

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2013

Letnik 60

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2013, letnik 60, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec.

© 2013 DMFA Slovenije – 1892

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

REŠETO ZA ISKANJE PRAŠTEVILSKIH DVOJČKOV

SREČKO LAMPRET

Osnovna šola Vuzenica

Math. Subj. Class. (2010): 11A41

V članku izpeljemo novo karakterizacijo praštevilskih dvojčkov. S tem rezultatom dobimo elementarno metodo za iskanje praštevilskih dvojčkov do poljubno izbranega naravnega števila.

SIEVING TWIN PRIME PAIRS

In this paper a new characterization of twin prime pairs is obtained. This result gives us an elementary method for finding twin prime pairs up to a given integer.

Praštevilski dvojček je par praštevil oblike $(p, p + 2)$. Razen 2 in 3 ima vsako praštevilo obliko $6k - 1$ ali $6k + 1$. Zato je vsak praštevilski dvojček, razen $(3, 5)$, oblike $(6k - 1, 6k + 1)$ za neko naravno število k . V tem članku predstavljamo elementarno metodo za iskanje praštevilskih dvojčkov do poljubnega naravnega števila, ki temelji na spodnjih rezultatih.

Lema 1. *Naj bo p praštevilo oblike $p = 6j + 1$ ali $p = 6j - 1$. Potem za vsako naravno število i*

$$(6(pi + j) - 1, 6(pi + j) + 1) \text{ in } (6(pi - j) - 1, 6(pi - j) + 1)$$

nista praštevilski dvojčka.

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je $p = 6j + 1$. Potem sta $6(pi + j) + 1 = 6pi + p = p(6i + 1)$ in $6(pi - j) - 1 = 6pi - p = p(6i - 1)$ sestavljeni števili za vsako naravno število i . Podobno, če je $p = 6j - 1$, vidimo, da sta $6(pi + j) - 1$ in $6(pi - j) + 1$ sestavljeni števili za vsako naravno število i . ■

Izrek 2. *Naj bo k naravno število. Potem $(6k - 1, 6k + 1)$ ni praštevilski dvojček natanko tedaj, ko obstaja praštevilo $p \leq \sqrt{6k + 1}$ oblike $6j \pm 1$ in tako naravno število i , da je $k = pi + j$ ali $k = pi - j$.*

Dokaz. Najprej predpostavimo, da $(6k - 1, 6k + 1)$ ni praštevilski dvojček. Potem bodisi $6k - 1$ ali $6k + 1$ ni praštevilo.

Oglejmo si primer, ko $6k - 1$ ni praštevilo. Potem obstaja tako praštevilo $p \leq \sqrt{6k - 1} \leq \sqrt{6k + 1}$, da p deli $6k - 1$. Zato $p \neq 2, 3$. Po izreku o deljenju z ostankom obstajata taki nenegativni celi števili n, r , da je $k = pn + r$ in

$0 \leq r < p$. Posledično velja $p \mid 6(pn + r) - 1 = 6pn + (6r - 1)$ in zato $p \mid 6r - 1$. Ker je $6r - 1 = pt$ za neko naravno število t in $r < p$, vidimo, da je

$$t = \frac{6r - 1}{p} < \frac{6p - 1}{p} < 6.$$

Zato je $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $6r - tp = 1$. To pomeni, da sta 6 in t tuji si števili in potemtakem $t = 1$ ali $t = 5$. Ker $p \neq 2, 3$, velja bodisi $p = 6j - 1$ ali $p = 6j + 1$ za neko naravno število j .

Sprva si oglejmo primer, ko je $p = 6j - 1$. Če je $t = 5$, sledi $1 = 6r - 5p \equiv p \pmod{6}$, kar je nemogoče. Torej $t = 1$ in zato je $p = 6r - 1$. Potem velja $r = j$ in zato je $k = pi + j$ za $i := n$. Pri tem velja, da je $i > 0$, kajti če bi bil $i = 0$, bi veljalo $k = r$ in zato $6k - 1 = 6r - 1 = p$, kar nas privede do protislovja.

Sedaj si oglejmo primer, ko je $p = 6j + 1$. Če je $t = 1$, sledi $p = 6r - 1 \equiv -1 \pmod{6}$, kar je nemogoče. Torej $t = 5$ in zato $6r - 1 = 5p = 30j + 5$. Tako je $r = 5j + 1 = p - j$ in zato $k = pn + p - j = pi - j$ za $i := n + 1 > 0$.

V primeru, ko $6k + 1$ ni praštevilo, dokaz poteka podobno.

Obratna implikacija sledi iz leme 1. ■

Sledi opis delovanja algoritma oz. rešeta za iskanje praštevilskih dvojčkov do poljubnega naravnega števila n .

1. Napravimo seznam naravnih števil $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$.

2. Poiščemo vsa praštevila $3 < p \leq \sqrt{n}$.

Pomagamo si lahko z Eratostenovim rešetom. Tako kot pri Eratostenovem rešetu tudi tu zadošča izvajati algoritem le tako dolgo, dokler praštevila ne dosežejo vrednosti \sqrt{n} , saj v vsaki faktorizaciji vsaj en faktor ne presega tega števila.

3. Za vsako praštevilo $3 < p \leq \sqrt{n}$ naredimo sledeče:

- če $6 \mid p + 1$, potem $j = \frac{p+1}{6}$, sicer $j = \frac{p-1}{6}$;
- prečrtamo vsa števila $k = pi + j$ in $k = pi - j$ za vsak $i = 1, 2, \dots$ z našega seznama.

4. Vsako preostalo naravno število k s seznama nam da praštevilski dvojček $(6k - 1, 6k + 1)$.

Sklicujoč se na izrek 2, s to metodo dobimo vse praštevilске dvojčke do n , razen para $(3, 5)$. V naslednjem primeru predstavimo konkretno delovanje tega algoritma za $n = 250$.

Primer 1. Poiščimo vse praštevilске dvojčke do 250. Napravimo seznam naravnih števil $k = 1, 2, \dots, 42$. Nato poiščemo vsa praštevila $3 < p \leq \sqrt{250}$. V našem primeru so to 5, 7, 11, 13.

- (i) Za $p = 5 = 6 \cdot 1 - 1$ velja $j = 1$ in zato iz našega seznama prečrtamo vsa naravna števila k oblik $5i - 1$ in $5i + 1$.
- (ii) Za $p = 7 = 6 \cdot 1 + 1$ velja $j = 1$ in zato iz našega seznama prečrtamo vsa naravna števila k oblik $7i - 1$ in $7i + 1$.
- (iii) Za $p = 11 = 6 \cdot 2 - 1$ velja $j = 2$ in zato iz našega seznama prečrtamo vsa naravna števila k oblik $11i - 2$ in $11i + 2$.
- (iv) Za $p = 13 = 6 \cdot 2 + 1$ velja $j = 2$ in zato iz našega seznama prečrtamo vsa naravna števila k oblik $13i - 2$ in $13i + 2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42								

Za vsako preostalo naravno število k iz našega seznama dobimo praštevilski dvojček $(6k - 1, 6k + 1)$. Če dodamo še par $(3, 5)$, dobimo vse praštevilске dvojčke do 250:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), \\ (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), \\ (197, 199), (227, 229), (239, 241).$$

Obstajajo tudi nekateri drugi algoritmi za iskanje praštevilskih dvojčkov, ki pa večinoma niso elementarni. Pri drugih, ki so elementarni, pa je, če hočemo poiskati praštevilске dvojčke do nekega poljubnega naravnega števila n , ponavadi treba najprej poiskati vsa praštevila do n in nato med njimi po raznih metodah črtamo vsa tista praštevila, ki niso del dvojčka. Pri algoritmu, ki je tu predstavljen, pa lahko poiščemo vse praštevilске dvojčke do n , pri tem pa je predhodno (npr. z Eratostenovim rešetom) treba poiskati le praštevila do \sqrt{n} , kar je za dovolj velike n lahko precejšnja prednost.

Zahvala. Avtor se zahvaljuje dr. Danielu Eremiti za strokovne nasvete in tehnično pomoč pri nastajanju članka. Zahvaljuje se tudi recenzentu za koristne predloge in skrbno branje članka.

PONCELETOVE KRIVULJE

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A63, 47A12, 51M04

V 18. stoletju so opazili, da velja naslednje: če sta krožnici včrtana in očrtana krožnica nekemu trikotniku, sta včrtana in očrtana krožnica še neskončno mnogo trikotnikom z oglišči na zunanji krožnici. Taki krivulji so poimenovali Ponceletovi krivulji. V članku obravnavamo zgodovinski razvoj iskanja takih parov krivulj. Izkazalo se je, da enako velja tudi pri n -kotnikih. Ko so odkrili, da takšne krivulje niso nujno kvadrike, je raziskovanje dobilo nov zalet. Cele družine takih krivulj so dobili kot rob numerične zaloge vrednosti matrike. V članku je definicija numeričnega zaklada, prikaz, kako dobimo Ponceletovo krivuljo kot rob numeričnega zaklada, in primer, ko Ponceletova krivulja ni elipsa. Pred nekaj leti so ovrgli tudi hipotezo, da je vsaka Ponceletova krivulja rob numeričnega zaklada. Klasifikacija vseh Ponceletovih krivulj je zato še vedno odprt problem.

PONCELET CURVES

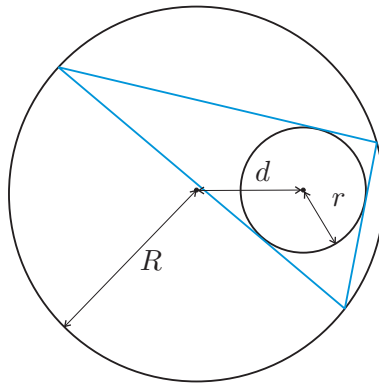
In the 18th century mathematicians established the following: given two circles C_1 , inscribed to a given triangle, and C_2 , circumscribed to the same triangle, then C_1 and C_2 are inscribed and circumscribed circle to an infinite number of triangles. Such a pair of curves is called Poncelet's curves. In this article the early history of Poncelet's porism is discussed. The same property occurs also in the case of an n -sided polygon. In 1998 it was proved that the boundary of the numerical range on any $n \times n$ matrix that admits unitary bordering is an $(n + 1)$ -Poncelet's curve with respect to the unitary circle, and that such curves need not be quadrics. The example of a Poncelet's curve that is not a quadric is given in this article. It is already known that not all Poncelet's curves are boundaries of a numerical range. All Poncelet's curves with respect to a circle have not yet been classified.

Ponceletova krivulja

Znana formula iz geometrije pove naslednje:

Trditev 1. *Naj ima trikotniku očrtana krožnica polmer R , istemu trikotniku včrtana krožnica pa polmer r . Če označimo z d razdaljo med središčema teh dveh krožnic, je*

$$d^2 = R^2 - 2rR. \quad (1)$$



Slika 1

Formulo je prvi objavil William Chapple leta 1746 [1]. Chapple je bil navdušen ljubiteljski matematik. Njegov dokaz je poln napačnih logičnih razmislekov. V dokazu je brez pravega dokaza predpostavil, da če sta enkrat krožnici v tej legi in izberemo poljubno točko na zunanji krožnici, potem vedno lahko najdemo na zunanji krožnici še drugi dve oglišči trikotnika, da mu bosta dani krožnici očrtana in včrtana krožnica. Ta trditev je pravilna in je tema našega članka. Povzetek in razlago Chappleovega dokaza lahko bralec najde v članku [2].

Trditev 1 pripisujejo Eulerju. Euler ni v nobenem od svojih številnih del omenil te formule. Je pa vsekakor dokazal naslednje:

Če označimo z a , b in c stranice trikotnika, s P njegovo ploščino in z d razdaljo med središčema očrtane in včrtane krožnice, je:

$$d^2 = \frac{(abc)^2}{16P^2} - \frac{abc}{a+b+c}. \quad (2)$$

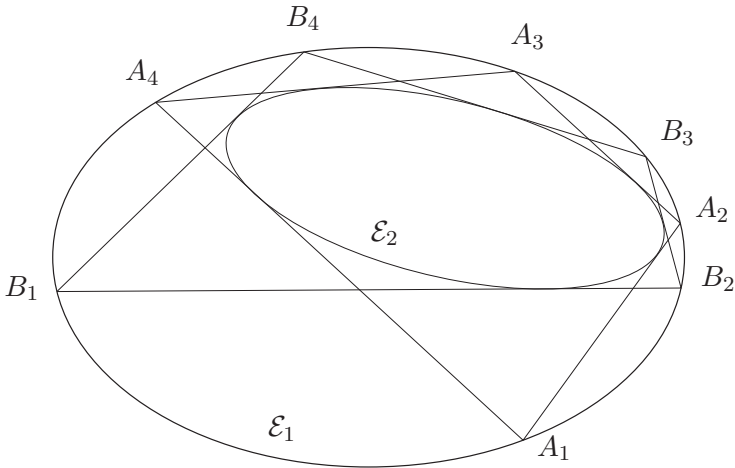
Ko upoštevamo, da sta polmer trikotniku očrtane in polmer včrtane krožnice

$$R = \frac{abc}{4P} \quad \text{in} \quad r = \frac{2P}{a+b+c},$$

dobimo Chapellovo formulo. Formula (2) direktno ne podaja zveze med polmeroma in razdalje med središčema, je bil pa Eulerjev dokaz pravilen.

Nicolaus Fuss je v članku [3] leta 1797 objavil zvezo med polmeroma očrtane in včrtane krožnice štirikotniku. Zveza je naslednja:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$



Slika 2. Elipsi \mathcal{E}_1 in \mathcal{E}_2 imata 4-Ponceletovo lastnost.

Dokaz ni prav enostaven. Bralec ga lahko najde recimo v knjigi Heinricha Dörrieja [4]. Fuss se je kasneje ukvarjal tudi z nekaterimi drugimi mnogokotniki, vendar zvez ni našel. Vedno pa se zgodi naslednje: če sta elipsi včrtana in očrtana elipsa nekemu n -kotniku in izberemo poljubno točko A_1 na zunanji elipsi, narišemo iz nje tangento na manjšo elipso in označimo drugo presečišče te tangente z zunanjo elipso z A_2 , spet naredimo tangento na notranjo elipso in presečišče z zunanjo označimo z A_3 , in tako nadaljujemo, se izkaže, da je $A_1 = A_{n+1}$.

To je opazil Jean-Victor Poncelet in se začel ukvarjati s tem problemom kot vojni ujetnik v Saratovem ob Volgi. Za krivulje je vzel stožnice v ravnini. Leta 1822 je trditev in (napačen) dokaz objavil v delu [5].

Definicija 1. Naj bosta \mathcal{E}_1 in \mathcal{E}_2 elipsi. Če obstaja n -kotnik, očrtan elipsi \mathcal{E}_2 in hkrati včrtan elipsi \mathcal{E}_1 , pravimo, da imata elipsi n -Ponceletovo lastnost, oziroma da sta *Ponceletovi krivulji reda n* .

Tako imenovani veliki Ponceletov izrek pa je:

Izrek 2. Naj bo $n \geq 3$ in naj imata elipsi \mathcal{E}_1 in \mathcal{E}_2 n -Ponceletovo lastnost. Potem za vsako točko $A \in \mathcal{E}_1$ obstaja n -kotnik, ki je včrtan elipsi \mathcal{E}_1 in očrtan elipsi \mathcal{E}_2 ter ima točko A za eno od oglišč.

Pravilen dokaz je leta 1828 objavil Carl Gustav Jacob Jacobi [6]. Ko je delal z analitičnimi formulami za tangente in tetive med krožnicama, je opazil, da se podobne relacije pojavljajo tudi v teoriji eliptičnih funkcij. S pomočjo teh funkcij je našel analitičen dokaz Ponceletovih izrekov in tudi

zveze med polmeroma in razdaljo med njima. Bralec si lahko v modernejši obliki predelan dokaz in še celotno zgodovino Ponceletovega izreka za stožernice ogleda v precej dolgem članku [2].

Tu navedimo še nekaj rezultatov za krožnici. Pri n -kotnikih so zveze med polmeroma včrtane krožnice in očrtane krožnice ter razdaljo med središčema naslednje:

$n = 4$:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2)$$

$n = 5$:

$$r(R - d) = (R + d)[(R - r + d)(R - r - d)]^{1/2} + (R + d)[(R - r - d)2R]^{1/2}$$

$n = 6$:

$$3(R^2 - d^2)^4 = 4r^2(R^2 + d^2)(R^2 - d^2)^2 + 16r^4d^2R^2$$

$n = 8$:

$$8r^2[(R^2 - d^2)^2 - r^2(R^2 + d^2)]\{(R^2 + d^2)[(R^2 - d^2)^4 + 4r^4d^2R^2] - 8r^2d^2R^2(R^2 - d^2)^2\} = [(R^2 - d^2)^4 - 4r^4d^2R^2]^2$$

V resnici lahko s pomočjo eliptičnih funkcij najdemo zveze za poljuben mnogokotnik in elipsi.

Pri afini transformaciji ravnine se premice slikajo v premice, elipse pa v elipse. Zato nič ne izgubimo na splošnosti, če predpostavimo, da je zunanja elipsa kar enotska krožnica. V knjigi [7] lahko najdemo naveden izrek:

Izrek 3. *Krožnica $x^2 + y^2 = 1$ in elipsa $(x - c)^2/a^2 + (y - d)^2/b^2 = 1$ imata n -Ponceletovo lastnost natanko tedaj, ko je za $n = 2m + 1$ oziroma za $n = 2m + 2$*

$$\begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{m+1} \\ \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m+1} & \sigma_{m+2} & \cdots & \sigma_{2m} \end{vmatrix} = 0 \text{ oziroma } \begin{vmatrix} \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{m+2} \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \cdots & \sigma_{m+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m+2} & \sigma_{m+3} & \cdots & \sigma_{2m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

kjer so σ_j koeficienti razvoja funkcije

$$f(t) = \sqrt{\left(t + \frac{1}{a^2}\right) \left(t + \frac{1}{b^2}\right) \left(t + 1 - \frac{c^2}{a^2} - \frac{d^2}{b^2}\right) + t \left(\frac{c^2}{a^4} + \frac{d^2}{b^4}\right) + \frac{c^2}{a^4b^2} + \frac{c^2}{a^4b^2} + \frac{d^2}{a^2b^4}}$$

v formalno potenčno vrsto

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j t^j.$$

Izrek je dokazal Cayley. Zelo lepo napisan dokaz lahko bralec najde v članku P. Griffithsa in J. Harrisa [8].

Do tod sta bili krivulji vedno elipsi. Zato si lahko postavimo vprašanje: So Ponceletove krivulje vedno elipse? Kako dobiti (klasificirati) vse Ponceletove krivulje?

Ponceletove krivulje, ki niso nujno kvadrike, je našel B. Mirman [9]. Za njihov opis pa potrebujemo numerični zaklad matrike.

Numerični zaklad matrike

S \mathbb{C}^n , $n \geq 1$, bomo označili prostor n -teric kompleksnih števil. Prostor \mathbb{C}^n je n -razsežen vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil. Skalarni produkt vektorjev x in y iz \mathbb{C}^n bomo označili z $\langle x, y \rangle$. Če je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, je standardni skalarni produkt vektorjev x in y

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Normo vektorja izračunamo z

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n}.$$

Vemo, da vsaki linearni preslikavi iz \mathbb{C}^n v \mathbb{C}^n pripada matrika velikosti $n \times n$ in obratno. Definirajmo sedaj numerični zaklad matrike oziroma linearne preslikave.

Definicija 2. *Numerični zaklad matrike A je podmnožica kompleksnih števil, definirana z*

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

Preslikava, ki vektorju x priredi $\langle Ax, x \rangle$, je zvezna. Numerični zaklad je slika enotske sfere v \mathbb{C}^n . Ker je ta kompaktna, je tudi numerični zaklad kompaktna množica. Numerični zaklad je torej vedno omejena in zaprta podmnožica kompleksne ravnine.

Navedimo nekaj najočitnejših lastnosti numeričnega zaklada.

Trditev 4. *Numerični zaklad matrike $A + \alpha I$ je za α premaknjeni numerični zaklad matrike A , $W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha = \{\lambda + \alpha; \lambda \in W(A)\}$.*

Trditev 5. *Naj bo A matrika velikosti $n \times n$ in U poljubna unitarna matrika. Potem je $W(A) = W(U^*AU)$.*

Dokaz. Če je $\alpha \in W(A)$, obstaja $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, da je $\alpha = \langle Ax, x \rangle$. Vsaka unitarna matrika je obrnljiva in ohranja dolžino vektorjev. Zato obstaja tak $y \in \mathbb{C}^n$, $\|y\| = 1$, da je $x = Uy$. Potem pa je $\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle AUy, Uy \rangle = \langle U^*AUy, y \rangle \in W(U^*AU)$. Dokaz obratne inkluzije je prav takšen. ■

Očitna je tudi naslednja trditev:

Trditev 6. *Spekter matrike je vsebovan v njenem numeričnem zakladu.*

Dokaz. Naj bo λ lastna vrednost matrike A . Potem obstaja $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, da je $Ax = \lambda x$. Potem pa je za ta x $\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$, kar pomeni, da je $\lambda \in W(A)$. ■

Trditev 7. *Numerični zaklad diagonalne matrike je konveksna ogrinjača diagonalnih elementov.*

Dokaz. Naj bo A diagonalna matrika z elementi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonalni. Potem je

$$\begin{aligned} W(A) &= \left\{ \langle Ax, x \rangle; \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \bar{x}_i; \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2; \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Iz zadnje vrstice vidimo, da je $W(A)$ konveksna ogrinjača diagonalnih elementov. ■

Ker vsako normalno matriko lahko diagonaliziramo z unitarno prehodno matriko, velja naslednje:

Izrek 8. *Numerični zaklad normalne matrike je enak konveksni ogrinjači njenih lastnih vrednosti.*

Posledica nam da karakterizacijo sebi adjungiranih operatorjev s pomočjo numeričnega zaklada.

Izrek 9. *Matrika je sebi adjungirana natanko tedaj, ko leži njen numerični zaklad na realni osi. Če označimo najmanjšo lastno vrednost sebi adjungirane matrike A z λ_m in največjo z λ_M , je $W(A) = [\lambda_m, \lambda_M]$ in $\|A\| = \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$.*

Dokaz. Če je matrika A sebi adjungirana, ležijo njene lastne vrednosti na realni osi. Vsaka sebi adjungirana matrika je tudi normalna. Konveksna ogrinjača realnih števil leži na realni osi. Naj sedaj leži numerični zaklad

matrike A na realni osi. Potem je $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ za vsak $x \in \mathbb{C}^n$ oziroma $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle A^*x, x \rangle$. Sledi $\langle (A - A^*)x, x \rangle = 0$ za vsak $x \in \mathbb{C}^n$. Matrika $A - A^*$ ima v numeričnem zakladu samo število 0. Ker je matrika $A - A^*$ normalna matrika, jo lahko diagonaliziramo in v spektru ima samo vrednost 0. Zato je $A - A^* = 0$ oziroma $A = A^*$. Pokazati moramo le še, da je $\|A\| = \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$. Za $\lambda \neq 0$ je

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= \langle A(\lambda x + \lambda^{-1}Ax), \lambda x + \lambda^{-1}Ax \rangle - \langle A(\lambda x - \lambda^{-1}Ax), \lambda x - \lambda^{-1}Ax \rangle \\ &\leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\} [\|\lambda x + \lambda^{-1}Ax\|^2 + \|\lambda x - \lambda^{-1}Ax\|^2] \\ &= 2 \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\} [\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^{-2}\|Ax\|^2]. \end{aligned}$$

Če vstavimo $\lambda^2 = \|Ax\|/\|x\|$ in krajšamo, dobimo

$$\|Ax\| \leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}\|x\|.$$

Sledi $\|A\| \leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$. Ocena v drugo smer je trivialna. ■

Naslednja lema bo pomembna pri dokazu konveksnosti numeričnega zaklada.

Lema 10. *Naj bo A linearna preslikava dvodimenzionalnega kompleksnega vektorskega prostora vase, $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Potem je $W(A)$ polna elipsa, ki ima za gorišči lastni vrednosti preslikave.*

Lemo dokažemo tako, da numerični zaklad izračunamo. Najprej uporabimo Schurov izrek, ki pove, da je vsaka matrika unitarno podobna zgornjetrikotni matriki. Numeričnega zaklada zgornjetrikotne matrike pa ni več težko izračunati.

Zgornja lema nam bo pomagala dokazati eno najpomembnejših lastnosti numeričnega zaklada.

Izrek 11. *Numerični zaklad matrike je konveksna množica.*

Dokaz. Naj bosta α in β različna elementa numeričnega zaklada matrike A . Pokazati moramo, da je daljica med α in β cela v $W(A)$. Naj bosta x in y vektorja z normo 1, za katera velja $\langle Ax, x \rangle = \alpha$ in $\langle Ay, y \rangle = \beta$. Ker je $\alpha \neq \beta$, sta vektorja x in y linearno neodvisna. Označimo z V dvorazsežen podprostor, ki ga razpenjata, in s P ortogonalni projektor prostora \mathbb{C}^n na V . Če \mathbb{C}^n zapišemo kot ortogonalno vsoto $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$, sta matriki preslikav A in PAP glede na izbrani razcep prostora bločni matriki oblik:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad PAP = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika A_{11} je sedaj 2×2 matrika in očitno je $W(A_{11}) \subseteq W(A)$. Ker je $\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle APx, Px \rangle = \langle PAPx, x \rangle$, je $\alpha \in W(A_{11})$. Enako dobimo tudi $\beta \in W(A_{11})$. Numerični zaklad 2×2 matrike A_{11} je elipsa, zato vsebuje tudi daljico med α in β . Ker je $W(A_{11}) \subseteq W(A)$, daljico vsebuje tudi $W(A)$. ■

Numerični zaklad matrike nam lahko pomaga locirati spekter matrike in dobiti ocene za napake pri računanju lastnih vrednosti.

Numerični zaklad matrike so posplošili že v veliko smeri. Precej so raziskane tudi lastnosti numeričnega zaklada operatorja na neskončnorazsežnem Hilbertovem prostoru. Numerični zakladi neomejenih operatorjev (bilinear-nih form) so uporabni pri dokazovanju obstoja zaprtih razširitev neomejenih operatorjev.

Numerični zaklad in Ponceletove krivulje

B. Mirman je leta 1998 objavil rezultat [9], ki pove, da je rob numeričnega zaklada določenih matrik Ponceletova krivulja. Ponceletove krivulje, ki jih je dobil, niso nujno kvadrike (elipse). Oglejmo si del njegovih rezultatov.

Definicija 3. Matrika B velikosti $m \times m$ je *dilacija* $n \times n$ matrike A , $m \geq n$, kadar obstaja izometrija $V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, za katero velja $A = V^*BV$.

Trditev 12. Naj bo B dilacija matrike A . Potem je $W(A) \subseteq W(B)$.

Dokaz. Ker je B dilacija matrike A , obstaja taka izometrija V , da je $A = V^*BV$. Naj bo $\alpha \in W(A)$. Potem obstaja enotski vektor x , $\|x\| = 1$, da je $\alpha = \langle Ax, x \rangle$. Pišemo lahko:

$$\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle V^*BVx, x \rangle = \langle BVx, Vx \rangle = \langle By, y \rangle.$$

Ker je V izometrija, je tudi $y = Vx$ enotski vektor in zato $\alpha \in W(B)$. ■

Izrek 13. Naj bo $n > 1$, U unitarna matrika velikosti $(n + 1) \times (n + 1)$ s samimi različnimi lastnimi vrednostmi in $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ enotski vektor, ki ni pravokoten na nobenega od lastnih vektorjev matrike U . Nadalje naj bo

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle x, w \rangle = 0\}$$

in Q ortogonalni projektor $Q = I_{n+1} - ww^*$ prostora \mathbb{C}^{n+1} na \mathcal{L} . Potem je rob numeričnega zaklada matrike QUQ kot preslikave $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ Ponceletova krivulja reda $n + 1$ glede na enotsko krožnico.

Opomba 1. Naj bodo e_1, e_2, \dots, e_n baza prostora \mathcal{L} . Matrika QUQ , zapisana v bazi $\{e_1, e_2, \dots, e_n, w\}$, je potem oblike

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rob numeričnega zaklada $n \times n$ matrike T je Ponceletova krivulja glede na enotsko krožnico.

Dokaz. Matrika U je normalna matrika. Njen numerični zaklad je zato konveksni $(n+1)$ -kotnik M z oglišči na enotski krožnici, natančneje v lastnih vrednostih matrike U . Matrika U je dilacija matrike T , zato ta $(n+1)$ -kotnik vsebuje numerični zaklad matrike T . Označimo lastne vrednosti matrike U z $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$.

Vsaka stranica S ($n+1$)-kotnika povezuje dve lastni vrednosti. Naj bosta to $e^{i\varphi_1}$ in $e^{i\varphi_2}$. Pripadajoča lastna vektorja naj bosta v_1 in v_2 . Označimo z \mathcal{M} vektorski prostor, razpet s tema vektorjema. Ta prostor je dvodimenzionalen. Numerični zaklad zožitve operatorja U na podprostor \mathcal{M} je ravno stranica S . Vsota dimenzij prostorov \mathcal{M} in \mathcal{L} je $n+2$. To pomeni, da imata prostora netrivialen presek. V preseku je torej vsaj en neničeln vektor. Naj bo to f . Predpostavimo lahko, da je $\|f\| = 1$. Ker je $f \in \mathcal{M}$, je $\xi = \langle Uf, f \rangle$ na stranici S . Po drugi strani pa je $Qf = f$, saj je $f \in \mathcal{L}$. Zato je

$$\xi = \langle Tf, f \rangle = \langle Uf, f \rangle.$$

Točka ξ je torej tudi v $W(T)$. Stranica S in $W(T)$ imata torej skupno vsaj eno točko. Dokažimo, da je v $S \cap W(T)$ natanko ena točka. Recimo, da bi bili skupni dve točki. Potem bi obstajala dva enotska neodvisna vektorja $f_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ in $f_2 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ in \mathcal{M} bi bil vsebovan v \mathcal{L} . To pa je protislovje, saj \mathcal{M} vsebuje lastne vektorje matrike U , \mathcal{L} pa ne. To seveda velja za vse stranice $(n+1)$ -kotnika M . Zato je rob numeričnega zaklada krivulja, včrtana mnogokotniku M , ta pa ima enotski krog za očrtan krog.

Dokazati moramo še to, da če iz poljubne točke A_1 enotske krožnice potegnemo tangento na rob $W(T)$, drugo presečišče te tangente z enotsko krožnico označimo z A_2 in potem tako nadaljujemo, dobimo $A_{n+1} = A_1$.

Matrika U je dilacija matrike T . Definirajmo

$$U_\gamma = U(I - ww^* + e^{i\gamma}ww^*).$$

Očitno je $U_\gamma^*U_\gamma = I$ in $QU_\gamma Q = T$. Torej je tudi U_γ unitarna dilacija matrike T . Numerični zaklad matrike U_γ je $(n+1)$ -kotnik M_γ in rob $W(T)$ je včrtan mnogokotniku M_γ . Če bi imel manj oglišč, bi unitarna matrika U_γ imela vsaj eno večkratno lastno vrednost. Podprostor \mathcal{L} bi moral vsebovati lastni vektor matrike U_γ (dimenzija \mathcal{L} je n) in rob $W(T)$ bi se dotaknil krožnice, kar pa vemo, da ni res.

Dokažimo še, da imata mnogokotnika M_{γ_1} in M_{γ_2} različna oglišča, če je $0 < |\gamma_1 - \gamma_2| < 2\pi$. Ni težko videti, da je $\det U_\gamma = e^{i\gamma} \det U$. Zato sta determinanti matrik U_{γ_1} in U_{γ_2} različni. Ker je determinanta produkt lastnih vrednosti matrike, matriki U_{γ_1} in U_{γ_2} nimata istih lastnih vrednosti. Še več, vse lastne vrednosti oziroma oglišča morajo biti različna. Če bi mnogokotnika imela skupno oglišče, bi bila po konstrukciji enaka. Ko γ preteče 2π dolg interval, mnogokotniki M_γ pretečejo vse možne $(n+1)$ -kotnike, včrtane v enotsko krožnico in očrtane robu $W(T)$ in to brez ponavljanja. Lastne vrednosti matrike U_γ oziroma oglišča $(n+1)$ -kotnika M_γ se z γ zvezno spreminjajo. Ker sta M_{γ_1} in M_{γ_2} različna, če se γ_1 in γ_2 razlikujeta za manj kot 2π , in je $M = M_0 = M_{2\pi}$, potuje vsako oglišče mnogokotnika M_γ ravno do sosednjega oglišča mnogokotnika M , ko teče γ od 0 do 2π . ■

Da smo prišli do $(n+1)$ -Ponceletove krivulje, smo morali imeti matriko T , ki ima unitarno dilacijo. Take matrike imenujemo *UB matrike*. V članku [9] je dokazan naslednji izrek:

Izrek 14. *Matrika T ima unitarno dilacijo natanko tedaj, ko je $TT^* = I - uu^*$, kjer je u neničelni vektor, $\|u\| \leq 1$.*

Dokaz izreka, še mnogo zanimivih lastnosti in tudi relativno enostaven dokaz velikega Ponceletovega izreka za krožnice najdemo v istem članku [9].

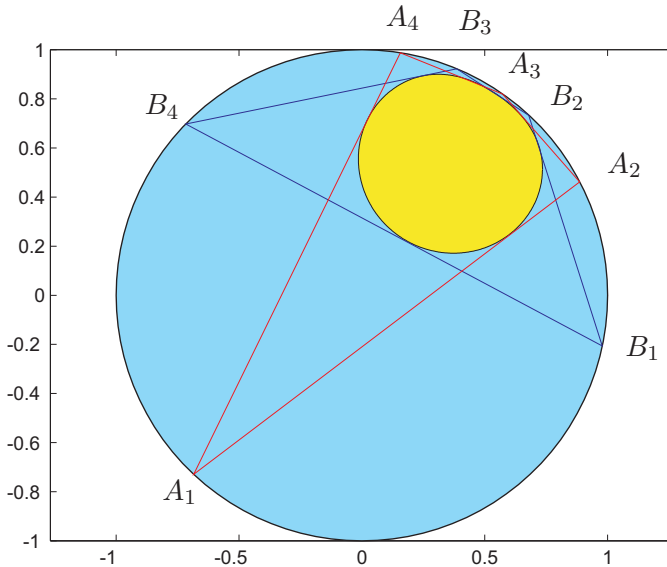
Vprašamo se lahko, ali so vse Ponceletove krivulje, dobljene kot rob numeričnega zaklada UB matrike, kvadrike. Odgovor je negativen.

Brez dokaza napišimo, da rob $W(A)$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - |\alpha|^2 & -\bar{\alpha}(1 - |\alpha|^2) \\ 0 & \alpha & 1 - |\alpha|^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad |\alpha| < 1, \quad (3)$$

ni kvadrika, je pa 4-Ponceletova krivulja glede na enotsko krožnico. Na sliki 3 je numerični zaklad matrike (3) pri $\alpha = (2 + 3i)/5$.

Naslednje vprašanje, ki so si ga postavili matematiki, je, ali so vse Ponceletove krivulje rob numeričnega zaklada kakšne UB matrike. Tudi tu je odgovor negativen. B. Mirman in P. Shukla [10] sta dokazala kriterij, ki pove, kdaj je Ponceletova krivulja rob numeričnega zaklada matrike, in tudi našla Ponceletove krivulje, ki niso rob numeričnega zaklada UB matrike. V članku je tudi posplošitev definicije Ponceletove krivulje iz realne ravnine v kompleksno ravnino. V obširnem seznamu literature v [10], [11] lahko najdemo članke, ki obravnavajo vse mogoče posplošitve Ponceletovih krivulj.



Slika 3. Ponceletova krivulja, ki ni kvadratika.

LITERATURA

- [1] W. Chapple, *An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles*, Mischellanea Curiosa Mathematica **4** (1746), 117–124.
- [2] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort in D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem*, Expo. Math. **5** (1987), 289–364.
- [3] N. Fuss, *De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet*, Nova acta acad. sci. Petrop. **10** (St Petersburg 1797), 103–125.
- [4] H. Dörrie, *100 great problems of elementary mathematics, their history and solutions*, New York (Dover), 1965.
- [5] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822.
- [6] C. G. J. Jacobi, *Über die Anwendungen der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **3** (1828), 376–389.
- [7] M. Berger, *Geometry II*, Springer, 1987.
- [8] P. A. Griffiths in J. Harris, *On Cayley's explicit solution of Poncelet porism*, l'Enseignement Math. **24** (1978), 31–40.
- [9] B. Mirman, *Numerical ranges and Poncelet curves*, Linear algebra Appl. **281** (1998), 59–85.
- [10] B. Mirman in P. Shukla, *A characterisation of complex plane Poncelet curves*, Linear algebra Appl. **408** (2005), 86–119.
- [11] B. Mirman, *Poncelet's porism in the finite real plane*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009) 5, 439–458.

SONČNO OBSEVANJE IN KLIMATSKE SPREMEMBE PO MILANKOVIČEVEM MODELU

ŽIGA ŠMIT

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Institut Jožef Stefan

PACS: 92.60.Ry, 92.30.Bc

Osnova klimatskih modelov je toplota, ki jo Zemlja prejme od Sonca. Prispevek prikaže nazorno izpeljavo enačb, ki vodijo do dnevnega obseva, to je količine toplote, ki v poljubnem dnevu leta pade na enoto zemeljske površine v obliki krogle pri izbrani geografski širini. Z analitičnimi približki v najnižjem redu je upoštevano spreminjanje nagiba zemeljske vrtilne osi in spreminjanje ekscentričnosti Zemljinega tira. Z modelom je izračunana relativna količina toplote za obdobje würmske poledenitve (do 160 tisoč let nazaj). Primerjava z drugimi računi in izmerjenimi klimatskimi spremembami kaže, da preprosti račun uspešno reproducira osnovno obliko klimatske krivulje.

SOLAR IRRADIATION AND CLIMATIC CHANGES ACCORDING TO THE MILANKOVITCH MODEL

Climatic models are essentially based on the energy, received by Earth from the Sun. The article shows methodic derivation of equations that lead to the daily insolation, i. e. the quantity of energy that hits a given area of spherically-shaped earth surface at given geographical amplitude on a given day. Analytical approximations are proposed for the time variation of the tilt of the geographical axis with respect to ecliptic and of the eccentricity of the Earth's orbit. The relative quantity of energy is calculated for the period of Würm glacial age (up to 160 thousand years in the past). A comparison with other calculations and measured climatic variations shows that the simple model reproduces well the main features of the climatic curve.

Uvod

Hitro spreminjanje klimatskih razmer v zadnjem času prav gotovo oživlja zanimanje za klimatske modele. Že sredi 18. stoletja so z opazovanjem geoloških pojavov zaznali pojav ledenih dob. Konec 19. stoletja so domnevali, da so nihanja hladnih in toplih obdobj posledica sprememb v sončnem obsevanju. Z idejo se je leta 1911 začel ukvarjati srbski matematik in naravoslovec Milutin Milanković (1879–1958). Do podrobnosti jo je izdelal v avstro-ogrskem vojaškem ujetništvu v bližini Budimpešte in jo leta 1920 objavil v knjigi, ki jo je izdala tedanja Jugoslovanska akademija znanosti in umetnosti v Zagrebu, izšla pa je pri založbi Gauthier-Villars v Parizu. Druga Milankovićeva knjiga je izšla v Beogradu leta 1941.

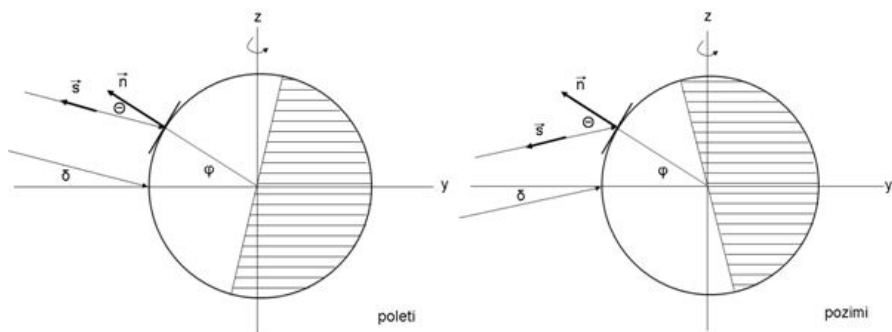
V Milankovičevem modelu je klima odvisna od dnevne količine sončne toplote, ki posije na izbrani del zemeljske površine. Toplota je odvisna od kota, pod katerim padajo sončni žarki, in od dolžine dneva. Ti količini pa se dolgotrajno spreminjata zaradi precesije in opletanja zemeljske osi ter zaradi spreminjanja eliptičnosti zemeljskega tira. Milanković je domneval, da je glavni vzrok za spreminjanje klime in nastop ledenih dob spreminjanje nagiba zemeljske osi, ki poteka s periodo 41 tisoč let. Toda ledene dobe nastopajo s periodo okoli 100 tisoč let, kar je nato kar za nekaj desetletij zmanjšalo zanimanje za Milankovičev model. Znova so ga oživila globokomorska in ledeniška vrtnja, s katerimi je bilo mogoče rekonstruirati klimatske spremembe 500–800 tisoč let v preteklost. J. D. Hays, J. Imbrie in N. J. Shackleton so v ključnem delu *Variation in the Earth's Orbit: Pacemaker of the Ice Ages* leta 1976 z numeričnimi postopki določili osnovne periode pri spreminjanju klime in pokazali, da se ujemajo s spreminjanjem precesije in nagiba zemeljske vrtilne osi. Vendar pa so te spremembe le približno periodične, ker gibanje Zemlje moti gravitacijsko polje težjih planetov. Naloga je zato pogosto obrnjena: iz izmerjenih nihanj klime ugotavljajo variacije v Zemljini orbiti.

Klimatska nihanja v preteklosti se kažejo v izotopski sestavi kisika v globokomorskih in ledenih vrtnah ter v sestavi in fizikalnih lastnostih sedimentov. Merjenja teh pojavov so tudi uveljavljena metoda datiranja v geoloških in starejših arheoloških obdobjih. Postopek, ko časovno skalo, ki jo dobimo iz klimatskih in geoloških opazovanj, uskladimo s parametri po Milankovičevem modelu, imenujemo orbitalna uskladitev (orbital tuning).

Čeprav vzroke za današnje naraščanje temperatur iščemo v spremembah atmosfere, ki jih povzroča človek, pa je Milankovičev model še vedno osnova za računanje dolgoročnih klimatskih sprememb. S primerjavo podatkov za količino vpadle toplote pozimi in poleti ter pri različnih geografskih širinah dobimo občutek, kako velike spremembe teh količin so pomembne. Izračun dnevnega obseva, to je količine toplote, ki pade na izbrani del zemeljske površine v enem dnevu, je zanimiv geometrijski problem, ki ga lahko z matematično nadarjenimi dijaki rešimo že v srednji šoli. Namen prispevka pa je razviti model do te mere, da reproducira osnovno obliko klimatske krivulje za obdobje würmske poledenitve, to je do 160 tisoč let nazaj. V ta namen predlaga analitične približke za časovno odvisnost ekscentričnosti zemeljskega tira in opletanje zemeljske vrtilne osi.

Model

Klima na Zemlji je odvisna od gostote energijskega toka s Sonca in od lastnosti atmosfere: odbojnosti za sončno svetlobo in absorptivnosti (emisivnosti)



Slika 1. Vpadni kot sončnih žarkov na severni polobli poleti in pozimi opoldne.

v infrardečem območju. Pri našem modelu se bomo omejili na izračun dnevnega obseva, to je integrala gostote energijskega toka j (obsevanosti) v času od sončnega vzhoda do zahoda:

$$\frac{Q}{S} = \int j \cos \Theta dt_d \quad (1)$$

Pri tem je Θ kot, ki ga sončni žarki oklepajo z normalo na izbrani del zemeljske površine; Θ se spreminja zaradi vrtenja Zemlje in njenega gibanja okoli Sonca, saj zemeljska vrtilna os ni pravokotna na ekliptiko, ampak oklepa s pravokotnico nanjo kot δ_0 . Zaradi gibanja Zemlje po elipsi se med letom spreminja tudi j , ki pada s kvadratom razdalje Sonce–Zemlja. Za sevanje Sonca in s tem povezano sončno konstanto privzemimo, da se ne spreminja. Spremembe r od enega dneva do drugega pa so majhne, tako da lahko j v (1) postavimo pred integral.

Za računanje kota Θ je ugodno, da začnemo meriti letni čas t_l v trenutku, ko je Zemlja v pomladišču in je zemeljska os pravokotna na smer sončnih žarkov. Zemeljska os v splošnem oklepa s smerjo proti Soncu kot λ :

$$\cos \lambda = \sin \delta_0 \sin \omega_l t_l, \quad (2)$$

pri čemer je ω_l kotna hitrost pri kroženju Zemlje okoli Sonca; $\omega_l = 2\pi/T_l$, kjer je T_l perioda enega leta.

Kot Θ želimo podati kot funkcijo dnevnega časa t_d in letnega časa t_l . Izberemo koordinatni sistem, pri katerem os z sovpada z zemeljsko vrtilno osjo. Osi x in y ležita v ekvatorialni ravnini; pri tem os y postavimo tako, da smer proti Soncu leži v ravnini yz (slika 1). Sončni žarki oklepajo tedaj z osjo y kot δ ; vrednosti δ so v letni polovici leta pozitivne, v zimski pa

negativne. Kota δ in λ se razlikujeta za $\pi/2$ ($\lambda = \pi/2 - \delta$), tako da velja

$$\sin \delta = \sin \delta_0 \sin \omega_d t_d. \quad (3)$$

Smer proti Soncu je tedaj

$$\vec{s} = (0, -\cos \delta, \sin \delta). \quad (4)$$

Smer normale na izbrani točki zemeljskega površja pri geografski širini φ je podana z vektorjem

$$\vec{n} = (\cos \omega_d t_d \cos \varphi, -\sin \omega_d t_d \cos \varphi, \sin \varphi). \quad (5)$$

Pri tem merimo dnevni čas t_d tako, da \vec{n} ob času $t_d = 0$ leži v ravnini xz ; $\omega_d = 2\pi/T_d$, kjer je T_d dolžina enega dneva. Iz enačb (4) in (5) dobimo $\cos \Theta$:

$$\cos \Theta = \cos \delta \cos \varphi \sin \omega_d t_d + \sin \delta \sin \varphi. \quad (6)$$

Iz zveze (6) lahko enostavno ocenimo, koliko je dan zaradi nagnjene zemeljske osi zjutraj in zvečer daljši ali krajši kot ob enakonočju. Za mejo svetlo-temno velja $\cos \Theta = 0$ in odtod

$$-\sin \omega_d t_d = \tan \delta \tan \varphi \equiv \sin \alpha, \quad (7)$$

pri čemer je α podaljšanje ali skrajšanje dneva v kotnih enotah. (V izvorni Milankovičevi izpeljavi namesto kota α nastopa kot $\pi/2 + \alpha$, ki ustreza polovični dolžini dneva v kotnih enotah.) Med arktično nočjo in arktičnim dnevom je absolutna vrednost $\tan \delta \tan \varphi$ večja od ena. Arktična noč ali dan nastopita pri geografski širini $\varphi = \pi/2 - |\delta|$, najmanjša geografska širina, pri kateri poznajo ta pojav, pa je $\varphi = \pi/2 - |\delta_0|$. Zaradi loma svetlobe v ozračju (astronomske refrakcije) je dolžina dneva nekaj daljša, kot jo napove enačba (6), pri arktičnem dnevu, ki se vleče nekaj mesecev, lahko tudi za nekaj dni.

V enem dnevu na površino S pade toplota (1):

$$\frac{Q}{S} = \frac{j}{\omega_d} \int_{-\alpha}^{\pi+\alpha} \cos \Theta d(\omega_d t_d) = \frac{2j}{\omega_d} \left(\cos \omega \cos \varphi \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \sin \delta \sin \varphi \right). \quad (8)$$

Pri tem smo upoštevali, da se j v enem dnevu zaradi gibanja Zemlje po rahlo eliptičnem tiru ne spremeni.

V splošnem nas zanimajo relativne spremembe dnevnega obseva oziroma vpadle toplote Q . Za izhodišče vzemimo vrednost Q_0 pri $\delta = 0$, torej količino toplote, ki jo dobimo pri orientaciji zemeljske osi pravokotno na smer

sončnih žarkov. Zaradi enostavnosti vzemimo referenčno vrednost toka j pri $r = a$, ko je oddaljenost Zemlje od Sonca enaka daljši polosi elipse. Vrednost a je sicer večja od povprečne razdalje Zemlja–Sonce, vendar pomeni boljše konstanto gibanja: med drugim nastopa v tretjem Keplerjevem zakonu in izrazu za energijo planeta. Relativno spreminjanje toplote Q , ki se na izbrano zemeljsko površino S izseva v enem dnevu, je tako

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\cos \delta \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{a} + \alpha\right) \sin \delta \tan \varphi\right). \quad (9)$$

Pri računanju si pomagamo z izrazi za enačbo elipse v parametrični obliki. V tem zapisu so čas in koordinate planeta podani kot funkcija brezdimenzijskega parametra ξ , ki se spreminja podobno kot polarni kot od 0 do 2π , vendar nima enostavne geometrijske ponazoritve. Za r velja (glej Landau, enačba 15.10):

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad (10)$$

pri čemer je ϵ ekscentričnost elipse, parameter ξ pa je povezan s časom t' z zvezzo

$$\xi - \epsilon \sin \xi = \omega_t t' = \frac{2\pi}{T_l} t_l. \quad (11)$$

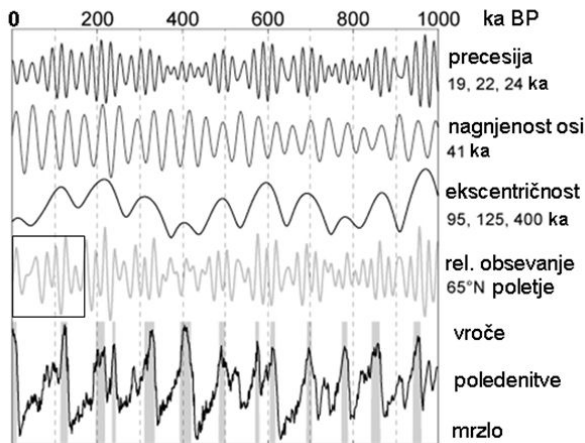
Pri majhnih vrednostih ϵ je ξ približno enak polarnemu kotu, ki ga opiše zveznica Sonce–Zemlja z začetno lego v periheliju. Čas t' , ki prav tako meri potovanje Zemlje okoli Sonca, ima torej v periheliju vrednost nič. Pri praktičnem računanju rešimo enačbo (11) numerično z iteracijo.

Razmerje Q/Q_0 želimo izračunati za poljuben koledarski dan t v letu. V ta namen nam zadostuje, da pozabimo na prestopna leta in za dolžino leta vzamemo $T_l = 365$ dni. Po koledarju nastopi pomlad navadno 21. marca, tako da je od 1. januarja do pomladišča še 80 dni. Perihelij nastopi okoli 3. januarja. Pri času t_l v enačbi (3) in času t' v enačbi (11) upoštevamo časovna premika:

$$t_l = t - 80d; \quad t' = t - 3d \quad (12)$$

V naslednjem koraku upoštevamo dolgoročno spreminjanje Q/Q_0 , ki je opazno šele v obdobjih več tisoč let. Zemeljska os v prostoru ni stalna, ampak zaradi precesije opleta po plašču stožca, ki je orientiran pravokotno na ekliptiko in ima odprtino $2\delta_0$. Učinek tega gibanja je navidezno vrtenje elipse zemeljskega tira. Pri računanju r iz enačb (10, 11) moramo torej pri času t' upoštevati dodatni fazni premik, ki je odvisen od geološkega časa T ; tega lahko merimo tako v preteklost kot v prihodnost:

$$t' = t - 3d + T_l \frac{T}{T_p}; \quad (13)$$



Slika 2. Parametri Zemljinega tira, izračunana krivulja relativnega dnevnega obseva in dejansko spreminjanje temperature (prirejeno po Global Warming Art). Območje relativnega obsevanja do 160 tisoč let je označeno s kvadratom.

pri tem smo s T_p označili precesijski obhodni čas.

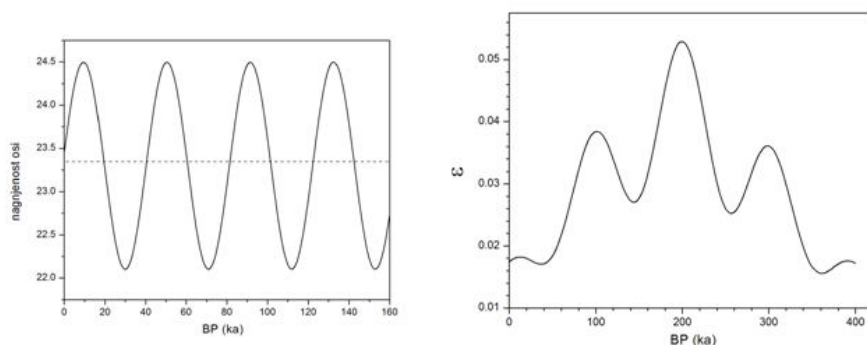
Precesijski čas T_p glede na zvezde je 26 ka; s ka označujemo tisoče let. Čas, kot ga vidimo na Zemlji, je odvisen tudi od vrtenja glavne osi Zemljinega tira glede na zvezde in od drugih gibanj. Tudi tu je opaznih več harmoničnih komponent s periodami 19, 22 in 24 ka. V računu smo privzeli $T_p = 23$ ka, kar se ujema z vrednostjo, ki so jo iz meritev na vrtni določili Hays in sodelavci.

Drugi dve gibanji, ki vplivata na Q/Q_0 , sta spreminjanje nagiba zemeljske vrtilne osi glede na ekliptiko (kot δ_0) in spreminjanje ekscentričnosti elipse zemeljskega tira. Pri opisu teh dveh parametrov si pomagamo z analitičnimi približki. Spreminjanje nagiba zemeljske osi med skrajnima legama $22,1^\circ$ in $24,5^\circ$ poteka s periodo 41 ka. Trenutna vrednost δ_0 je $23,44^\circ$ in se zmanjšuje. V naših računih podamo časovno odvisnost δ_0 z analitičnim približkom

$$\delta_0 = 23,3^\circ - 1,2^\circ \sin \left(2\pi \frac{T - 0,8 \text{ ka}}{41 \text{ ka}} \right). \quad (14)$$

Spreminjanje ekscentričnosti zemeljskega tira je kvaziperiodično zaradi vpliva masivnih planetov Jupitra in Saturna. Najmočnejše harmonične komponente imajo periode 95 ka, 125 ka in 413 ka. Analitično aproksimacijo, ki dovolj dobro opiše spreminjanje ϵ za zadnjih 400 ka, poiščemo z nastavkom

$$\epsilon = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i \sin \left(2\pi \frac{T + \varphi_i}{T_{ei}} \right). \quad (15)$$



Slika 3. Spreminjanje nagiba zemeljske osi po enačbi (14) (levo). Spreminjanje ekscentričnosti Zemljinega tira po enačbi (16) (desno).

Za prispevek s periodo 413 ka je amplituda 0,012. Minimum doseže pri času 400 ka v preteklosti, zato za φ_3 izberemo -13 ka $-1/4 \times 413$ ka. Preostale amplitude A in fazne čase φ določimo z zvezami:

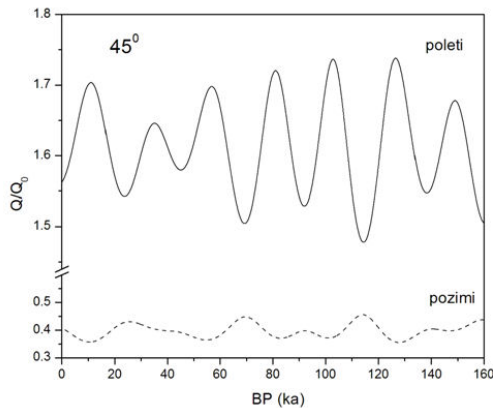
1. Največja vrednost ϵ je 0,053, najmanjša 0,005.
2. Današnja vrednost ϵ je 0,017.
3. Največja vrednost ϵ je bila pred 200 ka.

Iz pogoja (3) dobimo φ_1 in φ_2 z zahtevo, da morata biti ustrezni sinusni funkciji v (15) enaki ena. Nato z upoštevanjem pogojev (1) in (2) rešimo sistem enačb za preostale tri amplitude A . Ekscentričnost je tako podana s semiempiričnim približkom

$$\epsilon = 0,029 + 0,0062 \sin\left(2\pi \frac{T + 33,75 \text{ ka}}{95 \text{ ka}}\right) + 0,0058 \sin\left(2\pi \frac{T - 18,75 \text{ ka}}{125 \text{ ka}}\right) - 0,012 \cos\left(2\pi \frac{T - 13 \text{ ka}}{413 \text{ ka}}\right). \quad (16)$$

Rezultati in diskusija

Model smo uporabili za prikaz nihanj v sončnem obsevanju za čas würmske poledenitve (do 160 tisoč let nazaj). Rezultate računa smo primerjali z vrednostmi, kot jih najdemo na spletu (slika 2). Kot kaže slika 3, z enačbo (14) pravilno opišemo periodo in začetni potek nihanja zemeljske osi, ne zajamemo pa rahlega spreminjanja amplitude. Spreminjanje ekscentričnosti



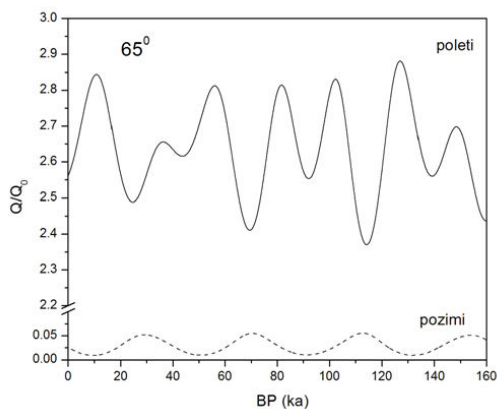
Slika 4. Izračunano relativno obsevanje za 45° severne širine.

zemeljskega tira do 400 tisoč let nazaj pa zelo dobro ponazorimo s približkom (16). Enačba (16) napove enako strukturo tudi za obdobje med 400 in 800 tisoč leti v preteklost, vendar slika 2 kaže, da se oblika funkcije pri bolj oddaljenih obdobjih nekoliko popači.

Krivulji relativnega sončnega obseva sta izračunani za dve geografski širini: 45° (slika 4), kamor približno sodijo naši kraji, in za 65° (slika 5). Širine okoli 65° naj bi bile namreč odločilne za nastanek ledenih dob. Te nastopijo tedaj, kadar deli zemeljske površine dobijo poleti premalo toplote, da bi se stalil ves led, ki je ostal od zime. Sliko 5 lahko primerjamo s podrobnostmi na sliki 2: kot vidimo, naš račun dokaj dobro reproducira posamezne strukture: vrh z visokimi temperaturami pred 10 tisoč leti, sedlast vrh z visokimi temperaturami med 30 in 45 tisoč leti, visoke temperature pred 75 in 100 tisoč leti, močno ohladitev pred 115 tisoč leti in zelo visoke temperature pred 125 tisoč leti (ta vrh navadno označujejo kot 5e ali 5,5 in ustreza eemianskemu interglacialu). Ohladitve nastopajo pred 20, 60 in 115 tisoč leti in štejejo kot poledenitve würm III, II in I. Od teh naj bi bila najhladnejša würm I (pred 115 tisoč leti), vendar dejanske klimatske meritve kažejo, da so bile tedaj temperature višje kot pri drugih dveh. Sliki 4 in 5 pa pokazeta, da na izbrani del zemeljske površine vedno posije največ toplote poleti in da je ravno ta toplota odločilna za klimatske spremembe.

Sklep

V prispevku smo prikazali preprost model za spremljanje klimatskih nihanj po Milankovičevem predlogu. Model se omeji na bistvene pojave, ki zajemajo relativno velikost dnevnega obseva in spreminjanje osnovnih astronom-



Slika 5. Izračunano relativno obsevanje za 65° severne širine.

skih parametrov. Računanje po predstavljenih izrazih je mogoče opraviti s preprostim računalniškim programom ali celo z navadnim kalkulatorjem. Seveda pa se mora bralec zavedati, da je spreminjanje klime odvisno še od mnogih drugih pojavov, ki niso zajeti v sedanjem modelu: površine Zemlje v obliki elipsoida, odbojnosti tal in vplivov atmosfere, kamor spadajo tako absorpcija sončnega sevanja kot učinki tople grede, in prenosov toplote z vetrovi in morskimi tokovi. Del teh pojavov je v model vključil že Milanković v prvi izdaji leta 1920. Z modelom lahko pogledamo tudi v prihodnost. Račun kaže, da bi v naslednjih nekaj tisoč letih morali pričakovati zmanjšanje temperature. Če se to ne bo zgodilo, bodo za to krivi toplogredni pojavi.

LITERATURA

- [1] M. J. Aitken, *Science-based dating in archaeology*, Longman, London 1990.
- [2] J. D. Hays, J. Imbrie in N. J. Shackleton, *Variation in the Earth's Orbit: Pacemaker of the Ice Ages*, *Science* **194** (1976), 1121–1132.
- [3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press 1976.
- [4] M. Milankovitch, *Théorie Mathématique des Phénomènes Thermiques Produits par la Radiation Solaire*, Gauthier-Villars, Paris 1920.
- [5] M. Milankovitch, *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeiten-problem*, Srpska kraljevska akademija, Beograd 1941.
- [6] Wikipedia; gesla: Milankovitch cycles, Milutin Milankovitch

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

O TOPLOTNIH STROJIH

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 05.79.-a

Ob naraščajoči porabi energije imajo toplotni stroji v elektrarnah še naprej odločilno vlogo. Na eni strani bolje razumemo njihovo delovanje, na drugi razvoj novih snovi in tehnik omogoča večje izkoristke. Prispevek kratko poroča o računu, ki delno upošteva irreverzibilnost, in o učinkoviti povezavi plinskih in parnih turbin.

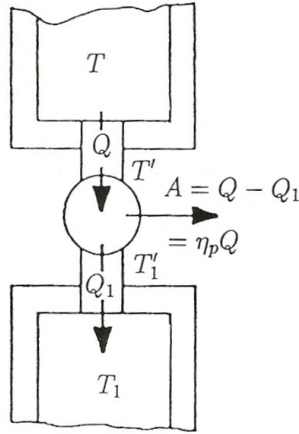
ON THERMAL ENGINES

In the growing energy demand the role of heat engines in electrical power plants remains crucial. On the one hand their functioning is better understood and on the other the development of new materials and technologies leads to greater efficiencies. A theoretical model is reported on in which irreversibility is partially taken into account as well as on the efficient combination of gas and vapour turbines.

Največja moč

Navadno nas pri toplotnih strojih, ki ponavljajo krožno spremembo, najbolj zanima največji dosegljivi izkoristek. S tem namenom izpeljemo izkoristek stroja, ki reverzibilno ponavlja Carnotovo krožno spremembo. Tak stroj bi deloval zelo počasi z zanemarljivo majhno močjo. Od uporabnega stroja pa pričakujemo veliko moč. Izkoristek, ki bolje ustreza uporabljenim toplotnim strojem, je mogoče izpeljati iz preprostih termodinamičnih zvez, če se ne ustrašimo precej dolgeveznega, a nezahtevnega računanja.

Stroj deluje z veliko močjo, če prejema velik toplotni tok in velik toplotni tok oddaja. Za to potrebuje končni temperaturni razliki. Vzemimo, da je T temperatura toplejšega toplotnega rezervoarja in T_1 temperatura hladnejšega rezervoarja (slika 1). Stroj sprejme toploto Q pri temperaturi $T' < T$ in odda toploto Q_1 pri temperaturi $T'_1 > T_1$. Temperaturna razlika $\Delta T = T - T'$ poganja toploto v stroj, temperaturna razlika $\Delta T_1 = T'_1 - T_1$ pa iz stroja v okolico. Temperaturni razliki ΔT in ΔT_1 vzamemo za spremenljivki, temperaturi rezervoarjev T in T_1 pa za konstanti. Običajno temperaturnih razlik ΔT in ΔT_1 sploh ne upoštevamo.



Slika 1. Temperaturni razliki $\Delta T = T - T'$ in $\Delta T_1 = T_1' - T_1$ na pregledni risbi toplotnega stroja poganjata toplotna tokova.

Vzemimo, da sta toplotna tokova sorazmerna s temperaturnima razlikama [1], [2]:

$$\frac{Q}{t} = k(T - T') = k\Delta T \quad \text{in} \quad \frac{Q_1}{t_1} = k_1(T_1' - T_1) = k_1\Delta T_1. \quad (1)$$

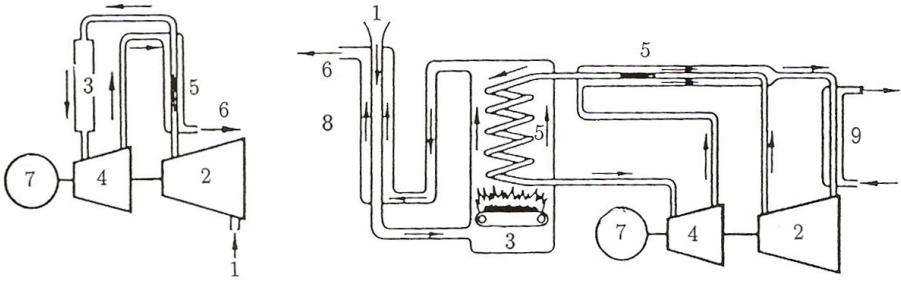
V najpreprostejšem primeru, pri prevajanju, sta koeficienta prehoda toplote $k = \lambda S/d$ in $k_1 = \lambda_1 S_1/d_1$ s toplotnima prevodnostma λ in λ_1 , površinama S in S_1 ter debelinama plasti d in d_1 , skozi kateri temperaturni razliki poganjata toplotna tokova. To naj bosta edini ireverzibilni spremembi v stroju. Adiabatsno razpenjanje in adiabatsno stiskanje naj potekata reverzibilno in hitro v primerjavi z izmenjavanjema toplote. Stroju dovedemo toploto Q in od njega odvedemo toploto Q_1 in delo $A = Q - Q_1$. Ker so spremembe z izjemo prenosov toplote reverzibilne, je izkoristek $A/Q = 1 - T_1'/T'$. Zato govorimo o *endoreverzibilnem stroju*. Krožna sprememba traja čas:

$$t + t_1 = \frac{Q}{k\Delta T} + \frac{Q_1}{k_1\Delta T_1}. \quad (2)$$

V tej zvezi *termodinamika končnega časa* zajame ireverzibilne spremembe, *termodinamika neskončnega časa* pa reverzibilne.

Toploti izrazimo s konstantnima temperaturama rezervoarjev T in T_1 ter spremenljivima temperaturnima razlikama ΔT in ΔT_1 :

$$Q = \frac{AT'}{T' - T_1'} = A \frac{T - \Delta T}{T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1} \quad \text{in}$$



Slika 2. Plinske turbine delujejo v odprtem krogu (levo) ali v zaprtem krogu (desno): 1 dovod zraka, 2 kompresor, 3 sežigna celica, 4 turbina, 5 toplotni izmenjalnik, 6 izpušni plini, 7 električni generator, 8 grelnik zraka, 9 hladilnik. Turbine v elektrarnah imajo pogosto zaprt krog, turbine v potisnih strojih pa odprtega.

$$Q_1 = \frac{AT'_1}{T' - T'_1} = A \frac{T_1 + \Delta T_1}{T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1}.$$

Stroj dela z močjo:

$$P = \frac{A}{t + t_1} = kk_1 \frac{\Delta T \Delta T_1 (T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1)}{k_1 T \Delta T_1 + k T_1 \Delta T + \Delta T \Delta T_1 (k - k_1)}. \quad (3)$$

Moč je največja, ko je $\partial P / \partial (\Delta T) = 0$ in $\partial P / \partial (\Delta T_1) = 0$. Odvajanje si olajšamo, če uvedemo števec $f = \Delta T \Delta T_1 (T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1)$ in imenovalcec $F = k_1 T \Delta T_1 + k T_1 \Delta T + \Delta T \Delta T_1 (k - k_1)$. Potem se pogoja glasita $f'F = fF'$, če črtica najprej zaznamuje odvajanje po ΔT in potem po ΔT_1 . Enačbi, ki ju dobimo z odvajanjem, skrčimo:

$$k_1 T \Delta T_1 (T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1) = \Delta T (k_1 T \Delta T_1 + k T_1 \Delta T + (k - k_1) \Delta T \Delta T_1) \quad (4)$$

in

$$k T_1 \Delta T (T - T_1 - \Delta T - \Delta T_1) = \Delta T_1 (k_1 T \Delta T_1 + k T_1 \Delta T + (k - k_1) \Delta T \Delta T_1). \quad (5)$$

Prvo enačbo delimo z drugo:

$$\frac{k_1 T \Delta T_1}{k T_1 \Delta T} = \frac{\Delta T}{\Delta T_1} \quad \text{in} \quad \Delta T_1 = \sqrt{\frac{k T_1}{k_1 T}} \Delta T. \quad (6)$$

Z drugo enačbo (6) odpravimo temperaturno razliko ΔT_1 iz enačbe (4). Po preureditvi preostane kvadratna enačba:

$$(1 - k/k_1)(\Delta T)^2 - 2(\sqrt{k T_1/k_1 T} + 1)T \Delta T + T(T - T_1) = 0.$$

Izberemo rešitev z negativnim znakom, ki zagotovi, da je $\Delta T = 0$, če postavimo $T = T_1$:

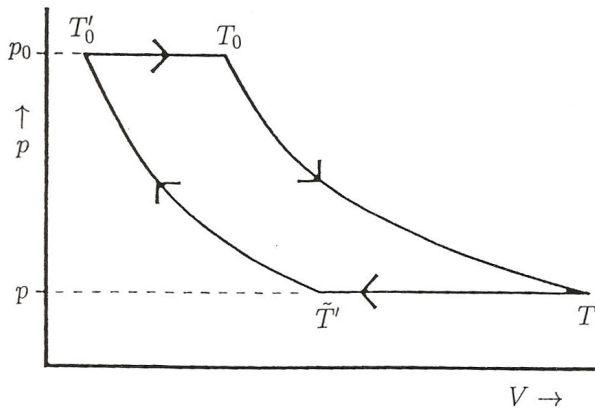
$$\Delta T = T \frac{1 - \sqrt{T_1/T}}{1 + \sqrt{k/k_1}} \quad \text{in} \quad \Delta T_1 = T_1 \frac{\sqrt{T/T_1} - 1}{1 + \sqrt{k_1/k}}. \quad (7)$$

Dodali smo rešitev za drugo temperaturno razliko, ki sledi, ko dobljeno rešitev ΔT vstavimo v drugo enačbo (6). Z enačbama (7) izračunamo razmerje temperatur:

$$\frac{T'_1}{T'} = \frac{\Delta T_1 + T_1}{T - \Delta T} = \sqrt{\frac{T_1}{T}}.$$

Tako dobimo nazadnje za izkoristek stroja pri največji moči:

$$\eta_P = \frac{A}{Q} = 1 - \frac{T'_1}{T'} = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T}}. \quad (8)$$



Slika 3. Delovanje plinske turbine v diagramu pV opiše idealizirana krožna sprememba. Od T'_0 do T_0 plin dobiva toploto pri konstantnem tlaku p_0 , od T do \tilde{T}' jo oddaja pri konstantnem tlaku p . Spremembi od T_0 do T in od \tilde{T}' do T'_0 potekata adiabatno, to je brez izmenjavanja toplote.

Presenetljivo je tudi ta izkoristek odvisen samo od temperatur obeh rezervoarjev. Izračunani izkoristki se dobro ujemajo z izmerjenimi podatki za stroje v elektrarnah na premog, jedrskih elektrarnah in elektrarnah na zemeljsko toploto [1]. Podatki za Termoelektrarno Šoštanj se ujemajo nekoliko slabše. Pričakujemo, da je izkoristek η_P nekoliko večji od doseženega izkoristka η_d , ker upošteva samo del ireverzibilnosti.

	P	T	T_1	η_C	η_P	η_d
blok 3	75 MW	803 K	300 K	0,63	0,39	0,28
blok 4	275	818	295	0,64	0,40	0,32
blok 5	345	818	295	0,64	0,40	0,32

Pomnožimo enačbo (8) z $1 + \sqrt{T_1/T}$ in prepoznamo v $1 - T_1/T = \eta_C$ Carnotov izkoristek: $\eta_C/\eta_P = 1 + \sqrt{T_1/T}$. Iz te zveze sledi, da za $0 < T_1 < T$ velja neenačba $\frac{1}{2}\eta_C < \eta_P < \eta_C$.

Največja moč po enačbi (3) je odvisna od koeficientov prehoda toplote:

$$P_0 = kk_1 \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{k} + \sqrt{k_1}}.$$

Čeprav je računanje dolgovezno in je pri njem treba uporabiti več drobnih računskih zvijač, sta rezultata preprosta.

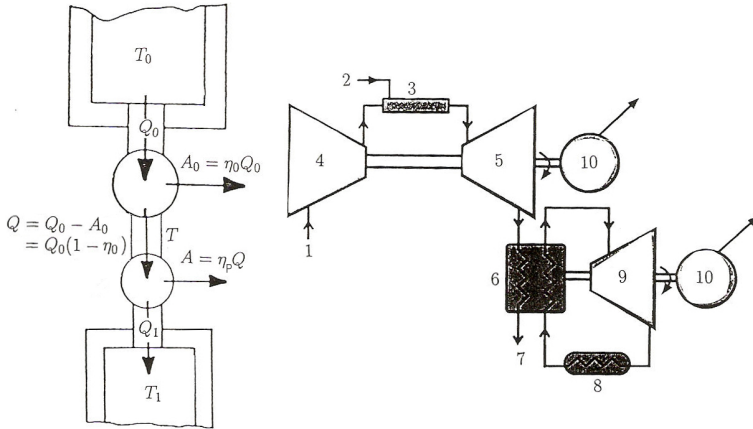
Povezava plinske turbine s parno

V elektrarnah so parne stroje nadomestile parne turbine.¹ Preprosta in znana pot do izkoristka za parni stroj, ki ponavlja Carnotovo krožno spremembo, je uporabna tudi za parno turbino. Pri tem delovna snov izpareva in se utekočini. Izkoristek parnih turbin v elektrarnah za malenkost presega $\frac{1}{3}$. V želji, da bi dosegli večji izkoristek, so v zadnjem času začeli uporabljati povezavo parne turbine s plinsko turbino. V plinskih turbinah se delovni plin ne utekočini. Zanje je značilna visoka temperatura na vходу.²

Plinska turbina ima slabost, da je razmeroma visoka tudi temperatura na izhodu. To pomanjkljivost odpravijo s povezavo s parno turbino, ki jo poganja oddana toplota plinske turbine. Plinska turbina je pripravnejša od parne turbine za delovanje pri visoki temperaturi, parna turbina pa zmanjša toplotno obremenitev okolja s tem, da zmanjša razliko med temperaturo, pri kateri stroj odda toploto, in temperaturo okolice. Plinska turbina ima še prednost, da jo je mogoče v kratkem času pognati. Zato imajo take turbine v elektrarnah dostikrat v pripravljenosti in jih vključijo, ko naraste potreba po moči. Poznamo *plinske turbine z odprtim krogom*, ki zajemajo zrak iz okolice

¹Sodobno parno turbino je leta 1894 za pogon ladij patentiral angleški fizik in inženir Charles Parsons, če ne omenjamo poskusov pred tem. Njegova prva turbina je dosegla moč nekaj kilovatov. Do danes so razvili turbine, ki zmorejo več sto megavatov. Parsonsova turbina in njene izvedbe so pospešile razvoj pomorskega prometa in električnega omrežja.

²Napravo, ki je imela vse glavne poteze sodobne plinske turbine, je leta 1791 patentiral Anglež John Barber za „vozilo brez konja“. V razvoju turbin za pogon vozil in letal so do danes prispevali številne izboljšave. Prvo elektrarno s plinsko turbino so pognali v Švici leta 1939.



Slika 4. Povezava plinske in parne turbine doseže ugoden izkoristek: pregledna risba (levo) in poenostavljena risba povezave (desno): 1 dovod zraka, 2 dovod plina ali goriva, 3 sežigna celica, 4 kompresor, 5 plinska turbina, 6 toplotni izmenjevalnik, 7 odvod odpadne toplote, 8 hladilnik, 9 parna turbina, 10 električna generatorja, priključena na omrežje.

in izgorele pline odvajajo v okolico, in *plinske turbine z zaprtim krogom*, ki jim dovajajo le toploto in od njih odvajajo le toploto in delo (slika 2). Plinske turbine uporabljajo tudi za pogon reaktivnih in turbopropelerskih letal in raket ter ladij. Te turbine so manjše in lažje od turbin v elektrarnah in uporabljajo drugačna goriva.

Najprej nekoliko podrobneje opišimo delovanje plinske turbine. Kompresor močno stisne zrak. V stisnjeni in segreti zrak uvedejo gorivo, ki zgore. Vroč plin se razpne in požene turbino. Plin pri tlaku, ki ni znatno večji kot okolni tlak, nato odvedejo v okolico. Kot gorivo večinoma uporabljajo zemeljski plin, metan in plin, ki ga dobijo iz premoga. Stiskanje zraka v kompresorju približno opišemo z adiabatno spremembo idealnega plina, gorenje mešanice s spremembo pri konstantnem velikem tlaku p_0 , razširjanje vročega plina v turbini z drugo adiabatno spremembo in odvajanje plinov z drugo spremembo pri konstantnem manjšem tlaku p .³ Pri tlaku p_0 dovedejo toploto $Q_{p0} = mc_p(T_0 - T'_0)$ in pri tlaku p odvedejo toploto $Q_p = mc_p(T - \tilde{T}')$ (slika 3). Za Carnotov izkoristek dobimo $\eta_C = 1 - Q_p/Q_{p0} = 1 - (T - \tilde{T}')/(T_0 - T'_0)$. Adiabatni spremembi povezuje enačba za idealni plin: $\tilde{T}'/T'_0 = T/T_0 = (p/p_0)^{(\kappa-1)/\kappa}$, ki da $\eta_C = 1 - \tilde{T}'/T'_0$.

³Opisano krožno spremembo imenujejo po Jamesu Prescottu Joulu, ki si jo je zamislil leta 1851. Cenejši in preprostejši „zračni stroj“ naj bi nadomestil parni stroj. Včasih spremembo imenujejo še po ameriškem inženirju Georgeu Braytonu. Dvajset let po Joulovem predlogu je izdelal batni stroj z notranjim zgorevanjem, ki je ponavljal tako krožno spremembo, a je dosegel preslab izkoristek, da bi se uveljavil.

Izkoristek pri največji moči je potem po (8) enak [3]:

$$\eta_P = 1 - \sqrt{T/T_0} = 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}\kappa/(\kappa-1)}. \quad (9)$$

Povezava plinske in parne turbine (slika 4) je precej učinkovita in ji obetajo pomembno vlogo v prihodnosti. Plinski turbini dovedejo toploto Q_0 pri temperaturi T_0 ter od nje odvedejo delo $A_0 = Q_0 - Q = \eta_{P0}Q_0$ in pri temperaturi T toploto $Q = Q_0 - A_0 = (1 - \eta_{P0})Q_0$. Toploto Q dovedejo parni turbini pri temperaturi T , če zanemarimo toplotne izgube pri prenosu. Parna turbina odda delo $A = \eta_P Q$ in pri temperaturi T_1 toploto $Q_1 = Q - A = (1 - \eta_P)Q$. Pri izvedbi, ki jo zdaj največ uporabljajo, poganjata turbini vsaka svoj generator. Tako obe oddasta skupaj delo $A_0 + A = \eta_{P0}Q_0 + \eta_P Q = \eta_{P0}Q_0 + \eta_P(1 - \eta_{P0})Q_0$. Skupni izkoristek obeh turbin je:

$$\eta_{Ps} = \frac{A_0 + A}{Q_0} = \eta_{P0} + \eta_P - \eta_P \eta_{P0}. \quad (10)$$

V nekaterih napravah poganjata obe turbini en sam generator.

Osamljena plinska turbina ima podoben izkoristek kot parna turbina. Premišljena povezava obeh turbin pa doseže izkoristek okoli 60 %. Za zgled navedimo plinsko turbino, ki deluje med temperaturama $T_0 = 1673$ K in $T = 873$ K in ki ji ustreza temperatura $\tilde{T}' = 582$ K, z izkoristkom $\eta_{P0} = 0,42$. Parna turbina deluje med temperaturama $T = 873$ K in $T_1 = 350$ K z izkoristkom $\eta_P = 0,32$. Skupni izkoristek povezanih turbin doseže $\eta_{Ps} = 0,60$ [3]. Ena sama turbina ne bi mogla izkoristiti temperaturnega intervala od 1673 K do 350 K.

Delovanje plinskih turbin je vezano na razvoj novih tehnik in novih snovi. Njihovo delovanje izboljšajo s spretno uporabo toplotnih izmenjevalnikov ter vmesnih grelnikov in hladilnikov. Plinsko turbino sestavlja veliko delov, ki morajo ustrezati skrajnim zahtevam. Tako morajo na primer konice lopatic v njej pri visoki temperaturi prenesti hitrost, ki znatno presega hitrost zvoka v zraku.

LITERATURA

- [1] F. I. Curson in B. Ahlborn, *Efficiency of a Carnot engine at maximum power output*, Am. J. Phys. **43** (1975), 22–24.
- [2] H. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, Wiley, New York, 1985, str. 125.
- [3] H. S. Leff, *Thermodynamics of combined-cycle electric power plants*, Am. J. Phys. **80** (2012), 515–518.

ENTROPIJA IN NERED

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

J. Strnad je opisal nekaj napak, ki so pogoste v fizikalnih učbenikih [1]. Omenil je tudi težave pri nazorni opredelitvi entropije kot merilu za nered, saj je pojem nereda težko smiselno opredeliti. Navaja, da je težko uvideti, da se pri reverzibilnih pojavih nered toplotno izoliranega sistema ne spremeni. Prav tako naj ne bi bilo jasno, zakaj ima kos snovi s prostornino $2V$ dvakrat večji „nered“ kot enak kos snovi s prostornino V pri enakih okoliščinah. Končno poda primer računa povečanja entropije pri podhlajeni vodi, ko del vode ireverzibilno zmrzne. Menim, da je v šoli smiselno povezati entropijo s kakšnim intuitivnim pojmom. Študentje si gotovo izdelajo svoj mentalni model za entropijo, ki pač ni povezan z verjetnostno gostoto v faznem prostoru. Preprost primer, ki morda ni vseobsežen, a je dovolj bogat, da študentom pomaga, je morda naslednji:

1. Razpršenost ali nered?

Zamislimo si N neinteragirajočih delcev na premici, ki so vsi vezani na skupno izhodišče s harmonično silo, to je silo, s katero deluje na delec pripeta vzmet:

$$F = -kx.$$

Delci so v toplotnem ravnovesju, torej je povprečna kinetična energija posameznega delca enaka njegovi povprečni potencialni energiji, to je $k_B T/2$, pač po ekviparticijskem teoremu. Velja torej:

$$\frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{k}{2} \langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}.$$

S trikotnimi oklepaji smo označili povprečne vrednosti količin, ki jih oklepajo. Sedaj pa si mislimo, da v toplotno izoliranem sistemu teh delcev počasi zmanjšujemo konstanto vzmeti k . Notranja energija sistema teh delcev se seveda začne spreminjati, ker se pri tem spreminjata $\langle p^2 \rangle$ in $\langle x^2 \rangle$. Le kako? Iz enačb, ki vodijo posamezen delec:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}, \\ \frac{dp}{dt} &= -kx, \end{aligned}$$

hitro izpeljemo, da veljajo za povprečne vrednosti tele enačbe:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= \frac{2}{m} \langle xp \rangle, \\ \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} &= -2k \langle xp \rangle, \\ \frac{d\langle xp \rangle}{dt} &= \frac{1}{m} \langle p^2 \rangle - k \langle x^2 \rangle.\end{aligned}$$

Pri stacionarnem stanju je torej $\langle xp \rangle = 0$ in zato iz zadnje enačbe sledi enakost povprečne kinetične in prožnostne energije. Pri prav počasnem spreminjanju konstante k gremo skozi virtualno stacionarna stanja in iz zgornjih enačb kaj hitro sledi

$$dW_n = N \frac{\langle x^2 \rangle}{2} dk.$$

Spremembo notranje energije W_n torej lahko izračunamo brez težav. Pri povečevanju konstante k notranja energija torej narašča. Kako pa je v tem primeru s povprečjema $\langle x^2 \rangle$ in $\langle p^2 \rangle$?

Hitro se prepričamo, da pada $\langle x^2 \rangle$ kot $k^{-1/2}$, $\langle p^2 \rangle$ pa raste kot $k^{1/2}$. Gre torej za adiabatno stiskanje sistema, kjer se prostornina manjša, temperatura pa povečuje. Ker je sistem izoliran, lahko spremembo notranje energije pripišemo delu zunanje sile, ki nekako uravnava konstanto k .

Sedaj pa definirajmo entropijo sistema kot

$$S = N \frac{k_B}{2} \ln (\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp \rangle^2).$$

V tej definiciji je pri $\langle xp \rangle = 0$ nered dobro definiran kot razpršenost lege in razpršenost gibalne količine vseh delcev. Sistem z dvakrat večjim številom delcev ima torej dvakrat večjo entropijo. Brez težav uvidimo, da je tako definirana entropija pri toplotno izoliranem sistemu konstantna, torej

$$\exp S \frac{dS}{dt} \propto \frac{d}{dt} (\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp \rangle^2) = 0.$$

Mimogrede, zgornja enačba velja tudi pri nenadni spremembi koeficienta k , ko sistem ni stacionaren. Pri reverzibilni spremembi sistema v toplotnem kontaktu z rezervoarjem pa velja, kot smo navajeni

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Kako, da se „nered“ pri $dS = 0$ ne spremeni? Razpršenost lege se zmanjša, razpršenost gibalne količine pa poveča, skupni „nered“ torej ostane enak.

Pri delcih, zaprtih v enodimenzionalno „škatlo“ z dolžino L , velja pri spremembi toplotno izoliranih delcev enačba:

$$L\langle p^2 \rangle \propto LT = \text{konst.}$$

Entropijo stacionarnega stanja torej definiramo tu kot

$$S \propto \ln(L\langle p^2 \rangle).$$

Pod „neredom“ spet razumemo razpršenost lege delcev, ki je kar sorazmerna z dolžino „škatle“ L , in razpršenost gibalne količine.

Pri idealnem plinu v treh dimenzijah imamo podobne razmere. Tu je nedoločena lege povezana s prostornino plina, nedoločena gibalna količina pa s temperaturo, saj velja

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{3}{2}k_B T$$

in pri reverzibilni spremembi izoliranega plina

$$V^{\kappa-1}T = \text{konst.}$$

Entropija je potem do aditivne konstante

$$S = mc_V \ln(V^{\kappa-1}\langle p^2 \rangle).$$

Njena sprememba pri toplotno izoliranem sistemu je seveda res

$$dS = 0.$$

Tu takoj uvidimo, da razpršenost lege v definiciji entropije nikakor ni enotna, saj je pri idealnem plinu le-ta odvisna od parametra κ .

Če vidimo v razpršenosti lege delcev in njihove gibalne količine „nered“, je povezava entropije z „neredom“, vsaj na osnovni stopnji pouka, čisto smiselna. Morda je „razpršenost energije in lege“ za entropijo boljša intuitivna povezava od ohlapno razumljenega „nereda“.

2. Podhlajena voda?

Študentom fizike je znan stavek iz učbenika I. Kuščerja in S. Žumra [2]: „Kako naj sicer razumemo, da je „nered“ v podhlajeni vodi manjši kot potem, ko ustrezni del vode ireverzibilno zmrzne?“ Izraža pač dvom o povezavi entropije in „nereda“. Voda je sicer vsakdanja snov, ni pa preprosta snov. Podhlajena voda pa je še bolj zapletena, saj njene lastnosti še vedno proučujejo. Je pa seveda presenetljivo in za pouk zanimivo, da na videz običajna voda kar nenadoma „pobegne“, del jo zmrzne, vse skupaj pa se segreje do

ledišča. Nekatere podhlajene snovi z višjo temperaturo ledišča so celo uporabne kot vir toplote, ki ga na izletu po želji aktiviramo.

J. Strnad v [1] navaja, da je sprememba entropije podhlajene vode, ko le-ta „uide“ in vidimo led in nekaj vode, podana z:

$$\Delta S = mc_p \left(\ln \frac{T_0}{T} - 1 + \frac{T}{T_0} \right).$$

Tu je T_0 temperatura ledišča, T pa temperatura podhlajene vode, ko še ni zmrznila. Res je sprememba pozitivna, kot se pri ireverzibilni spremembi spodobi, a je zelo majhna, iz zgornje enačbe sledi z razvojem:

$$\Delta S \approx \frac{mc_p}{2} \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2.$$

Tu smo z ΔT označili razliko med temperaturo ledišča T_0 in temperaturo podhlajene vode T . Tako majhna sprememba pa kliče po previdnosti. Ali smo spremembo entropije podhlajene vode in vode pri ledišču res dobro izračunali iz

$$\Delta S_p = \int \frac{dQ}{T} ?$$

To je sicer dobra ocena, a povsem prav seveda to ni, saj ne bi smeli uporabiti enačaja, ker hladimo vodo prek metastabilnih in ne stacionarnih stanj. Vsak hip nam voda lahko „pobegne“ v led. Entropijo takih stanj je verjetno nemogoče natančno določiti. Kako pa bi to storili bolje? Morda je boljša pot, da vodo hladimo in ji obenem povečujemo tlak. S tem preprečimo, da bi zmrznila. Tlaki so sicer neverjetno veliki, a tovrstni poskus je izvedljiv. Ko dosežemo temperaturo T , tlak popustimo na začetno vrednost in seveda upamo, da nam pri tem voda ne „pobegne“. Med popuščanjem moramo vodo dodatno greti, saj oddaja delo in bi se izolirana ohladila pod T . S podatki o stisljivosti vode pri povečanem tlaku, krivulji tlaka v odvisnosti od temperature vode, pri katerem ravno preprečimo zmrzovanje, dobimo za ΔS vrednost, ki je še manjša od zgoraj navedene. Torej je razprava o večjem „redu“ v podhlajeni vodi kot potem, ko le-ta „pobegne“, in trditvi, da „nereda“ in entropije pač ne gre povezovati, vsaj s pedagoškega stališča šibka. Kako se nedoločenosti leg in gibalnih količin molekul v podhlajeni vodi spremenijo potem, ko voda „pobegne“ pa res ne moremo z lahkoto uvideti, še posebno, če so te spremembe zelo majhne. Res pa je, da je razlika med „pobeglo“ in podhlajeno vodo na videz izredno velika, a za „pobeg“ gotovo ni odločilna le razlika entropij.

Morda bo ta zapis v prid študentom in tudi učiteljem pri „boljši razlagi in utemeljitvi [2]“.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *O napakah v učbenikih fizike*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012), str. 225.
 [2] I. Kuščer in S. Žumer, *Toplota*, DMFA–založništvo 1987, stran 139.

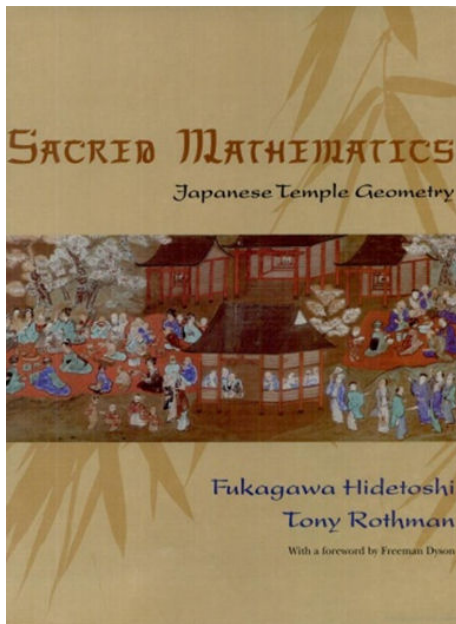
Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman: Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry, 2008, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 348 strani.

Knjiga predstavi matematično vsebino in širši kulturni kontekst *geometrije sangaku* (japonske tempeljske geometrije), ki je cvetela v času japonske izolacije od Zahoda (1639–1854), kot del tradicionalne japonske matematike (*wasan*) iz obdobja Edo (1603–1867). Razvila se je povsem neodvisno od zahodne matematike, ki jo odkriva in proučuje še zadnjih nekaj desetletij.

Marsikaj v zvezi s to skrivnostno geometrijo, s katero se niso ukvarjali samo profesionalni matematiki, ampak tudi amaterji, otroci, ženske, samuraji in trgovci, rezultate pa brez dokazov izobešali na lesene deščice v budističnih in šintoističnih templjih, bralca osupne in fascinira. Izraz *sangaku* dobesedno pomeni „matematična tablica“.

V sangaku problemih nastopajo dotikajoči se liki, kot so krogi, elipse, trikotniki in pravilni mnogokotniki, iščejo pa se algebraične relacije med njihovimi parametri. Da je bila ta eksotična različica evklidske geometrije rešena pozabe in spoznana kot vredna preučevanja, gre zasluga enemu samemu človeku, matematiku Yamaguchiju Kanzanu, o čigar življenju vemo le naslednje: „Rojen je bil okrog 1781 v Suibari v provinci Niagata, študiral je matematiko v obdobju Edo v šoli Hasegawa Hiroshija in umrl 1850.“ Njegova 700 strani dolga beležnica oziroma popotni dnevnik iz let 1817–1828 z njegovih šestih potovanj po vsej Japonski vsebuje glavnino tega, kar danes vemo o geometriji sangaku in njenih nenavadno težkih problemih, za rešitev katerih je včasih treba nekaj strani dokazov in nekaj let dela.

Knjiga je razdeljena na devet poglavij; prva tri predstavijo širši kontekst tradicionalne japonske matematike, ki je sicer izšla iz kitajske matematike,



a jo je nadgradila z izvirnimi problemi, metodami in rezultati. Naslednja tri poglavja so posvečena lahkim, srednje težkim in težjim problemom geometrije sangaku, nekateri problemi so tudi rešeni, drugi pa prepuščeni v reševanje bralcu. Sedmo poglavje predstavi Yamaguchijev popotni dnevnik, osmo primerja vzhodno in zahodno matematiko, deveto pa predstavi skrivnostno krožno načelo (*enri*), s katerim so se Japonci zelo približali integralnemu računu pri določevanju dolžin lokov ter površin likov in prostornin teles. Zadnje poglavje je posvečeno metodi inverzije, ki so jo neodvisno drug od drugega iznašli različni zahodni matematiki v letih 1824 do 1845 in je z njo mogoče razmeroma enostavno rešiti mnoge sangaku probleme. Tradicionalni japonski matematiki inverzije niso poznali. Za nekatere sangakuje še danes ne poznamo rešitve.

Avtorja knjige opozarjata, da je za rešitev teh problemov treba uporabiti tako rekoč vse, kar vemo v zvezi z evklidsko geometrijo: Pitagorov izrek, izreke o podobnosti trikotnikov, trigonometrijo (predvsem sinusni in kosinusni izrek, izreke o dvojnih in polovičnih kotih), izrek o sekajočih se tetivah (produkt odsekov tetiv, ki se sekata v isti notranji točki danega kroga, je enak: $ab = cd$), za težje probleme pa potrebujemo tudi diferencialni in integralni račun ter metode afine in projektivne geometrije. Prav tako je zelo pomembno, da narišemo natančno sliko, pri čemer nam je lahko v veliko pomoč npr. računalniški program Geogebra. Ta nam omogoča tudi uporabo inverzije (posebne preslikave ravnine, ki ohranja kote in obrne orientacijo), s pomočjo katere lahko mnoge sangaku konfiguracije preslikamo v enostavnejše, določimo relacije med preslikanimi liki in jih prevedemo v relacije med liki prvotne konfiguracije.

Tradicionalni japonski matematiki so dokazali marsikateri izrek evklidske geometrije (npr. Descartesov izrek o relaciji med radiji štirih krogov, ki se dotikajo v šestih točkah). Mnoge izreke so dokazali tudi pred zahodnimi matematiki ali vsaj neodvisno od njih (npr. Seki Takakazu je razvil teorijo determinant pred Leibnizem). Bili so izredno spretni v numeričnih izračunih in uporabi *sarobana* (japonskega abakusa). Z uporabo več sarobanov hkrati so znali reševati tudi polinomske enačbe visokih stopenj. Razvili so zelo domiselne metode za izračun števila π , marsikatero funkcijo so znali razviti v neskončno vrsto in si pri računanju ločnih dolžin in prostornin teles pomagali z integracijo posameznih členov neskončnih vrst integrandov. S stališča današnje matematike sicer v njihovem delu primanjkuje strogih

dokazov, vendar se moramo zavedati, da pred nekaj stoletji tudi zahodni matematiki niso imeli povsem razčiščenih pojmov glede dovoljenih operacij nad neskončnimi vrstami. Japonski matematiki so do svojih rezultatov dostikrat prišli na podlagi induktivne, eksperimentalne metode, podprte z natančnimi in obsežnimi izračuni, podobno kot matematiki danes v številnih praktičnih aplikacijah uporabljajo marsikatero modele in algoritme, ki jih lahko testirajo ali preverijo le empirično, ne pa tudi teoretično.

Knjiga, ki nam omogoča vpogled v drugačno kulturo in drugačen način razmišljanja, dodobra omaja ustaljeno zdravorazumsko prepričanje, da je matematika univerzalna znanost, ki mora biti enaka v vseh kulturah in vesoljih. Tradicionalna japonska matematika se od tiste, ki smo je vajeni na Zahodu, diametralno razlikuje tako po svojih problemih kot tudi po metodah in rezultatih.

Čeprav se sangakujji današnjemu matematiku na prvi pogled morda zdijo matematično nepomembni, pa bi bilo o njih vendarle vredno razmisliti vsaj kot o področju, ki bi lahko s svojimi privlačnimi problemi približalo geometrijo (danes povsem zapostavljeno v srednjih šolah) in s tem matematiko dijakom. Reševanje sangakujjev razvija logično mišljenje, razmišljanje o možnih novih problemih, ki si jih lahko zastavimo ob dani sangaku konfiguraciji, pa spodbuja ustvarjalno mišljenje. Poleg tega je sangakuje mogoče rešiti na veliko različnih načinov, po čemer se izrazito razlikujejo od nalog v mnogih učbenikih, ki omogočajo le šablonsko rešitev po ustaljenih receptih. Nadarjeni dijaki se ob reševanju težjih sangakujjev, ki zahtevajo nekaj strani dokazov, lahko naučijo vztrajnosti in potrpežljivosti ter urijo v domiselnosti in prodornosti, to pa so kvalitete, ki koristijo tudi pri študiju in znanstvenoraziskovalnem delu.

Vsekakor se moremo od sangakujjev naučiti vsaj to, da je matematika lahko tudi lepa in ne le praktično koristna. V sangakujjih lahko najdemo tudi obilo navdiha za nove matematične hipoteze in probleme. Lahko pa enostavno uživamo v pregledovanju dokazov rešenih sangakujjev ali jih poskušamo rešiti sami. Za vse zainteresirane, ki jim knjige ne bi uspelo dobiti v knjižnici (trenutno obstaja en sam izvod v Tehnični knjižnici Slovenije), pa tolažilna novica: precej sangakujjev in njihovih rešitev zlahka najdemo tudi na spletu.

Jurij Kovič

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA 2012

Zoisove nagrade in priznanja, priznanja Ambasador znanosti ter Puhova priznanja za leto 2012 so bila podeljena 23. novembra v Novi Gorici. Med prejemniki Zoisovih nagrad in priznanj so tudi člani našega društva: prof. dr. Janez Bonča, prof. dr. Boštjan Golob in prof. dr. Samo Korpar. Vsem nagrajencem iskreno čestitamo za uspeh in priznanje.

Več o drugih nagrajencih na [1].

Janez Bonča je prejel Zoisovo nagrado za vrhunske dosežke v raziskavah na področju teorije močno sklopljenih elektronov v trdnih snoveh.



Slika 1. Janez Bonča

Zaposlen je kot redni profesor na oddelku za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je pa tudi znanstveni svetnik na Institutu Jožef Stefan. Doktoriral je leta 1990 na Univerzi v Ljubljani, bil na podoktorskem usposabljanju v Nacionalnem laboratoriju v Los Alamosu, ZDA, in gostoval kot profesor na Univerzi Tohoku, Japonska. Za svoje raziskovalno delo je prejel tudi nagrado Borisa Kidriča za mlade raziskovalce in Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke.

Njegovo delovno področje je teorija trdne snovi, kjer raziskuje močno sklopljene elektrone z metodami kvantnega Monte Carla in reducirane baze, ki omogočajo natančno obravnavo tudi neomejenih sistemov. To metodo je osnoval na točni diagonalizaciji v omejenem funkcijskem prostoru, kjer se baza stanj postopoma gradi iz začetnega stanja z delovanjem hamiltonskega operatorja. Tak pristop omogoča razlago lastnosti nizko dopiranih visokotemperaturnih superprevodnikov. Metodo je posplošil za izračun neravnovesnih pojavov, ki so pomembni za razumevanje ultrahitre spektroskopije. Kot prvi je s sodelavci določil električni tok v odvisnosti od zunanega

električnega polja v zaprtih kvantnih sistemih. S sodelavci je tudi uvedel metodo, ki omogoča izračun prevodnosti skozi sklopljene kvantne pike. Odkrili so obstoj nenavadnih osnovnih stanj ter faznih prehodov med njimi, kar nakazuje možnost razvoja nanotranzistorskih preklopnikov in spinskih filtrov.

Zoisovo priznanje za pomembne dosežke v eksperimentalni fiziki osnovnih delcev so prejeli prof. dr. Boštjan Golob, prof. dr. Samo Korpar in prof. dr. Marko Starič.



Slika 2. Boštjan Golob, Samo Korpar, Marko Starič

Boštjan Golob je zaposlen kot redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani ter je znanstveni svetnik na Institutu Jožef Stefan. Po diplomu je raziskovalno delal na Odseku za eksperimentalno fiziko delcev Instituta Jožef Stefan in v Evropskem laboratoriju za jedrske raziskave CERN v Ženevi. Leta 1996 je doktoriral na Univerzi v Ljubljani. Na podoktorskem usposabljanju je bil v CERNU, Švica, in se kasneje priključil skupini Belle v Tsukubi na Japonskem.

Njegovo delovno področje je fizika osnovnih delcev, kjer raziskuje mezone B, kršitev simetrije CP in redke razpade mezonov B in D.

Samo Korpar je zaposlen kot profesor na Univerzi v Mariboru in kot raziskovalec na Institutu Jožef Stefan. Doktoriral je leta 1997 na Univerzi v Ljubljani.

Njegovo delovno področje je fizika osnovnih delcev, kjer se raziskovalno ukvarja z detektorji sevanja in sodeluje pri meritvah razpadov mezonov B.

Boštjan Golob, Samo Korpar in Marko Starič so priznanje prejeli za raziskave mezonov s čarobnim kvarkom, pri katerih so odkrili, da se mezoni pretvarjajo v svoje antidelce. Njihove raziskave so pokazale, da na teh mezonih lahko raziskujemo lastnosti močne interakcije med kvarki. Za svoje raziskave so med drugim razvili tudi nove eksperimentalne metode za identifikacijo delcev.

LITERATURA

- [1] http://www.mizks.gov.si/nc/si/medijsko_sredisce/novica/article//7795/, dostop 3. 12. 2012

Aleš Mohorič

MATEMATIČNE NOVICE

Matematika planeta Zemlje

Mednarodna matematična unija (IMU) se je pred tremi leti odločila, da bo v letu 2013 organizirala razne dejavnosti pod skupnim naslovom *Matematika planeta Zemlje (MPE, Mathematics of Planet Earth)*. S tem naj bi pokazali, kako matematika pomaga pri študiju in reševanju problemov na našem planetu. Priključili so se tudi UNESCO in mnoge strokovne organizacije. Matična stran za MPE je [1]. Poudarek je seveda na matematičnih dejavnostih, povezanih z vsem razumljivimi temami. Navedimo nekaj primerov.

Ameriški matematik *Ken Golden* študira taljenje ledu na Arktiki in Antarktiki. Iz univerzitetnega kabineta se večkrat preseli v negostoljubna ledena prostranstva, kjer je doživel več napetih situacij. Z vpogledom v stanje na kraju samem je razvil izpopolnjene modele. V njih recimo upošteva, da jezerca staljene vode na ledenikih pospešujejo taljenje, saj absorbirajo bistveno več sončne toplote kot beli led. Morski led pa ima zapleteno, nestalno strukturo. Za študij takih materialov je uporabil tudi fraktale. Kot pravi članek [2] s posrečenim naslovom: *Matematik stopa na tanek led*, je postal nekakšen matematični Indiana Jones in ljudje stojijo v vrsti za njegove avtogramе.

Če razumete nemško, lahko na [3] preberete zanimiv intervju, objavljen v nemškem časopisu *Die Welt*. Matematik *Erhard Behrends* kratko in stvarno razloži vlogo sodobne matematike, pa tudi njeno percepcijo v družbi. Videti je, da je akcija MPE uspešna, saj poljudnoznanstvene revije in časopisi matematiki posvečajo v tem letu precej pozornosti.

Mnogo snovi za MPE je objavljeno na novi spletni strani, ki si je zadala ambiciozen cilj postati Youtube za matematiko.

Spletni portal IMAGINARY – prosto dostopna matematika

Matematični raziskovalni inštitut v Oberwolfachu je postavil spletni portal IMAGINARY [4], na katerem najdemo razne prosto dostopne materiale (z licenco CC – Creative Commons) za ilustracijo in popularizacijo matematike, in to v več jezikih. Prvi dve leti portal financira nemška ustanova (sklad), ki ga vodi zaslužni profesor fizike *Klaus Tschira*. Med zanimivejšimi prispevki navedimo *modeliranje ledenika* [5], *upodobitve celotne Zemlje na listu papirja* [6], *dvojno nihalo* [7] in *merjenje paralakse* [8], prispevek našega fizika *Tineta Goleža*. V tem članku je v sodelovanju s kolegi iz Južnoafriške republike (ki so fotografirali nočno nebo sočasno z ljubljanskimi kolegi) izmerjena razdalja do Lune.

Na strani IMAGINARY priporočam še ogled vpliva potresnih valov na razne gradbene objekte [9]. Posamezne frekvence imajo bistveno različne vplive na deformacije.

Predavanje Volkerja Mehrmanna iz raziskovalnega središča Matheon in Tehnične univerze v Berlinu

Na matematičnem kolokviju na FMF je 15. marca 2013 predaval profesor Volker Mehrmann o matematičnih problemih v avtomobilski industriji. Najprej je predstavil problem minimiziranja zvoka v potniški kabini. Druga tema je bila optimiranje in računalniško upravljanje nove generacije avtomatskih prestav. V ta namen je znana nemška tovarna financirala delo devetih doktorskih študentov na raznih univerzah v Nemčiji. Pri tem so nastale nove matematične metode in nova področja v numerični linearni algebri.

Pred desetletji je Helmut Neunzert, eden pionirjev *Industrijske matematike* ali *Tehnomatematike* na obisku v Ljubljani, kamor ga je povabil profesor Ivan Kuščer, razlagal, kako je po firmah iskal delo za svoje študente. Zaradi spoštljivega odnosa nemških poslovnežev do znanosti in univerze – vsakič je dobil najmanj povabilo na poslovno kosilo – to niti ni bilo neprijetno opravilo. Zdaj pa je profesor Mehrmann povedal, da morajo zavračati naročila. Center Matheon združuje specialiste uporabne matematike s treh berlinskih univerz in dveh inštitutov.

Matematične formule na tablici ali mobilniku

Mnogo matematičnih in fizikalnih člankov je na medmrežju objavljenih v obliki PDF datoteke. To pa povzroča težave pri branju na malih zaslonih tabličnih računalnikov in mobilnih naprav. Novi standard EPub 3.0 [10], zasnovan na XHTML5 in objavljen pred kakim letom, bo pomagal rešiti ta problem, saj se pri povečevanju besedilo na novo razporedi. Podpira MathML in Javascript. Za prikaz matematičnih izrazov večinoma uporablja MathJax. Za zdaj stvar dobro deluje na Applovem operacijskem sistemu, nekoliko manj uspešni so dodatki za Android. Več si lahko preberete na [11].

LITERATURA

- [1] Mathematics of Planet Earth <http://mpe2013.org>.
- [2] Matematik stopa na tanek led: <http://www.utsandiego.com/news/2013/jan/11/ken-golden-mathematician-math-conference-polar-ice/?page=2#article-copy>.
- [3] Matematika daje krila Hollywoodu in bankam (v nemščini) http://mpe2013.org/wp-content/uploads/2013/01/wissen_article.pdf.
- [4] IMAGINARY <http://imaginary.org/>.
- [5] Modeliranje ledenika <http://imaginary.org/film/the-future-of-glaciers>.
- [6] Kako upodobiti površje Zemlje na listu papirja <http://imaginary.org/program/the-sphere-of-the-earth>.
- [7] Dvojno nihalo <http://imaginary.org/content/double-pendulum>.
- [8] Tine Golež: Merjenje paralakse <http://imaginary.org/sites/default/files/parallaxmeasurementinstructionsfinal.pdf>.
- [9] Potresi in gradbeni objekti <http://imaginary.org/program/earthquakes-and-structures>.
- [10] EPub 3.0 materiali na International Digital Publishing Forumu <http://idpf.org/epub/30>.
- [11] Bilten IMU <http://www.mathunion.org/imu-net/archive/2013/imu-net-057/>.

Peter Legiša

VSEBINA

Članki	Strani
Rešeto za iskanje praštevilskih dvojčkov (Srečko Lampret)	1–3
Ponceletove krivulje (Mirko Dobovišek)	4–14
Sončno obsevanje in klimatske spremembe po Milankovičevem modelu (Žiga Šmit)	15–23
Šola	
O toplotnih strojih (Janez Strnad)	24–30
Entropija in nered (Andrej Likar)	31–34
Nove knjige	
Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman: Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry (Jurij Kovič)	35–37
Vesti	
Zoisove nagrade in priznanja 2012 (Aleš Mohorič)	38–39
Matematične novice (Peter Legiša)	40–III

CONTENTS

Articles	Pages
Sieving twin prime pairs (Srečko Lampret)	1–3
Poncelet curves (Mirko Dobovišek)	4–14
Solar irradiation and climatic changes according to the Milankovitch model (Žiga Šmit)	15–23
School	24–34
New books	35–37
News	38–III
