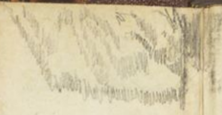


Berghaus Anwend. d. Algeb. auf die Geo-
Pisko f. Unterrealschul.

H64

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

für

Ober-Gymnasien.

Das Recht der Uebersetzung behält sich der Verfasser vor.

Von

Dr. Franz Močnik.

Eilfte Auflage.

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1870.

579097

Das Recht der Uebersetzung behält sich der Verfasser vor.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

19.09.2006

D 200616787

Vorwort zur neunten Auflage.

Die vorliegende Auflage der Arithmetik und Algebra unterscheidet sich sowohl bezüglich der Anordnung des Lehrstoffes als der Behandlung desselben wesentlich von den früheren Ausgaben dieses Lehrbuches.

Eine durchgreifende Aenderung in der Gliederung des Inhaltes erschien schon durch das Streben geboten, in dieser umgearbeiteten Ausgabe die organische Entwicklung des Zahlenbegriffes und die dadurch bedingte fortschreitende Erweiterung der Operationsbegriffe dem Schüler zu möglichst klarem Bewußtsein zu bringen. Nachdem naturgemäß zuerst die Grundoperationen mit absoluten ganzen Zahlen behandelt werden, wird, damit die inversen Operationen, die Subtraction und die Division, unter allen Umständen ausgeführt werden können, auf die Nothwendigkeit hingewiesen, die algebraischen und die gebrochenen Zahlen in die Rechnung einzuführen. Eben so eröffnet bei den Rangoperationen die Radicierung, indem sie in der Reihe der ganzen und gebrochenen algebraischen Zahlen nicht immer ausführbar erscheint, die neuen Gebiete der irrationalen und der imaginären Zahlen. Jede neue Zahlform tritt dabei als eine höhere Stufe in der Erweiterung des Zahlengebietes auf, so zwar, daß der auf ihr gewonnene Begriff alle vorhergehenden in sich umfaßt.

Mit der fortschreitenden Entwicklung des Zahlenbegriffes müssen auch die Begriffe der Operationen allmählich erweitert werden, so daß sie auch auf die neue Zahlform anwendbar werden und daß stets in der neuen Definition die früheren als besondere Fälle enthalten sind. Zugleich muß jedesmal nachgewiesen werden, daß die Lehrsätze, welche für die früheren Zahlen abgeleitet wurden, auch für die neue Zahlform giltig sind, wodurch denselben eine immer ausgedehntere Anwendbarkeit gesichert wird.

Sowie im Ganzen, ist auch im Einzelnen auf eine organische Gliederung des Stoffes Bedacht genommen worden. Bei jeder neuen Operation wurden zuerst die Verbindungen der neuen Rechnungsform durch die früheren Operationen, und dann die Verbindungen der früheren Rechnungsformen durch die neue Operation in Untersuchung gezogen. Die einzelnen Lehrsätze wurden dabei so geordnet, daß Zusammengehöriges in natürlicher Aufeinanderfolge zusammengestellt erscheint, und daß die Aehnlichkeit der gleichartigen Sätze auf den verschiedenen Rechnungsstufen leicht überblickt werden kann. Um diese Anordnung auch bei den inversen Operationen zu ermöglichen, habe ich zur Begründung der dort vorkommenden Lehrsätze statt der sonst üblichen Probebeweise durchgängig den Satz angewendet, daß eine Zahl unverändert bleibt, wenn man sie mit derselben Zahl durch zwei entgegengesetzte Operationen verbindet.

Die Brüche erhielten, wiewohl das Rechnen mit denselben schon in dem Rechnen mit den Quotienten enthalten ist, ihre eigene Stelle, nicht nur, weil die besondere Auffassung der Quotienten als Brüche im Leben allgemein so geläufig geworden ist, daß von dieser Vorstellungsweise auch die Wissenschaft füglich nicht leicht Umgang nehmen kann, sondern auch darum, weil mehrere Sätze über Quotienten nur in dieser Form der Auffassung einen besonderen Werth erhalten. Gleiches gilt auch von den Verhältnissen.

In der Lehre vom Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen, welche hier neu dazugekommen ist, wurde einerseits gezeigt, mit welchem Grade der Zuverlässigkeit in jedem Falle das Rechnungsresultat bestimmt werden könne, andererseits, welche Genauigkeit die gegebenen Zahlen haben müssen, damit das Resultat bis zu einer bestimmten Decimalstelle verläßlich gefunden werde.

Die Theorie der irrationalen und der imaginären Zahlen wurde gänzlich umgearbeitet. Auch werden die vielseitigen Verbesserungen, welche in den Abschnitten über die Gleichungen, Reihen und Combinationen vorgenommen wurden, dem aufmerksamen Leser nicht entgehen.

Die Uebungsaufgaben sind, damit eine leichtere Uebersicht des eigentlichen Lehrbuches ermöglichet werde, in inniger Beziehung zu den theoretischen Lehren geordnet, in einem abgesonderten Anhange zusammengestellt worden.

Graz, im September 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur eilften Auflage.

Die Abweichungen dieser Auflage von den zwei vorhergehenden bestehen nur in einzelnen Berichtigungen.

Graz, im September 1869.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1. Alles, was aus Theilen derselben Art besteht oder aus solchen bestehend gedacht werden kann, wird Größe genannt. Bei jeder Größe kann die Menge der in ihr enthaltenen gleichartigen Theile, die Quantität, und die Beschaffenheit derselben, die Qualität, in Betracht gezogen werden.

Die Wissenschaft, welche sich mit der Untersuchung der Größen in Beziehung auf deren Quantität beschäftigt, heißt Mathematik.

§. 2. Die Menge der in einer Größe enthaltenen gleichartigen Theile bestimmen, heißt die Größe messen. Um eine Größe zu messen, nimmt man eine bestimmte Größe derselben Art als Einheit an und untersucht, wie oft dieselbe in der gegebenen Größe enthalten ist. Der Ausdruck, welcher dieses angibt, wird Zahl genannt.

§. 3. Man unterscheidet stetige und discrete Größen. Eine Größe heißt stetig, wenn ihr in Beziehung auf die Anzahl der Theile keine Grenze gesetzt werden kann, was der Fall ist, wenn jeder Theil wieder die nämlichen Eigenschaften besitzt, welche auch das Ganze hat. Stetig sind alle Raumgrößen, z. B. die Linien.

Eine Größe heißt discret, wenn man bei der Zerlegung derselben auf Theile kommt, die einer weiteren Zerlegung nicht mehr fähig sind, ohne daß der Begriff der Größe selbst aufgehoben wird; z. B. eine Zahl Guldenstücke. Jede discrete Größe ist aus gesonderten Einheiten zusammengesetzt, deren Menge durch die Zahl bestimmt wird.

Insofern die Mathematik die Größen als discret betrachtet, heißt sie Arithmetik, insofern sie die Größen als stetig behandelt, heißt sie Geometrie. Die Arithmetik beschäftigt sich mit den Zahlen, die Geometrie mit den Raumgrößen.

§. 4. Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit, zu welcher man wieder die Einheit und zu jeder dadurch gebildeten Zahl immer wieder eine Einheit setzen kann. Die dadurch entstehende Reihe von Zahlen heißt die natürliche Zahlenreihe.

Die Einheit selbst, sowie jede durch das wiederholte Setzen derselben gebildete Zahl wird eine ganze Zahl genannt. Um anzugeben, daß keine Einheit gesetzt sei, bedient man sich des Ausdruckes Null. Da erst durch das Setzen der Einheit eine Zahl entsteht, so ist die Null als der Ausgangspunct jeder Zahlenbildung anzusehen.

In der natürlichen Zahlenreihe entsteht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer Einheit, und aus der folgenden durch Wegnehmen einer Einheit. Das Hinzufügen, bezüglich Wegnehmen einer Einheit von einer Zahl zur andern fortsetzen, heißt zählen; das erstere vorwärtszählen, das letztere rückwärtszählen. Jenes kann an der natürlichen Zahlenreihe ohne Ende fortgesetzt werden, dieses nur, bis auch die erste Einheit weggenommen ist und deren keine, also Null, übrig bleibt.

§. 5. Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen; Zahlen, welche irgend eine Menge von Einheiten vorstellen, heißen allgemeine Zahlen.

Zur Darstellung der Zahlen sind entsprechende Zahlausdrücke oder Zahlzeichen erforderlich.

Die besonderen Zahlen werden durch besondere Zahlzeichen (Ziffern) ausgedrückt, und zwar die ersten neun Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, wenn man ihnen auch die Null als ihren Ausgangspunct voranstellt, durch 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mittelst dieser Zahlzeichen können nach bestimmten Grundsätzen, von denen später (§. 59) die Rede sein wird, alle besonderen Zahlen ausgedrückt werden.

Zur anschaulichen Darstellung der natürlichen Zahlen dient die nachstehende Zahlenlinie, auf welche von 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufgetragen werden:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Allgemeine Zahlen werden durch allgemeine Zeichen, gewöhnlich durch die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes bezeichnet. Um anzuzeigen, daß die Werthe gewisser Zahlen erst bestimmt werden sollen, drückt man dieselben durch die letzten Buchstaben des Alphabetes u, v, w, x, y, z aus.

Je nachdem die Arithmetik nur besondere oder auch allgemeine Zahlen in Betracht zieht, heißt sie die besondere oder die allgemeine Arithmetik.

§. 6. Wird beim Zählen die Art der Einheit ganz unberücksichtigt gelassen, so heißen die dadurch gebildeten Zahlen reine oder unbenannte Zahlen; wird aber beim Zählen auch die Art der Einheit ausgedrückt, so entstehen benannte Zahlen. Man erhält demnach durch a maliges Setzen der reinen Einheit, also der Eins, die unbenannte Zahl a, durch a maliges Setzen einer benannten Einheit E die benannte Zahl aE, worin E die Benennung heißt.

§. 7. Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche denselben Werth haben, heißen einander gleich. Um anzuzeigen, daß a und b gleich sind, schreibt man $a = b$; in diesem Falle ist immer auch $b = a$. Ein Ausdruck von der Form $a = b$ heißt eine Gleichung; $b = a$ ist die Umkehrung der Gleichung $a = b$.

Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche nicht denselben Werth haben, heißen ungleich, und zwar heißt diejenige, zu der noch etwas hinzugesetzt werden muß, um die andere hervorzubringen, die kleinere, die andere die größere. Daß a größer als b ist, drückt man durch $a > b$ aus; in diesem Falle ist auch b kleiner als a, was durch $b < a$ bezeichnet wird. Ausdrücke von der Form $a > b$, oder $b < a$ nennt man Ungleichungen.

Bezeichnen a und b zwei beliebige Zahlen (oder Größen), so muß entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$ sein; wofür man auch schreibt $a \gtreqless b$.

§. 8. Von gegebenen Zahlen durch vorgeschriebene Verbindung derselben zu einer andern gesuchten Zahl übergehen und letztere dadurch bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, zu welcher man durch das Rechnen gelangt, heißt das Resultat der Rechnung.

In einer Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerthe setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt substituieren.

Das Zählen ist die einfachste Art des Rechnens und alle anderen Rechnungsoperationen können daraus abgeleitet werden.

Das Fortschreiten in der natürlichen Zahlenreihe von einer gegebenen Zahl aus um eine gegebene Zahl von Einheiten heißt die Addition; die Umkehrung dieser Operation die Subtraction. Die Addition gleicher Zahlen heißt Multiplication, und die Umkehrung derselben Division. Diese vier Rechnungsarten nennt man die Grundoperationen.

Die Multiplication gleicher Zahlen führt auf Zahlen höheren Ranges; die Rechnung, durch welche diese gefunden werden, heißt die Potenzierung, aus deren Umkehrung sich die Radicierung (das Wurzelausziehen) und die Logarithmierung ergeben. Die letzteren drei Rechnungsarten nennt man Rangoperationen.

Die Gesetze der hier angedeuteten Operationen zu untersuchen, bildet die Hauptaufgabe der Arithmetik. Die Lehre über die Anwendung dieser Gesetze auf die Lösung von Aufgaben, indem man die Beziehungen zwischen den unbekannten und bekannten Zahlen durch Gleichungen ausdrückt, und aus diesen die Werthe für die unbekannten Zahlen sucht, heißt Algebra.

Häufig werden diese beiden Theile der Mathematik als Ganzes mit dem gemeinschaftlichen Namen Algebra, von einigen mit dem Namen allgemeine Arithmetik bezeichnet.

§. 9. Die Mathematik stützt ihre Lehren auf gewisse Grundwahrheiten, welche an sich klar sind und deshalb nicht weiter begründet zu werden brauchen. Solche Grundwahrheiten werden Grundsätze (Axiome) genannt.

Sätze, die nicht an und für sich einleuchtend sind, deren Richtigkeit erst aus anderen bereits als wahr anerkannten Sätzen hergeleitet werden muß, heißen Lehrsätze; sie müssen bewiesen werden.

Ein Satz, dessen Wahrheit sich aus der Erklärung eines Begriffes oder aus einem erwiesenen Satze unmittelbar ergibt, heißt ein Folgesatz.

§. 10. Allgemeine mathematische Grundsätze:

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a.$$

2. Wenn zwei Größen jede einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

3. Wenn mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen werden, so erhält man gleiche Größen.

4. Das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen.

5. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben.

6. Wenn eine Größe einer zweiten gleich, diese aber einer dritten ungleich ist, so ist auch die erste der dritten ungleich, und zwar mit demselben Ungleichheitszeichen.

Wenn $a = b$, $b > c$; so ist auch $a > c$, $a = b$, $b < c$; $a < c$.

7. Wenn eine Größe größer (oder kleiner) als eine zweite, und diese wieder größer (oder kleiner) als eine dritte ist, so ist um so mehr auch die erste Größe größer (oder kleiner) als die dritte.

Wenn $a > b$, $b > c$; so ist auch $a > c$, $a < b$, $b < c$; $a < c$.

Erster Abschnitt.

Die Grundoperationen mit absoluten ganzen Zahlen.

I. Die Addition.

§. **11.** 1. Zu einer Zahl a eine Zahl b addieren heißt, von a aus um so viele Einheiten weiter zählen, wie b anzeigt. Man nennt die gegebenen Zahlen a und b die Summanden (Theile), die gefundene Zahl c die Summe, und schreibt $a + b = c$. Der eingeklammerte Ausdruck $(a + b)$ stellt die als berechnet gedachte Summe von a und b vor.

Um die Addition zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe von a ausgehend um so viele Einheiten vorwärts, als ihrer b enthält; die Zahl, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe. Z. B. $5 + 3 = 5 + 1 + 1 + 1 = 8$.

2. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, zu der man gelangt, indem man zu der Summe der beiden ersten Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert. Es ist demnach

$$a + b + c = (a + b) + c,$$
$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ u. s. f.}$$

Folgesatz. Wenn ein Summand o ist, so ist die Summe dem anderen Summanden gleich.

$$o + a = a, \quad a + o = a, \quad o + o = o.$$

§. **12.** Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht.

Es seien a und b die beiden Summanden. Bildet man eine Reihe, welche a und b Einheiten enthält, nämlich

$$\overbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}^{a} + \overbrace{1 + 1 + 1 \ldots + 1 + 1}^{b},$$

so erhält man offenbar gleich viele Einheiten, mithin dieselbe Zahl, ob man alle Einheiten dieser Reihe von links nach rechts, oder von rechts nach links zählt. Im ersten Falle gelangt man durch das Zählen zunächst zur Zahl a, und wenn man um b Einheiten weiter zählt, zur Zahl $a + b$. Im zweiten Falle gelangt man zunächst zur Zahl b, und wenn man um a Einheiten weiter zählt, zur Zahl $b + a$. Es ist also $a + b = b + a$.

Dieser Satz behält seine volle Giltigkeit auch dann, wenn mehr als zwei Summanden gegeben sind. Da nämlich je zwei auf einander folgende Summanden bei ungeänderter Stellung der übrigen vertauscht werden dürfen, so kann durch wiederholtes Vertauschen zweier solcher Summanden jeder Summand an jede vorgeschriebene Stelle gebracht werden. So ist z. B. für drei Summanden

$$a + b + c = a + c + b = c + a + b = c + b + a$$
$$= b + c + a = b + a + c.$$

Es ist demnach auch bei mehreren Summanden für die Summe gleichgiltig, in welcher Ordnung dieselben addiert werden.

1. Verbindung von Summen durch die Addition.

§. **13.** 1. Zu einer Summe wird eine Zahl addiert, indem man sie zu einem der Summanden addiert.

$$(a + b) + c = (a + c) + b, \text{ oder}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Beweis.

$$a + b + c = a + c + b \text{ und } a + b + c = b + c + a \text{ (§. 12).}$$
$$(a + b) + c = (a + c) + b \text{ und } (a + b) + c = (b + c) + a \text{ (§. 11, 2)}$$
$$= a + (b + c) \text{ (§. 12).}$$

2. Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man die Summanden einzeln dazu addiert.

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \text{ oder}$$
$$a + (b + c) = (a + c) + b.$$

Folgt aus den Gleichungen in 1.

3. Zu einer Summe wird eine Summe addiert, indem man nach einander jeden Summanden der zweiten Summe zu einem beliebigen Summanden der ersten addiert.

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d), \text{ oder}$$
$$(a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c).$$

Folgt aus 2. und 1.

Summen von gleichen Summanden.

§. **14.** Wenn in einer Summe dieselbe allgemeine Zahl öfters als Summand vorkommt, so wird die Summe abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man die allgemeine Zahl nur einmal anschreibt und ihr die Zahl vorsetzt, welche anzeigt, wie oft die allgemeine Zahl als Summand vorkommt; z. B.

$$a + a + a + a + a = 5\,a.$$

In dem Ausdrucke $5\,a$ heißt dann a die Hauptgröße und 5 der Coefficient.

Jede allein stehende Hauptgröße kann man sich, da sie 1mal gesetzt ist, mit dem Coefficienten 1 versehen denken. Es ist also $a = 1\,a$.

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. $5\,a$ und $6\,a$, $3\,x$ und x. Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. $3\,a$ und $7\,b$, $5\,x$ und $5\,y$.

§. **15.** Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man ihre Coefficienten addiert und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$m\,a + n\,a = (m + n)\,a.$$

Beweis. $m\,a + n\,a$.

$$= a + a + a \ldots \text{(mmal)} + a + a + a + \ldots \text{(nmal)}$$
$$= a + a + a \ldots (m + n)\text{mal}$$
$$= (m + n)\,a.$$

Z. B. $3a + 4a = (3 + 4)\,a = 7a.$

$$(5x + 6y) + (7x + y) = (5x + 7x) + (6y + y) = 12x + 7y;$$

was auch so dargestellt wird:

$$\begin{array}{r} 5x + 6y \\ 7x + y \\ \hline 12x + 7y. \end{array}$$

2. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition.

§. **16.** 1. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.

$$\begin{array}{c} \text{Wenn } a = b, \\ c = d; \\ \hline \text{so ist } a + c = b + d. \end{array}$$

Folgt unmittelbar aus §. 10, 3.

2. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\text{Wenn } a > b,$$
$$c = d;$$
$$\text{so ist } a + c > b + d.$$

Beweis. Es sei w die Zahl, welche zu b addiert werden muß, um a zu erhalten, also $a = b + w$, so ist nach 1. $a + c = b + w + d$. Nun ist $b + w + d > b + d$ (§. 10, 5), folglich auch $a + c > b + d$.

3. Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addiert gibt Ungleiches mit eben so gestelltem Ungleichheitszeichen.

$$\text{Wenn } a > b,$$
$$c > d;$$
$$\text{so ist } a + c > b + d.$$

Beweis. Es sei $c = d + w$, so hat man nach 2. $a + c > b + d + w$. Nun ist $b + d + w > b + d$ (§. 10, 5), folglich um so mehr $a + c > b + d$ (§. 10, 7).

II. Die Subtraction.

§. 17. Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahieren heißt, aus a als der Summe zweier Zahlen und b als dem einen Summanden den andern Summanden suchen. Die gegebene Summe a heißt der Minuend, der gegebene Summand b der Subtrahend, und der gesuchte Summand c die Differenz. Man schreibt $a - b = c$; der eingeklammerte Ausdruck $(a - b)$ bezeichnet die als berechnet gedachte Differenz.

Die Aufgaben der Subtraction sind eigentlich zweierlei; es ist 1. zu bestimmen, wie viel zu b zu addieren ist, daß die Summe a erscheine (Ergänzung); oder 2.: wie viel von der Summe a noch bleibt, wenn b weggenommen wird (Rest).

Folgesätze. 1. Wenn man die Differenz zweier Zahlen und den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend.

$$(a - b) + b = a, \text{ oder}$$
$$b + (a - b) = a.$$

2. Wenn man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden subtrahiert, so erhält man den zweiten Summanden.

$$(a + b) - b = a, \text{ und}$$
$$(a + b) - a = b.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man dieselbe Zahl zu ihr addiert und von ihr subtrahiert.

$$a = (a + b) - b, \text{ oder}$$
$$a = (a - b) + b.$$

Folgt aus 2. und 1.

Die Addition und die Subtraction sind demnach einander entgegengesetzt, und zwar ist die Addition eine directe, die Subtraction eine indirecte oder inverse Operation.

4. Wenn der Subtrahend dem Minuend gleich ist, so ist die Differenz gleich Null.

$$a - a = 0.$$

5. Wenn der Subtrahend 0 ist, so ist die Differenz dem Minuend gleich.

$$a - 0 = a,\ 0 - 0 = 0.$$

§. **18**. Um die Subtraction zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man vom Minuend a aus in der Zahlenreihe um so viele Einheiten rückwärts, wie der Subtrahend b anzeigt; die Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz. Z. B. $7 - 3 = 7 - 1 - 1 - 1 = 4$.

Man kann auch vom Subtrahend b in der Zahlenreihe um so viele Einheiten vorwärts schreiten, bis man zum Minuend a gelangt; die Anzahl der zurückgelegten Einheiten ist die Differenz.

Die Subtraction kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, indem man sonst, weil die natürliche Zahlenreihe rückwärts mit o abbricht, vom Minuend nicht um so viele Einheiten zurückschreiten könnte, wie der Subtrahend anzeigt.

Bei den folgenden Sätzen werden wir daher vorläufig voraussetzen, daß die Subtrahenden der vorkommenden Differenzen nicht größer als ihre Minuenden sind.

1. Verbindung von Differenzen durch die Addition.

§. **19**. Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man sie zum Minuend addiert, oder vom Subtrahend subtrahiert.

$$(a - b) + c = (a + c) - b, \text{ oder}$$
$$(a - b) + c = a - (b - c).$$

Beweis. 1. $(a - b) + c = \{[(a - b) + c] + b\} - b$ (§. 17, 3)
$= (a + c) - b$ (§. 13, 1 und §. 17, 1).

2. $(a - b) + c = \{[(a - b) + c] + (b - c\} - (b - c)$ (§. 17, 3)
$= \{(a - b) + [c + (b - c)]\} - (b - c)$ (§. 13, 1)
$= [(a - b) + b] - (b - c)$ (§. 17, 1)
$= a - (b - c)$ (§. 17, 1).

Folgesatz. Wenn man zu einer Zahl eine zweite zu addieren und davon eine dritte zu subtrahieren hat, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Ordnung man addiert und subtrahiert.

$$(a + c) - b = (a - b) + c.$$

§. **20**. Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, indem man den Minuend addiert und den Subtrahend subtrahiert.

$$a + (b - c) = (a + b) - c, \text{ oder}$$
$$a + (b - c) = (a - c) + b.$$

Die erste Gleichung ergibt sich mit Anwendung des §. 12 aus §. 19; die zweite Gleichung folgt aus der ersten mit Rücksicht auf §. 19, Folges.

§. **21**. Eine Summe bleibt unverändert, wenn man zu dem einen Summanden eine Zahl addiert und von dem andern Summanden dieselbe Zahl subtrahiert.

$$a + b = (a + c) + (b - c), \text{ und}$$
$$a + b = (a - c) + (b + c).$$

Folgt aus §. 20 und §. 13, 2; denn
$(a + c) + (b - c) = [(a + c) - c] + b = a + b$, und eben so
$(a - c) + (b + c) = [(a - c) + c] + b = a + b$.

§. **22.** Zu einer Differenz wird eine Differenz addiert, indem man von der Summe der Minuenden die Summe der Subtrahenden subtrahiert.

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Beweis. $(a - b) + (c - d)$
$= \{[a - b) + (c - d)] + (b + d)\} - (b + d)$ (§. 17, 3)
$= \{[a - b) + (b + d)] + (c - d)\} - (b + d)$ (§. 13, 1)
$= [(a + d) + c - d)] - (b + d)$ (§. 21)
$= (a + c) - (b + d)$ (§. 21).

2. Verbindung von Summen und Differenzen durch die Subtraction.

§. **23.** Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie von einem der Summanden subtrahiert.

$$(a + b) - c = (a - c) + b, \text{ oder}$$
$$(a + b) - c = a + (b - c).$$

Folgt aus der Umkehrung der ersten Gleichung in §§. 19 und 20.

2. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie von dem Minuend subtrahiert, oder zu dem Subtrahend addiert.

$$(a - b) - c = (a - c) - b, \text{ oder}$$
$$(a - b) - c - a - (b + c).$$

Beweis.

1. $(a - b) - c = \{[(a - b) - c] + b\} - b$ (17, 3)
$= (a - c) - b$ (§. 19 und §. 17, 1).

2. $(a - b) - c = \{[(a - b) - c] + (b + c)\} - (b + c)$ (§. 17, 3)
$= \{[(a - b) + (b + c) - c]\} - (b + c)$ (§. 10)
$= [(a + c) - c] - (b + c)$ (§. 21)
$= a - (b + c)$ (§. 17, 2).

Folgesätze. 1. Wenn man von einer Zahl zwei Zahlen zu subtrahieren hat, so ist es gleichgiltig, in welcher Folge man sie subtrahiert.

$$(a - b) - c = (a - c) - b.$$

2. Wenn von einer Zahl zwei Zahlen zu subtrahieren sind, so kann man auch ihre Summe auf einmal subtrahieren.

$$(a - b) - c = a - (b + c).$$

§. **24.** 1. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man davon nach einander jeden Summanden subtrahiert.

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \text{ oder}$$
$$a - (b + c) = (a - c) - b.$$

Folgt aus §. 23, 2.

2. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man den Minuend subtrahiert und den Subtrahend addiert.

$$a - (b - c) = (a - b) + c, \text{ oder}$$
$$a - (b - c) = (a + c) - b.$$

Folgt aus §. 19.

§. **25.** Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

$$a - b = (a + c) - (b + c), \text{ und}$$
$$a - b = (a - c) - (b - c).$$

Folgt aus §. 24, 1 und 2; denn

$$(a + c) - (b + c) = [(a + c) - c] - b = a - b, \text{ und eben so}$$
$$(a - c) - (b - c) = [(a - c) + c] - b = a - b.$$

§. **26**. Von einer Differenz wird eine Differenz subtrahiert, indem man von der Differenz der Minuenden die Differenz der Subtrahenden subtrahiert, oder zu dem Minuend und dem Subtrahend der ersten Differenz bezüglich den Subtrahend und den Minuend der zweiten Differenz addiert und von der ersten Summe die zweite subtrahiert.

$$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d), \text{ oder}$$
$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c).$$

Beweis. 1. $(a - b) - (c - d)$

$= \{[(a - b) - (c - d)] + (b - d)\} - (b - d)$ (§. 17, 3)

$= \{[(a - b) + b] - [(c - d) + d]\} - (b - d)$ (§. 22)

$= (a - c) - (b - d)$ (§. 17, 1 und 2).

2. $(a - b) - (c - d)$

$= \{[(a - b) - (c - d)] + (b + c)\} - (b + c)$ (§. 17, 3)

$= \{[(a - b) + (b + c)] - (c - d)\} - (b + c)$ (§. 19)

$= [(a + c) - (c - d)] - (b + c)$ (§. 21)

$= \{[(a + c) - c] + d\} - (b + c)$ (§. 24, 2)

$= (a + d) - (b + c)$ (§. 17, 2).

Addition und Subtraction mehrgliedriger Ausdrücke.

§. **27**. Wenn in einer durch die Zeichen + und − vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden sollen, so kann man, ohne der Bestimmtheit dadurch Abbruch zu thun, die Klammern weglassen. Hiernach kann man

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$
$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$
$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d \text{ setzen.}$$

Ein Ausdruck, welcher auf einander folgende Additionen und Subtractionen von Zahlen enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom. Die zu addierenden Zahlen sind die additiven, die zu subtrahierenden Zahlen die subtractiven Glieder des Ausdruckes. Ein Glied, das kein Zeichen vor sich hat, gilt als additiv.

Ein zweigliedriger Ausdruck wird insbesondere ein Binom, ein dreigliedriger ein Trinom genannt. Ein Ausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom.

Folgesätze. 1. In einem mehrgliedrigen Ausdrucke ist die Reihenfolge der additiven und subtractiven Glieder ganz willkürlich.

Folgt aus §. 12, §. 19, Folges. und §. 23, Folges. 1.

2. Jeder mehrgliedrige Ausdruck läßt sich in eine Differenz verwandeln, deren Minuend die Summe aller additiven, und deren Subtrahend die Summe aller subtractiven Glieder ist.

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$$
$$= (a + b + d) - (c + e) \text{ (§. 23, Folges. 2.)}$$

§. **28**. 1. Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addiert, indem man ihr die Glieder desselben mit ungeänderten Zeichen hinzufügt.

$$a + (b - c - d + e - f) = a + b - c - d + e - f.$$

Beweis. $a + (b - c - d + e - f)$
$= a + [(b + e) - (c + d + f)]$ (§. 27, Folges. 2)
$= [a + (b + e)] - (c + d + f)$ (§. 20)
$= a + b + e - c - d - f$ (§. 13, 2 und §. 24, 1)
$= a + b - c - d + e - f$ (§. 27, Folges. 1).

2. Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahiert, indem man ihr die Glieder desselben mit entgegengesetzten Zeichen hinzufügt.

$$a - (b - c - d + e - f) = a - b + c + d - e + f.$$

Der Beweis wird ähnlich, wie bei dem vorhergehenden Satze, geführt.

Folgesätze. 1. Jeder mit Klammern eingeschlossene Ausdruck kann ohne Klammern dargestellt werden, indem man, wenn vor der Klammer das Zeichen + steht, die Klammern ohne alle weitere Veränderung wegläßt, dagegen, wenn vor der Klammer das Zeichen — steht, allen Gliedern, die umschlossen waren, die entgegengesetzten Zeichen gibt.

Man nennt diese Umformung das Auflösen der Klammern.

2. Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen + beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen läßt, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen — beginnt, jedem der umschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen gibt.

§. **29**. Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Coefficienten subtrahiert und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$ma - na = (m - n)\,a.$$

Beweis. $ma - na = a + a + a + \ldots$ (mmal)
$- [a + a + a + \ldots$ (nmal)$]$
$= a + a + a + \ldots$ $(m - n)$mal
$= (m - n)\,a.$

Z. B. $5a - 2a = (5 - 2)a = 3a.$

$(6x + 5y) - (x + 5y) = 6x + 5y - x - 5y$
$= 6x - x + 5y - 5y = 5x,$

weil $5y - 5y = 0$ (§. 17, 4) ist; oder

$$\begin{array}{r} 6x + 5y \\ x + 5y \\ - \quad - \\ \hline 5x \end{array}$$

Folgesatz. Ein mehrgliedriger Ausdruck, worin gleichnamige Zahlen vorkommen, wird auf einen einfacheren Ausdruck reduciert, indem man zuerst die additiven, dann die subtractiven gleichnamigen Zahlen addiert und die zweite Summe von der ersten subtrahiert. Z. B.

$$6a - 5a - 3a + 8a - 2a = (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a)$$
$$= 14a - 10a = 4a.$$

3. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Subtraction.

§. **30**. 1. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Wenn $a = b$,
$c = d$;

so ist $a - c = b - d$.

Folgt unmittelbar aus §. 10, 3.

2. Gleiches von Ungleichem subtrahiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a > b, \\ \qquad\; c = d; \\ \hline \text{so ist } a - c > b - d. \end{array}$$

Beweis. Wäre nicht $a - c > b - d$, so müßte $a - c \leqq b - d$ sein; dann wäre bezüglich auch $(a - c) + c \leqq (b - d) + d$ (§. 16, 1 und 2), daher $a \leqq b$ (§. 17, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Ungleiches von Gleichem subtrahiert gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a = b, \\ \qquad\; c > d; \\ \hline \text{so ist } a - c < b - d. \end{array}$$

Beweis. Wäre $a - c \geqq b - d$, so müßte in beiden Fällen $(a - c) + c > (b - d) + d$ (§. 16, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 17, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches von Ungleichem bei entgegengesetzten Ungleichheitszeichen subtrahiert gibt Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen des Minuends.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a > b, \\ \qquad\; c < d; \\ \hline \text{so ist } a - c > b - d. \end{array}$$

Beweis. Wäre $a - c \leqq b - d$, so müßte in beiden Fällen $(a - c) + c < (b - d) + d$ (§. 16, 2 und 3), daher $a < b$ (§. 17, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

III. Die Multiplication.

§. **31.** 1. Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplicieren heißt a so oft als Summand (als Theil) setzen, als b Einheiten enthält. Man nennt a den Multiplicand, b den Multiplicator, und beide Factoren; die Zahl aber, welche man durch das Multiplicieren erhält, das Product. Das Product ist demnach eine Summe gleicher Summanden; der Multiplicand ist einer dieser gleichen Summanden; der Multiplicator zeigt an, wie viele solche Summanden gesetzt werden sollen. Der Multiplicand kann eine benannte Zahl sein; der Multiplicator ist immer eine unbenannte Zahl. Das Product aus dem Multiplicand a und dem Multiplicator b bezeichnet man durch $a.b$, oder $a \times b$ (d. i. a $b$mal), oder, wenn beide Factoren allgemeine Zahlen sind, auch bloß durch $a\,b$.

Das Product zweier ganzer Zahlen wird auch ein Vielfaches des Multiplicands genannt. Z. B.: $12 = 4.3$; 12 ist also das 3fache von 4.

2. Unter dem Producte mehrerer Zahlen versteht man das Product, welches man erhält, indem man das Product der beiden ersten Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl u. s. w. multipliciert. Hiernach ist

$$a.b.c = (a\,b).c,$$
$$a.b.c.d = [(a\,b).c].d, \text{ u. s. w.}$$

Folgesätze. 1. Wenn ein Factor 1 ist, so ist das Product dem andern Factor gleich.

$$a.1 = a,\; 1.a = a,\; 1.1 = 1.$$

2. Wenn ein Factor o ist, so ist auch das Product o.

$$a.0 = 0,\ 0.a = 0,\ 0.0 = 0.$$

§. **32.** Ein Product bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht.

Es sei a mit b zu multiplicieren. Bildet man b Reihen, deren jede a Einheiten enthält, nämlich

$$\underbrace{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \;\;1+1+1+1+\ldots \\ +1+1+1+1+\ldots \\ +1+1+1+1+\ldots \end{array}\right\}(a\,\text{mal}) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}}_{(b\,\text{mal})}$$

so erhält man offenbar gleich viel Einheiten, also dieselbe Zahl, ob man die Einheiten aller Horizontalreihen, oder die Einheiten aller Verticalreihen zählt. Im ersten Falle erhält man a bmal, also a.b; im zweiten b amal, also b.a. Es ist daher

$$a.b = b.a.$$

Der Satz gilt auch für jede beliebige Zahl von Factoren. Da nämlich in dem Producte mehrerer Factoren je zwei auf einander folgende Factoren bei ungeänderter Stellung der übrigen vertauscht werden dürfen, so kann durch wiederholtes Vertauschen zweier solcher Factoren jeder Factor an jede vorgeschriebene Stelle gebracht werden. So ist z. B. für drei Factoren

$$a.b.c = a.c.b = c\,a.b = c.b.a = b.c.a = b.a.c.$$

Es ist demnach auch bei mehreren Factoren für das Product gleichgiltig, in welcher Ordnung dieselben multipliciert werden.

Hier wurde vorausgesetzt, daß die Factoren unbenannt sind. Ist der Multiplicand eine benannte Zahl a E, wo E die Benennung bezeichnet, so hat man $a\,E.b = (a\,b)\,E, = (b\,a)\,E$; allein es ist auch $b\,E.a = (b\,a)\,E$, folglich $a\,E.b = b\,E.a$ (§. 10, 2). Man darf also auch in diesem Falle die Factoren verwechseln, sobald dabei die Benennung des Multiplicands auf den früheren Multiplicator, der nun als Multiplicand auftritt, übertragen wird. Z. B.: 8 fl. $\times\, 5 = 5$ fl. $\times\, 8 = 40$ fl.

Folgesatz. Der Coefficient kann als Factor der Hauptgröße, vor welcher er steht, betrachtet werden.

$$3\,a = a + a + a = a.3 = 3.a.$$

1. Verbindung von Producten durch die Addition und Subtraction.

§. **33.** Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden addiert oder subtrahiert, indem man bezüglich die Summe oder die Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciert.

$$a\,c + b\,c = (a + b)\,c,$$
$$a\,c - b\,c = (a - b).c.$$

Beweis. 1. $a\,c + b\,c$

$$= a + a + a + \ldots (c\,\text{mal}) + b + b + b + \ldots (c\,\text{mal})$$
$$= (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots (c\,\text{mal})\ (\S.\ 12)$$
$$= (a + b).c.$$

2. Eben so erhält man mit Anwendung des §. 19, Folges. die zweite Gleichung.

Die durch diesen Satz ausgedrückte Operation nennt man gewöhnlich das **Herausheben des gemeinschaftlichen Factors.**

Haben die Producte keinen gemeinschaftlichen Factor, so kann die Addition oder die Subtraction derselben bloß angezeigt werden.

2. Verbindung von Summen, Differenzen und Producten durch die Multiplication.

Multiplication von Summen und Differenzen.

§. **34**. 1. Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden damit multipliciert und die so erhaltenen Theilproducte addiert.

$$(a + b).c = a c + b c.$$

2. Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Minuend und den Subtrahend damit multipliciert und von dem ersten Producte das zweite subtrahiert.

$$(a - b).c = a c - b c.$$

3. Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man sie mit jedem Summanden multipliciert und so die erhaltenen Theilproducte addiert.

$$a (b + c) = a b + a c.$$

4. Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliciert, indem man sie mit dem Minuend und dem Subtrahend multipliciert und von dem ersteren Producte das letztere subtrahiert.

$$a (b - c) = a b - a c.$$

Die ersteren zwei Gleichungen sind die Umkehrung der Gleichungen in §. 33; die letzteren zwei Gleichungen folgen aus den ersteren unter Anwendung des §. 32.

§. **35**. Eine Summe oder Differenz wird mit einer Summe oder Differenz multipliciert, indem man nach einander jedes Glied des Multiplicands mit jedem Gliede des Multiplicators multiplicirt und die so gebildeten Producte als additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

$$(a + b) (c + d) = a c + b c + a d + b d,$$
$$(a + b) (c - d) = a c + b c - a d - b d,$$
$$(a - b) (c + d) = a c - b c + a d - b d,$$
$$(a - b) (c - d) = a c - b c - a d + b d.$$

Beweis. Nach §. 34, 1 und 2 ist

$$(a + b) (c + d) = a (c + d) + b (c + d),$$
$$(a + b) (c - d) = a (c - d) + b (c - d),$$
$$(a - b) (c + d) = a (c + d) - b (c + d),$$
$$(a - b) (c - d) = a (c - d) - b (c - d).$$

Behandelt man die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen nach §. 34, 3 und 4, und nach §. 27, Folges. 1, so erhält man die in der Behauptung aufgestellten Gleichungen.

Multiplication von Producten.

§. **36**. 1. Ein Product wird mit einer Zahl multipliciert, indem man einen Factor damit multipliciert.

$$(a b).c = (a c).b, \text{ oder } (a b).c = a.(b c).$$

Beweis. $a.b.c = a.c.b$ und $a.b.c = b.c.a$ (§. 32)

$(ab).c = (ac).b$ und $(ab).c = (bc).a$ (§. 31, 2)

$= a.(bc)$ (§. 32).

2. Eine Zahl wird mit einem Producte multipliciert, indem man sie mit dem einen Factor, und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

$$a.(bc) = (ab).c, \text{ oder } a.(bc) = (ac).b.$$

Folgt aus 1.

Producte gleicher Factoren.

§. **37.** Wenn in einem Producte dieselbe Zahl öfters als Factor vorkommt, so wird das Product abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man diesen Factor nur einmal anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie oft derselbe vorkommt; z. B.:

$$a.a.a.a.a = a^5.$$

Ein Product gleicher Factoren wird eine Potenz genannt; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, auch bloß Exponent, und der Factor, der so oft vorkommt, als der Exponent anzeigt, die Wurzel oder Grundzahl (Basis). In der Potenzgröße a^m, welche gelesen wird: „a zur mten" (Potenz erhoben) oder „a mit m potenziert", ist a die Grundzahl, m der Exponent. Die zweite Potenz a^2 nennt man insbesondere auch das Quadrat, die dritte a^3 den Cubus von a.

Jede Zahl a wird als die erste Potenz von a angesehen; also $a = a^1$.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Grundzahl vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Grundzahl enthält, und dann zu immer höheren Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt der Ausdruck fallend, im zweiten steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet die Form:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

§. **38.** Potenzen derselben Grundzahl werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Beweis. $a^m.a^n = a.a.a....(m\text{mal}).a.a.a....(n\text{mal})$

$= a.a.a....(m+n)\text{mal}$

$= a^{m+n}.$

Z. B. $a^5.a^2 = a^7$, $a^4.a = a^5$.

Multiplication mehrgliedriger Ausdrücke.

§. **39.** 1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl multipliciert und den einzelnen Producten die Zeichen der Glieder des Multiplicands gibt.

$$(a - b - c + d - e).f = af - bf - cf + df - ef.$$

2. Eine Zahl wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliciert, indem man sie mit jedem Gliede desselben multipliciert und die einzelnen Produkte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem sie aus der Multiplication mit additiven oder subtractiven Gliedern hervorgehen.

$$a(b - c - d + e - f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliciert, indem man den ganzen Multiplicand, d. i. jedes Glied desselben, mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

$$(a - b + c)(d - e - f) = ad - bd + cd - ae + be - ce - af + bf - cf.$$

Die Richtigkeit dieser drei Lehrsätze ergibt sich aus der wiederholten Anwendung der §§. 34 und 35.

Zusatz. Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Grundzahl fortschreiten, erhält man, wenn dieselben übereinstimmend geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche eben so geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, daß ihre gleichnamigen Glieder untereinander zu stehen kommen. Z. B.:

$$\begin{array}{rrrrrl}
4a^2 & - \ 3a & - \ 4 & & & \text{Multiplicand} \\
3a^2 & - \ 7a & + \ 5 & & & \text{Multiplicator} \\
\hline
12a^4 & - \ 9a & - \ 12a^2 & & & \\
 & - \ 28a & + \ 21a^2 & + \ 28a & & \\
 & & + \ 20a^2 & - \ 15a & - \ 20 & \\
\hline
12a^4 & - \ 37a^3 & + \ 29a^2 & + \ 13a^2 & - \ 20 & \text{Product.}
\end{array}$$

Insbesondere erhält man:

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, und
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$;
d. h. das Quadrat aus der Summe oder Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen, bezüglich vermehrt oder vermindert um das doppelte Product derselben.

2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
d. h. das Product aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

§. **40**. Aus den Sätzen der vorhergehenden §§. lassen sich für die Bestimmung des Productes aus irgend zwei Gliedern beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenfassen:

1. Rücksichtlich des Zeichens ist das Product zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem diese Glieder gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

2. Der Coefficient des Productes zweier Glieder ist das Product aus den Coefficienten dieser Glieder; denn

$$3a.4b = 3.a.4.b = 3.4.a.b = 12ab.$$

3. Die Hauptgröße des Productes zweier Glieder erhält man, wenn man die Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, (in alphabetischer Ordnung) neben einander stellt, und bei Potenzen die in beiden Gliedern enthaltenen Exponenten der gemeinschaftlichen Grundzahl addiert.

3. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Multiplication.

§. **41.** 1. Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt Gleiches.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a = b, \\ \phantom{\text{Wenn }} c = d; \\ \hline \text{so ist } ac = bd. \end{array}$$

Folgt unmittelbar aus §. 10, 3.

2. Gleiches mit Ungleichem multipliciert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a = b, \\ \phantom{\text{Wenn }} c > d; \\ \hline \text{so ist } ac > bd. \end{array}$$

Beweis. Es sei $c = d + w$, so ist nach 1. $ac = b(d + w)$, oder $ac = bd + bw$ (§. 34, 3). Nun ist $bd + bw > bd$ (§. 10, 5), somit auch $ac > bd$.

3. Ungleiches mit Ungleichem bei demselben Ungleichheitszeichen multipliciert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a > b, \\ \phantom{\text{Wenn }} c > d. \\ \hline \text{so ist } ac > bd. \end{array}$$

Der Beweis ist unter Zuziehung von 2. und §. 34, 3 dem vorigen ähnlich.

IV. Die Division.

§. **42.** Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heißt, aus a als dem Producte zweier Zahlen und b als dem einen der Factoren den andern Factor suchen. Man nennt das gegebene Product a den Dividend, den gegebenen Factor b den Divisor, den gesuchten Factor c den Quotienten, und schreibt $a : b = c$ oder $\frac{a}{b} = c$.

Die Division ist, wenn der Multiplicator als Divisor gegeben ist, im Begriffe wesentlich verschieden von der Division, in welcher der Multiplicand als Divisor gegeben ist. Im ersten Falle ist die Division ein Theilen, wobei der Theil gesucht wird, welcher so oft genommen, wie der Divisor anzeigt, den Dividend hervorbringt; der Divisor ist in diesem Falle eine unbenannte Zahl, der Dividend kann auch eine Benennung haben, welche dann auch der Quotient erhält. Z. B. 15 fl. : 3 = 5 fl. Im zweiten Falle ist die Division ein Vergleichen oder Messen, wobei untersucht wird, wie oft der Divisor in dem Dividend enthalten ist; ist hier der Dividend benannt, so muß auch der Divisor benannt und zwar mit dem Dividend gleichnamig sein; der Quotient ist eine unbenannte Zahl. Z. B. 15 fl. : 3 fl. = 5.

Der Zahlenwerth des Quotienten ist jedoch bei gleichem Dividend und Divisor mit Bezug auf §. 32 in beiden Fällen derselbe, so daß man bei der Entwicklung der Divisionsgesetze diese beiden Arten der Division nicht zu unterscheiden braucht.

Folgesätze. 1. Wenn man den Quotienten zweier Zahlen und den Divisor mit einander multipliciert, so erhält man den Dividend.

$$(a : b) . b = a, \quad b . (a : b) = a.$$

2. Wenn man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor dividiert, so erhält man den andern Factor.

$$ab : a = b, \quad ab : b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl multipliciert und durch dieselbe Zahl dividiert.

$$a = (ab) : b; \quad a = (a : b) . b$$

Folgt aus 2. und 1.

Die Multiplication und die Division sind demnach einander entgegengesetzt, und zwar ist die Multiplication eine directe, die Division eine indirecte oder inverse Operation.

4. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten.

$$a : a = 1, \text{ denn } 1 . a = a.$$

5. Jede Zahl durch 1 dividiert gibt sich selbst zum Quotienten.

$$a : 1 = a, \quad 1 : 1 = 1.$$

6. Null durch eine von Null verschiedene Zahl dividiert gibt Null zum Quozienten. $0 : a = 0$, denn $0 . a = 0$.

7. Null durch Null dividiert kann jede beliebige Zahl zum Quotienten geben.

$0 : 0 = a$, wo a eine beliebige Zahl bedeutet; denn $a . 0 = 0$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist daher ein Symbol der Unbestimmtheit.

8. Eine von Null verschiedene (endliche) Zahl durch Null dividiert gibt zum Quotienten eine unendlich große Zahl, d. i. eine Zahl, welche größer ist als jede noch so große angebbare Zahl.

Eine unendlich große Zahl bezeichnet man durch ∞.

Ist $a : b = c$, also $cb = a$, so muß, wenn b kleiner wird, offenbar c in demselben Maße größer werden, und wenn b kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl, d. h. gleich Null wird, c größer als jede noch so große angebbare Zahl, d. h. unendlich groß werden; mithin

$$a : 0 = \infty.$$

9. Eine von Null verschiedene (endliche) Zahl durch eine unendlich große Zahl dividiert gibt Null zum Quotienten.

$$a : \infty = 0.$$

Folgt aus 8. und 2.

§. **43.** Um die Division auszuführen, sucht man entweder in der Zahlenreihe diejenige Zahl auf, welche so oft gesetzt, wie der Divisor anzeigt, den Dividend gibt; oder man subtrahiert wiederholt den Divisor zuerst vom Dividend, dann von dem jedesmal erhaltenen Reste so oft als möglich ist; die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Subtraction verrichtet werden kann, ist der Quotient. Die Division zweier Zahlen kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

Wir werden daher bei den folgenden Sätzen vorläufig voraussetzen, daß die Dividenden der vorkommenden Quotienten Vielfache ihrer Divisoren sind

1. Verbindung von Quotienten durch die Addition, Subtraction und Multiplication.

Addition und Subtraction von Quotienten.

§. **44.** Zwei Quotienten von gleichem Divisor werden addiert oder subtrahiert, indem man bezüglich die Summe oder die Differenz ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividiert.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \left[\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) . c\right] : c$ (§. 42, 3)
$= (a + b) : c$ (§. 34, 1 und §. 42, 1).

2. Aehnlich wird die zweite Gleichung abgeleitet.

Wie man Quotienten von ungleichen Divisoren addiert oder subtrahiert, wird später (§. 99 und §. 101) gezeigt werden.

Multiplication von Quotienten.

§. 45. Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Dividend multipliciert, oder den Divisor dividiert.

$$\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}, \text{ oder } \frac{a}{b} . c = \frac{a}{b : c}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} . c = \left[\left(\frac{a}{b} . c\right) . b\right] : b$ (§. 42, 3)
$= ac : b$ (§. 36, 1 und §. 42, 1).

2. $\frac{a}{b} . c = \left[\left(\frac{a}{b} . c\right) . \frac{b}{c}\right] : \frac{b}{c}$ (§. 42, 3)
$= \left[\frac{a}{b} . \left(c . \frac{b}{c}\right)\right] : \frac{b}{c}$ (§. 36, 1)
$= \left(\frac{a}{b} . b\right) : \frac{b}{c} = a : \frac{b}{c}$ (§. 42, 1)
$= \frac{a}{b : c}.$

Folgesatz. Wenn man eine Zahl mit einer zweiten zu multiplicieren und durch eine dritte zu dividieren hat, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Ordnung man multipliciert und dividiert.

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} . c.$$

§. 46. Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliciert, indem man sie mit dem Dividend multipliciert und durch den Divisor dividiert.

$$a . \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \text{ oder } a . \frac{b}{c} = \frac{a}{c} . b.$$

Die erste Gleichung ergibt sich mit Anwendung des §. 32 aus §. 45; die zweite Gleichung folgt aus der ersten mit Rücksicht auf §. 45, Folgesatz.

§. 47. Ein Product bleibt unverändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multipliciert und den andern durch dieselbe Zahl dividiert.

$$ab = ac . (b : c), \text{ oder } ab = (a : c) . bc.$$

Folgt aus §. 46 und 45; denn

$$ac . (b : c) = (ac : c) . b = ab, \text{ und eben so}$$
$$(a : c) . bc = [(a : c) . c] . b = ab.$$

§. 48. Ein Quotient wird mit einem Quotienten multipliciert, indem man das Product der Dividenden durch das Product der Divisoren dividiert.

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left[\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot bd\right] : bd$ (§. 42, 3) $= \left[\left(\frac{a}{b} \cdot bd\right) \cdot \frac{c}{d}\right] : bd$ (§. 36, 1)

$$= \left(ad \cdot \frac{c}{d}\right) : bd = ac : bd \text{ (§. 47).}$$

2. Verbindung von Summen, Differenzen, Producten und Quotienten durch die Division.

Division von Summen und Differenzen.

§. **49**. 1. Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden dadurch dividiert und die so erhaltenen Theilquotienten addiert.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

2. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Minuend und den Subtrahend dadurch dividiert und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahiert.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Die beiden Gleichungen sind die Umkehrungen der Gleichungen in §. 44.

Division von Producten und Quotienten.

§. **50**. 1. Ein Product wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Factoren dadurch dividiert.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b, \text{ oder } \frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Folgt aus der Umkehrung der ersten Gleichung in §§. 45 und 46.

2. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Dividend dadurch dividiert, oder den Divisor damit multipliciert.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}, \text{ oder } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} : c = \left[\left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot b\right] : b$ (§. 42, 3) $= (a : c) : b$ (§. 45).

2. $\frac{a}{b} : c = \left[\left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot bc\right] : bc$ (§. 42, 3) $= \left[\left(\frac{a}{b} \cdot bc\right) : c\right] : bc$ (§. 45)

$$= (ac : c) : bc \text{ (§. 47)} = a : bc \text{ (§. 42, 2).}$$

Folgesatz. Wenn eine Zahl durch zwei Zahlen zu dividieren ist, so ist es gleichgiltig, in welcher Folge man dadurch dividiert.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}.$$

§. **51**. 1. Eine Zahl wird durch ein Product dividiert, indem man sie durch den einen Factor, und den erhaltenen Quotienten durch den anderen Factor dividiert.

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c, \text{ oder } \frac{a}{bc} = \frac{a}{c} : b.$$

Folgt aus §. 50, 2.

2. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man sie durch den Dividend dividiert und mit dem Divisor multipliciert.

$$\frac{a}{b : c} = \frac{a}{b} \cdot c, \text{ oder } \frac{a}{b : c} = \frac{ac}{b}.$$

Folgt aus §. 45.

§. **52.** Potenzen derselben Grundzahl werden dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahiert und die gemeinschaftliche Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Beweis. Damit hier die Division nach §. 43 ausführbar sei, muß vorausgesetzt werden, daß n nicht größer als m sei. Man setze $m = n + w$, oder $m - n = w$, wo auch $w = 0$ sein kann; dann ist

$$a^m : a^n = a^{n+w} : a^n = a^n \,.\, a^w : a^n \text{ (§. 38)}$$
$$= a^w \text{ (§. 42, 2)} = a^{m-n}.$$

Z. B. $a^8 : a^3 = a^5$, $a^4 : a = a^3$.

Zusatz. Da nach diesem Satze $a^m : a^m = a^0$ ist, eine Potenz mit dem Exponenten 0 aber nach der in §. 37 gegebenen Erklärung einer Potenz keinen Sinn hat, so muß für diese neue Potenzform erst die Bedeutung festgestellt werden. Aus §. 42, 4 ergibt sich $a^m : a^m = 1$; folglich ist a^0 gleichbedeutend mit 1.

Die nullte Potenz einer endlichen von Null verschiedenen Zahl ist also gleich 1.

§. **53.** Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}.$$

Folgt aus §. 51, 1 und 2; denn

$$\frac{ac}{bc} = \frac{ac}{c} : b = a : b, \text{ und eben so}$$

$$\frac{a : c}{b : c} = (a : c) \,.\, c : b = a : b.$$

§. **54.** Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividiert, indem man den Quotienten der Dividenden durch den Quotienten der Divisoren dividiert, oder den Dividend und den Divisor des ersten Quotienten bezüglich mit dem Divisor und dem Dividend des zweiten Quotienten multipliciert und das erste Product durch das zweite dividiert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}, \text{ oder } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left[\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) . \frac{b}{d}\right] : \frac{b}{d}$ (§. 42, 3)

$$= \left[\left(\frac{a}{b} : b\right) : \left(\frac{c}{d} \,.\, d\right)\right] : \frac{b}{d} \text{ (§. 48)} = (a : c) : \frac{b}{d}.$$

2. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left[\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) . bc\right] : bc$ (§. 42, 3)

$$= \left[\left(\frac{a}{b} \,.\, bc\right) : \frac{c}{d}\right] : bc \text{ (§. 45)}$$
$$= \left(ac : \frac{c}{d}\right) : bc \text{ (§. 47)} = \left(\frac{ac}{c} \,.\, d\right) : bc \text{ (§. 51, 2)}$$
$$= ad : bc \text{ (§. 42, 2).}$$

Division mehrgliedriger Ausdrücke.

§. **55.** 1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividiert und den einzelnen Quotienten die Zeichen der Glieder des Dividends gibt.

$$\frac{a - b - c + d - e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der wiederholten Anwendung der beiden Lehrsätze in §. 49.

2. Man nehme

den Multiplicand $a + b - c$ als Divisor,

den Multiplicator $m - n + p$ als Quotienten, daher

$$\begin{array}{l} \text{ihr Product } am + bm - cm \\ \qquad\qquad\quad - an - bn + cn \\ \qquad\qquad\qquad\quad + ap + bp, cp \end{array}$$ als Dividend an.

Aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder des Divisors und des Quotienten in ihrem Producte, dem Dividende, mit einander verbunden erscheinen (§. 39, 3), ergibt sich für das Dividieren zweier mehrgliedriger Ausdrücke folgendes Verfahren:

Man dividiere, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors nach einerlei Gesetz geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfahre man dann eben so, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das zweite Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f.

Z. B.: $(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b$

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 2ab \\ -\quad - \\ \hline \quad -6ab - 4b^2 \\ \quad -6ab - 4b^2 \\ \quad +\qquad + \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Insbesondere ist:

1) $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$,

$$\begin{array}{l} a^2 + ab \\ - \quad - \\ \hline \quad - ab - b^2 \\ \quad - ab - b^2 \\ \quad + \qquad + \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

2) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$;

$$\begin{array}{l} a^2 - ab \\ - \quad + \\ \hline \quad + ab - b^2 \\ \quad + ab - b^2 \\ \quad - \qquad + \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier Zahlen dividiert durch die Summe oder die Differenz dieser Zahlen gibt bezüglich die Differenz oder die Summe derselben Zahlen.

§. **56.** Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Sätze lassen sich zur Bestimmung des Quotienten zweier Glieder beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenstellen:

1. Bezüglich des Zeichens ist der Quotient zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem die beiden Glieder gleiche oder verschiedene Zeichen haben. (Folgt aus §. 35.)

2. Der Coefficient des Quotienten zweier Glieder ist der Quotient der Coefficienten dieser Glieder.

3. Die Hauptgröße des Quotienten zweier Glieder erhält man, wenn man von den Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, diejenigen, welche beiden gemeinschaftlich sind, in gleicher Anzahl wegläßt, folglich bei Potenzen derselben Grundzahl den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends subtrahiert.

3. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Division.

§. 57. 1. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a = b, \\ \underline{\qquad c = d;} \\ \text{so ist } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \end{array}$$

Folgt unmittelbar aus §. 10, 3.

2. Ungleiches durch Gleiches dividiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a > b, \\ \underline{\qquad c = d;} \\ \text{so ist } \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

Beweis. Wäre nicht $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, so müßte $\frac{a}{c} \leqq \frac{b}{d}$ sein; dann wäre bezüglich auch $\frac{a}{c}.c \leqq \frac{b}{d}.d$ (§. 41, 1 und 2), daher $a \leqq b$ (42, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Gleiches durch Ungleiches dividiert gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a = b, \\ \underline{\qquad c > d;} \\ \text{so ist } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}. \end{array}$$

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \geqq \frac{b}{d}$, so müßte in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c > \frac{b}{d}.d$ (§. 41, 2 und 3), daher $a < b$ (§. 42, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches durch Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen dividiert gibt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } a > b, \\ \underline{\qquad c < d;} \\ \text{so ist } \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

Beweis. Wäre $\frac{a}{b} \leqq \frac{b}{d}$, so müßte in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c < \frac{b}{d}.d$ (§. 41, 2 und 3), daher $a < b$ (§. 42, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

V. Die Grundoperationen mit dekadischen ganzen Zahlen.

1. Zahlensysteme.

Zahlensysteme überhaupt.

§. 58. Eine übersichtliche Anordnung aller besonderen Zahlen, welche den Zweck hat, mit wenigen Zahlenausdrücken jede beliebig große Zahl darzustellen, nennt man ein Zahlensystem.

Um ein Zahlensystem zu bilden, zählt man in der natürlichen Zahlenreihe nur bis zu einer bestimmten, jedoch 1 überschreitenden Zahl b hinauf, welche man noch unmittelbar auffassen will, und welche die Grundzahl oder

Basis des Zahlensystemes heißt. Betrachtet man diese als eine neue Einheit und kommt dann beim weitern Zählen auf eine Zahl, welche diese neue Einheit so vielmal enthält, wie die Grundzahl anzeigt, also auf die Zahl $b.b = b^2$, so sieht man diese wieder als eine neue Einheit oder als Einheit der nächst höheren Ordnung an. Gelangt man bei fortgesetztem Zählen zu einer Zahl, welche die höhere Einheit b^2 so oft enthält, wie b anzeigt, also zu der Zahl $b^2.b = b^3$, so wird diese als Einheit einer noch höheren Ordnung angesehen. Durch Fortsetzung dieses Vorganges kann man neue Einheiten immer höherer Ordnungen bilden.

Die auf einander folgenden Einheiten $b, b^2, b^3 \ldots$ erscheinen als Potenzen der gleichen Grundzahl b und heißen, den Exponenten derselben gemäß, Einheiten der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung, oder auch des ersten, zweiten, dritten, ... Ranges, zum Unterschiede von der ursprünglichen Einheit, die man, weil $1 = b^0$ (§ 52, Zusatz) ist, auch Einheit der nullten Ordnung nennen kann.

Jede Zahl kann sodann als eine Summe von Theilen dargestellt werden, von denen jeder die Einheit einer bestimmten Ordnung, versehen mit einem Coefficienten, welcher kleiner als die Grundzahl ist, enthält.

Beweis. Ist b^n die höchste Einheit, welche in der ganzen Zahl N vorkommt, so kann man

$$N = a_n b^n + N_1$$

setzen, wo $a_n < b$ und $N_1 < b^n$ sein muß. Eben so kann man weiter setzen:

$$N_1 = a_{n-1} b^{n-1} + N_2, \text{ wo } a_{n-1} < b, N_2 < b^{n-1};$$
$$N_2 = a_{n-2} b^{n-2} + N_3, \text{ wo } a_{n-2} < b, N_3 < b^{n-2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{n-2} = a_2 b^2 + N_{n-1}, \text{ wo } a_2 < b, N_{n-1} < b^2;$$
$$N_{n-1} = a_1 b + a_0, \text{ wo } a_1 < b, a_0 < b.$$

Substituiert man nach und nach die Werthe von $N_1, N_2, \ldots N_{n-2}, N_{n-1}$ in N, so erhält man endlich

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

wobei übrigens von den Coefficienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0$ einige, oder auch alle 0 sein können.

Dieser Ausdruck ist daher die allgemeine Form für jede beliebige ganze Zahl in dem Zahlensysteme, dessen Grundzahl b ist.

Um nun in diesem Systeme alle beliebigen ganzen Zahlen zu benennen, genügt es, bloß denjenigen Zahlen, welche kleiner als b sind, so wie den auf einander folgenden Potenzen von b besondere Namen zu geben. Um in diesem Systeme alle beliebigen Zahlen schriftlich darzustellen, bedarf es nur besonderer Zeichen (Ziffern) für die Zahlen, welche kleiner als b sind, und des Zeichens 0 für das Nichtvorhandensein einer bestimmten Potenz von b, somit zusammen so vieler Ziffern, wie die Grundzahl b anzeigt.

Da man jede ganze Zahl, die größer als **1** ist, als Grundzahl eines Zahlensystems wählen kann, so lassen sich unzählig viele verschiedene Zahlensysteme herstellen. Die wenigsten Zeichen verlangt das dyadische Zahlensystem mit der Grundzahl zwei, indem man darin jede Zahl durch die zwei Zeichen 0 und 1 darstellen kann; dasselbe führt jedoch die Unbequemlichkeit mit sich, daß auch kleine Zahlen schon mit vielen Ziffern geschrieben werden müssen.

Dekadisches Zahlensystem.

§. **59.** Das gegenwärtig allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Grundzahl zehn ist.

In diesem drückt man die ersten neun Zahlen, Einer, mit den bekannten Zahlwörtern eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun aus und nennt die Einheit der ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Ordnung bezüglich einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ein Zehntausend, ... Verbindet man mit jenen Zahlwörtern die Benennungen der auf einander folgenden Ordnungen von Einheiten, so kann dadurch jede beliebig große Zahl benannt werden.

Um die dekadischen Zahlen schriftlich darzustellen, genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu denen noch die 0 kommt.

Bezeichnet man mit a, b, c, ... p, q, r irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ... 8, 9, so ist der Ausdruck

$$r.10^n + q.10^{n-1} + p.10^{n-2} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a$$

die allgemeine Form einer dekadischen ganzen Zahl. Man kürzt aber diese Form dahin ab, daß man die Potenzen von 10 wegläßt und nur die Coefficienten (Ziffern) anschreibt, und jeder Ziffer einen zehnfachen Werth anweist, wenn man sie in die nächste Rangstelle nach links versetzt. In diesem Sinne ist z. B.

$$35684 = 3.10^4 + 5.10^3 + 6.10^2 + 8.10 + 4, \text{ oder}$$
$$= 30000 + 5000 + 600 + 80 + 4.$$

Der Rang jeder einzelnen Ziffer wird durch den Exponenten derjenigen Potenz von 10 bestimmt, als deren Coefficienten man sich die Ziffer vorstellen muß; man nennt diesen Potenzexponenten von 10 die Ordnungszahl der Ziffer; z. B. in 35684 ist die Ziffer 6 vom 2ten, die höchste Ziffer 3 vom 4ten Range.

Weil auf die höchste Ziffer einer dekadischen Zahl noch so viele Ziffern folgen müssen, als der Rang derselben anzeigt, so ist die Anzahl der Ziffern, mit welchen eine dekadische Zahl geschrieben wird, um 1 größer als die Ordnungszahl der höchsten Ziffer.

Eine Potenz von 10 ist die kleinste Zahl, welche eine Ziffer mehr enthält, als die Ordnungszahl der höchsten Ziffer anzeigt. Es ist daher eine $m$ziffrige Zahl $\geqq 10^{m-1}$, aber $< 10^m$.

2. Das Rechnen mit dekadischen Zahlen.

Addition dekadischer Zahlen.

§. **60.** Das Rechnen mit dekadischen ganzen Zahlen beruht auf den Vorschriften, welche in diesem Abschnitte für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, die nach den Potenzen derselben Grundzahl geordnet sind, entwickelt wurden; nur muß dabei wegen der einfacheren Darstellung der dekadischen Zahlen durch neben einander geschriebene Ziffern auf den Rang dieser einzelnen Ziffern Rücksicht genommen werden.

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Ist } M = & d.10^3 + & c.10^2 + & b.10 + & a, \text{ und} \\
N = & & r.10^2 + & q.10 + & p, \text{ so ist} \\
\hline
M + N = & d.10^3 + & (c+r).10^2 + & (b+q).10 + & (a+p)
\end{array}$$

Man schreibt also beim Addieren dekadischer Zahlen die Ziffern von gleicher Rangstelle unter einander, und darunter nach der Ordnung die Summe der unter einander stehenden Ziffern.

Ist die Summe der unter einander stehenden Ziffern zweiziffrig, z. B. $b + q = 1.10 + m$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer m, und addiere die höhere zu den Ziffern dieser höheren Rangstelle. Die obige Summe nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$M + N = d.10^3 + (c + r + 1).10^2 + m.10 + (a + p).$$

Z. B.

$$\begin{array}{r} 6375 = 6.10^3 + 3.10^2 + 7.10 + 5 \\ 1482 = 1.10^3 + 4.10^2 + 8.10 + 2 \\ \scriptstyle 1 \qquad\quad\ \ \scriptstyle 1.10^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline 7857 = 7.10^3 + 8.10^2 + 5.10 + 7. \end{array}$$

§. **61**. **Die Summe zweier Zahlen hat entweder eben so viele Ziffern, als der größere Summand, oder um eine Ziffer mehr.**

Hat M m und N n Ziffern, wobei $M > N$ vorausgesetzt wird, so ist $M \overline{>} 10^{m-1}$, aber $< 10^m$, ferner $N \overline{>} 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, folglich $M + N \overline{>} 10^{m-1} + 10^{n-1}$, aber $< 10^m + 10^n$, daher $M + N > 10^{m-1}$, aber $< 2.10^m$; die Summe $M + N$ hat also mindestens m und höchstens $m + 1$ Ziffern.

Subtraction dekadischer Zahlen.

§. **62**. Ist

$$\begin{array}{rl} M = & d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a, \text{ und} \\ N = & \qquad\quad\ \ r\,10^2 + q.10 + p, \text{ so ist} \\ \hline M - N = & d.10^3 + (c - r).10^2 + (b - q).10 + (a - p). \end{array}$$

Beim Subtrahieren dekadischer Zahlen schreibt man daher die Ziffern von gleicher Rangstelle unter einander und darunter die Differenzen der unter einander stehenden Ziffern.

Ist in einer Rangstelle die Ziffer des Subtrahends größer als die des Minuends, so vermehrt man die letztere, um subtrahieren zu können, um 10, und vermehrt, damit die Differenz unverändert bleibe (§. 25), auch den Subtrahend um 10 Einheiten desselben Ranges oder um 1 Einheit in der nächst höheren Rangstelle. Ist oben z. B. $q > b$, so nimmt die Differenz folgende Gestalt an:

$$M - N = d.10^3 + [c - (r + 1)].10^2 + [(b + 10) - q].10 + (a - p).$$

$$\scriptstyle 10 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10.10$$

Z. B.

$$\begin{array}{r} 5928 = 5.10^3 + 9.10^2 + 2.10 + 8 \\ 2345 = 2.10^3 + 3.10^2 + 4.10 + 5 \\ \scriptstyle 1 \qquad\quad\ \ \scriptstyle 1.10^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline 3583 = 3.10^3 + 5.10^2 + 8.10 + 3. \end{array}$$

§. **63**. **Die Differenz zweier dekadischer Zahlen hat höchstens so viele Ziffern als der Minuend, kann ihrer aber auch unbestimmt weniger haben.**

Ist M mziffrig, und N nziffrig, $M - N = D$, daher $M = N + D$, so hat nach §. 61, M so viele Ziffern als der größere der beiden Summanden N und D, oder um eine mehr. Folglich kann D nicht mehr Ziffern haben als M, wohl aber unbestimmt weniger, sofern $N > D$ ist.

Multiplication dekadischer Zahlen.

§. **64.** 1. Wenn $M = e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$, so ist

$$M.p = ep.10^4 + dp.10^3 + cp.10^2 + bp.10 + ap.$$

Eine mehrziffrige Zahl wird daher mit einer einziffrigen multipliciert, indem man die Einer, Zehner, Hunderte, ... des Multiplicands mit dem Multiplicator multipliciert und die einzelnen Producte unter die multiplicierten Ziffern setzt.

Ist eines dieser Producte zweiziffrig, z. B. $cp = r.10 + s$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer s, und zähle die höhere r zu dem Producte in dieser höheren Rangstelle.

$$\text{Z. B. } \begin{array}{r} 578 \times 3 \\ 22 \\ \hline 1734 \end{array} = \begin{array}{l} (5.10^2 + \ \ 7.10 + \ \ 8) \times 3 \\ \quad\ 2.10^2 \qquad 2.10 \\ \hline 17.10^2 + {}_2 3.10 + {}_2 4 \end{array}$$

2. Ist M irgend eine mehrziffrige Zahl und

$$N = p.10^3 + q.10^2 + r.10 + s, \text{ so ist}$$
$$M.N = Mp.10^3 + Mq.10^2 + Mr.10 + Ms.$$

Um daher zwei mehrziffrige Zahlen mit einander zu multiplicieren, multipliciert man den Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplicators, von der höchsten angefangen, multipliciert dann die erhaltenen Theilproducte der Ordnung nach mit den fallenden Potenzen von 10, was dadurch geschieht, daß man jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte rückt und addiert die unter einander stehenden Ziffern der Theilproducte.

$$\text{Z. B.} \quad \begin{array}{r} 7318 \\ 473 \\ \hline 2927200 \\ 512260 \\ 21954 \\ \hline 3461414 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 7318 \\ 473 \\ \hline 29272 \\ 51226 \\ 21954 \\ \hline 3461414 \end{array}$$

Zusatz. Setzt man den Multiplicator so unter den Multiplicand, daß seine höchste Ziffer unter die Einer des letzteren kommt, und schreibt die niedrigste Ziffer des ersten Theilproductes unter die niedrigste Ziffer des Multiplicands, so haben die einzelnen Ziffern des Productes gleichen Rang mit den gerade darüber stehenden Stellen des Multiplicators.

§. **65.** Das Product zweier dekadischer Zahlen hat entweder so viele Ziffern, als beide Factoren zusammengenommen, oder um eine Ziffer weniger.

Sei M $m$ziffrig und N $n$ziffrig, so ist $M \geqq 10^{m-1}$, aber $< 10^m$, ferner $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, folglich $MN \geqq 10^{m+n-2}$, aber $< 10^{m+n}$; das Product MN hat also mindestens $m + n - 1$ Ziffern und höchstens $m + n$ Ziffern.

Division dekadischer Zahlen.

§. **66.** Es sei als Dividend das Product

$$M = cr.10^4 + (br + cq).10^3 + (ar + bq + cp).10^2 + (aq + bp).10 + ap,$$

welches wir der leichtern Uebersicht wegen so schreiben wollen:

$$M = cr.10^4 + \left.\begin{array}{r} br \\ + cq \end{array}\right| .10^3 + \left.\begin{array}{r} ar \\ + bq \\ + cp \end{array}\right| .10^2 + \left.\begin{array}{r} aq \\ + bp \end{array}\right| .10 + ap,$$

und als Divisor die Zahl

$$N = c.10^2 + b.10 + a$$

gegeben, so erhält man nach §. 55, 2

$$\begin{array}{l}
M:N = (cr.10^4 + br\,|\,.10^3 + ar\,|\,.10^2 + aq\,|\,.10 + ap):(c.10^2 + b.10 + a) \\
\qquad\qquad\qquad\quad + cq\qquad\quad + bq\qquad\quad + bp \qquad\qquad = r.10^2 + q.10 + p \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; + cp \\
\quad cr.10^4 + br.10^3 + ar.10^2 \\
\quad\; - \qquad\;\; - \qquad\quad - \\
\hline
\qquad + cq.10^3 + bq\,|\,.10^2 + aq\,|\,.10 \\
\qquad\qquad\qquad\quad + cp \qquad\quad + bp \\
\qquad + cq.10^3 + bq.10^2 + aq.10 \\
\qquad\;\; - \qquad\quad - \qquad\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + cp.10^2 + bp.10 + ap \\
\qquad\qquad\qquad + cp.10^2 + bp.10 + ap \\
\qquad\qquad\qquad\;\; - \qquad\quad - \qquad\; - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Man nimmt daher, da hier cr auch zweiziffrig sein kann, so viele höchste Ziffern des Dividends, als der Divisor hat, oder wenn diese kleiner wären als der Divisor, um eine mehr als ersten Theildividend an, multipliciert mit der dadurch gefundenen höchsten Ziffer des Quotienten den Divisor und subtrahiert das Product von dem ersten Theildividend. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Ziffer des Dividends, bestimmt aus diesem neuen Theildividend die zweite Ziffer des Quotienten und setzt dieses Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen wurden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Rest, der aus der Subtraction der Theilproducte entsteht, immer kleiner sein muß als der Divisor, weil man sonst im Quotienten eine zweite Ziffer von derselben Rangstelle erhalten würde.

Z. B. 4409064 : 836 = 5274, oder 4409064,

$$\begin{array}{r}
4180 \\
\hline
2290 \\
1672 \\
\hline
6186 \\
5852 \\
\hline
3344 \\
3344 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
836 \\
\hline
5274 \\
\hline
4180 \\
\hline
2290 \\
1672 \\
\hline
6186 \\
5852 \\
\hline
3344 \\
3344 \\
\hline
0
\end{array}$$

oder wenn man die Theilproducte in Gedanken subtrahiert und nur die Reste anschreibt,

$$\begin{array}{r}
4409064 \\
836 \\
\hline
5274 \\
\hline
2290 \\
6186 \\
3344 \\
= = = =
\end{array}$$

Zusatz. Schreibt man den Divisor unter den ersten Theildividend, und die erste Ziffer des Quotienten unter die Einerstelle des Divisors, so hat jede

Ziffer des Quotienten gleichen Rang mit der gerade darüber stehenden Ziffer des Dividens.

§. **67.** Der Quotient hat entweder eben so viele Ziffern als der Unterschied zwischen der Anzahl der Ziffern des Dividends und der des Divisors beträgt, oder um eine Ziffer mehr.

Ist M mziffrig und N nziffrig, wo $M > N$ ist, und $M : N = Q$, daher $M = N.Q$, so hat nach §. 66 M so viele Ziffern, als die Factoren N und Q zusammengenommen, oder um eine Ziffer weniger. Demnach muß Q entweder so viele Ziffern haben, als ihrer M mehr hat als N, oder noch um eine mehr.

Zweiter Abschnitt.

Die Grundoperationen mit algebraischen ganzen Zahlen.

1. Erklärungen.

§. **68.** Um das allgemeine Verfahren der Subtraction (§. 18), nach welchem man in der Zahlenreihe vom Minuend um so viel Einheiten zurückzählen soll, als der Subtrahend anzeigt, auch in dem Falle, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist, anwendbar zu machen, ist man genöthigt, die Reihe der natürlichen Zahlen dadurch zu erweitern, daß man von der Null als ihrem Ausgangspuncte (§. 4) nach dem gleichen Gesetze auch abwärts fortschreitet.

Diese Erweiterung des Zahlengebietes läßt sich am besten an der Zahlenlinie nachweisen.

$-6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6$

$y \qquad\qquad x$

Schreitet man auf der Zahlenlinie von der Stelle 6 um 4 Schritte zurück, so gelangt man zu der Stelle x, und es ist $x = 6 - 4 = 2$.

Schreitet man aber von der Stelle 6 um 8 Schritte zurück, so gelangt man zu der Stelle y, und es ist $y = 6 - 8$. Zu derselben Stelle kommt man auch, indem man von der Stelle 6 zuerst 6, dann 2 Schritte zurück geht; mithin ist $y = 6 - 6 - 2 = 0 - 2$, wofür man -2 schreibt.

Durch dieselbe Schlußweise überzeugt man sich, daß je zwei gleichweit vom Nullpunkte entfernte Stellen der Zahlenlinie durch dieselbe Zahl bezeichnet werden, daß aber die Zahlen, welche auf derjenigen Seite, die der ursprünglichen Richtung entgegengesetzt ist, liegen, das beständige Vorzeichen — haben. Dann muß man aber den Zahlen auf der ursprünglichen Richtung der Zahlenlinie das Vorzeichen + geben. Denn schreitet man von 0 in der ursprünglichen Richtung 2 Schritte ab, so gelangt man zu der Stelle $0 + 2 = +2$; oder schreitet man von der Stelle -6 zuerst 6, dann 2 Schritte in der ursprünglichen Richtung ab, so kommt man zur Stelle $-6 + 6 + 2 = 0 + 2 = +2$.

Die mit dem Vorzeichen — versehenen Zahlen heißen **negative Zahlen**; sie bilden den Gegensatz zu den bisherigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, welche man zum Unterschiede von jenen **positive Zahlen** nennt und mit dem Vorzeichen + bezeichnet. Es ist demnach $+a = a$.

Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden **relative** oder **algebraische Zahlen** genannt, im Gegensatze zu den ursprünglichen Zahlen, welche **absolute Zahlen** heißen.

Jede algebraische Zahl besteht aus einem Vorzeichen und einem Zahlenwerthe. Das Vorzeichen zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet; der Zahlenwerth ist eine absolute Zahl und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder der negativen Zahlen einnimmt.

Zwei Zahlen, welche gleichen Zahlenwerth, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander entgegengesetzt.

Es ist nicht nöthig, stets beide Vorzeichen zu gebrauchen; man pflegt das Vorzeichen + als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

Die Vorzeichen + und — sind zu unterscheiden von den bisherigen Rechnungszeichen der Addition und der Subtraction; sie stehen jedoch mit denselben in einer so innigen Beziehung, daß die Doppeldeutigkeit dieser Zeichen gar nicht störend sein kann. Es bedeutet nämlich + a eine Zahl, zu der man gelangt, wenn man in der Zahlenreihe von 0 um a Einheiten vorwärts schreitet, — a dagegen eine Zahl, zu der man gelangt, wenn man in der Zahlenreihe von 0 um a Einheiten zurückschreitet; daher ist nach §§. 11 und 18

$$+a = 0 + a,$$
$$-a = 0 - a,$$

wo die ersten Zeichen Vorzeichen, die zweiten Rechnungszeichen vorstellen.

Größen, wie Bewegung nach Norden und nach Süden, das Steigen und Sinken, Vermögen und Schulden, Höhe über und unter dem Meeresspiegel, Zeiten vor und nach Christi Geburt, u. dgl., welche in dem einen und in dem entgegengesetzten Sinne gezählt werden können, so daß gleichviel von beiden Zählungen 0 gibt, heißen entgegengesetzte Größen. In der Mathematik bezeichnet man die eine von zwei entgegengesetzten Größen, gleichviel welche, aber consequent, mit +, die anderen mit —.

Hätte man z. B. die Zeit, wann ein Ereigniß C stattfand, zu rechnen aus der Angabe: a Jahre nach Christo fand ein Ereignis A statt, b Jahre später ein Ereignis B und c Jahre früher ein Ereignis C; so wäre der gesuchte Zeitpunkt $x = a + b - c$. Käme nach Einsetzung der Werthe für a, b, c ein Resultat — m zum Vorschein, so hieße dies: das Ereignis C fand m Jahre vor Christo statt.

Allgemein: Ein negativer Werth — m für eine gesuchte Größe x bedeutet stets, daß die Größe gemessen wird durch m Einheiten, aber in einem Sinne, welcher dem ursprünglich in die Rechnung eingeführten entgegengesetzt ist.

2. Das Rechnen mit algebraischen Zahlen.

§. **69**. Der durch die Aufnahme der negativen Zahlen erweiterte Zahlenbegriff hat zur Folge, daß auch die Begriffe der Operationen angemessen erweitert werden, damit sich die Lehrsätze, deren Giltigkeit zunächst für absolute Zahlen nachgewiesen wurde, auch auf die algebraischen Zahlen ausdehnen lassen.

§. **70**. Die für das Addieren in §. 11 gegebene Erklärung bleibt auch für algebraische Zahlen giltig; nur bestimmt sich das Weiterschreiten vom ersten Summanden aus um die Einheiten des zweiten mit Rücksicht auf den Gegensatz der positiven und negativen Zahlen als ein Vorwärts- oder Rückwärtsschreiten in der algebraischen Zahlenreihe, je nachdem der zweite Summand positiv oder negativ ist.

1. Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man ihre Zahlenwerthe addiert und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a + b),$$
$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Beweis. $(+a) + (+b)$ zeigt an, daß man in der algebraischen Zahlenreihe von der Zahl $+a$ aus um b Einheiten vorwärtsschreiten soll; dadurch gelangt man zu der Zahl $a + b$ auf der positiven Seite, also zu $+(a + b)$.

$(-a) + (-b)$ zeigt an, daß man in der algebraischen Zahlenreihe von der Zahl $-a$ aus um b Einheiten rückwärtsschreiten soll; dadurch gelangt man auch zu der Zahl $a + b$, jedoch auf der negativen Seite, also zu $-(a + b)$.

2. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man den kleineren Zahlenwerth von dem größeren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren Zahlenwerthes gibt.

$$(+a) + (-b) = +(a - b), \text{ oder } = -(b - a),$$
$$(-a) + (+b) = -(a - b), \text{ oder } = +(b - a).$$

Der Beweis wird ähnlich, wie bei dem vorhergehenden Satze, geführt.

Zusatz. Zwei entgegengesetzte Zahlen geben zur Summe Null (heben sich gegenseitig auf).

$$(+a) + (-a) = 0,$$
$$(-a) + (+a) = 0.$$

§. 71. Auch für das Subtrahieren algebraischer Zahlen gilt die in §. 17 aufgestellte Erklärung. Um diese Operation auch hier auf das Zählen zurückzuführen, darf man nur mit Rücksicht auf den Gegensatz der positiven und negativen Zahlen die in §. 18 gegebene Regel dahin ergänzen, daß das Fortschreiten vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahends rückwärts oder vorwärts zu geschehen hat, je nachdem der Subtrahend positiv oder negativ ist.

Zwei algebraische Zahlen werden subtrahiert, indem man zum unveränderten Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b),$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b),$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b),$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b).$$

Beweis. $(+a) - (+b)$ zeigt an, daß man den in der algebraischen Zahlenreihe vom Minuend $+a$ aus um b Einheiten rückwärtsschreiten soll; dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+a$ die Zahl $-b$ addiert.

$(+a) - (-b)$ zeigt an, daß man in der algebraischen Zahlenreihe von $+a$ aus um b Einheiten vorwärtsschreiten soll; dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+a$ die Zahl $+b$ addiert.

Aehnlich sind die Beweise für den dritten und vierten Fall.

Folgesatz. Die Differenz je zweier algebraischer Zahlen kann als eine algebraische Summe dargestellt werden.

§. 72. 1. Jeder mehrgliedrige Ausdruck (§. 27) kann in eine algebraische Summe verwandelt werden.

$$a - b - c + d = (+a) + (-b) + (-c) + (+d).$$

Beweis. $a - b - c + d = +a - (+b) - (+c) + (+d)$ (§. 68)
$= (+a) + (-b) + (-c) + (+d)$ (§. 71).

Umgekehrt:

2. Jede algebraische Summe kann in einen mehrgliedrigen Ausdruck verwandelt werden.

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) = a - b + c - d.$$

3. Eine algebraische Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht.

Folgt aus 1. und 2. mit Zuziehung des §. 27, Folgef. 1.

§. **73**. Der für absolute Zahlen aufgestellte Begriff der Multiplication (§. 31) muß bei positiven und negativen Zahlen mit Rücksicht auf deren Gegensatz dahin erweitert werden, daß man hier, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, den Multiplicand selbst oder das Entgegengesetzte desselben, d. i. den Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen, so oft als Summand zu setzen hat, als der Multiplicator Einheiten enthält.

Zwei gleich bezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

$$+a \,.\, +b = +ab,$$
$$-a \,.\, -b = +ab,$$
$$+a \,.\, -b = -ab,$$
$$-a \,.\, +b = -ab,$$

Beweis. $+a \,.\, +b$ zeigt an, daß man den Multiplicand $+a$ selbst $b$mal als Summand zu setzen hat, wodurch man nach §. 70, 1. ein positives Resultat erhält.

$-a \,.\, -b$ zeigt an, daß man das Entgegengesetzte von $-a$, also $+a$, $b$mal als Summand zu setzen hat, wodurch man ein positives Resultat erhält.

Aehnlich sind die Beweise für den dritten und vierten Fall.

Folgesätze. 1. Das Product zweier algebraischer Zahlen bleibt ungeändert, wenn man dieselben unter einander vertauscht.

Es ist $\pm a \,.\, +b = \pm ab$, und $+b \,.\, \pm a = \pm ba = \pm ab$ (§. 32); daher $\pm a \,.\, +b = +b \,.\, \pm a$. Eben so folgt

$$\pm a \,.\, -b = -b \,.\, \pm a.$$

2. Das Product von beliebig vielen positiven Zahlen ist positiv.

3. Das Product von lauter negativen Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Factoren eine gerade oder ungerade (§. 80, Zusatz) ist.

§. **74**. Der in §. 42 für absolute Zahlen gegebene Begriff der Division gilt unverändert auch für algebraische Zahlen.

Der Quotient zweier algebraischer Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem dieselben gleichbezeichnet oder ungleichbezeichnet sind.

$$+a : +b = +q,$$
$$-a : -b = +q,$$
$$+a : -b = -q,$$
$$-a : +b = -q,$$

wo q den Zahlenwerth des Quotienten vorstellt.

Beweis. Ist der Dividend (das Product) positiv, so müssen, wie aus §. 73 folgt, der Divisor und der Quotient (die beiden Factoren) gleichbezeichnet sein; also $+a : +b = +q$ und $+a : -b = -q$.

Ist der Dividend negativ, so müssen Divisor und Quotient ungleichbezeichnet sein; also $-a : +b = -q$ und $-a : -b = +q$.

§. **75.** Alle bisher für die absoluten ganzen Zahlen erwiesenen Lehrsätze gelten auch für die algebraischen ganzen Zahlen.

Denn alle jene Lehrsätze lassen sich aus den zwei Fundamentalsätzen von der Vertauschbarkeit der Summanden und der Vertauschbarkeit der Factoren durch bloße Umformungen herleiten; diese beiden Sätze aber gelten, wie in §. 72, 3 und §. 73, Folges. 1 bewiesen wurde, auch für algebraische ganze Zahlen.

Zusätze. 1. Hiernach ist zugleich der im Schlußabsatze des §. 18 bezüglich der Differenzen ausgesprochene Vorbehalt aufgehoben.

2. In Bezug auf die Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen, welche ebenfalls auch für algebraische Zahlen gelten, muß man festhalten, daß von zwei algebraischen Zahlen diejenige die kleinere ist, zu welcher man eine positive Zahl addieren muß, um die andere zu erhalten (§. 7).

Dritter Abschnitt.

Von der Theilbarkeit ganzer Zahlen.

§. **76.** Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch dieselbe dividiert eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Der Dividend ist in diesem Falle ein Vielfaches (§. 31) des Divisors und der Divisor ein Maß des Dividends.

Eine Zahl, welche nur durch die Einheit und durch sich selbst theilbar ist, wird eine absolute Primzahl, auch bloß Primzahl genannt. Jede andere Zahl heißt eine zusammengesetzte Zahl. Jede durch einen Buchstaben dargestellte Zahl ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angenommen wird, als eine Primzahl anzusehen.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen genannt. Zahlen, welche außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen Primzahlen gegen einander oder relative Primzahlen.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen.

Ist eine Zahl a durch eine andere b nicht theilbar, so heißt die Zahl r, welche erhalten wird, wenn man von dem Dividende a das größte Vielfache von b, welches darin vorkommt, z. B. bq, subtrahiert, der Rest der Division. Es ist also $r = a - bq$, und daher $a = bq + r$.

1. Allgemeine Sätze.

§. **77.** 1. Sind zwei oder mehrere Zahlen durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar, so ist auch ihre Summe dadurch theilbar.

Beweis. Es seien a, b, c durch m theilbar. Setzt man $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, $c : m = \gamma$, so ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, und $a + b + c = m\alpha + m\beta + m\gamma$; folglich $(a + b + c) : m = \alpha + \beta + \gamma =$ einer ganzen Zahl.

2. Sind zwei Zahlen durch eine dritte theilbar, so ist auch ihre Differenz dadurch theilbar.

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$ und $b : m = \beta$, so ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, und $a - b = m\alpha - m\beta$, folglich $(a - b) : m = \alpha - \beta =$ einer ganzen Zahl.

§. **78.** 1. Ist eine Zahl durch eine andere Zahl theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben dadurch theilbar.

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$, so ist $a = m\alpha$, und $ap = mp\alpha$, folglich $ap : m = p\alpha =$ einer ganzen Zahl.

2. **Ist eine Zahl durch irgend eine zusammengesetzte Zahl theilbar, so ist sie auch durch alle Factoren der letzteren theilbar.**

Beweis. Es sei a durch m theilbar, und $m = pqr$. Setzt man $a : m = \alpha$, so ist $a = m\alpha$, oder $a = pqr\alpha$, folglich $a : p = qr\alpha$, $a : q = pr\alpha$, $a : r = pq\alpha$.

3. **Ist eine Zahl durch zwei relative Primzahlen theilbar, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.**

Beweis. Es sei a durch die relativen Primzahlen m und n theilbar. Da diese keine gemeinschaftlichen Factoren haben sollen und doch a sämmtliche Factoren von m und von n enthalten muß, so muß a auch alle Factoren des Productes mn enthalten, also a durch mn theilbar sein.

4. **Ist ein Product zweier Factoren durch eine Zahl theilbar, welche gegen den einen Factor eine relative Primzahl ist, so muß der zweite Factor durch diese Zahl theilbar sein.**

Beweis. Es sei ab durch m theilbar und m gegen a eine relative Primzahl. Da a mit m keinen gemeinschaftlichen Factor hat, so müssen, damit ab durch m theilbar sei, mit Rücksicht auf §. 50, 1 alle Factoren vom m in der Zahl b enthalten, d. i. es muß b durch m theilbar sein.

5. **Ist eine Zahl gegen zwei oder mehrere andere Zahlen eine relative Primzahl, so ist sie es auch gegen das Product derselben.**

Beweis. Ist m eine relative Primzahl gegen a, b und c, d. i. hat keine der Zahlen a, b, c einen Factor, welcher auch in m enthalten wäre, so kann auch in dem Producte abc, welches nach §. 36 nur die Factoren von a, b und c enthält, kein Factor von m vorkommen.

6. **Die Potenzen zweier relativer Primzahlen sind selbst relative Primzahlen.**

Beweis. Sind a und b relative Primzahlen, so muß nach dem vorhergehenden Satze a auch gegen bb, ferner aa gegen bb u. s. w., allgemein a^m gegen b^n eine relative Primzahl sein.

§. **79.** 1. **Wenn der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Divisionsrest dadurch theilbar sein.**

Beweis. Es seien a und b durch m theilbar und es gebe a durch b dividiert den Quotienten q mit dem Reste r; so ist $r = a - bq$ (§. 76). Da a durch m theilbar ist, ferner b, somit auch das Vielfache bq durch m theilbar ist, so muß auch die Differenz $a - bq$, welche gleich r ist, durch m theilbar sein.

Folgesatz. **Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Divisor und Rest.**

2. **Wenn der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Dividend dadurch theilbar sein.**

Beweis. Es gebe a durch b dividiert den Quotienten q mit dem Reste r, wo dann $a = bq + r$ (§. 76) ist, und es sei m ein gemeinschaftliches Maß von b und r. Wenn b, somit auch das Vielfache bq, und ferner r durch m theilbar sind, so muß auch die Summe $bq + r$, welche gleich a ist, durch m theilbar sein.

Folgesatz. **Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Divisionsrest ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Dividend und Divisor.**

2. Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

§. **80**. Eine dekadische Zahl ist durch 2 theilbar, wenn sie an der Stelle der Einer eine der Ziffern 0, 2, 4, 6 oder 8 hat.

Beweis. Ist N eine dekadische Zahl, in welcher a, b, c, d, e, . . . folgeweise die Ziffern an der Stelle der Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, . . . bedeuten, so ist

$$N = \ldots 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a, \text{ daher}$$

$$N : 2 = \ldots\ldots 5000\,e + 500\,d + 50\,c + 5\,b + \frac{a}{2}.$$

Ist nun a gleich Null oder durch 2 theilbar, so ist auch N durch 2 theilbar.

Zusatz. Jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6, oder 8 haben, werden gerade Zahlen genannt. Eine gerade Zahl wird, da sie durch 2 theilbar, also ein Vielfaches von 2 ist, allgemein durch 2m ausgedrückt, wo m jede beliebige ganze Zahl vorstellen kann.

Jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 1, 3, 5, 7 oder 9 haben, heißen ungerade Zahlen. Da eine ungerade Zahl um 1 größer oder kleiner ist, als eine gerade, so ist $2m + 1$ oder $2m - 1$ die allgemeine Form für die ungeraden Zahlen.

Folgesätze. 1. Die Summe und die Differenz zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

2. Die Summe und die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

3. Das Product zweier gerader Zahlen ist gerade, das Product zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

4. Das Product aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist gerade.

§. **81**. Eine dekadische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme bezüglich durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Beweis.
$$\begin{aligned} N &= \ldots 1000d + 100c + 10b + a, \\ &= \ldots 999d + d + 99c + c + 9b + b + a, \\ &= \ldots 999d + 99c + 9b + \ldots + d + c + b + a, \end{aligned}$$

daher

$$N : 3 = \ldots + 333d + 33c + 3b + \frac{\ldots d + c + b + a}{3},$$

und

$$N : 9 = \ldots + 111d + 11c + b + \frac{\ldots d + c + b + a}{9}.$$

Zusatz. Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar (§. 78, 3).

§. **82**. 1. Eine dekadische Zahl ist durch 4 theilbar, wenn die zwei niedrigsten Ziffern als Zahl betrachtet durch 4 theilbar sind.

Beweis. $N = \ldots 1000d + 100c + 10b + a$, daher

$$N : 4 = \ldots 250d + 25c + \frac{10b + a}{4}.$$

2. Eine dekadische Zahl ist durch 8 theilbar, wenn die drei niedrigsten Ziffern als Zahl betrachtet durch 8 theilbar sind.

Beweis. $N = \ldots 10000e + 1000d + 100c + 10b + a$, daher

$$N : 8 = \ldots 1250e + 125d + \frac{100c + 10b + a}{8}.$$

§. **83.** 1. Eine dekadische Zahl ist durch 5 theilbar, wenn sie an der Stelle der Einer 0 oder 5 hat.

2. Eine dekadische Zahl ist durch 10 theilbar, wenn sie an der Stelle der Einer 0 hat.

Beweis. Hat N die frühere Bedeutung, so ist

$$1.\ N:5 = \ldots 200d + 20c + 2b + \frac{a}{5}, \text{ und}$$

$$2.\ N:10 = \ldots 100d + 10c + b + \frac{a}{10}.$$

§. **84.** Eine dekadische Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen den Ziffernsummen in den ungeraden und in den geraden Stellen durch 11 theilbar ist.

Beweis.
$$\begin{aligned} N &= \ldots 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a, \\ &= \ldots 100001f - f + 9999e + e + 1001d - d \\ &\qquad + 99c + c + 11b - b + a, \\ &= \ldots 100001f + 9999e + 1001d + 99c + 11b \\ &\qquad + (\ldots e + c + a) - (\ldots f + d + b), \end{aligned}$$

daher

$$N:11 = \ldots 9091f + 909e + 91d + 9c + b + \frac{(\ldots e + c + a) - (\ldots f + d + b)}{11}.$$

3. Von den Primzahlen insbesondere.

§. **85.** Ist eine Zahl n kleiner als das Quadrat einer anderen Zahl a, und ist n mit Ausschluß der Einheit durch keine Zahl unter a theilbar, so ist n eine Primzahl.

Beweis. Gesetzt, n sei durch irgend eine Zahl p theilbar, so könnte nur $p \geqq a$ sein. Es sei nun $n:p = x$, also $n = px$, wo x eine ganze Zahl bezeichnet; dann wäre auch $n:x = p$, also n durch x theilbar. Aus $n < a^2$ und $p \geqq a$ folgt aber $n:p < a$, oder $x < a$. Es müßte daher unter der obigen Annahme n durch eine Zahl $x < a$ theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. n muß also eine Primzahl sein.

§. **86.** Aufgabe. Alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Grenze zu bestimmen.

Man bilde die Quadrate der natürlichen Zahlen, bis das letzte Quadrat die gegebene Grenze überschreitet:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, . . .

Es sind dann Primzahlen diejenigen Zahlen zwischen 1 und 4, welche mit Ausschluß der 1 durch keine Zahl unter 2 theilbar sind, also 1, 2 und 3; ferner alle die Zahlen zwischen 4 und 9, die mit Ausschluß der 1 durch keine Zahl unter 3 theilbar sind, also 5 und 7; u. s. w.

Die Richtigkeit folgt aus §. 85.

§. **87.** Jede endliche zusammengesetzte Zahl läßt sich in lauter Primfactoren zerlegen.

Beweis. Jede zusammengesetzte Zahl muß wenigstens in zwei Factoren zerlegt werden können; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Factoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; wird im letzteren Falle das Zerlegen fortgesetzt, so muß man endlich auf lauter Primfactoren kommen. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte die gegebene Zahl aus unendlich vielen Factoren, die alle größer als 1 sind, zusammengesetzt, und also selbst unendlich groß sein, was der Voraussetzung zuwider ist.

§. **88.** Aufgabe. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Man dividiere die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Ist z. B. 630 in Primfactoren zu zerlegen, so hat man:

$$\begin{array}{rcl} 630:2 = 315 & \text{oder} & \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \\ 315:3 = 105 & & \\ 105:3 = 35 & & \\ 35:5 = 7 & & \end{array}$$

also $630 = 2 \,.\, 315 = 2 \,.\, 3 \,.\, 105 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 35 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7.$

Zusatz. Um alle Factoren einer Zahl zu finden, zerlege man dieselbe in ihre Primfactoren, multiplicire mit dem zweiten Primfactor den ersten, dann mit dem dritten Primfactor die beiden vorhergehenden zwei Primfactoren und den erhaltenen zusammengesetzten Factor, und so fort mit jedem folgenden Primfactor alle vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten Factoren. Z. B.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3,\ 6 \\ 35 & 5,\ 10,\ 15,\ 30 \\ 7 & 7,\ 14,\ 21,\ 42,\ 35,\ 70,\ 105,\ 210. \end{array}$$

§. **89.** Aufgabe. Einen allgemeinen Zahlenausdruck in Factoren zu zerlegen.

1. Bei eingliedrigen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfactoren vor; sind darin Potenzgrößen enthalten, so wird die Wurzel so oft als Factor gesetzt, als der Exponent anzeigt. Z. B.

$$a\,b\,c = a.b.c;\ a\,b^2 m^3 = a.b.b\ m.m.m;$$
$$21\ a^2 m\,x^2 = 3.7.a.a.m.x.x.$$

2. Für die Zerlegung der Polynome in Factoren lassen sich keine allgemeinen Regeln geben; es sollen daher hier nur häufiger vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

a) Ein Polynom, dessen alle Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, wird nach §. 33 in zwei Factoren zerlegt, wenn man das gemeinschaftliche Maß als den einen Factor heraushebt und als zweiten Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Ausdruckes durch jenes gemeinschaftliche Maß hervorgeht. Z. B.

1. $3\,a\,x - 4\,b\,x = x\,(3\,a - 4\,b)$,
2. $20\,x^4 - 16\,x^3 + 12\,x^2 = 4\,x^2\,(5\,x^2 - 4\,x + 3)$.

b) Insbesondere folgt aus §. 39, Zusatz,

1. $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a + b)\,(a + b)$,
2. $a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a - b)\,(a - b)$,
3. $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$.

c) Oft wird die Zerlegung eines Polynoms in Factoren dadurch erleichtert, daß man ein Glied in zwei Theile auflöst, oder daß man zu dem gegebenen Polynom dieselbe Größe addiert und zugleich wieder davon subtrahiert. Z. B.

1. $6a^2 + 5ab + b^2 = 6a^2 + 3ab + 2ab + b^2$
$= 3a(2a + b) + b(2a + b)$
$= (2a + b)(3a + b)$.

2. $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 2x - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6$
$= x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3)$.

4. Vom größten gemeinschaftlichen Maße.

§. **90**. Unter dem größten gemeinschaftlichen Maße mehrerer Zahlen versteht man die größte Zahl, durch welche diese Zahlen theilbar sind.

Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und hebe unter diesen diejenigen heraus, welche in beiden Zahlen gemeinschaftlich vorkommen; das Product derselben ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da alle Factoren desselben in beiden Zahlen enthalten sind, gewiß ein gemeinschaftliches Maß derselben; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen Factor hinzufügen würde, durch dieses Product nicht mehr beide Zahlen theilbar wären.

Beispiele. 1. Man suche das gr. g. Maß von 300 und 420.
$300 = 2.2.3.5.5$,
$420 = 2.2.3.5.7$; gr. g. Maß $= 2.2.3.5 = 60$.

2. Sind die Ausdrücke $4a^2bc$ und $6abc^2$ gegeben, so hat man
$4a^2bc = 2.2\, a.a.b.c$,
$6abc^2 = 2.3.a.b.c.c$; gr. g. Maß $= 2abc$.

2. Auflösung. Man dividiere die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Divisionsrest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gegebenen Zahlen.

Beweis. Sind a und b, wo $a > b$, die zwei gegebenen Zahlen und $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ die aufeinander folgenden Divisionsreste, so läßt sich der Rechnungsgang so darstellen:

Dividend a,	Divisor b,	Rest r_1,
„ b,	„ r_1,	„ r_2,
„ r_1,	„ r_2,	„ r_3,
„ r_2,	„ r_3,	„ r_4, u. s. w.

Zunächst ist klar, daß man bei fortgesetztem Dividieren endlich auf einen Rest $= 0$ kommen müsse, weil der jedesmalige Rest eine ganze Zahl und wenigstens um 1 kleiner als der Divisor, welcher der vorhergehende Rest war, sein muß. Es sei z. B. $r_4 = 0$.

Daß dann r_3 ein gemeinschaftliches Maß von a und b sei, ist leicht einzusehen. Aus der letzten Division folgt, daß r_3 ein g. Maß zwischen r_2 und r_3 ist; r_2 und r_3 kommen in der vorhergehenden Division als Divisor und Rest vor, also ist (§. 79, 2. Folges.) r_3 auch ein g. Maß zwischen dem Dividend r_1 und dem Divisor r_2, folglich vermöge der nächstvorhergehenden Division, wo r_1 und r_2 wieder Divisor und Rest vorstellen, r_3 ein g. Maß zwischen b und r_1, und endlich vermöge der ersten Division r_3 auch ein g. Maß zwischen a und b.

r_3 ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß von a und b. Gesetzt, diese hätten noch ein größeres gemeinschaftliches Maß $m > r_3$, so müßten (nach §. 79, 1. Folges.) vermöge der ersten Division, in welcher a und b als Dividend und Divisor vorkommen, auch der Divisor b und der Rest r_1, daher vermöge der zweiten Division auch r_1 und r_2, und endlich vermöge der dritten Division auch r_2 und r_3 durch m theilbar sein, was der Annahme $m > r_3$ widerspricht. Folglich ist r_3 das gr. g. Maß von a und b.

Beispiele. 1. Um das gr. g. Maß von 1134 und 3654 zu finden, hat man

$$\begin{array}{l} 3654 : 1134 = 3 \text{ mit dem Reste } 252 \\ 1134 : 252 = 4 \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; 126 \\ 252 : \mathbf{126} = 2 \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; 0 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r|r|l} 1134 & 3654 & 3 \\ \mathbf{126} & 252 & 4 \\ & 0 & 2 \end{array}$$

gr. g. Maß = 126.

2. Man suche das gr. g. Maß von 377 und 848.

$$\begin{array}{r|r|l} 377 & 848 & 2 \\ 1 & 94 & 4 \\ 0 & 94 & \end{array}$$

gr. g. M. = 1; 377 und 848 sind also relative Primzahlen.

3. Es soll das gr. g. Maß zwischen $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ und $a^2 - b^2$ gesucht werden.

$$\begin{array}{l} (3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2 \\ 3a^3 \qquad\;\; - 3ab^2 \\ - \qquad\quad + \\ \hline \quad - 2a^2 + a + 2b^2 + b \\ \quad - 2a^2 \qquad + 2b^2 \\ \quad + \qquad\qquad - \\ \hline \qquad\qquad + a + b \text{ Rest.} \end{array}$$

$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$

Das gesuchte gr. g. Maß ist also der letzte Divisor $a + b$.

Bei allgemeinen Zahlenausdrücken muß man oft, um die Division verrichten zu können, den Dividend mit einem Nichtfactor des Divisors multiplicieren, oder den Divisor durch einen Nichtfactor des Dividends dividieren. Daß dadurch das gr. g. Maß der beiden Ausdrücke nicht geändert wird, folgt unmittelbar aus dem Begriffe des gr. g. Maßes zweier Zahlen.

Beispiel. Man suche das gr. g. Maß zwischen

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ und } 7x^2 + 22x + 16.$$

Damit die Division der beiden Ausdrücke in ganzen Zahlen verrichtet werden könne, multipliciere man den ersten mit 7, welche Zahl kein Maß des zweiten Ausdruckes ist; man hat dann

$$\begin{array}{l} (70x^2 + \;\;98x - \;\;84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\ \;70x^2 + 220x + 160 \\ - \qquad - \qquad - \\ \hline \qquad - 122x - 244 \text{ Rest; durch } - 122 \text{ dividiert, } x + 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\ \;7x^2 + 14x \\ - \qquad - \\ \hline \qquad + 8x + 16 \\ \qquad + 8x + 16 \\ \qquad - \qquad - \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Das gr. g. Maß ist also $x + 2$.

§. **91**. Mit dem eben angegebenen Verfahren, das gr. g. Maß zweier Zahlen ohne Zerlegung derselben in Factoren zu finden, stimmt auch der Vorgang überein, das gr. g. Maß zwischen irgend zwei gleichartigen Größen (z. B. zwischen zwei geraden Linien) zu bestimmen. Man nimmt nämlich von der größeren der beiden Größen die kleinere so oft weg, als man kann; sodann von der kleineren den etwa gebliebenen Rest, von diesem Reste wieder den neuen Rest, u. s. w. Wenn nun bei einer dieser Messungen kein Rest übrig bleibt, so ist der letzte nicht verschwindende Rest das gr. g. Maß der beiden gegebenen Größen.

Hier wird man jedoch nicht, wie bei ganzen Zahlen, immer auf einen Rest = 0 kommen, indem zwar die Reste immer kleiner werden müssen, es jedoch keine noch so kleine Grenze gibt, welche diese Reste nicht erreichen könnten. Wenn man bei dem obigen Verfahren niemals auf einen Rest = 0 kommt, so weit man die Messungen auch fortsetzen würde, so haben die beiden Größen kein gemeinschaftliches Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel.

§. **92**. Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege alle Zahlen in ihre Primfactoren; das Product derjenigen Primfactoren, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen, ist das gesuchte gr. g. Maß. (§. 90, 1. Aufl.) Z. B.

Man suche das gr. Maß von 320, 400 und 680.

$$320 = 2.2.2.2.2.2.5,$$
$$400 = 2.2.2.2.5.5,$$
$$680 = 2.2.2.5.17;$$
gr. g. Maß. $2.2.2.5. = 40$.

2. Auflösung. (Ohne Zerlegung in Primfactoren.) Ist das gr. g. Maß zwischen den Zahlen a, b, c und d zu finden, so suche man zuerst das gr. g. Maß zwischen a und b, dieses sei m; dann suche man das gr. g. Maß zwischen m und c, dieses sei n; endlich suche man das gr. g. Maß zwischen n und d, dieses sei p; p ist dann das gr. g. Maß zwischen a, b, c, d.

Man kann dieses durch folgende Zusammenstellung anschaulich machen:

a b c d

m

n

p

Nach der Voraussetzung enthält m alle gemeinschaftlichen Factoren von a und b; n enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von m und c, also auch von a, b und c; p endlich enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von n und d, folglich auch von a, b, c und d; es ist also p wirklich das gr. g. Maß zwischen a, b, c und d.

Beispiele. 1. Man suche das gr. g. Maß zwischen 1554, 3552 und 5143.

1554	3552	2
222	444	3
	0	2
222	5143	23
0	703	
	37	6

Zwischen 1554 und 3552 ist also 222 das gr. g. Maß

37 ist also das gr. g. Maß zwischen 222 und 5143, folglich auch zwischen 1554, 3552 und 5143.

2. Man suche das gr. g. Maß zwischen
$$3x^2-2xy-5y^2,\ 2x^2+9xy+7y^2 \text{ und } 2x^2-2y^2.$$
Als das gr. g. Maß zwischen $3x^2-2xy-5y^2$ und $2x^2+9xy+7y^2$ erhält man $x+y$.

Zwischen $x+y$ und $2x^2-2y^2$ ist ferner $x+y$ das gr. g. Maß, welches daher zugleich das gr. g. Maß zwischen den gegebenen drei Ausdrücken ist.

5. Vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

§. **93.** Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege alle gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und nehme aus diesen alle verschiedenen Factoren, und zwar jeden so oft, als er in irgend einer gegebenen Zahl am meisten vorkommt; das Product dieser Factoren ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da es alle Factoren einer jeden der gegebenen Zahlen enthält, gewiß ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; es ist aber auch das kleinste g. Vielfache, weil man keinen jener Factoren weglassen darf, ohne daß das Product aufhören würde, durch alle gegebenen Zahlen theilbar zu sein.

Beispiele. 1. Man suche das kl. g. Vielfache von 320 und 480.
$$320 = 2.2.2.2.2.2.5,$$
$$480 = 2.2.2.2.2.3.5,$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2.2.2.2.2.2.3.5 = 960.$$

2. Es soll das kl. g. Vielfache zwischen 60, 108 und 1050 gefunden werden.
$$60 = 2.2.3.5,$$
$$108 = 2.2.3.3.3,$$
$$1050 = 2.3.5.5.7,$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2.2.3.3.3.5.5.7 = 18900.$$

2. Auflösung. (Ohne Zerlegung in Factoren.) a) Ist das kl. g. Vielfache von zwei Zahlen zu bestimmen, so suche man ihr gr. g. Maß, dividiere durch dieses eine der beiden Zahlen und multipliciere mit dem Quotienten die andere.

Beweis. Es seien a und b die gegebenen Zahlen. Haben diese kein gemeinschaftliches Maß, so ist ihr Product ab selbst zugleich ihr kl. g. Vielfaches. Sind aber a und b nicht relative Primzahlen, so sei m ihr gr. g. Maß, und zwar $a:m=\alpha$, $b:m=\beta$, wo α und β keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten können; man hat dann $a=m\alpha$, $b=m\beta$. Jedes Vielfache von a muß also die Factoren m und α, jedes Vielfache von b muß die Factoren m und β, und daher jedes gemeinschaftliche Vielfache von a und b die Factoren m, α und β enthalten; jenes Product nun, welches nur diese drei Factoren enthält, wird gewiß das kl. g. Vielfache zwischen a und b sein. Dieses kl. g. Vielfache $m\alpha\beta$ läßt sich auch so darstellen:
$$m\alpha\beta = m\alpha.\beta = a\,(b:m)$$
$$= m\beta.\alpha = b\,(a:m).$$

Beispiele. 1. Man suche das kl. g. Vielfache zwischen 648 und 972.

$$\begin{array}{r|r|l} 648 & 972 & 1 \\ 0 & \mathbf{324} & 2 \end{array} \qquad 324 \text{ ist das gr. g. Maß.}$$

$648:324 = 2;\ 972.2 = 1944$, oder
$972:324 = 3;\ 648.3 = 1944$;
kl. g. Vielfaches $= 1944$.

2. Es soll das kl. g. Vielfache zwischen $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ und $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$ gefunden werden.

Das gr. g. Maß zwischen diesen beiden Ausdrücken ist $3a^2x - 2by^2$. Man hat dann

$$(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4):(3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2,$$

und

$$(9a^4x^2 - 4b^2y^4)(3a^2x - 2by^2) = 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2 - 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6$$ das kl. g. Vielfache.

b) Sind mehr als zwei Zahlen gegeben, so suche man zuerst das kl. g. Vielfache zweier Zahlen, dann das kl. g. Vielfache des eben gefundenen Vielfachen und der dritten Zahl, und fahre auf diese Art bis zur letzten gegebenen Zahl fort. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen.

Der Beweis ist demjenigen in §. 92, 2. Aufl. ähnlich.

Zusatz. Haben zwei oder mehrere unter den gegebenen Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kann man, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, anstatt dieser Zahlen ihr gemeinschaftliches Maß nur einmal, und zugleich die Quotienten setzen, welche aus der Division jener Zahlen durch das gemeinschaftliche Maß hervorgehen (Beweis zu a der 2. Auflösung). Ist ferner eine der gegebenen Zahlen ein Maß von einer andern größeren, so kann die kleinere Zahl, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Für die Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen kann demnach folgendes praktische Verfahren angewendet werden:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe neben einander, und lasse die kleineren Zahlen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weg.

2. Man untersuche, ob nicht zwei oder mehrere der übriggebliebenen Zahlen eine Primzahl als gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so hebt man dieses Maß links heraus und dividiert dadurch alle Zahlen, deren Maß es ist; die Quotienten, so wie die nicht theilbaren Zahlen setze man in eine darunter befindliche Reihe neben einander.

3. Mit dieser neuen Reihe verfahre man eben so wie mit der ursprünglich aufgestellten, und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis man zuletzt eine Reihe erhält, in welcher lauter relative Primzahlen vorkommen.

4. Multipliciert man dann die in der letzten Reihe befindlichen relativen Primzahlen und die links herausgehobenen Maße mit einander, so ist das Product das gesuchte kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen.

Beispiel. Es soll das kl. g. Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50 gesucht werden.

$$\begin{array}{r|r} & \cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 18,\ 24,\ 32,\ 45,\ 50, \\ 2 & \cancel{9},\ 12,\ 16,\ 45,\ 25, \\ 2 & 6,\ 8,\ 45,\ 25, \\ 2 & \cancel{3},\ 4,\ 45,\ 25, \\ 5 & 4,\ 9,\ 5; \end{array}$$

kl. g. Vielfaches $= 4.9.5.2.2.2.5 = 7200$.

Vierter Abschnitt.

Von den gebrochenen Zahlen.

I. Gemeine Brüche.

§. **94.** Um den Quotienten zweier Zahlen auch in dem Falle, wenn der Dividend kein Vielfaches des Divisors ist (§. 43), darstellen zu können, ist man genöthigt, die bisher betrachtete Reihe der ganzen Zahlen in sich dadurch zu erweitern, daß man den Abstand je zweier auf einander folgender Zahlen dieser Reihe, d. i. jede ursprüngliche Einheit, durch Einschaltung neuer Zahlen in so viele gleiche Theile theilt, wie der Divisor anzeigt. Z. B. der Quotient 14 : 3 ist größer als 4 und kleiner als 5, er läßt sich daher durch die natürlichen Zahlen nicht darstellen; theilt man aber die ursprüngliche Einheit in 3 gleiche Theile (Drittel) und bildet durch Einschaltung solcher Theile eine neue Zahlenreihe

$$0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ 1,\ 1\tfrac{1}{3},\ 1\tfrac{2}{3},\ 2,\ 2\tfrac{1}{3},\ 2\tfrac{2}{3},\ 3,\ 3\tfrac{1}{3},\ 3\tfrac{2}{3},\ 4,\ 4\tfrac{1}{3},\ 4\tfrac{2}{3},\ 5,\ \ldots \text{ oder}$$
$$0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{3},\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{6}{3},\ \tfrac{7}{3},\ \tfrac{8}{3},\ \tfrac{9}{3},\ \tfrac{10}{3},\ \tfrac{11}{3},\ \tfrac{12}{3},\ \tfrac{13}{3},\ \tfrac{14}{3},\ \tfrac{15}{3},\ \ldots$$

so wird man in der so ausgefüllten Reihe für jede Division durch 3 den Ausdruck des Quotienten vorfinden; für 14 : 3 ist es die Zahl $\frac{14}{3}$ oder $4\frac{2}{3}$.

Wird allgemein die ursprüngliche Einheit in n gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil $\frac{1}{n}$ als eine neue Einheit benützt, um mit ihr zu zählen, so erhält man die neue Zahlenreihe

$$\ldots -\frac{4}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, +\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{3}{n}, +\frac{4}{n}, \ldots$$

welche die Zahlenreihe der ntel genannt wird.

Zahlen, deren Einheit ausdrücklich als Theil einer anderen (ursprünglichen) Einheit angegeben ist, heißen gebrochene Zahlen oder Brüche, im Gegensatze zu den bisher betrachteten ganzen Zahlen. Die durch Einschaltung der Brüche ausgefüllte Zahlenreihe heißt eine Bruchzahlenreihe.

Zur Angabe eines Bruches sind zwei Zahlen erforderlich; die eine derselben, der Nenner, zeigt an, in wie viele gleiche Theile eine Einheit getheilt werden soll, damit ein solcher Theil die neue Einheit des Bruches gebe; die andere, der Zähler, zeigt an, wie vielmal die durch den Nenner angegebene Einheit in dem Bruche enthalten ist. Beim Anschreiben setzt man den Nenner unter den Zähler und zwischen beide einen Strich.

Der Zusammenhang zwischen den ganzen und gebrochenen Zahlen kann durch Zahlenlinien versinnlicht werden. So hat man für die Reihe der Drittel:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & -2 & & & -1 & & & 0 & & & +1 & & & +2 & \\ -\frac{7}{3} & -\frac{6}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{4}{3} & +\frac{5}{3} & +\frac{6}{3} & +\frac{7}{3} \end{array}$$

Ein Bruch welcher kleiner als 1, dessen Zähler also kleiner als der Nenner ist, heißt ein echter Bruch; jeder andere Bruch aber ein unechter Bruch.

1. Allgemeine Sätze.

§. 95. Aus dem Begriffe eines Bruches folgt:

1. Der bte Theil der Einheit bmal genommen gibt die Einheit.

$$\frac{a}{b}.b = 1.$$

2. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist das afache des bten Theiles der Einheit.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}.a.$$

3. Jeder Quotient ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Dividend, dessen Nenner der Divisor ist.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

a : b zeigt an, daß man von a den bten Theil bestimmen soll; dieß geschieht, wenn man von jeder in a liegenden Einheit den bten Theil nimmt und und diese Theile addiert; also, da der bte Theil von 1 gleich $\frac{1}{b}$ ist,

$$\begin{aligned} a : b &= (1 + 1 + 1 + \text{. . amal}) : b \\ &= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \text{... amal} \\ &= \frac{1}{b}.a = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist $\frac{a}{b} = a : b.$

4. Jeder Bruch gibt mit seinem Nenner multipliciert den Zähler zum Producte.

Es ist $\frac{a}{b}.b = (a : b).b = a$ (§. 42, 1).

5. Jeder unechte Bruch kann in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche verwandelt werden.

Ist $a > b$, so ist $\frac{a}{b} = a : b = q + \frac{r}{b}$, wo q die größte ganze Zahl, welche in dem Quotienten a : b vorkommt, und r den Divisionsrest, daher $\frac{r}{b}$, weil $r < b$ sein muß, einen echten Bruch vorstellt.

Ein Ausdruck von der Form $q + \frac{r}{b}$ heißt eine gemischte Zahl.

6. Jede ganze Zahl kann als ein Bruch mit gegebenem Nenner dargestellt werden, wenn man das Product aus der ganzen Zahl und dem gegebenen Nenner als den Zähler des Bruches annimmt.

Es ist $a = a : 1$ (§. 42, 5) $= an : n$ (§. 53) $= \frac{an}{n}$.

Ein Bruch, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners, der also einer ganzen Zahl gleich ist, heißt ein uneigentlicher Bruch.

7. Von zwei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den größeren Zähler hat.

8. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

Zusatz. Jeder allgemeine Bruch, dessen Zähler eingliedrig und dessen Nenner mehrgliedrig ist, kann, wenn man den Zähler durch den Nenner nach den für die Division mehrgliedriger Ausdrücke aufgestellten Regeln (§. 55, 2) dividiert, als eine ins Unendliche fortlaufende Reihe von Gliedern, in deren Bildung sich häufig eine gewisse Gesetzmäßigkeit kund gibt, dargestellt werden.

z. B. $\frac{a}{1-x} = a:(1-x) = a + ax + ax^2 + ax^2 + \ldots$ ohne Ende

$$\begin{array}{l}
a - ax \\
\underline{- \quad +} \\
\quad + ax \\
\quad + ax - ax^2 \\
\quad \underline{- \quad\quad +} \\
\quad\quad\quad + ax^2 \\
\quad\quad\quad + ax^2 - ax^3 \\
\quad\quad\quad \underline{- \quad\quad\quad +} \\
\quad\quad\quad\quad\quad + ax^3
\end{array}$$

Setzt man hier $x = 1$, so wird

$$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + \ldots \text{ ohne Ende}$$

oder

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

wodurch der in §. 42, Folges. 8 nachgewiesene Satz auf einem anderen Wege seine Begründung findet.

Ebenso so erhält man

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

§. **96**. 1. Ein Bruch bleibt (seinem Werthe nach) unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}.$$

Beweis. Theilt man in der Zahlenreihe der btel jeden Theil durch Einschaltung neuer Zahlen wieder in n gleiche Theile, so wird die ursprüngliche Einheit in b n gleiche Theile getheilt und man erhält eine zweite Bruchzahlenreihe, deren jeder Theil $\frac{1}{bn}$ ist. Es kommen nun auf jeden Theil der ersten Zahlenreihe n Theile der zweiten, somit auf a Theile der ersten Reihe $n.a = an$ Theile der zweiten; folglich ist $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

2. Ein Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}.$$

Folgt durch Umkehrung aus 1.

§. **97**. Aufgabe 1. Einen gegebenen Bruch auf einen gegebenen neuen Nenner zu bringen, welcher ein Vielfaches des früheren Nenners ist.

Man dividiere den neuen Nenner durch den früheren Nenner, und multipliciere mit dem Quotienten den früheren Zähler; das Product ist der gesuchte neue Zähler.

Die Richtigkeit der Auflösung folgt aus §. 96, 1.

Um z. B. $\frac{a}{b}$ auf den Nenner b m zu bringen, hat man

$$bm : b = m;\ a.m = am;\ \text{also } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Soll man den Bruch $\frac{4}{5}$ auf den Nenner 40 bringen, so ist

$$40 : 5 = 8;\ 4 \times 8 = 32:\ \text{also } \frac{4}{5} = \frac{32}{40}.$$

2. **Zwei oder mehrere Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.**

Man suche das kl. g. Vielfache der Nenner der gegebenen Brüche, welches zugleich der neue kl. g. Nenner ist, und bringe (nach Aufg. 1) auf diesen neuen Nenner die gegebenen Brüche.

Beispiel. Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{3m}{4bc}$, $\frac{4n}{c^2d}$ auf den kl. g. Nenner gebracht werden.

Das kl. g. Vielfache aller Nenner, somit der neue Nenner, ist $4bc^2d$. Man hat dann

$$\begin{array}{llll} 4bc^2d : 2 & = 2bc^2d; & 2bc^2d \times 1 & = 2bc^2d \\ 4bc^2d : b & = 4c^2d; & 4c^2d \times a & = 4ac^2d \\ 4bc^2d : 4bc & = cd; & cd \times 3m & = 3cdm \\ 4bc^2d : c^2d & = 4b; & 4b \times 4n & = 16bn \end{array}$$

oder

	$4bc^2d$	
$\frac{1}{2}$	$2bc^2d$	$2bc^2d$
$\frac{a}{b}$	$4c^2d$	$4ac^2d$
$\frac{3m}{4bc}$	cd	$3cdm$
$\frac{4n}{c^2d}$	$4b$	$16bn$

also

$$\frac{1}{2} = \frac{2bc^2d}{4bc^2d}, \quad \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d},$$
$$\frac{a}{b} = \frac{4ac^2d}{4ac^2d}, \quad \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

3. **Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben, abzukürzen,** d. i. durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Man dividiere Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß (§. 96, 2).

Z. B. $\frac{4am}{6bn} = \frac{2am}{3bn}$; $\frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}$.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, der also nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann, heißt **auf die einfachste Form gebracht.**

Zusatz. Durch das Abkürzen allgemeiner Brüche kann häufig die für besondere Substitutionen in denselben auftretende Unbestimmtheit behoben werden. So gibt der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a}$ für $x = a$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Durch das Abkürzen aber erhält man

$$\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a} = \frac{(x + a)(x - a)}{2(x - a)} = \frac{x + a}{2},$$ $x^2 + ax - ax - a^2$

welcher Bruch für $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{2a}{2} = a$ annimmt.

2. Die Grundoperationen mit gemeinen Brüchen.

§. 98. Nachdem durch die Einführung der gebrochenen Zahlen das frühere Zahlengebiet erweitert wurde, muß man auch die bisherigen Begriffe der Rechnungsoperationen dahin erweitern, daß sie sich auch auf diese neuen Zahlformen anwenden lassen.

Bezüglich der Addition und Subtraction wird es, weil man nach §. 95, 6 jede ganze Zahl als einen Bruch mit beliebigem Nenner darstellen, und nach §. 97, 2 je zwei Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen kann, genügen, bei der Erweiterung des Begriffes auf Brüche derselben Bruchzahlenreihe Bedacht zu nehmen.

Addition der Brüche.

§. **99**. Zu einem Bruche $\frac{a}{m}$ den Bruch $\frac{b}{m}$ addieren (§§. 11 und 70) heißt, in der Bruchzahlenreihe der mtel vom ersten Summand $\frac{a}{m}$ aus, je nachdem der zweite Summand positiv oder negativ ist, in positiver oder negativer Richtung um so viel mtel fortschreiten, als deren der zweite Summand $\frac{b}{m}$ enthält. Der Bruch, zu dem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe.

Folgesatz. Brüche von gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Zusatz. Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu addieren, so stellt man die Summanden mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorigen Satze.

Z. B. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.

$$a + \frac{m}{n} = \frac{an}{n} + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}.$$

§. **100**. Die Summe zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Summanden mit einander vertauscht.

$$\text{Es ist } \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn} \text{ (§. 99)}$$
$$= \frac{bm + an}{mn} \text{ (§. 12)} = \frac{bm}{mn} + \frac{an}{mn} \text{ (§. 99)}$$
$$= \frac{b}{n} + \frac{a}{m} \text{ (§. 96, 2).}$$

Subtraction der Brüche.

§. **101**. Von dem Bruche $\frac{a}{m}$ den Bruch $\frac{b}{m}$ subtrahieren (§§. 17 u. 71) heißt, in der Zahlenreihe der mtel vom Minuend $\frac{a}{m}$ aus, je nachdem der Subtrahend positiv oder negativ ist, in negativer oder positiver Richtung um so viele mtel fortschreiten, als deren der Subtrahend $\frac{b}{m}$ enthält. Der Bruch, zu dem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Folgesätze. 1. Subtraction eines Bruches ist Addition des entgegengesetzten Bruches (§. 99).

2. Zwei Brüche von gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Zusatz. Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu subtrahieren, so stellt man die beiden Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorhergehenden Satze. Z. B.

$$\tfrac{7}{8} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{8} - \tfrac{6}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an - bm}{mn}.$$

$$a - \frac{m}{n} = \frac{an}{n} - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}.$$

Multiplication und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

§. **102**. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man den Zähler damit multipliciert oder den Nenner dadurch dividiert.

$$1.\ \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}; \qquad 2.\ \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots$ mmal.

$$= \frac{a + a + a + \ldots \text{mmal}}{b} \text{ (§. 99, Folges.)}$$

$$= \frac{a \cdot m}{b} \text{ (§. 31).}$$

2. Theilt man in der Zahlenreihe der $(b:m)$tel jeden Theil wieder in m gleiche Theile, so wird dadurch die ursprüngliche Einheit in $(b:m) \cdot m = b$ Theile getheilt, und es gibt jeder Theil der dadurch entstehenden Zahlenreihe der btel, mmal als Summand gesetzt, einen Theil der früheren Reihe der $(b:m)$tel; es geben daher auch a Theile der zweiten Reihe, mmal als Summand gesetzt, a Theile der ersten Reihe, d. i. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}$.

Zusatz. Die zweite Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, kann nur angewendet werden, wenn der Nenner durch die ganze Zahl theilbar ist.

§. **103**. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler dadurch dividiert oder den Nenner damit multipliciert.

$$1.\ \frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b}; \qquad 2.\ \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}.$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} : m = \frac{(a:m) \cdot m}{b} : m$ (§. 42, 3) $= \left(\frac{a:m}{b} \cdot m\right) : m$ (§. 102)

$$= \frac{a:m}{b} \text{ (§. 42, 2).}$$

2. Ist in dem Beweise zu §. 96, 1 enthalten.

Zusatz. Die erste Art des Dividierens ist nur dann anwendbar, wenn der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

Multiplication und Division durch einen Bruch.

§. **104**. Eine Zahl a mit einem Bruch $\frac{m}{n}$ multiplicieren (§§. 31 und 73) heißt, den Multiplicand a, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, mit unverändertem oder mit entgegengesetztem Vorzeichen in so viele gleiche Theile theilen, wie der Nenner n des Bruches anzeigt, und einen solchen Theil so oft als Summand setzen, wie der Zähler m des Bruches anzeigt.

Folgesätze. 1. Eine Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, indem man sie durch den Nenner dividiert und den Quotienten mit dem Zähler multipliciert.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m.$$

2. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, indem man dem Producte der Zähler das Product der Nenner als Nenner gibt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) \cdot m = \frac{a}{bn} \cdot m \text{ (§. 103)} = \frac{am}{bn} \text{ (§. 102)}.$$

Zusatz. Multipliciert man eine Zahl mit einem echten oder unechten Bruche, so ist das Product bezüglich kleiner oder größer als der Multiplicand.

Wenn $m < n$, also $\frac{m}{n} < 1$, so wird $a \cdot \frac{m}{n} < a \cdot 1$, folglich $a \cdot \frac{m}{n} < a$; wenn aber $m > n$, also $\frac{m}{n} > 1$, so wird $a \cdot \frac{m}{n} > a \cdot 1$, folglich $a \cdot \frac{m}{n} > a$.

3. Das Product zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Factoren mit einander vertauscht.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} = \frac{ma}{nb} \text{ (§. 32)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} \text{ (§. 104, 2)}.$$

§. **105**. Wenn zwei Zahlen zum Producte 1 geben, so heißt jede der umgekehrte oder reciproke Werth der anderen.

So ist $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$, daher $\frac{1}{a}$ der umgekehrte Werth von a, $\frac{n}{m}$ der umgekehrte Werth von $\frac{m}{n}$.

§. **106**. Für die Division durch einen Bruch ergeben sich aus dem in §. 42 aufgestellten allgemeinen Begriffe der Division folgende Sätze:

1. Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie durch den Zähler dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert; oder:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Bruche multipliciert.

Beweis. $$a : \frac{m}{n} = \frac{amn}{mn} : \frac{m}{n} \text{ (§. 95, 6)} = \left(\frac{an}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) : \frac{m}{n} \text{ (§. 104, 2)}$$
$$= \frac{an}{m} \text{ (§. 42, 2)} = \frac{a}{m} \cdot n \text{ (§. 102)} = a \cdot \frac{n}{m} \text{ (§. 104, 2)}.$$

Ebenso erhält man
$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{bm} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$$

Zusatz. Da $1 : \frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$ ist, so kann man allgemein den reciproken Werth einer Zahl a durch $1 : a$ oder $\frac{1}{a}$ bezeichnen.

2. Ein Bruch wird durch einen Bruch auch dividiert, indem man dem Quotienten der Zähler den Quotienten der Nenner als Nenner gibt.

Es ist $$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : m\right) \cdot n \text{ (§. 106, 1)} = \frac{a : m}{b} \cdot n \text{ (§. 103)}$$
$$= \frac{a : m}{b : n} \text{ (§. 102)}.$$

Dieses Verfahren findet vorzüglich Anwendung bei der Division zweier Brüche mit gleichen Nennern; z. B.

$$\frac{27}{100} : \frac{9}{100} = \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b.$$

Zusatz. Dividiert man eine Zahl durch einen echten oder unechten Bruch, so ist der Quotient bezüglich größer oder kleiner als der Dividend.

Wenn $m < n$, also $\frac{m}{n} < 1$, so wird $a : \frac{m}{n} > a : 1$, folglich $a : \frac{m}{n} > a$; wenn aber $m > n$, also $\frac{m}{n} > 1$, so wird $a : \frac{m}{n} < a : 1$, folglich $a : \frac{m}{n} < a$.

§. **107**. Ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner, oder beide zugleich wieder Brüche sind, heißt ein gebrochener Bruch. Er ist nichts anderes, als eine angezeigte Division von Brüchen, und kann daher in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, wenn man diese Division wirklich ausführt. Z. B.

$$\frac{\frac{a}{m}}{b} = \frac{a}{m} : b = \frac{a}{bm}; \quad \frac{a}{\frac{m}{n}} = a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m};$$

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

§. **108**. Alle bisher für die ganzen Zahlen erwiesenen Lehrsätze gelten auch für die gebrochenen Zahlen.

Denn alle jene Lehrsätze beruhen auf den zwei Fundamentalsätzen von der Vertauschbarkeit der Summanden und der Vertauschbarkeit der Factoren; diese beiden Sätze aber gelten, wie in §§. 100 und 104, 3 bewiesen wurde, auch für Brüche.

Zusatz. Hiernach ist auch der im Schlußsatze des §. 43 bezüglich der Quotienten ausgesprochene Vorbehalt aufgehoben.

II. Decimalbrüche.

§. **109**. Brüche, deren Zähler beliebige dekadische ganze Zahlen und deren Nenner Potenzen von 10 sind, heißen Decimalbrüche. Die allgemeine Form eines Decimalbruches ist $\frac{A}{10^m}$, wo A und m beliebige dekadische ganze Zahlen bezeichnen.

Im Gegensatze zu den Decimalbrüchen heißen die anderen Brüche gemeine Brüche.

Die Decimalbrüche werden ohne Nenner angeschrieben; man braucht nur im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen Punct, den Decimalpunct, abzuschneiden, als der Potenzexponent von 10 im Nenner Einheiten enthält, oder was gleichviel ist, als im Nenner Nullen vorkommen; sollten nicht genug Ziffern vorhanden sein, um sie abschneiden zu können, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt. Z. B.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78{\cdot}317, \quad \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0{\cdot}5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0{\cdot}00037.$$

Die Ziffern rechts nach dem Decimalpuncte werden Decimalen genannt. $\frac{A}{10^m}$ stellt demnach einen Decimalbruch mit m Decimalen vor.

Um die Bedeutung der Ziffern eines Decimalbruches kennen zu lernen, sei der Decimalbruch $\frac{A}{10^4}$, welcher 4 Decimalen enthält; die Zahl vor dem

Decimalpuncte heiße m, und die Decimalziffern in der Ordnung gegen die Rechte seien a, b, c, d; dann ist

$$A = m.10^4 + a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d,$$

daher

$$\frac{A}{10^4} = \frac{m.10^4 + a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d}{10^4}$$

$$= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}.$$

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Decimalpuncte steht, eine ganze Zahl; die erste Decimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

$$\text{Z. B. } 34{\cdot}781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000}$$

$$= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}.$$

Um einen Decimalbruch zu lesen, spricht man zuerst die Ganzen vor dem Decimalpuncte aus, und dann jede Decimalstelle einzeln mit Hinzufügung ihres Nenners. Man kann den Nenner der einzelnen Decimalen beim Aussprechen auch weglassen und nur alle Decimalziffern, 0 nicht ausgenommen, in der Ordnung nennen.

Die Decimalbrüche sind eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems (§. 59) in der Art, daß die Reihe der Zahlenordnungen ... Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrigere Einheit als der zehnte Theil einer Einheit der nächst höheren Ordnung angenommen wird, noch unter den Einern hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendteln, ... fortsetzt. Der Decimalpunct scheidet die ursprüngliche Reihe der Zahlenordnungen von dieser Fortsetzung.

Folgesatz. Der Werth eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts beliebig viele Nullen anhängt. Es ist z. B.

$$\frac{23}{100} = \frac{230}{1000} = \frac{2300}{10000} = \frac{23000}{100000} = \ldots$$

oder

$$0{\cdot}23 = 0{\cdot}230 = 0{\cdot}2300 = 0{\cdot}2300$$

1. Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch und umgekehrt.

§. **110.** **Aufgabe.** Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Man dividiere den Zähler durch den Nenner und bringe im Quotienten nach den Ganzen, an deren Stelle bei einem echten Bruche eine Null gesetzt wird, den Decimalpunct an. Dem Reste hänge man hierauf eine Null an, dividiere wieder und schreibe die erhaltene Quotientziffer nach dem Decimalpuncte hin; hänge dann eben so jedem etwa weiter folgenden Reste eine Null an und setze die Division fort, bis diese endlich ohne Rest aufgeht, oder, wenn dieses nicht eintritt, bis man die gewünschte Anzahl Decimalen erhalten hat. Im ersten Falle ist der gefundene Decimalbruch ein endlicher, im zweiten kann er in's Unendliche fort entwickelt werden.

Beweis. Da $\frac{a}{b} = a : b$, so ist die vorstehende Aufgabe gleichbedeutend mit der Aufgabe, den Quotienten zweier ganzer Zahlen, welcher keine ganze Zahl ist, durch einen Decimalbruch darzustellen. Sind nun bei dem obigen Verfahren den einzelnen Resten nach und nach m Nullen angehängt worden, so wurde dadurch der Dividend mit 10^m multipliciert; es ist aber

$$a : b = a \,.\, 10^m : b \,.\, 10^m \ (\text{§. } 53) = (a \,.\, 10^m : b) : 10^m \ (\text{§. } 51, 1)$$
$$= \frac{a \,.\, 10^m : b}{10^m}.$$

Z. B. $\frac{3}{4} = 30 : 4 = 0{\cdot}75$
20

$\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2{\cdot}632$
790
400
250

Zusätze. 1. Damit sich ein gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch ganz genau verwandeln lasse, muß dieser ein endlicher Decimalbruch, folglich $a \,.\, 10^m$ durch b theilbar sein. Sind nun a und b relative Primzahlen, so ist dieses nach §. 78, 4 nur dann möglich, wenn 10^m durch b theilbar ist, d. h. wenn b keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält.

In allen Fällen, wo der Nenner b außer 2 und 5 noch andere Factoren enthält, kann der auf die einfachste Form gebrachte gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ durch keinen Decimalbruch vollkommen genau dargestellt werden. Es läßt sich jedoch immer näherungsweise ein Decimalbruch entwickeln, welcher von dem gegebenen gemeinen um weniger verschieden ist, als jede noch so kleine gegebene Größe. Denn ist $a \,.\, 10^m$ durch b nicht theilbar, so kann der Quotient als eine gemischte Zahl angesehen werden. Setzt man also

$$\frac{a \,.\, 10^m}{b} = p + \frac{r}{b},$$

wo $r < b$ ist, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b \,.\, 10^m},$$
$$\frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b \,.\, 10^m}.$$

Da nur $r < b$, also $\frac{r}{b} < 1$, so muß $\frac{r}{b \,.\, 10^m} < \frac{1}{10^m}$ sein.

Der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ und dem Decimalbruche $\frac{p}{10^m}$ ist also kleiner als $\frac{1}{10^m}$, d. i. kleiner als eine Einheit der letzten noch entwickelten Decimalstelle. Da aber m beliebig groß, daher $\frac{1}{10^m}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich der Fehler, den man begeht, wenn der erhaltene Decimalbruch für den gemeinen Bruch gesetzt wird, kleiner machen, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

Z. B. $\frac{23}{78} = 23{\cdot}0 : 78 = 0{\cdot}29487\ldots$
740
380
680
560
14

Bleibt man hier bei der 5ten Decimale stehen, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10^5}$.

2. Wenn ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Decimalbruch darstellen läßt, näherungsweise in einen Decimalbruch verwandelt wird, so müssen bei der Entwicklung einige Decimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehren. Denn bei der Division ist der Rest immer kleiner als der Divisor; man kann daher nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es ganze Zahlen gibt, welche kleiner sind als der Divisor, so daß im ungünstigsten Falle wenigstens unter so vielen Resten, als der Divisor Einheiten enthält, wieder einer der vorigen Reste zum Vorschein kommt, woraus sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quotienten und dieselben Reste wie vorher ergeben müssen. Z. B.:

$$\frac{7}{15} = 7\cdot0 : 15 = 0\cdot46666\ldots \qquad \frac{3}{7} = 3\cdot0 : 7 = 0\cdot428571\ 428\ldots$$

1 00	20
100	60
100	40
10	50
	10
	30
	20
	60
	4

Decimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, nennt man periodische und die immer wiederkehrende Zifferreihe die Periode. Die Periode muß mindestens um eine Ziffer weniger enthalten, als in dem Nenner des verwandelten gemeinen Bruches Einheiten vorkommen. Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Puncten zu bezeichnen; es ist also

$$\frac{7}{15} = 0\cdot4\dot{6};\ \frac{3}{7} = 0\cdot\dot{4}2857\dot{1}.$$

§. **111.** Aufgabe. Einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

1. Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man denselben in der Form eines gemeinen anschreibt, und diesen, wenn es angeht, abkürzt.

Z. B. $0\cdot75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, $31\cdot325 = 31\,\frac{325}{1000} = 31\,\frac{13}{40}$.

2. Ein periodischer Decimalbruch, worin der Periode keine Decimale vorangeht, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man als Zähler die Ziffern der Periode und als Nenner eine Zahl setzt, welche mit so vielen 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Beweis. Drückt man die Ziffern der Periode durch b und ihre Anzahl durch n aus, so läßt sich der periodische Decimalbruch durch die Gleichung

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \cdots$$

darstellen. Multipliciert man den Ausdruck mit 10^n, so erhält man

$$x \,.\, 10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \cdots$$

Subtrahiert man nun den früheren Ausdruck von dem letztern, so folgt

$$x \, . \, 10^n - x = b, \text{ oder } (10^n - 1) \, . \, x = b$$

und daraus

$$x = \frac{b}{10^n - 1}.$$

Z. B. $0 \cdot \dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\quad 0 \cdot \dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;
$2 \cdot \dot{3}0\dot{1} = 2\frac{301}{999}$; $\quad 15 \cdot \dot{3}5\dot{1} = 15\frac{351}{999} = 15\frac{13}{37}$.

3. Ein periodischer Decimalbruch, worin der Periode noch andere Decimalen vorangehen, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die der Periode vorangehenden Decimalen sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die der Periode vorangehenden Decimalen, ebenfalls als ganze Zahl betrachtet, subtrahiert, und diese Differenz zum Zähler, zum Nenner aber eine Zahl annimmt, die mit so vielen 9, als die Periode Ziffern enthält, und so vielen rechts folgenden Nullen, als Decimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

Beweis. Es seien b die Ziffern der Periode, n die Anzahl derselben, ferner a die der Periode vorangehenden Decimalen und m ihre Anzahl; so hat man für den Decimalbruch den Ausdruck

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots$$

welcher zuerst mit 10^{m+n}, dann mit 10^m multipliciert, die Ausdrücke

$$x \, . \, 10^{m+n} = a \, . \, 10^n + b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \ldots$$

$$x \, . \, 10^m = a \qquad + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

gibt. Durch die Subtraction des zweiten Ausdruckes von dem ersten erhält man sofort $x \, . \, 10^{m+n} - x \, . \, 10^m = a \, . \, 10^n + b - a$, oder

$$x \, . \, 10^m \, (10^n - 1) = (a \, . \, 10^n + b) - a,$$

und daraus

$$x = \frac{(a \, . \, 10^n + b) - a}{(10^n - 1) \, . \, 10^m}.$$

Z. B. $0 \cdot 3\dot{7} = \frac{37 - 3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$.

$0 \cdot 2\dot{1}\dot{5} = \frac{215 - 2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}$,

$0 \cdot 31\dot{7}0\dot{8} = 3\frac{31708 - 31}{99900} = 3\frac{31677}{99900} = 3\frac{10559}{33300}$.

2. Die Grundoperationen mit vollständigen Decimalbrüchen.

§. **112.** Das Rechnen mit Decimalbrüchen beruhet auf denselben Gründen, wie das mit ganzen Zahlen, und fordert nur die genaue Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, d. i. auf die Stellung des Decimalpunctes.

Um Decimalbrüche zu addieren oder zu subtrahieren, schreibt man sie so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen, mithin auch die Decimalpuncte, genau unter einander zu stehen kommen, und addiert oder subtrahiert sie sodann von der Rechten gegen die Linke, wie ganze Zahlen. Die fehlenden Decimalstellen kann man sich durch Nullen ersetzt denken.

	35·312
	0·5678
	39·2
	0·09456
Summe	75·17436

	215·3456
	91·45923
Differenz	123·88637

§. **113.** 1. Ein Decimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multipliciert, indem man den Decimalpunct um so viele Stellen weiter gegen die Rechte rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 3{\cdot}148 \times 10 & = & 31{\cdot}48 \\ 3{\cdot}148 \times 100 & = & 314{\cdot}8 \\ 3{\cdot}148 \times 1000 & = & 3148 \\ 3{\cdot}148 \times 10000 & = & 31480 \end{array}$$

2. Decimalbrüche werden multipliciert, indem man sie ohne Rücksicht auf die Decimalpuncte wie ganze Zahlen multipliciert (§. 64) und im Producte von der Rechten angefangen so viele Ziffern als Decimalen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Wenn das Product nicht so viele Ziffern hat, als abgeschnitten werden sollen, so ersetze man die fehlenden Stellen links durch Nullen.

Z. B. a) $4{\cdot}305 \times 2{\cdot}74$ b) $1{\cdot}3145 \times 0{\cdot}02071$

$$\begin{array}{r} 274 \\ \hline 8\,610 \\ 3\,0135 \\ 17220 \\ \hline 11{\cdot}79570 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2071 \\ \hline 2\,6290 \\ 92015 \\ 13145 \\ \hline 0{\cdot}02\,7223295 \end{array}$$

Dieselbe Regel gilt auch, wenn ein Factor eine ganze Zahl ist.

Zusatz. Schreibt man den Multiplicand, den Multiplicator und die einzelnen Theilproducte nach der im Zusatze zu §. 64 enthaltenen Vorschrift unter einander, so ergibt sich der Rang jeder Ziffer im Producte unmittelbar aus deren localer Stellung, indem dabei der Decimalpunct im Producte unter den Decimalpunct des Multiplicators zu stehen kommt.

Z. B. $8{\cdot}0\,56 \times 53{\cdot}1$ $\qquad 13{\cdot}7934 \times 0{\cdot}00156$

$$\begin{array}{r} 5\,3{\cdot}1 \\ \hline 40\,2\,80 \\ 2\,4\,168 \\ 8056 \\ \hline 42\,7{\cdot}7736 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0{\cdot}001\,56 \\ \hline 13\,7934 \\ 6\,89670 \\ 827604 \\ \hline 0{\cdot}021\,517704 \end{array}$$

§. **114.** Ein Decimalpunct wird durch eine Potenz von 10 dividiert, indem man den Decimalpunct um so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt, als der Divisor Nullen enthält.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 712{\cdot}63 : 10 & = & 71{\cdot}263, \\ 712{\cdot}63 : 100 & = & 7{\cdot}1263, \\ 712{\cdot}63 : 1000 & = & 0{\cdot}71263, \\ 712{\cdot}63 : 10000 & = & 0{\cdot}071263. \end{array}$$

2. Decimalbrüche werden dividiert, indem man Dividend und Divisor durch Anhängung von Nullen mit gleich vielen Decimalen darstellt, und dann mit Weglassung der Decimalpuncte die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet (§§. 66 und 110).

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = a : b.$$

Z. B. 98·4 : 1·25 = 98·40 : 1·25 = 9840 : 125 = 78·72
1090
900
250
= = =

0·37 : 5·8413 = 3700 : 58413 = 0·06334 . .

Dieselbe Regel gilt auch, wenn der Dividend oder der Divisor eine ganze Zahl ist.

Praktisch verfährt man einfacher nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst einleuchtet:

1. Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividiert und im Quotienten den Decimalpunct setzt, bevor man die erste Decimalziffer des Dividends in Rechnung zieht.

Z. B. 487·75 : 25 = 19·51
237
12 7
25
= =

2. Eine Zahl wird durch einen Decimalbruch dividiert, indem man im Dividend und im Divisor durch Multiplication mit der entsprechenden Potenz von 10 den Decimalpunct so verschiebt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird, und dann die Division nach der Regel 1. ausführt.

Z. B. 0·05496 : 36·84 = 5·496 : 3684 = . . .
34461 : 0·63 = 3446100 : 63 = . . .

Zusatz. Schreibt man den Dividend, den Divisor und den Quotienten nach Vorschrift des Zusatzes in §. 66 untereinander, so ergibt sich der Rang jeder einzelnen Ziffer des Quotienten unmittelbar aus deren localer Stellung, indem dabei der Decimalpunct im Quotienten unter den Decimalpunct des Dividends zu stehen kommt.

Z. B. 0·5 25632 : 3·056
3·056
0·1 72
2 2003
6112
, = = =

87 6·5 : 18·95
18·9 5
4 6·25 . .
11 8 50
4 800
1 1100
1625

3. Die Grundoperationen mit unvollständigen Decimalbrüchen.

§. **115**. Stellt ein Decimalbruch irgend einen Zahlenwerth, der entweder aus der Rechnung selbst oder aus einer angestellten Messung hervorgegangen ist, nicht völlig genau, sondern blos näherungsweise dar, so heißt er ein unvollständiger Decimalbruch, im Gegensatze zu einem vollständigen oder geschlossenen, der in seinen Zahlen vollkommen genau ausgedrückt ist.

Daß ein Decimalbruch unvollständig ist, wird durch angehängte Puncte, z. B. 3·14. ., angedeutet.

Auch ein geschlossener Decimalbruch kann zu einem unvollständigen abgekürzt werden, wenn man eine oder mehrere seiner letzten Decimalziffern wegläßt.

Die Differenz zwischen einem unvollständigen Decimalbruche und dem genauen Zahlenwerthe, den er angenähert darstellt, heißt der Fehler des Decimalbruches; derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der darzustellende Zahlenwerth größer oder kleiner als der Decimalbruch ist.

Sind von einem unvollständigen Decimalbruche a.. die n ersten Decimalziffern zuverlässig genau angegeben, so ist der Fehler desselben kleiner als eine Einheit an der nten Decimalstelle.

Dieser Fehler kann noch kleiner gemacht werden, wenn man die nte Decimalziffer, je nachdem die $(n+1)$te Dicimalziffer unter 5 oder nicht unter 5 ist, bezüglich unverändert beibehält oder um 1 erhöht (corrigiert). Der Fehler des auf diese Art mit n Decimalen dargestellten unvollständigen Decimalbruches a.. ist dann kleiner als eine halbe Einheit an der nten Stelle; also

$$a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} < a.. < a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Die vorstehende Regel wird immer beobachtet, wenn man einen gegebenen Decimalbruch durch Weglassung von Decimalen abkürzt. Z. B. der Bruch 6·147573 wird mit 4 Decimalen durch 6·1476.. dargestellt; der Fehler ist hier 0·000027, also $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$. Würde man statt 6·147573 den Decimalbruch 6·1475.. nehmen, so wäre der Fehler 0·000073, also $> \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$. Es liegt also 6·147573 näher an 6·1476.. als an 6·1475..

Bei den folgenden Untersuchungen werden wir die unvollständigen Decimalbrüche immer als so genau voraussetzen, daß der Fehler weniger als eine halbe Einheit ihrer letzten Stelle beträgt.

§. **116.** Sind unvollständige Decimalbrüche zu addieren oder zu subtrahieren, so kürze man sie vorher auf so viele Stellen ab, als derjenige enthält, der die wenigsten hat, weil die weiteren Stellen für das Resultat unbrauchbar sind. Dann ist a) der Fehler der Summe kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, als Summanden vorhanden sind; b) der Fehler der Differenz kleiner als eine Einheit der letzten Stelle.

Die Richtigkeit dieser Sätze ist von selbst einleuchtend.

Folgesätze. 1. In der Summe mehrerer unvollständiger Decimalbrüche sind im ungünstigsten Falle so viele der niedrigeren Stellen unsicher, als die halbe Zahl der Summanden Ziffern hat; z. B. eine Stelle, wenn weniger als 20 Summanden vorhanden sind.

2. In der Differenz zweier unvollständiger Decimalbrüche ist im ungünstigsten Falle eine Stelle unzuverlässig.

§. **117.** Um die Summe mehrerer unvollständiger Decimalbrüche, deren Zahl jedoch kleiner als 20 ist, oder die Differenz zweier unvollständiger Decimalbrüche auf m Stellen genau zu bestimmen, muß man die gegebenen Brüche mit $m+1$ Decimalziffern in Rechnung ziehen und nach verrichteter Rechnung die letzte Ziffer weglassen.

§. **118.** 1. Der Fehler des Productes zweier unvollständiger Decimalbrüche ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle in dem als vollständig entwickelten Producte, wie die Summe der Zähler der beiden Factoren anzeigt.

Beweis. Ist $a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m} < a.. < a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$,

$$b - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} < b.. < b + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n},$$

so hat man durch Multiplication dieser Ungleichungen (§. 41, 3)

$$\left.\begin{matrix} ab - a.\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} - b.\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m} \\ + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^{m+n}} \end{matrix}\right\} < a.. \times b.. < \left\{\begin{matrix} ab + a.\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} + b.\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m} \\ + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^{m+n}}; \end{matrix}\right.$$

oder wenn das Glied $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^{m+n}}$ als gegen die übrigen verschwindend weggelassen wird,

$$ab - a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} - b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m} < a.. \times b.. < ab + a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n} + b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m},$$

oder

$$ab - (a \cdot 10^m + b \cdot 10^n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{m+n}} < a... \times b... < ab + (a \cdot 10^m + b \cdot 10^n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{m+n}}.$$

Der Fehler des als vollständig entwickelten Productes $a.. \times b..$, welches, da $a..$ m und $b..$ n Decimalziffern hat, $m + n$ Decimalen enthalten muß, ist also kleiner als

$$(a \cdot 10^m + b \cdot 10^n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{m+n}},$$

wo $a \cdot 10^m$ und $b \cdot 10^n$ die Zähler der zwei gegebenen Decimalbrüche vorstellen.

2. Behält $a..$ den früheren Werth und ist b ein vollständiger Decimalbruch mit n Decimalen, so wird nach §. 41, 2

$$ab - b \cdot 10^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{m+n}} < a.. \times b < ab + b \cdot 10^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{m+n}},$$

d. h. der Fehler des Productes eines unvollständigen Decimalbruches mit einem vollständigen ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle des als vollständig entwickelten Productes, wie der Zähler des vollständigen Decimalbruches anzeigt.

Folgesatz. Wenn man einen unvollständigen Decimalbruch a) mit einem unvollständigen, b) mit einem vollständigen Decimalbruche multipliciert, so sind im ungünstigsten Falle so viele Stellen unzuverlässig, als a) die halbe Summe der Zähler der beiden Factoren, b) der halbe vollständige Factor Ziffern hat.

§. **119**. Um im Producte zweier Zahlen mit Vermeidung aller überflüssigen Rechnungen nur die zuverlässigen Stellen, überhaupt nur eine verlangte Zahl von Decimalen, zu erhalten, bedient man sich der abgekürzten Multiplication. Darunter versteht man folgendes Verfahren, dessen Richtigkeit leicht zu ersehen ist:

1. Man stelle die Ziffern des Multiplicators, in umgekehrter Ordnung geschrieben, so unter den Multiplicand, daß die Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands zu stehen kommen, welche im Producte die niederste der verlangten ist.

Als Multiplicand wähle man, wenn beide Factoren unvollständige Decimalbrüche sind, denjenigen, welcher die meisten Ziffern enthält; wenn aber ein Factor vollständig ist, diesen vollständigen Decimalbruch, dem man auch Nullen angehängt denken darf.

2. Man multipliciere mit der ersten rechts stehenden Ziffer des umgekehrten Multiplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, schreibe jedoch dieses Product nicht an, sondern behalte davon nur die nächstliegende Zahl der Zehner, welche die Correctur bildet; dann multipliciere man die gerade darüber stehende Ziffer des Multiplicands, addiere zum Producte die Correctur und fange hier das Product zu schreiben an; hierauf werden nach der Reihe auch die weiter folgenden Ziffern des Multiplicands multipliciert. Auf gleiche Weise multipliciere man dann mit der zweiten, dritten,... Ziffer des Multiplicators und schreibe die einzelnen dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte so unter einander, daß ihre ersten Ziffern rechts unter einander zu stehen kommen.

3. Man addiere diese Theilproducte und schneide in der Summe die verlangte Anzahl Decimalen ab.

Beispiel. Es sei das Product der unvollständigen Decimalbrüche 7·42143.. und 49·801 .. zu berechnen.

Das als vollständig entwickelte Product wird 8 Decimalziffern haben. Von diesen werden aber, da $\frac{742143 + 49801}{2} = \frac{791944}{2} = 395972$ 6 Ziffern enthält, die 6 letzten Decimalen unzuverlässig, also unbrauchbar. Das Product kann daher nur auf 2 Decimalstellen genau berechnet werden, und man hat folgende Multiplicationen:

a) vollständig		b) abgekürzt mit 2 Decim.	c) abgekürzt mit 3 Decim.
7·4 21 43		7·4 2143	7·4 2143
4 9·80 1		10 8 94	1 0 894
29 6 85	72	29 6 86	29 6 857
6 6 79	287	6 6 79	6 6 793
5 93	7144	5 94	5 937
	742143	1	7
36 9·59	463543	36 9·60	36 9·594

Wie man aus den Rechnungen in b) und c) sieht, wird bei der abgekürzten Multiplication wegen der nicht ganz zuverlässigen Correcturen die letzte Ziffer gewöhnlich unsicher. Um daher im Producte eine bestimmte Anzahl zuverlässiger Decimalziffern zu erhalten, verrichte man die abgekürzte Multiplication mit einer Decimale mehr, als ihrer genau sein sollen, und lasse dann im Resultate die letzte Ziffer weg.

§. **120**. Das abgekürzte Multiplicationsverfahren gibt ein einfaches Mittel an die Hand, unmittelbar aus dem Unterschreiben der Factoren den Grad der Zuverlässigkeit des Productes zu bestimmen. Wählt man den Multiplicand nach der Weisung im §. 119, und schreibt darunter die Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung so, daß (wie in §. 119 bei der Rechnung b) die niedrigste Ziffer des Multiplicators um eine Stelle links über die höchste Ziffer des Multiplicands hinausreicht, so zeigt die Stelle des Multiplicands, unter welcher die Einerziffer des Multiplicators erscheint, zugleich die Stelle an, bis auf welche das Product zuverlässige Ziffern geben wird.

Ist z. B. 69·413..mit 2·578..zu multiplicieren, so schreibt man

69·413
875 2

woraus hervorgeht, daß die Einerziffer 2 des Multiplicators unter die Stelle der Zehntel im Multiplicand zu stehen kommt, daß sich also das Product bis auf die Zehntel herab zuverlässig entwickeln läßt. Dasselbe ergibt sich auch aus der in §. 118, Folges. angegebenen Regel.

§. **121**. Soll umgekehrt bestimmt werden, mit wie vielen Decimalziffern zwei Factoren in Rechnung gebracht werden müssen, damit das Product eine gegebene Anzahl zuverlässiger Decimalstellen erhalte, so schreibt man die Factoren, wie bei der abgekürzten Multiplication, so unter einander, daß die Einerziffer des umgekehrt geschriebenen Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche noch im Producte zuverlässig erscheinen soll, zu stehen kommt. Dann muß, wenn die Factoren die genaue erforderliche Anzahl von Ziffern haben, der Multiplicand mit seinen geltenden Ziffern rechts um eine Ziffer über den Multiplicator, und der Multiplicator links um eine Ziffer über die geltenden Ziffern des Multiplicands hinausreichen. Haben die Factoren zu viele oder zu wenige Ziffern, so muß man in denselben bezüglich die überzähligen Ziffern weglassen oder weitere Decimalziffern entwickeln, bis die angeführte Bedingung erfüllt wird.

Sind z. B. die Producte

a) 35·765.. × 2·9647..., b) 9·58 × 12·743.., c) 0·4392.. × 1·68..

auf 2 Decimalstellen zuverlässig zu bestimmen, so hat man

a) 35·765	b) $9{\cdot}58_{00}$	c) 0·4392
746 92	35 721	8 61

In a) und b) haben die beiden Factoren genau die erforderliche Anzahl von Decimalen, in c) ist die Ziffer 2 des Multiplicands überflüssig und wird weggelassen.

Sind dagegen die Producte

a) 16·534.. × 4·78.., b) 4·93.. × 28·39..

ebenfalls auf 2 Decimalstellen zuverlässig zu bestimmen, so ersieht man aus dem Unterschreiben

a) 16·534	b) 4·93..
..8 74	.9 382

daß man bei a) im Multiplicator noch 2, bei b) im Multiplicand 2 und im Multiplicator 1 weitere Stelle benöthiget.

Können in diesem Falle keine weiteren Decimalstellen der Factoren bestimmt werden, so läßt sich auch das Product nicht so genau, wie verlangt wird, berechnen.

§. **122.** 1. Der Fehler des Quotienten zweier unvollständiger Decimalbrüche ist kleiner als die Hälfte des Quotienten, welcher erhalten wird, indem man den Dividend und den Divisor bezüglich durch den Nenner des Divisors und des Dividends dividiert, und die Summe dieser Quotienten noch durch das Quadrat des Divisors dividiert.

Beweis. Es sei:

$$a - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m} < a.. < a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m},$$

$$b + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n} > b.. > b - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n};$$

so ist nach §. 57, 4

$$\frac{a - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m}}{b + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}} < \frac{a..}{b..} < \frac{a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m}}{b - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}},$$

oder, wenn man im ersten und dritten Quotienten das erste Glied wirklich bestimmt, und dann die gehörigen Reductionen vornimmt,

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}}{b\left(b + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}\right)} < \frac{a..}{b..} < \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}}{b\left(b - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}\right)},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$ als gegen b verschwindend weggelassen wird,

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}}{b^2} < \frac{a..}{b..} < \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}}{b^2}.$$

Es genügt, in dem Quotienten, welcher zur Beurtheilung des Fehlers dient, bloß 1 oder 2 geltende Ziffern zu berechnen.

Beispiel. Es sei der Quotient $65{\cdot}134.. : 3.8617..$ zu berechnen. Zur Bestimmung des Fehlers hat man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{0{\cdot}00651.. + 0{\cdot}00386..}{(3{\cdot}8617)^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{0{\cdot}01037}{(3{\cdot}8)^2} = 0{\cdot}00036.$$

Der Quotient der gegebenen zwei Decimalbrüche läßt sich also nur mit 3 zuverlässigen Decimalen entwickeln; es ist nämlich

$$65{\cdot}134.. : 3{\cdot}8617... = 16{\cdot}867..$$

2. Behält a.. den früheren Werth und ist b ein vollständiger Decimalbruch, so erhält man

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{10^m} < \frac{a..}{b} < \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{10^m};$$

d. h. der Fehler des Quotienten eines unvollständigen Decimalbruches durch einen vollständigen ist kleiner als die Hälfte des Quotienten, welcher erhalten wird, indem man eine Einheit der letzten Stelle des Dividends durch den Divisor dividiert.

Z. B. Die Division $0{\cdot}314.. : 6{\cdot}34$ läßt sich, da der Fehler des Quotienten kleiner als

$$\tfrac{1}{2}.0{\cdot}001 : 6{\cdot}34 = 0{\cdot}000079..$$

ist, in 4 zuverlässigen Decimalstellen ausführen.

3. Hat b.. den in 1. angegebenen Werth, und ist a ein vollständiger Decimalbruch, so hat man nach §. 57, 3

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n}}{b^2} < \frac{a}{b..} < \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a}{10^n}}{b^2};$$

d. h. der Fehler des Quotienten eines vollständigen Decimalbruches durch einen unvollständigen ist kleiner als die Hälfte des Quotienten, welcher erhalten wird, indem man den Dividend durch den Nenner des Divisors, und diesen Quotienten noch durch das Quadrat des Divisors dividiert.

Z. B. Für den Quotienten $39{\cdot}108 : 3{\cdot}5628..$ ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{2}\cdot\frac{0{\cdot}00391...}{(3{\cdot}5628)^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{0{\cdot}00391}{(3{\cdot}5)^2} = 0{\cdot}00016..$; somit kann die Division auf 3 Decimalen zuverlässig ausgeführt werden.

§. **123**. Um in dem Quotienten zweier Zahlen mit Vermeidung jeder überflüssigen Rechnung nur so viel Ziffern zu bestimmen, als ihrer zuverläsig sein sollen, bedient man sich der abgekürzten Division. Diese besteht in folgendem Verfahren:

1. Man schreibe den Divisor unter den ersten Theildividend und die erste Ziffer des Quotienten unter die Einerziffer des Divisors, so hat die erste Ziffer des Quotienten mit der gerade darüber stehenden Ziffer des Dividends gleichen Rang.

Aus dem Range dieser Ziffer und aus der Anzahl der im Quotienten verlangten Decimalen ist auch bekannt, wie viele geltende Ziffern des Quotienten man im Ganzen zu bestimmen hat. Man nehme dann so viele höchste Ziffern des Divisors, als ihrer der Quotient enthalten soll, als ersten Divisor und den darüber stehenden Theil des Dividends als ersten Dividend an.

2. Man lasse bei jeder folgenden Division, anstatt zu dem Reste eine neue Ziffer dazu zu setzen, im Divisor rechts eine Ziffer weg.

3. Mit jeder Ziffer des Quotienten multipliciere man zunächst die erste oder richtiger die zwei ersten im Divisor weggelassenen Ziffern und nehme daraus die Correctur für das Product aus dem abgekürzten Divisor und der entsprechenden Ziffer des Quotienten.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis mit der Division durch die erste Ziffer des Divisors die Rechnung abschließt. Der Decimalpunct im Quotienten kommt unter jenen des Dividends zu stehen.

Beispiel. Es sei der Quotient 96·371.. : 4·0852.. zu berechnen.

Da $\frac{1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}00096.. + 0{\cdot}00405}{(4{\cdot}05852)^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}00501}{4^2} = 0{\cdot}00015..$ ist, so wird man im Quotienten nur 3 zuverlässige Decimalen erhalten, daher, weil die erste Ziffer Zehner bedeutet, im Ganzen 5 geltende Ziffern entwickeln.

a) Gewöhnliche Division der als vollständig betrachteten Decimalbrüche

96·371	$_0$
4·0585	2
23·745	3
15200	6_0
3025	04_0
184	076_0
21	7352_0
1	44260_0

b) Abgekürzte Division mit 3 Decimalen

96·371	..
4,0,5,8,5	2..
23·745	
15201	
3025	
184	
22	
2	

Damit bei der abgekürzten Division die letzte Ziffer des Quotienten richtig erhalten werde, muß der Divisor rechts über den Dividend hinausreichen, so daß noch eine Ziffer des Divisors zur Correctur benützt werden könne.

§. **124**. Aus dem richtigen Unterschreiben des Divisors unter den Dividend läßt sich mit Rücksicht auf das abgekürzte Divisionsverfahren unmittelbar bestimmen, wie viele zuverlässige Stellen der Quotient enthalten wird. Die niedrigste Ziffer des Dividends, über welche noch der Divisor rechts hinausreicht (wie im §. 123 bei der Rechnung b) die Ziffer 1), zeigt an, bis zu welcher Stelle der erste Dividend, daher auch der erste Divisor zu nehmen ist; die Anzahl der Ziffern dieses Divisors gibt aber zugleich die Anzahl der geltenden Ziffern im Quotienten an. Schreibt man die erste Ziffer des Quotienten unter die Einer des Divisors, so ergibt sich der Rang der ersten, und daraus auch der der folgenden Quotientenziffern.

Seien z. B. folgende Quotienten

a)		b)		c)		d)	
62·70	645..	41·325	3..	0·415	..	35·4$_{00}$	
0·782	8..	9·173	4...	84	58	62·41	8..
8...		4·...		0·000 04.		0·5 ...	

zu berechnen. In a) wird der Quotient im ungünstigsten Falle 3 geltende zuverlässige Ziffern haben; die erste bedeutet Zehner, die dritte also Zehntel. In b) kann der Quotient bis auf die dritte, in c) bis auf die sechste, in d), wo man dem vollständigen Dividend Nullen anhängen darf, bis auf die vierte Decimalstelle zuverlässig entwickelt werden.

§. **125**. Wenn umgekehrt angegeben werden soll, mit welchem Grade der Zuverlässigkeit zwei Decimalbrüche in Rechnung zu nehmen sind, damit man im Quotienten eine vorgeschriebene Anzahl zuverlässiger Stellen erhalte, so bestimme man durch das richtige Unterschreiben des Divisors unter den Dividend den Rang der ersten

Ziffer des Quotienten und auf Grundlage dessen die zur Erreichung des gewünschten Grades von Genauigkeit im Quotienten erforderliche Anzahl geltender Ziffern. Im Divisor braucht man nun eine Ziffer mehr, als die Anzahl der geltenden Quotientenziffern beträgt, und der Dividend muß sich bis auf die vorletzte Ziffer des Divisors erstrecken. Sind entweder im Dividend oder im Divisor oder in beiden nicht die erforderliche Anzahl von Ziffern, so muß man sich entweder die noch fehlenden Stellen verschaffen, oder, wo dieses nicht möglich ist, auf die verlangte Genauigkeit des Quotienten verzichten.

Sind z. B. die Quotienten

a)	b)	c)	d)
$35{\cdot}134\,\vert\,..$	$7{\cdot}564\,\vert\,2..$	$135{\cdot}70_0\,\vert$	$4{\cdot}5\,7{\cdot}\,\vert$
$7{\cdot}495\,\vert\,2..$	$0{\cdot}93_0\,\vert_0$	$4{\cdot}823.\,\vert\,.$	$8{\cdot}28\,\vert\,.$

sämmtlich in 3 Dicimalstellen zuverlässig zu bestimmen, so haben in a) beide Zahlen genau die erforderliche Anzahl von Decimalen, in b) ist die Ziffer 2 des Dividends überflüssig, in c) fehlen dem Divisor noch 2 Decimalziffern, in d) fehlt dem Dividend eine, und dem Divisor eine Decimale.

III. Kettenbrüche.

§. **126**. Ein Bruch, dessen Nenner nebst der ganzen Zahl noch einen Bruch enthält, dessen Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder dieselbe Beschaffenheit hat, wird ein *zusammenhängender* oder *Kettenbruch* genannt. Die allgemeine Form eines solchen Bruches ist

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \ldots}}}$$

wo a, b, c, d,... was immer für ganze Zahlen vorstellen können.

Die einzelnen Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$,..., aus denen der Kettenbruch besteht, heißen *Glieder* desselben. Je nachdem der Kettenbruch eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat, oder in's Unendliche fortschreitet, heißt er ein *endlicher* oder ein *unendlicher*.

Besonders wichtig sind solche Kettenbrüche, deren Glieder sämmtlich 1 zum Zähler, und eine positive Zahl zum Nenner haben; ihre allgemeine Form ist

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}}$$

Nur von solchen Kettenbrüchen soll hier die Rede sein.

1. Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch und umgekehrt.

§. **127**. Aufgabe. *Einen gemeinen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.*

Man dividiere Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler desselben, stelle den neuen Nenner als Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche dar, verfahre dann mit diesem Bruche auf gleiche Weise und setze das Verfahren so lange fort, bis eine solche Division ohne Rest aufgeht.

Ist $\frac{a}{b}$, wo $a < b$, in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b:a} = \frac{1}{q_1} + \frac{r_1}{a}$$

$$= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{a:r_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{r_2}{r_1}$$

$$= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_1 : r_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{r_3}{r_2}$$

u. s. w., wenn

$b : a$	den Quotienten	q_1	mit dem Reste	r_1,
$b : r_1$	" "	q_2	" " "	r_2,
$r_1 : r_2$	" "	q_3	" " "	r_3,

u. s. w. gibt.

Daß bei diesem Verfahren endlich ein Rest $= 0$ kommen müsse, folgt aus dem Umstande, daß die Reste ganze Zahlen sind und daß jeder folgende Rest mindestens um 1 kleiner sein müsse, als der vorhergehende. Wäre in der obigen allgemeinen Entwicklung z. B. $r_3 = 0$, so hätte man den endlichen Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}.$$

Der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ wird in Bezug auf den erhaltenen Kettenbruch der **Erzeugungsbruch** genannt.

Zusatz. Aus dem obigen Rechnungsgange ist ersichtlich, daß man zur Verwandlung eines echten Bruches $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch dieselben Divisionen vornehmen müsse, wie bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen a und b, und daß die dabei erhaltenen Quotienten der Reihe nach die Nenner des Kettenbruches bilden.

Um daher einen **echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln**, dividiere man den Nenner durch den Zähler, sodann den früheren Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest u. s. w., und nehme die dabei erhaltenen Quotienten als Nenner der auf einander folgenden Glieder des Kettenbruches an, deren Zähler immer 1 ist.

Ist z. B. $\frac{69}{151}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man folgende Rechnung:

$151 : 69 = 2$	mit dem Reste	13	oder 69	151	$2 = q_1$
$69 : 13 = 5$	" " "	4	" 4	13	$5 = q_2$
$13 : 4 = 3$	" " "	1	"	1	$3 = q_3$
$4 : 1 = 4$					$4 = q_4$

daher $\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$

§. 128. Aufgabe. **Einen unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.**

Man verwandle den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, suche für den angehängten echten Bruch nach §. 127 die entsprechende Kette und setze dieser noch die erhaltene ganze Zahl voraus.

Der Kettenbruch hat in diesem Falle die Form

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}$$

Um z. B. $\frac{2704}{655}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, hat man

$$\frac{2704}{655} = 4 + \frac{84}{655} \qquad \begin{array}{r|r|l} 84 & 655 & 7 \\ 17 & 67 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \\ & & 1 \\ & & 16 \end{array}$$

$$\text{daher } \frac{2704}{655} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16}}}}}.$$

§. **129**. Aufgabe. Einen endlichen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Man vereinige das letzte Glied des Kettenbruches mit dem Nenner des vorletzten zu einem unechten Bruche und dividiere dadurch den Zähler 1 dieses vorletzten Gliedes; den erhaltenen Bruch vereinige man wieder mit dem Nenner des vorhergehenden Gliedes und dividiere dadurch den Zähler 1 desselben, und setze dieses Verfahren bis zum ersten Gliede fort.

Z. B. $\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{41}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{5}{41}}}$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{128}{41}}} = \cfrac{1}{4 + \frac{41}{128}} = \cfrac{1}{\frac{553}{128}} = \frac{128}{553}.$$

Man kann die Rechnung auch so anordnen:

$$\begin{array}{c|c|c} \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{5}}}} & & \\ \frac{128}{553} & \frac{41}{128} & \frac{5}{41} \end{array}$$

Ein anderes Verfahren, einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, wird weiter unten (§. 131) angegeben werden.

2. Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. **130**. Wenn man einen Kettenbruch bei irgend einem Gliede abbricht, und den bis dahin reichenden Kettenbruch mit Vernachlässigung der folgenden Glieder in einen gemeinen Bruch verwandelt, so heißt dieser ein Näherungsbruch des ganzen Kettenbruches, und zwar der erste, zweite, dritte, . . ., je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, . . . Glieder in Anspruch nimmt. Bezeichnet man für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots}}}}$$

die auf einander folgenden Näherungsbrüche durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots$, so ist

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{q_1},\ \frac{Z_2}{N_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},\ \frac{Z_3}{N_3}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3},$$

$$\frac{Z_4}{N_4}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4} \text{ u. s. w.}$$

Bei einem endlichen Kettenbruche stellt der letzte Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch selbst vor.

§. **131.** Der Zähler irgend eines Näherungsbruches (vom dritten an) ist gleich dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches multipliciert mit dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, mehr dem Zähler des vorvorhergehenden Näherungsbruches; eben so ist der Nenner eines jeden Näherungsbruches gleich dem Nenner des vorhergehenden multipliciert mit dem Nenner des neu zugezogenen Gliedes, mehr dem Nenner des vorvorhergehenden Näherungsbruches.

Beweis. Für die ersten Näherungswerthe erhält man:

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{q_1}, \text{ daher } Z_1=1,\ N_1=q_1.$$

$$\frac{Z_2}{N_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{\frac{q_1 q_2+1}{q_2}}=\frac{q_2}{q_1 q_2+1}, \text{ daher}$$

$$Z_2=q_2,\ N_2=q_1 q_2+1.$$

$$\frac{Z_3}{N_3}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{\frac{q_2 q_3+1}{q_3}}=\frac{1}{q_1}+\frac{q_3}{q_2 q_3+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3+q_1+q_3}{q_2 q_3+1}}=\frac{q_2 q_3+1}{q_1 q_2 q_3+q_1+q_3}=\frac{q_2 q_3+1}{(q_1 q_2+1)q_3+q_1}$$

$$=\frac{Z_2 q_3+Z_1}{N_2 q_3+N_1}, \text{ daher}$$

$$Z_3=Z_2 q_3+Z_1,\ N_3=N_2 q_3+N_1;$$

woraus hervorgeht, daß das obige Gesetz für den dritten Näherungsbruch richtig ist.

Gesetzt nun, dasselbe Gesetz gelte für den nten Näherungsbruch, so daß

$$\frac{Z_n}{N_n}=\frac{Z_{n-1} q_n+Z_{n-2}}{N_{n-1} q_n+N_{n-2}}$$

sei. Um aus dem nten Näherungsbruche den $(n+1)$ten zu erhalten, darf man mit Rücksicht auf die Glieder des Kettenbruches, welche zu $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ gehören, nur in dem ersteren $q_n+\frac{1}{q_{n+1}}$ statt q_n setzen. Man erhält daher

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}=\frac{Z_{n-1}\left(q_n+\frac{1}{q_{n+1}}\right)+Z_{n-2}}{N_{n-1}\left(q_n+\frac{1}{q_{n+1}}\right)+N_{n-2}}=\frac{Z_{n-1}(q_n q_{n+1}+1)+Z_{n-2} q_{n+1}}{N_{n-1}(q_n q_{n+1}+1)+N_{n-2} q_{n+1}}$$

$$=\frac{(Z_{n-1} q_n+Z_{n-2}) q_{n+1}+Z_{n-1}}{(N_{n-1} q_n+N_{n-2}) q_{n+1}+N_{n-1}}=\frac{Z_n q_{n+1}+Z_{n-1}}{N_n q_{n+1}+N_{n-1}}.$$

Gilt daher das obige Bildungsgesetz für den nten Näherungsbruch, so ist es auch für den $(n+1)$ten richtig. Nun gilt dieses Gesetz, wie gezeigt wurde, für den dritten Näherungsbruch, also gilt es auch für den vierten, folglich auch für den fünften, u. s. w.; folglich gilt dasselbe allgemein.

Mit Rücksicht auf die hier nachgewiesene Eigenschaft lassen sich aus den zwei ersten Näherungsbrüchen ohne Schwierigkeit alle nach einander folgenden Näherungsbrüche, und daher bei einem endlichen Kettenbruche auch der Erzeugungsbruch bestimmen.

Z. B. Für den Kettenbruch

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}$$

hat man

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{2}, \frac{Z_2}{N_2}=\frac{3}{7},$$

daher

$$\begin{aligned} Z_3 &= 3 \,.\, 4 + 1 = 13, \\ N_3 &= 7 \,.\, 4 + 2 = 30, \text{ und } \frac{Z_3}{N_3}=\frac{13}{30}; \\ Z_4 &= 13 \,.\, 5 + 3 = 68, \\ N_4 &= 30 \,.\, 5 + 7 = 157, \text{ und } \frac{Z_4}{N_4}=\frac{68}{157}; \\ Z_5 &= 68 \,.\, 6 + 13 = 421, \\ N_5 &= 157 \,.\, 6 + 30 = 972, \text{ und } \frac{Z_5}{N_5}=\frac{421}{972}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{array}{llllll} \text{Nenner} & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ \text{Näherungsbrüche} & \frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{13}{30}, & \frac{68}{157}, & \frac{421}{972}. \end{array}$$

Der letzte Näherungsbruch stellt zugleich den Erzeugungsbruch des gegebenen Kettenbruches vor.

Zusatz. Aus dem Bildungsgesetze der Näherungsbrüche folgt, daß sowohl die Zähler als die Nenner derselben immer größer werden müssen.

§. **132.** Die Näherungsbrüche sind abwechselnd größer oder kleiner als der vollständige Werth des Kettenbruches, je nachdem sie eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten.

Beweis. Drückt man die nach dem ersten, zweiten, dritten, ... Gliede weggelassenen Glieder durch $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus, so ist

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1+x_1}=\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+x_2}}=\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+x_3}}}=\ldots$$

Nun ist $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1+x_1}$, daher $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$.

Ferner ist $\frac{1}{q_1} < \frac{1}{q_2+x_2}$, daher

$$\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2}} < \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+x_2}}, \text{ oder } \frac{Z_2}{N_2} < \frac{a}{b}.$$

Sei nun allgemein $\frac{Z_n}{N_n} \gtrless \frac{a}{b}$, also

$$\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\cdots+\frac{1}{q_n}}} \gtrless \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\cdots+\frac{1}{q_{n+1}+x_{n+1}}}},$$

so ist deßwegen auch

$$q_1 + \frac{1}{q_2} + \cdot\cdot + \frac{1}{q_{n+1}} \gtrless q_1 + \frac{1}{q_2} + \cdot\cdot + \frac{1}{q_{n+1} + x_{n+1}},$$

weil zu q_1 links eben der nte Näherungsbruch, rechts dagegen der entsprechende mit q_2 beginnende vollständige Kettenbruch addiert ist. Daraus folgt aber

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdot\cdot + \frac{1}{q_{n+1}} \lessgtr \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdot\cdot + \frac{1}{q_{n+1} + x_{n+1}},$$

oder

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} \lessgtr \frac{a}{b}.$$

Es sind also je zwei auf einander folgende Näherungsbrüche abwechselnd kleiner und größer als der vollständige Kettenbruch. Da nun der erste Näherungsbruch größer ist, so wird dies überhaupt bei jedem ungeraden Näherungsbruche stattfinden, während der zweite und alle geraden Näherungsbrüche kleiner sind.

Zusatz. Der vollständige Werth eines Kettenbruches liegt immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen.

§. **133.** 1. Wenn man von dem Producte aus dem Zähler eines Näherungsbruches und dem Nenner des folgenden das Product aus dem Zähler des letztern und dem Nenner des erstern subtrahiert, so ist die Differenz $+1$, oder -1, je nachdem der erstere Näherungsbruch eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthält.

Es ist

$$Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = 1 \,.\, (q_1 q_2 + 1) - q_2 \cdot q_1 = +1,$$
$$Z_2 N_3 - Z_3 N_2 = Z_2 (N_2 q_3 + N_1) - (Z_2 q_3 + Z_1) N_2$$
$$= Z_2 N_1 - Z_1 N_2 = -1.$$

Ist nun allgemein $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = \pm 1$,

so folgt daraus

$$Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n = Z_n (N_n q_{n+1} + N_{n-1}) - (Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}) N_n$$
$$= Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n = \mp 1,$$

wodurch die Giltigkeit des obigen Satzes allgemein bewiesen ist.

2. Die Differenz zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen ist immer gleich ± 1 dividiert durch das Product der Nenner.

Es ist allgemein

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}}{N_{n-1} N_n} = \frac{\pm 1}{N_{n-1} N_n}.$$

3. Die Differenz zwischen einem Näherungsbruche und dem vollständigen Werthe eines Kettenbruches ist absolut genommen kleiner als 1 dividiert durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches.

Beweis. Da der vollständige Werth $\frac{a}{b}$ des Kettenbruches immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b}$ absolut genommen kleiner als der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, somit

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}.$$

Aber wegen $N_{n+1} < N_n$ ist $N_n N_{n+1} < N_n^2$, und $\frac{1}{N_n N_{n+1}} < \frac{1}{N_n^2}$, daher um so mehr

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n^2}.$$

Zusatz. Da $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \ldots$, daher

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \ldots$$

ist, so folgt, daß jeder folgende Näherungsbruch von dem vollständigen Werthe des Kettenbruches um weniger verschieden ist, als der vorhergehende, daß sich also die auf einander folgenden Näherungsbrüche dem gegebenen Bruche immer mehr nähern, bis der letzte, wenn es einen gibt, mit jenem Werthe selbst zusammenfällt.

§. **134**. Zähler und Nenner eines jeden Näherungbruches sind relative Primzahlen.

Für die Näherungsbrüche $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$ ist (§. 133) absolut genommen

$$Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = 1.$$

Wären nun Z_n und N_n nicht relative Primzahlen, sondern sie hätten ein gemeinschaftliches Maß m, so wäre m auch ein Maß von $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}$ (§. 78, 1 und §. 77, 2) und folglich ein Maß von 1, was nicht möglich ist.

§. **135**. Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungsbrüche läßt sich kein Bruch einschalten, dessen Nenner nicht größer ist, als die Nenner der beiden Näherungsbrüche.

Gesetzt, es würde der gemeine Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den Näherungsbrüchen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ liegen, so müßte absolut genommen

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{p}{q} < \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} \text{ oder } \frac{Z_n q - N_n p}{N_n q} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}, \text{ daher}$$

$$\frac{Z_n q - N_n p}{q} < \frac{1}{N_{n+1}}$$

sein, was nur möglich ist, wenn der Nenner $q > N_{n+1}$ ist, weil $Z_n q - N_n p$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl, also $\overline{\geq} 1$ sein soll.

Folgesatz. Jeder Näherungsbruch drückt den vollständigen Werth des Kettenbruches genauer aus, als jeder andere Bruch, der einen kleineren Nenner hat.

Zusatz. Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche ist von großer praktischer Wichtigkeit. Will man nämlich den Quotienten zweier großer Zahlen durch kleinere möglichst genau darstellen, so verwandelt man denselben in einen Kettenbruch, und sucht die Näherungsbrüche; jeder derselben drückt den gesuchten Quotienten genauer aus, als alle möglichen gemeinen Brüche, deren Nenner nicht größer sind als der des Näherungsbruches.

Beispiele. 1. Man soll den Bruch 3·1415926, d. i. den Quotienten des Umfanges eines Kreises durch den Durchmesser, durch kleinere Zahlen möglichst genau ausdrücken.

Man hat

$$3{\cdot}1415926 = \frac{31415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 243,\ \ldots$$

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{86598}{27565},\ \ldots$$

2. Ein Wiener Fuß ist $= 0{\cdot}316081$ Meter; man soll die Näherungswerthe bestimmen.

Es ist

$$0{\cdot}316081 = \frac{316081}{1000000} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \ldots}}}}}}$$

Näherungsbrüche:

$$3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 1,\ 9,\ \ldots$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{6}{19},\ \frac{55}{174},\ \frac{116}{367},\ \frac{171}{541},\ \frac{1655}{5236},\ \ldots$$

Man hat also annäherungsweise:

3	Wiener Fuß	=	1	Meter
19	„ „	=	6	„
174	„ „	=	55	„
367	„ „	=	116	„
541	„ „	=	171	„
5236	„ „	=	1655	„ u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

1. Verhältnisse.

§. **136.** Die Division als Theilung führt auf die Brüche; die Division als Messung einer Zahl durch eine zweite führt auf den Begriff eines Verhältnisses. Unter dem **Verhältnis** zweier Zahlen (Größen) versteht man die Angabe, wie oft die eine in der andern enthalten ist.

Die Bezeichnung des Verhältnisses zweier Zahlen (Größen) a und b ist darum dieselbe als die des Quotienten a : b oder $\frac{a}{b}$, und wird gelesen: a verhält sich zu b, oder kürzer: a zu b. Dividend und Divisor heißen **Glieder** des Verhältnisses, und zwar der Dividend das **Vorderglied**, der Divisor das **Hinterglied**. Die unbenannte Zahl e, welche den Quotienten a : b angibt, wird der **Exponent** des Verhältnisses genannt.

Sind die Glieder eines Verhältnisses unbenannte Zahlen, so nennt man dasselbe ein **Zahlenverhältnis**.

Das durch Vertauschung der Glieder eines Verhältnisses a : b entstehende Verhältnis b : a heißt das **umgekehrte** oder **reciproke** Verhältnis des ersteren.

Die Größe eines Verhältnisses hängt von seinem Exponenten ab; je größer dieser ist, desto größer ist auch das Verhältnis.

Zwei Verhältnisse sind einander **gleich**, wenn sie denselben Exponenten haben. Wenn umgekehrt zwei Verhältnisse gleich sind, so haben sie gleiche Exponenten.

§. **137.** Das Verhältnis zweier (gleichartiger) G r ö ß e n, z. B. zweier Linien, Flächen, ... ist gleichbedeutend mit dem Verhältnis zweier unbenannter Zahlen, welche ausdrücken, wie oft ein gemeinschaftliches Maß der beiden Größen als Einheit in jeder von ihnen enthalten ist.

1. Der Exponent des Verhältnisses zweier commensurabler Größen ist entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl.

Sind die Größen A und B commensurabel, und ihr gemeinschaftliches Maß in A mmal, in B nmal enthalten, so ist die Größe B in der Größe A so oft enthalten, wie die Zahl n in der Zahl m; es ist daher $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, wo $\frac{m}{n}$ für den Fall, daß $n = 1$ oder überhaupt m durch n theilbar ist, eine ganze Zahl, sonst einen Bruch vorstellt.

2. Der Exponent des Verhältnisses zweier incommensurabler Größen kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; er läßt sich jedoch b) durch Angabe zweier Grenzen, zwischen denen er liegt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annäherungsweise bestimmen.

a) Sind A und B zwei incommensurable Größen, so kann weder $\frac{A}{B} = m$, noch $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ sein; denn im ersten Falle wäre dann B selbst, im zweiten $\frac{B}{n}$ ein gemeinschaftliches Maß von A und B, was gegen die Voraussetzung ist.

b) Theilt man B in n gleiche Theile und nimmt einen solchen Theil $\frac{B}{n}$ von A mmal, d. i. so oft hinweg, als es angeht, so bleibt von A ein Rest übrig, welcher kleiner als $\frac{B}{n}$ ist; es muß also $A > m . \frac{B}{n}$, dagegen $A < (m + 1) . \frac{B}{n}$ sein; folglich ist nach §. 57, 2

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

Der Exponent des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ liegt also zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ ist. Setzt man $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}$, so begeht man einmal im positiven, das andere Mal im negativen Sinne einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Da aber n beliebig groß, daher $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\frac{A}{B}$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen.

Zusatz. Um das Verhältnis zweier incommensurabler Größen darstellen zu können, ist man genöthigt, in das Zahlengebiet eine Zahlform einzuführen, die in der bisherigen Reihe der ganzen und gebrochenen Zahlen nicht vorkommt, sich aber durch diese annäherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen läßt. Da uns jedoch auf diese neue Zahlform, welche man eine i r r a t i o n a l e Zahl nennt, weiter unten (§. 183) auch die Betrachtung der reinen Zahlen leiten wird, so soll dieselbe erst dort einer näheren Untersuchung unterzogen werden.

In den hier folgenden Sätzen wird vorläufig vorausgesetzt, daß die Verhältnisglieder commensurabel sind.

§. **138.** **Lehrsätze.** 1. In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten.

2. In jedem Verhältnisse ist das Hinterglied gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

Wenn $a : b = e$ ist, so ist

$$1.\ a = be; \qquad 2.\ b = a : e.$$

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt unmittelbar aus §. 42.

3. Ein Verhältnis bleibt beständig, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert, oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Wenn $a : b = e$ ist, so ist nach §. 53 auch $am : bm = e$, und $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = e$; die Verhältnisse $am : bm$ und $\frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ sind also dem Verhältnisse $a : b$ gleich.

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jedes Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jedes Verhältnis, dessen Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

4. Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

Folgt aus §. 10, 2.

§. **139.** Wenn man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder, und ebenso alle Hinterglieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte ein neues Verhältnis, welches im Gegensatze zu den gegebenen einfachen Verhältnissen ein zusammengesetztes Verhältnis genannt wird.

Sind z. B. $a : b$
$c : d$
$e : f$ einfache Verhältnisse,

so ist $ace : bdf$ ein zusammengesetztes Verhältnis.

Zusatz. Wenn man irgend ein Vorderglied und irgend ein Hinterglied in den einfachen Verhältnissen durch dieselbe Zahl multipliciert oder dividiert, so wird dadurch auch sowohl das Vorder- als das Hinterglied des zusammengesetzten Verhältnisses durch die nämliche Zahl multipliciert oder dividiert, folglich bleibt dieses letztere ungeändert.

2. Proportionen.

§. **140.** Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Ist $a : b = e$ und $c : d = e$, so ist auch $a : b = c : d$; dieser Ausdruck ist eine Proportion und wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. Das erste Glied a und das vierte d nennt man die äußeren, das zweite b und das dritte c die inneren Glieder; auch heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder der Proportion. Das vierte Glied insbesondere wird die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern genannt.

Sind in einer Proportion die inneren Glieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige Proportion, z. B. $a : b = b : c$. Das innere Glied b wird die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und c, und c die dritte stetige Proportionale zu a und b genannt.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, daß zu einer mfachen Größe der einen Art auch eine mfache Größe der anderen Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen gerade proportioniert (proportional); z. B. Waare und Preis, Capital und Zins u. s. w. Wenn dagegen zu der mfachen Größe der einen Art nur der mte Theil von der Größe der anderen Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen **verkehrt proportioniert**; z. B. die Zahl der Arbeiter und die Arbeitszeit bei gleicher Leistung, Capital und Zeit bei gleichen Zinsen, u. s. w.

In einer Proportion können die Glieder des einen Verhältnisses von anderer Art sein, als die des andern. Sind die Glieder einer Proportion lauter unbenannte Zahlen, so heißt dieselbe eine **Zahlenproportion**, sonst eine **Größenproportion**.

In den hier folgenden Sätzen über Proportionen wird vorläufig vorausgesetzt, daß die Glieder eines jeden Verhältnisses commensurabel sind.

§. **141**. **Lehrsätze**. 1. **Je nachdem in einer Proportion das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner ist als das zweite, ist auch das dritte bezüglich größer, eben so groß oder kleiner als das vierte.**

Es sei $a : b = c : d$ und e der Exponent beider Verhältnisse; dann ist $a = be$ und $c = de$. Je nachdem nun $a \gtreqqless b$, muß $e \gtreqqless 1$, und daher auch $c \gtreqqless d$ sein.

2. **Je nachdem in einer Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner ist als das dritte, ist auch das zweite bezüglich größer, eben so groß oder kleiner als das vierte.**

Denn je nachdem $a \gtreqqless c$, ist $be \gtreqqless de$, und somit $b \gtreqqless d$.

3. **Zu drei Größen a, b, c gibt es immer nur eine vierte Proportionale.**

Gesetzt, es wäre außer d auch d' eine vierte Proportionale zu a, b, c, also $a : b = c : d$ und auch $a : b = c : d'$; dann müssen auch die Verhältnisse $c : d = c : d'$ gleich, folglich (nach 2.) $d = d'$ sein.

4. **Die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen liegt immer zwischen diesen Zahlen.**

Sei $a : b = b : c$. Ist $a \gtrless b$, so muß nach 1. bezüglich auch $b \gtrless c$ sein.

§. **142**. 1. **Jede Proportion bleibt richtig, wenn man die äußeren Glieder mit den inneren vertauscht.**

Ist $a : b = c : d$, und $a = be$, $c = de$, so ist $b = a \cdot \frac{1}{e}$, $d = c \cdot \frac{1}{e}$, folglich auch $b : a = d : c$.

2. **Eine Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen bleibt richtig, wenn man a) die inneren, b) die äußeren Glieder unter sich vertauscht.**

Aus $a : b = c : d$, $a = be$, $c = de$ folgt

a) $a : c = be : de$, oder $a : c = b : d$ (§. 138, 3);

b) $d : b = de : be$ (§. 138, 3) oder $d : b = c : a$.

3. **Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.**

Es sei $a : b = c : d$, $a = be$, $c = de$.

Daß $am : bm = c \quad : d$ und $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$,

$a : b \quad = cm : dm$ und $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$

ist, folgt aus §. 138, 3.

Ferner ist

$$am = be \, . \, m = b \, . \, em, \quad \frac{a}{m} = \frac{be}{m} = b \, . \, \frac{e}{m},$$

$$cm = de \, . \, m = d \, . \, em; \quad \frac{c}{m} = \frac{de}{m} = d \, . \, \frac{e}{m};$$

daher

$$am : b = cm : d, \quad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d.$$

Ebenso ergibt sich

$$a : bm = c : dm, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}.$$

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

§. **143**. 1. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten.

Ist $a : b = c : d$, $a = be$, $c = de$, so hat man

$$(a \pm b) : a = (be \pm b) : be = (e \pm 1) : e,$$
$$(c \pm d) : c = (de \pm d) : de = (e \pm 1) : e;$$

daher

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

2. In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu deren Differenz, wie die Summe der beiden letzten Glieder zu deren Differenz.

Es ist

$$(a + b) : (a - b) = (be + b) : (be - b) = (e + 1) : (e - 1),$$
$$(c + d) : (c - d) = (de + d) : (de - d) = (e + 1) : (e - 1);$$

daher

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

3. In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$.

Folgt aus 1. mit Zuziehung von §. 142, 2. a.

Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse gleichartiger oder unbenannter Zahlen einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Ist $a : b = c : d = f : g$, so ist auch

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b.$$

§. **144**. 1. Sind in zwei Proportionen die Vorder- oder Hinterglieder in derselben Folge einander gleich, so sind bezüglich die Hinter- oder Vorderglieder einander gerade proportioniert.

Ist	$a:b = c:d$ $a:m = c:n$	$a:b = c:d$ $m:b = n:d$
so ist	$b:m = d:n$	$a:m = c:n.$

Der Beweis wird geführt, indem man in der jedesmaligen Endproportion die Gleichheit der Exponenten nachweist.

2. Sind in zwei Proportionen die äußeren oder inneren Glieder in derselben Folge einander gleich, so sind bezüglich die inneren oder äußeren Glieder einander verkehrt proportioniert.

Ist	$a:b = c:d$ $a:m = n:d$	$a:b = c:d$ $m:b = c:n$
so ist	$b:m = n:c$	$a:m = n:d.$

Der Beweis beruht auf der Gleichheit der Exponenten.

§. **145**. 1. Wenn man in zwei oder mehreren Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Es sei $a:b = c:d, \quad a = be, \quad c = de;$
$f:g = h:k, \quad f = ge', \quad h = ke';$
$m:n = p:q, \quad m = ne'', \quad p = qe'';$

so hat man $afm = bgn.ee'e'', \quad chp = dkq.ee'e'',$

folglich $afm:bgn = chp:dkq.$

Man sagt, die letzte Proportion sei aus den gegebenen zusammengesetzt.

Der vorstehende Satz bleibt auch noch richtig, wenn eine der gegebenen Proportionen eine Größenproportion ist.

2. Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier Zahlenproportionen durch einander dividiert, so bilden die Quotienten wieder eine Proportion.

Ist $a:b = c:d, \quad a = be, \quad c = de;$
$f:g = h:k, \quad f = ge', \quad h = ke';$

so hat man $\frac{a}{f} = \frac{b}{g} \cdot \frac{e}{e'}, \frac{c}{h} = \frac{d}{k} \cdot \frac{e}{e'}$

folglich $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}.$

§. **146**. In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Es sei $a:b = c:d$, $a = be$, $c = de$; dann ist, wenn man $a = be$ mit $d = d$, und $c = de$ mit $b = b$ multipliciert, $ad = bde$ und $bc = bde$; folglich $ad = bc$.

Dieser Satz gilt auch von jeder Proportion, worin nur ein Verhältnis ein Zahlenverhältnis ist.

Folgesätze. 1. In einer stetigen Zahlenproportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Ist $c:b = b:c$, so ist $b^2 = ac$.

2. Jedes äußere Glied einer Zahlenproportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividiert durch das andere innere Glied.

Ist $a : b = c : d$, daher $ad = bc$, so ist

$$a = \frac{bc}{d},\ d = \frac{bc}{a},\ \text{und}$$

$$b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b}.$$

§. **147**. Aus zwei gleichen Producten läßt sich eine Proportion bilden, wenn man jedes der beiden Producte in zwei Factoren zerlegt und die Factoren des einen Productes als die äußeren, die Factoren des andern Productes als die inneren Glieder annimmt.

Es sei $ad = bc$. Dividiert man jeden dieser gleichen Ausdrücke durch bd, so erhält man $ad : bd = bc : bd$, oder

$$a : b = c : d.$$

§. **148**. Eine Proportion auflösen heißt, aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das noch unbekannte Glied finden.

a) Eine Proportion wird aufgelöst, wenn man den Exponenten des bekannten Verhältnisses sucht und daraus nach §. 138 das unbekannte Glied des andern Verhältnisses bestimmt.

b) Eine Zahlenproportion wird am einfachsten nach §. 146 Folges. 2 aufgelöst.

Aus $x : 2 = 15 : 3$ findet man

a) $15 : 3 = 5$, $x = 2 . 5 = 10$; oder

b) $x = \frac{2 . 15}{3} = 10$; daher

$10 : 2 = 15 : 3$ die vollständige Proportion.

§. **149**. Drei Größen a, b, c bilden eine harmonische Proportion, wenn $(a - b) : (b - c) = a : c$ ist; b heißt dann die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel zwischen a und c. Sind a, b, c harmonisch proportioniert, so sind es auch ma, mb, mc, eben so $\frac{a}{m'}$, $\frac{b}{m'}$, $\frac{c}{m}$.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Größen die dritte harmonisch proportionierte zu finden.

Aus $(a - b) : (b - c) = a : c$ folgt

$$1)\quad a = \frac{bc}{2c - b},$$

$$2)\quad c = \frac{ab}{2a - b},\ \text{und}$$

$$3)\quad b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Die dritte Gleichung gibt den Satz:

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen ist gleich dem doppelten Producte derselben dividiert durch ihre Summe.

§. **150**. Drei Größen a, b, c bilden eine contraharmonische Proportion, wenn $(b - c) : (a - b) = a : c$ ist; b heißt dann die mittlere contraharmonische Proportionale oder das contraharmonische Mittel zwischen a und b.

Das contraharmonische Mittel zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate dividiert durch die Summe der Zahlen selbst.

Aus $(b - c) : (a - b) = a : c$ folgt

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

3. Die einfache Regelbetri.

§. **151.** Wenn zwei Arten von Zahlen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse stehen, und wenn zwei Zahlen der einen Art gegeben sind, von den beiden zugehörigen Zahlen der anderen Art aber nur die eine bekannt ist, so kann die andere unbekannte Zahl dieser zweiten Zahl durch Aufstellung und Auflösung einer Proportion gefunden werden. Das Rechnungsverfahren, welches dabei angewendet wird, heißt die einfache Regelbetri.

Die einfache Regelbetri beruht auf folgenden zwei Sätzen:

1. Wenn zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben Ordnung genommen.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die zugehörigen Zahlen einer zweiten Art, und diese beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert. Ist nun $A = ma$, so muß nach dem Begriffe der geraden Proportionalität auch $B = mb$ sein. Man hat daher $A : a = m$ und $B : b = m$, und somit

$$A : a = B : b.$$

2. Wenn zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert sind, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in umgekehrter Ordnung genommen, daher das Product der zusammengehörigen Zahlen der beiden Arten dasselbe.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die beiden zugehörigen Zahlen der andern Art, und diese zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert. Ist nun $A = ma$, so muß $B = \frac{b}{m}$ oder $b = mB$ sein. Man hat daher $A : a = m$ und $b : B = m$; folglich

$$A : a = b : B \text{ und } AB = ab.$$

Bei der einfachen Regelbetri ist daher Folgendes zu beobachten:

Man beurtheile, ob die beiden Arten von Zahlen gerade oder verkehrt proportioniert sind, und setze das Verhältnis von zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der beiden Zahlen der anderen Art, in der nämlichen Ordnung genommen, wenn beide Arten gerade, und in umgekehrter, wenn sie verkehrt proportioniert sind. Diese Proportion wird aufgelöst.

Es ist an sich gleichgiltig, in welches Glied der Proportion die unbekannte Zahl x zu stehen kommt; am zweckmäßigsten erscheint es, dieselbe in das erste Glied zu setzen. Z. B.

1. 7 Ellen Tuch kosten 30 fl., was kosten 42 Ellen von demselben Tuche?

Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so hat man

7 Ellen	30 fl.		$x : 30 = 42 : 7$
42 „	x „		also $x = 180$ fl.

2. 16 Arbeiter vollenden eine Arbeiter in 6 Tagen; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 4 Tagen zu Stande bringen?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert, und man hat

16 Arb.	6 Tage	$x : 16 = 6 : 4$
x „	4 „	$x = 24$ Arbeiter.

§. **152**. Ein Betrag, der sich auf die Zahl 100 bezieht, wird Procent genannt.

Bei der Procentrechnung rechnet man entweder von, oder auf oder in Hundert, je nachdem die Menge, von welcher die Procente bestimmt werden, mit der Grundzahl 100 selbst, oder mit 100 vermehrt um das Procent, oder mit 100 vermindert um das Procent gleichartig ist.

Bezeichnet p das Procent und b den Betrag von der Menge m, so hat man folgende Regeldetri-Ansätze:

a) bei der Rechnung von Hundert $b : p = m : 100$ also $b = \frac{mp}{100}$;

b) „ „ „ auf Hundert $b : p = m : (100 + p)$, „ $b = \frac{mp}{100+p}$;

c) „ „ „ in Hundert $b : p = m : (100 - p)$, „ $b = \frac{mp}{100-p}$.

4. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. **153**. Wenn eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren anderen Arten einzeln im geraden oder verkehrten Verhältnisse steht und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer anderen Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt, so heißt das Rechnungsverfahren, durch welches man diese unbekannte Zahl findet, die zusammengesetzte Regeldetri.

Die zusammengesetzte Regeldetri beruht auf folgendem Satze:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren andern Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert ist, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proportioniert sind.

Es sei die Zahl A von den Zahlen B, C so abhängig, wie
„ „ a „ „ „ b, c,
wo die mit gleichlautenden Buchstaben bezeichneten Zahlen zu derselben Art gehören, und es seien die Zahlen der ersten Art mit den Zahlen der zweiten Art gerade, mit den Zahlen der dritten Art aber verkehrt proportioniert. Heißt nun α eine Zahl der ersten Art, welche zu den Zahlen b, C gehört, so hat man folgende Reihen zusammengehöriger Zahlen:

$$A,\ B,\ C;$$
$$\alpha,\ b,\ C;$$
$$a,\ b,\ c.$$

Vergleicht man die zwei ersten Reihen, so sieht man, daß die Zahl α aus A entsteht, indem sich B in b ändert; da nun die Zahlen der ersten und zweiten Art gerade proportioniert sind, so hat man

$$A : \alpha = B : b.$$

Vergleicht man eben so die zweite und dritte Reihe, so sieht man, daß a aus α hervorgeht, wenn sich C in c verändert; da nun die Zahlen der ersten und der dritten Art verkehrt proportioniert sind, so hat man

$$\alpha : a = c : C.$$

Durch Multiplication dieser beiden Proportionen ergibt sich

$$A\alpha : a\alpha = Bc : bC,$$

$$\text{oder } A : a = Bc : bC,$$

in welcher Proportion der oben aufgestellte Satz enthalten ist.

Man pflegt diese letztere Proportion wegen der leichteren Uebersicht auch so zu schreiben:

$$\begin{array}{rl} A : a = & B : b \\ & c : C, \end{array}$$

wobei man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multiplicieren sind.

Bei der zusammengesetzten Regeldetri verfährt man daher auf folgende Art:

Man setze die unbekannte und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältnis. Das zweite Verhältnis der Proportion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse gefunden werden, wenn man die Art, zu welcher x gehört, mit jeder andern Art vergleicht, um zu sehen, ob die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und die beiden zu x und zu der damit gleichnamigen Zahl gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben oder in umgekehrter Ordnung zu einem Verhältnisse aufstellt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proportioniert ist. Die Proportion wird sodann aufgelöst.

Z. B. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Fuß Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Fuß Länge vollenden?

20 Arb.	12 Std. tägl.	5 Woch.	375 Fuß Länge,	
12 "	10 " "	x	600 " "	

$$\begin{array}{rl} x : 5 = & 20 : 12 \\ & 12 : 10 \\ & 600 : 375 \\ \hline x : 1 = & 16 : 1 \\ x = & 16 \text{ Wochen.} \end{array}$$

§. 154. Heißt Z der Zins, welchen ein Capital C in J Jahren zu P Procent bringt, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri;

100 fl. Cap.	in 1 Jahre	P fl. Zins
C " "	" J	" Z " "

$$\begin{array}{rl} Z : P = & C : 100 \\ & J : 1 \\ \hline \text{also } Z : P = & CJ : 100, \text{ und} \\ 100Z = & CPJ. \end{array}$$

Werden diese letzten zwei gleichen Ausdrücke zuerst durch 100, dann durch PJ, ferner durch CJ, endlich durch CP dividiert, so erhält man beziehungsweise

$$Z = \frac{CPJ}{100}, \quad C = \frac{100Z}{PJ}, \quad P = \frac{100Z}{CJ}, \quad J = \frac{100Z}{CP},$$

welche Formeln, in die gewöhnliche Wortsprache übertragen, die Sätze für die Lösung der Aufgaben über die einfache Zinsrechnung enthalten.

5. Die Theilregel.

§. **155.** Wenn eine gegebene Zahl in mehrere Theile, welche sich wie andere gegebene Zahlen verhalten, getheilt werden soll, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche das Verhältnis der Theile ausgedrückt wird, heißen Verhältniszahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so wird die einfache; sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu vertheilende Zahl, a, b, c und d die Verhältniszahlen. Nennt man die noch unbekannten Theile u, x, y und z, so muß $u : x = a : b$, $x : y = b : c$, $y : z = c : d$ sein, was man oft kürzer so anzeigt: $u : x : y : z = a : b : c : d$. Verwechselt man in den vorangehenden Proportionen die inneren Glieder, so hat man

$$u : a = x : b, \quad x : b = y : c, \quad y : c = z : d,$$

also

$$u : a = x : b = y : c = z : d,$$

und nach §. 143, Zusatz,

$$\begin{aligned}(u + x + y + z) : (a + b + c + d) &= u : a \\ &= x : b \\ &= y : c \\ &= z : d.\end{aligned}$$

Da nun $u + x + y + z = s$ sein muß, so erhält man aus dem letzten Ausdrucke

$$u = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot a; \quad x = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot b;$$

$$y = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot c; \quad z = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot d.$$

Daraus ergibt sich für die einfache Theilregel folgendes Verfahren:

Man dividiere die zu vertheilende Zahl durch die Summe aller Verhältniszahlen und multipliciere den Quotienten mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Wenn die Verhältniszahlen Brüche enthalten, so werden sie zuerst in ganzen Zahlen dargestellt, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert. Haben alle Verhältniszahlen ein gemeinschaftliches Maß, so werden sie dadurch abgekürzt.

Z. B. Es sollen 2155 fl. unter drei Personen nach dem Verhältnisse der Zahlen 5, 3, 2 vertheilt werden.

$$\begin{array}{rr} 5 & 215\tfrac{1}{2} \times 5 = 1077\tfrac{1}{2} \\ 3 & 215\tfrac{1}{2} \times 3 = 646\tfrac{1}{2} \\ 2 & 215\tfrac{1}{2} \times 2 = \underline{431} \\ 2155 : \overline{10} = 215\tfrac{1}{2} & 2155 \end{array}$$

§. **156**. Die *zusammengesetzte Theilregel* läßt sich auf die einfache zurückführen.

Es sei eine Zahl s mit Bezugnahme auf mehrere Umstände in drei Theile zu theilen, die sich in einer Beziehung wie a : b : c, in einer zweiten Beziehung wie d : e : f, und in einer dritten Beziehung wie g : h : k verhalten. Heißen x, y, z die noch unbekannten Theile, so muß sich x : y nicht nur wie a : b, sondern auch wie d : e und wie g : h verhalten; es muß also das Verhältnis x : y gleich sein dem zusammengesetzten Verhältnisse aus a : b, d : e, g : h, also dem Verhältnisse adg : beh. Eben so muß y : z = beh : cfk sein. Es besteht also die Forderung, die Theile x, y, z so zu bestimmen, daß der Bedingung

$$x : y : z = adg : beh : cfk$$

Genüge geleistet werde, was eine Aufgabe der einfachen Theilregel ist.

Bei der zusammengesetzten Theilregel ist also Folgendes zu beobachten:

Man multipliciere die auf denselben Theil Bezug habenden Verhältniszahlen mit einander, und betrachte die Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Theilregel, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Z. B. Zu einer Unternehmung vereinigen sich drei Personen; A gibt 8000 fl. auf 5 Monate, B 4000 fl. auf 6 Monate, C 2000 fl. auf 8 Monate her. Die Unternehmung wirft einen reinen Gewinn von 460 fl. ab; wie viel davon wird jede der drei Personen bekommen?

A 8000 fl. durch 5 M.	$40\cancel{000}$	5	$46 \times 5 = 230$ fl.
B 4000 „ „ 6 „	$24\cancel{000}$	3	$46 \times 3 = 138$ „
C 2000 „ „ 8 „	$16\cancel{000}$	2	$46 \times 2 = 92$ „
	$460 : 10 = 46$		460 fl.

6. Die Kettenregel.

§. **157**. Wenn die Beziehung zwischen zwei Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch eine zusammenhängende Aufstellung bekannter Zwischenbestimmungen gesucht werden muß, so wendet man die *Kettenregel* an.

Es sei folgende Aufgabe zu lösen:

Wie viel (x) Einheiten von der Art M betragen a Einheiten von der Art A,
wenn a′ „ „ „ „ A „ b „ „ „ „ B,
„ b′ „ „ „ „ B „ c „ „ „ „ C,
„ c′ „ „ „ „ C „ m „ „ „ „ M

betragen? Diese Aufgabe kann kürzer so angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} xM &= aA, \\ \text{wenn } a'A &= bB, \\ b'B &= cC, \\ c'C &= mM, \end{aligned}\right\} \cdots 1)$$

wo x, a, a′, b, b′, c, c′, m unbenannte Zahlen, und A, B, C, M die Arten oder Benennungen derselben vorstellen.

Um das gesuchte Resultat zu erhalten, verwandelt man die gegebenen a Einheiten der Art A zunächst in (y) Einheiten der Art B, dann die gefundenen Einheiten der Art B in (z) Einheiten der Art C, und diese endlich in (x) Einheiten der Art M. Dabei ergeben sich nach den angegebenen Bedingungen folgende Proportionen:

$$y : b = a : a',$$
$$z : y = c : b'$$
$$x : z = m : c', \text{ woraus nach §. 145, 1}$$
$$x : b = acm : a'b'c', \text{ und nach §. 146, Folgef. 2}$$
$$x = \frac{abcm}{a'b'c'} \ldots 2)$$

folgt. Aus dem in 1) angegebenen Ansatze der Aufgabe und dem in 2) für x erhaltenen Ausdrucke ergibt sich daher für die Kettenrechnung folgendes Verfahren:

1. Man schreibe zuerst x mit der Benennung an und daneben die gegebene Größe, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Werth hat. Darunter setze man alle Mittelbeziehungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden rechts von gleicher Art ist; rechts neben jede Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichwerthig ist. So wird fortgefahren, bis man rechts eine Größe erhält, die mit x gleichnamig ist.

2. Man dividiere das Product aller rechts stehenden unbenannten Zahlen durch das Product aller links unter x stehenden; der Quotient gibt den gesuchten Werth von x.

Z. B. 1 Hamb. Pfund Kaffee kostet $6\frac{1}{2}$ Schilling, wie viel in österr. Währ. kosten $5\frac{1}{4}$ Wien. Ctr.? (100 Hamb. Pfd. = $89\frac{3}{4}$ W. Pfd.; 100 Mark = $84\frac{1}{2}$ fl. öst. Währ.; 1 Mark = 16 Schill.; 1 Wr. Ctr. = 100 Wr. Pfd.)

Ansatz:

x	fl. österr. Währ. . . .	$5\frac{1}{4}$	Wr. Ctr.
1	Wr. Ctr.	100	Wr. Pfd.
$89\frac{3}{4}$	Wr. Pfd.	100	Hamb. Pfd.
1	Hamb. Pfd.	$6\frac{1}{2}$	Schilling
16	Schilling	1	Mark
100	Mark	$84\frac{1}{2}$	fl. österr. Währ.

$$x = \frac{5\frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot 84\frac{1}{2}}{89\frac{3}{4} \cdot 16 \cdot 100} = 200\cdot805 \text{ fl. ö. W.}$$

Sechster Abschnitt.

Die Rangoperationen.

I. Die Potenzierung.

1. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

§. 158. Eine Zahl a zur nten Potenz erheben oder a mit n potenzieren, heißt a nmal als Factor setzen (§. 37). a ist die Grundzahl oder Basis, n der Potenzexponent und das erhaltene Product p die nte Potenz von a. Man schreibt $a^n = p$. Eine Potenz ist demnach ein Product gleicher Factoren.

Folgesätze. 1. Die erste Potenz einer Zahl ist dieser Zahl selbst gleich.

$$a^1 = a.$$

2. Jede Potenz von 1 ist wieder 1.

$$1^n = 1.$$

Grundoperationen mit Potenzen.

§. **159**. Mit Potenzen werden die Grundoperationen auf dieselbe Art wie mit allgemeinen Größen überhaupt vorgenommen. Eine Abkürzung des Verfahrens kann nur in besonderen Fällen mit Anwendung der folgenden Sätze eintreten:

1. Potenzen derselben Grundzahl werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert. $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Der Beweis wurde in §. 38 geführt.

2. Potenzen desselben Exponenten werden multipliciert, indem man das Product der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert. $a^m . b^m = (ab)^m$.

Denn
$$\begin{aligned} a^m &= a.a.a.a\ldots\ldots\ \text{mmal,} \\ b^m &= b.b.b.b\ldots\ldots\ \text{mmal, daher} \\ \hline a^m . b^m &= ab.ab.ab.ab\ldots\ \text{mmal (§. 32)} \\ &= (ab)^m. \end{aligned}$$

3. Potenzen derselben Grundzahl werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Grundzahl mit einer Zahl potenziert, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.
$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für $m > n$ und $m = n$ wurde in §. 52 bewiesen; die Bedeutung derselben für $m < n$ wird weiter unten (§. 163) besonders untersucht werden.

4. Potenzen desselben Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.
$$a^m : b^m = (a : b)^m \text{ oder } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Beweis ähnlich wie bei 2.

Folgesätze. 1. Eine Potenz mit einem Summen-Exponenten ist gleich dem Producte zweier Potenzen derselben Grundzahl, deren Exponenten die Summanden sind. (Umkehrung von 1.)

2. Eine Potenz mit einem Differenz-Exponenten ist gleich dem Quotienten zweier Potenzen ihrer Grundzahl, dessen Dividend den Minuend, dessen Divisor den Subtrahend der gegebenen Differenz zum Exponenten hat. (Umkehrung von 3.)

3. Der reciproke Werth der Potenz einer Zahl ist gleich der gleichvielten Potenz des reciproken Werthes dieser Zahl.
$$\frac{1}{b^m} = \left(\frac{1}{b}\right)^m.$$

Vorzeichen der Potenzen.

§. **160**. 1. Eine positive Grundzahl gibt mit einer beliebigen ganzen Zahl potenziert eine positive Potenz.

$(+a)^n = +a. +a. +a. +a..\text{nmal} = +a^n$ (§. 73, Folges. 2).

2. Eine negative Grundzahl gibt mit einer geraden ganzen Zahl potenziert eine positive, mit einer ungeraden ganzen Zahl potenziert dagegen eine negative Potenz.

$(-a)^{2n} = -a. -a. -a. -a.\ldots\ 2\text{nmal} = +a^{2n}$
(§. 73, Folges. 3).

$(-a)^{2n+1} = -a. -a. -a. -a.\ldots\ (2n+1)\text{mal} = -a^{2n+1}$
(§. 73, Folges. 3).

Potenzieren von Producten und Quotienten.

§. **161.** 1. Ein Product wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Factor damit potenziert.

$$(ab)^m = a^m \,.\, b^m.$$

Folgt aus der Umkehrung der Gleichung in §. 159, 2.

2. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenziert, indem man Dividend und Divisor damit potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Folgt aus der Umkehrung der Gleichung in §. 159, 4.

Folgesätze. 1. Die Potenz des reciproken Werthes einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe der gleichvielten Potenz dieser Zahl.

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}.$$

2. Die Potenz eines auf die einfachste Form gebrachten echten oder unechten Bruches kann nie eine ganze Zahl sein.

Folgt aus §. 78, 6.

Potenzieren von Potenzen.

§. **162.** Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Producte beider Exponenten potenziert.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Denn $(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots n\text{mal}$
$= a^{m+m+m+\ldots n\text{mal}}$ (§. 159, 1)
$= a^{mn}$ (§. 31, 1).

Folgesätze. 1. Eine Potenz mit einem Product-Exponenten ist gleich der sovielten Potenz ihrer Grundzahl, wie der eine Factor anzeigt, potenziert mit dem andern Factor. (Umkehrung des voranstehenden Lehrsatzes.)

2. Die Potenz einer Potenz bleibt unverändert, wenn man die Exponenten vertauscht.

Es ist $(a^m)^n = a^{mn}$ und $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$; daher

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

2. Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

§. **163.** Der durch die Gleichung $a^m : a^n = a^{m-n}$ ausgedrückte Lehrsatz für die Division zweier Potenzen derselben Grundzahl (§. 159, 3) wurde bisher auf den Fall, wo $m \geqq n$ ist, beschränkt. Ist nun $m < n$ und zwar $m + p = n$, so führt die Anwendung der obigen Gleichung auf eine Potenz mit negativem Exponenten; es ist

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Damit daher das durch die obige Gleichung ausgesprochene Gesetz allgemeine Geltung habe, ist man genöthigt, in die Rechnung auch Potenzen mit negativen Exponenten einzuführen und denselben eine Bedeutung beizulegen, durch welche auch sie auf den ursprünglichen Potenzbegriff zurückgeführt werden. Diese Bedeutung ergibt sich sogleich, wenn man den Quotienten, welchen a^{-p} vorstellen soll, in einer andern Form entwickelt. Man hat

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \,.\, a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Mithin ist

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist demnach der reciproke Werth derselben Potenz mit positivem Exponenten.

Folgesätze. 1. Da $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$ ist (§. 159, Folges. 3), so ist auch $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$. Eine Zahl a zur $(-p)$ten Potenz erheben heißt daher den reciproken Werth von a pmal als Factor setzen.

2. Aus $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ folgt $a^p \cdot a^{-p} = 1$, folglich ist auch $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Man kann daher jede Potenz, die im Zähler eines Bruches als Factor vorkommt, als Factor in den Nenner, und umgekehrt, übertragen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

§. **164**. Alle bisher erwiesenen Lehrsätze von den Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Um dies an den einzelnen Sätzen zu beweisen, darf man nur die Potenzen mit negativen Exponenten durch die reciproken Werthe derselben Potenzen mit positiven Exponenten ausdrücken, dann die angedeuteten Rechnungen durchführen und in den Resultaten, wenn darin Ausdrücke von der Form $\frac{1}{a^p}$ vorkommen, wieder zu Potenzen mit negativen Exponenten zurückkehren. Z. B.

$$(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n};$$

$$(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{+a^{2n}} = +a^{-2n};$$

$$(-a)^{-(2n+1)} = \frac{1}{(-a)^{2n+1}} = \frac{1}{-a^{2n+1}} = -a^{-(2n+1)};$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m};$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

u. s. w.

3. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Potenzierung.

§. **165**. 1. Gleiche Zahlen mit gleichen Zahlen potenziert geben Gleiches.

Wenn $a = b$, so ist $a^m = b^m$.

Folgt aus §. 10, 3.

Folgesatz. Wenn man alle Glieder einer Proportion mit derselben Zahl potenziert, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a:b = c:d$, so muß auch $(a:b)^m = (c:d)^m$, folglich $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 161, 2) sein.

2. Ungleiche Zahlen mit gleichen Zahlen potenziert geben Ungleiches mit demselben oder mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen, je nachdem der Exponent positiv oder negativ ist.

Wenn $a > b$, so ist $a^m > b^m$ und $a^{-m} < b^{-m}$.

Folgt aus §. 41, 3.

Folgesatz. Wenn $a \gtrless 1$, so ist bezüglich $a^m \gtrless 1$ und $a^{-m} \lessgtr 1$.

3. Gleiche Zahlen mit ungleichen Zahlen potenziert geben Ungleiches mit demselben oder mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen, je nachdem die Grundzahl größer oder kleiner als 1 ist.

Wenn $m > n$, also $-n > -m$ ist, so hat man

$$\text{für } a > 1,\ a^m > a^n \text{ und } a^{-n} > a^{-m};$$
$$\text{für } a < 1,\ a^m < a^n \text{ und } a^{-n} < a^{-m}.$$

Folgt aus §. 104, Zusatz.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, mit ungleichen positiven Zahlen bei demselben Ungleichheitszeichen potenziert, geben Ungleiches mit dem gemeinschaftlichen Ungleichheitszeichen.

Wenn $a > b$ und zugleich $a > 1$, ferner $m > n$ ist, so ist $a^m > b^n$.

Denn nach 3. ist $a^m > a^n$, nach 2. $a^n > b^n$; daher um so mehr $a^m > b^n$.

4. Das Quadrieren und Cubieren.

§. 166. Aufgabe. Einen mehrgliedrigen algebraischen Ausdruck zum Quadrat zu erheben.

Man entwickle das Quadrat nach folgendem Bildungsgesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.
2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder und diesem Gliede, und das eigene Quadrat.
3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Beweis. Man hat zunächst

$$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

d. i. das Quadrat eines Binoms ist gleich dem Quadrate des ersten Gliedes, mehr dem doppelten Producte beider Glieder, mehr dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Gesetzt nun, das hier für zwei Glieder nachgewiesene Gesetz gelte für einen ngliedrigen Ausdruck $a + b + c \ldots + q + r$, so daß

$$\begin{aligned}(a + b + c + \ldots + q + r)^2 = \; & a^2 \\ & + 2ab + b^2 \\ & + 2(a + b)\,c + c^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2(a + b + c \ldots + q)\,r + r^2\end{aligned}$$

sei, so läßt sich zeigen, daß dann dasselbe Gesetz auch für einen $(n + 1)$ gliedrigen Ausdruck $a + b + c \ldots + q + r + s$ richtig sein, daß nämlich, wenn zu dem früheren Ausdrucke noch das Glied s dazu kommt, im Quadrate zu der früheren Summe noch $+ 2(a + b + c + \ldots + q + r)\,s + s^2$ hinzukommen müsse. In der That ist, wenn man den neuen Ausdruck als ein

Binom, den ganzen früheren Ausdruck als das erste und s als das zweite Glied dieses Binoms ansieht,

$$(a + b + c + .. + q + r + s)^2 = [(a + b + c + .. + q + r) + s]^2$$
$$= (a + b + c + .. + q + r)^2 + 2(a + b + c + .. + q + r)s + s^2.$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt nun für zwei Glieder, folglich muß es auch für drei, folglich auch für vier, u. s. w., mithin allgemein für jede Anzahl von Gliedern gelten.

Zusatz. Die zwei Bestandtheile, welche ein Glied der gegebenen Zahl im Quadrate gibt, können auch in einen einzigen zusammengefaßt werden, wenn man dieses Glied zu der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder addiert, und die erhaltene Summe mit diesem Gliede multipliciert; denn

$$2a.b + b^2 = (2a + b).b;$$
$$2(a + b).c + c^2 = [2(a + b) + c].c;$$

u. s. w.

§. **167**. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Quadrate zu erheben.

Man wende dabei folgendes Verfahren an:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrate.
2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der ihr vorangehenden Zahl und dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.
3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt, da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läßt, aus §. 166.

Um z. B. 3417 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2$$
$$= 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2 + 2.3400.10 + 10^2$$
$$+ 2.3410.7 + 7^2;$$

oder wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt:

$$\begin{array}{rrrr}
3417^2 = & & 3000^2 \;\ldots\ldots & 9000000 \\
& + 2.3000. & 400 \;\ldots\ldots & 2400000 \\
& + & 400^2 \;\ldots\ldots & 160000 \\
& + 2.3400. & 10 \;\ldots\ldots & 68000 \\
& + & 10^2 \;\ldots\ldots & 100 \\
& + 2.3410. & 7 \;\ldots\ldots & 47740 \\
& + & 7^2 \;\ldots\ldots & 49 \\
\hline
& & & 11675889;
\end{array}$$

oder mit Hinweglassung der Nullen:

$$\begin{array}{rrrr}
 & & 3417^2 & \\
\hline
 & & 3^2 & 9. \\
2\,. & 3\,. & 4 \;\ldots\ldots & 24. \\
 & & 4^2 \;\ldots\ldots & 16. \\
2\,. & 34 & 1 \;\ldots\ldots & 68. \\
 & & 1^2 \;\ldots\ldots & 1. \\
2\,. & 341\,. & 7 \;\ldots\ldots & 4774. \\
 & & 7^2 \;\ldots\ldots & 49 \\
\hline
 & & & 11675889.
\end{array}$$

Zusätze. 1. Die zwei Bestandtheile, welche die zweite und jede folgende Ziffer der gegebenen Zahl im Quadrate liefert, kann man in einen einzigen zusammenfassen, wenn man zu der doppelten vorangehenden Zahl die neue Ziffer hinzuschreibt, und die dadurch entstehende Zahl mit dieser neuen Ziffer multipliciert; nur muß bei diesem Vorgange jedes folgende Product um zwei Stellen weiter rechts hinaus gerückt werden; es ist nämlich allgemein $(2A.10).p + p^2 = (2A.10 + p)p$.

Das frühere Beispiel würde sich bei diesem verkürzten Verfahren so stellen:

$$\begin{array}{r@{\;}r|r|r|l}
\multicolumn{2}{c}{3417^2} & & & \\
\hline
3^2 \;.\;.\;. & 9 & .\,. & & \\
64.4 \;.\;.\;. & 2 & 56 & .\,. & \\
681.1 \;.\;.\;. & & 6 & 81 & .\,. \\
6827.7 \;.\;.\;. & & 4 & 77 & 89 \\
\hline
& 11 & 67 & 58 & 89
\end{array}$$

2. Das Quadrat einer dekadischen Zahl hat entweder doppelt so viele Ziffern als diese Zahl oder um eine Ziffer weniger.

Sei N eine $n$ziffrige Zahl, also $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, so ist $N^2 \geqq 10^{2n-2}$, aber $< 10^{2n}$; das Quadrat N^2 hat also mindestens $2n - 1$ Ziffern und höchstens $2n$ Ziffern (§. 59).

Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man im Quadrate so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat.

3. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ ist, so erhellet, daß bei einem Decimalbruche das Quadrat auf gleiche Weise wie bei einer dekadischen ganzen Zahl gebildet wird; nur muß man im Quadrate des Zählers doppelt so viele Decimalen abschneiden, als deren der gegebene Decimalbruch enthält. Daraus folgt auch, daß das Quadrat eines Decimalbruches immer eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat.

4. Erhebt man einen unvollständigen Decimalbruch zum Quadrat, so erhält dieses eben so viele unzuverlässige Stellen, als der gegebene Decimalbruch Ziffern hat. (Folgt aus §. 118, Folges.)

Z. B. $3{\cdot}456..^2$ gibt als vollständig entwickelt $11{\cdot}943936...$ Von diesen Ziffern sind jedoch die 4 niedrigsten unzuverlässig; daher

$$3{\cdot}456..^2 = 11{\cdot}94..$$

§. **168.** **Aufgabe.** Einen mehrgliedrigen algebraischen Ausdruck zum Cubus zu erheben.

Man entwickle den Cubus nach folgendem Gesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile, das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Cubus.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

Beweis. Zunächst ist

$$(a + b)^3 = (a + b)^2\,(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

d. h. der Cubus eines Binoms ist gleich dem Cubus des ersten Gliedes, mehr dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten Gliede, mehr dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, mehr dem Cubus des zweiten Gliedes.

Der weitere Gang des Beweises ist ähnlich wie in §. 166.

§. **169**. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Cubus zu erheben.

Man wende folgendes Verfahren an:

1. Man erhebe die erste oder höchste Wurzelziffer zum Cubus.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile, das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus §. 168.

Um z. B. den Cubus von 4213 zu bestimmen, hat man

$$
\begin{array}{rlr}
4213^3 = (4000 + 200 + 10 + 3)^3 & & \\
= \quad 4000^3 & \ldots\ldots & 64000000000 \\
+\ 3.4000^2.200 & \ldots\ldots & 9600000000 \\
+\ 3.4000\ .200^2 & \ldots\ldots & 480000000 \\
+\ 200^3 & \ldots\ldots & 8000000 \\
+\ 3.4200^2.\ 10 & \ldots\ldots & 529200000 \\
+\ 3.4200\ .\ 10^2 & \ldots\ldots & 1260000 \\
+\ 10^3 & \ldots\ldots & 1000 \\
+\ 3.4210^2.\ \ 3 & \ldots\ldots & 159516900 \\
+\ 3.4210\ .\ \ 3^2 & \ldots\ldots & 113670 \\
+\ 3^3 & \ldots\ldots & 27 \\
\hline
 & & = 74778091597
\end{array}
$$

oder mit Weglassung der Nullen:

4213^3					
4^3	….	64	.		
$3\ .\ 4^2.2$	….	9	6.		
$3\ .\ 4\ .2^2$	….		48.		
2^3	….		8	.	
$3\ .\ 42^2.1$	….		529	2.	
$3\ .\ 42\ .1^2$	….		1	26.	
1^3	….			1	.
$3\ .\ 421^2.3$	….		159	516	9.
$3\ .\ 421\ .3^2$	….			113	67.
3^3	….				27
		74	778	091	597

Zusätze. 1. Der Cubus einer dekadischen Zahl hat entweder dreimal so viele Ziffern als diese Zahl, oder um zwei Ziffern oder um eine weniger.

Ist N eine nzifferige Zahl, also $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, so ist $N^3 \geqq 10^{3n-3}$, aber $< 10^{3n}$; der Cubus N^3 hat also mindestens $3n - 2$ und höchstens $3n$ Ziffern (§. 59).

2. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ ist, so folgt, daß man bei Decimalbrüchen vom Cubus des Zählers 3mal so viele Decimalen abschneiden müsse, als deren der gegebene Decimalbruch hat.

3. Erhebt man einen unvollständigen Decimalbruch zum Cubus, so erhält dieser so viele unzuverlässige Stellen, als die halbe Summe aus dem Zähler des zuverlässigen Theiles des Quadrates (§. 167, Zusatz 4) und dem Zähler des gegebenen Decimalbruches Ziffern hat (§. 118, Folges.).

II. Die Radicierung.

1. Wurzeln mit ganzen Exponenten.

§. 170. Aus einer Zahl a die nte Wurzel ausziehen, oder die Zahl a durch n radicieren, heißt aus der Potenz a und dem Exponenten n die Grundzahl suchen.

Die gegebene Potenz a heißt der Radicand, oder schlechthin die Zahl, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent, und die gesuchte Grundzahl p die nte Wurzel aus a. Man schreibt $\sqrt[n]{a} = p$.

Die zweite und dritte Wurzel einer Zahl nennt man bezüglich Quadratwurzel und Cubikwurzel.

Folgesätze. 1. Wenn man die Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert, so erhält man den Radicand.

Wenn $\sqrt[n]{a} = p$, so ist $p^n = a$ oder $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. Wenn man eine Potenz durch den Potenzexponenten radiciert, so erhält man die Grundzahl.

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl potenziert und durch dieselbe Zahl radiciert.

$$a = \sqrt[n]{(a)^n};\ a = (\sqrt[n]{a})^n .$$

Folgt aus 2. und 1.

Hiernach kann jede Zahl in Form einer Wurzel dargestellt werden; z. B. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

Das Potenzieren und das Radicieren sind demnach einander entgegengesetzt, und zwar ist das Potenzieren eine directe, das Radicieren eine indirecte Operation.

4. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst.

$$\text{Weil } a^1 = a, \text{ so ist } \sqrt[1]{a} = a.$$

Für die erste Wurzel wird daher weder der Exponent 1, noch das Wurzelzeichen angeschrieben. Bei der zweiten oder Quadratwurzel wird das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben, so daß $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt[2]{a}$ bedeutet.

5. Jede Wurzel aus 1 ist wieder 1.

Weil $1^m = 1$, so ist $\sqrt[m]{1} = 1$.

§. **171**. Damit das Radicieren ausführbar sei, muß sich der Radicand in so viele gleiche Factoren zerlegen lassen, wie der Wurzelexponent anzeigt. Dieses ist aber in dem bisher betrachteten Zahlengebiete nur dann möglich, wenn es eine ganze oder gebrochene (positive oder negative) Zahl gibt, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den gegebenen Radicand hervorbringt. Diese Bedingung wird daher vorläufig bei allen folgenden Sätzen vorausgesetzt werden.

Grundoperationen mit Wurzeln.

§. 172. Mit Wurzeln werden die Grundoperationen nach denselben Regeln wie mit allgemeinen Größen überhaupt vorgenommen. Eine Abkürzung des Verfahrens kann nur in besonderen Fällen mit Anwendung der folgenden Sätze eintreten:

1. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Producte der Radicande auszieht.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Beweis. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n}$ (§. 170, Folges. 3)

$$= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n} \text{ (§. 161, 1)}$$

$$= \sqrt[n]{ab} \text{ (§. 170).}$$

Zusatz. Nach diesem Satze kann man mit Beiziehung von §. 170, Folges. 3 jeden Factor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, indem man ihn zur Potenz des Wurzelexponenten erhebt und diese Potenz mit dem Radicand multipliciert.

Z. B. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$

2. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Quotienten der Radicande auszieht.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Der Beweis wird durch Anwendung von §. 161, 2 ähnlich wie bei 1. geführt.

Folgesatz. Der reciproke Werth der Wurzel einer Zahl ist gleich der gleichvielten Wurzel aus dem reciproken Werthe dieser Zahl.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}.$$

Potenzieren von Wurzeln.

§. **173**. Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radicand damit potenziert.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Beweis.

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{\left[(\sqrt[n]{a})^m\right]^n}$ (§. 170, Folg. 3) $= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^{mn}}$ (§. 162)

$= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^{nm}}$ (§. 32). $\sqrt[n]{\left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^m}$ (§. 162, Folg. 1.)

$= \sqrt[n]{a^m}$ (§. 170, Folges. 1).

Folgesatz. Es ist gleichgiltig, in welcher Ordnung eine Zahl nach einander potenziert und radiciert wird.

Vorzeichen der Wurzeln.

§. **174.** 1. Eine gerade Wurzel aus einem positiven Radicand kann positiv oder negativ sein.

2. Eine ungerade Wurzel aus einem positiven Radicand ist immer positiv.

3. Eine ungerade Wurzel aus einem negativen Radicand ist immer negativ.

Beweis. Nach §. 160 ist

$$(\pm p)^{2n} = +a, \quad (+q)^{2n+1} = +b, \quad (-q)^{2n+1} = -b,$$

wo a und b die durch Potenzierung sich ergebenden Zahlenwerthe bedeuten. Daraus aber folgt nach §. 170, Folges. 2

$$1.\ \sqrt[2n]{+a} + \pm p, \quad 2.\ \sqrt[2n+1]{+b} = +q, \quad 3.\ \sqrt[2n+1]{-b} = -q.$$

Zusatz. Die Bedeutung von $\sqrt[2n]{-a}$ wird weiter unten (§. 194) besonders untersucht werden.

Radicieren von Producten und Quotienten.

§. **175.** 1. Ein Product wird durch eine Zahl radiciert, indem man jeden Factor dadurch radiciert.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}.$$

Folgt aus der Umkehrung der Gleichung in §. 172, 1.

Zusatz. Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn der Radicand einen Factor enthält, aus dem sich die verlangte Wurzel ausziehen läßt, diesen Factor vom Wurzelzeichen befreien.

Z. B. $\sqrt[n]{a^n \,.\, b} = \sqrt[n]{a^n} \,.\, \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$

2. Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl radiciert, indem man Dividend und Divisor dadurch radiciert.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Folgt aus der Umkehrung der Gleichung in §. 172, 2.

Folgesätze. Die Wurzel aus dem reciproken Werthe einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe der gleichvielten Wurzel dieser Zahl.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}.$$

Radicieren von Potenzen.

§. 176. Eine Potenz wird radiciert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert, sobald die Division aufgeht.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n} \cdot n}} \text{ (§. 42, Folgeſ. 3)} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} \text{ (§. 162, Folgeſ. 1)}$$
$$= a^{\frac{m}{n}} \text{ (§. 170, Folgeſ. 1).}$$

Zusatz. Dieser Lehrsatz wurde hier auf den Fall beschränkt, daß m durch n theilbar, also $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, weil die bisherige Erklärung der Potenz nur ganze Potenzexponenten zuläßt.

§. 177. Die Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliciert, oder für den Fall, daß die Division aufgeht, beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Es ist

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}.$$

Zusätze. 1. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Wurzel in eine andere umformen, deren Wurzelexponent ein Vielfaches des gegebenen Wurzelexponenten ist, folglich auch zwei oder mehrere Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darstellen; b) jede Wurzel, in welcher der Wurzel- und der Potenzexponent ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

Sind z. B. die Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$, gegeben, so ist 30 ihr kleinster gemeinschaftlicher Wurzelexponent und man hat

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{b^{15}}, \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}}, \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

2. Da sich je zwei Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darstellen lassen, so können die in §. 172 für das Multiplicieren und Dividieren der Wurzeln gegebenen Regeln auf Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten angewendet werden.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m};$$
$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} : \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n : b^m}.$$

3. Eine Wurzel mit negativem Wurzelexponenten ist gleich dem reciproken Werthe derselben Wurzel mit positivem Wurzelexponenten.

Es ist $\quad \sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n.-1]{a^{1.-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, also

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Negative Wurzelexponenten pflegt man zu vermeiden, indem man das Negative in den Potenzexponenten verlegt.

Radicieren von Wurzeln.

§. **178**. Eine Wurzel wird radiciert, indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliciert.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Beweis. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}}$ (§. 170, Folgeſ. 3).

$$= \sqrt[mn]{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^{mn}}}$$

$$= \sqrt[mn]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mn}}}} \text{ (§. 173)}$$

$$= \sqrt[mn]{\sqrt[m]{a^m}} \text{ (§. 176)} = \sqrt[mn]{a} \text{ (§. 170, Folgeſ. 2).}$$

Folgeſätze. 1. Eine Zahl wird durch ein Product radiciert, indem man ſie nach einander durch jeden Factor radiciert.

Folgt aus der Umkehrung der Gleichung des früheren Lehrſatzes.

2. Es iſt gleichgiltig, in welcher Ordnung eine Zahl nach einander radiciert wird.

Denn $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[nm]{a}$ (§. 32) $= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}$ (Folgeſ, 1).

3. Eine Potenz wird auch radiciert (§. 176), indem man den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividiert, ſobald jene Division aufgeht.

$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[\frac{n}{m}\cdot m]{a^{\frac{m}{n}\cdot n}}$

Denn $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot n]{a^n}$ (§. 42, Folgeſ. 3) $= \sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[n]{a^n}}$ (Folgeſ. 1). $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$

$$= \sqrt[\frac{m}{n}]{a} \text{ (§. 170, Folgeſ. 2).}$$

2. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

§. **179**. Das Radicieren von Potenzen führt nach den in §. 176 und §. 178, Folgeſ. 3 erwieſenen Gleichungen

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ und } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}$$

für den Fall, daß m durch n nicht theilbar iſt, auf Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten. Um die Giltigkeit dieſer Regeln von den beſonderen Werthen der Exponenten m und n unabhängig zu machen, müſſen die Begriffe der Potenz und Wurzel ſo erweitert werden, daß ſie auch für gebrochene Exponenten ihre beſtimmte Bedeutung erhalten. Aus den obigen Gleichungen ergeben ſich nun unmittelbar folgende Erklärungen:

1. Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Wurzel aus der Grundzahl, als der Nenner anzeigt, potenziert mit dem Zähler.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

2. Eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Potenz des Radicands, als der Nenner anzeigt, radiciert durch den Zähler.

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Zusatz. Aus $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ folgt, daß sich jede Wurzel mit gebrochenem Exponenten als eine Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen läßt. Da man darum Wurzeln mit Bruchexponenten in die Rechnung gar nicht einzuführen pflegt, so beschränken wir uns hier auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. **180**. Alle bisher erwiesenen allgemeinen Sätze von den Potenzen gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Um dieses an den einzelnen Sätzen nachzuweisen, braucht man nur die Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzeln zu verwandeln, dann die angedeuteten Rechnungen auszuführen, und in den Resultaten die Wurzeln wieder in Potenzen mit Bruchexponenten umzuformen.

Z. B. $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}};$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}};$$

u. s. w.

Zusatz. Da sich alle Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten darstellen lassen, so ist die Lehre von den Wurzeln schon in den Sätzen von den Potenzen enthalten.

3. Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Radicierung.

§. **181**. 1. Gleiche Zahlen durch gleiche Zahlen radiciert geben Gleiches.

Wenn $a = b$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Folgt aus §. 10, 3.

Folgesätze. a) Wenn man alle Glieder einer Proportion durch dieselbe Zahl radiciert, so erhält man wieder eine Proportion.

Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{c : d}$, oder

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ (§. 175, 2).}$$

b) Die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$ (§. 146, Folges. 1), daher
$$b = \sqrt{ac} \text{ (§. 170, 2).}$$

2. Ungleiche Zahlen durch gleiche radiciert, geben Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Wenn $a > b$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Wäre $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[m]{b}$, so müßte bezüglich nach §. 165, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^m \overline{\overline{<}} (\sqrt[m]{b})^m$, also $a \overline{\overline{<}} b$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Ist $a \gtrless 1$, so ist bezüglich auch $\sqrt[m]{a} \gtrless 1$.

3. Gleiche Zahlen durch ungleiche Zahlen radiciert, geben Ungleiches und zwar mit dem entgegengesetzten oder mit demselben Ungleichheitszeichen, je nachdem der Radicand größer oder kleiner als 1 ist.

Wenn $m > n$ ist, so ist

1. für $a > 1$, $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$;

2. für $a < 1$, $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$.

Beweis. 1. Wäre für $a > 1$, $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{>}} \sqrt[n]{a}$, so wäre bezüglich nach §. 165, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^{mn} \overline{\overline{>}} (\sqrt[n]{a})^{mn}$, oder $a^n \overline{\overline{>}} a^m$, während wegen $m > n$ nach §. 165, 3. $a^m > a^n$ sein muß.

Eben so wird der Beweis für $a < 1$ geführt.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, durch ungleiche Zahlen bei entgegengesetztem Ungleichheitszeichen radiciert, geben Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen der Radicande.

Wenn $a > b$ und zugleich $a > 1$, ferner $n < m$ ist, so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Nach 3. ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, nach 2. ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$; folglich um so mehr $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Zusatz. In Bezug auf die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Potenzierung mit gebrochenen Exponenten gelten die in §. 165 für ganze Exponenten aufgestellten Sätze.

4. Irrationale Zahlen.

§. 182. Wenn die Wurzel aus einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie 1. auch keine gebrochene Zahl, sie läßt sich jedoch 2. durch einen Bruch annäherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit darstellen.

Beweis. 1. Es sei $p < \sqrt[n]{a} < p + 1$, so daß $\sqrt[n]{a}$ keine ganze Zahl ist. Dann läßt sich $\sqrt[n]{a}$ auch durch keinen Bruch vollkommen genau darstellen; denn wäre $\sqrt[n]{a}$ gleich dem Bruche $\frac{q}{r}$, den man sich auf die einfachste Form gebracht denken kann, so müßte $\left(\frac{q}{r}\right)^n = a =$ einer ganzen Zahl sein, was nach §. 161, Folges. 2 unmöglich ist.

2. Multipliciert man den Radicand a mit 10^{mn}, d. i. hängt man demselben mmal n Nullen an, und ist b die größte ganze Zahl, welche in $\sqrt[n]{a.10^{mn}}$ vorkommt, also

$$b < \sqrt[n]{a.10^{mn}} < b + 1, \text{ oder}$$

$$b < 10^m.\sqrt[n]{a} < b + 1 \text{ (§. 175, Zus. 1), so ist}$$

$$\frac{b}{10^m} < \sqrt[n]{a} < \frac{b+1}{10^m} \text{ (§. 57, 2).}$$

$\sqrt[n]{a}$ liegt also zwischen zwei Grenzen $\frac{b}{10^m}$ und $\frac{b+1}{10^m}$, deren Differenz $\frac{1}{10^m}$ ist. Setzt man für $\sqrt[n]{a}$ den Bruch $\frac{b}{10^m}$, so begeht man einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{10^m}$ ist. Da aber m beliebig groß, daher $\frac{1}{10^m}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\sqrt[n]{a}$ mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen.

$\frac{b}{10^m}$ heißt die untere, $\frac{b+1}{10^m}$ die obere Grenze von $\sqrt[n]{a}$.

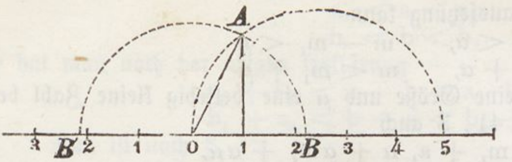
§. **183**. Zahlen, welche sich weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen vollkommen genau, wohl aber durch letztere annäherungsweise mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen (§. 137, Zus.). Im Gegensatze zu ihnen werden alle bisher aufgetretenen Zahlen, die ganzen und gebrochenen, rationale Zahlen genannt.

Eine allgemeine Wurzelgröße $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ heißt irrational, wenn der Potenzexponent m durch den Wurzelexponenten n nicht theilbar ist; sonst ist sie rational.

So wie die beiden ersten indirecten Rechnungsoperationen zu einer Erweiterung des Zahlenbegriffes führten, die Subtraction zu den negativen, die Division zu den gebrochenen Zahlen, so nöthigt auch das Radicieren, eine neue Zahlform, die irrationalen Zahlen, in das Zahlengebiet aufzunehmen.

§. **184**. Eine unbegrenzte gerade Linie stellt durch die von einem ihrer Puncte, dem Anfangspuncte, zu beiden Seiten gleich weit abstehenden Puncte die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen dar. Werden zwischen je zwei Puncte dieser Linie beliebig viele ebenfalls gleich weit von einander entfernte Puncte eingeschaltet, so wird durch diese die Reihe der Brüche mit beliebigen Nennern dargestellt. Je mehrere solche Puncte man einschaltet, desto näher rücken sie an einander, bis sie bei einer ins Unendliche fortschreitenden Einschaltung, wie die Irrationalzahlen es fordern, in eine stetige Zahlenlinie übergehen. Die Puncte dieser stetigen Linie bestimmen nun alle irrationalen Zahlen, wenn sich auch diese durch die nie stetig in einander überzuführenden Zahlen selbst nicht darstellen lassen.

Einzelne Irrationalzahlen, und zwar die irrationalen Quadratwurzeln, können mit Hilfe einer einfachen geometrischen Construction vollkommen genau dargestellt werden. Wird z. B. $\sqrt{5}$ gesucht, so darf man, da $1:\sqrt{5} = \sqrt{5}:5$ ist, nur die mittlere geometrische Proportionale zwischen 1 und 5 construieren. Zu diesem Ende beschreibt man über 05 der Zahlenlinie einen Halbkreis, errichtet in 1 eine Senkrechte, welche den Halbkreis in A trifft, und zieht die Gerade 0A, welche nach den Lehren der Planimetrie (Lehrbuch der Geometrie §. 104) die mittlere geometrische Proportionale zwischen 01 und 05 ist. Macht man nun $0B = 0B' = 0A$, so ist durch den Punct B der Zahlenlinie die Zahl $+\sqrt{5}$ und durch den Punct B' die Zahl $-\sqrt{5}$ genau bestimmt.



Rechnungsoperationen mit irrationalen Zahlen.

§. **185.** Um die irrationalen Zahlen der Rechnung unterziehen zu können, muß man zuerst die Begriffe der Rechnungsoperationen entsprechend erweitern und dann zeigen, daß die für rationale Zahlen erwiesenen Sätze auch für irrationale giltig sind.

§. **186.** Vorbereitende Sätze.

1. Von jeder noch so großen gegebenen Größe a läßt sich immer irgend ein Theil (der mte Theil) angeben, welcher kleiner ist als jede noch so kleine gegebene Größe b.

Je größer m wird, desto kleiner wird der Quotient $\frac{a}{m}$. Da nun m beliebig groß angenommen werden kann, so kann auch $\frac{a}{m}$ beliebig klein, daher kleiner als jede gegebene Größe b gemacht werden.

2. Lassen sich mehrere Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ einzeln kleiner machen als jede noch so kleine gegebene Größe, so läßt sich auch

1) ihre Summe,

2) die Summe von beliebigen Vielfachen derselben kleiner machen als jede noch so kleine gegebene Größe.

Beweis. 1) Ist b irgend eine noch so kleine Größe, so kann nach der Voraussetzung

$$a_1 < \frac{b}{n}, \; a_2 < \frac{b}{n}, \; a_3 < \frac{b}{n}, \ldots a_n < \frac{b}{n}$$

werden, woraus nach §. 16, 3

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \frac{b}{n} + \frac{b}{n} + \frac{b}{n} + \ldots + \frac{b}{n}, \text{ oder}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n < b$$

folgt.

2) Sind $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ beliebig große Zahlen, so läßt sich nach der Voraussetzung

$$a_1 < \frac{b}{m_1 n}, \; a_2 < \frac{b}{m_2 n}, \ldots a_n < \frac{b}{m_n n}, \text{ oder}$$

$$m_1 a_1 < \frac{b}{n}, \; m_2 a_2 < \frac{b}{n}, \ldots m_n a_n < \frac{b}{n}$$

machen, woraus, wie früher

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n < b \text{ folgt.}$$

3. Läßt sich die Differenz zweier Größen $a - a_1$ und die Differenz zweier Zahlen $m - m_1$ bezüglich kleiner machen als jede noch so kleine Größe oder Zahl, so läßt sich auch die Dif-

ferenz der Producte $am - a_1 m_1$ kleiner machen als jede noch so kleine gegebene Größe.

Beweis. Nach der Voraussetzung kann

$$a - a_1 < \alpha, \qquad m - m_1 < \mu$$

oder
$$a < a_1 + \alpha, \qquad m < m_1 + \mu$$

werden, wo α eine beliebig kleine Größe und μ eine beliebig kleine Zahl bedeutet. Daraus folgt nach §. 41, 3 auch

$$am < a_1 m_1 + a_1 \mu + \alpha m_1 + \alpha \mu,$$

und nach §. 30, 2

$$am - a_1 m_1 < a_1 \mu + \alpha m_1 + \alpha \mu.$$

Die Summe der Vielfachen $a_1 \mu + \alpha m_1 + \alpha \mu$ aber läßt sich nach 2. beliebig klein machen, also kann auch $am - a_1 m_1$ kleiner als jede noch so kleine gegebene Größe gemacht werden.

4. Liegen zwei Größen zwischen denselben zwei veränderlichen Grenzen und kann die Differenz dieser Grenzen der Null beliebig nahe gebracht werden, so sind die beiden Größen einander gleich.

Beweis. Ist $p < a < q$ und $p < b < q$, und kann die Differenz $q - p$ der Null beliebig genähert, also kleiner als jede noch so kleine gegebene Größe gemacht werden, so ist $a = b$. Denn wären a und b ungleich und wäre d ihre Differenz, wo d eine unveränderliche von 0 verschiedene Größe bezeichnet, so könnte, damit a und b stets zwischen den Grenzen p und q eingeschlossen bleiben, die Differenz $q - p$ nicht kleiner werden als d, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

5. Liegen zwei Größen zwischen denselben zwei veränderlichen Grenzen und kann der Quotient dieser Grenzen der Einheit beliebig nahe gebracht werden, so sind die zwei Größen einander gleich.

Beweis. Ist $p < a < q$ und $p < b < q$ und kann der Quotient $\frac{q}{p}$ der Einheit beliebig genähert werden, so ist $a = b$. Denn wären a und b ungleich, und zwar $a > b$, so daß $\frac{a}{b} = 1 + d$ wäre, wo d eine unveränderliche von 0 verschiedene Größe bedeutet, so müßte, damit a und b zwischen den Grenzen p und q eingeschlossen bleiben, damit also $q > a$ und $p < b$, folglich $\frac{q}{p} > \frac{a}{b}$ sein könne, der Quotient $\frac{q}{p}$ stets größer als $1 + d$ bleiben, was aber der Voraussetzung widerspricht.

Folgesatz. Zwischen zwei veränderlichen Grenzen, deren Differenz der Null, oder deren Quotient der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, liegt daher nur eine einzige Größe.

Zusatz. Was hier von Größen im allgemeinen erwiesen wurde, gilt auch von reinen Zahlen.

§. **187**. Summen von irrationalen Zahlen.

Unter der Summe zweier irrationaler Zahlen versteht man diejenige Zahl, welche die Summen der unteren und der oberen Grenzen derselben zu Grenzen hat.

Die Summe zweier irrationaler Zahlen bleibt unverändert, wenn man die Summanden vertauscht.

Beweis. Sind a und b zwei irrationale Zahlen, und a_1 und a_2, b_1 und b_2 ihre bezüglichen veränderlichen Grenzen, also

$$a_1 < a < a_2,$$
$$b_1 < b < b_2,$$

so hat man nach der obigen Erklärung

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2, \text{ und}$$
$$b_1 + a_1 < b + a < b_2 + a_2.$$

Nun ist nach §. 12

$$a_1 + b_1 = b_1 + a_1,$$
$$a_2 + b_2 = b_2 + a_2;$$

also liegen $a + b$ und $b + a$ zwischen denselben veränderlichen Grenzen. Man hat, um die Gleichheit der Summen $a + b$ und $b + a$ nachzuweisen, nur noch zu zeigen, daß sich die Differenz dieser Grenzen der Null beliebig nähern kann. Es ist

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1).$$

Da nun nach der Voraussetzung die Zahlen $a_2 - a_1$ und $b_2 - b_1$ einzeln kleiner als jede noch so kleine Zahl werden können, so läßt sich nach §. 186, 2 auch ihre Summe $(a_2 - a_1) + b_2 - b_1)$ kleiner machen als jede noch so kleine angebbare Zahl; folglich ist nach §. 186, 4

$$a + b = b + a.$$

§. 188. Producte von irrationalen Zahlen.

Unter dem *Producte zweier irrationaler Zahlen* versteht man diejenige Zahl, welche die Producte der unteren und der oberen Grenzen derselben zu Grenzen hat.

Das Product zweier irrationaler Zahlen bleibt unverändert, wenn man die Factoren vertauscht.

Beweis. Haben a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 dieselbe Bedeutung wie in §. 187, so daß

$$a_1 < a < a_2,$$
$$b_1 < b < b_2$$

ist, so hat man nach obiger Erkärung

$$a_1\, b_1 < ab < a_2\, b_2, \text{ und}$$
$$b_1\, a_1 < ba > b_2\, a_2.$$

Es ist aber $a_1\, b_1 = b_1\, a_1$ und $a_2\, b_2 = b_2\, a_2$ (§. 32), folglich fallen ab und ba zwischen dieselben veränderlichen Grenzen. Da nun nach §. 186, 3 die Differenz dieser Grenzen $a_2\, b_2 - a_1\, b_1$ kleiner als jede noch so kleine Zahl gemacht werden kann, so ist nach §. 186, 4

$$ab = ba.$$

§. 189. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Unter einer *Potenz mit einem irrationalen Exponenten* versteht man diejenige Zahl, welche die Potenzen zu Grenzen hat, die man erhält, indem man die Grundzahl mit den Grenzen des irrationalen Exponenten potenziert.

Die für rationale Potenzexponenten erwiesenen Gleichungen

$$1.\ p^a \cdot p^b = p^{a+b} \text{ und } 2.\ (p^a)^b = p^{ab}$$

gelten auch, wenn die Exponenten a und b irrationale Zahlen sind.

Beweis. Es ist erlaubt, hier $p > 1$ vorauszusetzen, weil sich eine Potenz, in welcher $p < 1$ ist, durch die Transformation $p^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^x}$ immer auf eine Potenz, deren Grundzahl > 1 ist, zurückführen läßt.

1. Sind nun a_1 und a_2, b_1 und b_2 bezüglich die Grenzen der Irrationalzahlen a und b, so daß

$$a_1 < a < a_2,$$
$$b_1 < b < b_2$$

ist, so hat man nach der obigen Erklärung

$$p^{a_1} < p^a < p^{a_2},$$
$$p^{b_1} < p^b < p^{b_2};$$

daher durch Multiplication

$$p^{a_1+b_1} < p^a \cdot p^b < p^{a_2+b_2}.$$

Es ist aber auch

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2,$$

daher $$p^{a_1+b_1} < p^{a+b} < p^{a_2+b_2}.$$

Die Zahlen $p^a \cdot p^b$ und p^{a+b} liegen somit zwischen denselben veränderlichen Grenzen $p^{a_1+b_1}$ und $p^{a_2+b_2}$.

Da nun der Quotient dieser Grenzen

$$\frac{p^{a_2+b_2}}{p^{a_1+b_1}} = p^{(a_2+b_2)-(a_1+b_1)} = p^{(a_2-a_1)+(b_2-b_1)},$$

weil sich $(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)$ nach §. 186, 2 kleiner machen läßt als jede noch so kleine Zahl, p^0 d. i. der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, so ist nach §. 186, 5

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}.$$

2. Aus der Voraussetzung folgt

$$p^{a_1} < p^a < p^{a_2},$$

daher auch

$$(p^{a_1})^{b_1} < (p^a)^b < (p^{a_2})^{b_2}$$

oder

$$p^{a_1 b_1} < (p^a)^b < p^{a_2 b_2}.$$

Es ist aber auch

$$a_1 b_1 < ab < a_2 b_2,$$

daher

$$p^{a_1 b_1} < p^{a b} < p^{a_2 b_2}.$$

Die Zahlen $(p^a)^b$ und p^{ab} liegen also zwischen denselben veränderlichen Grenzen $p^{a_1 b_1}$ und $p^{a_2 b_2}$. Da nun der Quotient dieser Grenzen

$$\frac{p^{a_2 b_2}}{p^{a_1 b_1}} = p^{a_2 b_2 - a_1 b_1},$$

weil sich $a_2 b_2 - a_1 b_1$ nach §. 186, 3 kleiner machen läßt als jede noch so kleine Zahl, p^0 d. i. der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, so ist nach §. 186, 5

$$(p^a)^b = p^{ab}.$$

§. **190**. Alle bisher für rationale Zahlen erwiesenen allgemeinen Sätze gelten auch für irrationale Zahlen.

Beweis. a) Alle von den Summen, Differenzen, Producten und Quotienten (Brüchen und Verhältnissen) erwiesenen Lehrsätze beruhen auf den beiden Sätzen über die Vertauschbarkeit der Summanden und der Factoren; diese aber gelten nach §§. 187 und 188 auch für irrationale Zahlen.

b) Auf denselben zwei Sätzen beruhen auch alle bisherigen Lehrsätze über Potenzen, unter der Voraussetzung, daß die Exponenten rational sind; sie gelten daher auch für Potenzen irrationaler Zahlen, insofern nur die Exponenten rational sind.

c) Alle Sätze in Bezug auf die Beschaffenheit der Potenzexponenten lassen sich auf die beiden Grundformeln $p^a \cdot p^b = p^{a+b}$ und $(p^a)^b = p^{ab}$ zurückführen; diese aber gelten nach §. 189 auch für irrationale Exponenten; mithin gelten alle für Potenzen mit rationalen Exponenten erwiesenen Sätze auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Zusatz. Hiernach sind auch die in den Schlußsätzen des §. 137, Zusatz, §. 140 und §. 171 bezüglich der Verhältnisse, Proportionen und Wurzeln gemachten Vorbehalte aufgehoben.

§. **191.** Aufgabe. Einen Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, ohne Aenderung seines Werthes mit einem rationalen Nenner darzustellen. (Rationalmachen des Nenners.)

Der vorgelegte Bruch kann eine der folgenden Formen haben:

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}},\ \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},\ \frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[m]{b^q}}.$$

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}$, wobei $m > n$ ist, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

Z. B.

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m\sqrt[3]{a^2}}{a};\ \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt{a}.\sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\sqrt[10]{a^9}}{a}.$$

2. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ mit einem rationellen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Es ist

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z\,(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})\,(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z\,(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Z. B.

$$\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3\,(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5\,(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})\,(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \ldots$$

3. Um einen Bruch von der Form

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}} = \frac{Z}{\sqrt[mn]{a^{np}} \pm \sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{Z}{\sqrt[r]{A} \pm \sqrt[r]{B}},$$

wo der Kürze halber $mn = r$, $a^{np} = A$ und $b^{mq} = B$ gesetzt wird, mit einem rationellen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Polynom

$$\sqrt[r]{A^{r-1}} \mp \sqrt[r]{A^{r-2}.B} + \sqrt[r]{A^{r-3}.B^2} \mp \ldots (\mp 1)^{r-2}\sqrt[r]{A.B^{r-2}} + (\mp 1)^{r-1}\sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

Man erhält dadurch $A \pm B$ als den neuen Nenner.
Z. B.

$$\frac{Z}{\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}}=\frac{Z\,(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3 b}+\sqrt[5]{a^2 b^2}+\sqrt[5]{a b^3}+\sqrt[5]{b^4})}{a-b}.$$

§. **192**. Aufgabe. Die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen, von welchen die eine irrational ist, in eine einzige Quadratwurzel zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ die gegebene Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln, wobei a als positiv und größer als $\sqrt{b}$ vorausgesetzt wird, so hat man

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2-b},$$

daher, wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}.$$

Diese Umformung läßt sich besonders dann mit Vortheil anwenden, wenn $a^2 - b$ eine vollständige Quadratwurzel ist.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{8+2\sqrt{16-7}}=\sqrt{8+2\sqrt{9}}=\sqrt{14};$$
$$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=\sqrt{12-2\sqrt{36-11}}=\sqrt{12-2\sqrt{25}}=\sqrt{2}.$$

§. **193**. Aufgabe. Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ die gegebene Quadratwurzel, so hat man, wenn a positiv und $a > \sqrt{b}$ ist, nach §. 192

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

daher durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

oder

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Diese Umformung ist nur dann vortheilhaft, wenn $a^2 - b$ eine vollständige Quadratzahl ist.

Z. B. $\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{1}}{2}}=\pm(\sqrt{2}+1);$

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}}=\pm(3-\sqrt{2}).$$

Zusätze. 1. Wenn die beiden Glieder des Binoms $a \pm \sqrt{b}$ einen gemeinschaftlichen irrationalen Factor haben, so wird derselbe vor der Transformation herausgehoben. Z. B.

$$\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}=\sqrt[4]{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

2. Ist $a < \sqrt{b}$, so kann auch da die Formel für $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ angewendet werden, wenn man für $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ den gleichen Ausdruck $\sqrt{\sqrt{b} + a}$ setzt und dann $\sqrt{b}$ als Factor heraushebt. Denn dadurch erhält man

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b}}},$$

wo $a^2 < b$, also $\frac{a^2}{b} < 1$, somit $1 > \sqrt{\frac{a^2}{b}}$ ist.

3. B.

$$\sqrt{12 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{4\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = 2\sqrt[4]{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}\,(\sqrt{3} + 1).$$

5. Imaginäre Zahlen.

§. **194**. In §. 174 blieb noch der Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ zu untersuchen übrig. Da weder eine positive, noch eine negative ganze, gebrochene oder irrationale Zahl, noch auch Null, mit einer geraden Zahl potenziert, eine negative Zahl hervorbringen kann, so bedeutet $\sqrt[2n]{-a}$ eine Zahl, welche in der stetigen Folge der uns bis jetzt bekannten Zahlen nicht vorkommt. Eine Zahlform dieser neuen Art nennt man eine imaginäre Zahl, und im Gegensatze dazu bezeichnet man alle bisher betrachteten, nämlich die ganzen, gebrochenen, irrationalen sowohl positiven als negativen Zahlen, mit dem gemeinschaftlichen Namen reelle Zahlen.

Durch das Auftreten der imaginären Zahlform ist man genöthigt, in dem Zahlengebiete auch ihnen einen angemessenen Platz anzuweisen. Da $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}}$, ferner $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ ist, so handelt es sich zunächst um die Darstellung der Zahlform $\sqrt{-1}$, welche man die imaginäre Einheit nennt und häufig mit dem Buchstaben i bezeichnet.

§. **195**. Stellt XX′ die unbegrenzte Zahlenlinie, OX die positive und OX′ die negative Richtung vor, so nimmt der Punct O die Stelle der Null ein; alle denkbaren positiven ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen haben auf OX, eben so alle negativen Zahlen auf OX′ ihre Stelle und sind dort bestimmbar. Eine Erweiterung des Zahlengebietes in der Längenrichtung der Zahlenlinie ist nicht möglich, weil dieselbe in dieser Richtung lückenlos bereits durch die reellen Zahlen ausgefüllt wird. Es bleibt daher, um auch die imaginären Zahlen darzustellen, bloß die seitliche Erweiterung übrig, d. i. man muß aus der Zahlenlinie in eine Zahlenebene hinaustreten.

Errichtet man in O auf XX′ die Senkrechte YY′ und beschreibt aus O mit der Längeneinheit OA = 1 als Halbmesser einen Kreis, so ist OA = + 1, OA′ = − 1; ferner ist nach den Lehren der Planimetrie (Lehrbuch der Geometrie §. 151) sowohl OB als OB′ die mittlere geometrische Proportionale zwischen OA und OA′, d. i. zwischen + 1 und − 1; da nun diese nach §. 181, 1. b) gleich $\pm \sqrt{+1 . -1} = \pm \sqrt{-1}$ ist, so stellen, wenn OY als die positive, OY' als die negative Richtung angenommen wird, OB und OB' bezüglich die Ausdrücke $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ dar. Die imaginäre Einheit $\sqrt{-1} = i$ bedeutet demnach eine Längeneinheit, welche vom Nullpuncte aus seitwärts von der ursprünglichen Zahlenlinie auf die darauf senkrechte Linie aufgetragen wird.

Trägt man eben so auf YY' von O aus nach oben und nach unten u Längeneinheiten auf, wo u irgend eine reelle Zahl bedeutet, so stellen die erhaltenen Strecken bezüglich die imaginären Zahlen $+u\sqrt{-1}$ und $-u\sqrt{-1}$ dar. Die unbegrenzte Senkrechte YY' heißt darum die Linie der imaginären Zahlen.

$\sqrt{-1}$ wird auch die laterale Einheit und $u\sqrt{-1}$ eine laterale Zahl genannt.

Es ist von selbst klar, daß, wenn man die Linie der imaginären Zahlen YY' als die ursprüngliche Zahlenlinie betrachtet, die ihr laterale Zahlenlinie in die Linie der reellen Zahlen fällt. Die einer imaginären Zahl entsprechende laterale Zahl ist demnach reell; nämlich

$$(\sqrt{-1})\sqrt{-1} = -1, \quad (-\sqrt{-1})\sqrt{-1} = +1;$$

und allgemein

$$(u\sqrt{-1})\sqrt{-1} = -u, \quad (-u\sqrt{-1})\sqrt{-1} = +u.$$

Die vollständige Untersuchung der imaginären Zahlen gehört nicht in das Gebiet der Elementar-Mathematik. Hier sollen daher nur einige der einfacheren Verbindungen dieser Zahlen betrachtet werden.

Rechnungsoperationen mit imaginären Zahlen.

§. **196**. Aus der in §. 195 enthaltenen Darstellung der imaginären Zahlen und den allgemeinen Begriffen der Addition und Subtraction folgt:

$$a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a+b)\sqrt{-1};$$
$$a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = (a-b)\sqrt{-1}.$$

Die Summe und die Differenz zweier imaginärer Zahlen sind demnach wieder imaginär.

§. **197**. 1. Für die Multiplication von imaginären Zahlen muß zunächst der Begriff dieser Rechnungsart entsprechend erweitert werden. Imaginäre Zahlen multiplicieren heißt, in der Zahlenebene aus dem Multiplicand nach demselben Gesetze eine neue Zahl suchen, nach welchem der Multiplicator aus der positiven Einheit gebildet wurde.

$$1)\quad a\sqrt{-1} \,.\, b = ab\sqrt{-1}.$$

b ist aus der positiven Einheit entstanden, indem man dieselbe bmal als Summand setzte; man muß daher in der Zahlenebene auch $a\sqrt{-1}$ bmal als Summand setzen; folglich

$$a\sqrt{-1} \,.\, b = a\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} + \ldots \text{bmal} = ab\sqrt{-1}.$$

$$2)\quad a \,.\, b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1}.$$

$b\sqrt{-1}$ ist aus der positiven Einheit entstanden, indem man die ihr entsprechende laterale Einheit suchte und diese bmal als Summand setzte; man muß daher in der Zahlenebene auch die dem Multiplicand a entsprechende laterale Zahl $a\sqrt{-1}$ suchen und diese bmal als Summand setzen; folglich

$$a \,.\, b\sqrt{-1} = a\sqrt{-1} \,.\, b = ab\sqrt{-1}.$$

3) $a\sqrt{-1}.b\sqrt{-1} = (a\sqrt{-1})\sqrt{-1}.b = -a.b = -ab.$

Das Product aus einer imaginären und einer reellen Zahl ist demnach imaginär, das Product aus zwei imaginären Zahlen reell.

2. Setzt man in den letzten drei Gleichungen $ab = d$, daher $a = \frac{d}{b}$, so hat man folgeweise

$$\frac{d}{b}\sqrt{-1}.b = d\sqrt{-1};$$
$$\frac{d}{b}.b\sqrt{-1} = d\sqrt{-1};$$
$$\frac{d}{b}\sqrt{-1}.b\sqrt{-1} = -d, \text{ oder}$$
$$-\frac{d}{b}\sqrt{-1}.b\sqrt{-1} = d.$$

Daraus folgt nun nach der allgemeinen Erklärung der Division (§. 42)

$$1)\ \frac{d\sqrt{-1}}{b} = \frac{d}{b}\sqrt{-1};$$
$$2)\ \frac{d\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{d}{b};$$
$$3)\ \frac{d}{b\sqrt{-1}} = -\frac{p}{b}\sqrt{-1}.$$

Eine imaginäre und eine reelle Zahl geben daher einen imaginären, zwei imaginäre Zahlen einen reellen Quotienten.

Aus der zweiten Gleichung folgt auch, daß ein Bruch unverändert bleibt, wenn man den Zähler und den Nenner mit $\sqrt{-1}$ multipliciert, d. i. statt derselben die ihnen entsprechenden lateralen Zahlen setzt.

§. **198.** 1. Aus dem Begriffe einer Wurzelgröße (§. 170) folgt

$$(\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Ferner hat man

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2.\sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^3.\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = +1.$$

Allgemein ist, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1;\quad (\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1;\quad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

2. Es ist

$$(a\sqrt{-1})^2 = a\sqrt{-1}.a\sqrt{-1} = a^2.(\sqrt{-1})^2 = -a^2;$$
$$(a\sqrt{-1})^3 = (a\sqrt{-1})^2.a\sqrt{-1} = a^2(\sqrt{-1})^2.a\sqrt{-1}$$
$$= a^3.(\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1};$$
$$(a\sqrt{-1})^4 = (a\sqrt{-1})^3.a\sqrt{-1} = a^3(\sqrt{-1})^3.a\sqrt{-1}$$
$$= a^4(\sqrt{-1})^4 = a^4;$$

u. s. w.

allgemein $\quad (a\sqrt{-1})^n = a^n(\sqrt{-1})^n.$

Die **Potenz** einer imaginären Zahl ist demnach reell oder imaginär, je nachdem die bezügliche Potenz von $\sqrt{-1}$ reell oder imaginär ist.

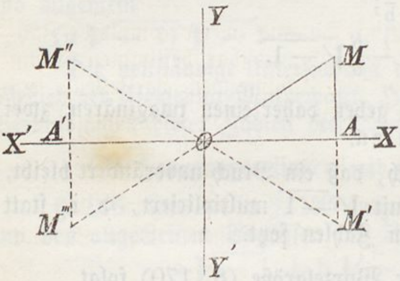
Zusatz. Um die in §§. 196, 197 und 198 angeführten Rechnungsregeln auf die imaginären Zahlen anzuwenden, müssen diese jedesmal vorher auf die Form $a\sqrt{-1}$ gebracht werden; z. B.

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,.\,\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-m^4} = \sqrt{m^4}\,.\,\sqrt{-1} = m^2\sqrt{-1}.$$

Complexe Zahlen.

§. **199**. Eine Zahl, welche aus einer reellen und einer imaginären Zahl besteht, wie $a + b\sqrt{-1}$, heißt eine **complexe Zahl**, im Gegensatze zu einer **reinen imaginären Zahl**, welche die Form $m\sqrt{-1}$ hat.

Um die **complexe Zahl** $a + b\sqrt{-1}$ **räumlich darzustellen**, sei XX′ die ursprüngliche Zahlenlinie und die in O darauf senkrechte YY′ die Linie der imaginären Zahlen. Man trage, wenn a und b positiv sind, auf XX′ von O aus die Länge OA als Darstellung der Zahl a auf, errichte in A eine Senkrechte und trage darauf nach oben die Länge AM als Darstellung der Zahl b auf. Zieht man OM, so erscheint die complexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ durch die Linie OM dargestellt, und der Punct M bezeichnet die Stelle, welche in der Zahlenebene dieser complexen Zahl entspricht.



Eben so überzeugt man sich, daß den complexen Zahlen $a - b\sqrt{-1}$, $-a + b\sqrt{-1}$, $-a - b\sqrt{-1}$ in der Zahlenebene bezüglich die Puncte M′, M″, M‴ entsprechen.

Wenn a und b alle reellen Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so durchläuft der Punct M, durch welchen die complexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ bestimmt wird, die ganze unbegrenzte Ebene.

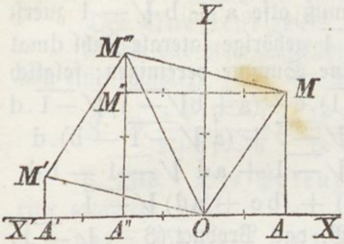
Der Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$ ist demnach die **allgemeine Form** für alle uns bekannt gewordenen Zahlen; er enthält für $a = o$ und $b = o$ die **Null**, für $b = o$ alle **reellen Zahlen**, für $a = o$ alle **rein imaginären Zahlen**, und wenn a und b von Null verschieden sind, alle **complexen Zahlen**.

Rechnungsoperationen mit complexen Zahlen.

§. **200**. 1. **Zwei complexe Zahlen** $a + b\sqrt{-1}$ und $c + d\sqrt{-1}$ **addieren** heißt, in der Zahlenebene vom ersten Summand $a + b\sqrt{-1}$ zuerst um c reelle Einheiten weiter zählen und von der dadurch entstandenen Zahl aus noch um b laterale Einheiten weiter zählen.

Es ist also

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = [(a + b\sqrt{-1}) + c] + d\sqrt{-1}$$
$$= (a + c + b\sqrt{-1}) + d\sqrt{-1} = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$



Sei z. B. die Summe $(2 + 3\sqrt{-1}) + (-4 + \sqrt{-1})$ zu bestimmen. Es ist $2 + 3\sqrt{-1} = OM$ und $-4 + \sqrt{-1} = OM'$. Man zähle nun von dem ersten Summand, d. i. vom Puncte M aus in der negativen Richtung der ursprünglichen Zahlenlinie um 4 Einheiten zurück, wodurch man zu dem Puncte M'' gelangt, und von hier aus in der lateralen Richtung um 1 Einheit nach aufwärts, wodurch man zu dem Puncte M''' gelangt; es ist demnach

$$(2 + 3\sqrt{-1}) + (-4 + \sqrt{-1}) = OM''' = -2 + 4\sqrt{-1}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Summe $(2 + 3\sqrt{-1}) + (-4 + \sqrt{-1})$ auf algebraischem Wege bestimmt, indem die reellen Bestandtheile der Summanden zu einander, und die imaginären zu einander addiert werden.

Nach der obigen Darstellung läßt sich die Summe zweier complexer Zahlen, ohne die Addition wirklich zu verrichten, unmittelbar bestimmen, wenn man mit den Linien OM und OM', welche die Summanden darstellen, ein Parallelogramm construiert und darin vom Nullpuncte O die Diagonale OM''' zieht; diese Diagonale stellt die Summe dar.

Die Summe zweier complexer Zahlen ist im allgemeinen wieder eine complexe Zahl. Eine Ausnahme bilden die complexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$, welche conjugierte Zahlen heißen. Ihre Summe ist reell; denn

$$(a + b\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1}) = 2a.$$

2. Nach der allgemeinen Erklärung des Subtrahierens folgt aus 1:

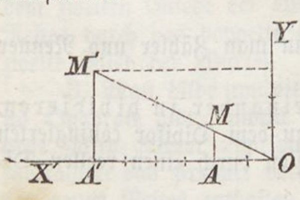
$$(a + b\sqrt{-1}) - (c + d\sqrt{-1}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{-1}.$$

Zwei complexe Zahlen geben im allgemeinen eine complexe Zahl zur Differenz.

§. 201. 1. Um eine complexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ mit einer reellen c zu multiplicieren, muß man die Zahl $a + b\sqrt{-1}$ cmal als Summand setzen; folglich

$$(a + b\sqrt{-1}) \,.\, c = (a + b\sqrt{-1}) + (a + b\sqrt{-1}) + \ldots \text{ cmal}$$
$$= ac + bc\sqrt{-1};$$

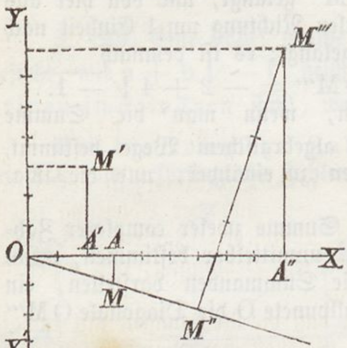
d. i. eine complexe Zahl wird mit einer reellen multipliciert, indem man sowohl den reellen als den imaginären Bestandtheil mit derselben multipliciert.



Ist z. B. $-2 + \sqrt{-1}$ mit 3 zu multiplicieren, so mache man in der Zahlenebene $OA = -2$, $AM = 1$, so daß $OM = -2 + \sqrt{-1}$ wird, und setze OM 3mal als Summand, wodurch man $OM' = -6 + 3\sqrt{-1}$ als das verlangte Product $(-2 + \sqrt{-1}) \,.\, 3$ erhält.

2. Ist $a + b\sqrt{-1}$ mit $c + d\sqrt{-1}$ zu multiplicieren, so hat man nach dem im §. 197, 1 gegebenen erweiterten Begriffe des Multiplicierens aus $a + b\sqrt{-1}$ nach demselben Gesetze eine Zahl zu bilden, wie $c + d\sqrt{-1}$ aus der positiven Einheit entstanden ist; man muß also $a + b\sqrt{-1}$ zuerst $c$mal als Summand, dann die zu $a + b\sqrt{-1}$ gehörige laterale Zahl $d$mal als Summand setzen und beide Ausdrücke in eine Summe vereinigen; folglich

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= (a + b\sqrt{-1}).c + (a + b\sqrt{-1})\sqrt{-1}.d \\ &= ac + bc\sqrt{-1} + (a\sqrt{-1} - b).d \\ &= ac + bc\sqrt{-1} + ad\sqrt{-1} - bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$



Um z. B. das Product $(3 - \sqrt{-1})(2 + 3\sqrt{-1})$ zu erhalten, stelle man in der Zahlenebene $3 - \sqrt{-1} = OM$ dar und wende darauf das Bildungsgesetz von $2 + 3\sqrt{-1}$ an; d. i. man denke sich OM als die neue positive Einheit, mache $OM'' = 2\,OM$, errichte in M'' eine Senkrechte und trage darauf $3\,OM$ auf, wodurch man zu dem Puncte M''' gelangt; dann ist $(3 - \sqrt{-1})(2 + 3\sqrt{-1}) = OM''' = 9 + 7\sqrt{-1}$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man das Product nach den Regeln der algebraischen Zahlen entwickelt; denn

$$(3 - \sqrt{-1})(2 + 3\sqrt{-1}) = 6 - 2\sqrt{-1} + 9\sqrt{-1} + 3 = 9 + 7\sqrt{-1}.$$

Das Product zweier complexer Zahlen ist im allgemeinen wieder eine complexe Zahl. Eine Ausnahme bilden zwei conjungierte Zahlen, deren Product reell ist; denn

$$(a + a\sqrt{-1})(a - b)\sqrt{-1}) = a^2 + b^2.$$

§. **202.** 1. Aus $(a + b\sqrt{-1}).m = am + bm\sqrt{-1}$ folgt nach §. 42

$$\frac{am + bm\sqrt{-1}}{m} = a + b\sqrt{-1};$$

d. i. eine complexe Zahl wird durch eine reelle Zahl dividiert, indem man sowohl den reellen als den imaginären Bestandtheil durch dieselbe dividiert.

2. Es ist ferner allgemein

$$\frac{m(a + b\sqrt{-1})}{n(a + b\sqrt{-1})} = \frac{m}{n};$$

d. i. ein Bruch (Quotient) bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.

Um daher zwei complexe Zahlen durch einander zu dividieren, darf man nur Dividend und Divisor mit der zu dem Divisor conjugierten Zahl multiplicieren, wodurch man auf eine Division durch einen reellen Divisor geführt wird.

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Der Quotient zweier complexer Zahlen ist wieder eine complexe Zahl.

Durch das oben angeführte Verfahren kann auch jeder Bruch, dessen Nenner eine complexe Zahl ist, mit einem reellen Nenner dargestellt werden.

Z. B. $\frac{3+\sqrt{-1}}{2+5\sqrt{-1}}=\frac{(3+\sqrt{-1})(2-5\sqrt{-1})}{(2+5\sqrt{-1})(2-5\sqrt{-1})}=\frac{11-13\sqrt{-1}}{29}$.

§. **203**. Die Potenz einer complexen Zahl ist immer wieder eine complexe Zahl.

$$(a+b\sqrt{-1})^2=(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})=(a^2-b^2)+2ab\sqrt{-1};$$
$$(a+b\sqrt{-1})^3=(a+b\sqrt{-1})^2(a+b\sqrt{-1})=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\sqrt{-1};$$

u. s. w.

Zusätze. 1. Die in §§. 192 und 193 für die Quadratwurzeln aus irrationalen Binomen abgeleiteten Formeln gelten, wie aus der Ableitung selbst hervorgeht, auch für die Quadratwurzeln aus complexen Zahlen, und zwar ist hier ihre Anwendung von der dort aufgestellten Bedingung, daß a positiv und größer als $\sqrt{b}$ sein muß, ganz unabhängig.

2. Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß die Rechnungen mit imaginären und complexen Zahlen nach denselben Gesetzen vorgenommen werden, welche für reelle Wurzeln gelten, wenn nur dabei die imaginären Zahlen auf die Form $a\sqrt{-1}$ gebracht worden sind.

6. Das Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. **204**. Aufgabe. Aus einem mehrgliedrigen algebraischen Ausdrucke die Quadratwurzel ausziehen.

Aus dem Gesetze (§. 166), nach welchem die Bestandtheile einer mehrgliedrigen Zahl in ihrem Quadrate zusammengestellt erscheinen, läßt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten Polynom folgendes Verfahren ableiten:

1. Das erste Glied des geordneten Polynoms ist das Quadrat des ersten Wurzelgliedes. Man findet daher das erste Glied der Wurzel, wenn man aus dem ersten Gliede des Radicands die Quadratwurzel auszieht.

2. Wird das Quadrat des gefundenen ersten Wurzelgliedes von dem Radicand subtrahiert, so enthalten die ersten zwei Glieder des Restes die Bestandtheile, welche aus dem zweiten Gliede der Wurzel hervorgehen, und zwar ist das erste Glied des Restes das Product aus dem doppelten ersten und aus dem zweiten Gliede der Wurzel. Dividiert man daher das erste Glied des Restes durch das doppelte gefundene erste Wurzelglied, so erhält man das zweite Glied der Wurzel.

3. Man bilde nun die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Quadrate gibt, indem man zu dem Doppelten der früheren Wurzel das neue Glied addiert und die Summe mit diesem Gliede multipliciert, und subtrahiere das Product von dem Reste des Polynoms. Die ersten zwei Glieder des neuen Restes enthalten die Bestandtheile, die das folgende Wurzelglied im

Quadrate gibt, und zwar zuerst das Product aus der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder und aus dem folgenden Gliede der Wurzel. Wird daher das erste Glied des letzten Restes durch die doppelte Summe der bereits gefundenen Wurzel dividiert, so erhält man das folgende Glied der Wurzel.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist das gegebene Polynom ein vollständiges Quadrat und die erhaltene Quadratwurzel rational: bleibt aber bei fortgesetztem Verfahren immer wieder ein Rest übrig, so ist die Wurzel irrational.

Beispiele.

$$1)\ \sqrt{x^4+6x^3-x^2-30x+25}=x^2+3x-5$$

$$\begin{array}{lll}
x^4 & & \\
- & & \\
\hline
+6x^3-x^2 & & :(2x^2+3x)\times 3x \\
+6x^3+9x^2 & & \\
- \quad - & & \\
\hline
 & -10x^2-30x+25 & :(2x^2+6x-5)\times -5 \\
 & 10x^2-30x+25 & \\
 & + \quad + \quad - & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$2)\ \sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\cdots$$

$$\begin{array}{ll}
1 & \\
- & \\
\hline
+x^2 & :\left(2+\frac{x^2}{2}\right)\times\frac{x^2}{2} \\
+x^2+\frac{x^4}{4} & \\
+ \quad - & \\
\hline
-\frac{x^4}{4} & :\left(2+x^2-\frac{x^4}{8}\right)\times-\frac{x^4}{8} \\
-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{64} & \\
+ \quad + \quad - & \\
\hline
+\frac{x^6}{8}-\frac{x^8}{64} & :\left(2+x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{16}\right)\times\frac{x^6}{16}
\end{array}$$

u. s. w.

Man sieht, daß hier die Operation ins Unendliche fortgesetzt werden kann. Soll jedoch die erhaltene Reihe zur Bestimmung von $\sqrt{1+x^2}$ in einem speciellen Falle anwendbar sein, so muß sich die Summe der Glieder um so mehr einer bestimmten Zahl nähern, je mehrere Glieder man nimmt, d. i. die Reihe muß convergieren (§. 270). Hier findet dieses für jedes $x < 1$, z. B. für $x = \frac{1}{10}$, statt.

§. **205.** Aufgabe. Aus einer dekadischen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann; die Zahl der Abtheilungen zeigt die Anzahl der Ziffern in der Wurzel an.

2. Man suche die größte Zahl, deren Quadrat in der ersten Abtheilung zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an.

3. Man subtrahiere das Quadrat der ersten Wurzelziffer von der ersten Abtheilung des Radicands, setze zu dem Reste die zweite Abtheilung herab und dividiere die dadurch gebildete Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel; den Quotienten schreibe man als neue Ziffer in die Wurzel und zugleich als Ergänzung zu dem Divisor.

4. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neuen Wurzelziffer, subtrahiere das Product sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer, setze zu dem Reste die folgende Abtheilung des Radicands herab und dividiere die dadurch entstehende Zahl durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel; den Quotienten setze man sowohl zu der Wurzel als zu dem Divisor.

5. Dieses Verfahren setze man fort, bis alle Abtheilungen des gegebenen Radicands in Rechnung gezogen worden sind. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist die Quadratwurzel rational; im entgegengesetzten Falle ist sie irrational, kann aber nach §. 182 mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen weiter entwickelt werden, wenn man jedem Reste zwei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 167.

Z. B.
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{5|94|38|44} & = & 2438 \\ 1\,94 & : & 4_4 \\ 18\,38 & : & 48_3 \\ 3\,89\,44 & : & 486_8 \\ = = = = & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{3|50} & = & 18\cdot708\ldots \\ 2\,50 & : & 2_8 \\ 2600 & : & 36_7 \\ 310000 & : & 3740_8 \\ 10736 & & \end{array}$$

Zusätze. 1. Da $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$ ist, so folgt, daß man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel nach demselben Verfahren auszieht, wie aus einer ganzen Zahl; nur muß man den Decimalbruch vom Decimalpuncte aus nach rechts und links in Abtheilungen von je zwei Stellen theilen, wobei die etwa nur eine Ziffer enthaltende letzte Abtheilung rechts durch Hinzufügung einer Null ergänzt wird, und in der Wurzel den Decimalpunct setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird.

Z. B.
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1|52\cdot27|56} & = & 12\cdot34 \\ 52 & : & 2_2 \\ 8\,27 & : & 24_3 \\ 98\,56 & : & 246_4 \\ = = = = & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{0\cdot00|01|5_0} & = & 0\cdot01224\ldots \\ 50 & : & 2_2 \\ 600 & : & 24_2 \\ 11600 & : & 244_4 \\ 1824 & & \end{array}$$

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, verwandelt man ihn entweder in einen solchen, dessen Nenner eine vollständige Quadratzahl ist, und zieht die Wurzel aus Zähler und Nenner; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel aus.

§. **206**. Aufgabe. Aus einem unvollständigen Decimalbruche die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Man kürze den Decimalbruch, wenn er nicht schon eine gerade Anzahl von Decimalen hat, um eine Stelle ab, und ziehe daraus die Quadratwurzel nach dem gewöhnlichen Verfahren, bis alle Abtheilungen in Rechnung gezogen wurden.

2. Um die weiteren Wurzelziffern zu erhalten, dividiere man den letzten Rest durch das Doppelte der bisher gefundenen Wurzel, indem man in dem Divisor die letzte Ziffer wegläßt und die abgekürzte Division anwendet. Man erhält dadurch mindestens noch so viele verläßliche Wurzelziffern, als die um 1 verkleinerte Anzahl der nach 1. gefundenen Wurzelziffern anzeigt.

Beweis. Hat der unvollständige Decimalbruch $2n$ Decimalen, so ist es gestattet, denselben mit 10^{2n} zu multiplicieren, d. i. ihn als eine ganze Zahl darzustellen, weil man dann nur die erhaltene Wurzel wieder durch 10^n zu dividieren braucht, und folglich sowohl die Ziffernfolge des Radicands als jene der Wurzel dieselbe bleibt.

Es sei nun A die dadurch entstehende ganze Zahl, die daher bis auf die Einer herab verläßliche Ziffern hat, und a die Quadratwurzel, die man aus A ohne Anhängung von Nullen erhält. Bezeichnet ferner $A + X$ den vollständigen Radicand und $a + x$ die ihm entsprechende vollständige Quadratwurzel, so muß
$$A + X = (a + x)^2, \text{ oder}$$
$$A + X = a^2 + 2ax + x^2$$
sein. Hieraus folgt
$$x = \frac{A - a^2}{2a} + \frac{X - x^2}{2a},$$
wo $A - a^2$ den letzten bei der Wurzelausziehung gebliebenen Rest, und $2a$ das Doppelte der bisher gefundenen Wurzel bedeutet.

Da sowohl $X < 1$ als $x < 1$, daher auch $X - x^2 < 1$ ist, so ist der Fehler $\frac{X - x^2}{2a}$, den man begeht, wenn für x der Quotient $\frac{A - a^2}{2a}$ gesetzt wird, kleiner als $\frac{1}{2a}$, daher um so mehr kleiner als $\frac{1}{a}$. Hat nun A m Abtheilungen von je zwei Ziffern, so ist a eine $m$ziffrige Zahl; $\frac{1}{a}$ gibt daher einen Quotienten, welcher erst in der $m$ten Decimalstelle eine geltende Ziffer hat, und es ist somit x durch $\frac{A - a^2}{2a}$ in $m - 1$ Decimalen genau bestimmt.

Wenn man daher, um den noch übrigen Theil der Wurzel x zu erhalten, den letzten Rest durch das Doppelte der bisher gefundenen Wurzel dividiert, so ist die Anzahl der aus dieser Division hervorgehenden verläßlichen Ziffern um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern der nach dem gewöhnlichen Verfahren bereits gefundenen Wurzel.

Z. B. $\sqrt{52|38{\cdot}07|82..} = 72{\cdot}37457..$

3 38	:	14₂
54 07	:	144₃
10 78 82	:	1446₇
66 13	:	1,4,4,7,4
8 23	:	
99		

Zusätze. 1. Durch das voranstehende Verfahren erhält man in der Quadratwurzel eines unvollständigen Decimalbruches, dessen letzte gegebene Abtheilung vollständig ist, im ungünstigsten Falle $2m - 1$ verläßliche geltende Ziffern, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen von je zwei Ziffern hat.

2. Das für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem unvollständigen Decimalbruche angegebene Verfahren kann auch angewendet werden, wenn man aus einer ganzen Zahl oder aus einem vollständigen Decimalbruche die

Quadratwurzel auf eine vorgeschriebene Anzahl von geltenden Ziffern zu bestimmen hat. Man sucht nämlich um eine Ziffer mehr als die halbe Anzahl der verlangten Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Quadratwurzelausziehung, die folgenden aber bestimmt man mittelst der abgekürzten Division.

Wenn die verlangte Anzahl von Ziffern ungerade ist, so wird die Hälfte von der um 1 größeren Zahl genommen.

Ist z. B. $\sqrt{60}$ mit 5 geltenden Ziffern darzustellen, so hat man folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{60} & = 7{\cdot}7\,4\,59\,.. \\ 1100 & : 1\,4_7 \\ 7100 & : 1\,5\,4_4 \\ 924 & : 1_{,}5_{,}4_{,}8 \\ 150 & \\ 11 & \end{array}$$

§. **207**. Aufgabe. **Eine irrationale Quadratwurzel durch die Näherungswerthe eines Kettenbruches zu bestimmen.**

Es sei $\sqrt{a}$ zu bestimmen. Man suche die größte darin enthaltene ganze Zahl q und setze $\sqrt{a} = q + \frac{1}{x_1}$, wo $\frac{1}{x_1} = \sqrt{a} - q < 1$, daher $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q} > 1$ sein muß. Nun suche man wieder die größte in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q}$ enthaltene ganze Zahl q_1 und setze $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $\frac{1}{x_2} < 1$ und $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} > 1$ sein muß.

Setzt man dieses Verfahren fort, und sind die größten in $x_2, x_3 \ldots$ enthaltenen ganzen Zahlen $q_2, q_3 \ldots$, so hat man

$$\sqrt{a} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{x_2} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$= q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{x_4} = \ldots$$

Durch die aus dem erhaltenen Kettenbruche hervorgehenden Näherungswerthe kann nun $\sqrt{a}$ mit jeder beliebigen Schärfe berechnet werden.

Ist z. B. $\sqrt{14}$ zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

$$\text{wo } x_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 2}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$\text{„ } x_2 = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\text{„ } x_3 = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 3}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$\text{„ } x_4 = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{14} - 3}{1} = 6 + \frac{1}{x_5},$$

$$\text{„ } x_5 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}, \text{ welches wieder } = x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

so daß von der zweiten Gleichung an dieselben Gleichungen immer wiederkehren. Man hat also

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Die Näherungswerthe sind:

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{4},\ \frac{101}{27},\ \frac{116}{31},\ \frac{333}{89},\ \frac{449}{120},\ \frac{3027}{809},\ \ldots$$

Setzt man $\sqrt{14} = \frac{3027}{809} = 3\cdot741656\ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{809^2} = \frac{1}{654481} = 0\cdot000001\ldots$; es ist also $\sqrt{14}$ auf 5 Decimalen genau bestimmt.

§. **208.** **Aufgabe.** Aus einem mehrgliedrigen algebraischen Ausdrucke die Cubikwurzel zu ziehen.

1. Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Gliede des geordneten Radicands; diese ist das erste Glied der Wurzel.

2. Man subtrahiere den Cubus dieses ersten Gliedes von dem Radicand, und dividiere das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat des ersten Wurzelgliedes; der Quotient ist das zweite Glied der Wurzel.

3. Man bilde die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des vorhergehenden Wurzelgliedes multipliciert mit dem neuen Gliede, das Dreifache des vorhergehenden Wurzelgliedes multipliciert mit dem Quadrate des neuen Gliedes und den Cubus dieses Gliedes, subtrahiere die Summe dieser drei Bestandtheile von dem früheren Reste des Radicands, und dividiere den neuen Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzelglieder; der Quotient ist das folgende Glied der Wurzel.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Cubikwurzel rational; bleibt ein Rest, so ist sie irrational.

Die Ableitung dieses Verfahrens aus §. 168 geschieht auf ähnliche Weise, wie im §. 204 das Verfahren der Quadratwurzelausziehung aus Polynomen aus §. 166 hergeleitet wurde.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{\ }[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27] = y^2 - 2y + 3$$

$$\begin{array}{l}
y^6 \\
- \\
\hline
-6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : \quad 3y^4 \\
-6y^5 + 12y^4 - 8y^3 \\
+ \quad - \quad + \\
\hline
+9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\
-9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 \\
- \quad + \quad - \quad + \quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

§. **209.** **Aufgabe.** Aus einer dekadischen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur zwei oder eine Ziffer haben kann.

2. Man suche die größte Zahl, deren Cubus in der höchsten Abtheilung vorkommt, und schreibe sie als erste Ziffer in die Cubikwurzel.

3. Man subtrahiere den Cubus der ersten Wurzelziffer von der ersten Abtheilung des Radicands, setze zu dem Reste die zweite Abtheilung herab, dividiere dann die dadurch entstehende Zahl mit Weglassung der letzten zwei Ziffern durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel.

4. Man bilde die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multiplicert mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer, und ihren Cubus; schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte und subtrahiere die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung des Radicands herab und dividiere die so gebildete Zahl durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel, wodurch man eine neue Ziffer der Wurzel erhält.

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen heruntergesetzt hat. Bleibt am Ende kein Rest, so ist die Cubikwurzel rational; sonst ist dieselbe irrational, kann jedoch in Decimalen mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man jedem Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt, und übrigens wie vorhin verfährt.

Z. B. 1) $\sqrt[3]{78|953|589} = 429$

$$
\begin{array}{lr}
 & 64 \\
\hline
 & 149{,}53 \quad : \quad 48 \ldots 3 \cdot 4^2 \\
3 \cdot 4^2 \cdot 2 \ldots & 96\,.. \\
3 \cdot 4 \cdot 2^2 \ldots & 48\,. \\
2^3 \ldots & 8 \\
\hline
 & 48655{,}89 : 5292 \ldots 3 \cdot 42^2 \\
3 \cdot 42^2 \cdot 9 \ldots & 47629\,.. \\
3 \cdot 42 \cdot 9^2 \ldots & 10206\,. \\
9^3 \ldots & 629 \\
\hline
 & '' \; '' \; '' \; '' \; '' \\
\end{array}
$$

2) $\sqrt[3]{570|138} = 82{\cdot}92..$

$$
\begin{array}{l}
512 \\
\hline
58138 \; : \; 192 \\
384.. \\
96. \\
8 \\
\hline
18770000 : 20172 \\
181548.. \\
19926. \\
729 \\
\hline
415211000 : 2061723 \\
4123446.. \\
9948. \\
8 \\
\hline
2766912
\end{array}
$$

Zusatz. Wie man beim Ausziehen der Cubikwurzel aus einem Decimal- und einem gemeinen Bruche zu verfahren habe, ersieht man leicht aus dem für das Quadratwurzelausziehen in §. 205, Zusatz 1 und 2 angegebenen Verfahren.

§. 210. Aufgabe. Aus einem unvollständigen Decimalbruche die Cubikwurzel auszuziehen.

1. Man kürze, wenn es erforderlich ist, den Decimalbruch auf eine oder zwei Stellen ab, damit die Anzahl seiner Decimalen ein Vielfaches von 3 sei, und ziehe daraus die Cubikwurzel nach dem gewöhnlichen Verfahren, bis man alle Abtheilungen in Rechnung gezogen hat.

2. Um die weiteren Wurzelziffern zu erhalten, dividiere man den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel mittelst der abgekürzten Division. Die Zahl der verläßlichen Ziffern, die man durch diese Division noch erhält, ist um 1 kleiner, als die Zahl der nach 1. bereits gefundenen Wurzelziffern.

Beweis. Der unvollständige Decimalbruch sei mit 3n Decimalen bekannt, und gebe mit 10^{3n} multipliciert die ganze Zahl A, welche darum bis auf die Einer herab genau ist. Es sei ferner a die Cubikwurzel, die man aus A ohne Anhängung von Nullen erhält. Bezeichnet man nun den vollständigen Radicand durch $A + X$, und dessen vollständige Cubikwurzel durch $a + x$, so muß

$$A + X = (a + x)^3, \text{ oder}$$
$$A + X = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

sein. Hieraus ergibt sich

$$x = \frac{A - a^3}{3a^2} - \frac{x^2}{a} + \frac{X - x^3}{3a^2},$$

worin $A - a^3$ der letzte bei der Wurzelausziehung gebliebene Rest, und $3a^2$ das dreifache Quadrat der bisher gefundenen Wurzel ist.

Um den Fehler zu beurtheilen, welcher begangen wird, wenn man für den noch abgängigen Wurzeltheil x den Quotienten $\frac{A - a^3}{3a^2}$ setzt, muß man die Grenzwerthe von $\frac{x^2}{a}$ und $\frac{X - x^3}{3a^2}$ untersuchen; diese sind $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{3a^2}$, weil $X < 1$ und $x < 1$ ist. Nun ist in jedem Falle $a < a^2$, folglich $\frac{1}{a} > \frac{1}{3a^2}$. Ueber den begangenen Fehler entscheidet daher allein der Werth von $\frac{1}{a}$, weil $\frac{1}{3a^2}$ als dagegen verschwindend nicht in Betracht kommt. Hat nun A m Abtheilungen von je drei Ziffern, so ist a eine m ziffrige Zahl; der Quotient $\frac{1}{a}$ wird somit erst in der mten Decimalstelle eine geltende Ziffer haben, folglich x durch $\frac{A - a^3}{3a^2}$ in $m - 1$ Decimalen genau bestimmt sein.

Wenn man daher, um den noch fehlenden Wurzeltheil x zu erhalten, den Rest durch das dreifache Quadrat der bisher gefundenen Wurzel dividiert, so ist die Zahl der aus dieser Division hervorgehenden verläßlichen Wurzelziffern um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern der nach dem gewöhnlichen Verfahren bereits gefundenen Wurzel.

Z. B. $\sqrt[3]{0{\cdot}083|066|534\ldots} = 0{\cdot}43632\ldots$

64
19066 : 48
144..
108.
27
3559534 : 5547
33282..
4644.
216
1846‚78 : 57‚0,288
135
21

Zusätze. 1. Durch das hier angeführte Verfahren erhält man in der Cubikwurzel eines unvollständigen Decimalbruches $2m - 1$ verläßliche geltende Ziffern, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen von je drei Ziffern hat.

2. Wie beim Ausziehen der Quadratwurzel (§. 206, Zus. 2), kann auch bei der Cubikwurzelausziehung das für unvollständige Decimalbrüche angegebene Verfahren auch bei ganzen Zahlen und vollständigen Decimalbrüchen angewendet werden, wenn die Wurzel nur eine vorgeschriebene Anzahl geltender Ziffern enthalten soll.

III. Die Logarithmierung.

1. Von den Logarithmen überhaupt.

§. **211**. Eine Zahl a durch eine andere Zahl b logarithmieren heißt den Potenzexponenten suchen, mit welchem b als Grundzahl potenziert werden muß, um a als Potenz zu geben. Die Zahl b ist die Grundzahl oder Basis, die als Potenz gegebene Zahl a heißt der Logarithmand, oder kurzweg die Zahl (Numerus), und der gesuchte Potenzexponent der Logarithmus. Ist $b^n = a$, so ist n der Logarithmus der Zahl a für die Basis b; man hat dafür die Bezeichnung:

$$n = \log_b a.$$

Werden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis b bezogen, so schreibt man statt des letzteren Ausdruckes kürzer $n = \log a$, wobei die Basis b als bekannt vorausgesetzt wird.

Dem Potenzieren entsprechen demnach zwei inverse Operationen, das Radicieren und das Logarithmieren.

Eine Potenzgröße von der Form b^x, worin der Exponent eine unbekannte Zahl ist, heißt eine Exponentialgröße.

§. **212**. Der Inbegriff der Logarithmen der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen für eine bestimmte Basis bildet ein logarithmisches System.

Da durch das Potenzieren einer reellen negativen Zahl nicht alle möglichen positiven Zahlen erzeugt werden können, jede Potenz von 1 aber wieder 1 ist, so kann nur eine reelle positive und von 1 verschiedene Zahl als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Es sind unendlich viele logarithmische Systeme möglich; in allen sind, wenn die Basis b positiv ist, die Logarithmen negativer Zahlen imaginär, indem b^n, welchen Werth auch immer n haben mag, nie einen negativen Zahlenwerth annehmen kann. Dadurch wird jedoch die Anwendung der Logarithmen nicht beschränkt, indem man, wo von negativen Zahlen die Logarithmen zu suchen sind, dieselben als absolute Zahlen betrachtet, und erst, nachdem die Logarithmanden gesucht worden, das Vorzeichen von diesen nachträglich bestimmt.

Im Gebrauche sind nur zwei logarithmische Systeme, nämlich das gemeine oder Briggische für die Basis 10, und das natürliche für die irrationale Basis 2·718281828.., welche man aus der Summierung der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

erhält und gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

§. **213**. 1. Für dieselbe Basis gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen; und umgekehrt: zu gleichen Logarithmen gehören auch gleiche Zahlen.

Ist b die Basis und $b^m = M$, $b^n = N$, so muß, wenn $M = N$ ist, auch $m = n$, d. i. $\log M = \log N$ sein. (Folgt indirect aus §. 165, 3.) Ist umgekehrt $\log M = \log N$, also $m = n$, so muß nach §. 165, 1 auch $b^m = b^n$, d. i. $M = N$ sein.

2. Für eine Basis, welche größer als 1 ist, gehört zu der größeren Zahl auch ein größerer Logarithmus; und umgekehrt: zu dem größeren Logarithmus gehört auch eine größere Zahl.

Ist $b^m = M$, $b^n = N$ und $M > N$, so muß für $b > 1$ auch $m > n$, also $\log M > \log N$ sein. (Folgt indirect aus 1. und aus §. 165, 3.) Ist umgekehrt $\log M > \log N$, so folgt eben so aus §. 165, 3. $M > N$.

3. Der Logarithmus der Basis in Bezug auf diese Basis selbst ist gleich 1.

Es ist $b^1 = b$, daher, wenn b die Basis ist, $\log b = 1$.

4. Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0.

Es ist $b^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$.

5. Der Logarithmus von 0 ist negativ unendlich.

Da $b^{-\infty} = \frac{1}{b^\infty} = 0$, so ist $\log 0 = -\infty$.

§. **214**. 1. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Es sei für die Basis b

$$\log M = m,\ \log N = n,\ \log P = p,$$

also

$$M = b^m,\ N = b^n,\ P = b^p;$$

so ist

$$MNP = b^{m+n+p};\ \text{d. i.}$$
$$\log MNP = m + n + p,$$

oder

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

Z. B. $\log 6 = \log 2 + \log 3.$
$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$

Wenn für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt sind, so lassen sich daraus durch bloße Addition auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

$$\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + (\log a - b).$$

2. **Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.**

Es sei für die Basis b

$$\log M = m, \log N = n;$$

also

$$M = b^m, N = b^n,$$

so ist

$$\frac{M}{N} = b^{m-n},$$

folglich

$$\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

Z. B. $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$

$$\log 35 \cdot 29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a + b}{a - b} = \log (a + b) - \log (a - b).$$

3. **Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl multipliciert mit dem Potenzexponenten.**

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; so ist $M^p = b^{mp}$, woraus

$$\log M^p = m p = p \log M$$

folgt.

Z. B. $\log 8^3 = 3 \log 8.$

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n).$$

4. **Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicands dividiert durch den Wurzelexponenten.**

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$, so ist

$\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, daher

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

Z. B. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}.$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}.$$

$$\log \frac{a \sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \tfrac{2}{3} \log x - \log y.$$

§. **215**. 1. **Dieselbe Zahl hat für verschiedene Grundzahlen auch verschiedene Logarithmen.**

Ist p der Logarithmus von N in Bezug auf die Basis B, und q der Logarithmus von N in Bezug auf die Basis b, wo B und b als verschiedene Zahlen vorausgesetzt werden, so ist $N = B^p$ und $N = b^q$, daher $B^p = b^q$. Wäre nun $p = q$, so würde aus §. 165, 2 indirect folgen, daß auch $B = b$ sei, was jedoch der Voraussetzung widerspricht; die Logarithmen p und q müssen daher von einander verschieden sein.

2. **Der Logarithmus einer Zahl für irgend eine Basis ist gleich dem Logarithmus derselben Zahl für eine zweite Basis, multipliciert mit dem reciproken Werthe des Logarithmus der ersteren Basis in Bezug auf die zweite.**

Ist $\log_B N = p$, also $B^p = N$, so erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung beiderseits die Logarithmen in Bezug auf eine andere Basis b nimmt, $p \log_b B = \log_b N$, oder $\log_B N . \log_b B = \log_b N$; folglich

$$\log_B N = \log_b N . \frac{1}{\log_b B}.$$

Wenn die Logarithmen der Zahlen für die Basis b bekannt sind, so kann man daraus auch die Logarithmen für jede andere Basis B bestimmen, wenn man die ersteren mit dem beständigen Factor $\frac{1}{\log_b B}$, d. i. mit dem reciproken Werthe des Logarithmus der neuen Basis in Bezug auf die frühere Basis multipliciert. Die Zahl, mit welcher die Logarithmen eines Systems multipliciert werden müssen, um die Logarithmen eines andern Systems zu erhalten, heißt der **Modulus** des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche. Der Modulus des Briggischen Systems in Bezug auf das natürliche ist $\frac{1}{\log_e 10} = 0 \cdot 4342945 \ldots$

2. Von den Briggischen Logarithmen.

§. 216. 1. **Der Briggische Logarithmus einer positiven Zahl ist positiv oder negativ, je nachdem die Zahl größer oder kleiner als 1 ist.**

Jede Zahl, welche größer als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit 10^m, wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet, oder liegt sie zwischen zwei solchen Einheiten 10^m und 10^{m+1}; ihr Logarithmus ist daher bezüglich m oder zwischen m und $m + 1$ eingeschlossen, also in jedem Falle positiv.

Jede Zahl, welche kleiner als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit $\frac{1}{10^m} = 10^{-m}$, oder liegt sie zwischen zwei solchen Einheiten 10^{-m} und $10^{-(m+1)}$; ihr Logarithmus ist daher bezüglich $-m$ oder zwischen $-m$ und $-(m+1)$ eingeschlossen, also in jedem Falle negativ.

2. **Der Briggische Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche eine dekadische Einheit ist, ist eine ganze Zahl.**

Folgt aus dem Beweise zu 1.

3. **Der Briggische Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche keine dekadische Einheit ist, ist eine irrationale Zahl.**

Beweis. a) Ist N keine dekadische Einheit, sondern zwischen zwei auf einander folgenden dekadischen Einheiten 10^m und 10^{m+1} enthalten, wo m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so liegt der Logarithmus von N

zwischen m und $(m+1)$, und ist somit keine ganze Zahl. Er kann aber auch kein Bruch sein. Denn wäre $\log N = \frac{p}{q}$, wo p und q relative Primzahlen seien, so müßte $10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^p} = N$ sein, welche Gleichung jedoch unmöglich ist. Ist erstlich N eine ganze Zahl, so müßte, damit $\sqrt[q]{10^p}$ der ganzen Zahl N gleich sei, p durch q theilbar sein, was der Voraussetzung, daß p und q relative Primzahlen sind, widerspricht. Kann aber $\sqrt[q]{10^p}$ nicht gleich N sein, wenn N eine ganze Zahl ist, so kann die Gleichung $\sqrt[q]{10^p} = N$ nach §. 182 auch nicht bestehen, wenn N eine gebrochene Zahl bezeichnet. Es kann demnach $\log N$, wenn N keine dekadische Einheit ist, weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau dargestellt werden.

b) Der Logarithmus von N läßt sich jedoch durch Angabe von Grenzen, zwischen denen er liegt, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit annäherungsweise bestimmen. Da N zwischen 10^m und 10^{m+1} enthalten ist, so liegt $\log N$ zunächst zwischen den Grenzen m und $m+1$; aus diesen aber lassen sich andere immer engere Grenzen ableiten.

Liegt nämlich N allgemein zwischen zwei Zahlen u und v, daher (nach §. 213, 2) $\log N$ zwischen $\log u$ und $\log v$, welche letztere bekannt seien, so ist nach §. 214 auch der Logarithmus von $\sqrt{uv}$, d. i. von der mittleren geometrischen Proportionale zwischen u und v bekannt. Weil nun $\sqrt{uv}$ zwischen u und v liegt (§. 141, 4), so muß N entweder zwischen $\sqrt{uv}$ und u, oder zwischen $\sqrt{uv}$ und v fallen, daher auch $\log N$ entweder zwischen $\log \sqrt{uv}$ und $\log u$, oder zwischen $\log \sqrt{uv}$ und $\log v$ liegen. In jedem Falle ist also $\log N$ in zwei engere Grenzen eingeschlossen als früher, und durch eine wiederholte Anwendung dieser Schlußfolge können die Grenzen, zwischen welchen $\log N$ liegt, so eng gezogen werden, als man will.

§. 217. Aufgabe. Von einer gegebenen Zahl den Briggischen Logarithmus zu berechnen.

1. Eine Auflösung dieser Aufgabe beruht auf dem in §. 216, 3 unter b) gegebenen Beweise, nach welchem der Logarithmus einer Zahl in immer engere Grenzen eingeschlossen und dadurch so genau, wie man will, berechnet werden kann.

Es sei z. B. der Logarithmus von 13 zu berechnen.

13 liegt zwischen 10 und 100,
$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ und $\log 100 = 2$;
Differenz der Grenzwerthe: $2 - 1 = 1$.
$\sqrt{10.100} = 3 \cdot 6227766 = a$, $\log a = \frac{1}{2}(\log 10 + \log 100) = 1 \cdot 5$;
13 liegt zwischen 10 und a,
$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ und $\log a = 1 \cdot 5$;
Differenz der Grenzwerthe: $1 \cdot 5 - 1 = 0 \cdot 5$.
$\sqrt{10a} = 17 \cdot 7827942 = b$, $\log b = \frac{1}{2}(\log 10 + \log a) = 1 \cdot 25$;
13 liegt zwischen 10 und b,
$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ und $\log b = 1 \cdot 25$;
Differenz der Grenzwerthe: $1 \cdot 25 - 1 = 0 \cdot 25$.

Man sieht, daß die Grenzwerthe des Logarithmus von 13 immer näher an einander rücken. Durch fortgesetztes Verfahren findet man:

$\sqrt{10b} = 13\cdot3352144 = c,\quad \log c = \frac{1}{2}(\log 10 + \log b) = 1\cdot125;$
$\sqrt{10c} = 11\cdot5478201 = d,\quad \log d = \frac{1}{2}(\log 10 + \log c) = 1\cdot0625;$
$\sqrt{cd} = 12\cdot4093780 = e,\quad \log e = \frac{1}{2}(\log c + \log d) = 1\cdot09375;$
$\sqrt{ce} = 12\cdot8639696 = f,\quad \log f = \frac{1}{2}(\log c + \log e) = 1\cdot109375;$
$\sqrt{cf} = 13\cdot0974727 = g,\quad \log g = \frac{1}{2}(\log c + \log f) = 1\cdot117188;$
$\sqrt{fg} = 12\cdot9801960 = h,\quad \log h = \frac{1}{2}(\log f + \log g) = 1\cdot113281;$
$\sqrt{gh} = 13\cdot0387024 = i,\quad \log i = \frac{1}{2}(\log g + \log h) = 1\cdot115234;$
$\sqrt{hi} = 13\cdot0094163 = k,\quad \log k = \frac{1}{2}(\log h + \log i) = 1\cdot114258;$
$\sqrt{hk} = 12\cdot9947978 = l,\quad \log l = \frac{1}{2}(\log h + \log k) = 1\cdot113769;$
$\sqrt{kl} = 13\cdot0021049 = m,\quad \log m = \frac{1}{2}(\log k + \log l) = 1\cdot114014;$
$\sqrt{lm} = 12\cdot9981507 = n,\quad \log n = \frac{1}{2}(\log l + \log m) = 1\cdot113892;$
$\sqrt{mn} = 13\cdot0002776 = o,\quad \log o = \frac{1}{2}(\log m + \log n) = 1\cdot113953;$
$\sqrt{no} = 12\cdot9993640 = p,\quad \log p = \frac{1}{2}(\log n + \log o) = 1\cdot113922;$
$\sqrt{op} = 12\cdot9998207 = q,\quad \log q = \frac{1}{2}(\log o + \log p) = 1\cdot113937;$
$\sqrt{oq} = 13\cdot0000491 = r,\quad \log r = \frac{1}{2}(\log o + \log q) = 1\cdot113945;$
$\sqrt{qr} = 12\cdot9999348 = s,\quad \log s = \frac{1}{2}(\log q + \log r) = 1\cdot113941;$
u. s. w.

Da nun 13 zwischen s und r, und folglich auch log 13 zwischen log s und log r liegt, diese beiden Logarithmen aber in den 5 ersten Decimalstellen übereinstimmen, so ist auf 5 Decimalen genau $\log 13 = 1\cdot11394$.

Auf diesem mühsamen Wege berechnete Heinrich Brigg die Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen, und später Andrian Vlacq die noch fehlenden der Primzahlen von 20000 bis 90000.

2. Bequemer und kürzer kann man den Briggischen Logarithmus einer Zahl N mittelst der Näherungswerthe eines Kettenbruches bestimmen. Man setze $\log N = x$, also $N = 10^x$, und suche die größte ganze Zahl, welche in x enthalten ist; diese sei q, also $10^q < N < 10^{q+1}$; setzt man $x = q + \frac{1}{x_1}$, wo $x_1 > 1$, so wird $N = 10^{q+\frac{1}{x_1}} = 10^q . 10^{\frac{1}{x_1}}$, folglich $\frac{N}{10^q} = 10^{\frac{1}{x_1}}$ und $\left(\frac{N}{10^q}\right)^{x_1} = 10$, oder wenn $\frac{N}{10^q} = N_1$ gesetzt wird, $N_1^{x_1} = 10$. Man suche nun die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl; diese sei q_1, also $N_1^{q_1} < 10 < N_1^{q_1+1}$; setzt man $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $x_2 > 1$, so wird $10 = N_1^{q_1+\frac{1}{x_2}} = N_1^{q_1} . N_1^{\frac{1}{x_2}}$, somit $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_1^{\frac{1}{x_2}}$ und $\left(\frac{10}{N_1^{q_1}}\right)^{x_2} = N_1$, oder wenn $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_2$ gesetzt wird, $N_2^{x_2} = N_1$. Ist ferner $N_2^{q_2} < N_1 < N_2^{q_2+1}$ und setzt man $x_2 = q_2 + \frac{1}{x_3}$, so wird auf gleiche Weise

$$\left(\frac{N_1}{N_2^{q_2}}\right)^{x_3} = N_3^{x_3} = N_2$$

erhalten, woraus wieder für $x_3 = q_3 + \frac{1}{x_4}$, $\left(\frac{N_2}{N_3^{q_3}}\right)^{x_4} = N_4^{x_4} = N_3$ u. s. w. folgt.

Hiernach ist

$$\log N = q + \frac{1}{x_1} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{x_3}}}$$

$$= q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{x_4}}}} = \ldots$$

woraus sich die Näherungsbrüche für log N herleiten lassen.

Ist nach dieser Methode z. B. der Logarithmus von 13 zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$N = 13, \qquad 10^1 < 13 < 10^2, \qquad q = 1;$

$N_1 = \frac{13}{10^1} = 1\cdot 3, \qquad 1\cdot 3^8 < 10 < 1\cdot 3^9, \qquad q_1 = 8;$

$N_2 = \frac{10}{1.3^8} = 1\cdot 22589, \qquad 1\cdot 22589^1 < 1\cdot 3 < 2\cdot 22589^2, \qquad q_2 = 1;$

$N_3 = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 22589^1} = 1\cdot 06045, \ 1\cdot 06045^3 < 1\cdot 22589 < 1\cdot 06045^4, \ q_3 = 3;$

$N_4 = \frac{1\cdot 22589}{1\cdot 06045^3} = 1\cdot 02823, \ 1\cdot 02823^2 < 1\cdot 06045 < 1\cdot 02823^3, \ q_4 = 2;$

$N_5 = \frac{1\cdot 06045}{1\cdot 02823^2} = 1\cdot 00303, \ 1\cdot 00303^9 < 1\cdot 02823 < 1\cdot 00303^{10}, q_5 = 9;$

$N_6 = \frac{1\cdot 02823}{1\cdot 00303^9} = 1\cdot 00159, \ 1\cdot 00159^1 < 1\cdot 00303 < 1\cdot 00159^2, \ q_6 = 1;$

u. s. w.

Man hat also $\log 13 = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$

und daher für den gesuchten Logarithmus die Näherungswerthe

$$1, \ \frac{9}{8}, \ \frac{10}{9}, \ \frac{39}{35}, \ \frac{88}{79}, \ \frac{831}{746}, \ \frac{919}{825}, \ldots$$

Setzt man $\log 13 = \frac{919}{825} = 1\cdot 113939\ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{825^2} = \frac{1}{680625} = 0\cdot 000001\ldots$, somit ist der Logarithmus von 13 auf 5 Decimalstellen genau $1\cdot 11394$, wie wir denselben auch oben nach der ersten Methode gefunden haben.

Zusatz. Noch kürzere Methoden zur Berechnung der Logarithmen lehrt die höhere Analysis.

§. **218**. Da im Briggischen Systeme mit Ausnahme der dekadischen Einheiten alle übrigen rationalen Zahlen irrationale Logarithmen haben, welche annäherungsweise durch Decimalbrüche dargestellt werden, so besteht ein Briggischer Logarithmus im allgemeinen aus Ganzen mit angehängten Decimalziffern. Man nennt die im Logarithmus enthaltenen Ganzen die K e n n z i f f e r oder C h a r a k t e r i s t i k des Logarithmus, die angehängten Decimalen die M a n t i s s e desselben.

Für Zahlen, welche kleiner als 1 sind, ist der Logarithmus, also dessen Kennziffer und Mantisse, negativ. N e g a t i v e M a n t i s s e n pflegt man übrigens in der Rechnung zu beseitigen; man führt statt derselben positive Mantissen mit einer negativen Charakteristik ein, indem man den negativen Logarithmus von einer Zahl subtrahiert, die um 1 größer ist als die Charakteristik, wodurch eine positive Mantisse zum Vorschein kommt, und dann diese um 1 größere Zahl als negative Charakteristik hinter die Mantisse setzt. Z. B.

$$-2\cdot245679 = 3 - 2\cdot345679 - 3$$
$$= 0\cdot654321 - 3.$$

§. **219**. 1. Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus einer dekadischen Zahl ist gleich der Ordnungszahl der höchsten Ziffer dieser Zahl.

Es sei die höchste Ziffer in der Zahl a vom nten Range, so ist

$$a > 10^n \text{ und } a < 10^{n+1},$$

daher

$$\log a > n \text{ und } \log a < n + 1.$$

Es ist also $\log a = n +$ einem positiven echten Bruche, und da dieser die Mantisse des Logarithmus darstellt, so ist n die Kennziffer dieses Logarithmus.

Folgesätze. a) Die Kennziffer des Logarithmus einer Zahl welche Ganze enthält, ist positiv und um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, welche die Ganzen einnehmen.

b) Die Kennziffer des Logarithmus eines echten Decimalbruches ist negativ und gleich der Anzahl aller Nullen, welche den geltenden Decimalziffern vorangehen.

2. Wenn man irgend eine Zahl mit einer Potenz von 10 multipliciert oder durch eine Potenz von 10 dividiert, so wird dadurch in ihrem Briggischen Logarithmus nur die Kennziffer geändert, während die Mantisse dieselbe bleibt.

Es ist

$$\log (a.10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$
$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

Es wird also der Logarithmus von a im ersten Falle um die ganze Zahl n vermehrt, im zweiten vermindert, d. h. er erhält eine andere Kennziffer, während die Mantisse ungeändert bleibt.

Es ist z. B. $\log 7124 = 3\cdot852724$; daher ist

$$\log 712400 = \log 7124 + \log 100 = 3\cdot852724 + 2$$
$$= 5\cdot852724;$$
$$\log 71\cdot24 = \log 7124 - \log 100 = 3\cdot852724 - 2$$
$$= 1\cdot852724.$$

Folgesatz. Die Mantisse eines Logarithmus hängt blos von der Ziffernfolge der Zahl ohne Rücksicht auf deren Rang ab.

Logarithmentafeln.

§. **220**. Man findet die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 oder von 1 bis 100000, und zwar erstere auf 5 oder 6, letztere auf 7 Decimalen berechnet, in besonderen Tafeln, welche Logarithmentafeln heißen, zusammengestellt *). Diese enthalten nur die Mantissen der Logarithmen, weil die Kennziffer in jedem Falle nach §. 219, 1 bestimmt werden kann.

In den folgenden Aufgaben werden wir Tafeln voraussetzen, in denen die Logarithmen vierziffriger Zahlen mit sechsstelligen Mantissen enthalten sind.

*) Eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen: Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Wien, bei Gerold.

§. **221.** Aufgabe. Zu einer gegebenen Zahl den Briggischen Logarithmus zu finden.

Man suche in den Tafeln zu der Ziffernfolge der Zahl die Mantisse und nehme als Kennziffer die Ordnungszahl der höchsten Ziffer der gegebenen Zahl.

Bei der Bestimmung der Mantisse können drei Fälle vorkommen:

a) Ist die gegebene Zahl vierziffrig, so ist die Mantisse unmittelbar in den Tafeln zu finden.

b) Hat die gegebene Zahl weniger Ziffern, so denkt man sich so viele Nullen hinzugesetzt, daß man eine vierziffrige Zahl erhält. Wenn z. B. der Logarithmus von 382 zu suchen wäre, so nimmt man die Mantisse von 3820.

c) Besteht die Zahl, deren Logarithmus gesucht wird, aus mehr als vier Ziffern, so schlägt man in den Tafeln zuerst die Mantisse für die vier höchsten Zahlen nach, sucht die Correctur für die folgenden Ziffern und addiert diese zu der früher gefundenen Mantisse. Die Correctur aber wird aus der Differenz zwischen der Mantisse, welche den höchsten Ziffern entspricht, und zwischen der nächstfolgenden Mantisse gefunden, indem man jene weiteren Ziffern als Decimalen betrachtet und diesen Decimalbruch mit der Mantissendifferenz multipliciert; die im Producte erhaltenen Ganzen sind die Correctur, welche zur Mantisse der höchsten Ziffern addiert werden muß. Die Mantissendifferenz ist meistens in den Tafeln selbst schon angegeben, sonst muß sie erst bestimmt werden. Es sei z. B. der Logarithmus von 23456·78 zu suchen; man findet zu der Zahl 2345 die Mantisse 0·370143 und die Differenz 185; nun ist $0·678 \times 185 = 125·43$; also hat man

Mantisse zu 2345	0·370143
Correctur wegen der Ziffern 678	125
somit Mantisse zu 23456·78 . .	0·370268.

Die Kennziffer ist 4, weil die höchste Stelle Zehntausende bedeutet und ihr daher die Ordnungszahl 4 entspricht; also ist

$$\log 23456·78 = 4·370268.$$

In einigen, besonders in größeren Logarithmentafeln sind unter der Mantissendifferenz sogleich auch die 2-, 3-, 4-, .. 9fachen Producte derselben als Proportionaltheile, welche man zu der Mantisse der höchsten Ziffern wegen der spätern Ziffern als Correctur addieren muß, angegeben.

§. **222.** Aufgabe. Zu einem gegebenen Briggischen Logarithmus die entsprechende Zahl zu finden.

Man suche in den Tafeln die zu der Mantisse gehörende Ziffernfolge und gebe der höchsten dieser Ziffern den Rang, welchen die Kennziffer als Ordnungszahl ausdrückt.

Bei der Bestimmung der Ziffernfolge können zwei Fälle vorkommen:

a) Findet sich die gegebene Mantisse in den Tafeln genau vor, so entnimmt man denselben unmittelbar auch die jener Mantisse entsprechende Ziffernfolge.

b) Kommt jedoch, wie es meistens geschieht, die gegebene Mantisse in den Tafeln nicht genau vor, so nimmt man die nächst kleinere Mantisse, schreibt die zu ihr gehörige Ziffernfolge als die höchsten Ziffern der gesuchten Zahl heraus und subtrahiert die kleinere Mantisse von der gegebenen; aus dem Reste werden dann die folgenden Ziffern der gesuchten Zahl bestimmt, indem man denselben durch die Differenz der Tafelmantissen dividiert; die im Quotienten enthaltenen Decimalen sind die letzten Ziffern der gesuchten Zahl.

Z. B. gegebener Logarithmus 0·578124
nächst kleinere Mantisse ...066..Ziffernfolge 3785

$$\begin{array}{l} 58_0 : 11{,}2 \text{ (Tafeldiff.)} = 0·504 \\ 5 \end{array}$$

Die ganze Ziffernfolge ist also 3785504, und zwar bedeutet die höchste Ziffer 3 Einer, weil die Kennziffer 0 ist; somit

$$0·578124 = \log 3·785504.$$

§. **223.** Rechnungsoperationen mit den Briggischen Logarithmen.

In Beziehung auf die Rechnungsoperationen mit Logarithmen sind im allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Wenn man beim Addieren der Logarithmen zwei Kennziffern, eine positive und eine negative, erhält, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{l} 3·105892 \\ 2·568125 \\ 0·213407 - 2 \\ 0·081057 - 4 \\ \hline 5·968481 - 6 = 0·968481 - 1. \end{array}$$

2. Wenn beim Subtrahieren der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so addiere man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, daß er größer wird als der Subtrahend, und setze dann auch als Kennziffer des Restes eben so viele negative Einheiten. Z. B.

$$\begin{array}{ll} +3 & -3 \\ 1·450\,256 & \\ 3·578\,920 & \\ \hline 0·871\,336 - 3. & \end{array}$$

3. Wenn ein Logarithmus mit negativer Kennziffer mit einer Zahl multipliciert wird, so muß im Producte die neue negative Kennziffer mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$(0·531147 - 2) \times 5 = 2·655735 - 10$$
$$= 0·655735 - 8.$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Kennziffer durch eine Zahl zu dividieren, so muß die negative Kennziffer, wenn sie durch diese Zahl nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, daß sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Dadurch wird eine gebrochene Kennziffer vermieden. Z. B.

$$(0·415091 - 7) : 5 = (3·415091 - 10) : 5$$
$$= 0·683018 - 2.$$

§. **224.** Anwendung der Briggischen Logarithmen.

Durch die allgemeinen Sätze, die in §. 214 entwickelt wurden, ist man im Stande, die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, das Potenzieren in eine Multiplication und das Radicieren in eine Division zu verwandeln.

Kommen unter den gegebenen Zahlen negative vor, so betrachtet man sie einstweilen als absolute Zahlen, führt damit die Rechnung durch und bestimmt das Vorzeichen nachträglich in dem gefundenen Resultate.

1. Multiplication der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

Man bestimme das Product aus 1·0954, 0·91567, — 3·1571 und 1·00782. Es ist

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}0954 &= 0{\cdot}039\,573 \\ \log 0{\cdot}91567 &= 0{\cdot}961\,739 - 1 \\ \log 3{\cdot}1571 &= 0{\cdot}499\,289\ (n) \\ \log 1{\cdot}00782 &= 0{\cdot}003\,383 \\ \hline \log \text{des Productes} &= 0{\cdot}503\,984 = \log 3{\cdot}191419, \end{aligned}$$

also

$$1{\cdot}0954 \times 0{\cdot}91567 \times -3{\cdot}1571 \times 1{\cdot}00782 = -3{\cdot}191419.$$

2. Division der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll der Quotient 528 : 737 oder $\frac{528}{737}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} & \quad +1 \qquad -1 \\ \log 528 &= 2{\cdot}722\,634 \\ \log 737 &= 2{\cdot}867\,467 \\ \hline \log \tfrac{528}{737} &= 0{\cdot}855\,167 - 1 = \log 0{\cdot}716\,418, \end{aligned}$$

folglich $\frac{528}{737} = 0{\cdot}716\,418$.

2) Man bestimme den Werth des Bruches $x = \frac{3{\cdot}4156 \times 4{\cdot}023}{1{\cdot}2378 \times 5{\cdot}87091}$.

Es ist

$$\log x = \log 3{\cdot}4156 + \log 4{\cdot}023 - (\log 1{\cdot}2378 + \log 5{\cdot}87091)$$

$$\begin{aligned} \log 3{\cdot}4156 &= 0{\cdot}533\,467 \\ \log 4{\cdot}023 &= 0{\cdot}604\,550 \\ \hline & \quad 1{\cdot}138\,017 \\ \log 1{\cdot}2378 &= 0{\cdot}092\,651 \\ \log 5{\cdot}87091 &= 0{\cdot}768\,705 \\ \hline \log x &= 0{\cdot}276\,661 = \log 1{\cdot}890\,869, \end{aligned}$$

also $x = 1{\cdot}890\,869$.

3. Potenzierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll die 20ste Potenz von 1·025 gesucht werden.

Man hat

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}025 &= 0{\cdot}010724 \times 20 \\ \hline \log (1{\cdot}025)^{20} &= 0{\cdot}214480 = \log 1{\cdot}63862, \end{aligned}$$

also $(1{\cdot}025)^{20} = 1{\cdot}63862$.

2) Man bestimme $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065}$.

$$\begin{aligned} \log 329 &= 2{\cdot}517\,196 \\ \log 67 &= 1{\cdot}826\,075 \\ \hline & \quad 0{\cdot}691\,121 \times 1{\cdot}065 \\ & \quad 5,6,0,1 \\ \hline & \quad 691\,121 \\ & \quad 41\,467 \\ & \quad 3\,456 \\ \hline \log \left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065} &= 0{\cdot}736\,044 = \log 5{\cdot}445575, \end{aligned}$$

somit $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065} = 5{\cdot}445575$.

4. Radicierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

1) Man verlangt die 5te Wurzel aus 10.

$$\log 10 = 1\cdot000000$$
$$: 5$$
$$\log \sqrt[5]{10} = 0\cdot200000 = \log 1\cdot58489,$$

also $\sqrt[5]{10} = 1\cdot58489.$

2) Es soll der Werth von $\sqrt[9]{\dfrac{1\cdot052^2\sqrt{23}}{2\sqrt[3]{18}}}$ bestimmt werden.

Setzt man diesen Werth $= x$, so ist

$$\log x = \tfrac{1}{9}\left[2 \log 1\cdot052 + \tfrac{1}{2} \log 23 - (\log 2 + \tfrac{1}{3} \log 18)\right]$$

$$\begin{array}{lll}
\log 1\cdot052 = 0\cdot022016 & & \\
2 \log 1\cdot052 & & = 0\cdot044032 \\
\log 23 & = 1\cdot361728 & \\
\tfrac{1}{2} \log 23 & & = 0\cdot680864 \\
\hline
& & \ 0\cdot724896 \\
\log\ 2 & & = 0\cdot301030 \\
\log 18 & = 1\cdot255273 & \\
\tfrac{1}{3} \log 18 & & = 0\cdot418424 \\
\hline
& & \ 0\cdot005442 \\
\hline
& & \qquad : 9
\end{array}$$

$$\log x = 0\cdot000605 = \log 1\cdot001394,$$
also $x = 1\cdot001394.$

Siebenter Abschnitt.

Lehre von den Gleichungen.

§. **225.** Die Gleichstellung zweier Ausdrücke, welche gleichen Werth haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$x = x,\ (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4,\ x^2 - 8 = 2x.$$

Die Größen, welche einander gleichgestellt werden, heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist $x^2 - 8$ der erste, $2x$ der zweite Theil; der erste Theil besteht aus zwei Gliedern x^2 und -8.

Man unterscheidet identische und Bestimmungsgleichungen.

Gleichungen, welche für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen richtig sind, heißen identische Gleichungen. Z. B. die Gleichung $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ hat ihre Richtigkeit, man mag für x was immer für einen Werth setzen. Jede Formel für eine arithmetische Operation bildet eine identische Gleichung.

Gleichungen, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten richtig sind, heißen Bestimmungsgleichungen. Z. B. die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist nur richtig, wenn x einen der zwei Werthe 4 oder -2 hat.

Die Werthe der Unbekannten, welche einer Gleichung genügen, d. i. dieselbe zu einer identischen machen, nennt man **Wurzeln** dieser Gleichung. Die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ hat zwei Wurzeln, 4 und -2.

Die Wurzeln einer Gleichung bestimmen, heißt die Gleichung **auflösen**.

Ordnen der Gleichungen.

§. **226**. Eine Gleichung **ordnen** heißt dieselbe so umformen, daß die Unbekannte in keinem Gliede als Nenner oder als Radicand erscheint, daß alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in dem ersten Theile der Gleichung nach den fallenden Potenzen dieser Unbekannten auf einander folgen, daß endlich die höchste Potenz der Unbekannten positiv ist und den Coefficienten 1 hat. Z. B. $x^2 + ax = b$ ist eine geordnete Gleichung.

Wird eine geordnete Gleichung so dargestellt, daß der zweite Theil derselben Null ist, so heißt die Gleichung **auf Null reduciert**; z. B. $x^2 + ax - b = 0$.

Das Ordnen der Gleichungen beruht auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vornimmt, so erhält man wieder gleiche Größen.

Dieser Grundsatz läßt sich durch folgende Sätze näher ausdrücken:

1. **Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man zu beiden Theilen derselben eine und dieselbe Zahl addiert, oder von beiden Theilen dieselbe Zahl subtrahiert.**

Nach diesem Satze kann man jedes Glied des einen Theiles mit dem entgegengesetzten Vorzeichen in den andern Theil bringen (transponieren), insbesondere auch jede geordnete Gleichung auf Null reducieren.

Z. B. aus $x^2 = q - px$ folgt $x^2 + px = q$,
" $x + a = b$ " $x = b - a$,
" $x^2 - 2x = 1$ " $x^2 - 2x - 1 = 0$.

2. **Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl multipliciert.**

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Gleichung von Brüchen befreien, insbesondere auch die höchste Potenz der Unbekannten, wenn sie negativ ist, durch die Multiplication beider Theile mit -1 positiv darstellen.

Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt $x - ab = ac$,
" $\frac{x}{a} - b = \frac{c}{x}$ " $x^2 - abx = ac$,
" $-x^2 + 3x = -5$ folgt $x^2 - 3x = 5$.

3. **Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl dividiert.**

Hiernach kann man eine Gleichung, deren beide Theile einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch diesen abkürzen, insbesondere auch die höchste Potenz der Unbekannten, wenn sie einen von 1 verschiedenen Coefficienten hat, von diesem befreien.

Z. B. aus $2x^2 - 8x = 4$ folgt $x^2 - 4x = 2$,
" $3x = 7$ " $x = \frac{7}{3}$.

4. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl potenziert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man eine Gleichung, in welcher die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen steht, von der Wurzel befreien (rational machen); dabei muß die Wurzel, welche man wegschaffen will, allein in den einen Theil gebracht werden.

Z. B. aus $\sqrt{x - b^2} = a$ folgt $x - b^2 = a^2$.

5. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl radiciert.

Z. B. aus $x^2 = 10$ folgt $x = \sqrt{10}$.

" $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$ " $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

6. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man von beiden Theilen den Logarithmus in Bezug auf dieselbe Basis nimmt.

Dadurch kann man eine Gleichung von Exponentialgrößen befreien.

Z. B. aus $a^x = b$ folgt $x \log a = \log b$.

§. **227**. Aufgabe. Eine gegebene Gleichung zu ordnen.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergibt sich für das Ordnen einer Gleichung folgendes Verfahren:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert.

2. Kommt die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor, so wird die Gleichung durch entsprechende Potenzierung beider Theile von jener Wurzelgröße befreit.

3. Kommen in der Gleichung durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die Klammern durch wirkliche Ausführung der angezeigten Operationen aufgelöst.

4. Alle unbekannten Glieder werden in den ersten Theil gebracht, reduciert, und nach fallenden Potenzen geordnet; die bekannten Glieder dagegen werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reduciert.

5. Man dividiert beide Theile der Gleichung durch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten.

Beispiele. 1)
$$\begin{aligned} 6(x-2) - 2(3x+1) &= 14 - 4(2x+3) \\ 6x - 12 - 6x - 2 &= 14 - 8x - 12 \\ 6x - 6x + 8x &= 14 - 12 + 12 + 2 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x - \frac{12 - 3x}{x} &= 8 \\ x^2 - 12 + 3x &= 8x \\ x^2 + 3x - 8x &= 12 \\ x^2 - 5x &= 12. \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{2x} &= 1 \\ -\sqrt{2x} &= 1 - 2x \\ 2x &= 1 - 4x + 4x^2 \\ 2x + 4x - 4x^2 &= 1 \\ -4x^2 + 6x &= 1 \\ x^2 - \frac{3x}{2} &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Eintheilung der Bestimmungsgleichungen.

§. **228.** 1. Eine Gleichung, in welcher alle bekannten Größen besondere Zahlen sind, heißt eine numerische Gleichung, zum Unterschiede von einer literalen, welche außer den Unbekannten auch allgemeine Zahlen (Buchstaben) enthält.

2. Nach der Zahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten.

3. Nach dem höchsten Potenzexponenten der Unbekannten, und wenn mehrere unbekannte Zahlen vorkommen, nach der höchsten Summe der Potenzexponenten der Unbekannten eines Gliedes in der geordneten Gleichung theilt man die Gleichungen in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, ... Grades ein. So sind

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 5 = 0 \\ x + 2y = 3z - 8 \end{array}\right\} \text{Gleichungen des 1. Grades} \left\{\begin{array}{l} \text{mit 1 Unbekannten.} \\ \;\;\text{"}\;\; 3 \;\;\text{"} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 10 \\ xy - x = y + 2 \end{array}\right\} \text{Gleichungen des 2. Grades} \left\{\begin{array}{l} \text{mit 1 Unbekannten.} \\ \;\;\text{"}\;\; 2 \;\;\text{"} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 5x = 1 \\ 2x^2y - 4xy^2 - y = 3x \end{array}\right\} \text{Gleichungen des 3. Grades} \left\{\begin{array}{l} \text{mit 1 Unbekannten.} \\ \;\;\text{"}\;\; 2 \;\;\text{"} \end{array}\right.$$

Die Gleichungen des zweiten Grades werden auch quadratische, jene des dritten Grades cubische genannt.

4. Gleichungen des zweiten oder eines höheren Grades heißen rein, wenn sie nur eine Potenz der Unbekannten enthalten, und unrein oder gemischt, wenn in denselben verschiedene Potenzen der Unbekannten vorkommen.

Z. B. $\left.\begin{array}{l} x^2 - 5 = 0 \\ x^3 = 10 \end{array}\right\}$ sind reine,

$\left.\begin{array}{l} x^2 - 3x = 5 \\ x^3 + 2x^2 - 6 = 0 \end{array}\right\}$ unreine Gleichungen.

5. Die Gleichungen unterscheidet man ferner in bestimmte, welche eine beschränkte, schon vor der Auflösung genau bestimmbare Anzahl von Wurzeln haben, und in unbestimmte, denen unendlich viele Wurzeln genügen, wenn nicht die Anzahl derselben durch besondere Bedingungen beschränkt wird.

Z. B. die Gleichung $3x = 5$ hat die einzige Wurzel $\frac{5}{3}$; der Gleichung $3x + 2y = 5$ dagegen können unendlich viele Werthe von x und y genügen; die erstere Gleichung ist daher bestimmt, die letztere unbestimmt.

6. Die Gleichungen theilt man endlich in algebraische und Exponentialgleichungen ein; in den ersteren kommt die Unbekannte nur als Grundzahl einer Potenz, in den letzteren als Exponent vor.

I. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. **229.** Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist aufgelöst, sobald man sie nach Vorschrift des §. 227 geordnet hat.

Da die allgemeine Form einer solchen Gleichung

$$ax = b$$

ist, so hat man

$$x = \frac{b}{a}.$$

Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten hat immer nur eine Wurzel, und ist daher eine bestimmte Gleichung.

Beispiele.

1) $ax + b = a'x + b'$;
$ax - a'x = b' - b$,
$(a - a')x = b' - b$,
$x = \frac{b' - b}{a - a'}$.

2) $\frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} = \frac{b}{2x}$,
$2a - 2ax + bx = b$,
$bx - 2ax = b - 2a$
$(b - 2a)x = b - 2a$
$x = 1$.

2. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. **230**. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist unbestimmt; es gibt nämlich unendlich viele Werthe, welche, für die beiden Unbekannten substituiert, der Gleichung Genüge leisten. Hat man z. B. die Gleichung $2x + 5y = 19$, so folgt daraus $x = \frac{19 - 5y}{y}$. Jedem Werthe, der in der Auflösung für y gesetzt wird, entspricht auch ein anderer Werth für x; da nun für y unendlich viele verschiedene Werthe angenommen werden können, so ist auch x unendlich vieler Werthe fähig; die Auflösung ist demnach völlig unbestimmt. Sind dagegen zwei zusammengehörige Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so lassen sich im Allgemeinen die Werthe der Unbekannten, welche beiden Gleichungen Genüge leisten, bestimmt angeben, indem man aus beiden Gleichungen durch Wegschaffung je einer Unbekannten eine Gleichung mit nur einer Unbekannten bildet und diese auflöst.

Aus zwei oder mehreren zusammengehörigen Gleichungen eine Unbekannte wegschaffen, heißt diese Unbekannte eliminieren.

§. **231**. Es sind vorzüglich drei Eliminations-Methoden im Gebrauche.

1. Die Comparations-Methode. Man bestimmt den Werth derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, setzt diese Werthe einander gleich und löst die dadurch erhaltene Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält, auf.

Sind allgemein die Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

gegeben, so erhält man aus denselben

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad x = \frac{c - by}{a},$$
$$y = \frac{c' - a'a}{b'} \qquad x = \frac{c' - b'y}{a'};$$

daher, weil y und x in beiden Gleichungen dieselben Werthe haben sollen,

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}, \qquad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'},$$
$$b'c - ab'x = bc' - a'bx, \qquad a'c - a'by = ac' - ab'y,$$
$$(a'b - ab')x = bc' - a'c, \qquad (ab' - a'b)y = ac' - b'c,$$
$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$
$$= \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b};$$

2. Die Substitutions-Methode. Man sucht den Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in der andern Gleichung; dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche dann aufgelöst wird.

Seien wieder die Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

gegeben. Aus der ersten Gleichung erhält man

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Substituiert man diesen Werth in der zweiten Gleichung, so hat man

$$a'x + b' \cdot \frac{c - ax}{b} = c',$$

woraus

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

folgt. Auf ähnliche Weise findet man

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man verschafft in beiden Gleichungen der zu eliminierenden Unbekannten durch Multiplication aller Glieder mit einem geeigneten Factor gleiche Coefficienten, und addiert oder subtrahiert die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben; die dadurch erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird dann aufgelöst.

Es seien wieder die obigen Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Um aus diesen Gleichungen y zu eliminieren, multipliciert man die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, wodurch man erhält

$$ab'x + bb'y = b'c,$$
$$a'bx + bb'y = bc'.$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so ist

$$ab'x - a'bx = b'c - bc',$$

woraus

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

folgt. Wird eben so aus den gegebenen Gleichungen x eliminiert, so erhält man

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Zusätze. 1. Gewöhnlich bestimmt man nur den Werth der einen Unbekannten nach einer der angeführten drei Methoden und substituiert dann den gefundenen Werth in einer der gegebenen Gleichungen, woraus sich der Werth für die zweite Unbekannte ergibt.

2. Kommen in den gegebenen Gleichungen nur die reciproken Werthe der Unbekannten vor, so ist es am einfachsten, diese reciproken Werthe selbst als die eigentlichen Unbekannten anzusehen und aus ihnen nachträglich die ursprünglichen Unbekannten zu berechnen. Z. B.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13.$$
$$\frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 4.$$

Setzt man $\frac{1}{x} = x'$ und $\frac{1}{y} = y'$, so hat man

$$2x' + 3y' = 13,$$
$$5x' - 2y' = 4,$$

und findet daraus $x' = 2$, $y' = 3$, woraus dann $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ folgt.

Beispiele.

1) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 24 \\ 5x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ nach der Comparationsmethode aufzulösen.

Die erste Gleichung gibt $x = \frac{24 - 4y}{3}$,
" zweite " " $x = \frac{11 + 3y}{5}$,

daher $\frac{24 - 4y}{3} = \frac{11 + 3y}{5}$, woraus $y = 3$ folgt.

Substituiert man diesen Werth von y in dem Ausdrucke

$x = \frac{24 - 4y}{3}$, so erhält man $x = \frac{24 - 4.3}{3} = 4$.

Daß die Werthe $x = 4$ und $y = 3$ den gegebenen Gleichungen Genüge leisten, ergibt sich sogleich, wenn man diese Werthe in den Gleichungen substituirt; man hat

$$3.4 + 4.3 = 24,$$
$$5.4 - 3.3 = 11.$$

2) $\left.\begin{array}{l} 6x - 13y = 48 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ nach der Substitutionsmethode aufzulösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{48 + 13y}{6}$; wird dieser Werth in der zweiten Gleichung substituiert, so hat man

$2 . \frac{48 + 13y}{6} + 3y = 16$, woraus $y = 0$ folgt.

Substituiert man diesen Werth von y in dem Ausdrucke

$x = \frac{48 + 13y}{6}$, so findet man $x = \frac{48 + 13.0}{6} = 8$.

3) $\left.\begin{array}{l} 4x + 19y = 11 \\ 6x - 5y = -17 \end{array}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten aufzulösen.

Um bei x gleiche Coefficienten herbeizuführen, multipliciert man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2; man bekommt

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 57y = 33 \\ 12x - 10y = -34 \\ - \quad\; + \qquad\; + \\ \hline 67y = 67 \end{array}\right\} \text{subtrahiert,}$$

also $y = 1$.

Wird dieser Werth von y in der ersten Gleichung substituiert, so erhält man $4x + 19.1 = 11$, woraus $x = -2$ folgt.

4) $x + y = s$, $x - y = d$.

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$2x = s + d,\ 2y = s - d,$$

daher

$$x = \frac{s + d}{2},\ y = \frac{s - d}{2}.$$

§. **232**. Die in §. 231 aus den allgemeinen Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

erhaltenen Werthe

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b'},\quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

lassen ersehen, daß es Fälle gibt, in denen die gegebenen zwei Gleichungen zur Bestimmung der in denselben vorkommenden zwei Unbekannten nicht geeignet sind.

1. Die Werthe von x und y sind völlig unbestimmt, wenn $ab' = a'b$ und $b'c = bc'$, also $a : a' = b : b'$ und $b : b' = c : c'$ ist, woraus auch $a : a' = c : c'$ oder $ac' = a'c$ folgt, weil dann sowohl $x = \frac{0}{0}$, als auch $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die eine Gleichung von der andern abhängig ist. Denn setzt man $a : a' = b : b' = c : c' = m$, also $a = a'm$, $b = b'm$, $c = c'm$, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c'm,$$
$$a'x + b'y \quad = c',$$

woraus hervorgeht, daß die erste Gleichung durch bloße Umformung, nämlich durch Multiplication mit m, aus der zweiten hervorgegangen, folglich von dieser abhängig ist.

2. Die zwei Gleichungen lassen ferner keine endliche Auflösung zu, wenn in den obigen Ausdrücken für x und y der Nenner = 0, die Zähler aber von 0 verschieden sind, wenn also $ab' = a'b$, oder $a : a' = b : b'$, dagegen $b'c$ und bc', und ebenso ac' und $a'c$ ungleich sind, weil dann $x = \infty$ und $y = \infty$ wird. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die zwei gegebenen Gleichungen einander widerstreiten. Denn setzt man $a : a' = b : b' = m$, also $a = a'm$, $b = b'm$, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c,$$
$$a'x + b'y \quad = c',$$

woraus $c = c'm$ folgen würde, was jedoch einen Widerspruch enthält, weil nach der Voraussetzung $b'c \gtrless bc'$, also $c \gtrless \frac{bc'}{b'}$, oder $c \gtrless c'm$ sein muß.

Aus zwei zusammengehörigen Gleichungen mit zwei Unbekannten können demnach die Werthe dieser Unbekannten nur dann bestimmt gefunden werden, wenn die beiden Gleichungen von einander unabhängig sind und einander nicht widerstreiten.

§. **233**. Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander unabhängige und sich nicht widerstreitende Gleichungen gegeben sein.

Um ein System von mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufzulösen, wendet man dieselben Methoden an, welche in §. 231 für die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angegeben wurden. Man eliminiert nämlich aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte und zugleich eine Gleichung weniger erhält; aus diesen neuen Gleichungen eliminiert man eine zweite Unbekannte, und setzt dieses Verfahren fort, bis man zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher sich der Werth dieser Unbekannten ergibt.

Der gefundene Werth wird in einer der zunächst vorhergehenden zwei Gleichungen substituiert und dadurch eine zweite Unbekannte bestimmt. Die beiden gefundenen Werthe substituiert man dann in einer der vorhergehenden drei Gleichungen u. s. w., und bestimmt auf diese Art nach und nach die Werthe aller Unbekannten.

Beispiele.

1) $\left.\begin{aligned} 8x + 5y + 2z &= 24 \\ 6x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 9y - 6z &= 4 \end{aligned}\right\}$ nach der Comparationsmethode aufzulösen.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned}\right\}, \text{ folglich } \left\{\begin{aligned} \frac{24 - 5y - 2z}{8} &= \frac{3 + 3y - z}{6}, \\ \frac{3 + 3y - z}{6} &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned}\right.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich, wenn man sie nach y auflöst,

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned}\right\}, \text{ daher } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

aus welcher letzteren Gleichung $z = 3$ folgt.

Substituiert man den Werth von z in einem der für y gefundenen Ausdrücke, z. B. in $y = \frac{60 - 2z}{27}$, so hat man

$$y = \frac{60 - 2.3}{27} = 2.$$

Werden endlich die gefundenen Werthe von y und z in einem der für x aufgestellten Ausdrücke, z. B. in $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$ substituirt, so bekommt man

$$x = \frac{3 + 3.2 - 3}{6} = 1.$$

Probe. $\begin{aligned} 8.1 + 5.2 + 2.3 &= 24, \\ 6.1 - 3.2 + 3 &= 3, \\ 4.1 + 9.2 - 6.3 &= 4. \end{aligned}$

2) $\left.\begin{aligned} 3x + y + z &= 18 \\ 2x + 3y + 3z &= 28 \\ 5x + 2y + 3z &= 38 \end{aligned}\right\}$ nach der Substitutionsmethode aufzulösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{18 - y - z}{3}$. Substituiert man diesen Werth in der zweiten und dritten Gleichung, so erhält man

$$2 \times \frac{18 - y - z}{3} + 3y + 2z = 28, \text{ oder } 7y + 4z = 48,$$

$$5 \times \frac{18 - y - z}{3} + 2y + 3z = 38, \text{ oder } y + 4z = 24.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $y = 24 - 4z$. Wird dieser Werth in der vorletzten Gleichung substituiert, so hat man

$$7(24 - 4z) + 4z = 48,$$

woraus $z = 5$ folgt.

Substituiert man den Werth von z in $y = 24 - 4z$, so ist

$$y = 24 - 4.5 = 4.$$

Werden endlich die Werthe von y und z in dem Ausdrucke

$$x = \frac{18 - y - z}{3}$$

eingestellt, so erhält man $x = \frac{18 - 4 - 5}{3} = 3.$

3) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 5z = 8 \\ 2x + 5y - 2z = 18 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{array}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten aufzulösen.

Um aus den ersten zwei Gleichungen x zu eliminieren, multipliciere man die erste mit 2, die zweite mit 3; es ist

$$\left.\begin{array}{rl} 6x - 4y + 10z = & 16 \\ 6x + 15y - 6z = & 54 \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$
$$\begin{array}{r} - \quad - \quad + \quad - \\ \hline -19y + 16z = -38. \end{array}$$

Um aus der zweiten und dritten Gleichung x zu eliminieren, braucht man nur die zweite mit 2 zu multiplicieren und die Subtraction zu verrichten; man bekommt:

$$\begin{array}{r} 4x + 10y - 4z = 36 \\ 4x - y + 2z = 14 \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline 11y - 6z = 22. \end{array}$$

Nun hat man zwei Gleichungen, worin noch die Unbekannten y und z vorkommen. Um aus denselben y zu eliminieren, wird man die erste Gleichung mit 11, die zweite mit 19 multiplicieren und die neuen Gleichungen addieren: man erhält

$$\begin{array}{r} -209y + 176z = -418 \\ 209y - 114z = 418 \\ \hline 62z = 0 \end{array} \text{; also } z = 0.$$

Wird der Werth von z in der Gleichung $11y - 6z = 22$ substituiert, so hat man $11y = 22$, daher $y = 2$.

Substituiert man endlich die Werthe von y und z in einer der gegebenen Gleichungen, z. B. in $3x - 2y + 5z = 8$, so erhält man $3x - 2.2 = 8$, folglich $x = 4$.

3. Anwendung der Gleichungen zur Auflösung von Aufgaben.

§. **234**. In jeder Aufgabe, mag sie nur einen einzelnen besonderen Fall betreffen oder ganz allgemein gestellt sein, werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genügen sollen. Das Geschäft der Algebra bei der Auflösung von Aufgaben ist ein dreifaches:

1. Der Ansatz einer oder mehrerer zusammengehöriger Gleichungen, d. i. die Uebertragung der Bedingungen der Aufgabe aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Zeichensprache;
2. die Auflösung der gebildeten Gleichungen;
3. die Discussion oder Deutung des erhaltenen Resultates, d. i. die Uebertragung desselben aus der Zeichensprache in die Wortsprache.

Für den Ansatz der Gleichungen können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; er ist das Werk des Scharfsinnes und kann nur durch vielfältige Uebung geläufig gemacht werden. Anfängern kann folgende Regel als einigermaßen leitende Vorschrift dienen:

Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst und behandle die Unbekannte so, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern; dadurch erhält man für eine und dieselbe Größe zwei verschieden geformte Ausdrücke, welche einander gleichgestellt die verlangte Gleichung geben.

Die Auflösung der Gleichungen geschieht nach den dafür geltenden allgemeinen Regeln.

Das erhaltene Resultat muß endlich gehörig gedeutet werden, um die Antwort in derjenigen Sprache zu geben, in welcher die Frage gestellt wurde. Die Discussion ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn das Resultat ein allgemeines ist, oder eine negative Auflösung enthält.

§. **235.** **Beispiele.**

1) Man suche eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil zusammen 25 betragen.

Bezeichnet x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$ und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

woraus $x = 30$ folgt.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

2) A ist a Jahre, B b Jahre alt; nach wie viel Jahren wird A doppelt so alt sein als B?

Nach x Jahren wird A $a + x$, B $b + x$ Jahre alt; man hat daher

$$a + x = 2(b + x),$$

woraus

$$x = a - 2b$$

folgt.

Ist hier $a < 2ab$, so ist $x = -(2b - a)$, also negativ. Da eine negative Zahl Jahre keinen Sinn hat, so ist in diesem Falle die Auflösung der vorgelegten Aufgabe unmöglich. Würde man aber in der obigen Gleichung $-x$ statt x setzen, so erhielte man

$$a - x = 2(b - x),$$

und

$$x = 2b - a.$$

Wenn man daher fragen würde: V o r wie viel Jahren war A doppelt so alt als B? so gibt die letztere Gleichung dafür die Lösung $x = 2b - a$, d. h. v o r $2b - a$ Jahren.

Die negative Auflösung einer Gleichung des ersten Grades genügt also, wenn man sie positiv nimmt, einer andern Gleichung, welche aus der ersten durch Aenderung der Vorzeichen der Unbekannten gebildet wird, und kann die Auflösung einer Aufgabe enthalten, in welcher die Fragezahl der vorgelegten Aufgabe im entgegengesetzten Sinne genommen wird.

3) Zwei Körper K′ und K″ sind auf einer geraden Linie in d e r s e l b e n R i c h t u n g mit den Geschwindigkeiten c′ und c″ in gleichförmiger Bewegung und gehen gleichzeitig bezüglich durch die Puncte A′ und A″, von denen A′ um d Längeneinheiten r ü c k w ä r t s von A″ liegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden beide Körper zusammentreffen?

K′ legt in T Zeiteinheiten c′ T Längeneinheiten zurück,
K″ 〃 〃 T 〃 c″ T 〃 .

Da zur Zeit des Zusammentreffens der von K′ zurückgelegte Weg um d größer ist als der von K′ zurückgelegte, so ist

$$c'T - c''T = d,$$

daher

$$T = \frac{d}{c' - c''}.$$

Discussion. a) So lange $c' > c''$, ist T positiv und es gibt eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Wenn $c' = c''$, also $c' - c'' = o$, so wird $T = \infty$; die beiden Körper werden nach unendlich vielen Zeiteinheiten, d. i. niemals zusammentreffen, was natürlich ist, weil sie stets in gleicher Entfernung von einander bleiben; die Auflösung ist unmöglich. Ist für diesen Fall auch $d = o$, d. h. gehen die Körper gleichzeitig durch denselben Punct, so wird $T = \frac{0}{0}$; die Auflösung ist unbestimmt, d. i. die Körper haben, da sie in jedem Augenblicke beisammen sind, nicht einen, sondern unendlich viele Zeitpuncte des Zusammentreffens. Ist endlich $c' < c''$, so wird $T = -\frac{d}{c'' - c'}$, woraus folgt, daß in diesem Falle die Auflösung der Aufgabe, so wie sie gestellt wurde, unmöglich ist, was auch schon an sich einleuchtet, indem sich der hintere Körper K′ langsamer als der vordere K″ bewegt, beide also nicht nur nie zusammentreffen, sondern sich von einander immer mehr entfernen. Um übrigens auch dem negativen Werthe von T eine Deutung zu geben, darf man nur in der gegebenen Aufgabe die Frage im entgegengesetzten Sinne stellen, nämlich: Vor wie viel Zeiteinheiten waren die beiden Körper zusammengetroffen? Dann gibt der negative Werth von T positiv genommen eine Auflösung der so geänderten Aufgabe und drückt aus, daß die zwei Körper vor $\frac{d}{c'' - c'}$ Zeiteinheiten beisammen waren.

b) Setzt man $-d$ für d, d. i. nimmt man an, daß der Punct A vorwärts von A″ liege, so erhält man $T = \frac{-d}{c' - c''} = \frac{d}{c'' - c'}$; es gelten daher hier die unter a) für K′, A′, c′ gewonnenen Resultate bezüglich von K″, A″, c″, und umgekehrt.

c) Setzt man endlich $-c''$ für c'', d. i. nimmt man an, daß sich der Körper K″ gegen K′ in entgegengesetzter Richtung bewege, so wird $T = \frac{d}{c' + c''}$. Wenn d positiv ist, bedeutet T eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Für $d = o$ wird auch $T = o$, d. i. wenn die zwei Körper gleichzeitig von demselben Puncte abgehen, so sind sie eben zur Zeit des Abganges beisammen. Ist d negativ, dann wird $T = -\frac{d}{c' + c''}$, welcher negative Werth, wie unter a), bedeutet, daß die beiden Körper vor $\frac{d}{c' + c''}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen waren.

Wird aus der obigen Grundgleichung nicht T, sondern eine andere allgemeine Größe bestimmt, so erhält man dadurch die Lösung für eine andere verwandte Aufgabe. Die algebraische Auflösung einer allgemeinen Aufgabe beantwortet daher nicht bloß die unmittelbar gestellte Aufgabe; sie liefert zugleich die Auflösung für eine ganze Gruppe von verwandten Aufgaben und zeigt den inneren Zusammenhang, in welchem dieselben unter einander stehen. Insbesondere dienen die negativen Werthe dazu, um die Beschränkungen aufzuheben, welche in eine Aufgabe gelegt wurden, und um dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

4) Man theile die Zahl 58 in zwei Theile, so daß der eine Theil um 16 kleiner sei als der andere.

Bezeichnet man den größeren Theil durch x und den kleineren durch y, so muß nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = 58 \text{ und } x = y + 16$$

sein, aus welchen Gleichungen $x = 37$, $y = 21$ folgt.

Diese Aufgabe kann auch mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten aufgelöst werden.

Ist nämlich x der größere Theil, so ist $58 - x$ der kleinere, und es muß

$$x = 58 - x + 16$$

sein, woraus $x = 37$, daher $58 - x = 21$ folgt.

5) Man hat zwei gleichartige Stoffe; von dem ersten ist der Werth einer Einheit $= a$, von dem zweiten $= b$. Man soll aus beiden eine Mischung machen, die m Einheiten enthält und von welcher jede Einheit den Werth c hat. Wie viele Einheiten muß man von jedem Stoffe zu dieser Mischung nehmen?

Es wird vorausgesetzt, daß der Werth der Mischung gleich ist den Werthen der dazu verwendeten Stoffe.

Bezeichnet x die Anzahl der Einheiten, welche man von dem ersten Stoffe nehmen muß, und y die Anzahl der Einheiten, welche man von dem zweiten Stoffe nehmen muß, so ist

$$x + y = m \text{ und } ax + by = cm,$$

daher

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot m, \quad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot m.$$

Die Auflösung ist nur dann möglich, wenn in den Werthen von x und y Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen haben, was nur eintreten kann, wenn $a > c > b$ oder $a < c < b$ ist, wenn also c zwischen a und b liegt.

Das Verhältnis der beiden Quantitäten ist $x : y = (c - b) : (a - c)$, worauf die sogenannte Allegations- oder Mischungsrechnung beruht.

II. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. **236**. Wenn man zur Bestimmung von mehreren unbekannten Größen weniger Gleichungen hat, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man durch allmähliches Eliminieren der Unbekannten immer zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten erhalten. Wird aus dieser Gleichung die eine Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt, so kann man für diese letzteren unendlich viele verschiedene Werthe setzen, und erhält dann auch für die erste Unbekannte unendlich viele Werthe. Eine solche Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten wird daher eine unbestimmte, auch eine diophantische Gleichung genannt.

Meistens wird bei solchen Gleichungen verlangt, daß die Unbekannten, welche man bestimmen will, gewissen besondern Bedingungen unterworfen seien. So verlangt man bei den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, daß die Unbekannten ganze oder positive, oder ganze und positive Zahlen zugleich sein sollen.

1. Auflösung der unbestimmten Gleichungen in ganzen Zahlen.

§. **237**. 1. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten läßt keine Auflösung in ganzen Zahlen zu, wenn die Coefficienten der Unbekannten einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch welchen das bekannte Glied nicht theilbar ist.

Es sei die auf die einfachste Form gebrachte Gleichung

$$ax + by = c,$$

wo a, b, c ganze positive oder negative Zahlen vorstellen. Haben a und b das gemeinschaftliche Maß m, durch welches c nicht theilbar ist, so hat man

$$\frac{a}{m} . x + \frac{b}{m} . y = \frac{c}{m};$$

da nun $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so können nicht zugleich x, y ganze Zahlen sein, weil sonst auch $\frac{a}{m} . x + \frac{b}{m} . y$, folglich auch $\frac{c}{m}$ eine ganze Zahl wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

Da der hier erwiesene Satz eben so auch für Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten gilt, so wird in dem Folgenden immer vorausgesetzt, daß die Coefficienten der Unbekannten relative Primzahlen sind.

2. **Eine Gleichung mit zwei Unbekannten, deren Coefficienten relative Primzahlen sind, läßt immer eine Auflösung in ganzen Zahlen zu.**

Aus der Gleichung

$$ax + by = c,$$

in welcher a immer als positiv vorausgesetzt werden kann, folgt

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Wenn man hier für y nach und nach die a Werthe, 0, 1, 2, 3, .. a — 1 substituiert, so wird es unter den zugehörigen Werthen von x gewiß einen geben, welcher eine ganze Zahl ist, aber auch nur einen einzigen.

Denn dividiert man die a Werthe von c — by, welche man durch jene Substitutionen erhält, durch a, so läßt sich zeigen, daß die dabei erscheinenden Divisionsreste sämmtlich verschieden ausfallen müssen. Es seien z. B. m und n zwei von den Zahlen 0, 1, 2...a — 1, und nehmen wir an, daß c — bm und c — bn durch a dividiert denselben Rest geben, daß also

$$c - bm = aq + r \text{ und } c - bn = aq_1 + r \text{ sei.}$$

Man erhält dann, wenn man beide Gleichungen subtrahiert,

$$b(m - n) = a(q_1 - q)$$

oder

$$\frac{b(m - n)}{a} = q_1 - q.$$

Es müßte also b(m — n) durch a theilbar sein, was nach §. 78, 4 nicht möglich ist, da b und a relative Primzahlen sind, m — n aber kleiner als a ist, und also nicht durch a theilbar sein kann. Die a Reste, welche übrig bleiben, wenn man jene a Werthe von c — by durch a dividiert, müssen also alle verschieden sein; es muß daher, da sie zugleich sämmtlich kleiner als a sind, einer unter ihnen gleich Null sein. Es sei nun β der Werth von y, welcher dem Reste 0 entspricht, so wird

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha,$$

wo α eine ganze Zahl vorstellt. Der vorgelegten Gleichung genügen also die Werthe

$$x = \alpha, \; y = \beta.$$

Zusatz. Ist einer der Coefficienten der Unbekannten = 1, z. B. x + by = c so gibt unmittelbar y = 0, x = c eine Auflösung in ganzen Zahlen.

3. **Hat eine Gleichung mit zwei Unbekannten eine Auflösung in ganzen Zahlen, so läßt sie deren unendlich viele zu.**

Ist $x=\alpha$, $y=\beta$ eine Auflösung in ganzen Zahlen für die Gleichung
$$ax \pm by = c,$$
wo a und b positive Zahlen bedeuten, so genügen der Gleichung $ax+by=c$ auch die Werthe
$$x=\alpha+bn,\ y=\beta-an;$$
der Gleichung $ax-by=c$ dagegen die Werthe
$$x=\alpha+bn,\ y=\beta+an,$$
wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet.

Denn durch Substitution dieser Werthe erhält man aus der ersten Gleichung
$$a(\alpha+bn)+b(\beta-an)=c$$
oder
$$a\alpha+b\beta=c,$$
und aus der zweiten Gleichung
$$a(\alpha+bn)-b(\beta+an)=c$$
oder
$$a\alpha-b\beta=c,$$
somit in jedem Falle eine nach der Voraussetzung identische Gleichung.

Es genügt daher, für eine vorgelegte Gleichung **eine** Auflösung in ganzen Zahlen zu kennen, weil man daraus alle übrigen ableiten kann.

§. **238.** Aufgabe. **Eine Gleichung mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen.**

I. **Methode.** Man bestimmt aus der Gleichung den Werth derjenigen Unbekannten, deren Coefficient den kleineren Zahlenwerth hat, und substituiert darin für die andere Unbekannte nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . ., bis für eine dieser Substitutionen auch der Werth der ersten Unbekannten eine ganze Zahl wird.

Diese Auflösung beruhet auf dem zu §. 237, 2 gegebenen Beweise.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x-7y=75$.

Man erhält daraus
$$x=\frac{75+7y}{4},$$
und ist versichert, daß, wenn man darin für y einen der vier Werthe 0, 1, 2, 3 setzt, einer der zugehörigen Werthe von x eine ganze Zahl sein wird, so daß man also höchstens vier Versuche zu machen braucht. Man findet für $y=3$
$$x=\frac{75+21}{4}=\frac{96}{4}=24.$$
Die vorgelegte Gleichung läßt also die Auflösung $x=24$, $y=3$ zu, und alle übrigen Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln
$$x=24+7n,\ y=3+4n,$$
wo n eine unbestimmte ganze Zahl bedeutet.

Man findet daher folgende Auflösungen:

für n =	. . .	−2,	−1,	0,	1,	2,	. . .
„ x =	. . .	10,	17,	24,	31,	36,	. . .
„ y =	. . .	−4,	−1,	3,	7,	11,	. . .

Das hier angegebene Verfahren wird sehr weitläufig, wenn die Coefficienten beider Unbekannten große Zahlen sind.

II. **Methode.** Man löst die Gleichung in Bezug auf die mit dem kleineren Coefficienten behaftete Unbekannte auf, sondert den erhaltenen Quotienten in Ganze und einen Bruch. Den Bruch setzt man dann einer neuen Unbekannten gleich, löst die so gebildete Gleichung in Bezug auf die zweite Unbekannte auf, behandelt den gefundenen Quotienten wie den früheren und setzt dieses Verfahren fort, bis man auf eine Gleichung mit dem Coefficienten 1 kommt. Diese löst man (nach §. 237, 2 Zus.) auf, und substituiert die gefundenen Werthe nach und nach in allen vorhergehenden Gleichungen.

Beweis. Es sei $ax + by = c$, die vorgelegte Gleichung, und $a < b$, so erhält man zunächst $x = \frac{c - by}{a}$. Mittelst der Division durch a bekommt man eine ganze Zahl von der Form $m - ny$, wo m auch Null sein kann, und einen Rest von der Form $c_1 - b_1 y$, wo c_1 ebenfalls Null sein kann; es ist somit

$$x = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a}.$$

Da nun x und y ganze Zahlen sein sollen, so muß auch der in Bruchform erscheinende Ausdruck $\frac{c_1 - b_1 y}{a}$ eine ganze Zahl sein; man nenne sie u_1, so daß $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ eine ganze Zahl und $x = m - ny + u_1$ ist.

Bringt man die Gleichung $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ auf die Form $au_1 + b_1 y = c_1$, und leitet aus derselben, wie früher aus der gegebenen Gleichung, eine neue Hilfsgleichung ab, so wird sich, wenn man dasselbe Verfahren weiter fortsetzt, die dabei geführte Rechnung im Ganzen so stellen:

$$ax + by = c \text{ gibt}$$

$$x = \frac{c - by}{a} = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a} = m - ny + u_1$$

$$\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1 \text{ oder } au_1 + b_1 y = c_1 \text{ gibt}$$

$$y = \frac{c_1 - au_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + \frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + u_2$$

$$\frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = u_2 \text{ oder } b_1 u_2 + b_2 u_1 = c_2 \text{ gibt}$$

$$u_1 = \frac{c_2 - b_1 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + \frac{c_3 - b_3 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + u_3$$

u. s. w.

Aus dem Gange dieser Rechnung folgt, daß

b_1 der Rest der Division $b : a$,
b_2 " " " $a : b_1$,
b_3 " " " " $b_1 : b_2$,
u. s. w.

ist; die Coefficienten der auf einander folgenden Hilfsgleichungen sind also gleich den Divisionsresten, welche man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen b und a erhält (§. 90, 2). Da nun a und b relative Primzahlen sind, so muß unter jenen Resten nothwendig einer gleich 1 werden; folglich wird man gewiß einmal auf eine Hilfsgleichung kommen, in welcher die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat, welche daher unmittelbar eine Auflösung in ganzen Zahlen liefert, woraus dann durch allmälige Substitution auch die gesuchte Auflösung der vorgelegten Gleichung abgeleitet werden kann.

Wäre $b < a$, so brauchte man nur aus der gegebenen Gleichung $ax + by = c$ zuerst y zu bestimmen und weiter, wie vorhin, zu verfahren.

Beispiel. Es sei die Gleichung $105x - 43y = 17$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

$$105x - 43y = 17 \text{ gibt } y = \frac{105x - 17}{43} = 2x + \frac{19x - 17}{43} = 2x + u_1,$$

$$\frac{19x - 17}{43} = u_1 \quad " \quad x = \frac{43u_1 + 17}{19} = 2u_1 + \frac{5u_1 + 17}{19} = 2u_1 + u_2,$$

$$\frac{5u_1 + 17}{19} = u_2 \quad " \quad u_1 = \frac{19u_2 - 17}{5} = 3u_2 - 3 + \frac{4u_2 - 2}{5} = 3u_2 - 3 + u_3,$$

$$\frac{4u_2 - 2}{5} = u_3 \quad " \quad u_2 = \frac{5u_3 + 2}{4} = u_3 + \frac{u_3 + 2}{4} = u_3 + u_4,$$

$$\frac{u_3 + 2}{4} = u_4 \quad " \quad u_3 = 4u_4 - 2.$$

Dieser letzten Gleichung genügt $u_4 = 0$ und $u_3 = -2$: dann geben die vorhergehenden Gleichungen nach und nach

$$u_2 = -2,\ u_1 = -11,\ x = -24,\ y = -59,$$

und die Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln

$$x = -24 + 43n,\ y = -59 + 105n,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl sein kann.

Dieselben allgemeinen Werthe für x und y erhält man auch, wenn man nicht erst die Auflösung für die Gleichung $u_3 = 4u_4 - 2$ sucht, sondern sogleich diese Gleichung selbst in den vorhergehenden Gleichungen substituiert.

Für $n = \ldots -10, -1, 0, 1, 10, \ldots$
ist $x = \ldots -454, -67, -24, 19, 406, \ldots$
$y = \ldots -1109, -164, -59, 46, 991, \ldots$

III. Methode. Um für die Gleichung $ax \pm by = \pm c$, wo a, b und c positive Zahlen sind, eine Auflösung in ganzen Zahlen zu erhalten, verwandelt man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und berechnet den vorletzten Näherungswerth desselben $= \frac{p}{q}$. Da $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{bq}$, also $aq - bp = \pm 1$ (§. 133), daher auch $acq - bcp = \pm c$ ist, so haben x und y die Zahlenwerthe cq und cp, und zwar mit denjenigen Vorzeichen, welche mit Rücksicht auf die Vorzeichen der vorgelegten Gleichung der identischen Gleichung $acq - bcp = \pm c$ genügen.

Beispiel. Es soll $9x + 29y = 15$ in ganzen Zahlen aufgelöst werden.

Man verwandle $\frac{9}{29}$ in einen Kettenbruch, und bestimme den vorletzten Näherungsbruch $\frac{4}{13}$. Da $\frac{9}{29} - \frac{4}{13} = \frac{+1}{29.13}$, also $9.13 - 29.4 = +1$ und $9.13.15 - 29.4.15 = 15$ ist, so bilden $x = 13.15 = 195$, $y = -4.15 = -60$ eine Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen, und man erhält noch unzählig viele Auflösungen, wenn man

$$x = 195 + 29n,\ y = -60 - 9n$$

setzt, wo n eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Für $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
erhält man $x = \ldots 137, 166, 195, 224, 253, \ldots$
$y = \ldots -42, -51, -60, -69, -78, \ldots$

§. **239.** Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man wendet die in §. 238 unter II. für zwei Unbekannte begründete Reductions-Methode an. Man kommt auch hier zuletzt immer auf eine Gleichung, in welche die eine Unbekannte 1 zum Coeffizienten hat, und erhält dann durch gehörige Substitution die allgemeinen Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung, in denen jedoch nicht, wie vorhin, eine einzige willkürliche Größe erscheint; die Anzahl solcher willkürlichen Größen ist vielmehr immer um 1 kleiner als die Zahl der Unbekannten.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x + 6y + 11z = 106$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man erhält

$$x = \frac{106 - 6y - 11z}{4} = 26 - y - 2z + \frac{2 - 2y - 3z}{4}$$
$$= 26 - y - 2z + u_1.$$

Die Gleichung $\frac{2 - 2y - 3z}{4} = u_1$ gibt

$$y = \frac{2 - 3z - 4u_1}{2} = 1 - z - 2u_1 - \frac{z}{2} = 1 - z - 2u_1 - u_2;$$

$$\frac{z}{2} = u_2 \text{ gibt } z = 2u_2.$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} z &= 2u_2 \\ y &= 1 - 2u_1 - 3u_2 \\ x &= 25 + 3u_1 - u_2 \end{aligned}$$

Setzt man für u_1 und u_2 beliebige ganze Zahlen, so erhält man für x, y, z ganze Zahlen.

Für u_1	$=$	1,	2,	3,...
und u_2	$= -$	1,	0,	1,...
wird x	$=$	29,	31,	33,...
y	$=$	2, $-$	3, $-$	8,...
z	$= -$	2,	0,	2,...

2. Auflösung der unbestimmten Gleichungen in positiven Zahlen.

§. **240.** Eine Gleichung $ax + bx = - c$, in welcher die Unbekannten positive Coefficienten haben, während das bekannte Glied negativ ist, läßt keine Auflösung in positiven Zahlen zu. Man darf sich daher hier auf Gleichungen von der Form $ax \pm by = c$ beschränken, wo a, b, c ganze positive Zahlen bedeuten.

Aufgabe. Eine Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten in positiven Zahlen aufzulösen.

Man löst die Gleichung in Bezug auf eine Unbekannte auf. Soll der gefundene Werth positiv sein, so muß die Summe der positiven Glieder, aus welchen er besteht, größer sein, als die Summe der negativen; man darf daher für die übrigen Unbekannten nur solche positive Zahlen annehmen, für welche jene Bedingung erfüllt wird.

Beispiele. 1) Es sei die Gleichung $3x + 5y = 18$ in positiven Zahlen aufzulösen.

Man hat $x = \frac{18 - 5y}{3}$. Damit x positiv sei, muß $18 > 5y$, also $y < \frac{18}{5}$ sein; man darf also für y alle positiven Zahlen setzen, welche kleiner als $\frac{18}{5}$ sind, um auch für x einen positiven Werth zu erhalten.

Für $y = \frac{1}{5}, \; 1, \; 2, \; \frac{17}{5}, \; 4, \; 5, \ldots$
erhält man $x = \frac{17}{3}, \; \frac{13}{3}, \; \frac{8}{3}, \; \frac{1}{3}, \; -\frac{2}{3}, \; -\frac{7}{3}, \ldots$

Man sieht also, daß x positiv wird, so lange $y < \frac{18}{5}$ bleibt, und negativ, sobald y die Größe $\frac{18}{5}$ übersteigt.

2) Man löse die Gleichung $7x = 5x - 11$ in positiven Zahlen auf.

Die Gleichung gibt $x = \frac{5y - 11}{7}$, worin $5y > 11$ oder $y > \frac{11}{5}$ sein muß, damit x positiv sein könne. Setzt man daher für y Werthe, welche $\frac{11}{5}$ übersteigen, so erhält man lauter positive Auflösungen.

3) Man löse die Gleichung $5x + 7y + 11z = 37$ in positiven Zahlen auf.

Aus der Gleichung folgt $x = \frac{37 - 7y - 11z}{5}$; es muß daher $37 > 7y + 11z$ sein, und daher auch $7y < 37$ und $11z < 37$, oder $y < \frac{37}{7}$ und $z < \frac{37}{11}$. Man darf also für y keinen größeren Werth als $\frac{37}{7}$, und für z keinen größeren Werth als $\frac{37}{11}$ annehmen. Nimmt man für y einen bestimmten zwischen 0 und $\frac{37}{7}$ liegenden Werth, so läßt sich die Grenze, welche z nicht übersteigen darf, noch genauer bestimmen; setzt man z. B. $y = 5$, so hat man die Bedingung

$$37 > 35 + 11z,$$

woraus $z < \frac{2}{11}$ folgt. Für $y = 5$ darf man also in diesem Falle für z nur Werthe zwischen 0 und $\frac{2}{11}$ annehmen.

3. Auflösung der unbestimmten Gleichungen in ganzen und positiven Zahlen.

§. **241**. Aufgabe. Eine Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten in ganzen und positiven Zahlen aufzulösen.

Man löst die Gleichung zuerst in ganzen Zahlen auf, und beschränkt dann die dadurch erhaltenen noch unbestimmten Werthe für die Unbekannten so, daß sie den Bedingungen entsprechen, an welche die Auflösung in positiven Zahlen gebunden ist.

Beispiele. 1) Es soll die Gleichung $13x + 19y = 356$ in ganzen positiven Zahlen aufgelöst werden.

$$13x + 19y = 356 \text{ gibt } x = \frac{356 - 19y}{13} = 27 - y + \frac{5 - 6y}{13}$$
$$= 27 - y + u_1,$$

$$\frac{5 - 6y}{13} = u_1 \quad " \quad y = \frac{5 - 13u_1}{6} = -2u_1 + \frac{5 - u_1}{6}$$
$$= -2u_1 + u_2,$$

$$\frac{5 - u_1}{6} = u_2 \quad " \quad u_1 = 5 - 6u_2.$$

Die Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt also

$$y = -10 + 13u_2, \; x = 42 - 19u_2.$$

Damit nun y positiv sei, muß, wenn u_2 positiv angenommen wird, $13u_2 > 10$, also $u_2 > \frac{10}{13}$ sein; damit x positiv sei, muß $42 > 19u_2$, mithin $u_2 < \frac{42}{19}$ sein; diesen beiden Bedingungen entsprechen nur zwei Werthe

$u_2 = 1$ und $u_2 = 2$. Für jeden negativen Werth von u_2 wird auch y negativ. Die Gleichung läßt also nur zwei Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen zu.

für $u_2 = 1$ wird $x = 23, y = 3,$
„ $u_2 = 2$ „ $x = 4, y = 16.$

2) Man löse die Gleichung $13x + 17y = 77$ in ganzen und positiven Zahlen auf.

Die Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 2 + 17u_2,\ y = 3 - 13u_2.$$

Da x für jeden positiven Werth von u_2 positiv ausfällt, so braucht man u_2 nur mit Rücksicht auf y zu beschränken; damit aber y positiv sei, muß $3 > 13u_2$, also $u_2 < \frac{3}{13}$ sein. Für negative Werthe von u_2 wird y stets, x aber nur dann positiv, wenn $2 > 17u_2$ oder $u_2 < \frac{2}{17}$ ist. u_2 kann also nur zwischen $-\frac{2}{17}$ und $\frac{2}{13}$ gewählt werden; und da man für u_2 nur ganze Zahlen setzen darf, so kann die einzige Substitution $u_2 = 0$ für x und y ganze und positive Werthe geben; man erhält dafür $x = 2$ und $y = 3$.

3) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll als Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7 und 11 sind.

Heißen x und y die Zähler der gesuchten Brüche, so hat man

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77} \text{ oder } 11x + 7y = 230.$$

Diese Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 5 - 7u_3,\ y = 25 + 11u_3.$$

Damit x und y positiv seien, muß für positive Werthe von u_3, $5 > 7u_3$ oder $u_3 < \frac{5}{7}$, für negative Werthe von u_3 aber $25 > 11u_3$ oder $u_3 < \frac{25}{11}$ sein; die Werthe von u_2 müssen also zwischen $-\frac{25}{11}$ und $\frac{5}{7}$ liegen, und können nur sein $-2, 1, 0$. Man hat daher

für $u_3 = -2 \ldots x = 19, y = 3;$
$u_3 = -1 \ldots x = 12, y = 14;$
$u_3 = 0 \ldots x = 5, y = 25;$

und die gesuchten Brüche sind $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$.

4) Man soll die Gleichung $7x + 22y + 30z = 103$ in ganzen und positiven Zahlen auflösen.

Die Auflösung in ganzen Zahlen ist:

$$x = -1 + 2z + 22u_1,\ y = 5 - 2z - 7u_1.$$

Für positive Werthe von u_1 muß, damit x positiv sei, $2z + 22u_1 > 1$, und damit y positiv sei, $5 > 2z + 7u_1$ sein, woraus $z > \frac{1 - 22u_1}{2}$ und $z < \frac{5 - 7u_1}{2}$ folgt. Da z positiv sein soll, so muß $5 > 7u_1$ oder $u_1 < \frac{5}{7}$ sein. Man darf also für u_1 keinen positiven Werth setzen, der $\frac{5}{7}$ überschreitet.

Für negative Werthe von u_1 muß, damit x und y positiv seien, $2z > 1 + 22u_1$ und $5 + 7u_1 > 2z$, oder $z > \frac{1 + 22u_1}{2}$ und $z < \frac{5 + 7u_1}{2}$ sein. Aus diesen beiden Relationen folgt offenbar, daß $\frac{5 + 7u_1}{2} > \frac{1 + 22u_1}{2}$ mithin $u_1 < \frac{4}{15}$ sein müsse. Man darf also für u_1 keine negative Zahl setzen, die dem Zahlenwerthe nach größer als $\frac{4}{15}$ wäre.

u_1 muß demnach zwischen $-\frac{4}{15}$ und $\frac{5}{7}$ liegen, und da sie eine ganze Zahl sein muß, so kann man nur $u_1 = 0$ wählen. Für diese Annahme gehen die obigen Bedingungen über in $z > \frac{1}{2}$ und $z < \frac{5}{2}$; man kann also $z = 1$ und $z = 2$ setzen, wodurch sich für die vorgelegte Gleichung zwei Auflösungen in ganzen positiven Zahlen ergeben:

$$\text{für } u_1 = 0 \text{ und } z = 1 \text{ wird } x = 1,\ y = 3;$$
$$u_1 = 0 \quad " \quad z = 2 \quad " \quad x = 3,\ y = 1.$$

III. Quadratische Gleichungen.

1. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Reine quadratische Gleichungen.

§. **242**. Die allgemeine Form einer geordneten reinen quadratischen Gleichung ist

$$x^2 = a.$$

Zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so erhält man

$$x = \pm \sqrt{a}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat also zwei entgegengesetzte Wurzeln; ist a positiv, so sind dieselben reell; ist a negativ, so sind sie imaginär.

Beispiele.

$x^2 = 9$, $\quad x^2 = 15$, $\quad x^2 = -7$,

$x = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$ $\quad x = \pm \sqrt{15}.$ $\quad x = \pm \sqrt{-7}.$

Gemischte quadratische Gleichungen.

§. **243**. Die allgemeine Form einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + ax = b.$$

Ergänzt man den ersten Theil zu dem vollständigen Quadrate eines Binoms, indem man zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $\frac{a^2}{4}$, addirt, so erhält man

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b,$$

$$\text{oder } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b;$$

und, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

$$\text{folglich } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

In einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist demnach die Unbekannte gleich dem halben Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten mit entgegengesetztem Vorzeichen, mehr oder weniger der Quadratwurzel aus der algebraischen Summe des Quadrates dieses halben Coefficienten und des von der Unbekannten freien Gliedes.

Man sieht, daß auch jeder unreinen quadratischen Gleichung durch zwei Werthe der Unbekannten Genüge geleistet wird. Ist b positiv, so sind, da $\frac{a^2}{4}$ stets positiv sein muß, die beiden Wurzeln reell. Ist b negativ, so sind die zwei Wurzeln auch reell, so lange $\frac{a^2}{4} > b$ ist; für $\frac{a^2}{4} = b$ ist die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null und die beiden Wurzeln sind einander gleich und reell; für $\frac{a^2}{4} < b$ endlich sind beide Wurzeln imaginär.

Beispiel.

1) $x^2 - 6x = 16.$

$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5;$

daher entweder $x = 3 + 5 = 8$, oder $x = 3 - 5 = -2$.

Probe.

$$8^2 - 6.8 = 16.$$
$$(-2)^2 - 6.-2 = 16.$$

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$; geordnet $x^2 + 7x = -12$.

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}}$$
$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$, oder

$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$

3) $x^2 - 7x = 7.$

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 7} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49+28}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2};$$

$x = \frac{7 + \sqrt{77}}{2}$, oder $x = \frac{7 - \sqrt{77}}{2}$.

Probe.

$$\left(\frac{7+\sqrt{77}}{2}\right)^2 - 7 . \frac{7+\sqrt{77}}{2} = 7,$$
$$\left(\frac{7-\sqrt{77}}{2}\right)^2 - 7 . \frac{7-\sqrt{77}}{2} = 7.$$

4) $x^2 - 2x + 2 = 0$; geordnet $x^2 - 2x = -2$.

$x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1};$

$x = 1 + \sqrt{-1}, x = 1 - \sqrt{-1}.$

Zusatz. Sind in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ die bekannten Zahlen a und b *irrational*, z. B. $a = \sqrt{A}$ und $b = \sqrt{B}$, so daß die Gleichung die Form

$$x^2 + \sqrt{A} . x = \sqrt{B}$$

annimmt, so bekommt man

$$x = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} + \sqrt{B}}.$$

Z. B. die Gleichung $x^2 - 4x\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$ gibt

$$x = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}.$$

Bei allen Gleichungen dieser Art kommt man auf einen Ausdruck von der Form $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$. Wie ein solcher Ausdruck bestimmt, d. i. wie aus einem irrationalen Binom die Quadratwurzel ausgezogen wird, ist in §. 193 gezeigt worden.

Beziehungen zwischen den bekannten Größen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

§. **244.** Die allgemeine Form einer auf Null reducierten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

Man nennt in diesem Falle den ersten Theil $x^2 + Ax + B$ das Gleichungstrinom.

Ist m eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, so heißt $x - m$ ein Wurzelfactor derselben.

1. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist durch ihren Wurzelfactor theilbar.

Es ist

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$$\begin{array}{l} x^2 - mx \\ -\quad + \\ \hline (A + m)\,x + B \\ (A + m)\,x - Am - m^2 \\ -\qquad\qquad + \qquad + \\ \hline \text{Rest} = m^2 + Am + B. \end{array}$$

Da aber m eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, also für x in das Trinom $x^2 + Ax + B$ substituiert, dieses auf Null reduciert, so ist $m^2 + Am + B = 0$, und daher

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m).$$

2. Jede quadratische Gleichung hat zwei, aber auch nur zwei Wurzeln.

Setzt man in dem obigen Ausdrucke

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$A + m = -n$, so wird

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x - n,$$

folglich

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n).$$

Da nun der Ausdruck $x^2 + Ax + B$ nicht nur für $x = m$, sondern auch für $x = n$ in Null übergeht, so ist nicht nur m, sondern auch n eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$.

Hätte $x^2 + Ax + B = 0$ noch eine dritte von m und n verschiedene Wurzel p, so müßte $(p - m)(p - n) = 0$ sein, was nicht möglich ist, da in diesem Producte kein Factor Null ist, ein Product aber, dessen Factoren von Null verschieden sind, nicht gleich Null sein kann.

3. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist gleich dem Producte ihrer Wurzelfactoren.

4. Der Coefficient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe, und das dritte, von der Unbekannten freie Glied dem Producte aus den Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Diese zwei Sätze folgen aus 2, da

$$Ax^2 + Bx + C = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)\,x + mn$$

ist.

§. **245.** Aufgaben. 1. Eine quadratische Gleichung zu bilden, welche zwei gegebene Zahlen zu Wurzeln hat.

Seien z. B. 3 und -4 die gegebenen Zahlen, so nehme man diese mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich -3 und 4, und bilde davon

die Summe $= -3 + 4 = +1$, und

das Product $= -3 . + 4 = -12$;

dann ist

$$x^2 + x - 12 = 0$$

die Gleichung, welche 3 und -4 zu Wurzeln hat.

2. Einen Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ in Factoren zu zerlegen.

Man setze $x^2 + ax + b = 0$, welche Gleichung

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

zu Wurzeln hat; dann ist nach §. 244, 3

$$x^2 + ax + b = \left[x + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right]\left[x + \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right].$$

Ist z. B. $x^2 - 3x - 28$ in zwei Factoren zu zerlegen, so setze man $x^2 - 3x - 28 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 7$, $x_2 = -4$, daher die Wurzelfactoren $x - 7$ und $x + 4$; somit

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4).$$

§. **246.** Nach den Sätzen 3. und 4. in §. 244 läßt sich aus den Vorzeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auch auf die Vorzeichen ihrer Glieder und umgekehrt aus den Vorzeichen der letzteren auf jene der ersteren schließen.

a) Sind beide Wurzeln m und n positiv, so hat man

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn;$$

sind beide Wurzeln negativ, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn.$$

Wenn also beide Wurzeln gleich bezeichnet sind, so ist das dritte Glied immer positiv, das zweite Glied aber negativ oder positiv, je nachdem die Wurzeln beide positiv oder negativ sind.

Haben die Wurzeln entgegengesetzte Vorzeichen, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x + n) = x^2 - (m - n)x - mn.$$

In diesem Falle ist also das dritte Glied immer negativ, das zweite dagegen negativ, wenn die positive Wurzel größer ist als die negative, im entgegengesetzten Falle positiv.

b) Wenn das dritte Glied positiv ist, so hat die Gleichung zwei gleichbezeichnete Wurzeln; das Vorzeichen des zweiten Gliedes gibt zu erkennen, ob sie positiv oder negativ sind, die Wurzeln haben nämlich mit dem zweiten Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen. Ist das dritte Glied negativ, so haben die Wurzeln verschiedene Vorzeichen, und zwar ist die positive die größere oder die kleinere, je nachdem das zweite Glied negativ oder positiv ist.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. **247.** Jede quadratische Gleichung kann auf eine der beiden Grundformen gebracht werden:

$$x^2 \pm ax + b = 0, \quad x^2 \pm ax - b = 0.$$

Aufgabe. Die Gleichung $x^2 \pm ax + b = 0$ trigonometrisch aufzulösen.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_1 = \mp \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},\ x_2 = \mp \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

oder

$$x_1 = \mp \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right),\ x_2 = \mp \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right).$$

Sollen die Wurzeln reell sein, so muß $\frac{4b}{a^2} < 1$ sein. Da nun die absoluten Werthe des Sinus aller Winkel zwischen 0 und 1 liegen, so gibt es immer einen Winkel, dessen Sinus zum Quadrat erhoben dem echten Bruche $\frac{4b}{a^2}$ gleich ist. Setzt man daher

$$\frac{4b}{a^2} = \sin^2\alpha,\ \text{also}\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

so wird, da $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\alpha}$ und $\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \cos\alpha$ ist,

$$x_1 = \mp \frac{\sqrt{b}}{\sin\alpha}(1 - \cos\alpha),\ x_2 = \mp \frac{\sqrt{b}}{\sin\alpha}(1 + \cos\alpha),$$

und, weil $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$ ist,

$$x_1 = \mp \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{b},\ x_2 = \mp \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{b}.$$

Beispiel. Ist die Gleichung $x^2 + 9x + 5 = 0$ gegeben, so hat man $a = 9$, $b = 5$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{\cdot}301030\\
\tfrac{1}{2}\log b &= 0{\cdot}349485\\
&\overline{\,0{\cdot}650515}\\
\log a &= 0{\cdot}954243\\
\log\sin\alpha &= 9{\cdot}696272 - 10\\
\alpha &= 29^0\,47'\,43{\cdot}2'',\\
\frac{\alpha}{2} &= 14^0\,53'\,51{\cdot}6''.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
x_1 = -\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.\sqrt{b} & x_2 = -\cot\frac{\alpha}{2}.\sqrt{b}\\
\log\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}424940 - 10\ (n) & \log\cot\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}575060\ (n)\\
\frac{1}{2}\log b = 0{\cdot}349485 & \frac{1}{2}\log b = 0{\cdot}349485\\
\log x_1 = 0{\cdot}774425 - 1 & \log x_2 = 0{\cdot}924545\\
x_1 = -\,0{\cdot}59487. & x_2 = -\,8{\cdot}40513.
\end{array}$$

Aufgabe. Die Gleichung $x_2 \pm ax - b = 0$ trigonometrisch aufzulösen.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = \mp \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},\quad x_2 = \mp \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

oder

$$x_1 = \mp \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right),\ x_2 = \mp \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right).$$

Da die absoluten Werthe der Tangenten der Winkel alle möglichen Zahlen von 0 bis ∞ durchlaufen, so gibt es immer einen Winkel, dessen Tangente zum Quadrat erhoben $\frac{4b}{a^2}$ hervorbringt. Setzt man daher

$$\frac{4b}{a^2} = \operatorname{tang}^2 \alpha, \quad \text{also } \operatorname{tang} \alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

so wird, da $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tang} \alpha}$ und $\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$ ist,

$$x_1 = \mp \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tang} \alpha}\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right), \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tang} \alpha}\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right),$$

oder

$$x_1 = \mp \sqrt{b} \cdot \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha}, \quad x_2 = \mp \sqrt{b} \cdot \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha},$$

und, weil $\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} = -\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$ ist,

$$x_1 = \pm \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{b}, \quad x_2 = \mp \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{b}.$$

2. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. **248**. Enthält eine quadratische Gleichung mehrere Unbekannte, so lassen sich diese, wie bei den Gleichungen des ersten Grades, nur dann bestimmt angeben, wenn so viele von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sind, als Unbekannte bestimmt werden sollen. Die Auflösung geschieht auch hier nach den in §. 231 angegebenen Eliminationsmethoden, durch welche man schließlich auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten kommt. Die Endgleichung übersteigt jedoch den zweiten Grad, sobald von den gegebenen Gleichungen mehr als eine vom zweiten Grade ist, und kann dann nach den hier vorgetragenen Lehren nicht gelöst werden.

Beispiele.

1) $\left.\begin{array}{r} x + y = a \\ xy = b \end{array}\right\}$ nach der Comparationsmethode.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$\left.\begin{array}{l} x = a - y \\ x = \frac{b}{y} \end{array}\right\}$, daher $a - y = \frac{b}{y}$, oder geordnet

$y^2 - ay = -b$, woraus sich

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \text{ und somit } x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{2} - b} \text{ ergibt.}$$

Man könnte hier mit Rücksicht auf §. 244, 4. auch so schließen:

Wenn zwischen zwei Größen x und y die beiden Gleichungen $x + y = a$ und $xy = b$ gegeben sind, so sind x und y die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$.

2) $\left.\begin{array}{r} x - y = 7 \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{array}\right\}$ nach der Substitutionsmethode.

Wird der Ausdruck $x = y + 7$, welcher aus der ersten Gleichung folgt, in der zweiten substituiert, so hat man

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ oder geordnet } y^2 + \frac{14y}{3} = 23,$$

welcher Gleichung die Wurzeln $y = 3$ und $y = -\frac{23}{3}$ entsprechen.

Werden diese Werthe von y in dem Ausdrucke $x = y + 7$ substituiert, so erhält man $x = 10$ oder $x = -\frac{2}{3}$.

3) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 89 \\ x^2 - y^2 = 39 \end{array}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten.

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{array}{l}2x^2 = 128\\ 2y^2 = 50\end{array}\right\}, \text{ daher } \left.\begin{array}{l}x^2 = 64\\ y^2 = 25\end{array}\right\} \text{ und } \begin{array}{l}x = \pm 8,\\ y = \pm 5.\end{array}$$

§. **249**. In vielen Fällen führen besondere Kunstgriffe einfacher zum Ziel, als die gewöhnlichen Eliminationsmethoden. Dabei sucht man aus den gegebenen Gleichungen zunächst die Summe, Differenz oder das Product der Unbekannten, und entwickelt dann erst aus diesen Größen die Werthe der Unbekannten selbst.

Beispiele.

1) $x^2 + y^2 = a,$
$xy = b.$

Multipliciert man die zweite Gleichung mit 2, und verbindet die neue Gleichung mit der ersten durch Addition und durch Subtraction, so erhält man

$$(x+y)^2 = a + 2b, \text{ daher } x + y = \pm\sqrt{a+2b},$$
$$(x-y)^2 = a - 2b; \quad x - y = \pm\sqrt{a-2b};$$

$$\text{folglich } x = \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}),$$
$$y = \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}).$$

2) $x^2 - y^2 = a,$
$x + y = b.$

Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man

$$x - y = \frac{a}{b}.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen aber folgt

$$x = \tfrac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = \frac{b^2 + a}{2b},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) = \frac{b^2 - a}{2b}.$$

3) $xy = a,\ xz = b,\ yz = c.$

Multipliciert man alle drei Gleichungen mit einander und dividiert das Product durch das Quadrat der dritten, so erhält man

$$x^2 = \frac{ab}{c}, \text{ daher } x = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$y = \mp\sqrt{\frac{ac}{b}},\ z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

4) $xy + xz = a,\ xy + yz = b,\ xz + yz = c.$

Setzt man $xy = x',\ xz = y',\ yz = z'$, so hat man

$$x' + y' = a,\ x' + z' = b,\ y' + z' = c.$$

Daraus folgt

$$x' = xy = \frac{a+b-c}{2};\ y' = xz = \frac{a+c-b}{2};\ z' = yz = \frac{b+c-a}{2};$$

daher erhält man nach 3)

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{2\ (b+c-a)}},$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (b+c-a)}{2\ (a+c-b)}},$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{(a+c-b)\ (b+c-a)}{2\ (a+b-c)}}.$$

3. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. **250**. Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dieser Gleichung genügen unendlich viele Werthe von x und y. Die Zahl der Auflösungen wird jedoch gewöhnlich durch die Bedingung eingeschränkt; daß x und y rationale, auch bloß ganze positive Zahlen sein sollen.

Löst man die Gleichung nach y auf, so erhält man

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{(Bx+E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)}}{2C}$$

oder

$$2Cy = -(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BE - 4CD)x + (E^2 - 4CF)},$$

und, wenn man

$$B^2 - 4AC = a,\ 2BE - 4CD = b,\ E^2 - 4CF = c$$

setzt,

$$2Cy = -(Bx + E) \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Man erhält hier offenbar für y einen rationalen Werth, wenn sich der Ausdruck $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ für einen Werth von x rational darstellen läßt.

§. **251**. Aufgabe. Die Werthe von x zu bestimmen, für welche der Ausdruck $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ rational wird.

Die Auflösung soll hier nur für einige einfachere Fälle gezeigt werden.

1. Sei $a = m^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{m^2x^2 + bx + c} = mx + p,\ \text{also}$$
$$m^2x^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mpx + p^2,$$

woraus

$$x = \frac{p^2 - c}{b - 2mp}$$

folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet. Hiernach wird

$$y = mx + p = \frac{mp^2 - mc}{b - 2mp} + p = \frac{bp - mp^2 - mc}{b - 2mp},\ \text{also rational.}$$

Ist z. B. $y = \sqrt{9x^2 + 5x + 3}$, so hat man, da $m = 3$, $b = 5$, $c = 3$ ist, $x = \frac{p^2 - 3}{5 - 6p}$, wo man für p jede beliebige rationale Zahl, $p = \frac{5}{6}$ ausgenommen, setzen kann. Nimmt man $p = 1$ an, so wird

$$x = \frac{1 - 3}{5 - 6} = \frac{-2}{-1} = +2,\ \text{und}$$
$$y = \sqrt{36 + 10 + 3} = \pm 7.$$

2. Sei $c = n^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + n^2} = px + n,\ \text{also}$$
$$ax^2 + bx + n^2 = p^2x^2 + 2npx + n^2,$$

woraus

$$x = \frac{2np - b}{a - p^2},$$

und daher

$$y = px + n = \frac{2np^2 - bp}{a - p^2} + n = \frac{np^2 - bp + an}{a - p^2}$$

folgt, wo p irgend eine rationale Zahl bedeutet.

3. Es lasse sich der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ in zwei rationale Factoren zerlegen, was nach §. 245, 2 erfüllt wird, wenn die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ rationale Wurzeln hat.

Sind $qx + r$ und $sx + t$ die beiden rationalen Factoren, so setze man

$$y = \sqrt{(qx + r)(sx + t)} = p\,(sx + t), \text{ also}$$
$$(qx + r)(sx + t) = p^2 (sx + t)^2,$$

woraus

$$x = \frac{p^2 t - r}{q - p^2 s},$$

und

$$y = p\,(sx + t) = \frac{p\,(qt - rs)}{q - p^2 s}$$

folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet.

§. **252**. Aufgabe. Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen, d. i. zwei rationale Zahlen zu finden, von welchen die Summe der Quadrate wieder ein Quadrat ist.

Da $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, also $z > x$ und $z < x + y$ ist, setze man $z = x + \frac{n}{m} \cdot y$, wo $m > n$ und m und n relative Primzahlen sind. Man hat

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2y^2}{m^2}, \text{ daher}$$
$$m^2y^2 = 2mnxy + n^2y^2,$$

woraus

$$\frac{x}{y} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$$

folgt. Setzt man daher

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,$$

so folgt $z^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$, also

$$z = m^2 + n^2,$$

welche Werthe der vorgelegten Aufgabe genügen, mögen für m und n was immer für rationale Zahlen gewählt werden, sobald $m > n$ ist.

Nimmt man für m und n ganze Zahlen, so erhält man auch für x, y, z ganze Zahlen.

Diese Aufgabe hat in der Geometrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Seiten commensurabel sind (Pythagoräische Dreiecke). Drücken x und y die Katheten aus, so ist z die Hypotenuse, und man hat für

$m =$	2,	3,	4,	4,	5,	5,	6,	6,...
$n =$	1,	2,	1,	3,	2,	4,	1,	5,...
$x =$	3,	5,	15,	7,	21,	9,	35,	11,...
$y =$	4,	12,	8,	24,	20,	40,	12,	60,...
$z =$	5,	13,	17,	25,	29,	41,	37,	61,...

§. **253**. Aufgabe. Die Gleichung $xy + (x \pm y) = a$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

$$y = \frac{a - x}{x \pm 1} = \frac{a \pm 1 - (x \pm 1)}{x \pm 1} = \frac{a \pm 1}{x \pm 1} - 1.$$

Soll y eine ganze Zahl sein, so muß $\frac{a \pm 1}{x \pm 1}$ eine ganze Zahl, folglich $x \pm 1$ ein Factor von $a \pm 1$ sein. Bildet man daher alle Factoren von $a \pm 1$, so kann jeder derselben für $x \pm 1$ gesetzt werden.

Z. B. Die Gleichung $xy + (x - y) = 64$ gibt

$$y = \frac{64 - x}{x - 1} = \frac{64 - 1 - x + 1}{x - 1} = \frac{63 - (x - 1)}{x - 1} = \frac{63}{x - 1} - 1.$$

Die Factoren von 63 sind 3, 7, 9, 21. Man hat also

$$x - 1 = 3,\ 7,\ 9,\ 21;$$

daher $x = 4,\ 8,\ 10,\ 22;$

$$y = \frac{63}{x-1} - 1 = 20,\ 8,\ 6,\ 2.$$

IV. Einige höhere und Exponentialgleichungen.

1. Reine höhere Gleichungen.

§. **254.** Die allgemeine Form einer geordneten reinen höheren Gleichung (§. 228, 4) ist

$$x^m = a.$$

Um eine solche Gleichung, welche auch eine zweigliedrige genannt wird, aufzulösen, darf man nur aus beiden Theilen derselben die mte Wurzel ausziehen; es ist nämlich

$$x = \sqrt[m]{a}.$$

Ist m eine gerade Zahl, so hat die Gleichung, wenn a positiv ist, zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln; ist a negativ, so erhält man keine reelle Wurzel. Wenn dagegen m eine ungerade Zahl ist, so wird die Gleichung immer eine reelle Wurzel haben, welche mit a dasselbe Vorzeichen besitzt.

Beispiele.

1) $x^3 = 27$ gibt $x = \sqrt[3]{27} = 3.$

2) $x^3 = -27$ „ $x = \sqrt[3]{-27} = -3.$

3) $x^4 = 16$ „ $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2.$

4) $x^4 = -16$ „ $x = \pm\sqrt[4]{-16} = \pm 2\sqrt{-1}.$

2. Höhere Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§. **255.** Höhere Gleichungen, welche nur zwei Potenzen der Unbekannten von solcher Beschaffenheit enthalten, daß der eine Potenzexponent das Doppelte des andern ist, lassen sich immer auf quadratische zurückführen; man darf nur die niedrigere Potenz durch eine neue Unbekannte ausdrücken.

Aufgabe. Die Gleichung $x^{2m} + ax^m = b$ aufzulösen.

Setzt man hier $x^m = y$, folglich $x^{2m} = y^2$, so hat man

$$y^2 + a\,y = b,$$

und daher

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Wird nun statt y wieder der Werth x^m restituiert, so ist

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

somit

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + b}\right)}.$$

Ist m ungerade, so gibt jeder reelle Werth von y oder x^m auch einen reellen Werth von x. Ist dagegen m gerade, so geben nur die positiven Werthe von y reelle Werthe von x, und zwar jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte; die negativen Werthe von y geben imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Z. B. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 - 13y + 36 = 0$, welche Gleichung

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

also $y = 9$ oder $y = 4$ gibt. Man hat daher

aus $x^2 = 9$ die Werthe $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$,
„ $x^2 = 4$ „ „ $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

§. **256.** Aufgabe. Die Gleichung $\sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} = b$ aufzulösen.

Setzt man $\sqrt[2m]{x} = y$, daher $\sqrt[m]{x} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daraus

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

daher, wenn man beide Theile zur 2 mten Potenz erhebt,

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2m}.$$

Z. B. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} = 2$.

Setzt man $\sqrt[6]{x} = y$, so hat man $y^2 - y = 2$, daher

$$y = \sqrt[6]{x} = 2 \text{ oder } y = \sqrt[6]{x} = -1,$$

und somit

$$x = 64 \text{ oder } x = 1.$$

3. Exponentialgleichungen.

§. **257.** Die Exponentialgleichungen (§. 228, 6) lassen sich in besonderen Fällen mit Hilfe der Logarithmen auf algebraische zurückführen, und dann wie diese auflösen.

1. Gleichungen von der Form $a^x = b$.

Da gleichen Größen auch gleiche Logarithmen entsprechen, so folgt aus $a^x = b$ auch $\log(a^x) = \log b$, oder $x \log a = \log b$, daher ist

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Um z. B. die Gleichung $5^x = 37$ aufzulösen, hat man $x \log 5 = \log 37$, und somit

$$x = \frac{\log 37}{\log 5} = \frac{1 \cdot 568202}{0 \cdot 698970} = 2 \cdot 24359.$$

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} = b$.

Nimmt man hier beiderseits die Logarithmen, so erhält man $\frac{1}{x} \cdot \log a = \log b$, daher $\log a = x \log b$, und

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

So gibt die Gleichung $\sqrt[x]{2} = 10$ den Werth

$$x = \frac{\log 2}{\log 10} = 0 \cdot 30103.$$

3. Gleichungen von der Form $a^{2x} + pa^x = q$.

Setzt man $a^x = y$, so erhält man $y^2 + py = q$, also

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

und daher $$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

Z. B. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ gibt für $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, woraus $y = 4^x = 4$ und $y = 4^x = -9$ folgt; somit

$$x = \frac{\log 4}{\log 4} = 1.$$

Der andere Werth $x = \frac{\log(-9)}{\log 9}$ ist imaginär, da der Logarithmus einer negativen Zahl imaginär ist.

4. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} + p\sqrt[2x]{a} = q$.

Für $\sqrt[2x]{a} = y$ wird $y^2 + py - q$, folglich

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher $$x = \frac{\log a}{2\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}$$

Z. B. aus $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ erhält man für $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, daher $y = 2$ oder $y = -\frac{4}{5}$, und

$$x = \frac{\log 64}{2\log 2} = \frac{6\log 2}{2\log 2} = 3.$$

Der zweite Werth von x ist imaginär.

Achter Abschnitt.

Progressionen.

§. 258. Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, heißt eine **Reihe**, auch **Progression**. Jede dieser Zahlen wird ein **Glied** der Reihe genannt. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle in der Reihe ein Glied einnimmt, heißt der **Zeiger** dieses Gliedes.

Eine Reihe heißt **steigend** oder **fallend**, je nachdem die auf einander folgenden Glieder immer größer oder kleiner werden.

Eine Reihe heißt ferner eine **endliche** oder **unendliche**, je nachdem die Anzahl der Glieder begrenzt oder unbegrenzt ist.

Eine Reihe **interpolieren** heißt, zwischen je zwei auf einander folgende Glieder eine bestimmte Anzahl von Gliedern einschalten, welche mit den Gliedern der gegebenen Reihe wieder eine Reihe derselben Art bilden.

I. Arithmetische Progressionen.

§. **259.** Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, in welcher jedes folgende Glied aus dem nächstvorhergehenden durch die Addition einer und derselben Zahl gebildet wird. Dieser beständige Summand heißt die Differenz der Progression. So sind

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22, \ldots$$

und $50,\ 47,\ 44,\ 41,\ 38,\ 35,\ 32,\ 29, \ldots$

arithmetische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten -3 die Differenz.

1. In einer arithmetischen Progression ist jedes Glied gleich dem ersten Gliede vermehrt um das Product aus dem um 1 verminderten Zeiger des Gliedes und aus der Differenz.

Beweis. Bezeichnet allgemein a_n das nte Glied und d die Differenz der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt aber derselbe für irgend ein Glied a_n, so daß $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ sei, so muß er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} giltig sein; denn

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)\,d + d = a_1 + nd.$$

Hieraus folgt, daß der obige Satz allgemein giltig ist.

Die Formel $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ heißt das allgemeine Glied der Progression, weil daraus, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, 4,... setzt, alle Glieder der Progression abgeleitet werden können.

2. In einer arithmetischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Anfangsgliedern gleich dem Producte aus der halben Anzahl dieser Glieder multipliciert mit der Summe des ersten und letzten Gliedes.

Beweis. Ist a_n das nte Glied der Reihe, so ist $a_n - d$ das nächstvorstehende, $a_n - 2d$ das diesem vorangehende Glied, u. s. f.

Drückt man nun die Summe der ersten n Glieder durch s_n aus, so ist

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n.$$

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist auch

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man, da je zwei unter einander stehende Glieder $a_1 + a_n$ zur Summe geben,

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Hier kommt $a_1 + a_n$ so oft als Summand vor, als Glieder angenommen werden, also nmal; daher

$$2s_n = n\,(a_1 + a_n)$$

und

$$s_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n).$$

Diese Formel heißt das Summenglied der arithmetischen Progression.

Beispiel. Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihe der ungeraden Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots$$

Wegen $a_1 = 1$, $d = 2$ hat man

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1,$$

$$s_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

So ist z. B. $a_{15} = 2 \cdot 15 - 1 = 29$, und $s_{15} = 15^2 = 225$.

§. **260**. Die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \text{ und } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

enthalten fünf Größen a_1, d, n, a_n, s_n; es kann also aus je dreien derselben jede der beiden anderen berechnet werden. Dadurch erhält man 20 verschiedene Aufgaben.

Sind z B. d, n und a_n gegeben und a_1 oder s_n zu suchen, so findet man aus der ersten Gleichung

$$a_1 = a_n - (n-1)\,d,$$

und dann aus der zweiten

$$s_n = \frac{n}{2}\left\{a_n - (n-1)\,d + a_n\right\} = \frac{n}{2}\left\{2a_n - (n-1)\,d\right\}.$$

261. Aufgabe. Eine arithmetische Progression zu interpolieren.

Schaltet man zwischen a_n und a_{n+1} einer arithmetischen Progression, deren Differenz d ist, r Glieder ein, die mit a_n und a_{n+1} wieder eine arithmetische Progression bilden, und bezeichnet man die Differenz dieser letzteren mit d_1, so erhält man folgende interpolierte Reihe:

$$a_n,\ a_n + d_1,\ a_n + 2d_1, \ldots a_n + rd_1,\ a_n + (r+1)\,d_1 = a_{n+1} = a_n + d.$$

Es ist demnach

$$d_1 = \frac{d}{r+1}.$$

Z. B. Man schalte in der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4,.... zwischen den Gliedern 2 und 3 nach dem Gesetze der arithmetischen Reihen 7 Glieder ein.

Hier ist $d = 1$, $r = 7$, daher $d_1 = \frac{1}{8}$; die interpolierte Progression ist also

$$\mathbf{2}\,,\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{2}{8},\ 2\tfrac{3}{8},\ 2\tfrac{4}{8},\ 2\tfrac{5}{8},\ 2\tfrac{6}{8},\ 2\tfrac{7}{8},\ \mathbf{3}.$$

2. Geometrische Progressionen.

§. **262**. Eine geometrische Progression ist eine Reihe, in welcher jedes folgende Glied aus dem nächstvorhergehenden durch die Multiplication mit einer und derselben Zahl gebildet wird. Dieser constante Factor heißt der Quotient der Progression. So sind

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729, \ldots$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{243},\ \tfrac{1}{729}, \ldots$$

geometrische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten $\frac{1}{3}$ der Quotient.

1. In einer geometrischen Progression ist jedes Glied gleich dem ersten Gliede multipliciert mit einer Potenz des Quotienten, deren Exponent um 1 kleiner ist als der Zeiger des Gliedes.

Beweis. Bezeichnet a_n das nte Glied und q den Quotienten der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1\, q,$$
$$a_3 = a_1\, q^2,$$
$$a_4 = a_1\, q^3, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt er aber für irgend ein Glied a_n, so daß $a_n = a_1 q^{n-1}$ sei, so muß er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} gelten; denn

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n.$$

Hieraus folgt, daß der obige Satz allgemein giltig und daß daher

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

das allgemeine Glied einer geometrischen Progression ist.

2. In einer geometrischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Anfangsgliedern gleich dem um das erste Glied verminderten Producte des Quotienten und des letzten Gliedes, dividiert durch den um 1 verminderten Quotienten.

Beweis. Bezeichnet s_n die Summe von n Anfangsgliedern, so hat man

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Multipliciert man beide Theile dieser Gleichung mit q, so erhält man

$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Wird nun von dieser Gleichung die frühere subtrahiert, so folgt

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1,$$

daher

$$s_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1},$$

oder weil $a_1 q^{n-1} = a_n$, also $a_1 q^n = q a^n$ ist,

$$s_n = \frac{q a_n - a_1}{q - 1}$$

als das Summenglied für die geometrische Progression.

Beispiel. Man bestimme das allgemeine und das Summenglied der Progression

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$$

Hier ist $a_1 = 1$ und $q = 3$, daher

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1},$$

$$s_n = \frac{1 \cdot 3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

So ist z. B. $a_{10} = 3^9 = 19683$ und $s_{10} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524.$

Zusatz. Ist die geometrische Progression eine fallende, also $q < 1$, so nähert sich, wenn n ins Unendliche zunimmt, das Glied $a_n = a_1 q^{n-1}$ ohne Ende der Grenze 0, die Summe selbst also der Grenze

$$s = \frac{q \cdot 0 - a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Die Summe der Glieder einer fallenden geometrischen Progression kann zwar, so viele Glieder man auch nehmen mag, diesen Werth nie erreichen, wohl aber ihm so nahe kommen, daß die Differenz kleiner wird, als jede noch so kleine angebbare Zahl. Man nennt den Ausdruck $a = \frac{a_1}{1 - q}$ die Summe der unendlich fallenden Progression.

Z. B. für die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, in welcher $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ist, hat man

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

d. h. je mehrere Glieder der Reihe man addiert, desto mehr nähert sich die Summe der Zahl 2, ohne jedoch je dieselbe zu erreichen.

Jeder periodische Decimalbruch kann als eine fallende geometrische Progression dargestellt und als solche summiert, d. i. in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Z. B.

$$0\cdot\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \frac{25}{10^6} + \frac{25}{10^8} + \ldots = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$

§. **263**. Aus den beiden Gleichungen

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \text{ und } s_n = \frac{q\,a_n - a_1}{q - 1},$$

welche fünf Größen a_1, q, n, a_n, s_n enthalten, können aus je dreien dieser Größen die beiden anderen bestimmt werden.

Sind z. B. q, n, s_n gegeben und a_1 oder a_n zu suchen, so erhält man, wenn der Werth von a_n aus der ersten Gleichung in die zweite substituiert wird,

$$(q - 1)\, s_n = a_1\, q^n - a_1,$$

daher

$$a_1 = \frac{(q - 1)\, s_n}{q^n - 1}.$$

und dann aus der ersten Gleichung

$$a_n = \frac{q^{n-1}\,(q - 1)\, s_n}{q^n - 1}.$$

§. **264**. **Aufgabe**. Eine geometrische Progression zu interpolieren.

Schaltet man zwischen a_n und a_{n+1} einer geometrischen Progression, deren Quotient q ist, r Glieder ein, die mit a_n und a_{n+1} wieder eine geometrische Progression bilden, so erhält man, wenn der Quotient dieser letzteren mit q_1 bezeichnet wird, folgende interpolierte Reihe:

$$a_n,\ a_n\, q_1,\ a_n\, q_1^2, \ldots a_n\, q_1^r,\ a_n\, q_1^{r+1} = a_{n+1} = a_n\, q.$$

Es ist demnach $$q_1 = \sqrt[r+1]{q}.$$

Um z. B. in der Reihe 1, 16, 256, 4096, ... zwischen je zwei Gliedern 3 neue Glieder zu interpolieren, setze man, da $q = 16$ und $r = 3$ ist,

$$q_1 = \sqrt[4]{16} = 2,$$

wodurch man erhält:

1, 2, 4, 8, **16**, 32, 64, 128, **256**, 512, 1024, 2048, **4096**, ...

3. Anwendung der geometrischen Progressionen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung.

§. **265**. Wenn man die Zinsen eines Capitals am Ende eines bestimmten Zeitraumes zum Capitale schlägt und mit diesem wieder verzinset, so sagt man: das Capital ist auf Zinseszinsen angelegt.

Eine in festgesetzten gleichen Terminen während eines bestimmten Zeitraumes zahlbare Geldeinnahme, die man sich durch Erlegung eines gewissen Capitals erwirbt, wird eine Rente genannt. Eine Rente, welche nur auf eine bestimmte Zeit abgeschlossen wird, heißt eine Zeitrente; eine Rente dagegen, die auf die Lebensdauer des Empfängers abgeschlossen wird, heißt eine Lebensrente. Die Anzahl der Jahre wird bei Leibrenten nach der wahrscheinlichen Lebensdauer, die man aus besonderen Sterblichkeitstabellen entnimmt, bestimmt.

Alle hieher gehörigen Rechnungen lassen sich auf folgende vier Hauptaufgaben zurückführen.

§. **266**. **I. Aufgabe**. Ein Capital A, welches zu P% n Jahre lang auf Zinseszins angelegt wird, wachse in dieser Zeit zu dem

Werthe E_n an. Man suche die Relation, welche zwischen den Größen A, P, n und E_n stattfindet.

100 fl. am Anfange des Jahres geben $100 + P$ fl. am Ende des Jahres

1 " " " " " gibt $\frac{100 + P}{100}$ " " " "

A " " " " " geben $A\left(1 + \frac{P}{100}\right)$ " " " "

Setzt man hier und in dem Folgenden $\frac{P}{100} = p$, also $1 + \frac{P}{100} = 1 + p$, so folgt, daß man das Capital am Anfange des Jahres nur mit $1 + p$ zu multiplicieren braucht, um den Werth desselben am Ende des Jahres zu erhalten. Diesem gemäß hat man

A fl. am Anf. d. 1. Jahres $= A(1 + p)$ fl. am Ende d. 1. Jahres,
$A(1 + p)$ " " " " 2. " $= A(1 + p)^2$ " " " " 2. "
$A(1 + p)^2$ " " " " 3. " $= A(1 + p)^3$ " " " " 3. "
. . . .

Die Werthe, auf welche das ursprüngliche Capital A nach 1, 2, 3, ... Jahren anwächst, bilden also eine geometrische Progression, deren erstes Glied $A(1 + p)$, und deren Quotient $1 + p)$ ist. Es ist daher das nte Glied, d. i. der Werth des Capitals nach n Jahren,

$$E_n = A(1 + p)^n \; \ldots . \; 1)$$

Löst man diese Gleichung nach A, p, n auf, so erhält man

$$A = \frac{E_n}{(1 + p)^n} \; \ldots\ldots \; 2)$$

$$p = \sqrt[n]{\frac{E_n}{A}} - 1 \; \ldots . \; 3)$$

$$n = \frac{\log E_n - \log A}{\log (1 + p)} \; \ldots . \; 4)$$

Zusätze. 1. Hier wurde die Zeit als eine ganze Zahl von Jahren vorausgesetzt. Ist nun die Zahl der Jahre ein Bruch, etwa $n + \frac{m}{q}$, wo n eine ganze Zahl oder Null, $\frac{m}{q}$ aber einen echten Bruch bezeichnet, so hat man zunächst für das Anwachsen des Capitals A in n Jahren

$$E_n = A(1 + p)^n.$$

Dieses Capital $A(1 + p)^n$ aber wächst in den noch folgenden $\frac{m}{q}$ Jahren nach §. 154 auf $A(1 + p)^n + A(1 + p)^n . \frac{mp}{q}$ an; folglich ist

$$E_{n + \frac{m}{q}} = A(1 + p)^n \left(1 + \frac{mp}{q}\right) \; \ldots\ldots \; 5)$$

2. Geschieht die Verzinsung halbjährig, so muß man in den obigen Formeln statt der ganzen Jahre Halbjahre, und statt der gegebenen nur die halben Procente setzen. Darnach geht z. B. die Gleichung 1) über in

$$E_{2n} = A\left(1 + \frac{p}{2}\right)^{2n} \; \ldots\ldots\ldots \; 6)$$

3. Die obigen Gleichungen können auch auf andere Größen, wenn dieselben in einem constanten Verhältnisse anwachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes eines Waldes u. dgl., angewendet werden.

Beispiele.

1) Wie hoch wird ein Capital von 2518 fl. in 12 Jahren zu 5 Procent Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisierung anwachsen?

$$A = 2518,\ p = \frac{5}{100} = 0{\cdot}05,\ n = 12.$$
$$E_{12} = 2518 . 1{\cdot}05^{12}.$$
$$\log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}021189$$
$$\left.\begin{array}{r} 12 \log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}254268 \\ \log 2518 = 3{\cdot}401056 \end{array}\right\}$$
$$\log E_{12} = 3{\cdot}655324 = \log 4521{\cdot}93,$$
also $E_{12} = 4521$ fl. 93 kr.

2. Ein Herr will bei einer Versorgungsanstalt seinem Diener nach 11 Jahren einen Bezug von 1000 fl. versichern. Welche Einlage muß er machen, wenn die Anstalt zu 4 Procent ganzjährig verzinset?

$$n = 11,\ E_{11} = 1000,\ p = 0{\cdot}04.$$
$$A = \frac{1000}{1{\cdot}04^{11}}$$
$$\log 1000 = 3{\cdot}000000$$
$$\log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}017033$$
$$11 \log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}187363$$
$$\log A = 2{\cdot}812637 = \log 649{\cdot}58$$
$A = 649$ fl. 58 kr.

3. Ein Capital von 2000 fl. ist bei 4% Zinseszinsen auf 4469 fl. 89 kr. angewachsen. Wie lange war das Capital angelegt?

$$A = 2000,\ p = 0{\cdot}04,\ E_n = 4469{\cdot}89.$$
$$n = \frac{\log 4469{\cdot}89 - \log 2000}{\log 1{\cdot}04} = 0{\cdot}349267 : 0{\cdot}017033 = 20{\cdot}505..$$

Man setze $n = 20$, und berechne
$$E_{20} = 2000 . 1{\cdot}04^{20} = 4382{\cdot}24.$$
2000 fl. sind also in 20 Jahren auf 4382·24 fl. angewachsen. Es ist die Frage: wie viel (t) Zeit muß noch das Capital 4382·24 fl. anliegen, um bei 4 % zu dem Werthe 4469·89 fl. anzuwachsen, d. i. um 4469·89 — 4382·24 = 87·65 fl. Zins bringen?

Nach der einfachen Zinsrechnung (§. 154) hat man
$$t = \frac{100 . 87{\cdot}65}{4382{\cdot}24 . 4} = \frac{1}{2}.$$
Es ist daher genau $n = 20\frac{1}{2}$ Jahre.

§. **267**. II. Aufgabe. Am Anfange eines jeden Jahres wird ein Betrag von r fl. gezahlt oder empfangen, und E_n sei der Werth, zu welchem diese Beträge zusammen bei P % Zinseszins nach n Jahren anwachsen. Man drücke den Zusammenhang aus, welcher zwischen den Größen r, P, n und E_n stattfindet.

Nach §. 266 hat man

r fl. am Anf. des	1. Jahres	$= r\,(1 + p)^n$	fl. am Ende des nten Jahres
r „ „ „ „	2. „	$= r\,(1 + p)^{n-1}$	„ „ „ „ „ „
r „ „ „ „	3. „	$= r\,(1 + p)^{n-2}$	„ „ „ „ „ „
. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . . .
r „ „ „ „	(n—1)ten	$= r\,(1 + p)^2$	„ „ „ „ „ „
r „ „ „ „	nten	$= r\,(1 + p)$	„ „ „ „ „ „

$$\text{daher Endwerth } E_n = r\,(1 + p) + r\,(1 + p)^2 + r\,(1 + p)^3 + \ldots + r\,(1 + p)^{n-1} + r\,(1 + p)^n,$$
oder
$$E_n = r\,(1 + p)\,[1 + (1 + p) + (1 + p)^2 + \ldots (1 + p)^{n-2} + (1 + p)^{n-1}].$$

Der in den Klammern befindliche Ausdruck ist die Summe von n Gliedern einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1, und deren Quotient $1 + p$ ist; man hat daher

$$E_n = r(1 + p) . \frac{(1 + p)(1 + p)^{n-1} - 1}{p}$$

oder

$$E_n = \frac{r.(1 + p)[(1 + p)^n - 1]}{p} \quad . . . . 1)$$

Löst man diese Gleichung nach r und n auf, so erhält man

$$r = \frac{E_n p}{(1 + p)[(1 + p)^n - 1]} \quad . . . . 2)$$

$$n = \frac{\log[r(1 + p) + E_n p] - \log r}{\log(1 + p)} - 1 \quad . . . . 3)$$

Die Bestimmung von p übersteigt, da man dabei auf eine Gleichung des $(n + 1)$ten Grades kommt, die Grenzen dieser Anleitung.

Zusätze. Wird hier der Betrag r fl. nicht am Anfange, sondern am Ende eines jeden Jahres angelegt, so erhält man statt 1) den Ausdruck

$$E_n = \frac{r[(1 + p)^n - 1]}{p} \quad . . . . 4)$$

Beispiele.

1. Jemand legt durch 10 Jahre zu Anfang eines jeden derselben 230 fl. zu 5 Procent Zinseszins an; wie hoch wird das Capital in jener Zeit anwachsen?

$$r = 230, \ n = 10, \ p = 0{\cdot}05.$$

$$E_{10} = \frac{230.1{\cdot}05\,(1{\cdot}05^{10} - 1)}{0{\cdot}05} = \frac{230.1{\cdot}05.0{\cdot}62888}{0{\cdot}05} = 3037{\cdot}49.$$

Das Endcapital ist demnach 3037 fl. 49 kr.

2. Jemand will einer Person nach 15 Jahren bei einer Versorgungsanstalt eine Summe von 3000 fl. versichern. Welche jährliche Einlage muß er bis zu jener Zeit an die Anstalt machen, die Capitalisierung ganzjährig zu 4 Procent gerechnet?

$$n = 15, \ E_{15} = 3000, \ p = 0{\cdot}04.$$

$$r = \frac{3000.0{\cdot}04}{1{\cdot}04.(1{\cdot}04^{15} - 1)} = \frac{3000.0{\cdot}04}{1{\cdot}04.0{\cdot}80092} = 144{\cdot}06$$

Die jährliche Einlage beträgt also 144 fl. 6 kr.

3. Jemand legt durch 15 Jahre am Ende jedes halben Jahres 75 fl. in eine Sparkasse. Wie groß ist sein Ersparniß nach dieser Zeit, wenn die Sparkasse die Einlagen halbjährig zu 5 % verzinset?

$$r = 75, \ p = 0{\cdot}025, \ 2n = 30.$$

$$E_{30} = 75 . \frac{1{\cdot}025^{30} - 1}{0{\cdot}025} = 75 . \frac{1{\cdot}09757}{0{\cdot}025} = 3292{\cdot}71 \text{ fl.}$$

§. **268.** III. **Aufgabe.** Ein zu P % Zinseszins angelegtes Capital von A fl., welches durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres um den Betrag von r fl. vermehrt oder vermindert wird, habe nach dieser Zeit den Werth E_n. Man suche die Relation, welche zwischen A, r, P, n und E_n stattfindet.

In n Jahren wächst der Werth des Capitals A (§. 266 Formel 1) auf $A(1 + p)^n$, und der Werth aller Beträge, um welche das Capital jährlich vermehrt oder vermindert wurde, (§. 267, Formel 4) auf $\frac{r[(1 + p)^n - 1]}{p}$ an; es ist demnach der Endwerth des Capitals

$$E_n = A(1 + p)^n \pm \frac{r[(1 + p)^n - 1]}{p} \quad . . . . 1)$$

Daraus folgt

$$A = \frac{E_n p \mp r\,[(1 + p)^n - 1]}{p\,(1 + p)^n} \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

$$\pm r = \frac{p\,[E_n - A\,(1 + p)^n]}{(1 + p)^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

$$n = \frac{\log (E_n p \pm r) - \log (A\,p \pm r)}{\log (1 + p)} \ldots\ldots 4)$$

Zusatz. Nimmt man an, daß das Capital A durch die am Ende eines jeden Jahres erfolgende Verminderung um den Betrag r nach n Jahren vollständig erschöpft wird, d. h. ist A der gegenwärtige Werth, welchen die durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Beträge von r fl. haben, so gehen, weil $E_n = 0$ wird, die oben für $-r$ abgeleiteten Ausdrücke 2, 3 und 4 in die folgenden über:

$$A = \frac{r\,[(1 + p)^n - 1]}{p\,(1 + p)^n} \ldots\ldots 5)$$

$$r = \frac{A\,p\,(1 + p)^n}{(1 + p)^n - 1} \ldots\ldots 6)$$

$$n = \frac{\log r - \log (r - A\,p)}{\log (1 + p)} \ldots 7)$$

Beispiele.

1. Ein Capital von 1200 fl. steht auf Zinseszinsen zu 4%, und wird am Ende eines jeden Jahres um 80 fl. vermehrt; auf welche Summe erwächst es nach 18 Jahren?

$$A = 1200,\ r = 80,\ p = 0{\cdot}04,\ n = 18.$$

$$E_{18} = 1200.\ 1{\cdot}04^{18} + \frac{80.\ (1{\cdot}04^{18} - 1)}{0{\cdot}04}$$

$$= 1200.\ 2{\cdot}025817 + \frac{80.\ 1{\cdot}025817}{0{\cdot}04} = 4482{\cdot}61 \text{ fl.}$$

2. Nach wie viel Jahren sind von einem auf Zinseszinsen zu 5% ausgeliehenen Capital von 1060 fl. noch 167 fl. 22 kr. übrig, wenn am Ende eines jeden Jahres 80 fl. zurückgezahlt werden?

$$A = 1060,\ r = 80,\ p = 0{\cdot}05,\ E_n = 167{\cdot}22.$$

$$n = \frac{\log (80 - 167{\cdot}22.0{\cdot}05) - \log (80 - 1060.0{\cdot}05)}{\log 1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}423786}{0{\cdot}021189} = 20 \text{ Jahre.}$$

3. Jemand will eine Schuld von 3500 fl. dadurch tilgen, daß er dem Gläubiger durch 15 Jahre am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Abschlagszahlung leistet; wie viel muß die jährliche Zahlung bei 5% Zinseszins betragen?

$$A = 3500,\ n = 15,\ p = 0{\cdot}05.$$

$$r = \frac{3500.0{\cdot}05.1{\cdot}05^{15}}{1{\cdot}05^{15} - 1} = \frac{3500.\ 0{\cdot}05.\ 2{\cdot}078928}{1{\cdot}078928} = 337{\cdot}19 \text{ fl.}$$

4. Welchen gegenwärtigen Werth hat eine durch 25 Jahre am Ende eines jeden Jahres zahlbare Rente von 300 fl. bei 4½% Zinseszins?

$$r = 300,\ p = 0{\cdot}045,\ n = 25.$$

$$A = \frac{300\,(1{\cdot}045^{25} - 1)}{0{\cdot}045.\ 1{\cdot}045^{25}} = \frac{300.\ 2{\cdot}005434}{0{\cdot}045.\ 3{\cdot}005434} = 4448{\cdot}46 \text{ fl.}$$

§. **269.** IV. **Aufgabe.** Sei a der Betrag, welchen Jemand durch m Jahre am Anfang eines jeden Jahres bezahlt, um sich nach dieser Zeit bei P% Zinseszins den Bezug einer durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente b zu sichern. Man drücke die Beziehung zwischen a, m, P, n und b aus.

Die durch m Jahre gezahlten Beträge haben nach Verlauf von m Jahren (§. 267, Formel 1) den Werth

$$E_m = \frac{a(1+p)\{(1+p)^m - 1\}}{p}.$$

Die nach Verlauf von m Jahren beginnende, durch n Jahre zu beziehende Rente b hat (§. 268, Formel 5) den anfänglichen Werth

$$A = \frac{r[(1+p)^n - 1]}{p(1+p)^n}.$$

Da nun $E_m = A$ sein muß, so hat man

$$\frac{a(1+p)\{(1+p)^m - 1\}}{p} = \frac{r[(1+p)^n - 1]}{p(1+p)^n}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$a = \frac{r\{(1+p)^n - 1\}}{(1+p)^{n+1}\{(1+p)^m - 1\}} \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

$$r = \frac{a(1+p)^{n+1}\{(1+p)^m - 1\}}{(1+p)^n - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

$$m = \frac{\log[(1+p)^n\{r + a(1+p)\} - r] - \log a}{\log(1+p)} - (n+1) \ldots\ldots 3)$$

$$n = \frac{\log r - \log[r - a(1+p)\{(1+p)^m - 1\}]}{\log(1+p)} \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

Beispiele.

1. Welchen Betrag muß man durch 24 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres an eine Lebensversicherungsanstalt einzahlen, damit dieselbe bei 5% Verzinsung nach Ablauf dieser Zeit durch 9 Jahre am Ende eines jeden Jahres eine Rente von 100 fl. gewähren könne?

$$r = 100,\ m = 24,\ n = 9,\ p = 0{\cdot}05.$$

$$a = \frac{100.(1{\cdot}05^9 - 1)}{1{\cdot}05^{10}(1{\cdot}05^{24} - 1} = \frac{100.0{\cdot}551328}{1{\cdot}628895.2{\cdot}2251} = 15{\cdot}036 \text{ fl.}$$

2. Jemand zahlt durch 30 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres 34 fl. in eine Rentenbank, welche zu 4% verzinset; welche nachschußweise Rente wird ihm die Bank durch 7 Jahre nach der letzten Einzahlung geben können?

$$a = 34,\ m = 30,\ p = 0{\cdot}04,\ n = 7.$$

$$r = \frac{34.1{\cdot}04^8(1{\cdot}04^{30} - 1)}{1{\cdot}04^7 - 1} = \frac{34.1{\cdot}368569.2{\cdot}243397}{0{\cdot}315932} = 330{\cdot}41 \text{ fl.}$$

4. Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. **270**. Wenn sich in einer unendlichen Reihe die Summe der ersten n Glieder um so mehr einer bestimmten Grenze nähert, je größer n wird, so heißt die Reihe convergent, und diese Grenze die Summe der Reihe. Wenn dagegen die Summe der ersten n Glieder mit dem wachsenden n sich nicht einer bestimmten Grenze nähert, so heißt die Reihe divergent, und ihre Summe ist nicht bestimmbar. Eine unendliche divergente Reihe hat für die Mathematik keinen Werth.

Beispiel. Für die geometrische Progression

$$a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots$$

ist nach §. 262, 2.

$$s_n = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Ist nun $q > 1$, so wird mit dem wachsenden n auch q^n immer größer, und die Summe nähert sich keiner bestimmten Grenze; die Progession ist also divergent.

Für $q = 1$ ist $s_n = \frac{0}{0}$, also die Progression ebenfalls divergent.

Für $q = -1$ wird $s_n = 0$ oder $s_n = a$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; die Summe nähert sich also bei wachsendem n nicht einer bestimmten Grenze, sondern schwankt fortwährend zwischen 0 und a; die Reihe ist daher divergent.

Ist endlich $q < 1$, so nähert sich für wachsende n, q^n immer mehr der Null, und s_n ohne Ende der bestimmten Grenze $\frac{a}{1-q}$; die Progression ist in diesem Falle convergent (§. 262, Zusatz).

§. **271.** Bezeichnet s die Summe der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

s_n die Summe der ersten n Glieder, und e_n die Summe aller folgenden Glieder, welche letztere Summe man auch die Ergänzung der Reihe nennt, so ist

$$s = s_n + e_n.$$

Die Reihe convergiert, d. i. die Summe s_n nähert sich einer bestimmten Grenze, sobald sich die Ergänzung e_n bei dem unendlichen Wachsen von n ohne Ende der Null nähert; dieses ist aber nur möglich, wenn sich beim unendlichen Wachsen von n die Glieder a_{n+1}, a_{n+2}, ... selbst ohne Ende der Null nähern.

In einer convergenten Reihe müssen also von einer gewissen Stelle angefangen die auf einander folgenden Glieder immer kleiner werden. Jedoch genügt diese Bedingung allein noch nicht, um auf die Convergenz einer Reihe schließen zu können. Einen Beweis dafür liefert die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

deren Glieder ohne Ende abnehmen, die aber dessenungeachtet divergent ist. Denn es ist für dieselbe

$$e_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

daher

$$e_n > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

und um so mehr

$$e_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Kennzeichen der Convergenz und Divergenz.

§. **272.** 1. Nähert sich in der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einer bestimmten Grenze g um so mehr, je größer n wird, so ist die Reihe convergent, wenn diese Grenze kleiner als 1 ist.

Beweis. Setzt man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = g + \alpha_n, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = g + \alpha_{n+1}, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = g + \alpha_{n+2}, \ldots$$

wo α_n, α_{n+1}, ... nach der Voraussetzung der Null um so näher kommen, je größer n wird; so folgt

$$a_{n+1} = a_n (g + \alpha_n),$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} (g + \alpha_{n+1}) = a_n (g + \alpha_n)(g + \alpha_{n+1}),$$
$$a_{n+3} = a_{n+2} (g + \alpha_{n+2}) = a_n (g + \alpha_n)(g + \alpha_{n+1})(g + \alpha_{n+2})$$

u. s. w.

Durch Summierung erhält man die Ergänzung

$$e_n = a_n [(g + \alpha_n) + (g + \alpha_n)(g + \alpha_{n+1}) + (g + \alpha_n)(g + \alpha_{n+1})(g + \alpha_{n+2}) + \ldots]$$

und als Grenze, welcher sich e_n ohne Ende nähert, wenn n ohne Ende zunimmt und daher $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ unendlich klein werden, den Ausdruck

$$a_n (g + g^2 + g^3 + \ldots),$$

oder $$a_n \cdot \frac{g}{1-g} \text{ (§. 262, Zusatz).}$$

Da nun $\frac{g}{1-g}$ eine endliche Zahl ist, a_n aber der Null um so näher kommt, je größer n wird, so nähert sich bei wachsendem n auch $a_n \cdot \frac{g}{1-g}$, somit auch die Ergänzung e_n ohne Ende der Null; die Reihe ist somit convergent.

2. Nähert sich in der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einer bestimmten Grenze g um so mehr, je größer n wird, so ist die Reihe divergent, wenn diese Grenze größer als 1 ist.

Beweis. Man findet, wie in 1., für die Ergänzung e_n die Grenze

$$a_n (g + g^2 + g^3 + \ldots),$$

welche jedoch hier, weil die Glieder der Reihe $g + g^2 + g^3 + \ldots$ ohne Ende zunehmen, nicht Null ist; die Reihe ist daher divergent.

3. Eine unendliche Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder ist convergent, sobald die Glieder ohne Ende abnehmen.

Hat man die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+2} \mp a_{n+3} \pm \ldots$$

so ist die Ergänzung

$$e_n = \pm [a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots]$$

oder auch

$$e_n = \pm [a_{n+1} - a_{n+2} + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots].$$

Da die Glieder fortwährend abnehmen, so sind in diesen Gleichungen alle durch Klammern eingeschlossenen Differenzen positiv; es ist also der absolute Werth von e_n kleiner als a_{n+1} und größer als $a_{n+1} - a_{n+2}$, er nähert sich daher mit dem Wachsen von n, weil dabei a_{n+1} und a_{n+2} unendlich abnehmen, ohne Ende der Null; folglich ist die Reihe convergent.

Beispiele.

1) $$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \frac{1}{1.2.3..(n-1)} + \frac{1}{1.2.3..(n-1)n} + \ldots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n}.$$

Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähert sich mit dem Wachsen von n ohne Ende der Grenze 0, also ist die Reihe convergent.

2) $$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)x}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x.$$

Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähert sich, wenn n unendlich wächst, ohne Ende der Grenze x; die vorgelegte Reihe convergiert also für $x < 1$, und divergiert für $x > 1$.

3) Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \ldots$ ist convergent, weil darin ein regelmäßiger Zeichenwechsel vorkommt und die Glieder ohne Ende abnehmen.

Neunter Abschnitt.

Die Combinationslehre.

§. **273.** Gegebene Dinge nach einem bestimmten Gesetze in Gruppen zusammenzustellen, heißt combinieren im weiteren Sinne des Wortes. Die einzelnen Dinge werden Elemente, und die aus ihnen gebildeten Gruppen Complexionen genannt.

Zur schriftlichen Darstellung der Combinationen ist es am zweckmäßigsten, die Elemente durch die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche Zeiger oder Indices heißen, zu bezeichnen. Diese Zeiger bestimmen die Rangordnung der Elemente, so daß jenes Element das höhere ist, welches einen größeren Zeiger hat. Von zwei Complexionen heißt jene die höhere, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Complexion 1342 ist höher als jene 1324. Die niedrigste Complexion ist diejenige, in welcher kein höheres Element vor einem niedrigeren steht, in welcher also die Elemente in natürlicher Ordnung auf einander folgen; und jene die höchste, in welcher kein niedrigeres Element vor einem höheren steht, somit alle Elemente in umgekehrter Ordnung vorkommen.

Werden die Elemente anstatt durch Zeiger, durch Buchstaben bezeichnet, so ist dasjenige Element als ein höheres zu betrachten, welche im Alphabete später vorkommt.

§. **274.** Alle Combinationen scheiden sich ihrer Natur nach in Versetzungen und Verbindungen. Bei den Versetzungen kommt die verschiedene Anordnung der gegebenen Elemente, bei den Verbindungen ihre Auswahl in bestimmter Anzahl in Betracht. Wird auf die Anordnung, Anzahl und Auswahl der Elemente gleichzeitig Rücksicht genommen, so kommen Verbindungen und Versetzungen vereint vor.

Hiernach unterscheidet man drei Arten des Combinierens: das Permutieren, das Combinieren im engeren Sinne, und das Variieren.

Bei jeder dieser drei Combinationsarten kommt die wirkliche Bildung der Complexionen und die Zahl derselben in Betracht.

1. Das Permutieren.

§. **275.** Permutieren heißt, gegebene Elemente auf jede mögliche Weise versetzen, so jedoch, daß in jeder Gruppe alle Elemente vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n Elementen bezeichnet man durch P_n (Permutationszahl von n).

§. 276. **Bildung der Permutationen.**

Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, schreibe man zuerst die niedrigste Complexion der gegebenen Elemente an, leite aus dieser die nächst höhere, aus dieser wieder die nächst höhere, u. s. w. ab, bis man zur höchsten kommt. Man erhält aber aus jeder schon aufgestellten Complexion die nächst höhere, wenn man, in dieser Complexion von rechts nach links fortschreitend, das erste Element aufsucht, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres gesetzt werden kann, sodann dieses höhere Element an jene Stelle schreibt und die links vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die übrigen aber ihm in natürlicher Ordnung folgen läßt. Z. B.

123	abcd	bacd	cabd	dabc
132	abdc	badc	cadb	dacb
213	acbd	bcad	cbad	dbac
231	acdb	bcda	cbda	dbca
312	adbc	bdac	cdab	dcab
321	adcb	bdca	cdba	dcba

abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
abbcb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
abcbb	bacbb	bbbac	bcbba	cbbab
acbbb		bbbca		cbbba
		bbcab		
		bbcba		

§. 277. **Anzahl der Permutationen.**

1. Sind alle möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet und tritt zu diesen Elementen noch ein neues dazu, so kann dasselbe in jeder der früheren Permutationen den ersten oder zweiten, . . . oder $(n+1)$ten Platz, also $n+1$ verschiedene Stellungen einnehmen, so daß aus $n+1$ Elementen $(n+1)$mal so viel Permutationen entstehen, als aus n Elementen. Es ist also

$$P_{n+1} = P_n \,.\, (n+1).$$

Da nun ein Element nur eine einzige Stellung zuläßt, also

$$P_1 = 1$$

ist, so ist $\quad P_2 = 1.2,$

daher $\quad P_3 = 1.2.3,$

. . . .

allgemein $\quad P_n = 1.2.3\ldots(n-1)\,n;$

d. h. **die Permutationszahl von mehreren verschiedenen Elementen ist gleich dem Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente ausdrückt.**

Das Product $1.2.3.4\ldots(n-1).n$ pflegt man durch das Symbol $n!$ (Factorielle n) auszudrücken; daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!, \ldots P_n = n!$$

2. Wenn unter den gegebenen Elementen p **gleiche** vorkommen, so betrachte man diese einstweilen als verschieden; dann ist die Anzahl aller möglichen Permutationen $n!$. Denkt man sich nun diese Permutationen so in Abtheilungen gebracht, daß sich die Permutationen einer Abtheilung bloß durch die gegenseitige Stellung der als verschieden betrachteten p Elemente von einander unterscheiden, während die übrigen Elemente dieselbe Stelle einnehmen; so enthält jede dieser Abtheilungen so viele Permutationen, als man ihrer aus p Elementen bilden kann, also $p!$ Permutationen. Wenn man nun die als verschieden betrachteten Elemente wieder als einander gleich annimmt, so gelten alle $p!$ Complexionen einer Abtheilung

nur für eine Permutation; je $p!$ von den $n!$ Permutationen gehen in eine einzige über, und man hat somit nur $\frac{n!}{p!}$ verschiedene Permutationen.

Wenn sich unter den gegebenen n Elementen außer den p gleichen Elementen noch q andere gleiche Elemente befinden, so wiederholen sich die Schlüsse in gleicher Weise, so daß man als die Anzahl aller verschiedenen Permutationen $\frac{n!}{p!q!}$ erhält.

2. Das Combinieren.

§. **278.** Combinieren im engeren Sinne heißt, aus gegebenen Elementen alle Verbindungen zu einer bestimmten Anzahl von Elementen bilden, ohne daß jedoch in zwei Complexionen dieselben Elemente, auch nicht in anderer Reihenfolge, vorkommen dürfen. Die Elemente selbst können als Combinationen der ersten Classe angesehen werden, und heißen als solche Unionen; die Verbindungen zu zwei, drei, vier, ... Elementen nennt man Combinationen der zweiten, dritten, vierten, ... Classe, oder auch Amben, Ternen, Quaternen u. s. w.

Man unterscheidet Combinationen ohne und mit Wiederholungen, je nachdem in einer Complexion ein Element nur einmal, oder beliebig oft vorkommen darf.

Die Anzahl aller möglichen Combinationen der $r$ten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch C_n^r, die Anzahl derselben mit Wiederholungen durch $C_n^{w,\,r}$, bezeichnet.

§. **279.** Bildung der Combinationen.

1. Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, stelle man jedes Element vor jedes höhere Element.

Sind einmal die Combinationen einer bestimmten Classe gebildet, so erhält man daraus die Combinationen der nächst höheren Classe, wenn man jede frühere Complexion vor jedes Element setzt, welches höher ist als die darin vorkommenden.

So erhält man aus den fünf Elementen a, b, c, d, e nachfolgende

Amben ohne Wiederh.	Ternen ohne Wiederh.
ab, ac, ad, ae;	abc, abd, abe; acd, ace; ade;
bc, bd, be;	bcd, bce; bde;
cd, ce;	cde;
de;	

u. s. w.

2. Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen zu bilden, setze man jedes Element vor sich selbst und vor jedes höhere Element.

Hat man einmal die Combinationen irgend einer Classe mit Wiederholungen gebildet, so erhält man daraus alle Combinationen der nächst höheren Classe, wenn man jede frühere Combination zuerst vor das höchste darin vorkommende Element und dann noch vor jedes höhere Element stellt.

So geben die vier Elemente 1, 2, 3, 4 folgende

Amben mit Wiederh.
11, 12, 13, 14;
22, 23, 24;
33, 34;
44;

Ternen mit Wiederh.	111, 112, 113, 114;	122, 123, 124;	133, 134;	144;
	222, 223, 224;	233, 234;	244;	
	333, 334;	344;		
	444;			

u. s. w.

§. 280. Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen.

Sind n Elemente gegeben, so wird man alle Amben ohne Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit allen übrigen verbindet, nur mit sich selbst nicht; dadurch entstehen aus jedem der n Elemente $n - 1$ Amben, also im Ganzen $n(n - 1)$ Amben. Allein unter diesen kommt jede Ambe 2mal vor, z. B. die Ambe ab, indem man a mit b, und b mit a verbindet, daher geben n Elemente nur $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Amben.

Denkt man sich überhaupt alle Combinationen der rten Classe ohne Wiederholungen von n Elementen gebildet, so wird man alle Combinationen der $(r + 1)$ten Classe erhalten, wenn man jede frühere Combination mit allen in ihr nicht vorkommenden Elementen verbindet; jede der früheren C_n^r Combinationen wird auf diese Art mit $n - r$ Elementen verbunden und gibt somit $n - r$ Combinationen der $(r + 1)$ten Classe, so daß man ihrer im Ganzen $C_n^r (n - r)$ bekommt. Allein jede neue Combination wird $(r + 1)$mal vorkommen, weil man immer je r andere Elemente davon mit dem $(r + 1)$ten verbinden kann; es wird somit nur $C_n^r . \frac{n-r}{r+1}$ verschiedene Combinationen der $(r + 1)$ten Classe geben; man hat somit

$$C_n^{r+1} = C_n^r . \frac{n-r}{r+1}.$$

Da nun

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \quad 2}$$

ist, so hat man

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3}$$

folglich

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4},$$

. . . .

allgemein

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; \ldots \;.\; (r-1) \;.\; r}.$$

Den letzten Bruch, dessen arithmetischer Bau leicht zu überblicken ist, pflegen die Mathematiker durch das Symbol $\binom{n}{r}$, welches gelesen wird: „n über r“, auszudrücken. Es ist daher

$$C_n^2 = \binom{n}{2},\; C_n^2 \binom{n}{3},\; \ldots\; C_n^r = \binom{n}{r}.$$

§. 281. Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

Sind n Elemente gegeben, so wird man alle Amben mit Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit sich selbst und noch mit allen n Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, verbindet; jedes der n Elemente gibt auf diese Weise verbunden $n + 1$ Amben, alle n Elemente geben also $n(n + 1)$ Amben. Weil nun darunter jede Ambe zweimal vorkommt, so ist $\frac{n(n+1)}{2}$ die Anzahl aller verschiedenen Amben mit Wiederholungen.

Denkt man sich überhaupt alle Combinationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen gebildet, so wird man daraus alle Combinationen der $(r+1)$ten Classe erhalten, wenn man jede frühere Combination zuerst mit den r Elementen, welche darin vorkommen, und dann noch mit allen n Elementen verbindet; jede der $C_n^{w,\,r}$ früheren Combinationen gibt dadurch $n+r$ neue Combinationen und man wird somit zusammen $C_n^{w,\,r}\,.\,(n+r)$ Combinationen der $(r+1)$ten Classe erhalten. Aber jede solche Combination kommt $(r+1)$mal vor, weil man immer je r andere Elemente davon mit dem $(r+1)$ten verbinden kann; es ist daher

$$C_n^{w,\,r+1} = C_n^{w,\,r}\,.\,\frac{n+r}{r+1}.$$

Da nun

$$C_n^{w,\,2} = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

ist, so hat man

$$C_n^{w,\,3} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

folglich

$$C_n^{w,\,4} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

allgemein

$$C_n^{w,\,r} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r-2)\,(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(r-1)\,.\,r}.$$

Wenn man in diesem Bruche die Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung schreibt, wodurch der Bruch die Form

$$\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\ldots(n+2)\,(n+1)\,.\,n}{1\,.\,2\ldots(r-2)\,(r-1)\,.\,r}$$

annimmt, so kann man denselben nach der in §. 280 angeführten Bezeichnungsweise durch $\binom{n+r-1}{r}$ ausdrücken. Es ist daher

$$C_n^{w,\,2} = \binom{n+1}{2},\quad C_n^{w,\,3} = \binom{n+2}{3},\ldots\, C_n^{w,\,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

3. Das Variieren.

§. 282. Variieren heißt, aus gegebenen Elementen durch Verbindung und Versetzung derselben alle möglichen Zusammenstellungen bilden. Das Variieren ist demnach das Combinieren in Verbindung mit dem Permutieren.

Wie die Combinationen, unterscheidet man auch die Variationen in die der ersten, zweiten, dritten, ... Classe, ferner in Variationen ohne und mit Wiederholungen.

Die Anzahl aller möglichen Variationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch V_n^r, und die Zahl derselben mit Wiederholungen durch $V_n^{w,\,r}$ bezeichnet.

§. 283. Bildung der Variationen.

1. Um aus mehreren gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen zu bilden, setzt man jedes Element vor jedes der übrigen Elemente.

Sind überhaupt die Variationen irgend einer Classe ohne Wiederholungen gebildet, so erhält man die Variationen der nächst höheren Classe, wenn man jede frühere Variation vor jedes in ihr nicht vorkommende Element setzt.

So geben die Elemente 1, 2, 3, 4 folgende

Variationen der 2. Classe ohne Wiederholungen:

12, 13, 14;
21, 23, 24;
31, 32, 34;
41, 42, 43;

Variationen der 3. Classe ohne Wiederholungen:

123, 124; 132, 134; 142, 143;
213, 214; 231, 234; 241, 243;
312, 314; 321, 324; 341, 342;
412, 413; 421, 423; 431, 432;

u. s. w.

2. Um aus mehreren gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen zu erhalten, setzt man jedes Element vor jedes Element, auch sich selbst nicht ausgenommen.

Hat man bereits die Variationen irgend einer Classe mit Wiederholungen dargestellt, so bildet man daraus die Variationen der nächst höheren Classe, wenn man jede frühere Variation vor jedes Element setzt.

Aus den drei Elementen a, b, c erhält man daher folgende

Variationen der 2. Classe mit Wiederholungen:

aa, ab, ac;
ba, bb, bc;
ca, cb, cc;

Variationen der 3. Classe mit Wiederholungen:

aaa, aab, aac; aba, abb, abc; aca, acb, acc;
baa, bab, bac; bba, bbb, bbc; bca, bcb, bcc;
caa, cab, cac; cba, cbb, cbc; cca, ccb, ccc;

u. s. w.

§. **284**. Zahl der Variationen ohne Wiederholungen.

Man erhält die Variationen der rten Classe ohne Wiederholungen aus den Combinationen der rten Classe ohne Wiederholungen, wenn man in jeder Combination die darin vorkommenden Elemente permutiert.

Die Anzahl der Combinationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen ist $\binom{n}{r}$; aus jeder solchen Combination lassen sich durch Permutation der r Elemente r! Variationen der rten Classe ohne Wiederholungen bilden; folglich ist

$$V^r_n = \binom{n}{r} . r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1).$$

§. **285**. Zahl der Variationen mit Wiederholungen.

Sind n Elemente gegeben, so gibt jedes derselben n Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen, somit ist n^2 die Anzahl aller solcher Variationen.

Ist überhaupt die Anzahl aller Variationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen bekannt, so ist, da jede solche Variation durch Verbindung mit allen n Elementen n Variationen der (r + 1)ten Classe gibt,

$$V^{w,\,r+1}_n = V^{w,\,r}_n . n.$$

Da nun
$$V_n^{w,\,2} = n^2,$$
ist, so hat man
$$V_n^{w,\,3} = n^3,$$
folglich
$$V_n^{w,\,4} = n^4,$$
allgemein
$$V_n^{w,\,r} = n^r.$$

4. Der binomische Lehrsatz.

§. **286.** Unter dem binomischen Lehrsatze versteht man die Entwicklung der Potenz eines Binoms in eine Reihe, welche nach den fallenden Potenzen des ersten und den steigenden Potenzen des zweiten Gliedes des Binoms geordnet ist.

Jede Potenz eines Binoms mit einem ganzen positiven Exponenten kann aus dem Producte mehrerer Binome, welche das erste Glied gemeinschaftlich haben, hergeleitet werden, indem man in denselben auch die zweiten Glieder gleichsetzt. So geht das Product
$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e),$$
wenn man $b = c = d = e = a$ setzt, in die Potenz $(x + a)^5$ über.

§. **287.** Das Product mehrerer Binome.

Um das Product $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) \ldots$ zu entwickeln, multipliciere man zuerst die zwei ersten Binome mit einander, ihr Product mit dem dritten Binom, u. s. w. Man erhält

$(x + a)(x + b)$
$$= x^2 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab,$$
$(x + a)(x + b)(x + c)$
$$= x^3 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc,$$
$(x + a)(x + b)\,x + c)(x + d)$
$$= x^4 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} abc \\ abd \\ acd \\ bcd \end{matrix}\right\} x + abcd, \text{ u. s. w.}$$

Das in diesen Producten herrschende Gesetz ist leicht zu ersehen. Das erste Glied eines jeden Productes ist die sovielte Potenz von x, als Binomialfactoren gegeben sind; in den folgenden Gliedern nehmen die Exponenten von x in natürlicher Ordnung ab, bis im letzten Gliede $x^0 - 1$, d. i. gar kein x erscheint. Der Coefficient des ersten Gliedes ist 1, der Coefficient des zweiten, dritten, vierten,... Gliedes ist bezüglich die Summe der Combinationen der ersten, zweiten, dritten,... Classe aus den zweiten Gliedern der Binome, jede dieser Complexionen als ein Product der darin vorkommenden Elemente aufgefaßt.

Gilt nun dieses Bildungsgesetz für ein Product von n Binomialfactoren $x + a, x + b, \ldots x + p$, so daß
$(x + a)(x + b) \ldots (x + p)$
$$= x^n + S_1(a..p)\,x^{n-1} + S_2(a..p)\,x^{n-2} + .. + S_{n-}(a..p)\,x + S_n(a..p)$$

sei, wo allgemein $S_r(a..p)$ die Summe aller Combinationen der rten Classe aus den n Elementen a, b,...p, die einzelnen Complexionen als Producte aufgefaßt, bezeichnet, so gilt dasselbe Gesetz auch, wenn noch ein neuer Factor $x+q$ dazu tritt. Man erhält nämlich

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+p)(x+q)$$
$$= x^{n+1} + \left\{\begin{matrix} S_1(a..p) \\ q \end{matrix}\right\} x^n + \left\{\begin{matrix} S_2(a..p) \\ S_1(a..p).q \end{matrix}\right\} x^{n-1} + .. + \left\{\begin{matrix} S_n(a..p) \\ S_{n-1}(a..p).q \end{matrix}\right\} x + S_n(a..p).q.$$

Nun ist

$$S_1(a..p) + q = a + b + \ldots + p + q = S_1(a..q).$$

Ferner ist $S_2(a..p)$ die Summe der Amben von a, b,..p, und $S_1(a..p).q$ die Summe der Amben, welche man erhält, wenn man die Unionen a, b,..p mit dem neuen Elemente q verbindet; folglich ist $S_2(a..p) + S_1(a..p).q$ die Summe aller Combinationen der zweiten Classe aus den Elementen a, b,.. p, q; also

$$S_2(a..p) + S_1(a..p)\,q = S_2(a..q).$$

Eben so folgt

$$S_3(a..p) + S_2(a..p)\,q = S_3(a..q),$$
$$S_4(a..p) + S_3(a..p)\,q = S_4(a..q),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n(a..p) + S_{n-1}(a..p)\,q = S_n(a..q).$$

Endlich ist

$$S_n(a..p).q = ab..pq = S_{n+1}(a..q).$$

Man hat daher

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+p)(x+q)$$
$$= x^{n+1} + S_1(a..q)\,x^n + S_2(a..q)\,x^{n-1} + .. + S_n(a..q)\,x + S_{n+1}(a..q).$$

Das oben angeführte Bildungsgesetz gilt also für ein Product von $n+1$ Binomialfactoren, wenn es für ein Product von n solchen Factoren richtig ist. Nun gilt es aber nach dem Obigen für 2, 3, 4 Factoren, folglich gilt es auch für 5, folglich auch für 6 Factoren, u. s. w., mithin allgemein für jede Zahl von Factoren.

§. 288. Die Potenz eines Binoms.

Setzt man in dem Producte von n Binomialfactoren

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+p)$$
$$= x^n + S_1(a..p)\,x^{n-1} + S_2(a..p)\,x^{n-2} + S_3(a..p)\,x^{n-3} + .. + S_{n-1}(a..p)\,x + S_n(a..p)$$

die zweiten Glieder a, b, c,..p alle = a, so wird

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+p) = (x+a)^n,$$

ferner

$$S_1(a..p) = a + b + .. + p = a + a + .. + a = \binom{n}{1} a,$$
$$S_2(a..p) = ab + ac + .. + op = a^2 + a^2 + .. + a^2 = \binom{n}{2} a^2,$$
$$S_3(a..p) = abc + abd + .. + mop = a^3 + a^3 + .. + a^3 = \binom{n}{3} a^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{n-1}(a..p) = abc..mo + .. = a^{n-1} + a^{n-1} + .. + a^{n-1} = \binom{n}{n-1} a^{n-1},$$
$$S_n(a..p) = abc\ldots mop = a^n \qquad = \binom{n}{n} a^n.$$

Durch Substitution in dem obigen Ausdruck erhält man daher für den binomischen Lehrsatz die Formel

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \binom{n}{1} a^3 x^{n-3} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + \binom{n}{n} a^n.$$

In dieser Formel herrscht folgendes Bildungsgesetz:

1. Die Potenzen des ersten Gliedes x des Binoms erscheinen fallend, jene des zweiten Gliedes a steigend geordnet. Der Exponent von x ist im ersten Gliede gleich dem Potenzexponenten n des Binoms, in jedem folgenden Gliede um 1 kleiner und wird im letzten Gliede $= 0$, woraus zugleich folgt, daß die ganze Reihe ein Glied mehr hat, als der Potenzexponent n des Binoms Einheiten enthält. Die Exponenten von a nehmen umgekehrt von 0 bis n zu. Die Summe der Exponenten von x und a ist in jedem Gliede gleich n.

2. Der Coefficient des ersten Gliedes ist 1; der Coefficient des zweiten, dritten, vierten,...rten Gliedes ist bezüglich gleich der Anzahl aller Combinationen der ersten, zweiten, dritten,...$(r-1)$ten Classe von n Elementen ohne Wiederholungen.

3. Ist a negativ, so wird das zweite, vierte,.. überhaupt jedes gerade Glied negativ; man hat

$$(x - a)^n = x^n - \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + (-1)^n \binom{n}{n} a^n.$$

4. Bezeichnet man die Glieder der Binomialreihe folgeweise durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$(x \pm a)^n = A_1 \pm A_2 + A_3 \pm A_4 + \ldots$$

oder

$$(x \pm a)^n = x^n \pm \frac{n}{1} \cdot \frac{a}{x} \cdot A_1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a}{x} \cdot A_2 \pm \frac{n-2}{3} \cdot \frac{a}{x} \cdot A_3 + \ldots$$

welche Form zur Ableitung eines jeden Gliedes aus dem nächst vorhergehenden besonders bequem ist.

Zur unmittelbaren Bestimmung irgend eines Gliedes der Binomialreihe dient das allgemeine Glied $\binom{n}{r} a^r x^{n-r}$.

Beispiele.

1) $(a + b)^6 =$

$$= a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + b^6$$
$$= a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6.$$

2) $(a - b)^5 =$

$$= a^5 - \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 - \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 - b^5$$
$$= a^5 - 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 - 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 - b^5.$$

3) $(3x - 2y)^4 =$

$$= (3x)^4 - \binom{4}{1} . (3x)^3 . 2y + \binom{4}{2} . (3x)^2 . (2y)^2 - \binom{4}{3} . 3x . (2y)^3 + (2y)^4$$
$$= 81 x^4 - 4 . 27 x^3 . 2y + 6 . 9 x^2 . 4 y^2 - 4 . 3x . 8 y^3 + 16 y^4$$
$$= 81 x^4 - 216 x^3 y + 216 x^2 y^2 - 96 x y^3 + 16 y^4.$$

4) Das 7te Glied von $(2x^2 - 3y)^9$ ist $\binom{9}{6} . (2x^2)^{9-6} . (-3y)^6$

$$= 84 \ . \ 8x^6 \ . \ 729 y^6 = 489888 x^6 y^6.$$

289. Eigenschaften der Binomialcoefficienten.

1. Je zwei vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehende Coefficienten sind einander gleich.

Der $(r+1)$te Binomialcoefficient vom Anfange ist

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2\ \ldots\ (r-1)r}.$$

Der $(r+1)$te Binomialcoefficient vom Ende ist der $(n-r+1)$te vom Anfange, also

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)\ldots(r+2)(r+1)}{1.2\ldots(n-r-1)(n-r)}.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit

$$(r+1)(r+2)\ldots(n-r-1)(n-r),$$

so erhält man

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots(r+2)(r+1)}{1.2\ldots r(r+1)\ldots(n-r-1)(n-r)};$$

folglich ist

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Daraus folgt, daß man bei der Entwicklung der Binomialreihe die Binomialcoefficienten nur bis zum mittleren Gliede, und für ein ungerades n bis zu den zwei mittleren, mit gleichen Coefficienten versehenen Gliedern zu bestimmen braucht, weil sich dann die Coefficienten in umgekehrter Ordnung wiederholen.

Zusatz. Aus $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ergibt sich für $r = 0$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

2. Die Summe aus dem $(r+1)$ten und dem nächstvorhergehenden Binomialcoefficienten einer Potenz ist gleich dem $(r+1)$ten Binomialcoefficienten der um 1 höheren Potenz.

Es ist $\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+3)(n-r+2)}{1.2\ldots\ldots\ldots(r-2)(r-1)}$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(r-1)r};$$

daher

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2\ldots\ldots(r+1)r}\{r+(n-r+1)\}$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots r}$$
$$= \binom{n+1}{r}.$$

Mittelst dieses Satzes kann man aus den Binomialcoefficienten irgend einer Potenz jene der nächst höheren Potenz durch bloße Addition ableiten. Man erhält dadurch für die auf einander folgenden Potenzen eines Binoms folgende Coefficienten:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

u. s. w.

Diese Zahlen sind unter dem Namen des Pascal'schen Dreieckes bekannt.

3. Die Summe aller Binomialcoefficienten für die nte Potenz ist gleich 2^n.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

4. Die algebraische Summe der abwechselnd positiven und negativen Binomialcoefficienten ist gleich Null.

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

§. **290**. Die Binomialreihe für ganze negative Exponenten.

1. Die Binomialformel ist bisher nur für ganze positive Exponenten erwiesen worden; es wurde nämlich von der Voraussetzung ausgegangen, daß n die Anzahl der gleichen Binomialfactoren bedeutet, unter welcher Annahme n nothwendig eine ganze positive Zahl sein muß.

Es läßt sich nun zeigen, daß der binomische Lehrsatz auch für negative Exponenten giltig ist.

Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots$$

Man drücke diese Reihe, welchen Werth auch immer n haben möge, durch R_n (Reihe n) aus, so ist

$$R_n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Denkt man sich eine zweite Reihe, welche auf dieselbe Art von p abhängt, wie die frühere von n, wo p was immer für eine Zahl bedeutet, so wird diese Reihe der früheren Bezeichnung zu Folge R_p heißen, und man hat

$$R_p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \ldots$$

Multipliciert man die beiden Reihen R_n und R_p mit einander, so wird auch das Product als ein nach x steigend geordnetes Polynom erscheinen. Dieses Product wird nach den Gesetzen der Multiplication auf einerlei Art gebildet, was immer für Werthe n und p haben mögen; man braucht also nur die Beschaffenheit des Productes für den Fall zu kennen, wenn n und p ganze positive Zahlen bedeuten, weil dasselbe Bildungsgesetz auch in den übrigen Fällen stattfinden muß. Sind n und p ganze positive Zahlen, so kann man das Product der beiden Reihen auch ohne wirkliche Multiplication derselben finden; es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$R_n = (1+x)^n$$
$$R_p = (1+x)^p$$

$$\text{daher } R_n \,.\, R_p = (1+x)^{n+p}.$$

Weil aber n + p eine ganze Zahl vorstellt, so ist

$$(1+x)^{n+p}$$
$$= 1 + \binom{n+p}{1} x + \binom{n+p}{2} x^2 + \binom{n+p}{3} x^3 + \ldots = R_{n+p},$$

somit

$$R_n \,.\, R_p = R_{n+p}.$$

Dieser Ausdruck ist für ganze positive Werthe von n und p abgeleitet worden; nach dem oben Gesagten muß er auch gelten, wenn n und p was immer für andere Werthe haben, folglich muß er allgemein giltig sein.

Setzt man in diesem Ausdrucke $p = -n$, so ist
$$R_n \cdot R_{-n} = R_{n-n} = R_0.$$
Aber
$$R_0 = 1 + \binom{0}{1} x + \binom{0}{2} x^2 + \ldots = 1,$$
daher
$$R_n R_{-n} = 1, \text{ und } R_{-n} = \frac{1}{R_n}.$$
Bedeutet nun n eine positive ganze Zahl, so ist
$$R_n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots = (1+x)^n,$$
daher hat man
$$R_{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}.$$
Aber nach der obigen Bezeichnung ist
$$R_{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots,$$
daher
$$(1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots,$$
wo $-n$ jede beliebige negative ganze Zahl bedeuten kann.

Daraus folgt, daß die durch R_n ausgedrückte Reihe auch dann, wenn n eine negative ganze Zahl ist, die Potenz $(1+x)^n$ vorstellt.

Die letzte Reihe kann man auch so darstellen:
$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1} . x + \frac{n(n+1)}{1.2} . x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} . x^3 + \ldots$$

2. Ist der Exponent n eine ganze positive Zahl, so muß die Entwicklungsreihe mit dem $(n+1)$ten Gliede, welches $\binom{n}{n} b^n$ ist, abbrechen, da der Coefficient $\binom{n}{n+1}$ des nächstfolgenden Gliedes und die aller folgenden Glieder gleich Null werden. Ist dagegen n eine negative Zahl, so wird kein Glied kommen, dessen Coefficient gleich Null wäre; man erhält daher eine unendliche Reihe, und diese ist nur dann brauchbar, wenn sie convergiert. Untersucht man die Bedingung ihrer Convergenz nach §. 272, so findet man als Quotienten zweier auf einander folgender Glieder
$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{n+r-1}{r} . x = -\left(\frac{n-1}{r} + 1\right) . x.$$
Der Quotient $\frac{A_{r+1}}{A_r}$ nähert sich nun, wenn r unendlich wächst, ohne Ende der Grenze $-x$; die Reihe convergiert also, sobald $x < 1$ ist.

Zusatz. Da $(x+a)^{-n} = x^{-n}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-n}$ ist, so hat man
$$(x+a)^{-n} = x^{-n}\left\{1 + \binom{-n}{1} . \frac{a}{x} + \binom{-n}{2} . \frac{a^2}{x^2} + \binom{-n}{3} . \frac{a^3}{x^3} + \ldots\right\}$$
$$= x^{-n} + \binom{-n}{1} a x^{-n-1} + \binom{-n}{2} a^2 x^{-n-2} + \binom{-n}{3} a^3 x^{-n-3} + \ldots,$$
welche Reihe für $\frac{a}{x} < 1$ oder $a < x$ convergiert.

Beispiele.

1) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

2) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

3) $(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2 a^{-3} b + 3 a^{-4} b^2 - 4 a^{-5} b^3 + \ldots$

§. **291**. Die Binomialreihe für gebrochene Exponenten.

1. Haben R_n und R_p die dafür in §. 290 eingeführte Bedeutung, so ist

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}.$$

Es seien nun R_q, R_r, R_s, ... ähnliche Reihen wie R_n und R_p, so hat man

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q = R_{n+p} \cdot R_q = R_{n+p+q},$$
$$R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r = R_{n+p+q} \cdot R_r = R_{n+p+q+r};$$

allgemein

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r \cdot R_s \ldots = R_{n+p+q+r+s+} \ldots$$

Setzt man nun $n = p = q = r = s = \ldots$ so ist

$$R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot \ldots = R_{n+n+n+n+n+} \ldots,$$

oder wenn die Anzahl solcher Factoren k ist, wo k dann offenbar eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$(R_n)^k = R_{kn}$$

Da n was immer für eine Zahl bedeuten kann, so sei $n = \frac{h}{k}$, wo h und k relative Primzahlen sind, und h irgend eine ganze positive Zahl vorstellt; man erhält

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = R_h.$$

Nun ist für den Fall, wo h eine ganze Zahl bedeutet, nach §§. 288 und 290

$$R_h = (1 + x)^h,$$

daher ist auch

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = (1 + x)^h,$$

oder, wenn man beide Theile zur Potenz $\frac{1}{k}$ erhebt,

$$R_{\frac{h}{k}} = (1 + x)^{\frac{h}{k}}.$$

Vermöge der eingeführten Bezeichnung ist aber

$$R_{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots,$$

also auch

$$(1 + x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots,$$

wo $\frac{h}{k}$ jeden positiven oder negativen Bruch bedeuten kann.

Daraus folgt, daß die durch R_n ausgedrückte Reihe auch dann, wenn n einen Bruch $\frac{h}{k}$ bedeutet, die Potenz $(1 + x)^n$ vorstellt.

Die letzte Reihe kann man auch so darstellen:

$$(1 + x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k} \cdot x + \frac{h\,(h - k)}{2 \cdot k^2} \cdot x^2 + \frac{h\,(h - k)\,(h - 2k)}{2 \cdot 3 \cdot k^3} \cdot x^3 + \ldots$$

2. Die Entwicklungsreihe für $(1 + x)^{\frac{h}{k}}$ ist unendlich, weil h und k relative Primzahlen sind und folglich keiner der Binomial-Coefficienten Null werden kann; sie ist daher nur brauchbar, wenn sie convergiert.

Da sich der Quotient zweier auf einander folgender Glieder

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{h - (r - 1)\,k}{r k} \cdot x = \left(\frac{h + k}{r k} - 1\right) x$$

bei dem unendlichen Wachsen von r ohne Ende der Grenze $- x$ nähert, so ist nach §. 272, 1 die Reihe convergent, wenn $x < 1$ ist.

Zusatz. Da $(x+a)^{\frac{h}{k}} = x^{\frac{h}{k}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{h}{k}}$ ist, so hat man

$$(x+a)^{\frac{h}{k}} = x^{\frac{h}{k}}\left\{1+\binom{\frac{h}{k}}{1}\cdot\frac{a}{x}+\binom{\frac{h}{k}}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\binom{\frac{h}{k}}{3}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\ldots\right\}$$

$$= x^{\frac{h}{k}}+\binom{\frac{h}{k}}{1}\cdot a x^{\frac{h}{k}-1}+\binom{\frac{h}{k}}{2} a^2 x^{\frac{h}{k}-2}+\ldots,$$

welche Reihe für $\frac{a}{x} < 1$ oder $a < x$ convergiert.

Beispiele.

1) $$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1.-1}{2.2^2}\cdot x^2+\frac{1.-1.-3}{2.3.2^3}\cdot x^3+\ldots$$
$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots$$

2) $$(a\pm b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}\left(1\pm\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}\left\{1\pm\binom{\frac{1}{m}}{1}\cdot\frac{b}{a}+\binom{\frac{1}{m}}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right.$$
$$\left.\pm\binom{\frac{1}{m}}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}+\ldots\right\};$$

oder

$$\sqrt[m]{a\pm b} = a^{\frac{1}{m}}\left\{1\pm\frac{1}{m}\cdot\frac{b}{a}-\frac{m-1}{2m^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\pm\frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdots\right\}.$$

Mittelst dieser Formel kann man eine irrationale Wurzel $\sqrt[m]{A}$ annäherungsweise bestimmen, wenn man $A = a^m + x$ oder $A = a^m - x$ setzt, wobei a^m so zu wählen ist, daß es der Zahl A möglich nahe kommt.

3. $$\sqrt{79} = \sqrt{81-2} = \sqrt{81}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{81}} = 9\left(1-\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 9\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{81}-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{81}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{2}{81}\right)^3-\ldots\right\}$$
$$= 9\cdot(1-0{\cdot}0123456-0{\cdot}0000762-0{\cdot}0000009-\ldots)$$
$$= 8{\cdot}88819\ldots$$

5. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. **292.** Die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

Sind unter mehreren gleich möglichen Fällen einige dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses günstig, die übrigen dagegen ungünstig, so heißt das Verhältnis der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Bezeichnet a die Zahl der einem Ereignisse günstigen und b die Zahl der ihm ungünstigen Fälle, so ist, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses durch w ausgedrückt wird,

$$w = \frac{a}{a+b}.$$

Je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind oder je größer a ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses; sind alle Fälle günstig, so ist das Stattfinden gewiß und man hat, da $b = 0$ ist, als das mathematische Symbol der Gewißheit

$$w = \frac{a}{a} = 1.$$

Je weniger günstige Fälle vorkommen, desto geringer wird auch die Wahrscheinlichkeit; ist gar kein Fall günstig, so ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, und man hat, da $a = 0$ ist, für das mathematische Symbol der Unmöglichkeit

$$w = \frac{0}{b} = 0.$$

Der Begriff des Wahrscheinlichen im gewöhnlichen Leben ist, wie aus dieser Darstellung hervorgeht, ein beschränkter, und bezieht sich nur auf den Fall, wo die Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$ ist; wogegen man ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, unwahrscheinlich zu nennen pflegt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis nicht eintreffen werde, heißt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Sie wird durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler die Anzahl aller ungünstigen und der Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Bezeichnet man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit durch w', so ist

$$w' = \frac{b}{a + b},$$

und man hat
$$w + w' = \frac{a + b}{a + b} = 1,$$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses und jener für das Nichteintreffen gibt die Einheit, somit die Gewißheit; was auch ganz natürlich erscheint, da es gewiß ist, daß jenes Ereignis entweder eintreffen oder nicht eintreffen muß.

Aus $w + w' = 1$ folgt $w' = 1 - w$. Kennt man daher die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses, so wird die Wahrscheinlichkeit für das Gegentheil erhalten, wenn man die erstere Wahrscheinlichkeit von der Einheit subtrahiert.

Beispiele.

1) Wirft man zwei Spielwürfel A und B, deren sechs Seiten nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Puncten oder Augen bezeichnet sind, auf's Gerathewohl auf den Tisch, so sind in Bezug auf die Zahlen, welche auf der obersten Seite der beiden Würfel stehen, folgende Fälle gleich möglich:

AB	AB	AB	AB	AB	AB
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Es sind also 36 Fälle gleich möglich, und es lassen sich leicht folgende Aufgaben lösen:

a) Um die Summe 5 zu werfen, sind vier Fälle günstig, nämlich 14, 23, 32, 41. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln 5 Augen zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Dieser Ausdruck, welcher anzeigt, daß in 9 Würfen die Summe 5 einmal geworfen werde, ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn man in den ersten neun Würfeln die Summe 5 gerade einmal werfen müßte; man kann diese Summe vielleicht gar nicht, oder gerade einmal, oder auch mehr als einmal werfen; aber wenn man sehr viele Würfe macht, so wird sich das Verhältnis der Anzahl der Würfe, wo man 5 wirft, zu der gesammten Anzahl der Würfe um so mehr dem Verhältnisse 1 : 9 nähern, je länger das Spiel fortgesetzt wird. Der wirkliche Erfolg wird der durch Zahlen ausgedrückten

Wahrscheinlichkeit um so näher kommen, je größer die Anzahl der Versuche ist; und in diesem Sinne ist die mathematische Wahrscheinlichkeit stets aufzufassen.

Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 5 nicht zu werfen, ist $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 3 und 5 zu werfen, ist, da nur zwei Fälle 35 und 53 günstig sind, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch, d. i. zwei gleiche Zahlen zu werfen, ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2) In einer Urne befinden sich 10 weiße und 6 rothe Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daraus eine weiße Kugel zu ziehen?

$$w = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8}.$$

Eben so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich die, eine rothe Kugel zu ziehen, $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

3) Die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie geben 90 Unionen, 4005 Amben, 117480 Ternen, während die 5 gezogenen Nummern nur 5 Unionen, 10 Amben und 10 Ternen zulassen.

Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte genannte Nummer (Nominate) zu treffen, ist, da jede der 90 Nummern gerade die so vielte gerufen werden kann, als vorher bestimmt wurde, $\frac{1}{90}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine bestimmte Nummer unter den gezogenen vorkomme (Extrate), ist $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{1}{400 \cdot 5}$; und jene, mit drei genannten Nummern einen Terno zu machen, $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$.

§. **293**. Bezeichnet a_n die Anzahl derjenigen Personen, die von einer gewissen Anzahl gleichzeitig Geborner in einem Alter von n Jahren noch leben, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von n Jahren das (n + r)te Jahr erreichen werde,
$$w = \frac{a_{n+r}}{a_n},$$
weil von a_n im Alter von n Jahren noch lebenden Personen nur a_{n+r} in der günstigen Lage sind, ein Alter von n + r Jahren zu erreichen, somit a_{n+r} die Anzahl der günstigen, und a_n die Anzahl aller möglichen Fälle ist.

Wie viele von einer gewissen Anzahl gleichzeitig Geborner in einem bestimmten Alter noch leben, findet man in den sogenannten Sterblichkeitstabellen angegeben. Hier folgt die

Süßmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel.

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
0	1000	14	515	28	451	42	360	56	246	70	112	84	20
1	750	15	511	29	445	43	353	57	237	71	103	85	17
2	661	16	507	30	439	44	346	58	228	72	94	86	14
3	618	17	503	31	433	45	339	59	219	73	85	87	12
4	592	18	499	32	427	46	332	60	210	74	77	88	10
5	579	19	495	33	421	47	324	61	201	75	69	89	8
6	567	20	491	34	415	48	316	62	192	76	62	90	6
7	556	21	486	35	409	49	308	63	182	77	55	91	5
8	547	22	481	36	402	50	300	64	172	78	49	92	4
9	539	23	476	37	395	51	291	65	162	79	43	93	3
10	532	24	471	38	388	52	282	66	152	80	37	94	2
11	527	25	466	39	381	53	273	67	142	81	32	95	1
12	523	26	461	40	374	54	264	68	132	82	28	96	0
13	519	27	456	41	367	55	255	69	122	83	24		

Z. B. Nach dieser Sterblichkeitstabelle leben von 1000 gleichzeitig Gebornen im Alter von 24 Jahren noch 471, im Alter von 50 Jahren noch 300 Personen; die Wahrscheinlichkeit, daß eine 24jährige Person das 50ste Jahr erreichen werde, ist demnach $\frac{300}{471} = 0 \cdot 637$..

Unter der wahrscheinlichen Lebensdauer einer Person versteht man diejenige Anzahl von Jahren, nach deren Verlauf die Wahrscheinlichkeit noch zu leben der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich ist. Bezeichnet man die wahrscheinliche Lebensdauer für eine Person von n Jahren mit x, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Person nach x Jahren noch leben werde,

$$\frac{a_{n+x}}{a_n},$$

und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{a_{n+x}}{a_n};$$

daher

$$\frac{a_{n+x}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n},$$

woraus

$$a_{n+x} = \frac{a_n}{2}$$

folgt.

Um daher die wahrscheinliche Lebensdauer einer Person von n Jahren mittelst der Sterblichkeitstafeln zu finden, suche man die Anzahl der im nten Jahre noch Lebenden, nehme davon die Hälfte und suche das Lebensjahr auf, in welchem die Anzahl der noch Lebenden jener Hälfte gleich ist; dieses Jahr zeigt das wahrscheinliche Alter an, welches die Person erreichen wird.

Z. B. Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 27jährigen Person? Nach der obigen Tabelle ist

$$a_{27} = 456, \text{ daher } \frac{a_{27}}{2} = 228.$$

Sucht man nun darin die Zahl 228 auf, so findet man sie bei dem Alter von 58 Jahren. Die wahrscheinliche Lebensdauer einer 27jährigen Person beträgt also 58—27 = 31 Jahre.

Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. **294**. Die bisher betrachtete Wahrscheinlichkeit, wobei nur ein Ereignis an und für sich betrachtet wird, heißt die absolute Wahrscheinlichkeit, im Gegensatze zu der relativen, welche sich auf die Vergleichung zweier bestimmter Ereignisse bezieht. Gesetzt, es spielen zwei Spieler mit zwei Würfeln so, daß A gewinnt, wenn er 10 Augen wirft, und B, so oft er 7 Augen wirft, während alle andern Würfe weder Gewinn noch Verlust bringen. Man will nun die Wahrscheinlichkeit wissen, welche vorhanden ist, mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 10 als 7, oder umgekehrt, eher 7 als 10 zu werfen. Offenbar braucht man hier nicht so wie bei der Bestimmung der absoluten Wahrscheinlichkeit, alle möglichen Fälle in Betrachtung zu ziehen, sondern nur diejenigen, welche den beiden Ereignissen günstig sind. Der Summe 10 sind 3, der Summe 7 dagegen 6 Fälle günstig; zählt man daher diejenigen Fälle gar nicht, wo weder 10 noch 7 fällt, so sind nur 9 Fälle möglich, und es ist die relative Wahrscheinlichkeit, eher die Summe 10 als jene 7 zu werfen, $\frac{3}{9}$; und die relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 10 zu werfen, $\frac{6}{9}$. Die

Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten gibt die Einheit, wie es auch sein muß, da es gewiß, ist, daß man entweder eher 10 als 7, oder eher 7 als 10 werfen muß.

Sind überhaupt s gleich mögliche Fälle, welche verschiedene Ereignisse herbeiführen können, und vergleicht man nur die Ereignisse A und B, deren einem m und dem andern n Fälle günstig sind, so ist die relative Wahrscheinlichkeit W für das erste Ereignis $\frac{m}{m+n}$, und die relative Wahrscheinlichkeit W′ für das zweite Ereignis $\frac{n}{m+n}$.

Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten auch aus den absoluten herleiten. Es ist nämlich, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B beziehungsweise durch w und w′ bezeichnet,

$$W = \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w}{w+w'}$$

$$W' = \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w'}{w+w'}.$$

Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist also gleich dem Quotienten aus der absoluten Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses und der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Beispiele.

1) Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Summe 5 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, und die absolute Wahrscheinlichkeit, 7 zu werfen, $\frac{6}{36}$. Es ist daher die relative Wahrscheinlichkeit, eher 5 als 7 zu werfen,

$$W = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{4}{4+6} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

und die relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 5 zu werfen,

$$W' = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{6}{4+6} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

2) In einer Urne sind 4 weiße, 6 blaue und 8 rothe Kugeln. Die absolute Wahrscheinlichkeit,

eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{4}{18}$,
„ rothe „ „ „ „ $\frac{8}{18}$;

daher die relative Wahrscheinlichkeit,

eher eine weiße als eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

eher eine rothe als eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. **295.** Wenn die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Berechnung mehrerer einfacher Wahrscheinlichkeiten beruht, so heißt eine solche Wahrscheinlichkeit eine *zusammengesetzte*. Sie ist zweifacher Art; entweder schließt sich das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gegenseitig aus und es kann unter mehreren fraglichen Ereignissen nur eines stattfinden, oder es sollen zwei oder mehrere Ereignisse in Verbindung mit einander gleichzeitig oder nach einander eintreffen.

§. **296**. Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen.

Wenn in einer Urne 3 weiße, 4 rothe, 5 gelbe und 6 blaue Kugeln sich befinden, so ist

die absolute Wahrscheinlichkeit, daraus eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{3}{18}$;

" " " " " rothe " " " $\frac{4}{18}$;

" " " " " gelbe " " " $\frac{5}{18}$.

Will man nun die Wahrscheinlichkeit wissen, daß entweder eine weiße oder eine rothe oder eine gelbe Kugel gezogen werde, so sind dem Eintreffen dieses Ereignisses $3 + 4 + 5 = 12$ Fälle günstig; die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, rothe oder gelbe Kugel zu ziehen, ist daher

$$\frac{12}{18} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + \frac{5}{18}.$$

Ist allgemein s die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, von denen m dem Ereignisse A, n dem Ereignisse B, p dem Ereignisse C, . . . also $m+n+p\ldots$ für das Eintreffen irgend eines unter den Ereignissen A, B, C, . . . günstig sind, so ist, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch w', w'', w''', . . ., und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse durch W bezeichnet,

$$w' = \frac{m}{s},\ w'' = \frac{n}{s},\ w''' = \frac{p}{s}, \ldots$$

und

$$W = \frac{m+n+p+\ldots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{p}{s} + \ldots$$

oder

$$W = w' + w'' + w''' + \ldots$$

d. i. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Die absolute Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten

eine Coeur-Figur zu ziehen, ist . . . . $\frac{3}{32}$,

eine Coeur, die keine Figur ist, zu ziehen . . . . . $\frac{5}{32}$,

eine Careau-Figur zu ziehen . . . . $\frac{3}{32}$,

eine Careau, die keine Figur ist, zu ziehen . . . . $\frac{5}{32}$.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit,

eine Coeur überhaupt zu ziehen $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$,

eine rothe Figur zu ziehen . . . . $\frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$,

eine blaßrothe Karte zu ziehen . $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$,

ein rothes Blatt zu ziehen . . . . $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} + \frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{2}$.

§. **297**. Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse.

In einer Urne A befinden sich 4 weiße und 6 rothe Kugeln, in einer zweiten B 6 weiße und 8 rothe Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man, wenn man aus beiden Urnen zugleich zieht, aus jeder eine weiße Kugel ziehe?

Beim Ziehen aus der Urne A sind 10 Fälle, aus der Urne B 14 Fälle möglich; also gibt es, da man bei jedem der 10 möglichen Züge aus A jeden der 14 möglichen Züge aus B machen kann, beim gleichzeitigen Ziehen aus beiden Urnen $10 . 14 = 140$ gleich mögliche Fälle. Für das Ziehen einer weißen Kugel aus A sind 4, aus B 6 Fälle günstig; man hat daher, da jeder der 4 ersteren Fälle mit jedem der 6 letzteren zusammentreffen kann, für das gleichzeitige Ziehen einer weißen Kugel aus beiden Urnen $4 . 6 = 24$ günstige Fälle. Es ist somit die Wahrscheinlichkeit, aus beiden Urnen zugleich eine weiße Kugel zu ziehen,

$$\frac{24}{140} = \frac{4\ 6}{10.14} = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{14}.$$

Es sei nun allgemein W die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B, deren ersterem m′ Fälle günstig und n′ Fälle ungünstig, dem letzteren m″ Fälle günstig und n″ Fälle ungünstig sind. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind

$$w' = \frac{m'}{m' + n'},\ w'' = \frac{m''}{m'' + n''}.$$

Da nun jeder der m′ dem Ereignisse A günstigen Fälle mit jedem der m″ dem Ereignisse B günstigen Fälle zusammen eintreffen kann, so gibt es für das Zusammentreffen beider Ereignisse m′ m″ günstige Fälle. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist

$$(m' + n')\,(m'' + n''),$$

weil jeder der $m' + n'$ bei A möglichen Fälle mit jedem der $m'' + n''$ bei B möglichen Fälle zusammentreffen kann. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Ereignisse A und B zusammen eintreffen,

$$W = \frac{m'\,m''}{(m' + n')\,(m'' + n'')} = \frac{m'}{m' + n'} \cdot \frac{m''}{m'' + n''} = w'\,w''.$$

Sind eben so w′, w″, w‴, . . . die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse A, B, C,. . ., so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse

$$W = w'\,w''\,w'''\ldots,$$

d. h. **die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Producte aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse.**

Beispiele. 1) Es seien die 32 Karten nach den Farben in vier Packete eingetheilt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Coeur-König zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, die Hand auf das Packet der Coeurs zu legen, ist $\frac{1}{4}$; die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Packet den König zu ziehen, $\frac{1}{8}$; daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

2) Die Urne A hat 5 weiße und 7 rothe Kugeln, die Urne B 3 weiße und 4 rothe; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf's Gerathewohl aus einer dieser Urnen eine rothe Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, in die Urne A zu greifen, ist $\frac{1}{2}$; jene, daraus eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{7}{12}$; folglich die Wahrscheinlichkeit, aus A eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne B eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, aus der ersten oder zweiten Urne eine rothe Kugel zu ziehen, ist daher $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7}{24} + \frac{1}{7} = \frac{97}{168}$.

§. **298.** **Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen desselben Ereignisses.**

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten Wurfe einen Pasch zu werfen, ist $\frac{1}{6}$; jene im zweiten Wurfe wieder einen Pasch zu werfen, auch $\frac{1}{6}$;

die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß man zweimal nach einander Pasch werfe, ist daher $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^2$. Eben so wird die Wahrscheinlichkeit, dreimal nach einander einen Pasch zu werfen, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^3$ sein.

Ist überhaupt w die absolute Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Ereignis eintreffe, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß jenes Ereignis 2=, 3=, 4=,...rmal nach einander eintreffe,

$$\begin{aligned} w_2 &= w \cdot w = w^2, \\ w_3 &= w \cdot w \cdot w = w^3, \\ w_4 &= w \cdot w \cdot w \cdot w = w^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_r &= w \cdot w \cdot w \ldots \text{rmal} = w^r; \end{aligned}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis mehrere Male nach einander stattfinde, ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreffen, erhoben zur sovielten Potenz, als Wiederholungen stattfinden sollen.

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander die Summe 7 zu werfen? — Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 einmal zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, also die Wahrscheinlichkeit, diese Summe 3mal nach einander zu werfen, $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.

§. **299.** Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Combinationen mehrerer Ereignisse.

Es seien s gleich mögliche Fälle, von denen m′ dem Ereignisse A, und m′ dem Ereignisse B günstig sind; so ist, wenn die absolute Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden von A durch w′, und jene für das Stattfinden von B durch w″ bezeichnet wird,

$$w' = \frac{m'}{s}, \; w'' = \frac{m''}{s}.$$

Es ist nun die Wahrscheinlichkeit,

daß A eintrifft . . . . w′
„ A nicht eintrifft . . . . . 1 — w′
„ B eintrifft . . . . w″
„ B nicht eintrifft . . . . . 1 — w″
„ A eintrifft, B nicht . . . w′ (1 — w″)
„ A nicht eintrifft, aber B . (1 — w′) w″
„ A und B eintreffen . . . w′ w″
„ A und B nicht beide eintreffen 1 — w′ w″
„ weder A noch B eintrifft . (1— w′) (1 — w″)
„ entweder A oder B eintrifft 1 — (1 — w′) (1 — w″).

Auf gleiche Weise läßt sich, wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten w′, w″, w‴ für das Stattfinden dreier Ereignisse A, B, C bekannt sind, daraus die Wahrscheinlichkeit für jede Combination finden, die in Bezug auf das wechselseitige Eintreffen und Nichteintreffen jener drei Ereignisse möglich ist. So erhält man z. B. für die Wahrscheinlichkeit, daß unter diesen drei Ereignissen wenigstens eines eintreffe, den Ausdruck

$$1 - (1 - w')\,(1 - w'')\,(1 - w''').$$

Beispiele.

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln, wenn nicht auf den ersten, so doch im zweiten Wurf 9 Augen zu werfen?

Hier ist $w' = \frac{1}{9}$ und $w'' = \frac{1}{9}$, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit
$$1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{8}{9} = \tfrac{17}{81}.$$

2) Ein Mann ist 28 und seine Frau 21 Jahre alt. Man soll den Grad der Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß nach 20 Jahren noch der Mann, oder daß die Frau, oder daß beide noch am Leben seien; oder daß der Mann schon todt sei, oder daß die Frau, oder daß schon beide todt seien; oder daß die Frau den Mann, oder der Mann die Frau überlebe; oder daß wenigstens eines von beiden lebe, oder daß wenigstens eines von ihnen schon todt sei.

Nach der Süßmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstabelle leben von 1000 zugleich gebornen Menschen

nach 21 Jahren noch 486,
„ 28 „ „ 451,
„ 41 „ „ 367,
„ 48 „ „ 316.

Es ist daher die Wahrscheinlichkeit des Mannes, noch 20 Jahre zu leben,
$$w' = \frac{316}{451} = 0 \cdot 7007.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Frau noch 20 Jahre lebe,
$$w'' = \frac{367}{486} = 0 \cdot 7551;$$

daher die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren beide noch leben,
$$w' \, w'' = \frac{316}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0 \cdot 5291.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren der Mann schon todt sei, ist
$$1 - w' = 1 - \frac{316}{451} = \frac{135}{451} = 0 \cdot 2993,$$

jene, daß die Frau schon todt sei,
$$1 - w'' = 1 - \frac{367}{486} = \frac{119}{486} = 0 \cdot 2449,$$

und daß beide schon todt seien,
$$(1 - w')(1 - w'') = \frac{135}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0 \cdot 0733.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren der Mann schon todt sei und die Frau noch lebe, ist
$$(1 - w') \, w'' = \frac{135}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0 \cdot 2260,$$

und jene, daß nach dieser Zeit der Mann die Frau überlebe,
$$w' (1 - w'') = \frac{316}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0 \cdot 1716.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren wenigstens eines von beiden todt sei, ist
$$1 - w' \, w'' = 1 - \frac{316}{451} \cdot \frac{367}{486} = 0 \cdot 4709,$$

und jene, daß wenigstens eines von ihnen noch lebe,
$$1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - \frac{135}{451} \cdot \frac{119}{486} = 0 \cdot 9267.$$

§. **300**. **Mathematische Erwartung und rechtmäßiger Einsatz bei Wetten und Glücksspielen.**

Wenn mit dem Eintreffen eines Ereignisses der Besitz eines physischen Gutes oder ein Gewinn erworben werden kann, so hat derselbe vor dem Eintreffen jenes Ereignisses einen Werth, welcher von dem Grade der Wahrscheinlichkeit abhängt, die für das Stattfinden des Ereignisses vorhanden ist; man nennt diesen Werth die *mathematische Erwartung*. Trifft das Ereignis gewiß ein, so wird auch der Gewinn mit Gewißheit erworben und der zu erwartende Gewinn hat auch vor dem Eintreffen des Ereignisses seinen vollen Werth. Sind aber unter den Ursachen, wovon das Stattfinden des Ereignisses abhängt, a günstige und b ungünstige, so wird das Ereignis nicht mit Gewißheit, sondern unter $a + b$ Fällen nur in a Fällen eintreffen, und es wird daher auch der zu erwartende Gewinn nicht mit dem vollen Werthe in Aussicht gestellt werden können, sondern nur mit dem so vielten Theile, als die Wahrscheinlichkeit w, ihn zu erhalten, anzeigt. Heißt daher e die mathematische Erwartung und g der zu erwartende Gewinn, so ist

$$e = \frac{a}{a+b} \cdot g = wg,$$

d. h. *die mathematische Erwartung eines Gewinnes ist gleich dem Producte aus dem Gewinne und der Wahrscheinlichkeit desselben.*

Beispiele. 1) Jemand kann, wenn er mit zwei Würfeln die Summe 5 wirft, 2 fl. gewinnen; wie groß ist seine mathematische Erwartung?

Die Wahrscheinlichkeit, 5 Augen zu werfen, ist $\frac{1}{9}$; daher

$$e = \tfrac{1}{9} \cdot 2 = \tfrac{2}{9} \text{ fl.}$$

2) Jemand setzt auf zwei Nummern unserer Zahlenlotterie 1 fl. und hat, wenn seine beiden Nummern gezogen werden, 240 fl. zu gewinnen; welches ist seine mathematische Erwartung?

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, daher

$$e = \frac{2}{801} \cdot 240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267} \text{ fl.}$$

§. **301**. Bei Wetten, Lotterien und anderen Glücksspielen wird eine bestimmte Summe eingesetzt und dafür im glücklichen Falle eine bestimmte Summe gewonnen. Soll nun der Einsatz dem zu erwartenden Gewinne gegenüber auf richtiger Grundlage beruhen, so muß die mathematische Erwartung des Einsetzers denselben Werth haben, wie sein Einsatz. Der Grundsatz, auf welchem jede rechtmäßige Wette und jedes rechtmäßige Spiel beruht, ist also:

Der Einsatz muß der mathematischen Erwartung gleich sein.

Man hat daher für den Einsatz e dieselbe Formel, wie für die mathematische Erwartung, nämlich

$$e = wg,$$

woraus

$$g = \frac{e}{w}$$

folgt, d. h. *der Gewinn ist gleich dem Einsatze, dividiert durch die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens.*

Heißen e' und e'' die Einsätze zweier Spieler, welche beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit w' und w'' haben, einen Gewinn g zu erhalten, so ist

$$e' = w'g \text{ und } e'' = w''g,$$

daher

$$e' : e'' = w' : w'',$$

d. h. *die Einsätze müssen den Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, proportioniert sein.*

Beispiele. 1) A wettet gegen B, daß er mit zwei Würfeln einen Pasch wirft.

Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für A $\frac{1}{6}$, für B $\frac{5}{6}$; es müssen sich also auch die Einsätze der beiden Spieler, wenn die Wette rechtmäßig sein soll, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder wie $1 : 5$ verhalten, d. h. B muß 5mal so viel einsetzen als A.

2) In unserer Zahlenlotterie ist die Wahrscheinlichkeit,

eine Extrate zu treffen . . . . $\frac{1}{18}$,

eine Nominate zu machen . . . . . . $\frac{1}{90}$,

mit zwei Nummern einen Ambo zu machen . . $\frac{1}{400 \cdot 5}$,

mit drei Nummern einen Terno zu machen . . $\frac{1}{11748}$.

Nimmt man nun z. B. 1 fl. als Einsatz an, so müßte, wenn die Gewinne mit dem Einsatze in einem richtigen Verhältnis stehen würden, als Gewinn gezahlt werden

für die Extrate . . $1 : \frac{1}{18} = 18$ fl.,

für die Nominate . $1 : \frac{1}{90} = 90$ fl.,

für die Ambo . . $1 : \frac{1}{400 \cdot 5} = 400 \cdot 5$ fl.,

für den Terno . . $1 : \frac{1}{11748} = 11748$ fl.

Da nun nach den Lotto-Gesetzen für die Extrate nur der 14fache, für die Nominate der 67fache, für den Ambo der 240fache, für den Terno der 4800fache Einsatz als Gewinn bezahlt wird, so ist leicht zu ersehen, daß sich das Lotto ungeachtet der Verwaltungskosten dem spielenden Publicum gegenüber im Vortheile befindet.

Anhang.

Uebungsaufgaben.

I. Grundoperationen mit absoluten ganzen Zahlen.

1. Summen.

(§§. 13 — 15.)

1. $(x + 2) + 6 =$

2. $(4a + 7) + 5 =$

3. $8 + (6 + a) =$

4. $15 + (6a + 5) =$

5. $x + 3x =$

6. $6a + 9a =$

7. $5x + 7x + x =$

8. $(x + 3) + (x + 1) =$

9.
$$\begin{array}{r} 9x + 2a \\ 5x + a \\ \hline 14x + 3a \end{array}\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{r}9x\\5x\end{array}}\right\} \text{Summanden} \\ \text{Summe} \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 3a + 4m \\ 3a + 2m \\ \hline \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} a + 5 \\ 7a + 1 \\ \hline \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} 6m + 5n \\ m + 7n \\ 8m + n \\ \hline \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{r} 5\,(a + m) \\ 3\,(a + m) \\ 4\,(a + m) \\ \hline \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{r} a + 2b + 3c \\ 2a + 3b + c \\ 3a + b + 2c \\ \hline \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{r} 3x + 5\,(3m + 2n) \\ 5x + 6\,(3m + 2n) \\ x + 9\,(3m + 2n) \\ \hline \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{r} 8m + 7n + 6p + 5q \\ 9m + 6n + 7p + 4q \\ 7m + 5n + 8p + 6q \\ \hline \end{array}$$

Man substituiere in folgenden Summen $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, und gebe die Werthe derselben an:

17. $a + 3b + 5c$;

18. $3\,(a + b) + 5c$;

19. $3a + 5\,(b + c)$;

20. $3b + 5\,(a + c)$.

2. Differenzen.

(§§. 19 — 29.)

21. $(a - 2) + 5 =$

22. $6 + (a - 4) =$

23. $(2x - 4) + (3x - 1) =$

24. $(x + 7) - 2 =$

25. $(3a - 4) - 5 =$

26. $12 - (4 + m) =$

27. $(3a - 4b) - (c - 2d) =$

28. $(5x - 2y) - (x - 2y) =$

29. $(a + b) + (a - b) =$

30. $(a + b) - (a - b) =$

31. $3a - 2a =$

32. $(7a - 3a) + 4a =$

33. $x + (8x - 5x) =$

34. $(9m + m) - 4m =$

35. $(16p - 7p) - 8p =$

36. $7y - (3y + 1) =$

37. $5a - 3b$ Min.
$2a - b$ Subtr.
$- \quad +$
$3a - 2b$ Diff.

38. $7b + 3c$
$2b - 2c$

39. $2x - 3y$
$x - 2y$

40. $20x - 27y + 12z$
$15x - y + 12z$

41. $7n + n - 6n =$

42. $5a - 4a + 8a =$

43. $7x - 3x + 4x - x =$

44. $3m - m + 9m - 4m - 3m =$

45. $5a + 7b - 2b + 9a - 3b - 4a =$

46. $8x + (5x - 8a) + (8a - 3x) - 6x =$

47. $7a + (8a - 2) + (9 - 2a) - 10 =$

48. $(9x - 7y) + (2x + 3y) - (5x - 8y) =$

49. $(12x - 7y) - [a - (3x - 2y)] =$

50. $3c + 7 + [(4b - 2c) + (2c + 8)] =$

51. $8m - 5y + [(2y - 7m) + (3m - y)] =$

52. $(2x - 3y) + (2y - x) + [5x + (6y - 1)] =$

53. $7x - [(3a - 4x) - (5x - 1)] - (x - 2a + 2) =$

54. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c) =$

55. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)] =$

56. $(a + b + c) + (a + b - c) + (a - b + c) + (b + c - a) =$

57. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c) =$

58. $(7m - 5x) - [(4n - 3x) - (4m + x)] - (2m - 3n + 4x) =$

59. $(a + 2b - 3) + [(2a - b) - (5b - 4) - (a - b)]$
$- \{(4a + 3b) - [(7a - 2b) - (a - 3)]\} =$

Man bestimme die Werthe folgender Ausdrücke für $a = 4$ und $b = 3$

60. $8a + 6b - 5a - 4b - 2a + b;$

61. $(8a + 6b - 5a - 4b) - (2a + b);$

62. $(8a + 6b - 5a) - (4b - 2a + b);$

63. $(8a + 6b) - (5a - 4b - 2a + b);$

64. $(8a + 6b) - (5a - 4b) - (2a + b);$

65. $(8a + 6b) - 5a - [4b - (2a + b)];$

66. $(8a + 6b) - [(5a - 4b) - (2a + b)];$

67. $(8a + 6b) - [(5a - 4b) - 2a] + b.$

3. Producte.

(§§. 33 — 40.)

68. $4ab + 8ab =$

69. $5x^2 + 9x^2 =$

70. $8abc + abc =$

71. $a.10^2 + b.10^2 =$

72. $2n^2 + 3n^2 =$

73. $3(a + x) + 4(a + x) =$

74. $7mn + 3mn + mn =$

75. $ax^2 + bx^2 + x^2 =$

76. $10ab - 7ab =$

77. $bm^3 - m^3 =$

78. $a.10^2 - b.10^2 =$

79. $4a + 4b =$

80. $3x - 3y =$

81. $7x + 7y - 7 =$

82. $am - bm + m =$

83. $my + 5my - 3my - 8my =$

84. $3n^2 - n^2 + 4n^2 - 3n^2 + 7n^2 =$

85. $a(x + 2) - 3b(x + 2) + 3a(x + 2) =$

86. $(13ab - 5cd) + (12cd - 4ab) =$

87. $(3a^2 - 4a + 5) - (3a^2 - 5a + 4) =$

88. $\begin{array}{r} 8mx + 5ny \\ 3mx - 7ny \\ mx - 3ny \\ \hline \end{array}$

89. $\begin{array}{r} 20a^4 + 3a^3 - 4a^2 \\ - 2a^3 + 3a^2 - 4a \\ + 2a^2 - 3a + 4 \\ \hline \end{array}$

90. $(6ax - 5by) - (by + 3cz) + (3cz - 5ax) =$

91. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) =$

92. Welchen Werth hat der Ausdruck
$4a(3x^2 - 5xy + 4y^2) - 5b(2x^2 - 3xy + y^2)$
für $a = 5$, $b = 3$, $x = 7$, $y = 4$?

93. A hat $(4n^3 - 3n^2 + 2n - 1)$ Gulden, B hat $(2n^3 + 2n^2 - 4n + 4)$ Gulden weniger als A; wenn nun A von seinem Gelde $(n^3 - 2n^2 + 4n - 6)$ Gulden an B abtritt, wie viele Gulden hat darnach ein jeder? Wie viele Gulden hatte jeder anfänglich, wie viele zuletzt, wenn $n = 8$ ist?

---

94. $3a.b =$
95. $2a.5b =$
96. $3ab.7 =$
97. $mn.np =$
98. $8mn.7m =$
99. $2ab.7cd =$
100. $a.5abc =$
101. $9x.5x =$
102. $2x^3.4x =$
103. $3a^2.8b^2 =$
104. $7a^2x.ax^2 =$
105. $6m^2n^3.5mn^2 =$
106. $a.2a.3a =$
107. $xy.xy.xy =$
108. $mn.mp.np =$
109. $3a.7a.2a =$
110. $6ab.5ab.4ab =$
111. $a^2.a^3.a^4 =$
112. $a^m.a^n.a^p.a^q =$
113. $a^8b.5a^2b.8ab^3 =$
114. $4m^2np.5mn^2p.6mnp^2 =$
115. $x^3.3x^2y.3xy^2.y^3 =$

---

116. $(a + 1).b =$
117. $(a - 1).b =$
118. $a.(b - 1) =$
119. $(m + n).2p =$
120. $3x.(a - b) =$
121. $(3a - 4b).5c =$
122. $(1 + 3x).4x =$
123. $(2x^2 - x).3x =$
124. $(a^2b + ab^2).ab =$
125. $(5a - 2b + 1).7 =$
126. $6a.(a^2 + 5a - 9) =$
127. $(m + 2m^2 - 3m^3).5m^3 =$
128. $(2mx - 5ny + 3pz).3ab =$
129. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z).6z^2 =$
130. $mnp.(5mx - 4ny - 6pz) =$
131. $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y).12x^2y =$
132. $(4m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - n^3).3m^2n^2 =$
133. $(5a^2b^3 + 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5).4a^2b^4 =$

---

134. $(a + 1)^2 =$
135. $(a - 1)^2 =$
136. $(a + 2)^2 =$
137. $(2a - 1)^2 =$
138. $(4a - 2b)^2 =$
139. $(2a^2 + 3b^2)^2 =$
140. $(a + 1)(a - 1) =$
141. $(a + 2)(a - 2) =$
142. $(3a + 2b)(3a - 2b) =$
143. $(5a + 2b)(3c - d) =$
144. $(a^2 - b)(2a^2 + 3b) =$
145. $(3x^2 + 2y^2)(4x^2 + 5y^2) =$
146. $(a + 2b + 3c)(3m + 2n) =$
147. $(2a - b + 3c)(5m - n) =$
148. $(x^2 + xy + y^2)(x - y) =$
149. $(x^2 - xy + y^2)(x + y) =$

150. $(x^2 - 2x + 1)(6x - 3) =$
151. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)(a - 2b) =$
152. $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a + 1) =$
153. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) =$
154. $(x - 2y - 3z)(3x + 2y - z) =$
155. $(16x^4 + 3x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2) =$
156. $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)(2a^2 - 3b^3) =$
157. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) =$
158. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) =$
159. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2) =$
160. $(3a - b)(a^2 - 2ab + 3b^2)(2a^3 - 3b^3) =$
161. $2x^2.(a^2 - 3a + 4) + 5a^2.(x - 5)(2x + 3) =$
162. $(m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 2m + 1)(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) =$
163. $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).5xyz =$
164. $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$
$(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) =$

4. Quotienten.

(§§. 44 — 56.)

165. $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a} =$ 166. $\frac{3a}{m} + \frac{5a}{m} =$

167. $\frac{7m}{n} + \frac{m}{n} =$ 168. $\frac{6a}{m} - \frac{5a}{m} =$

169. $\frac{2x + 4}{5p} - \frac{x}{5p} =$ 170. $\frac{9a}{4n} - \frac{5a}{4n} =$

171. $\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = a,$ 172. $\frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = b;$

d. h. die halbe Summe zweier Zahlen um die halbe Differenz derselben vermehrt oder vermindert gibt bezüglich die erste oder die zweite jener Zahlen.

173. $\frac{2a - b}{m} + \frac{b}{m} - \frac{a}{m} =$ 174. $\frac{3x}{mn} + \frac{6x}{mn} - \frac{9x}{mn} =$

175. $\frac{x + 1}{2x + 1} + \frac{x}{2x + 1} =$ 176. $\frac{6a}{b} - \frac{4(a - 2)}{b} + \frac{4a - 2}{b} =$

177. $\frac{7a - 2b}{a - b} - \frac{2a - 3b}{a - b} - \frac{a + 2b}{a - b} =$

178. $\frac{17x + 12y}{x + y} - \frac{3x - 7y}{x + y} + \frac{2x - 3y}{x + y} =$

179. $\frac{ac + bc - c^2}{abc} + \frac{ab - b^2 + bc}{abc} + \frac{ab + ac - a^2}{abc} =$

180. $\frac{a}{b}.bm =$ 181. $\frac{a}{bc}.abc =$

182. $\frac{2x}{5y}.5ax =$ 183. $mn.\frac{m}{np} =$

184. $15x.\frac{4y}{3x} =$ 185. $\frac{4a}{9b}.18b^2 =$

186. $5am.\frac{b}{a} =$ 187. $\frac{xy}{z}.\frac{xz}{y} =$

188. $\frac{mn}{p}.\frac{mp}{n}.\frac{np}{m} =$ 189. $\frac{5a^2b}{6mn^2}.\frac{7an^2}{8bm^2} =$

190. $\left(\frac{3a}{m} - \frac{3b}{n} + 5\right) . 4mn =$ **191.** $(a+1)x . \frac{b-1}{a+1} . \frac{c}{x} =$

192. $\frac{a(x-1)}{3(a+1)} . \frac{m-n}{x-1} . \frac{b(a+1)}{a} =$

---

193. $5ab : a =$ **194.** $15mn : 3m =$

195. $8amx : 2ax =$ **196.** $8a^2c : 54c =$

197. $7a^3p : a^2 =$ **198.** $12x^6 : 3x^4 =$

199. $10ax^7 : ax =$ **200.** $mx^{n+1} : x^n =$

201. $28a^5b^2 : 7a^3b =$ **202.** $4x . 5y : 5x =$

203. $9a . 8b : 12b =$ **204.** $(6ab + 4bc) : 2b =$

205. $(3mnp - 4mnq) : mn =$ **206.** $(a^2b - ab^2) : ab =$

207. $(24x^5y^4z^3 + 8x^3y^4z^5) : 4x^2y^2z^2 =$

208. $\frac{4a}{m} : 2a$ **209.** $\frac{6b}{5y} : 3b =$

210. $\frac{8x^2}{5} : 2x =$ **211.** $\frac{6a^2x^3}{7by} : 3ax^2 =$

212. $\frac{2mx^3}{3ny^2} : 3n^2y =$ **213.** $\frac{18x^2y^3}{13z^4} : 9z^3 =$

214. $(15x^2y^2 : 5x) : 3y =$ **215.** $(8m^2x^2 : 4) : 2mx =$

216. $[2a(m-1) : a] : (m-1) =$

217. $[(a^2b - ab^2) : ab] : (a-b) =$

218. $ab : \frac{a}{b} =$ **219.** $3z : \frac{z}{3} =$

220. $6abc : \frac{2ab}{c} =$ **221.** $5a^4 : \frac{a^2}{b^2} =$

222. $9m^3 : \frac{3m^2}{n} =$ **223.** $6a^3m^2x : \frac{2ax}{y^2} =$

224. $2m : \frac{m}{m-n} =$ **225.** $15xy : \frac{5x}{3y} =$

226. $abc : \frac{ab}{c} =$ **227.** $\frac{ab}{m} : \frac{an}{b} =$

228. $\frac{3x}{y} : \frac{2y}{x} =$ **229.** $\frac{6am}{25bn} : \frac{3a}{5b} =$

230. $\frac{8m^3x}{5n^3y} : \frac{4mx}{ny} =$ **231.** $\frac{12a^6}{7b^4} : \frac{3a^2}{7b^3} =$

232. $\frac{4xy}{3a^2} : \frac{5a^2}{3xy} =$

---

233. $(45am - 25bm + 35cm) : 5m =$

234. $(2a^3 - 6a^2b + 30ab^2) : 2a =$

235. $(5m^4x - 4m^3x^2 - 3m^2x^3) : m^2x =$

236. $(20a^3bm^3 + 16a^2cm^2 - 8adm) : 4am =$

237. $(10x^3y^2z - 25x^2y^2z^2 - 15xy^2z^3) : 5xy^2 =$

238. $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{p} + \frac{p}{m}\right) : \frac{mnp}{q} =$

239. $\left(\frac{24x}{5} + \frac{3y}{x} + \frac{9az}{10bx} - \frac{6z}{5x}\right) : \frac{6z}{5x} =$

240. $(6am - 12bm + 5an - 10bn) : (a - 2b) =$

241. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) =$

242. $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) =$

243. $(x^4 - 1) : (x + 1) =$ **244.** $(x^4 - 1) : (x - 1) =$
245. $(a^5 - b^5) : (a - b) =$ **246.** $(a^5 + b^5) : (a + b) =$
247. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by) =$
248. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1) =$
249. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab) =$
250. $(2x^3 - x^2y - 8xy^2 - 3y^3) : (x^2 - 2xy - y^2) =$
251. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2) =$
252. $(4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1) : (2x^2 - 3x + 1) =$
253. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2) =$
254. $(81x^8 - 16y^8) : (3x^2 - 2y^2) =$
255. $(32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5) : (8 - 12x + 6x^2 + x^3) =$
256. $\left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b}\right) =$
257. $\left(\frac{4m^2}{9n^2} + \frac{4m}{3n} + 1\right) : \left(\frac{2m}{3n} + 1\right) =$

5. Grundoperationen mit dekadischen ganzen Zahlen.

(§§. 60 – 67.)

258. 240978 + 97477 + 504336 + 378264 + 615089 =
Man addiere die nachfolgenden Zahlen zuerst in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

	259.	**260.**	**261.**	**262.**	**263.**
264.	81312 +	433664 +	243936 +	596288 +	406560
265.	542080 +	216832 +	569184 +	379456 +	54208
266.	189728 +	677600 +	352352 +	27104 +	514976
267.	650496 +	325248 +	135520 +	487872 +	162624
268.	298144 +	108416 +	460768 +	271040 +	623392

269. Man suche die Summe von 6 Zahlen, deren erste 235078, und jede folgende um 58505 größer als die vorhergehende ist.
270. 8754219 — 1970862 = **271.** 33557799 — 8866442 =
272. Man berechne 3874920 + 561083 + 6721859 + 55462873 + 9036198, und subtrahiere dann von der erhaltenen Summe den ersten Summand, von dem Reste den zweiten Summand u. s. f.
273. $719308 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 =$
274. $380792 \times 11 \times 13 \times 31 \times 25 \times 64 \times 125 =$
275. $146637 \times 99 \times 991 \times 299 =$
276. $734552 \times 84369 \times 100 =$ **277.** $58379 \times 25726 \times 432789 =$
278. $291728 \times 740634 \times 12500 \times 7999 =$
279. $5647830 \times 710744 \times 918497 =$
280. Man multipliciere jede der Zahlen a) 428792, b) 920664, c) 371963 mit jeder der Zahlen m) 991096, n) 140846, p) 296557.
281. 897715 : 91 = **282.** 134676 : 29 =
283. 5791338 : 63 = **284.** 309644 : 778 =
285. 3552264 : 309 = **286.** 5606912 : 752 =
287. 6245425 : 25 = **288.** 22255125 : 125 =
289. Man dividiere jede der Zahlen a) 23900625, b) 119503125, c) 167304375 durch jede der Zahlen m) 607, n) 315, p) 125.
290. 1472692768 : 14734 = **291.** 36363918357 : 62883 =

II. Grundoperationen mit algebraischen ganzen Zahlen.

(§§. 70—75.)

292. $(+7a) + (-3b) =$ **293.** $(-2x) + (+y) =$

294. $(+5m) - (+2n) =$ **295.** $(-5a) - (-7a) =$

296. $-6ab - (+ab) =$ **297.** $4m^2 + (-3m^2) =$

298. $-a^2b + 3a^2b =$ **299.** $-10ay^2 - 2ay^2 =$

300. $-3x^2 + 8x^2 - 10x^2 =$ **301.** $5m^2 - 9m^2 + 8m^2 =$

302. $8a - (5a + 2) =$ **303.** $8a - (5a - 2) =$

304. $(-4m) + (-2m) - (-m) + (+8m) =$

305. $(2x^2 - 4xy + 3y^2) - (2x^2 - 2xy) =$

306. $(x^3 - 2x^2 + 3x) + (-x^2 - 3x + 4) =$

307.
$$\begin{array}{r} 2a - 3b + 4c \\ -3a + 5b - 7c \\ a + 4b - 5c \\ \hline \end{array}$$

308.
$$\begin{array}{r} 25x + 31y - 17z \\ x - 29y - 19z \\ -22x + 8y - 37z \\ \hline \end{array}$$

309. $(a^2 - ab - b^2) + (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) =$

310. $12a - 5b - [4a - (2c + 3a)] =$

311. $x - \{2y - x - [3x - (3y - 5x) + 5y]\} =$

312. $3m - 2n - \Big\{3n - \Big[4m - \{8n - [6m - (5m - 4n)]\}\Big]\Big\} =$

---

313. $7a \cdot -4 =$ **314.** $a^2 \cdot -3a =$

315. $-4x^3 \cdot 2y =$ **316.** $-6a^4 \cdot -3a^2x =$

317. $5a^2x^3 \cdot 3abx^2 =$ **318.** $-ab^2c^3 \cdot 4a^2bc =$

319. $-2a^2 \cdot 3ab^2 \cdot 5a^2x =$ **320.** $4x^2y^3z \cdot 2xy^2z^3 \cdot -3x^2y^2z^2 =$

321. $a^{2m-n+2}\, b^{3n+2} \cdot -a^{m+n-3}\, b^{n+3} =$

322. $3a^{2x-3}\, b^{2n+1} \cdot -4a^{x+5}\, b^{n-1} \cdot 5a^{2x}\, b^2 =$

323. $(5x - 4y) \cdot -3a =$ **324.** $(3a - 5b + 7) \cdot -2m =$

325. $8x - 2(3y + z) =$ **326.** $(4x^3 - 3x^2 + 3x + 1) \cdot 5x^2 =$

327. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \cdot -2ab =$

328. $3x^2(5 - 7x + 6x^2) - 5x(2x + x^2 - 3x^3) =$

329. $(4b^2c^2 - 5a) \cdot 4a^2bc^2 - (3ab^2c^4 - 7a^2c^2)\, 3ab =$

330. $(a + b)(-a + 2b) =$ **331.** $(a + b - c)(-a + b + c) =$

332. $(-3x + 2y - z)(-x - 2y + 3z) =$

333. $(a - b)(m - n) - (a - 2b)(m + n) =$

334. $(4x^2 - 4xy + y^2)(4x^2 + 4xy + y^2) =$

335. $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)(1 - 3x + 5x^2 - 7x^3) =$

336. $(b^{2m} - 2b^m c^m + c^{2m})(4b^m - 5c^m) =$

337. $(a^2 - 2a - 3)(a^2 - 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) =$

338. $(7a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - b)(3a - b + 5) =$

339. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5) =$

340. $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) =$

341. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) =$

342. $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c) + (-a + b + c)(b + c) =$

343. $(5x + a)(3x - a) + (4x - 3a)(7x + a) - (2x - a)(4x + 2a) =$

---

344. $-4x : +4 =$ **345.** $8ab : -2a =$

346. $24bc : -6bc =$ **347.** $-4mnp : 4n =$

348. $-8abx : 2ab =$ **349.** $18a^7 : -6a^4 =$

350. $14xy^2 : -2xy =$ 351. $-12m^4 : -6m^3 =$
352. $-15x^2y^5 : 3xy^4 =$ 353. $-14a^4b^2 : 2a^2b =$
354. $-9ab^2c^3x : 3ab^2c =$ 355. $-288a^{3n+x-2} : 9a^{2n-x+1} =$
356. $32x^{m-2n+3p} y^{2m-n-p} : -8x^{m-3n+4p} y^{m-n-2p} =$
357. $(24a^3b^3 - 15a^4b^2) : -3a^3b^2 =$
358. $(18am^2y^3 - 27bmy^2 + 36cy) : -3y =$
359. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (2x - 5) =$
360. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4) =$
361. $(m^5 + 6m^4 + 4m^3 - 4m^2 + m - 1) : (m^2 + 5m + 1) =$
362. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2) =$
363. $(32a^{10}x^5 - 243y^5) : (2a^2x - 3y) =$
364. $(12a^4 + 5a^3b - 16a^2b^2 - 13ab^3 - 6b^4) : (4a^2 - ab - 6b^2) =$
365. $(243x^5 + 405x^4 + 270x^3 - 90x^2 - 15x - 1) : (9x^2 - 6x + 1) =$
366. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (4 - 3a + 2a^2 - a^3) =$
367. $(2a^5 + a^4b - 12a^3b^2 - 22a^2b^3 - 14ab^4 - 3b^5)$
$: (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$

III. Theilbarkeit ganzer Zahlen.

(§§. 88 — 93.)

Man zerlege in einfache Factoren:

368. 420; 369. 660; 370. 760;
371. 2046; 372. $210ab^2$; 373. $72a^3b^3$.

Man suche alle einfachen und zusammengesetzten Factoren

374. von 180; 375. von 228; 376. von 810;
377. von $36ab$; 378. von $165x^2y$, 379. von $315m^2n^2$.

Man zerlege nach §. 89, 2. a) in zwei Factoren:

380. $18ab - 15ac + 12ad$; 381. $9x^2 - 24xy$;
382. $18x^3y^2 + 15x^2y^3 - 25xy^4$;
383. $6a^3b^2x - 3ab^2x^2 + 9a^2b^3x^3$.

Man zerlege nach §. 89, 2. b) in zwei Factoren:

384. $x^2 + 2x + 1$; 385. $m^2 - 2m + 1$;
386. $4a^2 + 12a + 9$; 387. $9b^2 - 12b + 4$;
388. $4x^2 - 1$; 389. $9a^2 - 4b^2$;
390. $a^2 - (b + c)^2$; 391. $(b - c)^2 - a^2$.

Man zerlege nach §. 89, 2. c) in zwei Factoren:

392. $x^2 + (a + b)x + ab$; 393. $x^2 + (a - b)x - ab$;
394. $x^2 - (a + b)x + ab$; 395. $x^2 - (a - b)x - ab$;
396. $x^2 + 7x + 12$; 397. $19 + 8m^2 + m^4$;
398. $12a^2 - 41a + 35$; 399. $4a^2 - 9b^2$;
400. $36 - 4x^2$; 401. $x^4 + x^2 - 2$.

Man suche mittelst Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß

402. von 320 und 400; 403. von 360 und 680;
404. von 108, 450 und 540; 405. von 560, 620 und 760;
406. von $12acdx$, $14a^2cdx$ und $16acdx^2$;
407. von $10x^2y^3z^4$, $20x^3y^2z^4$ und $5x^3y^3z^3$;
408. von $m^2 - n^2$ und $m^2 + 2mn + n^2$;
409. von $x^2 + 2x + 1$ und $2x^2 - x - 3$;
410. von $a^2 - 2ab - 8b^2$ und $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$.

Man suche ohne Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß

411. von 2091 und 1353; **412.** von 637 und 4277;
413. von 8658 und 1405; **414.** von 3552 und 5143;
415. von 7774 und 3718; **416.** von 27671 und 21708;
417. von 24955 und 338625; **418.** von 50149 und 51119;
419. von 39215 und 73997; **420.** von 55660 und 66055;
421. von $x^3 - 49x - 120$ und $x^2 + 10x + 25$;
422. von $4x^3 - 16x^2 + 23x - 20$ und $6x^2 - 7x - 20$;
423. von $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$ und $a^2 - 5ab - 3b^2$;
424. von $6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ und $9y^3 - 27y^2 + 35y - 35$;
425. von $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ und $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
426. von $36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3$ und $27a^5b^2 - 18a^4b^2 - 9a^3b^2$;
427. von $15x^5 + 10x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy^4$ und $12x^3y^2 + 38x^2y^3 - 16xy^4 - 10y^5$;
428. von 1701, 6447 und 10521;
429. von 120582, 145530, 167706;
430. von $6x^4 - 5x^2 - 1$, $5x^3 - 4x - 1$ und $2x^2 - 2$.

Man suche mittelst Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache:

431. von 300 und 620; **432.** von 240 und 486;
433. von 120, 168 und 182; **434.** von 105, 144 und 270;
435. von $6amn$, $10am^2n$ und $5a^2n^2$;
436. von $48a^2xy$, $60a^2x^2y$ und $72axy^2$;
437. von 3, 4, 6, 10 und 25;
438. von 2, 5, 9, 3, 20, 24, 4 und 21;
439. von a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$;
440. von m, $2m^2$, $3n$, $8mn$, $12m(m-n)$;
441. von $3x$, $x - 2$, $x + 2$ und $9(x^2 - 4)$.

Man suche ohne Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache

442. von 880 und 904; **443.** von 1479 und 1769;
444. von 2222 und 1717; **445.** von 561 und 1530;
446. von 816, 765 und 697;
447. von $a^3 - 49a - 120$ und $a^2 + 10a + 25$;
448. von $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $2(x^2 - y^2)$;
449. von $2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a - 1$ und $2a^6 - a^5 - 5a^3 - 5a^2 - a$;
450. von $4x^3 - 7x - 3$, $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15$ und $2x^2 + 15x - 27$.

IV. Gebrochene Zahlen.

1. Gemeine Brüche.

(§§. 97—108.)

Man bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

451. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$; **452.** $\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}, \frac{13}{20}, \frac{8}{15}, \frac{11}{12}$;
453. $\frac{5}{12}, \frac{17}{24}, \frac{37}{80}, \frac{19}{32}, \frac{61}{72}, \frac{31}{60}, \frac{107}{120}$;

454. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{bd}, \frac{h}{bf}, \frac{k}{df}$; 455. $\frac{1}{m}, \frac{5a}{3m^2}, \frac{3bc}{4m^3}, \frac{4def}{5m^4}$;

456. $\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}$; 457. $\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

458. $\frac{a}{1+a}, \frac{a}{1-a}, \frac{a^2}{1-a^2}, \frac{a^2}{1+2a+a^2}$.

Man kürze folgende Brüche ab:

459. $\frac{24}{27}$; 460. $\frac{248}{360}$; 461. $\frac{114}{250}$; 462. $\frac{528}{762}$;

463. $\frac{3abx}{12bmx}$; 464. $\frac{12a^2x}{28ax^2}$; 465. $\frac{15amx^3}{40bmx}$; 466. $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$;

467. $\frac{2079}{7029}$; 468. $\frac{9982}{67735}$; 469. $\frac{16188}{152036}$;

470. $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$; 471. $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$.

472. Man bestimme den Werth von

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$

für n = 8 und kürze den erhaltenen Bruch ab.

---

473. $\frac{a+b}{n} + \frac{a-b}{n} =$ 474. $\frac{a+b+c}{3m} + \frac{a-b}{3m} + \frac{a-c}{3m} =$

475. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} =$ 476. $\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{3} =$

477. $\frac{a+b}{m} - \frac{a-b}{m} =$ 478. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} =$

479. $\frac{a+4b}{3} + \frac{2a-b}{3} =$ 480. $\frac{4a+b}{3} - \frac{a-2b}{3} =$

481. $1 + \frac{a-b}{a+b} =$ 482. $1 - \frac{a-b}{a+b} =$

483. $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$ 484. $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$

$\frac{a+b}{2}$ liegt also mitten zwischen a und b, von beiden um dieselbe Differenz verschieden, und heißt darum das arithmetische Mittel zwischen a und b.

485. $x + \frac{x^2-1}{x} =$ 486. $x - \frac{x^2-1}{x} =$

487. $x + y + \frac{2y^2}{x-y} =$ 488. $a - 1 + \frac{a^2+1}{a+1} =$

489. $m + n - \frac{m^2+n^2}{m+n} =$ 490. $a^2 + b^2 + \frac{a^4-2b^4}{a^2+b^2} =$

491. $1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} =$ 492. $1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} =$

493. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} =$ 494. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} =$

495. $\frac{a+x}{a} + \frac{x}{a-x} =$ 496. $\frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} =$

497. $\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} =$ 498. $\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1} =$

499. $\frac{2-3x^2}{3+4x^2} + \frac{6-8x^2}{2+3x^2} =$ 500. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} =$

501. $x^2 - y^2 - \frac{x^4-2x^2y^2-y^4}{x^2+y^2} =$

502. $x^2 - 2x + 2 - \frac{x^3-6x^2+5}{x-2} =$

503. $2x + 1 - \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2 + 4x + 1} =$ **504.** $\frac{a^2 + 5ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} - \frac{a - b}{a + 2b} =$

505. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a}{a + 1} =$

506. $\frac{a + b - c}{ab} + \frac{a - b + c}{ac} + \frac{b + c - a}{bc} =$

507. $\frac{ab}{a + b} + \frac{ac}{a + c} + \frac{bc}{b + c} =$ **508.** $\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{a + 2}{a - 2} + \frac{a + 3}{a - 3} =$

509. $\frac{y + 1}{y - 1} + \frac{y - 1}{y + 1} + \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} + \frac{y^2 - 2y - 1}{y^2 + 2y + 1} =$

510. $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3} =$

511. $\frac{3a^2 - 2ax}{2a + 2x} - a + 2x - \frac{2a^2 - 3ax}{3a + 2x} =$

512. $\frac{5a + 8b}{a + b} + \frac{3a - b}{a - b} + \frac{a - 4b}{a + b} + \frac{a - 3b}{a - b} =$

513. $\frac{ab}{(a - c)(b - c)} + \frac{bc}{(a - b)(a - c)} - \frac{ac}{(a - b)(b - c)} =$

514. $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a - b} - \frac{2b}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a^2 + 2ab + b^2} =$

515. $\frac{a - 2b + 3c}{a - b + c} + \frac{3a + b - 2c}{a + b - c} + \frac{3b + c - 2a}{b + c - a} =$

516. $1 - \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - 1} + \frac{a + 1}{a - 1} - \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + 1} + \frac{a - 1}{a + 1} = ..$

517. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c\right) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c\right) =$

518. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}y\right) + \left(\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}y\right) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y\right) =$

519. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{9}\right) + \left(\frac{5x^2}{5} - \frac{3xy}{5} + \frac{7y^2}{12}\right) =$

520. $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4}\right) =$

521. $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{5} - \frac{4x}{9}\right) - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x}{5}\right) =$

522. $\left(\frac{5a^2}{4} - \frac{4ab}{3} + \frac{3b^2}{2}\right) - \left(\frac{4a^2}{5} - \frac{3ab}{4} - \frac{2b^2}{3}\right) =$

---

523. $\frac{3ab}{m} . 4c =$ **524.** $\frac{a}{2m} . 2m =$

525. $\frac{24x^2}{5y^2} . -y^2 =$ **526.** $\frac{a + b}{m} . (a - b) =$

527. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} . 5y^2 =$ **528.** $\frac{a - b}{3ab} . 2b =$

529. $\left(a + \frac{b^2 - a^2}{a}\right) . a =$ **530.** $\left(1 + \frac{1-a}{1+a}\right) . (1 + a) =$

531. $\left(\frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} + 4\right) . -3x^3 =$

532. $\left(\frac{x^2 + 2xz + z^2}{4xz} - 1\right) . 2x =$

533. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a - 1}\right) . (a - 1) =$

534. $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} - \frac{2n}{n^2 - 1}\right) . n(n + 1) =$

535. $\left(1+\frac{a^2b^2-2abc^2+c^4}{4abc^2}\right).(a^2b^2-2abc^2+c^4)=$

536. $(a-2b+3c)\cdot\frac{2m}{3n}=$ **537.** $(a-x)\cdot\frac{a+x}{ax}=$

538. $3ax.\left(a-\frac{b}{3ax}\right)=$ **539.** $\frac{2ab}{cd}\cdot-\frac{3ax}{cm}=$

540. $\frac{a+b}{m-n}\cdot\frac{a-b}{m+n}=$ **541.** $\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{a-b}{2b}=$

542. $\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{5}\right)\left(2a+\frac{1}{2}\right)=$ **543.** $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(a-\frac{2b}{3c}\right)=$

544. $\frac{2a^2-ax}{ax-x^2}\cdot\frac{a^2x^3-ax^4}{2a-x}=$ **545.** $\frac{x^2+2x+4}{x^4-2x^2+4}\cdot\frac{x^3+8}{x-9}=$

546. $\frac{6a}{7b}\cdot\frac{2b}{3d}\cdot-\frac{14c}{15e}\cdot-\frac{5d}{6a}=$

547. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{b-a}=$

548. $\left(\frac{a^3}{2b}-\frac{a^2}{3b^2}-\frac{a}{4b^3}\right)\cdot\frac{3b^2}{4a^2}=$

549. $\left(\frac{x+m}{x}-\frac{2x}{x-m}\right)\cdot\frac{x-m}{x^2+m^2}=$

550. $\left(\frac{3m}{m-1}-\frac{2m}{m+1}-\frac{m^2}{m^2-1}\right)\cdot\frac{m^2-1}{m}=$

551. $\left(\frac{3a}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)=$

552. $\left(\frac{5x^2}{3}+\frac{2x}{5}-2\right)\left(\frac{7x^2}{10}+\frac{5x}{4}+\frac{2}{3}\right)=$

553. $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a-1}-\frac{3}{a+1}-\frac{4}{a+2}\right)\cdot\frac{a^2-1}{a^2+5a-6}=$

554. $\left(\frac{p^2x^2}{2q^2y^2}+\frac{2px^3}{3q^3y}-\frac{3x^4}{4q^4}\right)\left(\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2}-\frac{3px^3}{2q^3y}+\frac{2x^4}{q^4}\right)=$

---

555. $\frac{2ab}{3m}:2a=$ **556.** $\frac{12amx}{5bc}:-4ax=$

557. $\frac{2x}{3my}:3my=$ **558.** $\frac{10m^3n^2}{xy^2}:5m^2n^2=$

559. $\left(1+\frac{b}{1-b}\right):(1+b)=$ **560.** $\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right):2m=$

561. $\left(a+b+\frac{a-b}{a+b}\right):(a+b)=$ **562.** $\left(\frac{mx^2}{a^2-x^2}-m\right):(2x^2-2a^2)=$

563. $\frac{9a^2-18ab+6ab^2}{2a-3b}:(3a-2b)=$

564. $\frac{1-2m+3m^2-4m^3}{1-2m+m^2}:(1+2m+m^2)=$

565. $(a^2-b^2):\frac{a+b}{a-b}=$ **566.** $3y:\left(1-\frac{y}{x}\right)=$

567. $\frac{2ab}{3cd}:-\frac{5mn}{7pq}=$ **568.** $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3}:\frac{14a^2y^2z^2}{45b^3c^2x}=$

569. $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}:\frac{a-b}{c+d}=$ **570.** $\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(a-\frac{b}{c}\right)=$

571. $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}=$ **572.** $\left(\frac{3x^3}{4y}-\frac{9x^2}{15}+\frac{xy}{10}\right):\frac{3x}{5y}=$

573. $\left(\frac{2a^2}{9}-\frac{ax}{12}-\frac{3x^2}{16}\right):\left(\frac{2a}{3}-\frac{3x}{4}\right)=$

574. $\left(\frac{x^9}{27}-\frac{8a^6}{125}\right):\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2a^2}{5}\right)=$

575. $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^3}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right) =$

576. $\left(3x + \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 1}\right) : \left(2x - \frac{x - 3}{x + 3}\right) =$

577. $\frac{a^4 + 6a^3y + 12a^2y^2 + 8ay^3}{a^3y - 27y^4} : \frac{a^3 + 4a^2y + 4ay^2}{a - 3y} =$

578. $\left\{\frac{a^2 - 2ab}{4a^2b - b^3} - \frac{3ab - b^2}{4a^3 - 4a^2b + ab^2}\right\} : \left\{\frac{3a^2}{8a^3 - b^3} + \frac{5a}{12a^2 - 3b^2}\right\} =$

579. $\frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} =$ **580.** $\frac{\frac{a}{m + n}}{\frac{b}{m - n}} =$ **581.** $\frac{\frac{x - 1}{x + 1}}{\frac{x}{x^2 - 1}} =$

582. $\frac{4 - \frac{3x - 2}{3}}{3 - \frac{4x + 3}{5}} =$ **583.** $\frac{a + \frac{bx - ay}{x + y}}{a - \frac{bx - ay}{x + y}} =$ **584.** $\frac{x - \frac{x^2 - 2x + 3}{x}}{x - \frac{x^2 - 3x + 2}{x}} =$

585. $\frac{1}{b + \frac{1}{c}} =$ **586.** $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} =$

2. Decimalbrüche.

(§§. 110 — 123.)

Man verwandle folgende Brüche in Decimalbrüche:

587. $\frac{89}{16}$; **588.** $\frac{7}{40}$; **589.** $\frac{63}{32}$; **590.** $\frac{1359}{128}$; **591.** $\frac{29084}{625}$;
592. $\frac{19}{11}$; **593.** $\frac{340}{49}$; **594.** $\frac{8}{27}$; **595.** $\frac{503}{81}$; **596.** $\frac{19631}{13}$;
597. $\frac{35}{6}$; **598.** $\frac{905}{18}$; **599.** $\frac{37}{42}$; **600.** $\frac{67}{88}$; **601.** $\frac{2015}{96}$;
602. $\frac{169}{350}$; **603.** $\frac{93}{313}$; **604.** $\frac{1043}{116}$; **605.** $\frac{3177}{208}$; **606.** $\frac{50713}{471}$.

Man verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche;

607. $0{\cdot}25$; **608.** $7{\cdot}75$; **609.** $32{\cdot}175$; **610.** $0{\cdot}9518$;
611. $0{\cdot}\dot{9}$; **612.** $2{\cdot}\dot{5}\dot{4}$; **613.** $15{\cdot}3\dot{5}\dot{1}$; **614.** $0{\cdot}\dot{4}6153\dot{3}$;
615. $0{\cdot}7\dot{3}$; **616.** $0{\cdot}29\dot{7}\dot{4}$; **617.** $0{\cdot}428\dot{3}3\dot{3}$; **618.** $0{\cdot}79\dot{3}2\dot{4}$.

---

619. $13{\cdot}5782 + 0{\cdot}91507 + 31{\cdot}06615 + 8{\cdot}15672 + 40{\cdot}98378 =$
620. $0{\cdot}987654 + 0{\cdot}876543 + 0{\cdot}765432 + 0{\cdot}654321 + 0{\cdot}432109 =$
621. $19{\cdot}3875.. + 23{\cdot}473.. + 38{\cdot}378.. + 9{\cdot}4531.. =$
622. Man verwandle die Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{9.10.11} + \frac{1}{10.11.12}$$

in Decimalbrüche und berechne die Summe auf 3 Decimalen.

623. $58{\cdot}2307 - 19{\cdot}5284 =$ **624.** $123{\cdot}458 - 92{\cdot}78459 =$
625. $748{\cdot}625 - 283 =$ **626.** $1 - 0{\cdot}172635 =$
627. $8{\cdot}2345. - 3{\cdot}5678. =$ **628.** $35{\cdot}79.. - 10{\cdot}809.. =$
629. $79{\cdot}24405 - 1{\cdot}7786 + 88 - 98{\cdot}30556 - \frac{1}{2} =$

630. Man bestimme

$A = a + b + c,\qquad B = a + b - c,$

$C = a - b + c,\qquad D = b + c - a,$

für $a = 23\cdot4567$, $b = 39\cdot0703$, $c = 51\cdot809$.

---

631. $48\cdot326 \times 9 =$ **632.** $124\cdot0175 \times 28 =$
633. $9\cdot10993 \times 345 =$ **634.** $3\cdot14159 \times 36 =$
635. $27\cdot3482 \times \frac{2}{5} =$ **636.** $0\cdot33044 \times 3\frac{1}{7} =$
637. 1 Meter = 3·163749 Wiener Fuß; wie viel Wiener Fuß sind 10, 100, 1000 Meter?
638. $7\cdot89123 \times 2\cdot150624 =$ **639.** $815\cdot2791 \times 0\cdot09156 =$
640. $5\cdot37034 \times 8\cdot10936 \times 2\cdot51446 =$ (auf 5 Dec.)
641. $1\cdot045 \times 1\cdot045 \times 1\cdot045 \times 1\cdot045 =$ (auf 6 Dec.)
642. Man bestimme auf 4 Decimalen
$m = (a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(b + c - a)$
für $a = 1\cdot30785$, $b = 2\cdot09122$, $c = 2\cdot80116$.
643. $834 \times 2\cdot1335.. =$ **644.** $37 \times 15\cdot0816.. =$
645. $2\cdot95525.. \times 0\cdot1563.. =$ **646.** $28\cdot135.. \times 7\cdot089.. =$
647. $6\cdot04.. \times 0\cdot0085.. =$ **648.** $0\cdot1956.. \times 0\cdot8091.. =$

---

649. $9\cdot25648 : 8 =$ **650.** $329\cdot2406 : 25 =$
651. $635\cdot0924 : 129 =$ **652.** $17\cdot049 : 836 =$
653. $73 : 2\cdot105 =$ **654.** $1 : 3\cdot14159 =$
655. $3\cdot80157 : \frac{7}{8} =$ **656.** $91\cdot07446 : \frac{11}{23} =$
657. $1346\cdot76 : 2\cdot9 =$ **658.** $435\cdot6486 : 13\cdot34 =$
659. $7\cdot242576 : 19\cdot14 =$ **660.** $14582\cdot136 : 0\cdot474 =$
661. $507\cdot78576 : 2\cdot16 =$ **662.** $0\cdot4368619 : 8\cdot547 =$
663. $3\cdot187 : 5\cdot3185.. =$ **664.** $912\cdot857 : 0\cdot118.. =$
665. $53\cdot4428.. : 9\cdot157 =$ **666.** $71\cdot293.. : 0\cdot08566 =$
667. $0\cdot3497.. : 14\cdot2844 =$ **668.** $9\cdot2737.. : 9\cdot8767.. =$
669. $0\cdot00368.. : 3\cdot14159. =$ **670.** $390\cdot2582.. : 0\cdot08135.. =$

3. Kettenbrüche.

(§§. 127 — 135.)

Man verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:

671. $\frac{92}{381}$; **672.** $\frac{108}{887}$; **673.** $\frac{349}{739}$; **674.** $\frac{113}{335}$;
675. $\frac{1234}{4749}$; **676.** $\frac{519}{53}$; **677.** $\frac{373}{250}$; **678.** $\frac{227}{102}$;
679. $\frac{157}{136}$; **680.** $\frac{1151}{240}$; **681.** 0·513; **682.** 6·0934.

Man verwandle folgende Kettenbrüche in gemeine Brüche:

683. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; **684.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

685. $\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$; **686.** $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$.

Man verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche und bestimme deren Näherungswerthe:

687. $\frac{129}{164}$; **688** $\frac{111}{53}$; **689.** $\frac{135}{328}$; **690.** $\frac{157}{972}$;
691. $\frac{999}{439}$; **692.** 2·357; **693.** $\frac{884}{1933}$; **694.** $\frac{7857}{16415}$.

695. Man verwandle $\frac{3178}{625}$ in einen Kettenbruch und weise an den Näherungsbrüchen die in den §§. 132 und 133 begründeten Eigenschaften nach.
696. Ein Wiener Metzen = 1·9471 Wiener Cubikfuß. Man suche die Näherungswerthe.
697. Ein Wiener Pfund hat 0·560012 Kilogramm. Welches sind die fünf ersten Näherungswerthe dieses Verhältnisses?
698. Der Wiener Eimer hat 1·792 Cubikfuß. Man gebe die angenäherten Werthe dieses Verhältnisses an.
699. Der Werth der nach dem neuen Münzsysteme ausgeprägten Krone ist gleich 2·9052 Ducaten. Welche Näherungswerthe hat dieses Verhältnis?

V. Verhältnisse und Proportionen.

1. Proportionen.

(§. 148.)

Man löse folgende Proportionen auf:

700. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$; 701. $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$;
702. $4\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$; 703. $3\frac{1}{2} : 5\frac{2}{3} = 7\frac{3}{4} : x$;
704. $35·35 : 48·27 = 9·18 : x$;
705. $x : 3·1416.. = 218·275 : 360$;
706. $8·91375.. : 17·2104.. = x : 42·90665..$;
707. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : x$; 708. $x : 3\frac{3}{4} = 5m^3 : \frac{m^2}{2}$;
709. $x : (m - 2n) = (9m + 8n) : (3m - 4n)$;
710. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$;
711. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : \frac{a + b}{a - b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a + b} : x$;
712. $x + a : x = b : c$;
713. $\frac{a}{a + b} : \frac{b}{a - b} = x : a - x$

(712 und 713) mit Rücksicht auf §. 143, 1.

2. Einfache Regeldetri.

(§§. 151 und 152.)

714. Wenn 17 Pfd. einer Waare 5 fl. 78 kr. kosten; a) wie viel kosten 43 Pfd.; b) wie viel Pfund erhält man für 10 fl. 54 kr.?
715. Wenn die Luft auf eine Fläche von $1\frac{1}{2}$ □′ einen Druck von 27·65 Ctr. ausübt; welcher Druck lastet auf einer Fläche von 20 □′?
716. Ein Land von m Quadratmeilen zählt r Einwohner; a) wie viele Einwohner treffen bei gleicher relativer Bevölkerung auf n Quadratmeilen; b) auf wie viele Quadratmeilen treffen s Einwohner?
717. Das Vorderrad eines Wagens hat a Meter, das Hinterrad b Meter im Umfange; wie oft hat sich ersteres umgedreht, wenn letzteres m Umläufe gemacht hat?

$$a = 6·8;\ b = 9·2;\ m = 170.$$

718. Ein sich bewegender Körper legt in a Secunden b Fuß zurück; a) wie viel Fuß legt er in t Secunden zurück; b) in wie viel Secunden legt er s Fuß zurück?
719. Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegender Körper verhalten sich wie c : c′; wie viel Zeit braucht der zweite zu einem Wege, zu welchem der erste t Secunden braucht?

720. Von einem Gasometer, welcher 345 Cubikfuß faßt, werden für eine gewisse Zeit 92 Laternen mit Gas versorgt; wie viel Cubikfuß muß ein Gasometer halten, um 148 Laternen auf eben so lange Zeit mit Gas zu versehen?

721. Ein Manuscript gibt 162 Seiten, jede zu 35 Zeilen; wie viele Seiten wird es geben, wenn auf jede Seite 45 Zeilen kommen?

722. Ein Vorrath von Lebensmitteln reicht für a Personen auf b Tage; für wie viele Personen reicht der nämliche Vorrath c Tage länger?
$$a = 72,\ b = 52,\ c = 65.$$

723. Ein Arbeiter verdient in 4 Tagen so viel, als ein anderer in 5 Tagen; wenn nun der erste in 15 Tagen $18\frac{3}{4}$ fl. verdient, wie viel verdient der zweite in derselben Zeit?

724. Eine Stadt hat 13750 Einwohner; wie viel sind 12 % dieser Bevölkerung?

725. Das salzhältigste Meer ist der Ocean zwischen Europa und America, er enthält 36·7 % Salz; wie viel Salz ist in einem Cubikfuß Meerwasser enthalten, wenn dieses $68\frac{1}{2}$ Pfd. wiegt?

726. Nach der Duvillard'schen Sterblichkeitstafel erreichen von 502216 20jährigen Menschen 297070 das 50ste Jahr; wie viel $^0/_0$ sterben hiernach in dem Alter von 20 bis 50 Jahren?

727. Wie viel betragen 3 $^0/_0$ α) auf Hundert, β) von Hundert, γ) in Hundert a) von 3758 fl.? b) von $2908\frac{2}{3}$ Thlr? c) von 5230·65 Francs?

728. Jemand kauft eine Waare für a fl.; wie theuer muß er dieselbe verkaufen, um p $^0/_0$ zu gewinnen?

729. Eine Waare wird mit p $^0/_0$ Gewinn für a fl. verkauft; wie viel kostete dieselbe im Einkaufe?

730. Wenn p procentige Staatspapiere den Curs c haben, welcher ist der entsprechende Curs von p' procentigen?
$$p = 5,\ c = 62{\cdot}5 \text{ fl.},\ p' = 4.$$

731. Wenn ein Staatsloos den Curs 93·25 hat; a) wie viel sind 250 fl. jenes Papiers werth; b) wie viel in solchen Staatsloosen erhält man für 8858·75 fl?

732. Jemand verwendet ein Capital von a fl. zum Ankaufe von p procentigen Staatspapieren, deren Curs c ist; wie viel nimmt er davon jährlich an Zinsen ein?
$$a = 12656,\ p = 4,\ c = 56\tfrac{1}{2}.$$

733. Ein Capital bringt in t Jahren z fl. Zins; a) wie viel Zins bringt es bei gleichem Procent in t' Jahren; b) in wie viel Jahren bringt es z' fl. Zins?

734. Zu wie viel Procent muß ein Capital angelegt werden, damit es in t' Jahren eben so viel Zins bringe, als es in t Jahren zu p % Zins bringt?
$$t' = 3,\ t = 2,\ p = 6.$$

735. Jemand kauft für 3480 fl. Waare, erhält aber bei contanter Bezahlung $2\frac{1}{2}$ % Sconto (Nachlaß); wie viel beträgt der Sconto, wenn er a) von Hundert, b) auf Hundert gerechnet wird?

736. Jemand erhält für eine verkaufte Waare nach Abzug von 2 % Provision 2174 fl.; wie viel beträgt die Provision? (Rechnung in Hundert.)

3. Zusammengesetzte Regeldetri.

(§§. 153 und 154)

737. a Pfund Garn geben b Ellen Leinwand von c Ellen Breite; α) wie viel Ellen Leinwand von c′ Breite geben a′ Pfund desselben Garns; β) wie breit kann die Leinwand werden, wenn aus a′ Pfund Garn b′ Ellen gefertigt werden sollen; γ) wie viel Pfund Garn sind erforderlich, um b′ Ellen Leinwand von c′ Breite zu erhalten?

738. Aus einer gewissen Quantität Garn können 16 Stücke $\frac{5}{3}$ breites Tuch verfertigt werden, wenn das Stück 54 Ellen hält. Aus einem Theil des Garns werden 2 Stücke $1\frac{3}{8}$ breites Tuch verfertigt, jedes Stück zu 48 Ellen; wie viele Stücke $2\frac{1}{4}$ breites Tuch, das Stück zu 47 Ellen, können aus dem Reste verfertigt werden?

739. Eine Maschine hebt in a Secunden b Pfund auf eine Höhe von c Fuß; in welcher Zeit kann sie b′ Pfund c′ Fuß hoch heben?

$$a = 93,\ b = 4185,\ c = 1\tfrac{2}{3},\ b' = 6912,\ c' = 3\tfrac{1}{8}.$$

740. Eine Mühle mahlt auf a Gängen bei b Umdrehungen pr. Minute in c Stunden d Metzen Getreide; auf wie viel Gängen können bei b′ Umdrehungen pr. Minute in c′ Stunden d′ Metzen geliefert werden.

741. Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine a, das andere b Zähne; wenn nun das erste Rad in s Minuten m Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in t Minuten um?

742. 12 Centner werden 10 Meilen weit um $6\frac{1}{2}$ fl. geführt; a) wie weit werden $24\frac{3}{4}$ Centner um $30\frac{1}{2}$ fl. geführt; b) wie viel Centner wird der Fuhrmann um $13\frac{5}{6}$ fl. $18\frac{1}{4}$ Meilen weit führen; c) wie viel Frachtlohn wird man zahlen müssen, damit 37 Ctr. $25\frac{1}{2}$ Meilen weit geführt werden?

743. 6 Arbeiter vollendeten in 4 Tagen einen Graben, welcher 900′ lang, $2\frac{1}{3}$′ breit und 2′ tief ist. Bei einem zweiten Graben erfordert die Förderung von $2\frac{1}{3}$ Cubikfuß eben so viel Zeit als beim ersten die Förderung von $4\frac{1}{2}$ Cubikfuß. a) Wie viele Arbeiter vollenden den zweiten Graben in 9 Tagen, wenn er 735′ lang, $3\frac{1}{3}$′ breit und $1\frac{1}{3}$′ tief ist; b) in wie wie viel Tagen vollenden den zweiten Graben 10 Arbeiter, wenn derselbe 850′ lang, $2\frac{3}{4}$′ breit und $2\frac{1}{2}$′ tief ist?

744. Wie viel Zins bringen 3791 fl. zu 4 % in 3 Jahren?

745. Wie viel Zins geben a) 1287 fl., b) $3745\frac{1}{2}$ fl., c) 8391 fl. 34 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % in α) 2 Jahren, β) $3\frac{1}{2}$ Jahren, γ) 2 Jahren 4 Monaten 18 Tagen?

746. Wie viel Zins tragen C fl. Capital in T Tagen zu 6 %?

747. Wie viel Zins bringen 3609 Thlr. Capital in 125 Tagen a) zu 6 %, b) zu 4 %, c) zu $4\frac{1}{2}$ %, d) zu 2 %?

748. Eine 5 % Staatsschuldverschreibung von 500 fl. wird am 17. August zum Curse von $71\frac{1}{2}$ eingekauft; wie viel muß man dafür bezahlen, wenn die rückständigen Zinsen (des Nennwerthes) seit 1. Mai zu vergüten sind?

749. In welcher Zeit geben 4844 fl. Capital, zu $4\frac{1}{3}$ % angelegt, $886\frac{1}{3}$ fl.?

750. Wie groß muß das Capital sein, welches zu $5\frac{1}{4}$ % in $2\frac{7}{12}$ Jahren $950\frac{3}{4}$ fl. Zins bringt?

751. Zu wie viel % müssen 1424 fl. angelegt werden, damit sie in $3\frac{1}{2}$ Jahren $237\frac{1}{8}$ fl. Interessen geben?

752. Wenn c fl. Capital in t Jahren z fl. Zins tragen, a) welchen Zins bringen c′ fl. Capital in t′ Jahren; b) welches Capital bringt in t′ Jahren z′ fl. Zins; c) in wie viel Jahren bringen c′ fl. Capital z′ fl. Zins?

753. Ein Capital c wird nach t Jahren zurückgezahlt; zu welcher Summe (s) ist es bei dem Zinsfuße p angewachsen?

$$s = c.\frac{100 + t\,p}{100}.$$

754. Ein Capital c, welches nach t Jahren ohne Zinsen fällig ist, soll zu Anfang dieser Zeit ausgezahlt werden; wie viel (r) hat der Gläubiger bei p % einfacher Zinsenvergütung anzusprechen?

Bei der Rechnung auf Hundert ist $r = c - \frac{c\,p\,t}{100 + p\,t} = \frac{100\,c}{100 + p\,t}$

" " von Hundert " $r = c - \frac{c\,p\,t}{100}.$

Welche Rechnung ist die richtige, welche die bequemere? Kaufleute berechnen den Discont bei Wechseln und den Sconto bei Waarenbeträgen immer von Hundert.

755. Wie viel beträgt die Barzahlung eines Waarenbetrages von 1976 fl. nach Abzug von $1\frac{1}{2}$ % Sconto?

756. Eine Wechselsumme von 2813 fl. 15 kr. wird 2 Monate vor der Verfallszeit mit 4 % discontiert; a) wie viel beträgt der Discont; b) wie viel hat der Käufer zu bezahlen?

757. Wie viel muß man heute gegen 6 % ausleihen, damit man nach 3 Jahren sammt Zinsen 2950 fl. zurückerhalte? (Auf Hundert.)

758. Jemand legt zu Anfang eines jeden Jahres ein Capital von 2000 fl. an und setzt dies durch 5 Jahre fort; wie groß ist der gegenwärtige Werth aller Capital-Anlagen bei 5 % einfacher Verzinsung?

759. Auf ein bestimmtes Kaufobject bietet A 24000 fl. sogleich zahlbar; B 16000 fl. contant und ferner je 3000 fl. nach 1, 2, 3 Jahren unverzinslich zahlbar; C 17000 fl. contant und ferner je 2000 fl. nach $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$ und 6 Jahren unverzinslich zahlbar. Welches ist das vortheilhafteste Anbot, wenn 4 % einfache Zinsenvergütung angenommen wird?

760. Die Capitalien c', c'', c'''... sind bezüglich nach t', t'', t''',... Zeiteinheiten (Jahren, Monaten,...) unverzinslich zu zahlen. Alle Zahlungen sollen auf einmal geleistet werden. Wann muß die Gesammtsumme $s = c' + c'' + c''' + ..$ gezahlt werden?

Heißt m der mittlere Zahlungstermin und nimmt man einfache Zinsen zu p % an, so ist

bei der Rechnung auf Hundert

$$m = \frac{\frac{c'\,t'}{100 + p\,t'} + \frac{c''\,t''}{100 + p\,t''} + \frac{c'''\,t'''}{100 + p\,t'''} + \cdots}{\frac{c'}{100 + p\,t'} + \frac{c''}{100 + p\,t''} + \frac{c'''}{100 + p\,t'''} + \cdots}$$

bei der Rechnung von Hundert

$$m = \frac{c'\,t' + c''\,t'' + c'''\,t''' + \cdots}{c' + c'' + c''' + \cdots}.$$

Diese Rechnung nennt man die Terminrechnung, und wendet dabei gewöhnlich die vom Procent unabhängige Berechnung von Hundert an.

761. Jemand hat 2000 fl. nach 2 Monaten, 1500 fl. nach 5 Monaten, 2400 fl. nach 1 Jahre, 2500 fl. nach 1 Jahre 3 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

4. Theilregel.

(§§. 155 und 156.)

762. Zu einem Unternehmen gibt A 3100 fl., B 3500 fl., C 4200 fl. her; wenn nun dabei 324 fl. gewonnen werden, wie viel kommt auf jeden?

763. Es soll die Zahl 3710 in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten, wie die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

764. Pakfong besteht aus $53\frac{1}{2}$ Theilen Kupfer, 29 Theilen Zink und $17\frac{1}{2}$ Theilen Nickel. Wie viel von jedem dieser drei Bestandtheile braucht man, um 28 Pfund Pakfong zu erhalten?

765. Vier Gemeinden, von denen A 738 fl. 42 kr., B 815 fl., C 513 fl. 65 kr., D 618 fl. 83 kr. Steuern zahlt, sollen nach Verhältnis der Steuern zu einer Schulbaulichkeit, deren Kosten sich auf 924 fl. 30 kr. belaufen, beitragen; welcher Beitrag entfällt auf jede Gemeinde?

766. Eine Summe von s fl. ist in drei Theile a, b, c so zu theilen, daß sich $a : b = m : n$ und $b : c = p : q$ verhalte.

767. Unter 3 Personen sind 3960 fl. so zu vertheilen, daß B doppelt so viel als A, und C dreimal so viel als B bekomme; wie viel bekommt jeder?

768. Drei Personen sollen 9150 fl. so unter einander theilen, daß A so oft 5 fl. als B 3 fl., und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel bekommt jede Person?

769. Eine Erbschaft von 18420 fl. soll unter 4 Personen so getheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{10}$ und D den Rest erhalten. Vor der Theilung stirbt jedoch A, und die übrigen drei theilen nun auch den Antheil des A im Verhältnisse ihrer ursprünglichen Antheile unter sich. Wie viel bekommt jeder?

770. Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 250 fl. Aus der Gemeinde A arbeiteten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jenem Lohne wird jede der drei Gemeinden haben?

771. A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 fl.; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 fl. bei, und noch zwei Monate später gesellt sich auch C mit 3000 fl. dazu. Beim Jahresschlusse zeigt sich ein Gewinn von 1059 fl.; wie viel bekommt jeder davon?

772. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A a' fl. und nach m' Monaten noch b' fl.; B a'' fl. und nach m'' Monaten noch b'' fl.; C a''' fl. und nach m''' Monaten noch b''' fl.; wie ist nach m Monaten der Gewinn von g fl. zu vertheilen?

5. Kettenregel.

(§. 157.)

773. Wie viel Wiener Fuß sind 2135 preuß. Fuß, wenn 329 W. Fuß = 104 Meter und 223 preuß. Fuß = 70 Meter sind?

774. Wenn m Pfund in M einen Preis a haben, welches ist der entsprechende Preis von n Pfund in N? (m' Pfd. von M = b Pfd. von B, b' Pfd. von B = c Pfd. von C, und c' Pfd. von C = n' Pfd. von N.)

775. Wenn 84 baier. Ellen einer Waare $194\frac{2}{5}$ fl. südd. Währ. kosten, wie viel fl. österr. Währ. kosten in demselben Verhältnisse 56 Wien. Ellen? (18 baier. Ell. = 25 bad. Ell. und 309 bad. Ell. = 278 preuß. Ell., 111 preuß. Ell. = 95 Wien. Ell. und 6 fl. österr. Währ. = 7 fl. südd. W.)

776. Wie hoch kommt 1 Wiener Ctr. einer Waare zu stehen, von welcher 1 engl. Ctr. $4\frac{2}{5}$ Livres Sterl. kostet? (1 engl. Ctr. = 128 engl. Pfd., 100 engl. Pfd. = 81 Wien. Pfd., 1 Livr. Sterl. = $11\frac{1}{5}$ fl. ö. W.)

777. Wie viel in ö. W. ist ein Silberbarren werth, welcher $18\frac{3}{4}$ Mark wiegt und 13löthiges Silber enthält, wenn die Mark feines Silber zu $21\frac{1}{5}$ fl. ö. W. gerechnet wird?

778. Welches Verhältnis findet in Oesterreich zwischen Gold und Silber statt, wenn aus einem Münzpfund feinen Goldes 50 Kronen, aus einem Münzpfund feinen Silbers 21 fl. geprägt werden und man eine Krone = $13\frac{4}{5}$ fl. setzt?

779. Ein Wiener bezieht von Hamburg 2714 Hamb. Pfd. Baumwolle, das Pfd. zu $6\frac{1}{2}$ Schilling. Wenn man nun die Spesen mit $8\frac{1}{2}\,\%$ annimmt, wenn 100 Hamb. Pfd. = $89\frac{3}{8}$ Wien. Pfd., 16 Schill. = 1 Mark, 100 Mark = $84\frac{1}{2}$ fl. ö. W., und in Wien der Wiener Ctr. zu 45 fl. ö. W. verkauft wird, wie viel % werden gewonnen oder verloren?

Man beginnt den Ansatz: x fl. Einnahme geben 100 fl. Ausgabe, wenn u. s. w.

780. Ein Wiener Kaufmann läßt in Berlin 100 Stück Friedrichsd'or mit $\frac{1}{2}\,\%$ Spesen verkaufen und sich für den Erlös kais. Ducaten kommen. Wenn nun die Friedrichsd'or in Wien zu $7\frac{9}{10}$, in Berlin zu $5\frac{1}{4}$ Thlr., und eben so die k. Dukaten in Wien zu $5\frac{1}{5}$ fl., in Berlin zu $3\frac{1}{4}$ Thlr. stehen; wie theuer kommt für den Wiener ein Friedrichsd'or und wie viel % werden daher gewonnen oder verloren?

VI. Rangoperationen.

1. Potenzen.

(§§. 159 — 169.)

781. $3a^2 + 4a^2 + 6a^2 =$ **782.** $5a^4 - 2a^4 =$

783. $2b^5 + 7b^5 - 9b^5 =$ **784.** $ax^m - bx^m + cx^m =$

785. $7a^3 \cdot -3a^2 =$ **786.** $3m^4n^3 \cdot 5m^3n^4 =$

787. $3(a+b)^3 \cdot 4(a+b)^2 =$ **788.** $ax^m \cdot bx^n \cdot cx^p =$

789. $a^3 \cdot -3b^3 =$ **790.** $25^4 \cdot 4^4 =$

791. $(x+a)^3 \cdot (x-a)^3 =$ **792.** $3x^5 \cdot -5y^5 \cdot 4z^5 =$

793. $x^n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n =$ **794.** $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \cdot a^n =$

795. $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3 \cdot \left(\frac{5x}{4a}\right)^3 =$ **796.** $\left(\frac{3xy}{5ab}\right)^6 \cdot \left(\frac{10xz}{9bc}\right)^6 \cdot \left(\frac{6b}{x}\right)^6 =$

797. $6a^{m+n} : 2a^n =$ **798.** $8x^my^n : -4x^py^q =$

799. $(8ab)^4 : (2b)^4 =$ **800.** $(3a^3b^3)^3 : (ab)^3 =$

801. $(a^3 - b^3)^5 : (a+b)^5 =$ **802.** $(x^3 - y^3)^6 : (x-y)^6 =$

803. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n =$ **804.** $\left(\frac{3ax}{4ay}\right)^2 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^2 =$

805. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m =$ **806.** $\left(x - \frac{y^2}{x}\right)^n : \left(1 + \frac{x}{y}\right)^n =$

807. $(2ax)^5 =$ **808.** $(abcd)^m =$
809. $(-3a)^3 =$ **810.** $(-3a)^4 =$
811. $(-4ab)^3.(3a)^2 =$ **812.** $(5mx)^4.(-3my)^3 =$
813. $(7a)^3.(3a)^4.(2a)^4 =$ **814.** $(ab)^{m-2n}.(ac)^{2m-n}.(bc)^{n-m} =$
815. $\left(\frac{3a}{4b}\right)^3 =$ **816.** $\left(-\frac{x}{2y}\right)^4 =$
817. $\left(\frac{8mn}{5pq}\right)^3 =$ **818.** $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{2c}{3ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{3bc}{5a}\right)^2 =$
819. $\left(\frac{3x}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{6x}{5y}\right)^2 =$ **820.** $\left(1 - \frac{3a + 2bx}{2bx}\right)^4 =$
821. $(a^3)^2 =$ **822.** $(2a^2)^4 =$ **823.** $(ax^m)^p =$
824. $[(m^3)^2]^4 =$ **825.** $[(-a^2)^4]^3 =$ **826.** $(2a^3x^4)^5 =$
827. $(-5x^2y^3z)^3 =$ **828.** $[a^2(b-c)^3]^4 =$
829. $[(xy^2)^2.z^2]^2 =$ **830.** $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n} =$
831. $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^3 =$ **832.** $\left(-\frac{2a^3x}{3b^2y^2}\right)^4 =$
833. $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2y}\right)^3\right]^2 =$ **834.** $\frac{(3a^2.2b^3)^4.(4ab^2)^5}{(12a^4b^6)^3} =$
835. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4 =$
836. $\left\{\frac{(2xy^2)^5.(3x^2z^2)^4.(5y^2z)^3}{(4x^3y^2)^2.(2y^2z^4)^3}\right\}^2 =$
837. Man befreie von den negativen Exponenten:

a) $3a^3b^{-2}$; b) $ab^{-1}x^{-2}y^2$; c) $\frac{ax^{-m}}{by^{-n}}$.

838. Man bringe auf die Form von ganzen Zahlen:

a) $\frac{5x}{y}$; b) $\frac{2ax^{-2}}{b^{-2}}$; c) $\frac{m^3x^2}{y^2z^{-2}}$.

839. $a^5.a^{-3} =$ **840.** $a^{-5}.a^{-3} =$
841. $x^{-m}.x^{m+n} =$ **842.** $3a^3b^{-5}.4a^{-3}b^2 =$
843. $(5a^{-1})^{-2}.(2a)^{-2} =$ **844.** $(mx^{-p})^{-s}.(ny^{-q})^{-s} =$
845. $x^{-3} : x^{-5} =$ **846.** $6a^3b^{-2} : 2a^4b^{-3} =$
847. $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m} : \left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m} =$ **848.** $\frac{4\,(c-d)^{-3}}{5\,(a+b)^{-3}} =$
849. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} =$ **850.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$
851. $(x^{-2})^4 =$ **852.** $(a^{-1})^{-1} =$
853. $\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}\right]^3 =$ **854.** $[(a^m)^{-n}]^p =$
855. $(3a^2bx^3y)^{-2} =$ **856.** $(-2x^{-3}y^2z^{-1})^4 =$
857. $\left(\frac{2a^2b^3}{3mx^{-2}}\right)^{-1} =$ **858.** $\left(-\frac{ax^m z^{-p}}{by^{-n}}\right)^{n+p} =$

---

859. $(3x + 2y)^2 =$ **860.** $(2a - 4b)^2 =$
861. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2 =$ **862.** $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 =$
863. $\left(\frac{2x}{3a} - \frac{3y}{4b}\right)^2 =$ **864.** $\left(\frac{3a^2}{4x} - \frac{2b^2}{9y}\right)^2 =$
865. $(a + 2b - 3c)^2 =$ **866.** $(4 + 2y - y^2)^2 =$
867. $(3x - 5y + 8z)^2 =$ **868.** $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^2 =$
869. $(27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2 =$
870. $(4 - 8a - 3a^2 + a^3 + 2a^4)^2 =$

871. $\left(2-\frac{a}{2}+\frac{2a^2}{3}\right)^2=$ **872.** $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4c}-\frac{4c}{5d}\right)^2=$

873. $\left(\frac{3y^2}{4b^2}+\frac{2y}{3b}-\frac{1}{2}\right)^2=$ **874.** $\left(\frac{x^3}{a^3}-\frac{2x^2}{3a^2}+\frac{4x}{5a}-1\right)^2$

875. $(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2=$

876. $[(a+x)^2+(b-y)^2]^2-[(a+x)^2-(b-y)^2]^2=$

877. $249^2=$ **878.** $5019^2=$ **879.** $72902^2=$

880. $5\cdot91^2=$ **881.** $0\cdot877^2=$ **882.** $0\cdot013579^2=$

883. $45\cdot26..^2=$ **884.** $0\cdot7384..^2=$ **885.** $3\cdot14159..^2=$

886. $(a-b)^3=$ **887.** $(2x+3y)^3=$

888. $(m^3-2n^2)^3=$ **889.** $(5a^2+4bx^3)^3=$

890. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=$ **891.** $\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{2x}{9a}\right)^3=$

892. $(y^2+2y-3)^3=$ **893.** $(x^2-3xy+2y^2)^3=$

894. $(1-2x-3x^2+4x^3)^3=$

895. $(1-2a^2+4a^4-8a^8)^3=$

896. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1\right)^3=$ **897.** $\left(4ab-\frac{2x^3}{2a}+\frac{9x^5}{8a^3}\right)^3=$

898. $933^3=$ **899.** $1585^3=$ **900.** $66045^3=$

901. $0\cdot138^3=$ **902.** $45\cdot09^3=$ **903.** $5\cdot99203^3=$

904. $9\cdot336..^3=$ **905.** $0\cdot8583..^3$ **906.** $0\cdot088645..^3=$

2. Wurzeln.

(§§. 172—210.)

907. $\sqrt[3]{a}+4\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{a}=$ **908.** $7\sqrt[m]{x^n}-3\sqrt[m]{x^n}=$

909. $a+b\sqrt{m}+c-d\sqrt{m}=$

910. $3\sqrt{2}-7\sqrt{5}+4\sqrt{2}+5\sqrt{5}=$

911. $3\sqrt{a}-6\sqrt[3]{a}+m\sqrt{a}+n\sqrt[3]{a}=$

912. $5\sqrt[8]{a^3}+2\sqrt[8]{a}-3\sqrt[8]{a^3}=$

913. $a\sqrt[m]{b}-2b\sqrt[n]{a}-2a\sqrt[m]{b}+8b\sqrt[n]{a}-5b\sqrt[n]{a}+6a\sqrt[m]{b}=$

914. $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a}=$ **915.** $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{200}=$

916. $\sqrt[5]{\frac{a^3}{m}}\cdot\sqrt[5]{\frac{m}{a}}=$ **917.** $(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b})\cdot\sqrt[3]{x}=$

918. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=$ **919.** $(8-3\sqrt{5})(7+2\sqrt{5})=$

920. $(4+3\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=$

921. $(2\sqrt{3a}-\sqrt{3})(3\sqrt{3a}+\sqrt{3})=$

922. $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=$ **923.** $\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[m]{a-\sqrt{b}}=$

924. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})=$

925. $(a\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{abc}-b\sqrt{c}+c\sqrt{b})=$

926. $\sqrt{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}\cdot\sqrt{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=$

927. $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6})(2\sqrt{5}-3\sqrt{6})(2\sqrt{3}-4\sqrt{10})=$

928. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}=$ **929.** $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}=$

930. $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[9]{a^7}=$ **931.** $4\sqrt{6}\cdot5\sqrt[6]{2}=$

932. $3\sqrt[3]{b^2} \cdot 5\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[12]{b} =$ **933.** $3\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt[3]{x^2 y^{-1}} =$

934. $x \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} =$ **935.** $-mn\sqrt{\frac{1}{mn}} =$

936. $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} =$ **937.** $\frac{ab^2c^3}{x}\sqrt{\frac{b^{-1}c^{-2}}{ax^{-1}}} =$

938. $(a-\sqrt{b}) \cdot \sqrt[4]{a^2b} =$ **939.** $(3\sqrt{5a}+4) \cdot \sqrt[3]{4a} =$

940. $(3\sqrt{7}+4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7}-3\sqrt[4]{3}) =$

941. $(\sqrt[3]{ab}+3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt{ab}+4\sqrt{xy}) =$

942. $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[5]{a^3} =$ **943.** $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4} =$

944. $(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab} =$ **945.** $\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a+b} =$

946. $(\sqrt{ax}-\sqrt{cx}+\sqrt{az}-\sqrt{cz}) : (\sqrt{a}-\sqrt{c}) =$

947. $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^4} =$ **948.** $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[5]{a^4} =$

949. $m\sqrt{a} : \sqrt[4]{a} =$ **950.** $\sqrt[n]{ax^{-1}} : \sqrt[p]{x^{-1}} =$

951. $\sqrt{a+x} : \sqrt[4]{a^2-x^2}$ **952.** $(B-b) : (\sqrt{B}-\sqrt{b}) =$

953. $(4x\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}+8x) : 2\sqrt[3]{x} =$

954. $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}) : \sqrt[6]{a^5} =$

955. $\sqrt[3]{\left\{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}\right\}} \cdot \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right\}} =$

---

956. $(\sqrt[3]{a^2})^4 =$ **957.** $(\sqrt[4]{ab^2c^3})^3 =$

958. $(4a^2\sqrt[3]{ax^2})^3 =$ **959.** $(\sqrt[p]{a^m b^n})^p \cdot \sqrt[p]{ab} =$

960. $\left(\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^r}}\right)^r =$ **961.** $\left(\sqrt[3]{\frac{2a^2\sqrt[5]{ax}}{5b\sqrt[4]{bx}}}\right)^2 =$

962. $(2a+3\sqrt{b})^2 =$ **963.** $(2-3\sqrt{5})^2 =$

964. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 =$ **965.** $(3x^2\sqrt{y}-2y^2\sqrt{x})^2 =$

966. $(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2 =$ **967.** $(\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-a})^2 =$

968. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} =$

969. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{3x+\sqrt{x}}{1-x} =$

970. $\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right\}^2 =$

971. $\left[\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} \pm \sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right]^2 =$

972. $(4a\sqrt[3]{b}-3b\sqrt[3]{a})^3 =$ **973.** $(a-3\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a})^3 =$

974. $\left[\sqrt{a^3+\sqrt{a^6-b^6}}-\sqrt{a^3-\sqrt{a^6-b^9}}\right]^3 =$

975. $\sqrt[5]{a^4 b^3} =$ 976. $\sqrt[n]{a^n b} =$

977. $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 . a} =$ 978. $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} =$

979. $\sqrt[3]{81} =$ 980. $\sqrt[3]{27 a^3 b^6} =$

981. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} =$

982. $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - \sqrt{128} =$ 983. $6\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{20} =$

984. $4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} =$ 985. $5a\sqrt{12x^3} - 2x\sqrt{27a^2x} =$

986. $\sqrt[m]{a^{mx+my}} =$ 987. $\sqrt[m+n]{x^{am+an}} =$

988. $\sqrt[4]{(a^3 b^2 c)^3} =$ 989. $\sqrt[3]{(4xy^2)^2} . \sqrt[3]{(2x^2y)^2} =$

990. $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} =$ 991. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}} =$

992. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}\, b^{mp}\, c^{mq}}{x^{mr}\, y^{ms}}} =$ 993. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2} + \frac{a^2+b^2}{b^2}} =$

994. $\sqrt{\sqrt[3]{a}} =$ 995. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}} =$

996. $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}} =$ 997. $\sqrt{5\sqrt[3]{7}} =$

998. $\sqrt[5]{a^2 \sqrt[3]{a^8}} =$ 999. $\sqrt[m]{a^n \sqrt[p]{a^q}} =$

1000. $2\sqrt{2\sqrt{2}} =$ 1001. $x\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x}}} =$

1002. $3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} + \sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} =$

1003. $4a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}} =$

1004. Man bestimme:

$25^{\frac{1}{2}}$; $25^{-\frac{1}{2}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $81^{-\frac{3}{4}}$; $(\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}}$; $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

1005. $(x^n)^{\frac{1}{n}} =$ 1006. $(x^{\frac{m}{n}})^n =$ 1007. $\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{n}{m}} =$

1008. $\left(x^{\frac{m+p}{n}}\right)^{-\frac{n}{m-p}} =$ 1009. $\sqrt[m]{x^{-\frac{2m}{n}}} =$

1010. $(4.25)^{\frac{1}{2}} =$ 1011. $(x y^2 z^3)^{\frac{2}{3}} =$ 1012. $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}} . \sqrt[4]{x^2 y^2} =$

1013. $a^{\frac{m}{m-1}} : a^{\frac{1}{m-1}} =$ 1014. $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{4}} =$ 1015. $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{4}} =$

1016. $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{n}{p}} . a^{\frac{-mp-n^2}{np}} =$ 1017. $x^{\frac{m}{n}} . x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}} =$

1018. $\left\{\frac{81 a^2 n^5 p^4}{16 b^2 m^3 q^6}\right\}^{\frac{3}{4}} =$ 1019. $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}}) =$

1020. $(2a^{\frac{5}{8}} - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}}) =$

1021. $(6x^{\frac{7}{8}} - 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{\frac{22}{15}} - 4x^{\frac{31}{20}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}}) =$

Man stelle folgende Brüche mit einem rationalen Nenner dar:

1022. $\frac{2}{\sqrt{2}} =$ 1023. $\frac{5}{\sqrt[3]{a^2}} =$ 1024. $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} =$

1025. $\frac{m}{\sqrt{x\sqrt{x}}} =$ 1026. $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}} =$ 1027. $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}} =$

1028. $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}} =$ 1029. $\frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}} =$ 1030. $\frac{a\sqrt{3}}{2b\sqrt[4]{5}} =$

1031. $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}} =$ 1032. $\frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}} =$ 1033. $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} =$

1034. $\frac{1}{2+\sqrt{3}} =$ 1035. $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$ 1036. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$

1037. $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} =$ 1038. $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}} =$ 1039. $\frac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} =$

1040. $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}} =$ 1041. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} =$ 1042. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

1043. $\frac{2}{\sqrt{13-2\sqrt{3}}} =$ 1044. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$ 1045. $\frac{2-\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt[4]{3}} =$

1046. $\frac{a}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} =$ 1047. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}} =$ 1048. $\frac{5}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}} =$

1049. $\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}} =$ 1050. $\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}} =$

1051. $\frac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}$ 1052. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} =$

1053. $\frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}} =$ 1054. $\frac{2+7\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{6}} =$

Man verwandle folgende Summen und Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

1055. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} =$
1056. $\sqrt{12+\sqrt{23}}-\sqrt{12-\sqrt{23}} =$
1057. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}} =$
1058. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{7-2\sqrt{10}} =$
1059. $\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}\pm\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}} =$
1060. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}} =$

Man verwandle jede der folgenden Quadratwurzeln in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln:

1061. $\sqrt{6+\sqrt{11}} =$ 1062. $\sqrt{7-4\sqrt{3}} =$
1063. $\sqrt{8\pm3\sqrt{7}} =$ 1064. $\sqrt{11\pm2\sqrt{10}} =$
1065. $\sqrt{11\pm2\sqrt{30}} =$ 1066. $\sqrt{18\pm8\sqrt{2}} =$
1067. $\sqrt{37\pm20\sqrt{15}} =$ 1068. $\sqrt{99\pm54\sqrt{2}} =$
1069. $\sqrt{7\sqrt{2}\pm4\sqrt{6}} =$ 1070. $\sqrt{3\sqrt{3}\pm\sqrt{2}} =$

1071. $\sqrt{3\sqrt{5} \pm 1} =$ 1072. $\sqrt{4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6}} =$

1073. $\sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} =$

1074. $\sqrt{(10a^4 + a^2b^2) + 6a^3\sqrt{a^2 + b^2}} =$

1075. $\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} =$ 1076. $5\sqrt{-2} - 3\sqrt{-2} =$

1077. $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16} = 2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} =$

1078. $\sqrt{-4} - 2\sqrt{-16} + 5\sqrt{-36} =$

1079. $a\sqrt{-x^2} - b\sqrt{-y^4} - c\sqrt{-z^6} =$

1080. $5\sqrt{-1}.3 =$ 1081. $-7.2\sqrt{-1} =$

1082. $\sqrt{-3}.\sqrt{-5} =$ 1083. $a\sqrt{-a}.-b\sqrt{-b} =$

1084. $\sqrt{-xy}\cdot\sqrt{-xy^2}.\sqrt{-x^2y^3} =$

1085. $(2a - 3b)\sqrt{-1}.(3a + b)\sqrt{-1} =$

1086. $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}) =$

1087. $(\sqrt{-2} + \sqrt{-3} - \sqrt{-4})(\sqrt{-2} - \sqrt{-3} + \sqrt{-4}) =$

1088. $\sqrt{-ab} : \sqrt{b} =$ 1089. $-x : \sqrt{-x} =$

1090. $\sqrt{-8} : \sqrt{-2} =$

1091. $(\sqrt{-20} - \sqrt{-15}) : \sqrt{-5} =$

1092. $(4\sqrt{-8} - 8\sqrt{-12} + 12\sqrt{-16}) : 4\sqrt{-4} =$

1093. $(\sqrt{-1})^7 =$ 1094. $(\sqrt{-1})^9 =$ 1095. $(\sqrt{-1})^{12} =$

1096. $(\sqrt{-5})^3 =$ 1097. $(\sqrt{-3})^4 =$ 1098. $(-5\sqrt{-1})^{10} =$

1099. $(a\sqrt{-bx})^3 =$ 1100. $\left\{(a\sqrt[4n]{-4a^{2-4n}})^n\right\}^2 =$

1101. $(4a + b\sqrt{-1}) \pm (2a - 3b\sqrt{-1}) =$

1102. $(m + \sqrt{-n})(m - \sqrt{-n}) =$

1103. $(5 + 6\sqrt{-1})(3 - 4\sqrt{-1}) =$

1104. $(\sqrt{a} + \sqrt{-b})(\sqrt{a} - \sqrt{-b}) =$

1105. $(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}) =$

1106. $(x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{-1})(x - \sqrt{-1}) =$

1107. $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1}) =$

Multipliciert man hier den ersten und zweiten, den dritten und vierten Factor und dann die Producte miteinander, hierauf eben so den ersten und dritten, den zweiten und vierten Factor, und dann die erhaltenen Producte, so geben die beiden Endproducte die merkwürdige Gleichung

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

1108. $(2 - 3\sqrt{-1})^2 =$ 1109. $(3 - \sqrt{-5})^2 =$

1110. $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})^2 =$ 1111. $(\sqrt{a} - b\sqrt{-1})^2 =$

1112. $\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}} + \frac{a - \sqrt{-b}}{a + \sqrt{-b}} =$

1113. $(1 + \sqrt{-3})^3 =$ 1114. $(1 - 2\sqrt{-3})^3 =$

Man befreie die folgenden Brüche von ihren imaginären Nennern:

1115. $\dfrac{1}{1-\sqrt{-1}} =$ **1116.** $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} =$ **1117.** $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}} =$

1118. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{-2}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}} =$ **1119.** $\dfrac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}} =$

1120. $\dfrac{6\sqrt{-6}+5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5}-5\sqrt{-6}} =$

Man verwandle folgende Summen und Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

1121. $\sqrt{2+\sqrt{-5}}+\sqrt{2-\sqrt{-5}} =$

1122. $\sqrt{-3+4\sqrt{-1}}+\sqrt{-3-4\sqrt{-1}} =$

1123. $\sqrt{-3+4\sqrt{-1}}-\sqrt{-3-4\sqrt{-1}} =$

1124. $\sqrt{2+2\sqrt{-35}} \pm \sqrt{2-2\sqrt{-35}} =$

Man verwandle folgende Quadratwurzeln in Summen oder Differenzen von Quadratwurzeln:

1125. $\sqrt{7+\sqrt{-72}} =$ **1126.** $\sqrt{-3+4\sqrt{-1}} =$

1127. $\sqrt{-3-4\sqrt{-1}} =$ **1128.** $\sqrt{13-10\sqrt{-13}} =$

1129. $\sqrt{4a^2-12ab+9b^2} =$ **1130.** $\sqrt{9m^4-12m^2n^2+4n^4} =$

1131. $\sqrt{\{x^4-6ax^3+11a^2x^2-6a^3x+a^4\}} =$

1132. $\sqrt{\{16m^6+16m^5+4m^4-16m^3-8m^2+4\}} =$

1133. $\sqrt{1-4x} =$ **1134.** $\sqrt{4a^2-16a\sqrt{-b}-16b} =$

1135. $\sqrt{\{16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1\}} =$

1136. $\sqrt{\{9y^6-12y^5+10y^4-28y^3+17y^2-8y+16\}} =$

1137. $\sqrt{\{25-70a+139a^2-236a^3+154a^4-198a^5+121a^6\}} =$

1138. $\sqrt{\left[\dfrac{x^4}{9}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{11x^2}{12}-x+1\right]} =$

1139. $\sqrt{\left[\dfrac{25a^6}{81}-\dfrac{10a^5}{27}-\dfrac{31a^4}{81}+\dfrac{38a^3}{27}-\dfrac{38a^2}{81}-\dfrac{8a}{9}+1\right]} =$

1140. $\sqrt{\left[\dfrac{9x^6}{16y^6}-\dfrac{x^5}{2y^5}-\dfrac{26x^4}{9y^4}+\dfrac{53x^3}{6y^3}+\dfrac{2x^2}{3y^2}-\dfrac{20x}{y}+25\right]} =$

1141. $\sqrt{135424} =$ **1142.** $\sqrt{1920996} =$ **1143.** $\sqrt{14\cdot 0625} =$

1144. $\sqrt{53993104} =$ **1145.** $\sqrt{785\cdot 6809} =$ **1146.** $\sqrt{0\cdot 00228484} =$

1147. $\sqrt{28} =$ **1148.** $\sqrt{3\cdot 5} =$ **1149.** $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ **1150.** $\sqrt{251\tfrac{5}{9}} =$

1151. $\sqrt{3\cdot 1907\ldots} =$ **1152.** $\sqrt{335\cdot 779\ldots} =$

1153. $\sqrt{35\cdot 8423\ldots} =$ **1154.** $\sqrt{91794563} =$ (3 Dec.)

1155. $\sqrt{0\cdot 00083619\ldots} =$ **1156.** $\sqrt{3181\cdot 3742} =$ (6 Dec.)

Man bestimme mittelst der Kettenbrüche auf 5 Decimalen:

1157. $\sqrt{11}$; **1158.** $\sqrt{23}$; **1159.** $\sqrt{48}$; **1160.** $\sqrt{120}$.

1161. $\sqrt[3]{a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6} =$

1162. $\sqrt[3]{\{8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8\}} =$

1163. $\sqrt[3]{a^3+x^3} =$ **1164.** $\sqrt[3]{x^3-a} =$

1165. $\sqrt[3]{\{8a-60\sqrt[3]{a^2b}-125b+150\sqrt[3]{ab^2}\}} =$

1166. $\sqrt[3]{\left[\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right]} =$

1167. $\sqrt[3]{\left[1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6}\right]} =$

1168. $\sqrt[3]{262144} =$ 1169. $\sqrt[3]{8615125} =$

1170. $\sqrt[3]{247673152} =$ 1171. $\sqrt[3]{100} =$

1172. $\sqrt[3]{0{\cdot}068427} =$ 1173. $\sqrt[3]{54{\cdot}637281} =$

1174. $\sqrt[3]{\tfrac{37}{70}} =$ 1175. $\sqrt[3]{8\tfrac{1}{8}} =$

1176. $\sqrt[3]{32{\cdot}856\,..} =$ 1177. $\sqrt[3]{691{\cdot}344271\,..} =$

1178. $\sqrt[3]{0{\cdot}000084279\,..} =$ 1179. $\sqrt[3]{1{\cdot}9742} =$ (3 Dec.)

3. Logarithmen.

(§§. 214 — 224.)

1180. $\log 3abc =$ 1181. $\log 12xyz =$

1182. $\log b\,(c + d) =$ 1183. $\log a\,(x^2 - 1) =$

1184. $\log \frac{2ab}{3x} =$ 1185. $\log \frac{1}{ab} =$

1186. $\log \frac{ab + cd}{mn - pq} =$ 1187. $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy} =$

1188. $\log \frac{5mx}{1 - m^2} =$ 1189. $\log \frac{3\,(a^2 - b^2)\,x}{(3a + 2b)\,y} =$

1190. $\log 2a^3 =$ 1191. $\log 5a^2x^3 =$

1192. $\log \frac{ax^m y^n}{bz^p} =$ 1193. $\log \frac{2a^3}{3bx^2} =$

1194. $\log \frac{8mn^2x^3}{9pqy^5} =$ 1195. $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3\right] =$

1196. $\log \frac{1}{(2a^2)^3\,(5b^3)^2} =$ 1197. $\log \frac{3a^2\,(x^2 - 1)}{5b^2\,(x^2 - 9)} =$

1198. $\log \sqrt{x^2a^3} =$ 1199. $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} =$

1200. $\log \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}} =$ 1201. $\log \sqrt[m]{x^n}\,\sqrt[p]{y^q} =$

1202. $\log \sqrt[n]{(a^2b^3c^4)} =$ 1203. $\log \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q} =$

1204. $\log m\,\sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}} =$ 1205. $\log \frac{a\,(a + 1)\,\sqrt[3]{a^2}}{b\,(b - 1)\,\sqrt{b}} =$

1206. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ 1207. $\log \frac{1}{b^2\,\sqrt[5]{a^3c}} =$

1208. $\log \sqrt{\frac{5 + 3\sqrt{4}}{7 - 5\sqrt[3]{4^2}}} =$ 1209. $\log \sqrt{\frac{3^4 . \sqrt{17.13}}{7.14^2 . \sqrt[3]{69}}} =$

Man suche aus den Logarithmentafeln zu folgenden Zahlen die Brigischen Logarithmen:

1210. 7; 1211. 38; 1212. 218; 1213. 983;
1214. 1035; 1215. 4719; 1216. 5755; 1217. 7899;

LJUBLJANA

1218. 39070; **1219.** 586100; **1220.** 59·13; **1221.** 9·015;
1222. 86127; **1223.** 78009; **1224.** 0·68315; **1225.** 85·201;
1226. 0·091457; **1227.** 364228; **1228.** 17·8193; **1229.** 4·48197.

Man suche zu folgenden Logarithmen die zugehörigen Zahlen:

1230. 0·240549; **1231.** 1·572872; **1232.** 2·985471;
1233. 3·890086; **1234.** 0·660581; **1235.** 0·271609 — 1;
1236. 2·957431; **1237.** 1·013967; **1238.** 0·463702 — 3;
1239. 0·730486 — 2; **1240.** 2·813503; **1241.** 3·910012;
1242. 4·553429; **1243.** 0·680119; **1244.** 1·856036;
1245. 4·891950; **1246.** 0·051683 — 2; **1247.** 2·699608.

Man berechne mit Hilfe der Logarithmen folgende Ausdrücke:

1248. $1{\cdot}2345 \times 1{\cdot}3456 =$ **1249.** $9{\cdot}68453 \times 0{\cdot}29758 =$

1250. $1{\cdot}025 \times 1{\cdot}0792 \times 1{\cdot}05625 \times -1{\cdot}0751 =$

1251. $0{\cdot}35679 \times 1{\cdot}0765 \times 1{\cdot}92234 \times 0{\cdot}33258 =$

1252. $2{\cdot}00415 \times 0{\cdot}56 \times 0{\cdot}0741 \times 0{\cdot}09072 \times 1{\cdot}25463 =$

1253. $\frac{17{\cdot}846}{9{\cdot}157} =$ **1254.** $\frac{1}{3{\cdot}14159} =$

1255. $\frac{2483 \times -1926}{521347} =$ **1256.** $\frac{2{\cdot}3456 \times 5{\cdot}2913}{769 \times 0{\cdot}12345} =$

1257. $\frac{413 \times 5124 \times 21358}{425 \times 4998 \times 76143} =$

1258. $\frac{2{\cdot}1457 \times 9{\cdot}1248 \times 1385 \times 31{\cdot}273}{277 \times 10{\cdot}7285 \times 2{\cdot}2812 \times 125{\cdot}092} =$

1259. $(1{\cdot}05)^{12} =$ **1260.** $(1{\cdot}045)^{9} =$

1261. $\left(\frac{323}{313}\right)^{17} =$ **1262.** $\left(\frac{54{\cdot}139}{55{\cdot}817}\right)^{11} =$

1263. $1{\cdot}0756^{5} \times 1{\cdot}00858^{4} =$ **1264.** $\frac{2{\cdot}4563^{3}}{7{\cdot}9125^{2}} =$

1265. $\frac{3{\cdot}14159^{3} \times 2{\cdot}0489^{2} \times 1{\cdot}07938^{4}}{4{\cdot}0932^{4} \times 0{\cdot}859^{2} \times 210895^{3}} =$

1266. $\sqrt{29} =$ **1267.** $\sqrt[3]{918} =$

1268. $\sqrt[5]{7135} =$ **1269.** $\sqrt[6]{1{\cdot}8354} =$

1270. $\sqrt[8]{314{\cdot}2789} =$ **1271.** $\sqrt[5]{\frac{126}{115}} =$

1272. $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}} =$ **1273.** $\frac{8\sqrt[8]{4\,.\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{5\sqrt{124}}} =$

1274. $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^{7}} =$ **1275.** $\frac{35^{4}}{57^{3}}\,.\sqrt[5]{30{\cdot}9} =$

1276. $\frac{\sqrt[3]{37{\cdot}8}\,.\sqrt[4]{13^{2}}}{\sqrt[5]{7{\cdot}13945^{3}}} =$ **1277.** $\sqrt[7]{340}\,.\sqrt[5]{\frac{24{\cdot}105 \times 58{\cdot}937}{1{\cdot}479388^{3}}} =$

1278. $\sqrt{\frac{58\sqrt[3]{10{\cdot}819}}{\sqrt[4]{2{\cdot}4037}}} =$ **1279.** $\frac{347\sqrt[5]{0{\cdot}35} + \sqrt{55{\cdot}33^{3}}}{4{\cdot}92754} =$

1280. $\sqrt{\frac{4{\cdot}31957^{3}\,.\sqrt[3]{3{\cdot}19338}\,.\sqrt[5]{17{\cdot}39}}{15^{4}\,.\sqrt[2]{91{\cdot}34} - 9\sqrt[5]{3{\cdot}4071}}} =$

VII. Gleichungen.

1. Ordnen der Gleichungen.

(§. 227.)

Man ordne folgende Gleichungen:

1281. $a - b - \frac{ab}{x} = 0;$ **1282.** $\frac{x+a}{x} + \frac{x}{x+a} =$

1283. $\frac{a}{x+b} = \frac{c}{x-d};$

1284. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{2x}{5} + 6;$

1285. $\frac{5-x}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{3x-4}{12};$

1286. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66};$

1287. $3x = \frac{6x^2 - 3ax + b^2}{2x} - a + 2b;$

1288. $(2-x)(32-x) = (4+x)(3+x);$

1289. $\frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x-1};$ **1290.** $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2};$

1291. $\frac{20}{3x+4} - \frac{3}{5x-3} = 6;$ **1292.** $\frac{2a+x}{3a+2x} - \frac{3a-x}{3a+x};$

1293. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4};$

1294. $\sqrt{4x^2 + 8x + 13} = 4x + 1;$

1295. $a\sqrt{x+b} + b\sqrt{x+a} = c;$

1296. $\sqrt{33+x} = \sqrt{x-13};$

1297. $5\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+1} = 6;$

1298. $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a;$

1299. $a\sqrt{bx+c} + b\sqrt{cx+a} + c\sqrt{ax+b} = d.$

2. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

(§§. 229—235.)

1300. $5 + (2x - 15) = x.$ **1301.** $8 - (5 - 2x) = 3x + 1.$

1302. $5(x-2) - 2x = 2(x-1).$ **1303.** $a(x-b) = b(a-x) - c.$

1304. $m(x-a) - n(x-b) = (a+b)x.$

1305. $\{3(y-2) - 5\}.5 - 4(2y-6) = y - 16.$

1306. $(z+1)(z-1) = z^2 + z + 1.$

1307. $x(x-2a) - (b-x)^2 = 3b^2 - 4a^2.$

1308. $\frac{3-2x}{7} + 1 = 4x + \frac{42-4x}{5}.$

1309. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + 9 = 2x - 21.$

1310. $\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}.$ **1311.** $\frac{a-b}{b-x} = \frac{a}{x}.$

1312. $\frac{m}{x+m} - \frac{n}{x+n} = o.$ **1313.** $\frac{5m}{x} - \frac{2(m-x)}{x} = 3.$

1314. $x - \frac{a-x}{b} + \frac{b-x}{c} = d.$ **1315.** $\frac{a-bx}{c} = \frac{m-nx}{p}.$

1316. $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 1} = x - 3.$

1317. $\frac{13}{x - 5} + \frac{3}{4} = \frac{65}{2x - 10}.$

1318. $\frac{a - b}{x} + 1 = \frac{a}{b} - \frac{a + x}{x}.$

1319. $\frac{2(3a - x)}{b - a} + 3 = \frac{3b - x}{2b + a}.$

1320. $\frac{a + b}{a - b} . x - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{b - a}{a + b} . x.$

1321. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}.$

1322. $\frac{m(a^2 + x^2)}{ax} - \frac{mx}{a} = cm.$

1323. $\frac{x}{x + a} - \frac{x}{x - a} = \frac{b}{x + a}.$

1324. $\frac{ax + b}{mx + n} + \frac{cx + d}{px + q} = \frac{a}{m} + \frac{c}{p}.$

1325. $\frac{3 \cdot 07x}{16} + \frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{3x}{8} - 0 \cdot 0079.$

1326. $3x - 5 \cdot 215x = \frac{23 - 12 \cdot 888x}{10 \cdot 46}.$

1327. $(x + a) : (x - a) = b : c.$

1328. $4 : \frac{x}{8} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right).$

1329. $(8x - 1) : (4x + 2) = (6x - 9) : (3x - 4).$

Man löse jede der folgenden sieben Gleichungen nach allen darin vorkommenden allgemeinen Zahlen auf:

1330. $100 Z = CPJ;$

1331. $2s = n(a + z);$

1332. $T(c' - c'') = c't + d;$

1333. $v(M + m) = MC + mc;$

1334. $\frac{V}{v} = 1 + 0 \cdot 00367t;$

1335. $\frac{P}{p} = \frac{D(1 - d)}{d(D - 1)};$

1336. $av[n + q\{(1 + \delta) r + p + f\}] = ks.$

1337. $3\sqrt{x - 1} = 4.$

1338. $\sqrt{6x + 7} : \sqrt{5x - 6} = 5 : 3.$

1339. $\sqrt{1 + 2x} + \frac{3}{\sqrt{1 + 2x}} = \sqrt{8 + 2x}.$

1340. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2.$

1341. $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4 + x}.$

1342. $\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a} = \frac{b}{\sqrt{x - a}}.$

1343. $\sqrt{a + x} - \frac{a}{\sqrt{a + x}} = \sqrt{2a + x}.$

1344. $8x - 5y = 25,$
$3x + 7y = 36.$

1345. $3x + 4y = 4,$
$12x - 6y = 5.$

1346. $16y - 25z = 5,$
$5z - 24y = 12.$

1347. $28x + 6y = 9,$
$9y - 4x = 2.$

1348. $x + 2y = 30,$
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$

1349. $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 2,$
$cx - ac = b - y.$

1350. $5(3x - 2y) = 10 - 3x,$
$\frac{1 + 2y}{3} - \frac{1 - 2y}{3} = 8x - 1.$

1351. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = s,$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = d.$

1352. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9,$
$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$

1353. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{3}{4},$
$\frac{6}{x} - \frac{2}{y} = \frac{3}{10}.$

1354. $\frac{m}{n+y} = \frac{n}{m+x},$
$\frac{n}{m-y} = \frac{m}{n-x}.$

1355. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5},$
$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}.$

1356. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$
$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$

1357. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2,$
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$

1358. $x - y = 2 + \frac{(a-2b)^2 - a^2}{a^2 - b^2},$
$ax - by = a + b - \frac{3ab(a-b}{a^2-b^2} - \frac{ab}{a+b}.$

1359. $\frac{x + 42\frac{1}{3}}{2} = y - 42\frac{1}{3},$
$x - 23\frac{1}{2} = \frac{y + 23\frac{1}{2}}{3}.$

1360. $41x - 32{\cdot}75y = 9{\cdot}92,$
$5{\cdot}27x - 36y + 4{\cdot}34 = 0.$

1361. $(4x + y) : (2x - y) = 16 : 5,$
$(2x + 7y) : (x + 2y) = 14 : 5.$

1362. $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = m,$
$\frac{x+y}{x-y} = n.$

1363. $3x + y + 2z = 13,$
$x + 2y + 3z = 17,$
$2x + 3y + z = 12.$

1364. $6x - 4y + 3z = 28,$
$4x - y - 3z = 7,$
$2x - 3y + 6z = 12.$

1365. $3x - 4y = 8,$
$2x + 3z = 24,$
$5y - 6z = 35.$

1366. $6x + 5z = 8,$
$20y - 5z = 11,$
$3y - 3x = 1.$

1367. $x + y + z = s,$
$x : y = a : b,$
$y : z = b : c.$

1368. $x + y = 30,$
$3x + 2z = 25,$
$x - 2z = 3.$

1369. $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$
$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$
$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3.$

Man gebe das Gesetz an, welches in den für x, y und z erhaltenen Ausdrücken vorherrscht.

1370. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{16} = 18,$
$\frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19,$
$\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{3} = 23,$

1371. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612,$
$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612,$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612.$

1372. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = c.$

1373. $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 11,$
$-\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 25,$
$\frac{7}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = -19.$

1374. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c.$

1375. $y + \frac{1}{2}x = 112.$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z = 36.$
$\frac{2y - z}{z - y} = 3.$

1376. $3u - 2x + y - 5z = 17,$
$4u + x - 3y + 2z = -7,$
$6u - 5x + 2y - z = 13,$
$u - x + y - z = 6.$

1377. $3w - x + y + 2z = 20,$
$2w + 3x - y + z = 17,$
$w + 2x + 3y - z = 21,$
$-w + x + 2y + 3z = 12.$

1378. $2x - 3y + 4z - 5u + 6w = 6,$
$3x + y + 5z + u - 3w = 3,$
$-x + 4y + 2z - 5u + w = 8,$
$x - y + z - u + w = 3,$
$x + y + z + u + w = 15.$

1379. Das 3fache und 4fache einer Zahl beträgt zusammen 196; wie groß ist die Zahl?

1380. Welche Zahl gibt, wenn man sie mit $\frac{3}{4}$ multipliciert und von dem Producte 5 subtrahiert, 13 als Resultat?

1381. Von welcher Zahl ist der siebente Theil um 8 kleiner als der dritte Theil?

1382. Wenn man eine Zahl mit 15 multipliciert, zu dem Producte 20 addiert, die Summe durch 4 dividiert und von dem Quotienten 14 subtrahiert, so erhält man das 3fache der fraglichen Zahl; welche Zahl ist es?

1383. Die Zahl a soll in zwei Theile so getheilt werden, daß das mfache des ersten Theiles um d größer sei als das nfache des zweiten Theiles.

1384. In welche zwei Theile muß man 60 zerlegen, damit der größere Theil durch den kleineren dividiert 2 zum Quotienten und 3 zum Reste gebe?

1385. Eine Zahl a in solche 2 Theile zu zerlegen, daß ihr Quotient der gegebenen Zahl selbst gleich sei.

1386. Welche Zahl muß man vom Zähler und vom Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ $(\frac{7}{13})$ subtrahieren, damit er gleich $\frac{c}{d}$ $(\frac{1}{3})$ wird?

1387. Welche Zahl muß vom Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahiert und zum Nenner desselben addiert werden, damit der erhaltene Bruch der reciproke des früheren sei?

1388. Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 7 addiert, so erhält er den Werth $\frac{4}{5}$; subtrahiert man vom Zähler und Nenner 2, so erhält er den Werth $\frac{1}{2}$. Welches sind Zähler und Nenner des Bruches?

1389. Jemand wird nach 10 Jahren doppelt so alt sein, als er vor 4 Jahren war; wie alt ist er jetzt?

1390. Ein Vater ist jetzt 48, sein Sohn 21 Jahre alt; vor wieviel Jahren war der Vater 10mal so alt als sein Sohn?

1391. Ein Vater ist 36, sein Sohn 10 Jahre alt; wieviel Jahre muß der Vater noch leben, damit er gerade doppelt so alt werde, als es dann sein Sohn sein wird?

1392. A ist jetzt mmal so alt und wird nach a Jahren nmal so alt sein als B; wie alt ist A?

Welche Beziehung muß zwischen m, n und a stattfinden, damit die Auflösung einen Sinn habe? (Vergl. §. 235, Beispiel 2.)

1393. Ein Vater ist gegenwärtig 3mal so alt als sein Sohn; vor 12 Jahren war er 9mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

1394. Ein Knabe sagt: meine Mutter ist 25 Jahre älter als ich, mein Vater ist 5 Jahre älter als die Mutter, und wir alle zusammen haben 91 Altersjahre. Wie alt ist der Knabe, die Mutter, der Vater?

1395. Ein Vater und seine zwei Söhne zählen jetzt zusammen 96 Altersjahre. Vor 4 Jahren war der ältere Sohn halb so alt als sein Vater und doppelt so alt als sein Bruder. Wie alt ist jede dieser drei Personen?

1396. Ein Menschenfreund will einen Geldbetrag, den er eben bei sich hat, unter 10 Arme vertheilen. Will er jedem 20 kr. geben, so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem 18 kr. gibt. Wie viel Kreuzer hat er bei sich?

1397. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A 1000 fl. und $\frac{1}{3}$ des Restes, B $\frac{1}{2}$ des neuen Restes und noch 500 fl. darüber, C die noch übrigen 2500 fl. Wie viel erhält A, wie viel B?

1398. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A a fl. mehr als $\frac{1}{m}$ derselben, B b fl. mehr als $\frac{1}{n}$ des Restes, C den neuen Rest, welcher c fl. weniger beträgt als $\frac{1}{p}$ der ganzen Summe. Wie viel erhält ein jeder?

1399. Unter die drei besten Schüler einer Classe war eine bestimmte Summe so zu vertheilen, daß der zweite um 20 fl. weniger als der erste, und der dritte um 20 fl. weniger als der zweite bekomme; die ganze Summe war um 25 fl. größer als das 4fache dessen, was der dritte bekam. Wie viel erhielt ein jeder der drei Schüler?

1400. Ein Vater läßt bei seinem Tode die Frau mit drei Söhnen zurück und vermacht sein Vermögen auf folgende Art: die Frau soll den dritten Theil des ganzen Vermögens, der erste Sohn den dritten Theil des Restes mehr 600 fl., der zweite Sohn den dritten Theil des neuen Restes mehr 2200 fl., und der dritte Sohn den Rest von 4500 fl. erhalten. Wie groß war das ganze Vermögen, und wie viel kommt auf die Frau und jeden der ersten zwei Söhne?

1401. Ein Vater verspricht seinem Sohne für jede fehlerfreie Aufgabe ein Geschenk von 10 Kreuzern; für jede fehlerhafte Aufgabe dagegen muß der Sohn dem Vater 5 Kreuzer zurückzahlen. Bei 20 Aufgaben ergab sich nun, daß dem Sohne von den erhaltenen Geschenken 80 Kreuzer übrig blieben. Wie viele Aufgaben hat er ohne Fehler, und wie viele fehlerhaft gearbeitet?

1402. Jemand dingt einen Gärtner auf einen Monat (30 Tage); er verspricht ihm während dieser Zeit die Kost, und für jeden Tag, an dem er arbeitet, $\frac{4}{5}$ fl.; für jeden Tag, an dem der Gärtner nicht arbeitet, muß dieser dem Herrn $\frac{1}{5}$ fl. für die Kost bezahlen. Nach einem Monate erhielt der Gärtner 18 fl. Wie viele Tage hat er gearbeitet und wie viele nicht?

1403. Zwei Fässer enthalten 351 Liter. Läßt man aus dem ersten den sechsten und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so bleibt in beiden gleichviel übrig. Wie viel Liter enthält jedes Faß?

1404. In einer Gesellschaft waren doppelt so viel Männer als Frauen; nachdem 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch 4mal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und Frauen waren anfangs in der Gesellschaft?

1405. In einer Fabrik arbeiten 26 Arbeiter, theils Meister, theils Gesellen; jeder Meister erhält täglich 2 Gulden, jeder Geselle nur die Hälfte davon. Würde man jedem Meister von seinem Lohne $\frac{1}{5}$ Gulden abziehen, und dafür jedem Gesellen so viel zulegen, so möchte der tägliche Lohn um $2\frac{1}{5}$ Gulden mehr betragen. Wie viele Meister und wie viele Gesellen arbeiten in der Fabrik?

1406. Jemand wettet bei jedem Spiele 4 fl. gegen 3 fl. Nach 28 Spielen hat er weder gewonnen, noch verloren. Wie viele Spiele hat er gewonnen, wie viele verloren?

1407. Drei spielen mit einander. Im ersten Spiele verliert der erste an jeden der anderen so viel, als jeder von diesen bei sich hatte; im zweiten Spiel verliert der zweite an den ersten und dritten so viel, als jeder derselben hat; im dritten Spiele verliert der dritte an den ersten und zweiten so viel als jeder hat; nach geendigtem Spiele hatte jeder 24 fl. Wie viel hatte jeder am Anfange des Spieles?

1408. In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wie groß die Zahl derselben sei, antwortete ein Sohn: Ich habe so viel Schwestern als Brüder; eine Tochter aber sagte: ich habe zweimal so viel Brüder als Schwestern. Wie viele Söhne und Töchter waren da?

1409. In einem Landtage wurde ein Antrag bei 64 abstimmenden Abgeordneten mit einer Stimmenmehrheit von 10 angenommen. Wie viele stimmten dafür, wie viele dagegen?

1410. Ein Körper wiegt p Pfund und verliert in Wasser getaucht π Pfd. von seinem Gewichte. Er ist zusammengesetzt aus zwei Körpern, von denen der erste in Wasser getaucht $\frac{1}{a}$, der zweite ebenso $\frac{1}{b}$ seines Gewichtes verliert. Wie viel Pfund von jedem dieser beiden Körper sind in dem erstgenannten zusammengesetzten Körper enthalten?

Der Körper enthalte x Pfd. des ersten und y Pfd. des zweiten Körpers, so ist der Gewichtsverlust des ersten Körpers im Wasser $\frac{x}{a}$ und jener des zweiten $\frac{y}{b}$ Pfd.

Man hat daher die Gleichungen:

$$x + y = p \text{ und } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pi,$$

woraus

$$x = \frac{a\,(p - b\pi)}{a - b},\; y = \frac{b\,(a\pi - p)}{a - b}$$

folgt.

1411. Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund, unter Wasser gewogen nur $18\frac{8}{9}$ Pfund. Wenn nun Gold im Wasser $\frac{1}{19}$ und Silber $\frac{1}{10}$ von seinem Gewichte verliert, wie viel Gold und wie viel Silber war in der Krone?

1412. Ein Dampfschiff legte in einer Stunde stromaufwärts einen Weg von $1\frac{1}{2}$ Meile, stromabwärts einen Weg von $2\frac{1}{2}$ Meile zurück. Welchen Weg würde das Schiff durch die Kraft der Maschine allein (bei stillstehendem Wasser), welchen Weg durch die Kraft des Stromes allein (bei stillstehender Maschine) in einer Stunde zurücklegen?

1413. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste Röhre allein in a, durch die zweite allein in b Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn man das Wasser durch beide Röhren zugleich fließen läßt?

Man setze die gesuchte Zeit $= x$ und den Cubikinhalt des Behälters $= 1$. Die erste Röhre allein füllt in 1 Stunde $\frac{1}{a}$, also in x Stunden $\frac{x}{a}$ des Behälters; die zweite Röhre allein füllt in 1 Stunde $\frac{1}{b}$, also in x Stunden $\frac{x}{b}$ des Behälters; beide Röhren, wenn man aus denselben das Wasser gleichzeitig fließen läßt, füllen also in x Stunden $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$ des Behälters, d. i. den ganzen Behälter $= 1$. Man hat demnach

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1;$$

daher

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

1414. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; die erste Röhre allein füllt das Gefäß in 4 Stunden, die zweite Röhre allein in 6 Stunden, die dritte Röhre allein in 12 Stunden. In wie viel Stunden wird der Wasserbehälter gefüllt, wenn man das Wasser durch alle drei Röhren zugleich fließen läßt?

1415. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die Röhren R_1 und R_2 in a, durch R_1 und R_3 in b, durch R_2 und R_3 in c Stunden. Wie viel Zeit braucht jede Röhre allein dazu, um den Behälter zu füllen?

1416. Zu einer Arbeit erbieten sich drei Personen, A, B und C. A und B würden zusammen die verlangte Arbeit in 18 Tagen liefern können, A und C zusammen könnten dies in 12 Tagen, und B und C zusammen in 9 Tagen. In welcher Zeit kann die Lieferung durch alle drei Personen zusammen geleistet werden?

1417. Ein Pendel, das a Linien lang ist, macht in einer Minute m Schwingungen; wie lang muß ein anderes sein, das in einer Minute n Schwingungen machen soll?

$$m : n = \sqrt{a} : \sqrt{x}.$$

1418. Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, die Elle zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{3}$ fl. die Elle. Wenn er nun dabei 21 fl. gewonnen hat, wie viel Ellen enthielt das Stück?

1419. Ein Kaufmann hat zwei Sorten einer Waare, eine bessere, das Pfd. zu 60 kr., und eine geringere, das Pfd. zu 36 kr. Er will von beiden eine Mischung von 80 Pfd. bereiten, die er zu 45 kr. das Pfund verkaufen kann. Wie viel Pfd. muß er dazu von jeder Sorte nehmen? (Vergleiche §. 235, Beispiel 5.)

1420. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine, von dem ersten kostet der Eimer 30 fl., von dem zweiten 16 fl. Er will durch Mischung 7 Eimer zu 20 fl. bekommen; wie viel Eimer wird er von jeder Gattung zu der Mischung nehmen müssen?

1421. Jemand will a löthiges und b löthiges Silber legieren und dadurch m Mark c löthiges Silber erhalten; wie viel Mark von jedem Silber wird er zu der Legierung verwenden?

1422. Feines und 10 löthiges Silber sollen zu 12 löthigem Silber eingeschmolzen werden; wie viel von jeder Gattung kommt auf 24 Mark dieser Legierung?

1423. In einem Haufen Erz enthält der Centner 4 Loth, in einem andern 17 Loth Silber. Man will aus beiden Haufen 80 Centner mengen, jeden Centner mit 11 Loth Silbergehalt. Wie viel Centner sind von jedem Haufen zu nehmen?

1424. Wie viel Kupfer (Gehalt = 0) muß mit 6 Pfund Silber, das 900 Tausendtheile fein ist, legiert werden, damit man Silber à 520 Tausendtheile fein erhalte?

1425. Zu 24 Mark 13 löthigem Silber werden 12 Mark einer andern Silbersorte hinzugesetzt, wodurch die Mischung 12 löthig wird; wie viel Loth feines Silber enthält eine Mark der zweiten Sorte?

1426. Mischt man 4 Pfd. Caffee der einen Sorte mit 12 Pfd. einer zweiten Sorte, so ist das Pfund der Mischung 68 kr. werth; mischt man aber 6 Pfund der ersten Sorte mit 10 Pfd. der zweiten, so ist das Pfund der Mischung 70 kr. werth; wie viel ist das Pfund jeder Sorte werth?

1427. Jemand hat drei Metallstücke, deren jedes aus den Metallen A, B, C besteht. Das erste Stück enthält von A a_1, von B b_1, von C c_1 Loth; das zweite Stück enthält von A a_2, von B b_2, von C c_2 Loth; das dritte Stück enthält von A a_3, von B b_3, von C c_3 Loth. Man will nun eine Composition bilden, welche von A a Loth, von B b Loth, von C c Loth enthalten soll. Wie viel Loth muß man dazu von jedem der drei Metallstücke nehmen?

Wird $a_1 + b_1 + c_1 = s_1$, $a_2 + b_2 + c_2 = s_2$, $a_3 + b_3 + c_3 = s_3$ gesetzt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{a_1 x}{s_1} + \frac{a_2 y}{s_2} + \frac{a_3 z}{s_3} = a,$$

$$\frac{b_1 x}{s_1} + \frac{b_2 y}{s_2} + \frac{b_3 z}{s_3} = b,$$

$$\frac{c_1 y}{s_1} + \frac{c_2 y}{s_2} + \frac{c_3 z}{s_3} = c.$$

1428. Jemand hat drei Metallstangen,

die erste enthält	4 Loth Gold,	8	Loth Silber,	12	Loth Kupfer,
die zweite	" 8	"	" 10	"	" 2	" "
die dritte	" 10	"	" 6	"	" 14	" "

Er will nun durch Legierung eine Metallstange erhalten, welche 10 Loth Gold, 13 Loth Silber und 11 Loth Kupfer enthält; wie viel Loth muß er von jeder der drei Metallstangen dazu nehmen?

1429. Von drei Metallstücken enthält

das erste	26 Pfund Kupfer,	11 Pfund Zinn und	9 Pfund Blei,
das zweite	18 " "	4 " " "	5 " "
das dritte	76 " "	2 " " "	10 " "

Aus diesen Stücken will man ein viertes zusammensetzen, das 22 Pfd. Kupfer, 7 Pfd. Zinn und 7 Pfd. Blei enthält. Wie viel Pfund von jedem der drei ersten Metallstücke wird man dazu nehmen?

1430. Zwei Körper K' und K'' bewegen sich auf einer geraden Linie in derselben Richtung von den Puncten A' und A'' gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c' und c''. Der Körper K' verläßt den Punct A', welcher um d Längeneinheiten rückwärts von A'' liegt, um t Zeiteinheiten später, als der Körper K'' den Punct A'' verläßt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, von dem Abgange des Körpers K'' von A'' an gerechnet, werden beide zusammentreffen? (Vergl. §. 235, 3.)

$$T = \frac{c't + d}{c' - c''}.$$

Man discutiere dieses Resultat a) für positive Werthe von d, t, c' und c'', und für $c' \gtreqless c''$; b) für $d \gtreqless o$; c) für $t \gtreqless o$; d) für $c'' < o$.

1431. Man behalte die Daten der vorhergehenden Aufgabe, und bestimme die Entfernung (D) des Punctes, in welchem die beiden Körper zusammentreffen, von dem näher gelegenen Puncte A''.

$$D = \frac{c''\,(c't + d)}{c' - c''}.$$

Man discutiere dieses Resultat für die in der vorigen Aufgabe angeführten Fälle.

1432. Einem Boten, der vor 3 Tagen von einem Orte abging und jeden Tag 4 Meilen zurücklegt, wird von demselben Orte aus ein anderer Bote nachgeschickt, der täglich 7 Meilen macht. Wann wird letzterer den ersteren einholen?

Durch Specialisierung der Werthe in Aufgabe 1430, und zugleich davon unabhängig zu lösen.

1433. Ein Regiment bricht von A' gegen A'' auf und macht täglich 3 Meilen; 2 Tage später rückt ihm ein anderes Regiment nach. Wie viel Meilen muß dieses täglich zurücklegen, damit es das erstere in 4 Tagen einhole?

1434. A' und A'' sind durch eine Eisenbahn verbunden, deren Endpuncte 30 Meilen von einander abstehen. Von A' geht gegen A'' ein Personenzug ab, der in jeder Stunde 4 Meilen zurücklegt; zu gleicher Zeit geht von A'' gegen A' ein Lastenzug ab, der in jeder Stunde $2\frac{2}{5}$ Meilen zurücklegt. Wann begegnen sich die beiden Züge?

1435. A' und A'' sind durch eine 19 Meilen lange Eisenbahn verbunden. Von A' geht um 8 Uhr 30 Min. Vormittags ein Zug nach A'' ab mit der Geschwindigkeit von 30 Fuß pr. Secunde; an demselben Vormittage um 9 Uhr 15 Minuten geht von A'' ein Zug mit der Geschwindigkeit von 28 Fuß pr. Secunde nach A' ab. Wann und in welcher Entfernung von A'' begegnen sich diese Züge?

1436. Vom Orte A' aus geht des Morgens 5 Uhr eine Locomotive ab, welche in $4\frac{1}{2}$ Stunde 17 Meilen zurücklegt. Eine halbe Stunde später wird von A'' aus, welcher Ort 7 Meilen hinter A' liegt, der ersten Locomotive eine zweite nachgesendet, die 13 Meilen in 3 Stunden fährt. Wann wird die zweite Locomotive die erste einholen?

1437. Von A' nach A'' sind 42 Meilen. Um Mittag geht von A' ein Eilwagen ab, der $1\frac{1}{4}$ Meile in der Stunde macht. Um wie viel Stunden früher muß von A' eine Fahrpost, die in der Stunde nur $\frac{3}{4}$ Meilen zurücklegt, abgehen, damit sie mit dem Eilwagen gleichzeitig in A'' eintreffe?

1438. Ein Courier soll, von A aus, einem Regimente, das vor 6 Tagen von dort abmarschiert ist und täglich 4 Meilen vorwärts geht, Ordre bringen. In welcher Entfernung von dem gemeinschaftlichen Abgangsorte wird er dasselbe erreichen, wenn er täglich 12 Meilen zurücklegt?

1439. Von A′ geht ein Courier, welcher täglich 14 Meilen zurücklegt, nach A″; zu gleicher Zeit wird von A″ ein Courier, welcher täglich 12 Meilen zurücklegt, nach A′ abgeschickt. Wie groß ist die Entfernung zwischen A′ und A″, wenn sich die beiden Couriere nach 5 Tagen begegnen?

1440. Einem Körper K″, welcher in jeder Zeiteinheit c″ Längeneinheiten zurücklegt, folgt t Zeiteinheiten später von demselben Puncte aus ein zweiter K′, welcher in jeder Zeiteinheit c′ Längeneinheiten zurücklegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, vom Abgange des Körpers K″ an gerechnet, werden beide Körper e Längeneinheiten von einander entfernt sein?

1441. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises, welche p Längeneinheiten beträgt, zu gleicher Zeit von demselben Puncte aus in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c′ und c″. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden sie zum nten Male wieder zusammentreffen?

Nimmt man an, daß der erste Körper den Umfang p in a′, der zweite in a″ Zeiteinheiten zurücklegt, so ist $c' = \frac{p}{a'}$ und $c'' = \frac{p}{a''}$, und man hat für das nte Zusammentreffen

$$T = \frac{np}{c' - c''} = \frac{a'a''n}{a' - a''}.$$

1442. Wie viel Zeit verfließt von einem Zusammentreffen der beiden Zeiger einer Uhr bis zum nächsten Zusammentreffen derselben?

1443. Wie viel Minuten nach 4 Uhr wird der Minutenzeiger einer Uhr über den Stundenzeiger zu stehen kommen?

1444. Es sind 20 Minuten über 12 Uhr; nach wie viel Minuten werden sich beide Zeiger der Uhr decken?

1445. Der Mond vollendet seinen Umlauf am Himmel in 27 Tagen 7 Stunden 43 Minuten 4·68 Secunden (Zeit des periodischen Monates), die Sonne dagegen in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 47·8 Secunden (Zeit des siderischen Jahres). Beide Himmelskörper schreiten von Westen gegen Osten fort. Wie viel Zeit verfließt von einem Neumonde (Zusammentreffen des Mondes mit der Sonne) bis zum andern (Zeit des synodischen Monates)?

3. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

(§§. 237—241.)

Man löse nach den in §. 238 angegebenen Methoden folgende Gleichungen in ganzen Zahlen auf:

1446. $2x + 3y = 17$.
1447. $2x - 3y = 1$.
1448. $7x + 11y = 18$.
1449. $6x + 5y = 128$.
1450. $8x - 11y = 200$.
1451. $7x - 13y = 152$.
1452. $5x - 7y = 1$.
1453. $12x + 13y = 319$.
1454. $13x + 19y = 73$.
1455. $15x + 14y = 225$.
1456. $23x - 13y = 2$.
1457. $37x - 22y = 307$.

1458. $25x - 11y = 20$. 1459. $36x - 115y = 643$.
1460. $37x - 22y = 307$. 1461. $115x = 424y = 539$.
1462. $181x + 2y = 570$. 1463. $520x = 919y = 1000$.
1464. $3x + 4y - 5z = 12$. 1465. $4x - 18y + 27z = 100$.

Man löse folgende Gleichungen in ganzen und positiven Zahlen auf:

1466. $5x - 7y = 13$. 1467. $5x + 7y = 94$.
1468. $7x - 12y = 300$. 1469. $17x + 14z = 24$.
1470. $23x + 57y = 412$. 1471. $25x = 36y - 7$.
1472. $29x + 17y = 250$. 1473. $17x - 1 = 12y - 5$.
1474. $28x + 12 = 19y + 17$. 1475. $24x - 31y = 196$.
1476. $5x + 6y + 20z = 187$. 1477. $9x + 5y + 3z = 105$.
1478. $2z + 3y + 4z = 20$. 1479. $5x + 7y - 3z = 39$.

1480. Man suche zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit, daß das 8fache der ersten um das 3fache der zweiten vermehrt 91 zur Summe gibt.

1481. Man soll 50 in zwei Theile so zerlegen, daß der eine durch 7, der andere durch 13 theilbar sei.

1482. Die Zahl 200 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine durch 14, der andere durch 23 theilbar ist.

1483. Man suche zwei um 10 verschiedene Zahlen, deren kleinere durch 21, deren größere durch 34 theilbar ist.

1484. Man suche eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist, aber durch 29 dividiert 13 zum Reste gibt.

1485. Welche ist die allgemeine Form der ganzen Zahlen, welche durch 19 dividiert 1, und durch 28 dividiert 3 zum Reste geben?

1486. Welche Zahlen geben durch 24 dividiert 18, durch 13 dividiert 1 zum Reste?

1487. Man zerlege den Bruch $\frac{101}{110}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 5 und 22 sind.

1488. Welche zwischen 1000 und 2000 liegende Zahlen würden sich, wenn sie um 5 größer wären, durch 13, und wenn sie um 5 kleiner wären, durch 17 ohne Rest theilen lassen?

1489. Jemand kauft für 90 fl. zweierlei Sorten Tuch; von der einen kostet die Elle 4 fl., von der andern 3 fl. Wie viel ganze Ellen erhält er von jeder Sorte?

1490. Eine Summe von 100 fl. ist mit Zweiguldenstücken und Vereinsthalern à $1\frac{1}{2}$ fl. zu bezahlen; wie viel Geldstücke jeder Art braucht man dazu?

1491. Der Durchmesser der neuen Zweiguldenstücke beträgt 36, jener der neuen Guldenstücke 29 Millimeter. Wie viel Zweigulden- und Guldenstücke muß man in gerader Linie neben einander stellen, damit die Summe der Durchmesser 1 Meter betrage?

1492. Ein Schüler erhielt 10 Groschen, wenn er seine Aufgabe fehlerfrei löste, hatte aber 7 Groschen zu bezahlen, wenn er darin Fehler machte. Am Ende hatte er 5 Groschen. Wie viele Aufgaben hat er fehlerfrei, wie viele fehlerhaft gearbeitet?

1493. Von zwei gezahnten Rädern hat das eine 13, das andere 17 Zähne; beim Beginne der Bewegung greift der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten Rades ein. Nach wie vielen Umdrehungen eines jeden dieser Räder wird der Zahn 1 des ersten Rades wieder in die Lücke 1 des zweiten eingreifen?

1494. Welche Zahlen geben durch 11, 19, 29 dividiert bezüglich die Reste 5, 12, 4?

1495. Bezeichnet N eine Jahreszahl der christlichen Zeitrechnung, so heißt der Rest der Division $\frac{N+1}{19}$ die goldene Zahl,

" " " " $\frac{N+9}{28}$ der Sonnencirkel,

" " " " $\frac{N+3}{15}$ die Römerzinszahl

für jenes Jahr. Welche Jahreszahlen haben die goldene Zahl 5, den Sonnencirkel 27 und die Römerzinszahl 9?

1496. Die Zahl 50 ist in drei Theile zu zerlegen, die folgeweise durch 5, 6, 7 theilbar sind.

1497. Man zerlege $\frac{121201}{4400}$ in drei Brüche, deren Nenner 11, 16, 25 sind.

1498. In einer Münzstätte hat man 9löthiges, 12löthiges und feines Silber und braucht 36 Mark 13löthiges Silber. Wie viel ganze Mark muß man dazu von jeder Sorte nehmen?

1499. 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, haben gemeinschaftlich 30 fl. ausgegeben. Wenn nun die Ausgabe eines Mannes 5 fl., einer Frau 1 fl. und eines Kindes $\frac{1}{4}$ fl. beträgt; wie viel waren Männer, wie viel Frauen und wie viele Kinder?

4. Quadratische Gleichungen.

(§§. 242 — 253.)

Man löse folgende Gleichungen auf:

1500. $x^2 = 9.$ **1501.** $x^2 + 4 = 0.$

1502. $2x^2 - 1 = 2 - 4x^2.$ **1503.** $3x^2 - 4093 = x^2 + 139.$

1504. $(x + 7)(x - 7) = 51.$ **1505.** $(2x - 3)(2x + 3) = 7.$

1506. $a - x = \frac{2ab}{a + x}.$ **1507.** $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{3}.$

1508. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}.$ **1509.** $\frac{a}{1+2x} + \frac{a}{1-2x} = 2b.$

1510. $\sqrt{33 + 2x - x^2} = x + 1.$

1511. $\frac{ax^2 + b^2}{\sqrt{bx^2 + a^2}} = \sqrt{bx^2 + a^2}.$

1512. $\sqrt{\left\{5\sqrt{\frac{5x^2+1}{3}} - 1 + 4\right\}} = 7.$

1513. $x^2 + 15x + 56 = 0.$ **1514.** $x^2 + x - 56 = 0.$

1515. $x^2 \mp 2x - 15 = 0.$ **1516.** $x^2 - 4x + 4 = 0.$

1517. $x^2 \mp (a + b)x + ab = 0.$ **1518.** $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$

1519. $x^2 - 7x = 7.$ **1520.** $x^2 + 2x + 4 = 0.$

1521. $(a + x)(b - x) = 0.$ **1522.** $(2x - 5)(3x + 8) = 0,$

1523. $(x + 1)(x - 2) + (x - 1)(x + 2) = 0.$

1524. $(x - 1)(x + 2)(x - 3) - (x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0.$

Man bilde Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben.

1525. -3 und $+7$; **1526.** 12 und 7;

1527. 10 und -1; **1528.** -9 und -13;

1529. $\frac{3}{2}$ und $1\frac{1}{2}$; **1530.** $\frac{7}{3}$ und $-\frac{2}{3}$;

1531. $0 \cdot 7$ und $-2 \cdot 4$; **1532.** $1 \cdot 36$ und $0 \cdot 75$.

Man zerlege folgende Trinome in Factoren (§. 345, 2):

1533. $x^2 - 17x + 70.$
1534. $x^2 + 3x - 88;$
1535. $x^2 + x + 1;$
1536. $3x^2 - 14x + 8;$
1537. $6x^2 + x - 1;$
1538. $20x^2 + 17x - 24;$
1539. $abx^2 + (a + b)x + 1;$
1540. $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab.$

Man löse folgende Gleichungen auf:

1541. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9.$
1542. $x + \frac{1}{x-2} = 3.$
1543. $\frac{6x+5}{2x-3} = 4x - 15.$
1544. $\frac{3x-4}{x-4} - 10 = \frac{2-x}{2} - 1.$
1545. $\frac{10}{x} - \frac{10}{x+1} = \frac{3}{x+2}.$
1546. $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(1-x)^2}.$
1547. $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{a}{b}.$
1548. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-4} = 5.$
1549. $\frac{5x+4}{2x+1} + \frac{3x-1}{3x-3} + 3 = 0.$
1550. $\frac{2x-a}{4x+5a} = \frac{x+6a}{2x} + 7.$
1551. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a-x} = \frac{b-x}{a+b}.$
1552. $\frac{3x^2-10}{x+9} + \frac{6x^2-40}{2x-1} = 6x - 2$
1553. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$
1554. $\frac{x(x+2\sqrt{11})}{3} = 2\sqrt{2}.$
1555. $x : (x + 1) = (2x + 3) : (3x + 4).$
1556. $x + 7\sqrt{x} = 30.$
1557. $ax - b\sqrt{x} = c.$
1558. $2x - 3\sqrt{x-1} = 4.$
1559. $x - 10 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 5}.$
1560. $\sqrt{27x^2 + 10} = 3(x - 2).$
1561. $\sqrt{7x - 13} - 12 = \sqrt{5x + 1}.$
1562. $\sqrt{8x - 7} + 4 = \sqrt{15x + 4}.$
1563. $\sqrt{a + x} - \sqrt{b - x} = \sqrt{x}.$

Man löse folgende Gleichungen trigonometrisch auf:

1564. $x^2 + 19x + 10 = 0.$
1565. $x^2 - 0{\cdot}685x + 3{\cdot}128 = 0.$
1566. $x^2 + 3{\cdot}1264x - 2{\cdot}8571 = 0.$
1567. $x^2 - 8{\cdot}71235x = 7{\cdot}23475.$
1568. $x^2 - 5{\cdot}08653x = 9{\cdot}0086.$
1569. $x^2 + 7{\cdot}66442 = 0{\cdot}80173x.$
1570. $5x^2 + 13x + 17 = 0.$
1571. $18x^2 - 77x = 132.$

1572. $x + y = 12,\quad x + xy = 40.$
1573. $xy + x = 18,\quad xy - y = 10.$
1574. $x + y = 4,\quad \frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4.$
1575. $y = a_1 + (x - 1)d,\quad s_n = \frac{x}{2}(a_1 + y).$
1576. $x^2 + y^2 = r^2,\quad y = ax + b.$
1577. $x^2 - y^2 = a,\quad xy = b.$
1578. $x - y = a,\quad xy = b.$
1579. $x + y = 2a,\quad x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2.$
1580. $x^2 + y^2 = a,\quad \frac{x}{y} = b.$
1581. $x^2 - y^2 = a,\quad \frac{x}{y} = b.$
1582. $xy = 36,\quad \frac{x}{y} = 4.$
1583. $x^2 + xy = 40,\quad x^2 + xy = 24.$
1584. $x^2 + y^2 + x + y = a,\quad xy = b.$
1585. $x^2 + y^2 + x + y = a,\quad x^2 + y^2 - x - y = b.$

1586. $x + y = 74,$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12.$ 1587. $x : 11 = 704 : y,$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19.$

(Man setze $\sqrt{x} = x_1$, $\sqrt{y} = y_1$.)

1588. $\frac{xy}{z} = a,$ $\frac{xz}{y} = b,$ $\frac{yz}{x} = c.$

1589. $\frac{y+z}{xyz} = \frac{1}{a},$ $\frac{x+z}{xyz} = \frac{1}{b},$ $\frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{c}.$

Man gebe die Werthe von x an, für welche folgende Ausdrücke rational werden:

1590. $\sqrt{16x^2 + 5x + 7}$; 1591. $\sqrt{6x + 5}$;
1592. $\sqrt{1 + x^2}$; 1593. $\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$;
1594. $\sqrt{2x^2 + 3x + 4}$; 1595. $\sqrt{5x^2 + 3x}$;
1596. $\sqrt{4x^2 + 8x + 3}$; 1597. $\sqrt{2x^2 - 6x + 5}$.

Man löse folgende unbestimmte Gleichungen in ganzen Zahlen auf:

1598. $3x^2 - 5xy + y^2 = 6$; 1599. $x^2 - y^2 = 25$;
1600. $3x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 7$;
1601. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x - 4y - 2 = 0$.

1602. Welche Zahl gibt mit ihrer Hälfte multipliciert 162?
1603. Das Product aus dem dritten und vierten Theile einer Zahl beträgt 108; welches ist die Zahl?
1604. Welche Zahl muß um d vermehrt und vermindert werden, damit das Product der beiden neuen Zahlen a sei?
1605. Das 12fache einer Zahl um 45 vermehrt gibt das Quadrat derselben; welches ist die Zahl?
1606. Wenn man zu einer Zahl 40 addiert und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividiert, so ist der Quotient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl; wie groß ist diese?
1607. Man suche zwei Zahlen, deren Summe 30 und deren Product 189 ist.
1608. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, so daß die Summe ihrer Quadrate 113 wird.
1609. Die Zahl 18 in zwei Factoren zu zerlegen, deren Quadrate 27 zur Differenz geben.
1610. Welche Zahl gibt zu ihrem reciproken Werthe addiert a zur Summe?
1611. Man suche zwei Zahlen, deren Quadrate 45 zur Summe und 27 zur Differenz geben.
1612. Von welchen zwei Zahlen ist das Product um 84 kleiner als die Summe der Quadrate, und um 44 größer als die Differenz der Quadrate?
1613. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 4, die Summe ihrer Quadrate ist 100; welche Zahlen sind es?
1614. Man suche zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate gleich sind.
1615. Jemand kauft ein Faß Wein für 324 fl., und zwar kostet jeder Eimer gerade so viel Gulden, als Eimer vorhanden sind; wie viel Eimer Wein enthält das Faß?

1616. Jemand kauft eine Waare für 130 fl., und zwar kostet jeder Centner davon um 3 fl. mehr als Centner sind; wie viel Centner Waare hat er gekauft?

1617. Jemand kaufte für 400 fl. Tuch; hätte die Elle um 1 fl. weniger gekostet, so würde er für jenes Geld um 20 Ellen mehr erhalten haben. Wie viele Ellen hat er gekauft?

1618. A und B verkauften zusammen 100 Ellen einer Waare, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein. Hätte A so viele Ellen gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viele Ellen als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viele Ellen hat jeder verkauft?

1619. Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternommen, betragen 432 Gulden. Weil aber zwei Personen frei gehalten wurden, mußte jede der übrigen Personen um 3 Gulden mehr bezahlen. Wie viele Personen waren?

1620. Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen. Eine Reihe nach der Länge enthält 8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viel Bäume stehen in jeder Reihe?

1621. Eine Summe von 240 fl. soll unter eine bestimmte Anzahl Personen vertheilt werden. Nun wurden 4 Personen ihres Antheils verlustig, und da kamen dann auf jede der übrigen Personen um 3 fl. mehr. Für wie viele Personen war die Theilung ursprünglich bestimmt?

1622. Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. zu gleichen Theilen. Bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt in Folge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viele Kinder hinterließ der Vater?

1623. Ein Mittagsessen, bei dem doppelt so viele Herren als Damen speisten, kostete 396 Groschen. Jeder Herr zahlte doppelt so viel Groschen, als Herren waren, und jede Dame dreimal so viel Groschen, als Damen waren. Wie viel Herren und wie viel Damen waren da?

1624. Man läßt einen Stein in einen Brunnen fallen und zählt 3 Secunden, bis man das Aufschlagen des Steines auf dem Grunde hört. Wie tief ist der Brunnen, wenn man annimmt, daß der Fallraum 15mal soviel beträgt als das Quadrat der Zeitsecunden, durch welche das Fallen andauert, anzeigt, und daß der Schall in jeder Secunde 1050 Fuß zurücklegt?

Nimmt man an, daß der Stein in x Secunden auf dem Grunde des Brunnens anlange, und daß der Schall y Secunden brauche, um von dem Grunde zu unserem Ohre zu gelangen, so ist der von dem Steine zurückgelegte Raum $15x^2$ Fuß, und der von dem Schalle zurückgelegte Raum $1050y$ Fuß.

Da nun die Zeit des Falles und die Zeit der Schallbewegung zusammen 3 Secunden betragen, da ferner der Stein denselben Raum zurücklegt, wie der Schall, so hat man die Gleichungen:

$$x + y = 3 \text{ und } 15x^2 = 1050y,$$

aus denen

$$x = 2{\cdot}8823 \text{ und } y = 0{\cdot}1177,$$

oder

$$x = -72{\cdot}8823 \text{ und } y = 75{\cdot}8823$$

folgt, von welchen Werthen nur die ersteren der Natur der Aufgabe entsprechen.

Der Schall braucht also, um von dem Grunde des Brunnens zu unserem Ohre zu gelangen, 0·1177 Secunden; der Brunnen ist somit $1050 \times 0{\cdot}1177 = 123{\cdot}58$ Fuß tief.

1625. In der geraden Linie zweier leuchtender Körper, deren Abstand und verhältnißmäßige Lichtstärke bekannt ist, den Punct zu bestimmen, welcher von beiden gleich stark erleuchtet wird.

Die Lichtstärke nimmt im quadratischen Verhältnis der Entfernung ab. Ist daher d der Abstand der beiden leuchtenden Körper, die Lichtstärke des ersten in der Entfernung 1 gleich a, die Lichtstärke des zweiten in derselben Entfernung gleich b, so sind die Lichtstärken dieser beiden Körper in einem Puncte, der von dem ersten Körper die Entfernung x, daher von dem zweiten die Entfernung $d - x$ hat, bezüglich $\frac{a}{x^2}$ und $\frac{b}{(d-x)^2}$. Soll dieser Punct der gesuchte sein, so ist

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2},$$

folglich

$$x = d \cdot \frac{a \pm \sqrt{ab}}{a-b},$$

wobei ein Punct in der Verbindungslinie der beiden Lichtquellen oder in ihrer Verlängerung gefunden wird, je nachdem man die Quadratwurzel negativ oder positiv nimmt. Für $a = b$ wird $x_1 = \infty$ und $x_2 = \frac{0}{0}$. Um die Unbestimmtheit des zweiten Ausdruckes zu beseitigen, umforme man den Werth $x_2 = d \cdot \frac{a - \sqrt{ab}}{a-b}$ durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $a + \sqrt{ab}$, wodurch man $x_2 = d \cdot \frac{a}{a + \sqrt{ab}}$ daher, weil $a = b$ ist, $x_2 = \frac{d}{2}$ erhält.

1626. Ein Reisender braucht zu einem Wege von 60 Meilen 3 Tage mehr als ein anderer, weil dieser täglich 1 Meile mehr zurücklegt als der erstere. Wie viel Tage braucht jeder zu dieser Reise?

1627. Zwei Körper K′ und K″ bewegen sich auf einer geraden Linie gleichförmig und in einerlei Richtung zu gleicher Zeit von den Puncten A′ und A″, von denen A′ um d Längeneinheiten rückwärts von A″ liegt, und kommen beide nach t Zeiteinheiten zu dem Puncte B. Dabei braucht der Körper K′ zu einer Längeneinheit $\frac{1}{n}$ Zeiteinheiten weniger als K″. Wie viel (D) Längeneinheiten beträgt die Entfernung des Punctes B von A″?

K′ braucht zu einer Längeneinheit $\frac{t}{d+D}$ Zeiteinheiten,

K″ „ „ „ „ $\frac{t}{D}$ „

folglich $\frac{t}{D} - \frac{t}{d+D} = \frac{1}{n}$, und

$$D = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + ndt}.$$

Welche Bedeutung haben in dieser Gleichung negative Werthe von D, d, t, n?

1628. Von zwei Orten, die 40 Meilen von einander entfernt sind, gehen gleichzeitig zwei Eisenbahnzüge ab, von denen der eine zu einer Meile $\frac{1}{20}$ Stunde weniger braucht als der andere. Wenn sich nun diese Züge $4\frac{4}{9}$ Stunden nach ihrer Abfahrt begegnen, wie viel Zeit braucht jeder zu einer Meile?

1629. Zwei Reisende gehen gleichzeitig, der eine von A′ gegen A″, der andere von A″ gegen A′ ab. Der erste kommt in A″ in a′ Stunden, der zweite in A′ in a″ Stunden nach ihrer gegenseitigen Begegnung an. Wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten c′ und c″?

Bezeichnet d die Entfernung der Orte A′ und A″, so findet die Begegnung nach $\frac{d}{c'+c''}$ Zeiteinheiten statt; bis dahin haben die Reisenden die Wege $\frac{c'\,d}{c'+c''}$ und $\frac{c''\,d}{c'+c''}$ gemacht, sie haben daher bezüglich noch die Wege $\frac{c''\,d}{c'+c''}$ und $\frac{c'\,d}{c'+c''}$ zurückzulegen und brauchen dazu $\frac{c''d}{c'\,(c'+c'')}$ und $\frac{c'd}{c''(c'+c'')}$ Zeiteinheiten. Man hat daher

$$\frac{c''d}{c'\;(c'+c'')} = a \text{ und } \frac{c'd}{c''\;(c'+c'')} = b.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man

$$\frac{c'^2}{c''^2} = \frac{b}{a'}, \text{ folglich } \frac{c'}{c''} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

1630. Zwei Körper K′ und K″ bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c′ und c″ auf zwei sich rechtwinklig durchschneidenden geraden Linien zu dem Durchschnittspuncte hin. Ihre Entfernungen vom Durchschnittspuncte sind zu einer gewissen Zeit d′ und d″. Nach wie viel (t) Zeiteinheiten werden die beiden Körper die Entfernung d von einander haben?

Nach t Zeiteinheiten ist
die Entfernung des Körpers K′ vom Durchschnittspuncte $= d' - c't$,
" " " K″ " " $= d'' - c''t$;
folglich ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$d^2 = (d' - c't)^2 + (d'' - c''t)^2,$$

woraus

$$t = \frac{c'd' + c''d'' \pm \sqrt{d^2\,(c'^2 + c''^2) - (c'd'' - c''d')^2}}{c'^2 + c''^2} \text{ folgt.}$$

Discussion. a) Soll t reell sein, so muß $d^2\;(c'^2 + c''^2) \geqq (c'd'' - c''d')^2$, also $d \geqq \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$ sein. Die kleinste Entfernung, in welche die Körper kommen können, ist demnach

$$d = \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}.$$

b) Für die Zeit, nach welcher die Körper diese kleinste Entfernung haben werden, hat man

$$t = \frac{c'd' + c''d''}{c'^2 + c''^2}.$$

c) Sollen die beiden Körper im Durchschnittspuncte zusammentreffen, so muß ihre kleinste Entfernung d = o, werden, d. i.

$$c'd'' = c''d' \text{ oder } \frac{c'}{c''} = \frac{d'}{d''} \text{ sein.}$$

Welche Bedeutung haben hier die negativen Werthe von t, c′, c″, d′, d″?

1631. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen gibt das Product und die Summe 47 zur Summe?

1632. Zwei positive ganze Zahlen zu finden, deren Product um 104 größer ist als die Summe derselben.

1633. Zwei positive ganze Zahlen zu bestimmen, deren Quadrate 35 zur Differenz geben.

1634. Zwei positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit zu bestimmen, daß die Differenz ihrer Quadrate wieder ein Quadrat sei.

5. Einige höhere und Exponentialgleichungen.

(§§. 254—257.)

1635. $x^5 - a^5 = 0$.

1636. $x^4 - a^4 = 17x^4$.

1637. $\frac{a^2}{x^3 - b} = x^3 + b$.

1638. $\frac{a - x^3}{\sqrt{x^3 - b}} = \sqrt{x^3 - b}$.

1639. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = (3x^2 - 3)^2 - 65$.

1640. $\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \frac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \frac{290}{149}$.

1641. $\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ x^n - y^n = b. \end{cases}$

1642. $\begin{cases} 8x^4 - 3y^4 = 40\frac{5}{16}, \\ 5x^4 + 2y^4 = 24\frac{13}{16}. \end{cases}$

1643. $x^6 + 27 = 28x^3$.

1644. $3x^6 - 7x^3 = 6$.

1645. $\frac{x^3 + 3}{17 - x^3} = \frac{1}{x^3 + 3}$.

1646. $x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 6x} = 12$.

1647. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9$.

1648. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54$.

1649. $\sqrt[3]{x} - n^2 = n + \sqrt[3]{x^2}$.

1650. $\sqrt{x^3} + ax^3 = b$.

1651. $\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$

1652. $\begin{cases} x - y = a, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = b. \end{cases}$

1653. $47^x = 255$.

1654. $10^x = 2 \cdot 718282$.

1655. $a^{mx+n} = b$.

1656. $5^{3x-4} . 2^{2+x} = 5^x$.

1657. $3^{2x} . 5^{3x-4} = 7^{x-1} . 11^{2-x}$.

1658. $2^x . 3^{x-1} . 4^{x-2} = 5$.

1659. $\frac{a^{mx} . b^{nx}}{c^{px} . d^{qx}} = s$.

1660. $\left(\frac{123}{134}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{345}{456}$.

1661. $\begin{cases} a^x + b^y = m, \\ a^x - b^y = n. \end{cases}$

1662. $\begin{cases} a^x + b^y = m, \\ a^x b^y = n. \end{cases}$

1663. $\begin{cases} 3^x . 5^y = 405, \\ 2^x . 7^y = 112. \end{cases}$

1664. $\begin{cases} a^x . b^y = m, \\ \frac{a^x}{b^y} = n. \end{cases}$

1665. $\sqrt[x]{10} = 2$.

1666. $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{2 \cdot 57813}$.

1667. $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5$.

1668. $\sqrt[x+1]{a} = b\sqrt[x+2]{c}$.

1669. $\sqrt[x]{a} = b^x$.

1670. $\sqrt[x+2]{2} = 3^{x+3}$.

1671. $\sqrt[mx+n]{a} = b^{px+q}$.

1672. $a^2 b^x = \sqrt[x]{a^{2x} r^3}$.

1673. $\begin{cases} \sqrt[x]{a} = m\sqrt[y]{b}, \\ \sqrt[x]{c} = n\sqrt[y]{d}. \end{cases}$ **1674.** $\begin{cases} 3^x \cdot \sqrt[y]{1521} = 1053, \\ 2^y \cdot \sqrt[x]{1331} = 44. \end{cases}$

1675. $3^{x^2-4x+5} = 1200.$ **1676.** $a^{(x-m)(x-n)} = 1.$

1677. $\frac{10\,(3^x + 100)}{3^x} = 15.3^x + 2.$ **1678.** $735^{\frac{2x-1}{2x+1}} = 318^{\frac{3x-2}{3x+2}}.$

1679. $6.7^{2x} + 7^x = 301.$

1680. $3.4^{2x^2-2x+4} - 5.4^{x^2-x+2} = 28.$

1681. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10.$ **1682.** $13\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25.$

1683. $x^{\log x} = 578.$ **1684.** $x^{4-\log x} = 35\cdot3156.$

VIII. Progressionen.

1. Arithmetische Progressionen.

(§§. 249 — 261.)

Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihe:

1685. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

1686. 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

1687. —28, —25, —22, —19, —16, —13, ...

1688. 100, 97, 94, 91, 88, ...

1689. 100, $92\frac{1}{2}$, 85, $77\frac{1}{2}$, 70, ...

1690. Wie groß ist die Differenz einer Progression, deren erstes Glied 109, und deren 34stes Glied 10 ist?

1691. Mit welcher Zahl fängt eine Progression an, deren Differenz 5, und deren 27stes Glied 139 ist?

1692. Eine Progression fängt mit 1 an, und steigt nach der Differenz 5; das wievielte Glied ist 115?

1693. Wie viele Anfangsglieder einer Progression muß man addieren, um 2808 zur Summe zu erhalten, wenn das erste Glied 2 und die Differenz 10 ist?

1694. Man leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, d, n, a_n und s_n (§. 260) die beiden anderen bestimmt werden.

Man löse folgende Aufgaben:

	a_1	d	n	a_n	s_n
1695.	125	35	13	a_n	s_n
1696.	50	—5	n	15	s_n
1697.	1	9	n	a_n	260
1698.	250	d	18	1100	s_n
1699.	$1\frac{4}{5}$	d	27	a_n	$928\frac{4}{5}$
1700.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
1701.	a_1	—2	6	0	s_n
1702.	a_1	0·27	16	a_n	52·08
1703.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
1704.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

1705. Man interpoliere in der Reihe 1, 5, 9, 13, 17, 21,.... zwischen je zwei Glieder 8 Glieder, so daß wieder eine arithmetische Progression entsteht.

1706. Zwischen p und q sollen r Glieder interpoliert werden; wie groß ist das nte dieser Glieder?

1707. Die Zahl 225 soll in mehrere solche Theile getheilt werden, daß jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende und der letzte 29 ist. Wie groß ist der erste Theil, und wie groß die Anzahl der Theile?

1708. Eine Summe Geldes wird unter mehrere Personen so vertheilt, daß der erste 80 fl. und jeder folgende um 4 fl. weniger bekommt; der letzte erhält 28 fl. Wie viel Personen sind betheilt worden, und wie groß ist die ganze Geldsumme?

1709. Ein Diener war bei einem Herrn 6 Jahre im Dienste und erhielt in jedem folgenden Jahre 4 fl. an Lohn mehr als im vorhergehenden, zusammen 540 fl. Wie viel erhielt er das erste, wie viel das letzte Jahr?

1710. Einen Brunnen von 30 Fuß Tiefe zu graben, zahlt man für den ersten Fuß 1 fl. 40 kr., für jeden folgenden 10 kr. mehr; wieviel zahlt man für den letzten Fuß, wieviel für den ganzen Brunnen?

1711. Ein Körper legt in der ersten Secunde a Fuß, in jeder folgenden d Fuß mehr zurück als in der vorhergehenden. a) Wie groß ist der in n Secunden zurückgelegte Raum; b) in welcher Zeit legt der Körper s Fuß zurück?

1712. Ein frei fallender Körper durchläuft in der ersten Secunde 15 Fuß, und in jeder folgenden 30 Fuß mehr; wie groß ist der Fallraum der 5ten Secunde, wie groß der Fallraum in 5 Secunden?

1713. Wenn ein nach dem eben angeführten Gesetze von der Spitze eines Thurmes auf dessen Basis herabfallender Körper in der letzten Secunde 166 Fuß zurückgelegt hat, wie hoch ist der Thurm?

1714. Wenn eine senkrecht in die Höhe geschossene Kugel in der ersten Secunde 600 Fuß, und in jeder folgenden 30 Fuß weniger zurücklegt, wie hoch wird dieselbe steigen, und in wie viel Zeit wieder auf die Erde zurückfallen?

1715. Jemand setzt in die Lotterie auf eine Nummer 20 kr., und so lange er nicht gewinnt, jedes folgende Mal um 20 kr. mehr als das vorhergehende Mal. Wenn nun der Treffer einer Nummer mit dem 14fachen Einsatze bezahlt wird, bei welchem Spiele würde der Gewinnende gerade sein ganzes bis dahin eingesetztes Geld zurückerhalten?

1716. Eine unverzinsliche Schuld wird in 6 Jahreszahlungen getilgt. Im ersten Jahre bezahlt man 600 fl., in jedem folgenden aber um eine bestimmte Summe mehr; für das sechste Jahr beträgt die Zahlung 850 fl. Wie groß ist die ganze Schuld?

1717. Durch n Jahre wird am Anfange jedes Jahres ein Capital von a fl. zu P % auf einfache Zinsen angelegt; zu welchem Werthe S sind sämmtliche Anlagen bis zum Schlusse des nten Jahres angewachsen? (Aufg. 753.)

$$S = a \left\{ n + \frac{n(n+1)P}{200} \right\}.$$

2. Geometrische Progressionen.

(§§. 262—264.)

Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihen:

1718. 5, 15, 45, 135, ...

1719. 6, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, $2\frac{17}{32}$, ...

1720. 10·5. 2·625, 0·65625, 0·1640625 . . . .

1721. 3, —12, 48, —192, ...

1722. Wie groß ist das erste Glied einer Progression, deren Quotient $1\frac{1}{5}$, deren 7tes Glied $67\frac{13}{32}$ ist?

1723. Wie viele Anfangsglieder der Progression 1, 3, 9, 27, . . . muß man addieren, um 3280 zur Summe zu erhalten?

1724. Wie groß ist der Quotient einer Progression, deren erstes Glied 2, deren 12tes Glied 4096 ist?

1725. Wie groß ist die Summe der 8 ersten Glieder der Progression

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \ldots$$

1726. Man bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{1}{(1+p)} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} \ldots + \frac{1}{(1+p)^{n-1}} + \frac{1}{(1+p)^n}.$$

$$s_n = \frac{(1+p)^n - 1}{p\,(1+p)^n}.$$

1727. Man leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, q, n, a_n und s_n (§. 263) die beiden anderen bestimmt werden.

Man löse folgende Aufgaben:

	a_1	q	n	a_n	s_n
1728.	7	4	9	a_n	s_n
1729.	6	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{217}{512}$	s_n
1730.	4	3	n	a_n	118096
1731.	4096	q	14	0·5	s_n
1732.	2048	q	12	a_n	4095
1733.	31	q	n	$3827\frac{13}{81}$	$5454\frac{7}{81}$
1734.	a_1	$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{3}{4}$	s_n
1735.	a_1	2	14	a_n	$2047\frac{7}{8}$
1736.	a_1	3	n	117147	265720
1737.	a_1	q	10	0·125	127·875

Man verwandle mit Hilfe der geometrischen Progressionen folgende periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche (§. 262, Zusatz):

1738. $0{\cdot}\dot{6}$; **1739.** $0{\cdot}\dot{8}\dot{1}$; **1740.** $0{\cdot}\dot{1}0\dot{5}$;

1741. $8{\cdot}\dot{7}$; **1742.** $5{\cdot}1\dot{3}\dot{6}$; **1743.** $0{\cdot}57\dot{1}0\dot{2}$.

1744. Zwischen 5 und 405 sollen drei Glieder so interpoliert werden, daß dann alle fünf Glieder eine geometrische Progression bilden.

1745. Man interpoliere zwischen je zwei Glieder der Progression 1, 10, 100, 1000, . . . 5 neue Glieder.

1746. Jemand setzt sechsmal in die Lotterie; das erste Mal 10 Kreuzer, und jedes folgende Mal doppelt so viel, als für die frühere Ziehung. Das 6te Mal gewinnt er, und es wird ihm der letzte Einsatz 4800mal zurückgezahlt. Wie viel beträgt dieser Gewinn und wie viel hat er im Ganzen eingesetzt?

1747. Es legt Jemand im Monate Jänner einen Kreuzer zurück, in jedem folgenden Monate 3mal so viel als im vorhergehenden; wie viel hat er im ganzen Jahre zurückgelegt?

1748. Eine Schuld von 13000 fl. soll in 4 Raten, deren jede 3mal so groß ist als die vorhergehende, zurückgezahlt werden; wie groß ist jede Ratenzahlung?

1749. In einem Fasse sind 100 Maß Wein. Man nimmt daraus 1 Maß und gießt dafür 1 Maß Wasser hinein; aus dieser Mischung nimmt man wieder 1 Maß und gießt eben so viel Wasser hinein. Wie oft kann man so verfahren, bis in der Mischung nur noch 50 Maß Wein übrig sind?

1750. Ein Lichtstrahl verliert bei dem Durchgang durch eine Glasplatte $\frac{1}{10}$ seiner Intensität; wie groß wird diese noch sein, wenn er durch 10 hinter einander aufgestellte Platten hindurch gegangen ist?

3. Zinseszins- und Rentenrechnungen.

(§§. 265—269.)

1751. Zu welchem Werthe wächst ein Capital von 5800 fl. in 15 Jahren bei 5% Zinseszins an?

1752. Jemand legt zu Anfange eines Jahres 5042 fl. in eine Sparcasse, welche die Einlagen zu $4\frac{1}{2}\%$ und zwar halbjährig verzinset, ein. Nach 20 Jahren behebt er das Capital sammt Zins und Zinseszins; wie groß ist die Summe?

1753. Wie viel werden 7324 fl. 20 kr. zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins bei ganzjähriger Capitalsierung der Zinsen nach $23\frac{3}{4}$ Jahren werth sein?

1754. Der Bestand eines Waldes ist gegenwärtig 12350 Klafter; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?

1755. Ein Land hat gegenwärtig 548200 Einwohner; wie groß wird die Bevölkerung bei einer jährlichen Zunahme von $1\frac{1}{2}\%$ nach 14 Jahren sein?

1756. Ein Capital von 9000 fl. ist nach 10 Jahren unverzinslich fällig. Wie groß ist sein gegenwärtiger Werth, wenn Zinseszinsen zu 5% gerechnet werden?

1757. Für ein durch 9 Jahre zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins angelegtes Capital erhielt man 5234 fl.; wie groß war das ursprüngliche Capital, wenn die Zinsen ganzjährig zum Capital geschlagen wurden?

1758. Eine Stadt zählt gegenwärtig 3623 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 30 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 2‰.

1759. Ein Capital von 7537 fl. 80 kr. wächst in 20 Jahren mittelst Zinseszinsen auf 20000 fl. an; zu wie viel % war es verzinset?

1760. 3200 fl. sind vor 80 Jahren angelegt worden und während dieser Zeit sammt Zinseszins auf 34059·83 fl. angewachsen; zu wie viel % war das Capital angelegt?

1761. Der Bestand eines Waldes hat sich in 12 Jahren von 27000 Klaftern auf 35000 Klafter erhöht; wie viel % beträgt der jährliche Zuwachs?

1762. In wie viel Jahren wird ein Capital von A fl. bei ganzjähriger Capitalisation zu P % Zinseszins m mal so groß, als es ursprünglich war? Hier muß man B = m A setzen, daher ist $n = \frac{\log m}{(\log 1 + p)}$.

1763. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital zu 5% Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisation?

1764. In wie viel Zeit wird ein Capital zu 4% Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung auf das Dreifache anwachsen?

1765. Ein Sterbender setzt zum Neubau der Kirche seines Ortes ein Legat von 18000 fl. aus. Nach dem Voranschlage des Baues wird derselbe 24738 fl. kosten; man will daher, da das Capital bei einer Bank zu 5% Zinseszinsen angelegt werden kann, den Bau so lange verschieben, bis dasselbe auf die erforderliche Höhe gestiegen ist. Nach wie viel Jahren wird dieses der Fall sein?

1766. In wie viel Jahren erhöht sich die Bevölkerung eines Ortes bei $1\frac{1}{4}$% jährlicher Zunahme von 5200 Einwohnern auf 9433 Einwohner?

1767. An einer Schuld von 10000 fl. werden nach drei Jahren 2500 fl., nach sechs Jahren 1000 fl. abbezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach zehn Jahren, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

1768. Durch 20 Jahre werden zu Anfang eines jeden Jahres 200 fl. angelegt; zu welchem Werthe werden diese Capitalien bei 4% Zinseszins nach dieser Zeit anwachsen?

1769. Ein Vater will seinem Sohne, wenn dieser das 24ste Jahr erreicht hat, eine Summe versichern. Er zahlt zu diesem Zwecke von der Geburt des Sohnes angefangen bis zu jener Zeit an eine Versicherungsanstalt am Anfange jedes Jahres 100 fl. Welchen Betrag wird die Anstalt an den Sohn auszuzahlen haben, wenn eine ganzjährige Capitalisation von 4% Zinseszins angenommen wird?

1770. Jemand hat sechs Jahre nach einander jedes Jahr 285 fl. zu bezahlen; er bleibt sie aber bis zu Anfang des sechsten Jahres schuldig; wie viel beträgt nun zu dieser Zeit seine Schuld, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

1771. Jemand hat durch 12 Jahre am Anfange eines jeden Jahres den gleichen Geldbetrag zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins angelegt, und bezieht dafür nach dieser Zeit 1939 fl. 18 kr. Wie groß war die jährliche Einlage?

1772. Ein Capital von 12500 fl. ist nach 7 Jahren fällig. Es soll durch gleiche, am Anfange eines jeden der 7 Jahre zahlbare Summen getilgt werden. Wie groß sind die Theilzahlungen bei 5% Zinseszins?

1773. Bei einer Anstalt werden 1000 fl. gegen Entrichtung einer jährlichen Prämie von 27 fl. versichert. Nach wie viel Jahren ist bei $3\frac{3}{4}$% das versicherte Capital durch Prämien gedeckt?

1774. Ein zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins ausstehendes Capital von 5000 fl. wird am Ende jedes Jahres um 500 fl. vermehrt; wie hoch wird es in 8 Jahren anwachsen?

1775. Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2\frac{1}{4}$% beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 45678 Klafter; wie groß wird der Bestand nach 18 Jahren sein, wenn am Ende eines jeden Jahres 2175 Klafter gefällt werden?

1776. Wie groß ist ein auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$% angelegtes Capital, wenn von demselben bei einer am Ende eines jeden Jahres eintretenden Verminderung um 250 fl. nach 15 Jahren noch 1300 fl. übrig sind?

1777. Jemand hat ein Capital von 12532 fl. zu $4\frac{1}{2}$% ausstehen, und gebraucht davon jährlich 1000 fl.; nach wie viel Jahren wird das Capital erschöpft sein?

1778. Welchen gegenwärtigen Werth hat eine durch 11 Jahre am Ende jedes Jahres mit 420 fl. zu leistende Zahlung, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

1779. Welches ist der gegenwärtige Werth einer 20 Jahre hindurch zu zahlenden nachschußweisen Jahresrente von 250 fl. bei 5% Zinseszins?

1780. Jemand verkauft eine Jahresrente von 620 fl., die er noch durch 10 Jahre zu genießen hat; wie viel Geld wird er dafür erhalten, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

1781. Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung aufnehmen, dasselbe durch einen am Ende jedes Jahres zahlbaren Betrag von 8000 fl. binnen 25 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 4% Zinseszins darleihen?

1782. Dem Vormunde eines Kindes von 5 Jahren wird eine Summe von 4000 fl. mit der Verpflichtung überwiesen, das Kind bis zum 24sten Jahre zu erziehen. Welches ist der Betrag des nachschußweise zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn 5% Zinseszinsen berechnet werden?

1783. Ein Capital von 20000 fl. soll bei 4% Zinseszins durch eine jährliche Rente getilgt werden, die vom Ende des ersten Jahres beginnt und 30 Jahre dauert; wie groß muß die Rente sein?

1784. Jemand erlegt 12000 fl. zu 4%, und will dafür durch 24 Jahre eine jährliche Rente beziehen; wie groß wird dieselbe sein?

1785. Jemand will eine Schuld von 10000 fl., die zu 5% zu verzinsen ist, in 10 gleichen Jahresraten abtragen; wie groß wird eine Ratenzahlung sein?

1786. Eine Schuld von 2 Millionen Gulden soll bei $4\frac{1}{2}$% Zinseszins in 20 Jahren abgetragen werden; wie groß ist die jährliche Tilgungssumme?

1787. Ein Capital von 8000 fl. soll durch die nachschußweise jährliche Rente von 801·12 fl. bei 4% Zins getilgt werden; wie lange muß die Rente gezahlt werden?

1788. Jemand hat eine Jahresrente von 800 fl. auf 30 Jahre zu beziehen; er wünscht aber statt derselben eine größere auf 20 Jahre zu haben? wie groß wird diese bei $4\frac{1}{2}$% Zins sein?

1789. Welche Einlage muß man durch 20 Jahre am Anfange jedes Jahres an eine Versicherungsanstalt machen, um nach Verlauf dieser Zeit bei 4% Verzinsung eine Jahresrente von 300 fl. durch 12 Jahre zu genießen?

1790. Welche Jahresrente wird man durch 15 Jahre beziehen, wenn man vorher durch 25 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres einen Betrag von 125 fl. eingezahlt hat und wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

IX. Combinationslehre.

1. Permutationen, Combinationen und Variationen.

(§§. 275—285.)

1791. Welche und wie viele Permutationen erhält man aus den Buchstaben des Wortes „ROMA"?

1292. Wie oft können 5 Tischgenossen ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen Ordnungen gesessen sind?

1793. Wie viel verschiedene Stellungen geben 3 weiße, eine blaue und 2 rothe Kugeln?

1794. Wie viele verschiedene neunziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden?

1795. Wie viele verschiedene fünfziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern der Zahl 59165 bilden?

1796. Wie viel Unionen, Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie?

1797. Welche und wie viele Würfe durchaus ungleicher Felder können mit 2 Würfeln geworfen werden?

1798. Wenn man aus den 32 Blättern der sogenannten deutschen Karte zwei Blätter zugleich zieht, wie oft können die gezogenen Karten verschieden sein?

1799. Wie viele Dreiecke können durch 10 sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden?

1800. Welche und wie viele Verbindungen zu drei sind aus den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks möglich?

1801. Welche Arten des Wechsels von je drei der 6 Farben: roth, orange, gelb, grün, blau, violett sind möglich?

1802. Wie viele verschiedene Würfe sind mit 2 Würfeln möglich?

1803. Welche verschiedene Würfe geben bei 3 Würfeln 10 zur Summe?

1804. Es sind 4 Fächer mit 7 verschiedenfarbigen Kugeln zu besetzen, so daß in jedes Fach eine Kugel zu stehen kommt; auf wie vielfache Art kann dies geschehen?

1805. Wie viele Würfe sind mit drei Würfeln möglich, von denen der eine weiß, der zweite gelb, der dritte roth ist, wenn man annimmt, daß Würfe von gleichviel Augen aber in verschiedenen Farben als verschieden zu betrachten sind?

1806. Wie viele vierziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden?

1807. Wie viele einfache und zusammengesetzte Factoren hat die Zahl 2310 mit Einschluß von 1 und der Zahl selbst?

1808. Ein optischer Telegraph hat 6 Arme, von denen jeder 4 verschiedene Stellungen einnehmen kann; wie viel Zeichen kann der Telegraph geben?

2. Potenzen von Binomen.

(§§. 288 — 291.)

1809. $(x + a)^4 =$ **1810.** $(x - y)^{10} =$

1811. $(3a + 4b)^5 =$ **1812.** $(5a - 3b)^6 =$

1813. $(x^2 + 2y)^4 =$ **1814.** $(3m^2 - 2n^3)^5 =$

1815. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b^3}{3}\right)^5 =$ **1816.** $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^4 =$

1817. $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3c}{4d}\right)^6 =$ **1818.** $\left(\frac{4m}{3n} + \frac{9n}{4m}\right)^4 =$

1819. $\left(\frac{ax^2}{2by^2} - \frac{4b^2y}{a^2x}\right)^5 =$ **1820.** $\left(\frac{3ab^2}{4c^3y^2} - \frac{2c^3y}{3a^2b}\right)^7 =$

1821. $(4 + \sqrt{3})^8 =$ **1822.** $(6 - 5\sqrt{2})^6 =$

1823. $(a + b\sqrt{-1})^4 =$ **1824.** $(\sqrt{-2} - \sqrt{-3})^6 =$

1825. $(a + b)^{-3} =$ **1826.** $(2x - 3y)^{-4} =$

1827. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-2} =$ **1828.** $\left(\frac{2a}{5b} - \frac{10b}{3a}\right)^{-3} =$

1829. $(a^2 + x)^{\frac{1}{2}} =$ **1830.** $(a^2 - x)^{\frac{1}{3}} =$

1831. $\sqrt[3]{a^3 + x} =$ **1832.** $\sqrt[3]{a^3 - x} =$

1833. $\sqrt{50} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{49}.\sqrt{1 + \frac{1}{49}} = 7.\left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} =$

1834. $\sqrt{63} = \sqrt{64 - 1} = 8.\left(1 - \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} =$

1835. $\sqrt[3]{7} =$ **1836.** $\sqrt[4]{85} =$

1837. $\sqrt[6]{66} =$ **1838.** $\sqrt[5]{3120} =$

1839. $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} =$

1840. $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} =$

1841. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x}} =$ **1842.** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3 + x}} =$

1843. $(x + a)^{-\frac{m}{n}} =$ **1844.** $(x^n - a^n)^{-\frac{m}{n}} =$

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(§§. 292 – 301.)

1845. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Aufwerfen eines Münzstückes „Bild" zu werfen?

1846. In einer Urne sind 5 Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) eine ungerade Zahl, b) eine gerade Zahl von Kugeln herauszuziehen?

1847. Wie groß ist bei einem Spiel von 32 Karten die Wahrscheinlichkeit, a) eine rothe Farbe, b) eine Coeur, c) einen König, d) eine Figur, e) ein bestimmtes Blatt, z. B. Coeur-Dame zu ziehen?

1848. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zwei gleiche Felder zu werfen?

1849. In einer Urne sind 4 weiße, 3 rothe und 2 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 4 Kugeln eine weiße, zwei rothe und eine blaue zu greifen?

1850. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß eine 25jährige Person a) 36, b) 40, c) 50, d) 65 Jahre alt werde?

1851. Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer a) eines neugebornen Kindes, b) einer 12-, c) 18-, d) 36-, e) 55jährigen Person?

1852. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten a) eher eine rothe Figur als eine blaßrothe Karte zu ziehen?

1853. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Münzstücke „Bild" oder „Schrift" zu werfen?

1854. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln mehr als 8 Augen zu werfen?

1855. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Spielern, deren jeder ein Blatt von 32 Karten in Händen hat und die beide zugleich jeder eine Karte ziehen, A ein blaßrothes Blatt und B eine schwarze Figur ziehe?

1856. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten in den ersten zwei Zügen König und Dame derselben Farbe, jedoch in beliebiger Ordnung zu ziehen?

1857. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Herausziehen je einer Nummer aus einer Urne von 90 Nummern das erste Mal die Nummer 1, das zweite Mal die Nummer 90 zu ziehen, a) wenn die zuerst gezogene Nummer wieder in die Urne zurückgelegt wird, b) wenn das nicht geschieht?

1858. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel a) in zwei Würfen das erste Mal 1, das zweite Mal 2 zu werfen, b) in sechs Würfen das erste Mal 1, das zweite Mal 2,... das sechste Mal 6 zu werfen?

1859. In der Urne A befinden sich 4 Treffer und 20 Nieten, in der Urne B 6 Treffer und 24 Nieten, in der Urne C 8 Treffer und 28 Nieten; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen zufälligen Griff aus einer dieser Urnen einen Treffer zu ziehen?

1860. Auf einer Eisenbahn fahren von A nach B täglich 4 Züge mit 8 Wagen, deren jeder 3 Coupés hat. Jemand macht die Fahrt eines Tages und weiß, daß sein Freund eben dieselbe 2mal wöchentlich macht. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mit ihm in demselben Coupé zusammen zu treffen?

1861. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten 4mal nach einander eine Coeur zu ziehen?

1862. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man mit einem Würfel 3mal nach einander nicht 1 wirft?

1863. In einer Urne sind 12 weiße und 9 schwarze Kugeln. Man zieht 8mal je eine Kugel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den ersten 5 Ziehungen 5 weiße, und in den späteren 3 Ziehungen 3 schwarze Kugeln gezogen werden, a) wenn man nach jeder Ziehung die Kugel in die Urne zurückwirft, b) wenn das nicht geschieht?

1864. Ein Mann ist 50, seine Frau 40 Jahre alt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das nach 20 Jahren

a) noch der Mann lebe,
b) noch die Frau lebe,
c) noch beide leben,
d) schon der Mann todt sei,
e) schon die Frau todt sei,
f) schon beide todt seien,
g) der Mann die Frau überlebe,
h) die Frau den Mann überlebe,
i) entweder der Mann oder die Frau noch lebe,
k) entweder der Mann oder die Frau schon todt sei?

1865. Jemand besitzt ein Los einer aus 10000 Losen bestehenden Lotterie, worin ein Treffer von 20000 fl., einer von 10000 fl., 10 Treffer von 1000 fl., 50 von 100 fl, und 1000 von 5 fl. enthalten sind; wie groß ist seine mathematische Erwartung?

1866. Wie hoch kann der Einsatz sein, wenn beim Spiel mit zwei Würfeln jeder Pasch 1 fl. gewinnt, andere Würfe aber nicht zählen?

1867. A ist 42 Jahre alt und wünscht, daß nach seinem Tode seine nächsten Erben 4800 fl. erhalten. Welches Capital muß er zu diesem Zwecke bei 4% Zinseszins bei einer Versicherungsanstalt einlegen?

1868. Jemand zahlt an eine Bank eine bare Prämie, wofür sich dieselbe verbindlich macht, seinem jetzt 10jährigen Sohne, falls er das 24ste Lebensjahr erreicht, dann sofort den Betrag von 1000 fl. zurückzuzahlen. Welche Prämie wird die Bank bei $4\frac{1}{3}$% Zinseszins fordern?

1869. Wie groß ist bei 4% Zinseszins der gegenwärtige Werth einer Leibrente, welche eine 36jährige Person am Ende eines jeden Jahres im Betrage von 280 fl. zu beziehen hat?

1870. Eine 45jährige Person kauft sich mit einer Einlage von 6000 fl. eine Leibrente, welche von dem Ende des laufenden Jahres angefangen bis an das Lebensende dauern soll. Wie groß ist die Leibrente bei $4\frac{1}{2}$% Zinseszins?

1871. A ist 50, B 35 Jahre alt. A macht bei einer Versicherungsanstalt, welche 5% Zinsen rechnet, am Anfange eines jeden Jahres die gleiche Einlage, damit die Anstalt nach seinem Tode dem B am Ende eines jeden Jahres eine Rente von 500 fl. auszahle. Wie viel beträgt die jährliche Einlage?

1872. A ist 65 Jahre alt und leistet in eine Rentencasse einen jährlichen Beitrag von 300 fl., um nach seinem Tode seinem jetzt 12jährigen Sohne bis zum vollendeten 30sten Jahre eine nachschußweise Jahresrente zu sichern. Wie viel beträgt diese Rente bei 4% Zinseszins?

Inhalts-Verzeichniß.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen.

Achter Abschnitt.

Progressionen.

Neunter Abschnitt.

Die Combinationslehre.

Anhang.

Uebungsaufgaben.

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA
COBISS
00000390014

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIžNICA
579 097
COBISS