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (4.115)$$

Iz zgornje enačbe izrazimo zadnji člen na desni strani, saj ta prestavlja vrednost znotraj integrala v enačbi (4.114) kjer nastopa pospešek $\ddot{\mathbf{r}}_i$.

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.116)$$

V zgornji enačbi sedaj uporabimo relacijo, ki smo jo izpeljali v enačbi (4.113), za zadnji člen na desni strani.

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.117)$$

V drugem členu na desni strani zgornje enačbe lahko zamenjamo vrstni red odvajanja ter v obeh členih na desni strani vstavimo vektor hitrosti $\dot{\mathbf{r}}_i$ v parcialni odvod.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \\ \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right)\end{aligned}\quad (4.118)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.114) ter zamenjamo vrstni red integriranja in odvajanja.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_v &= \int_{V_i} \rho_i \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] dV_i \\ \mathbf{Q}_v &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i \right)\end{aligned}\quad (4.119)$$

V zgornji enačbi je izraz z integralom $\int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i = T_i$ enak kinetični energiji. Iz definicije uporabe virtualnega dela v dinamiki in D'Alambertovega principa vemo, da morajo biti posplošene vztrajnostne sile enake posplošenim zunanjam silam $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_z$. Tako dobimo

naslednji izraz.

$$\mathbf{Q}_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.120)$$

Ta izraz še ni končna Lagrangeeva enačba, saj v njem potencialna energija še ne nastopa eksplicitno. Vektor zunanjih posplošenih sil vsebuje tako konservativne kot nekonservativne zunanje sile. Kot konservativne zunanje sile smo navedli, da sta to gravitacija in sila vzmeti. Sila vzmeti nas trenutno ne zanima toliko, kolikor nas zanima gravitacijska sila. Vemo, da je potencialna energija povezana z gravitacijsko silo. To zapišemo s posplošeno koordinato.

$$V_i = m_i g q \quad (4.121)$$

Zunanje posplošene sile tako razdelimo na konservativne in nekonservativne.

$$\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_{KO} + \mathbf{Q}_{NK} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.122)$$

Gravitacijsko konservativno silo dobimo, če enačbo (4.121) parcialno odvajamo glede na \mathbf{q} ter dodamo negativni predznak, saj v večini primerov gravitacijska sila deluje v nasprotno smer od postavitve koordinatnega sistema.

$$\mathbf{Q}_{KO} = - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.123)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.122) in po preurejanju dobimo sledečo enačbo.

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{Q}_{NK} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \mathbf{Q}_{NK} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T_i - V_i)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial (T_i - V_i)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{aligned} \quad (4.124)$$

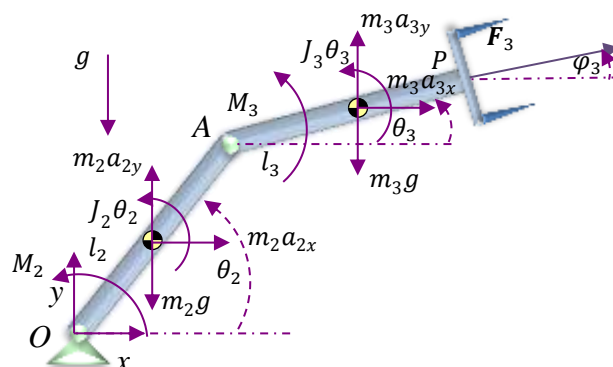
V zgornji enačbi izraz $T_i - V_i = L$ predstavlja Lagrangeano, ki je razlika med kinetično in potencialno energijo opazovanega sistema. S tem pridemo do končne Lagrangeeve enačbe, ki pravi, da je vektor generaliziranih nekonzervativnih zunanjih sil enak izrazu, ki vključuje kinetično in potencialno energijo sistema, kot je prikazano spodaj.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}_{NK} \quad (4.125)$$

Spomnimo še, da vektor nekonzervativnih posplošenih sil pridobimo s pomočjo zapisa virtualnega dela nekonzervativnih sil zapisanega z virtualnim pomikom po posplošeni koordinati \mathbf{q} .

$$\delta W_{NK} = \mathbf{Q}_{NK}^T \delta \mathbf{q} \quad (4.126)$$

Primer 4.17: Na primeru dvoosnega manipulatorja, na katerega delujejo zunanja sila in zunanja momenta, uporabite Lagrangeovo metodo za pridobivanje gibalnih enačb opazovanega sistema.



Slika 4.26: Dvoosni manipulator in Lagrangeova enačba

Pri Lagrangeovi metodi potrebujemo kinetično in potencialno energijo opazovanega sistema. Kinetična energija posameznega elementa je tako translacijska kot rotacijska energija.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{r}}_3^T \dot{\mathbf{r}}_3 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (4.127)$$

Potlej zapišemo potencialno energijo sistema.

$$V = m_2 g r_{2y} + m_3 g r_{3y} \quad (4.128)$$

Zapišemo virtualno delo zunanjih nekonservativnih sil in momentov.

$$\delta W_{NK} = M_2 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3 + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_P \quad (4.129)$$

Preden vstavimo vse te izraze v Lagrangeovo enačbo, je te izraze potrebno razpisati za posamezne vektorje pozicije $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, r_{2y}, r_{3y}, \delta \mathbf{r}_P$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} (l_2/2) \cos \theta_2 \\ (l_2/2) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} -(l_2/2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ (l_2/2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - (l_3/2) \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_P &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.130)$$

Te izraze sedaj vstavimo v enačbe (4.127), (4.128) in (4.129). Za kinetično energijo tako dobimo sledečo enačbo.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 \left[\left(-\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right)^2 + \left(\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ &\frac{1}{2} m_3 \left[\left(-l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \right)^2 + \left(l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \right)^2 \right] + \\ &\frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (4.131)$$

Po preurejanju dobimo naslednjo enačbo za kinetično energijo.

$$T = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left[l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\theta}_3^2 + l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right] + \frac{1}{2}J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (4.132)$$

Za potencialno energijo dobimo sledečo enačbo.

$$V = m_2 g \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_3 g \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \quad (4.133)$$

Za virtualno delo nekonservativnih zunanjih sil in momentov po preurejanju dobimo enačbo prikazano spodaj.

$$\delta W_{NK} = M_2 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3 + [F_3 \cos \varphi_3 \quad F_3 \sin \varphi_3]^T \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

$$\delta W_{NK} = [M_2 - F_3 \cos \varphi_3 l_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \varphi_3 l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 + [M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_3 \sin \theta_3 + F_3 \sin \varphi_3 l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3$$

Sedaj lahko zapišemo Lagrangeano $L = T - V$.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left[l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\theta}_3^2 + l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right] + \frac{1}{2}J_3 \dot{\theta}_3^2 - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - m_3 g \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \quad (4.135)$$

Enačbi (4.135) in (4.134) vstavimo v enačbo (4.125). Ker imamo sistem z dvema prostostnima stopnjama, imamo dve neodvisni koordinati θ_2 in θ_3 . Tako je vektor posplošenih koordinat enak $\mathbf{q} = [\theta_2 \ \theta_3]^T$. Lagrangeovo enačbo bomo tako dvakrat obravnavali za vsako neodvisno spremenljivko posebej. Najprej uporabimo Lagrangeovo enačbo za neodvisno spremenljivko θ_2 . Lagrangeovo enačbo tako zapišemo, kot prikazuje spodnja enačba.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = Q_{NK}(\theta_2) \quad (4.136)$$

Najprej je potrebno poiskati parcialni odvod Lagrangeane po kotni hitrosti $\dot{\theta}_2$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2 + J_2 \dot{\theta}_2 + m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.137)$$

Po tem izvedemo časovni odvod zgornje enačbe.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \left(m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + J_2 + m_3 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (4.138)$$

Nazadnje izvedemo še parcialni odvod Lagrangeane po zasuku θ_2 .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.139)$$

Sedaj izraze iz (4.139), (4.138) in del enačbe (4.134) za θ_2 vstavimo v enačbo (4.136). S tem

pridobimo prvo gibalno enačbo našega sistema.

$$\begin{aligned} & \left(m_2 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 + J_2 + m_3 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 \\ & - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 + \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + m_3 g l_2 \cos \theta_2 = \\ & M_2 - F_3 \cos \varphi_3 l_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \varphi_3 l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.140)$$

Sedaj ponovimo celoten postopek odvajanja s parcialnimi in časovnimi odvodi za drugo neodvisno spremenljivko θ_3 .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_3} \right) = Q_{NK}(\theta_3) \quad (4.141)$$

Najprej je potrebno poiskati parcialni odvod Lagrangeane po kotni hitrosti $\dot{\theta}_3$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 \dot{\theta}_3 + J_3 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \quad (4.142)$$

Po tem izvedemo časovni odvod zgornje enačbe.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 \ddot{\theta}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 - \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.143)$$

Nazadnje izvedemo še parcialni odvod Lagrangeane po zasuku θ_3 .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \quad (4.144)$$

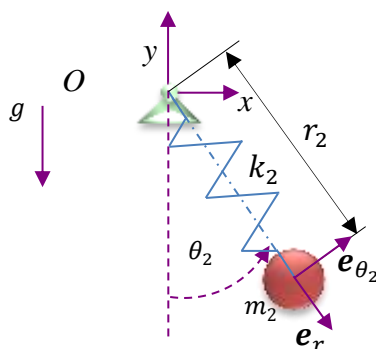
Sedaj izraze iz (4.144), (4.143) in del enačbe (4.134) za θ_3 vstavimo v enačbo (4.141). S tem pridobimo drugo gibalno enačbo našega sistema in tako pridobimo obe gibalni enačbi, ki opišeta dinamični odziv dvoosnega manipulatorja.

$$\begin{aligned} & \left(m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + J_3 \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 \\ & - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_2 - \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \\ & = M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_3 \sin \theta_3 + F_3 \sin \varphi_3 l_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.145)$$

4.11.2 Upoštevanje sile vzmeti pri Lagrangeevi metodi

V poglavju 4.8.2 smo definirali konservativne in neconservativne sile. Pri tem smo dejali, da sila vzmeti spada pod konservativne sile tako kot sila gravitacije. Kot takšno jo pri Lagrangeevi metodi vključimo k potencialni energiji. Poglejmo si primer.

Primer 4.18: Za vzmetno nihalo z vzmetno konstanto k_2 na sliki 4.27 zapišite gibalne enačbe sistema z uporabo Lagrangeeve metode.



Slika 4.27: Vzmetno nihalo in Lagrangeeva metoda

Sistem ima dve prostostni stopnji kar pomeni, da bosta za opis sistema potrebni dve gibalni enačbi. Prav tako potrebujemo dve posplošeni koordinati. Podobno, kot v primeru 4.5, tudi tukaj izbira x in y koordinate ni ustrezna, saj koordinati med sabo nista neodvisni. Za opis sistema si izberemo polarne koordinate z enotskima vektorjema e_r in e_{θ_2} . V smeri e_r imamo razdaljo r_2 . Ta opisuje pozicijo vzmeti. Za vzmet je pomembno, da vemo njeno začetno lego. S tem namenom razdaljo r_2 razdelimo na $r_2 = r_0 + r(t)$, kjer r_0 opisuje začetni raztezek vzmeti, $r(t)$ pa trenutni odmik od začetne lege. Tako je prva posplošena koordinata enaka $r(t)$, druga pa je kar zasuk vzmetnega nihala $\theta_2(t)$. To sta dve med seboj neodvisni generalizirani koordinati.

Za uporabo Lagrangeeve metode potrebujemo kinetično in potencialno energijo sistema. Kinetična energija je tako sestavljena iz translacijske in rotacijske energije.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.146)$$

V kolikor odvajamo razdaljo r_2 , potem dobimo $\dot{r}_2 = \dot{r}(t)$.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.147)$$

Potencialna energija v tem primeru vsebuje še energijo vzmeti, ki pa je odvisna samo od trenutnega raztezka.

$$V = -m_2 g (r_0 + r(t)) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k_2 r(t)^2 \quad (4.148)$$

Ker na sistem vzmetnega nihala ne deluje nobena zunanja nekonservativna sila, v tem primeru ne potrebujemo princip virtualnega dela, da bi pridobili nekonservativne sile zapisane v posplošenih koordinatah.

$$Q_{NK} = 0 \quad (4.149)$$

Nadaljujemo z zapisom Lagrangeane in uporabe Lagrangeeve enačbe.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 g (r_0 + r(t)) \cos \theta_2 - \frac{1}{2} k_2 r(t)^2 \quad (4.150)$$

Lagrangeano vstavimo v Lagrangeovo enačbo in najprej odvajamo po prvi posplošeni koordinati $r(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}(t)} &= m_2 \dot{r}(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}(t)} \right) &= m_2 \ddot{r}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial r(t)} &= m_2 (r_0 + r(t)) \dot{\theta}_2^2 + m_2 g \cos \theta_2 - k_2 r(t)\end{aligned}\quad (4.151)$$

Zgornje izraze vstavimo v Lagrangeevo enačbo in dobimo prvo gibalno enačbo.

$$m_2 \ddot{r}(t) - m_2 (r_0 + r(t)) \dot{\theta}_2^2 - m_2 g \cos \theta_2 + k_2 r(t) = 0 \quad (4.152)$$

Sedaj odvajamo še po drugi posplošeni koordinati $\theta_2(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= 2m_2 (r_0 + r(t)) \dot{r}(t) \dot{\theta}_2 + m_2 (r_0 + r(t))^2 \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 g (r_0 + r(t)) \sin \theta_2\end{aligned}\quad (4.153)$$

Zgornje izraze vstavimo v Lagrangeevo enačbo in dobimo še drugo gibalno enačbo. S tem smo popolnoma opisali vzmetno nihalo s pomočjo Lagrangeeve metode.

$$m_2 (r_0 + r(t))^2 \ddot{\theta}_2 + 2m_2 (r_0 + r(t)) \dot{r}(t) \dot{\theta}_2 + m_2 g (r_0 + r(t)) \sin \theta_2 = 0 \quad (4.154)$$

LITERATURA

- [1] Alujevič A., Harl B., *Mehanika I: Založništvo Fakultete za strojništvo*, 2005.
- [2] Bedford A., Fowler W., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 5. izdaja. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [3] Beer F. P., Johnston E. R. J., Cornwell P. J., *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*, 9. izdaja. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [4] Boltežar M., *Mehanska nihanja 1. del*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2006.
- [5] Gere J. M., Goodno B. J., *Mechanics of Materials*, 7. izdaja. Stamford: Cengage Learning, 2009.
- [6] Hibbeler R. C., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 11. izdaja. Singapore: Pearson Education, 2007.
- [7] Inman D. J., *Engineering Vibration*, 2. izdaja. Upper Saddle River: Prentice Hall International, 2001.
- [8] Kegl M., Vesenjāk M., Harl B., *Mehanika za mehatronike*. Maribor: Založništvo Fakultete za strojništvo, 2011.
- [9] Kuhelj A., *Mehanika: Dinamika*. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 1998.
- [10] Lozina Ž., *Dinamika*, Split: Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, 2005.
- [11] Meriam J. L., Kraige L. G., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 7. izdaja. Danvers: John Wiley & Sons, 2003.
- [12] Mestemacher F., *Grundkurs Technische Mechanik*. Würzburg: Spektrum Akademischer Verlag, 2008
- [13] Muršič M., *Osnove tehniške mehanike 3: Dinamika*. Ljubljana: Akademska založba, 1991.
- [14] Nelson E. W., Best C. L., McLean W. G., Potter M. C., *Engineering Mechanics Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 2010.
- [15] Richard H. A., Sander M., *Technische Mechanik Dynamik*. Wiesbaden: Viewegs Fachbücher der Technik, 2008.
- [16] Riley W. F., Sturges L. D., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 2. izdaja. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [17] Rusov L., *Mehanika III, Dinamika*. Naučna knjiga, 1979.
- [18] Saje M., *Kinematika in dinamika*. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

- 1994.
- [19] Stropnik J. *Dinamika*. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije, 1990.
 - [20] Stropnik J., *Kinetika: zapiski predavanj*, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1990.
 - [21] Šterk P., *Mehanika: Statika, dinamika in trdnost*, Novo mesto: Šolski center, 2005.
 - [22] Williams J. H. J., *Fundamentals of Applied Dynamics*, Danvers: John Wiley & Sons, 1996.
 - [23] Wohlhart K., Steffan H., *Dynamik*, Graz: Technische Universität Graz, Institut für Mechanik, 2003.
 - [24] Shabana AA., *Computational Dynamics, Second Edition*, New York: Wiley-Interscience, 2001.
 - [25] Hamill P., *A student's guide to Lagrangians and Hamiltonians*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

Stvarno kazalo

- aktivna sila, 32
- centralne glavne vztrajnostne osi telesa, 15
- Coriolisov pospešek točke, 9
- D'Alembertov princip, 55
- delo sile, 26
- deviacijski vztrajnostni moment telesa, 15
- diagram prostih teles, 56
- dinamični faktor ojačenja, 47
- disipacijska sila, 32
- dušeno lastno nihanje, 41
- dušeno nihanje, 32
- dušeno vsiljeno nihanje, 48
- dušilna konstanta, 37
- Eulerjevi koti, 10
- fiksna vektorska baza, 3
- frekvenca nihanja, 32
- gibalna količina delca, 18
- gibalne enačbe, 53
- gibanje telesa, 9
- gibanje točke, 7
- gibljava vektorska baza, 4
- glavne vztrajnostne osi telesa, 15
- harmonično vzbujanje sistema, 46
- hitrost točke, 7
- holonomne vezi, 64
- holonomni sistemi, 64
- Huygens-Steinerjevo pravilo, 14
- impulz momenta sile, 23
- impulz sile, 19
- Kartezijev koordinatni sistem, 4
- kinetična energija delca, 27
- kinetična energija telesa, 28
- koeficient kritičnega dušenja, 42
- konservativne sile, 72
- koordinate vektorja, 5
- kotna hitrost, 7
- krajevni vektor točke, 7
- kritično dušenje, 43
- krožna frekvenca vzbujanja sistema, 47
- Lagrangeeva enačba, 83
- lastna krožna frekvenca dušenega nihanja, 42
- lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja, 39
- lastna nihajna oblika, 45
- lastno nihanje, 38
- linearna dušilka, 37
- linearna vzmet, 33
- logaritemski dekrement, 43
- lokalne koordinate točke, 7
- masa telesa, 12
- masna matrika sistema, 44
- masni delec, 11
- masno središče telesa, 12
- metoda prerezov, 59
- moč, 26
- nadkritično dušenje, 42
- nadomestna togost vzmeti, 35
- nedušeno lastno nihanje, 38
- nedušeno nihanje, 32
- nedušeno vsiljeno nihanje, 47
- neholonomne vezi, 65
- neholonomni sistemi, 65
- nekonservativne sile, 72
- neodvisne koordinate, 67
- Newton-Eulerjev pristop, 54
- Newtonovi zakoni, 15
- norma vektorja, 5
- normalni pospešek točke, 9
- odvisne koordinate, 67
- osni vztrajnostni moment telesa, 13
- osnovni zakon dinamike, 16
- parametrizacija prostorskih rotacij, 10
- parametrizacija rotacijske matrike, 10
- perioda nihanja, 32
- periodično nihanje, 32
- podkritično dušenje, 43
- pospešek težišča sistema masnih delcev, 17
- pospešek točke, 8
- posplošene koordinate, 62
- posplošene sile, 69
- potencialna energija, 29
- povratna sila, 31
- pozicija telesa, 9
- prehodni odziv sistema, 50
- preslikava koordinat tenzorja, 10
- preslikava koordinat vektorja, 10
- prostornina telesa, 12

- prostostne stopnje, 54
- relativna hitrost točke, 8
- relativni pospešek točke, 9
- rheonomne vezi, 64
- rotacijska matrika, 10
- rotacijski psevdovektor, 10
- sistem masnih delcev, 16
- skalarni produkt, 5
- skleronomne vezi, 64
- splošni zakoni dinamike, 18
- stacionarni odziv sistema, 50
- sunek momenta sile, 23
- sunek sile, 19
- tangencialni pospešek točke, 9
- telo fiksne mase, 12
- telo spremenljive mase, 21
- težišče sistema masnih delcev, 17
- težišče telesa, 12
- togost vzmeti, 33
- togostna matrika sistema, 44
- torzijska togost vzmeti, 33
- vektorski produkt, 6
- virtualni pomik, 66
- virtualno delo, 66
- vrtilna količina delca, 22
- vrtilna količina telesa, 23
- vzbujanje sistema, 46
- vzporedna vezava vzmeti, 35
- vztrajnostni tenzor telesa, 15
- zakon akcije in reakcije, 16
- zakon o ohranitvi gibalne količine delca, 19
- zakon o spremembi gibalne količine delca, 19
- zakon o spremembi gibalne količine telesa, 20
- zakon o spremembi kinetične energije delca, 27
- zakon o spremembi kinetične energije telesa, 28
- zakon o spremembi vrtilne količine delca, 23
- zakon o spremembi vrtilne količine telesa, 24, 25
- zakon vztrajnosti, 16
- zaporedna vezava vzmeti, 36
- zasuk telesa, 9
- zvezno telo končnih dimenzij, 17

DINAMIKA MASNIH SISTEMOV

BOŠTJAN HARL, MARKO KEGL, TIMI KARNER

Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, Slovenija
bostjan.harl@um.si, marko.kegl@um.si, timi.karner@um.si

Učbenik obravnava dinamiko masnih sistemov togih teles. V okviru kinematike je prikazan opis prostorskega gibanja v različnih koordinatnih sistemih, predstavljena je rotacijska matrika in njena parametrizacija ter Eulerjevi koti. Temu sledi dinamika in prikaz zakona o gibalni in vrtilni količini togega telesa. V okviru mehanskih nihanj so obravnavana lastna in vsiljena nihanja sistemov z eno in več prostostnimi stopnjami. Učbenik zaključuje področje analitične mehanike, ki vsebuje prikaz generaliziranih koordinat, virtualnega dela in generaliziranih sil. Predstavljeni so Newton-Eulerjev, Lagrangev in Hamiltonov pristop za tvorbo gibalnih enačb sistemov in njihovo numerično reševanje.

Ključne besede:
togo telo, kinematika,
dinamika,
mehanska nihanja,
analitična mehanika,
virtualno delo,
Lagrangev pristop



Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo



Dinamika masnih sistemov