

IZRAVNAVA GEODETSKIH MREŽ Z RAZCEPOM PO SINGULARNIH VREDNOSTIH

Tomaž Ambrožič, mag. Goran Turk
FNT-Oddelek za montanistiko, FAGG-Oddelek za
gradbeništvo, Ljubljana
Prispelo za objavo: 1.6.1994

Izvleček

V članku sta prikazani dve metodi za reševanje sistemov enačb popravkov po metodi najmanjših kvadratov: klasična metoda z normalnimi enačbami in novejši razcep po singularnih vrednostih. Izračun neznank za razcep po singularnih vrednostih je izpeljan v celoti. Podane so prednosti in pomanjkljivosti obeh metod.

Ključne besede: geodetske mreže, izravnaje, normalne enačbe, razcep po singularnih vrednostih

Abstract

The least square problem may be solved by two different methods: by the traditional method of normal equations, or by a relatively new singular value decomposition method. The singular value decomposition method is described in detail. Advantages and shortcomings of both methods are discussed.

Keywords: adjustment, normal equations, singular value decomposition, surveying networks

UVOD

Že v 18. stoletju so za optimalno rešitev enačb popravkov vpeljali metodo najmanjših kvadratov. Rešitev po metodi najmanjših kvadratov pa lahko izračunamo na različne načine:

- z normalnimi enačbami
- z ortogonalnimi razcepi
 - Householderjeva transformacija
 - QR razcep
 - razcep po singularnih vrednostih in drugi.

V nadaljevanju si bomo ogledali metodo z normalnimi enačbami in podrobno predstavili razcep po singularnih vrednostih.

METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV

Pri izravnavi geodetskih mrež tvorimo sistem linearnih enačb popravkov (Feil 1989)

$$A\hat{x} = l \quad (1)$$

kjer je:

$A_{n \times u}$ - matrika koeficientov enačb popravkov

$\hat{x}_{u \times 1}$ - vektor neznank

$l_{n \times 1}$ - vektor opazovanj

n - število merjenj (enačb) in

u - število neznank.

Sistem (1) je predoločen, ker je število enačb večje od števila neznank. Ta sistem nima rešitve. Problem rešimo tako, da uporabimo metodo najmanjših kvadratov, ki jo je prvi predstavil Gauss leta 1796. Zapišimo vsoto kvadratov popravkov opazovanj

$$S = S(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{l}_i - l_i)^2 = \sum_{i=1}^n (A\hat{x}_i - l_i)^2 \quad (2)$$

Če predpostavimo, da so opazovanja slučajne spremenljivke, porazdeljene z normalno porazdelitvijo, izračunamo najbolj verjetne vrednosti neznank po metodi najmanjših kvadratov. To dokažemo z metodo največje podobnosti (Maximum likelihood) (Press et al. 1992). Takrat iščemo minimum funkcije.

SCHREIBERJEVO PRAVILO

Vsaka enačba popravkov ima utež, ki je pozitivna po definiciji. Praktično bi bilo, če bi imele vse enačbe popravkov utež enako ena. Zahtevi zadostimo, če namesto enačb popravkov tvorimo ekvivalentne enačbe popravkov (Mihailović 1981). Te lahko tvorimo na več načinov. Najpogosteje uporabljamo Schreiberjeva pravila. Tretje pravilo pravi, da enačbo popravkov

$$v = ax + by + \dots + ut + f \text{ z utežjo } p \quad (3a)$$

zamenjamo z ekvivalentno enačbo

$$v' = qv = qax + qby + \dots + qut + qf \text{ z utežjo } p/q^2. \quad (3b)$$

Če naj imajo vse enačbe popravkov utež enako ena, izračunamo vrednost faktorja q , s katerim moramo pomnožiti koeficiente leve in desne strani posamezne enačbe (3a), po enačbi:

$$p/q^2 = 1 \rightarrow q = \sqrt{p}$$

Pogoj metode najmanjših kvadratov $S(\hat{x}) = v^T P v = \min.$ tako zapišemo kot $S(\hat{x}) = v'^T v' = \min.$, kar bomo upoštevali v nadaljnjem izvajanju.

IZRAČUN REŠITEV PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV Z NORMALNIMI ENAČBAMI

Najbolj razširjen način za izračun rešitve problema po metodi najmanjših kvadratov so normalne enačbe, ki jih izpeljemo v posredni izravnavi z odvajanjem enačb popravkov po neznankah \hat{x} . Rešitev je

$$A^T A \hat{x} = A^T l \text{ oziroma } N \hat{x} = n, \quad (4)$$

kjer je:

N - matrika koeficientov normalnih enačb ($\det(N) \neq 0$) in

n - vektor desne strani normalnih enačb.

V normalnih enačbah (4) upoštevamo ekvivalentne enačbe (3b). Neznanke \hat{x} in njihovo natančnost ocene izračunamo z znanimi algoritmi za reševanje sistemov linearnih enačb (Bohte 1985).

IZRAČUN REŠITEV PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV Z RAZCEPOM SVD-JA

Od začetka sedemdesetih let se vedno bolj uveljavljajo tako imenovani ortogonalni razcepi za izračun neznank \hat{x} po metodi najmanjših kvadratov. Ogleдали si bomo razcep po singularnih vrednostih ali na kratko razcep SVD-ja (angl. Singular Value Decomposition) (Golub 1989, Press et al. 1992). Slabo pogojenih sistemov (1) ne rešujemo z metodo normalnih enačb, ker se lahko rešitve precej razlikujejo od točnih. S to metodo tudi ne moremo rešiti singularnih sistemov, ki jih dobimo pri izravnavi prostih mrež. Zahteva po izravnavi prostih mrež pa se često pojavlja. V teh primerih lahko uporabimo razcep SVD-ja.

Iz enačb popravkov ne tvorimo normalnih enačb, ampak razcepimo (ekvivalentno) matriko koeficientov enačb popravkov A v:

$$A = U W V^T, \quad (5)$$

kjer so:

U in V - kvadratni ortogonalni matriki in

$W = \text{diag}(w_i)$ - pravokotna diagonalna matrika singularnih vrednosti.

Za ortogonalni matriki U in V velja:

$$U^T U = U U^T = I \text{ in } V^T V = V V^T = I. \quad (6)$$

Najprej pogledjmo, kako izračunamo neznanke \hat{x} , če imamo nesingularen sistem (4). Če vektor popravkov opazovanj v (enačba (2)) pomnožimo z ortogonalno matriko, se norma $\|v\|_2$ ne spremeni:

$$S(\hat{x}) = \|U^T A \hat{x} - U^T l\|_2^2$$

$$S(\hat{x}) = \|U^T A V V^T \hat{x} - U^T l\|_2^2$$

$$S(\hat{x}) = \|W V^T \hat{x} - U^T l\|_2^2$$

$$S(\hat{x}) = \sum_{i=1}^u \left(w_i v_i^T \hat{x} - u_i^T l \right)^2 + \sum_{i=u+1}^n \left(u_i^T l \right)^2 \quad (7)$$

V enačbi (7) so:

w_i - diagonalni členi matrike W ,

u_i in v_i - stolpci pripadajočih matrik U in V .

Prvi člen na desni strani enačbe (7) je lahko nič ali različen od nič, drugi člen pa je vedno večji od nič. Ker želimo poiskati minimum funkcije S , moramo postaviti pogoj, da je prvi člen enak nič:

$$\sum_{i=1}^u \left(w_i v_i^T \hat{x} - u_i^T l \right)^2 = 0.$$

Vsota kvadratov je enaka nič le, če so vsi členi vsote enaki nič. Zato je:

$$v_i^T \hat{x} = \frac{u_i^T l}{w_i} \quad \text{za } i = 1, \dots, u. \quad (8)$$

Enačbo (8) zapišimo v matrični obliki:

$$V^T \hat{x} = \bar{W}^{-1} \bar{U}^T l, \quad (9)$$

kjer je:

\bar{U} - podmatrika matrike U in

\bar{W} - kvadratna diagonalna podmatrika matrike W .

Ker je \bar{W} kvadratna diagonalna matrika, izračunamo njeno inverzno matriko z naslednjim izrazom:

$$\bar{W}^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{w_i} \right) \quad \text{za } i = 1, \dots, u. \quad (10)$$

$w_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, u$, saj smo predpostavili, da rešujemo nesingularen sistem.

Končni izraz za izračun neznanek \hat{x} dobimo, če v enačbi (9) upoštevamo ortogonalnost matrike V (6):

$$\hat{x} = V \bar{W}^{-1} \bar{U}^T l. \quad (11)$$

Izračun neznanek \hat{x} po enačbi (11) je ekvivalenten računu po metodi z normalnimi enačbami. To dokazemo, če matriko A razcepimo, podobno kot v enačbi (5), na matrike \bar{U} , V in \bar{W} :

$$A = \bar{U} \bar{W} V^T. \quad (12)$$

Preuredimo normalne enačbe (4) v naslednjo obliko:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l. \quad (13)$$

Enačbo (12) vstavimo v enačbo (13) in upoštevamo lastnosti matrik \bar{U} , V in \bar{W} (6):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (V \bar{W} \bar{U}^T \bar{U} \bar{W} V^T)^{-1} V \bar{W} \bar{U}^T l \\ \hat{x} &= (V \bar{W} \bar{W} V^T)^{-1} V \bar{W} \bar{U}^T l \\ \hat{x} &= V \bar{W}^{-1} \bar{W}^{-1} V^T V \bar{W} \bar{U}^T l \\ \hat{x} &= V \bar{W}^{-1} \bar{U}^T l. \end{aligned} \quad (14)$$

Vidimo, da sta enačbi (11) in (14) enaki. Dokazali smo torej, da je vektor neznanek \hat{x} enak, če ga računamo z metodo normalnih enačb ali z razcepom SVD-ja.

Sedaj pogledimo, kako izračunamo neznanke \hat{x} , če je sistem (4) singularen. V tem primeru je vsaj en člen na diagonali v matriki \bar{W} enak nič. Zato ne moremo uporabiti enačbe (10) pri izračunu neznanek \hat{x} . Vendar bomo dokazali, da dobimo rešitev po metodi najmanjših kvadratov, če postavimo, da so diagonalni členi $1/w_i$ enaki nič za vse w_i enake nič ali pri stalno pogojenem sistemu skoraj enake nič. Vrstice in stolpce razporedimo tako, da vse matrike razdelimo na dva dela: enega, ki pripada vrednostim $w_i \neq 0$ in drugega, ki pripada vrednostim $w_i = 0$. Število od nič različnih singularnih vrednosti je rang matrike A in ga označimo z r . Izpeljavo začnemo enako kot v primeru nesingularnih vrednosti. V enačbi (7) se spremeni le meja za seštevanje:

$$S(\hat{x}) = \sum_{i=1}^r \left(w_i v_i^T \hat{x} - u_i^T l \right)^2 + \sum_{i=r+1}^n \left(u_i^T l \right)^2.$$

Minimum funkcije dobimo, če postavimo pogoj, da je prvi člen enak nič:

$$\sum_{i=1}^r \left(w_i v_i^T \hat{x} - u_i^T l \right)^2 = 0 \text{ ali}$$

$$v_i^T \hat{x} = \frac{u_i^T l}{w_i} \text{ za } i = 1, \dots, r.$$

Če želimo uporabiti enačbo (14) za izračun neznank \hat{x} , mora veljati, da je

$$v_i^T \hat{x} = \frac{u_i^T l}{w_i} = 0 \text{ za } i = r + 1, \dots, u,$$

kar je ekvivalentno pogoju, ki smo ga želeli dokazati:

$$\frac{l}{w_i} = 0 \text{ za } i = r + 1, \dots, u.$$

Dokazali smo torej, da dobimo rezultat po metodi najmanjših kvadratov tudi v primeru singularnega sistema, ki ga z normalnimi enačbami ne moremo rešiti.

ZAKLJUČEK

Slaba stran metode normalnih enačb je, da je pri slabo pogojenem sistemu (1) nestabilna. To pomeni, da že majhne spremembe v sistemu povzročijo velike spremembe v rešitvi. V tem primeru rešitev ni točno izračunana. V izravnava prostih mrež, kjer imamo premalo danih količin, pa je sistem (4) singularen. To pomeni, da lahko proste mreže izravnamo le, če vpeljemo dodatne pogoje med neznankami ali pa računamo z razcepom SVD-ja. Vpeljevanje teh pogojev je programersko precej zahtevno, medtem ko za rešitev z razcepom SVD-ja ne potrebujemo nobenega dodatnega dela. Programi, s katerimi izračunamo razcep SVD-ja, so objavljeni in jih lahko uporabimo (Press et al. 1992).

Slaba stran razcepa SVD-ja je, da potrebujemo za razcep bistveno več računalniškega pomnilnika, saj moramo imeti v pomnilniku shranjeno celotno matriko A in matrike \bar{U} , V ter \bar{W} . Do sedaj še ni znanih algoritmov, ki bi pri razcep SVD-ja varčno shranjevali elemente matrik. Pri reševanju po metodi normalnih enačb je taka na primer metoda "skyline" (Ambrožič et al. 1993). Reševanje problema po metodi najmanjših kvadratov z razcepom SVD-ja zahteva tudi več računskega časa v primerjavi z metodo normalnih enačb. V literaturi (Golub 1989) podajajo število računskih operacij ("flop"). Z normalnimi enačbami potrebujemo $(un^2 + n^3/3)$ operacij, z razcepom SVD-ja pa $(2un^2 + 2n^3)$. Z razcepom SVD-ja lahko zelo hitro odkrijemo vse napake merjenj, saj moramo le preveriti, kateri popravki so po izravnavi izredno veliki. Za te meritve lahko zatrdimo, da so napačne in jih moramo popraviti ali izločiti.

Računalniški program GeM (Ambrožič 1988) smo priredili tako, da lahko izravnamo poljubne mreže v ravnini z normalnimi enačbami ali pa z razcepom SVD-ja. Rezultatov izravnave, dobljenih po različnih poteh, ne navajamo, ker so v obeh primerih enaki.

Literatura:

- Ambrožič, T., 1988, *Izdelava programa za izravnavo ravninske mreže za ATARI in IBM, Diplomaska naloga, FAGG, Ljubljana.*
- Ambrožič, T. et al., 1993, *Uporaba metode "skyline" v izravnavi geodetskih mrež, Geodetski vestnik (37), Ljubljana, št. 2, 115-119.*
- Bohte, Z., 1985, *Numerične metode, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Zveza za tehnično kulturo Slovenije, Ljubljana.*
- Feil, L., 1989, *Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Prvi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.*

Golub, G.H. et al., 1989, Matrix Computations, 2nd Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, USA.

Mihailović, K., 1981, Geodezija II, I deo, Građevinska knjiga, Beograd.

Press, H.P. et al., 1992, Numerical Recipes in Fortran, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, USA.

*Recenzija: mag. Bojan Stopar
prof.dr. Ranko Todorović*