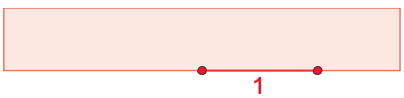
Konstrukcije z označenim ravnilom

Tadej Starčič

V osnovni šoli se srečamo s klasičnimi konstrukcijskimi nalogami, pri katerih imamo na voljo šestilo in neoznačeno ravnilo, le-te so popularne vse od časov Evklida[2]. V tem sestavku se bomo ukvarjali z nekoliko drugačnimi konstrukcijami. Uporabljali bomo zgolj posebno ravnilo, ki ima, za razliko od neoznačenega, dve oznaki na razdalji 1 enote. Rečemo mu *označeno ravnilo* (slika 1). Dodajmo, da ga je redno uporabljal že Arhimed[3].



SLIKA 1.
Označeno ravnilo.

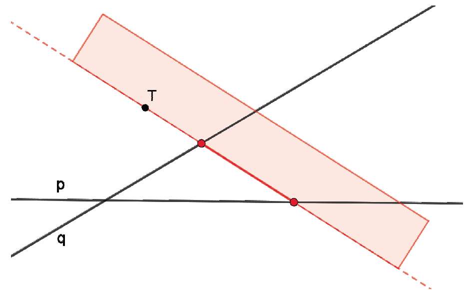
Dodatno je pri konstrukcijah z označenim ravnilom dovoljeno drsenje oziroma vrtenje roba ravnila ob fiksni točki, vse dokler njegovi oznaki ne pristaneta na dveh vnaprej izbranih objektih. Prav to omogoča nove možnosti konstruiranja (slika 2). Grki so te konstrukcije imenovali *neusis*, zapisano po grško kot $\nu\varepsilon\upsilon\sigma\iota\zeta$, kar po slovensko pomeni »mejiti« ali »vstaviti«.

Lotimo se sedaj treh osnovnih konstrukcij.

Naloga 1

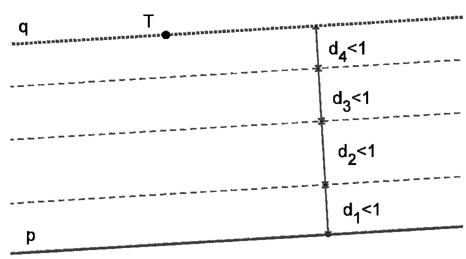
K dani premici p konstruirajte vzporednico skozi dano točko T.

Dovolj je obravnavati primer, ko je točka od premice



SLIKA 2.
Namestitev ravnila ob dani točki T in z oznakama na danih premicah p in q.

oddaljena manj od 1, saj na splošno konstrukcijo enostavno razdelimo na več takih podprimerov (slika 3). Idejo za konstrukcijo dobimo v Talesovem[4] izreku o sorazmerjih, iz katerega sledi, da sta na sliki 4 premici p in q vzporedni natanko tedaj, ko sta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle TBD$ podobna. Torej, pri dani točki T in premici p najprej namestimo ravnilo tako, da ena oznaka sovpade s T, druga oznaka pa je na premici p in določa točko A; velja $|TA| = 1$. Potem na premici skozi A in T označimo točko B tako, da je $|AB| = 1$. Na enak način konstruiramo še C in D tako,



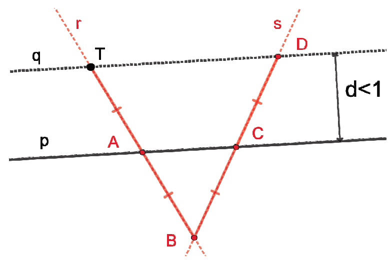
SLIKA 3.
Konstrukcija vzporednice v primeru oddaljenosti točke od premice $d \geqslant 1$.

[2]Evklid (365 p.n.š - okrog 275 p.n.š) je bil starogrški matematik; z znamenito knjigo Elementi je postavil temelje geometrije.

[3]Arhimed (okrog 287 p.n.š – okrog 212 p.n.š) je bil starogrški matematik, fizik in izumitelj; velja za enega največjih matematikov vseh časov.

[4]Tales (okrog 624 p.n.š. - okrog 546 p.n.š) je bil starogrški matematik in filozof.

da so B, C, D kolinearne in je $|BC| = |BD| = 1$. S tem dosežemo podobnost zgoraj omenjenih trikotnikov in posledično vzporednost p in q.



SLIKA 4.
Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$.

Sedaj, ko znamo konstruirati vzporednice, bomo zlahka priredili klasično konstrukcijo delitve daljice na skladne dele za primer z uporabo označenega ravnila.

Naloga 2

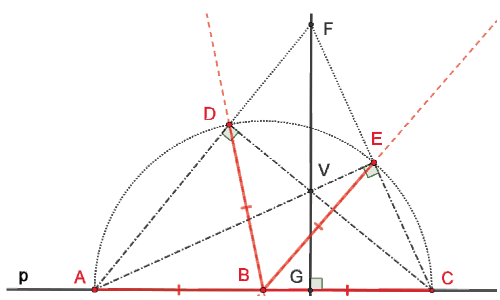
Za poljubno naravno število n razdelite dano daljico na n skladnih delov. Posebej, konstruirajte razpolovišče daljice.

Naslednja konstrukcija je bolj zvita kot prejšnji dve; glejte tudi članek [2, str. 65].

Naloga 3

Konstruirajte pravokotnico na dano premico.

Pomagali si bomo s Talesovim izrekom o obodnih kotih in dejstvom, da se višine trikotnika sekajo v višinski točki.



SLIKA 5.
Konstrukcija pravokotnice.

Najprej na dani premici p konstruiramo tri točke A, B in C, da je $|AB| = |BC| = 1$, nato pa zunaj p izberemo še točki D in E tako, da je $|BD| = |BE| = 1$ (glejte sliko 5). Daljici AE in CD naj se sekata v točki V, nosilki daljic AD in CE v točki F, presečišče nosilk FV in AC pa označimo z G. Po Talesovem izreku sta kota $\angle ADC$ in $\angle AEC$ prava, zato so CD, AE in posledično FG višine trikotnika $\triangle ACF$. Torej je FG pravokotna na p.

Velja naslednji izrek; natančen dokaz najdemo v literaturi: [1, pogl. 9] in [2, str. 66].

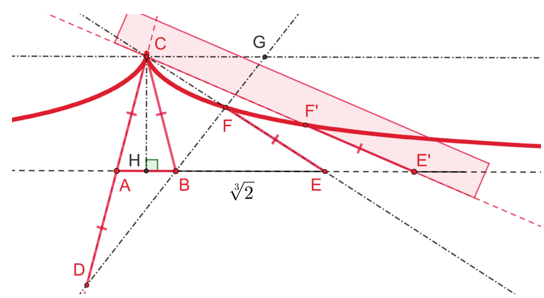
> *Z označenim ravnilom je mogoče izvesti vse konstrukcije, ki jih lahko napravimo z neoznačenim ravnilom in šestilom.*

Oglejmo si sedaj dve konstrukciji, ki v splošnem s klasičnim geometrijskim orodjem nista izvedljivi, kar je šele v 19. stoletju dokazal Pierre Wantzel[5].

Naloga 4

Konstruirajte daljico dolžine $\sqrt[3]{2}$. To je slavni starogrški problem in je bolj znan pod imenom *podvojitev kocke*: Ali je pri dani kocki mogoče konstruirati tudi kocko z dvakratnim volumnom?

Preprosto konstrukcijo $\sqrt[3]{2}$ z označenim ravnilom (slika 6) je poznal že Nikomed[6], ki je bil sploh prvi,



SLIKA 6.
Konstrukcija $\sqrt[3]{2}$.

[5] Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) je bil francoski matematik; rešil je dva znamenita in dolgo časa odprta starogrška problema.

[6] Nikomed (280 p.n.š.–210 p.n.š.) je bil starogrški matematik; znan je po iznajdbi krivulje konhoide.

ki je uporabil to konstrukcijsko tehniko. Na sliki 6 je v GeoGebri predstavljena njegova konstrukcija. Najprej z že osvojenim znanjem konstruiramo enakokraki trikotnik $\triangle ABC$, da je $|BC| = |AC| = 2|AB| = 1$, ter točko D na nosilki AC, da je $|AD| = 1$. Cilj je nato označeno ravnilo namestiti tako, da bo ena oznaka (točka E) ležala na nosilki daljice AB, druga oznaka (točka F) pa bo na nosilki BD; velja še $|EF| = 1$. Drsenje ravnila okrog fiksne točke C simuliramo tako, da rob ravnila predstavimo z nosilko CE, pri čemer lahko E prosto premikamo po nosilki AB. Povejmo, da pri tem F ob `Vklopu sledi` izriše eno vejo krivulje, ki se imenuje *konhoida*; pri koordinatnem izhodišču $(0,0)$ v C in točki $(1,0)$ v G ima ta krivulja v kartezičnih koordinatah enačbo $(y+1)^2(x^2+y^2) = y^2$. Naj se v točki G sekata vzporednica daljice AB skozi C in nosilka BD, s H pa označimo razpolovišče AB. Potem sta podobna para trikotnikov $\triangle ADB \sim \triangle CDG$ (z razmerjem stranic $1 : 2$) in $\triangle CFG \sim \triangle EFB$. Sledi $|CG| = 2|AB| = 1$ in $x := |BE| = \frac{|EF||CG|}{|CF|} = \frac{1}{|CF|}$. Uporabimo še Pitagorov[7] izrek, malo preuredimo enačbo in pokažimo $x = \sqrt[3]{2}$:

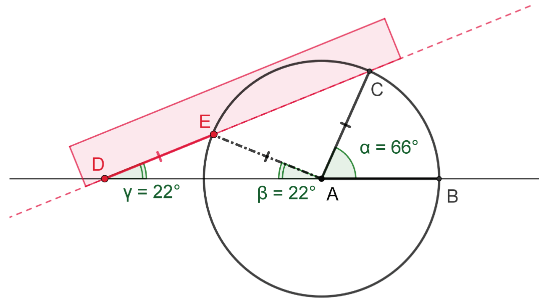
$$\begin{aligned}
\big(|CF| + |FE|\big)^2 = |CE|^2 &= |HE|^2 + |HC|^2 \\
&= \left(\tfrac{1}{2}|AB| + |BE|\right)^2 + \\
&\quad + \left(|AC|^2 - \left(\tfrac{1}{2}|AB|\right)^2\right) \\
\left(\tfrac{1}{x} + 1\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{4} + x\right)^2 + \tfrac{15}{16} \\
0 &= 2x^4 + x^3 - 4x - 2 \\
&= (2x+1)(x^3 - 2).
\end{aligned}$$

Naloga 5

Konstruirajte tretjino danega kota.

Tudi ta problem izvira iz Stare Grčije. Na sliki 7 je prikazana Arhimedova konstrukcija, kjer je poleg označenega ravnila uporabljena še enotska krožnica (t.j. z radijem 1). Dani kot $\alpha = \angle BAC$ je kar izsek enotske krožnice, označeno ravnilo pa je z robom ob točki C nameščeno tako, da ena oznaka (točka D) leži na nosilki kraka kota AB, druga oznaka (točka E) pa na krožnici. Opazimo, da sta trikotnika $\triangle DAE$ in $\triangle CEA$ enakokraka. Odtod boste bralci znali sami

[7] Pitagora (okrog 570 p.n.š–okrog 495 p.n.š) je bil starogrški matematik, filozof in politik; ustanovil je tudi svojo šolo.



SLIKA 7.
Tretjinjenje kota.

izpeljati $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$. Konstrukcijo brez krožnice najdete v knjigi [1, str. 127].

Za konec poskusite rešiti še nekaj krajših nalog. Pa veliko uspeha!

Naloga 6

Pri dani krožnici $\mathcal{K}$ in točki T konstruirajte tako točko P na $\mathcal{K}$, da bo $|TP| = 1$. (Ustrezno namestite ravnilo.)

Naloga 7

V GeoGebri izdelajte orodje, ki bo med dani premici namestilo daljico dolžine 1 tako, da bo šla nosilka daljice skozi vnaprej izbrano točko. (Pomagajte si z nalogo 4 oziroma s krivuljo konhoido.)

Naloga 8

Konstruirajte kvadrat in enakostranični trikotnik.

Naloga 9

Kako bi konstrukcijo v nalogi 5 simulirali v GeoGebri? (Ena od oznak ravnila naj potuje po nosilki kraka danega kota ali po krožnici.)

Literatura

[1] G. E. Martin, Geometric Constructions, Springer, 1998.

[2] R. C. Yates, The Angle Ruler, the Marked Ruler and the Carpenter's Square, National Mathematics Magazine, Vol. 15, No. 2, 61-73, 1940.

× × ×