

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **20** (1992/1993)

Številka 2

Strani 104-110

Milena Strnad:

## ORNAMENTI IN GRUPE

Ključne besede: matematika, grupe.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/20/1127-Strnad.pdf>

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## ORNAMENTI IN GRUPE

Ornamentov, te neizčrpne zakladnice umetnosti, smo se lotili že v eni prejšnjih številčk Preseka. Spoznali smo, kako z ornamentom napolnimo neskončno dolg trak, definicijo ornamenta in njegove lastnosti pa smo oprli na študij izometriji. Tudi z ravninskimi ornamenti ni dosti drugače. Vendar za njihov natančnejši študij potrebujemo še en matematični pojem: *grupo*.

Grupo so uvedli v matematiko okoli leta 1830. Raziskovanja *Lagrangea*, *Chauchyja*, *Galoisa*, *Cayleya* in drugih matematikov so se vlekla skoraj stoletje, preden je definicija dobila obliko:

Grupa je množica  $\mathcal{G}$  skupaj z dvomestno operacijo  $\circ$ , ki zadošča pogojem:

- Operacija je *zaprta*. To pomeni, da operacija  $\circ$  vsakemu paru elementov iz  $\mathcal{G}$  priredi neki element samo te množice:

$$\forall a, b \in \mathcal{G} : (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{G}.$$

- Operacija je *asociativna*. To pomeni, da so oklepaji pri združevanju poljubnih treh elementov prestavljivi:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{G} : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

- V množici  $\mathcal{G}$  obstaja *enota*, označimo jo z  $e$ , za katero velja

$$\forall a \in \mathcal{G} : a \circ e = e \circ a = a.$$

- Vsak element iz množice  $\mathcal{G}$  ima *inverzni element*, ki ga simbolično označimo z eksponentom  $-1$ :

$$\forall a \in \mathcal{G}, \exists a^{-1} \in \mathcal{G} : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

Včasih uporabimo za operacijo ( $\circ$ ) znak plus (+). Takrat inverzni element označimo s predznakom minus (-).

Inverzni element k  $a^{-1}$  je kar  $a$ , to je  $(a^{-1})^{-1} = a$ . Potenca  $a^n$  je krajši zapis za  $\underbrace{a \circ a \circ a \dots \circ a}_n$ . Potenca  $a^{-n}$  je seveda  $(a^{-1})^n$ .

Če je operacija  $\circ$  še *komutativna*, to je, če za vsaka dva elementa  $a$  in  $b$  iz  $\mathcal{G}$  velja:  $a \circ b = b \circ a$ , govorimo o *komutativni grupi*.

Grupa je lahko *končna* ali *neskončna*, pač glede na to, ali je osnovna množica  $\mathcal{G}$  končna ali neskončna.

Napravimo nekaj zgledov:

1. *Aditivna grupa celih števil.*

To je množica celih števil  $\mathcal{Z} = \{0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$  skupaj z operacijo običajnega seštevanja. Cela števila so za seštevanje zaprta, saj je vsota poljubnih dveh celih števil vedno celo število. Grupni aksiomi so kar računski zakoni za vsoto:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ta grupa je komutativna ( $a + b = b + a$ ) in neskončna, ker je pač celih števil neskončno mnogo. Enota je število 0, inverzni element k  $n$  pa  $-n$ .

2. *Aditivna grupa vektorjev ravnine* je množica vseh vektorjev ravnine, to je usmerjenih daljic z začetkom v izbrani točki, skupaj z operacijo *seštevanja vektorjev* po paralelogramskem pravilu. Operacija je zaprta. Je asociativna. Enota za seštevanje je vektor 0, inverz k vsakemu vektorju pa je njegov nasprotni vektor (slika 1). Tudi ta grupa je komutativna in neskončna. Podobno obstaja *aditivna grupa vektorjev v prostoru*.



Slika 1. Vektorju  $\vec{a}$  nasprotni vektor  $-\vec{a}$ .

3. Kot primer za *transformacijsko grupo* vzemimo množico vseh vrtežev enakostraničnega trikotnika okrog njegovega središča, pri katerih se zavrti trikotnik popolnoma prekrije s prvotnim. Pravimo, da taki vrteži trikotnik *ohranjajo* ali, da je trikotnik na take vrteže *neobčutljiv*. Imamo le tri take vrteže: trikotnik lahko zavrtimo za poljuben cel večkratnik kotov  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  in  $0^\circ$  (identiteta). Označimo prvi vrtež z  $a$ , drugega z  $b$  in tretjega z  $e$ . Vrteži  $a$ ,  $b$ ,  $e$  tvorijo grupo z operacijo sestavljanja

teh vrtežev.

Operacijo v končni grupi lahko podamo s *tabelo*, ki ji rečemo tudi *grupna poštevanika*. Za zgled sestavimo tabelo za grupo iz primera 3:

o	e a b
e	e a b
a	a b e
b	b e a

Zapis je uporaben za končne grupe, katerih množice vsebujejo le malo elementov. Sicer pa se nepreglednosti izognemo tako, da poiščemo kar se da malo elementov, s katerimi lahko "izrazimo" vse elemente grupe.<sup>1</sup> Množici takih elementov rečemo *reduciran sistem generatorjev grupe*. Če tak nabor sestoji iz enega samega elementa, rečemo grupi *grupa z enim generatorjem*; če obstaja nabor z dvema elementoma, gre za *grupo z dvema generatorjema* itd.

Grupo z enim generatorjem smo srečali v zadnjem primeru. Že samo z elementom  $a$  lahko izrazimo vse elemente grupe:  $b = a \circ a = a^2$ , enota pa je  $e = b \circ a = a \circ b = a^3$ . Iz te zveze tudi sledi, da sta elementa  $a$  in  $b$  drug drugemu inverzna. Za dano grupo reducirani sistem generatorjev ni enolično določen. Grupo iz našega primera lahko generiramo na primer tudi z elementom  $b$ .

Primer neskončne grupe z enim generatorjem je na primer grupa celih števil. Generator je število 1.

Poglejmo še grupo iz štirih elementov  $e, a, b, c$  in z grupno poštevaniko

o	e a b c
e	e a b c
a	a e c b
b	b c e a
c	c b a e

Iz tablice preberemo, da lahko vse elemente grupe izrazimo že z  $a$  in  $b$ :

<sup>1</sup> Pokazati se da, da za vsako grupo tak minimalen nabor elementov obstaja in ni nujno en sam.

$$e = a^2 (= b^2) \text{ in } c = a \circ b (= b \circ a).$$

Z enim samim generatorjem te grupe ne moremo opisati. Za vajo se o tem prepričajte sami.

Grupam z enim generatorjem rečemo tudi *ciklične grupe*. Če je ciklična grupa končna, obstaja med elementi  $e, a, a^2, \dots$  tudi taka potenca  $a^r$ , da je  $a^r = e$ . Grupo  $\{e, a, a^2, \dots, a^{r-1}; a^r = e\}$  označujemo s  $C_r(a)$ . Če je ciklična grupa neskončna, so vse potence med seboj različne; tako grupo označimo s  $C_\infty(a)$ .

\*\*\*

Vzemimo zdaj za množico  $\mathcal{G}$  množico *transformacij* (to je povratno enoličnih preslikav) neke množice  $X$ , za operacijo pa sestavo preslikav. Take grupe imenujemo *transformacijske grupe*. Primer take grupe je *grupa vseh izometrij ravnine* (Evklidova grupa ravnine), pa *grupa translacij* (vzporednih premikov) ali *grupa vrtežev* (rotacijska grupa ravnine). Podobno lahko govorimo tudi o izometrijah trirazsežnega prostora ter o Evklidovi grupi trirazsežnega prostora.

Preslikavo dveh grup, pri kateri se elementi ene preslikajo povratno enolično na elemente druge in preide operacija prve v operacijo druge, imenujemo *izomorfizem*.

Poglejmo si najprej primer: logaritemska funkcija je izomorfizem  $\ln : (\mathcal{R}^+, \circ) \mapsto (\mathcal{R}, +)$ . Enakost  $\ln(x \circ y) = \ln x + \ln y$ , ki jo lahko zapišemo tudi v obliki  $xy = \ln^{-1}(\ln x + \ln y)$ , pove kako računamo produkt: logaritmiramo, seštejemo, antilogaritmiramo.

Prav lahko se je prepričati, da je grupa vseh premikov v ravnini izomorfna na grupi vektorjev ravnine. Grupa vrtežev okrog dane točke pa je izomorfna aditivni grupi kotov. Tudi ciklični grupi  $C_r(a)$  in  $C_r(b)$  sta izomorfni. Zaradi izomorfizma ju včasih sploh ne razlikujemo. Tedaj označimo ciklično grupo kar s  $C_r$ , neskončno ciklično grupo pa s  $C_\infty$ .

Definirajmo še *podgrupo*. Če je množica  $\mathcal{H}$  podmnožica  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  in je  $\mathcal{H}$  grupa za isto operacijo kot  $\mathcal{G}$ , rečemo, da je grupa  $\mathcal{H}$  *podgrupa* grupe  $\mathcal{G}$ .

Grupa  $C_2 = \{e, a^2\}$  je na primer podgrupa grupe  $C_4 = \{e, a, a^2, a^4\}$ .

Zdaj smo dovolj pripravljeni, da si poglobljeva ogledamo *Evklidovo grupo ravnine*. Posebej nas bodo zanimala njene podgrupe.

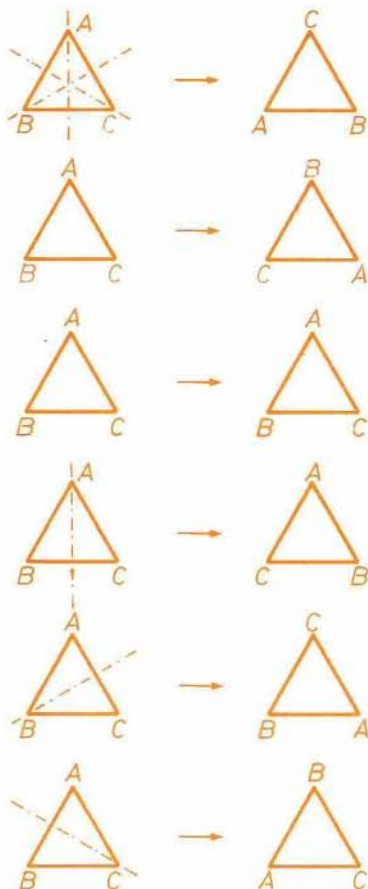
Vzporedni premiki v ravnini sestavljajo podgrupo Evklidove grupe, prav tako tudi vsi vrteži okoli izbrane točke. Ker za vzporedne premike lahko

izberemo različne smeri, za središče vrteža pa vsako točko ravnine, je takih podgrup Evklidove grupe neskončno. Vse translacijske grupe kot tudi grupe vrtežev so seveda med seboj izomorfne.

Kako pa je z zrcaljenji? Zrcaljenje  $Z_P$  čez dano premico in identiteta  $I$  tvorita grupo. Ker ima samo dva elementa ( $Z_P \circ Z_P = I$ ), je izomorfna  $C_2$ . Takih podgrup je v Evklidovi grupi spet toliko, kot je različnih premic v ravnini, torej neskončno. Sestava zrcaljenj preko dveh premic je vzporedni premik, če sta premici vzporedni, in vrtež, če se premici sekata. Ker torej množica vseh zrcaljenj ni zaprta za sestavo, ni podgrupa Evklidove grupe.

Za nas bodo posebno zanimive podgrupe Evklidove grupe z lastnostjo, da vsi njihovi elementi ohranjajo kakšen izbrani lik. Bralec se lahko sam prepriča, da množica vseh izometrijev ravnine, s katerimi se izbrani lik preslika nase, zares tvorijo podgrupo. Imenujmo jo *simetrijska grupa lika*. Simetrijske grupe likov so odvisne od oblike lika. Tako imajo podobni liki iste simetrijske grupe.

Če je lik popolnoma nesimetričen, vsebuje njegova simetrijska grupa le identiteto. Simetrijska grupa črk E in A je izomorfna  $C_2$ ; generator je zrcaljenje čez simetralo



Slika 2. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika

<sup>2</sup> Več o tem lahko bralec izve iz knjige I. Grossman, W. Magnus, *Grupe i njihovi grafovi*, Školska knjiga, Zagreb 1975.

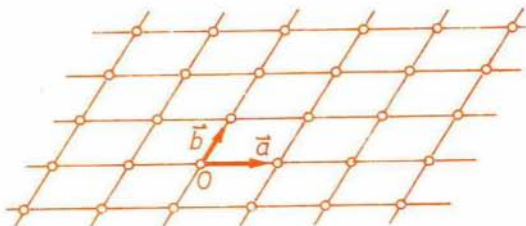
črke. Simetrijska grupa črke N je tudi izomorfna  $C_2$ ; generator je vrtež za  $180^\circ$  okrog njene srednje točke.

V abstraktnem smislu gre torej za isto grupo, čeprav imata različno geometrijsko vsebino. Simetrijska grupa enakostraničnega trikotnika ima 6 elementov, generatorja sta zrcaljenje čez eno simetralo in vrtež za kot  $120^\circ$  okrog središča lika (slika 2).

Simetrijske grupe pravih večkotnikov imenujemo *diedrske grupe*. Znamujemo jih z  $D_n$ , kjer je  $n$  število oglišč pravih večkotnika. Generatorja sta zrcaljenje preko ene od simetral in vrtež za kot  $2\pi/n$  okrog središča trikotnika.<sup>2</sup>

Končno omenimo še *simetrijsko grupo ravninske mreže*. Ravninsko mrežo dobimo tako, da si najprej izberemo par nevzporednih vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  z izhodiščem  $O$ , nato pa nosilki vektorjev premaknemo s translacijsko grupo, ki jo generirata translaciji  $T_a$  in  $T_b$  (slika 3). S tem povemo, da lahko vse elemente te grupe izrazimo samo z njima. *Vozlišča mreže*, to so preseki teh premic, so določena z vektorji

$$n\vec{a} + m\vec{b} \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$



Slika 3. Ravninska mreža

Rečemo tudi: vozlišča dobimo tako, da delujemo s translacijsko grupo na izhodišče  $O$ . Simetrijska grupa ravninske mreže vsebuje kot podgrupo vsaj simetrijsko grupo, ki jo generirata  $T_a$  in  $T_b$ , pa tudi rotacijsko grupo, ki jo generira vrtež za  $180^\circ$ . Le redke so mreže, ki jih ohranjajo tudi druge rotacijske grupe; a še te so kvečjemu take, ki jih generirajo vrteži za kote  $360^\circ/n$ , kjer je  $n$  1, 2, 3, 4 ali 6.

S to ugotovitvijo smo se že dotaknili *kristalografskih grup*, ki ohranjajo mrežo. Omenimo le, da so na neskončnem traku našeli 7, na ravnini 17 in v prostoru 230 takih grup. Ime so dobile po tem, ker ohranjajo prostorsko razporeditev atomov v kristalih. Zakaj jih obstaja prav toliko, je mogoče

ugotoviti z zahtevnejšim in globljim pogledom v teorijo grup.

Spomnimo se, da smo stalno ponavljajoč se vzorec na neskončnem traku v eni prejšnjih številki Preseka imenovali *ornament na traku*. Analogno lahko imenujemo *ornament na ravnini* vsak, na poseben način ponavljajoč se vzorec, ki izpolnjuje ravnino.

Tako kot smo natančnejšo definicijo ornamenta na traku oprli na izometrije, poskusimo njegovo definicijo na ravnini opreti na teorijo grup, saj smo spoznali, da simetrijska grupa začetni vzorec ohranja. Torej lahko rečemo: *Simetrijska grupa ornamenta v ravnini je grupa vseh izometrij ravnine, ki ornament ohranjajo.*

Ko zaslutimo, da je to v tesni zvezi s simetrijsko grupo mrež, smo dovolj pripravljeni, da se v naslednji številki Preseka lahko lotimo ornamentov na ravnini.

*Milena Strnad*