

31824, III, Fe,
22

GEOMETRIJA

za
učiteljišča.



Sestavil
L. LAVTAR,
ces. kralj. profesor v Mariboru.

Založila in na svetlo dala
„MATICA SLOVENSKA“.

V Ljubljani.
Natisnili J. Blaznikovi nasledniki.
1882.

GEOMETRIJA

za

učiteljišča.



Sestavil

L. LAVTAR,

ces. kralj. profesor v Mariboru.

Založila in na svetlo dala

MATICA SLOVENSKA.

V LJUBLJANI, 1881.

NATISNILI J. BLAZNIKOV I NASLEDNIKI.

Predgovor.

Pri spisovanji šolske knjige je treba, da gledamo posebno na dvoje: na množino tvarine in na metodo, po kateri izbrano tvarino učencem podajemo.

Prvo sem vzel skoraj skoz in skoz iz „Lehrbuch der Geometrie für Lehrerbildungsanstalten von Dr. Franz Ritter v. Močnik“. Izpušchal sem samo nekatere malenkosti, planimetriji pa dodal kratek nauk o simetriji in projekciji, na kar me je napotila geometrija spisana za nižje srednje šole in učiteljišča od J. Schramma. Naloge sem vzel tudi iz Močnikove geometrije, katere sem pomnožil tu pa tam s Schrammovimi; nekaj jih je dodal pa gospod profesor J. Celestina.

Metoda mora se pa ravnati po zmožnosti učencev in po namenu, katerega hočemo ž njimi doseči.

Na učiteljišča prihajajo učenci večinoma iz ljudskih šol in sicer navadno iz 3- in 4razrednih, pa tudi iz 2razrednih, ali pa iz prvih razredov nižjih srednjih šol, ter nimajo tolike formalne izobraženosti, kakor oni, kateri so izvršili nižjo gimnazijo ali realko. Za nje bi bilo torej treba geometrije, kakeršno uče na spodnjih srednjih šolah. In J. Schramm je imel gotovo kaj tacega v mislih, ko je napisal „Anfangsgründe der Geometrie oder geometrische Formenlehre für die unteren Klassen von Mittelschulen und für Lehrer-Seminarien“.

Zraven tega so pa vendar na učiteljišča prihajajoči učenci po starosti zrelejši od učencev na nižjih srednjih šolah, torej s časoma sposobni za bolj znanstveno metodo v geometriji, kakor jo nahajamo v Močnikovi geometriji za učiteljišča. Zato sem skušal pri sestavljanji svojega rokopisa obojnemu zadostiti, rav-

naje se po besedah: „Wird man heute darauf rechnen dürfen, dass die Schullehrerseminare ihre Zöglinge so vorgebildet empfangen, wie es ihre fachmässige Ausbildung erfordert, so wird ein Cursus streng wissenschaftlicher Geometrie unbedingt von ihnen erwartet werden müssen. Rückblicke auf ihre elementare Ausbildung, Verdeutlichung der Begriffe durch Anschauungen werden nur häufiger als auf Gymnasien stattfinden müssen, damit die Föhlung mit derjenigen Behandlung des Faches nicht verloren wird, wie sie sie im Lehramte einst werden üben müssen“. (Pädagogisches Handbuch, Schmid). V ta namen nisem mogel popolnoma prezirati tako zvane genetične metode in pridejal sem rokopisu vaje, katere postavljajo prostorne tvore v raznih izpremembah učencu pred oči in druge, katere navajajo učenca, da išče spoznane prostorne tvore na znanih telesih.

Vaje, kakeršna je naloga, po kateri naj učenci vsoto vseh treh kotov trikotnika narišejo zraven trikotnika, pripravljajo prvi korak do sintetičnega dokaza in sicer v tem slučaju do dokaza izreka o vsoti kotov trikotnikovih.

Definicije neznanih pojmov sem podajal še-le, ko so učenci one pojme spoznali na konkretnih slučajih.

Od začetka učenec navadno ne more ločiti v izrekih trditve od pogoja in zato je dokaz onega izreka za njega jako težaven, ker ne ve, kaj hoče doseči. Treba je torej od začetka dokaze tako uravnati, da sledi trditev neposredno brez vmesnih sklepov iz pogoja, da dobi učenec jasen občutek za to, kar mu je naloga. Tvarina mora torej biti do trikotnika na prav priprost način obravnana. Pri izreku za sovršne kote n. pr. bi dokazali, da je $\sphericalangle a = \sphericalangle c$ (lik 10.), ker krak AO zavrtimo s krakom OB za isto iz nepremične lege CD , ko si stvorimo ta kota. Ali izreke o protikotih, izmeničnih kotih in prikotih bi dokazali s pokrivanjem sokotij (glej §. 19). Ako pokrijemo $\sphericalangle a$ (lik 12.) z enakim protikotom m , pokrivata se tudi vsaka druga dva protikota, torej sta ona tudi jednaka i. t. d.

Na ta način se navadijo učenci pogoj od trditve ločiti in postanejo sposobni za dokaze z vmesnimi sklepi. Ako pa še zahtevamo, da risajo like po danem pogoju, seznanijo se v prvem letu popolnoma z bistvom dokaza, ter so pripravljeni za

znanstveno obravnavanje geometrije. Potem jim tudi bolj občni izreki ne delajo nobednih težav. N. pr. oni razumejo izrek 1. §. 82 tudi prav lahko, ako se glasi: „Ako sečemo dva trakova z vzporednicama, so odseki trakov sorazmerni“, kateri se dá pozneje mnogo bolje porabiti, kakor oni, ki ga nahajamo v Močniku.

Analitične geometrije ne zahteva ministerski ukaz, zato sem tudi izpustil, kar je Močnik iz nje v svojo geometrijo sprejel.

Važno se mi je zdelo, da si pripravniki prostor in njegove dele jasno predstavljajo, ko prehajajo v stereometrijo, zato sem tej postavil na čelo klin in vaje o njem, ravna je se po Frischau. Nekaterе partije so v tem delu okrajšane in bolj priproste, da pridobimo čas za geometrijsko risanje, za katero sem dodal več vaj vzetih iz Schrammove geometrije.

Za geometrijsko risanje, katero poudarja ministerski ukaz, potrebujejo učenci ravnilo razdeljeno na centimetre in milimetre, in transportér; kajti zdi se mi jako važno, da je kolikost daljic in kotov, katere navajamo v nalogah, določena z danimi imenskimi števili, kakor to nahajamo v Schrammovih nalogah.

V likih bi bilo dobro bistvene črte, pomočne črte, proizvodnice ločiti jedno od druge in to ne samo pri risanju v zvezke, ampak tudi v knjigi, kjer bi morali liki služiti za vzor pri risanju na papir. Za nauk o situacijah bi bila pa posebno koristna prijana kolorovana tabla, na kateri se nahajajo označene kulture in razni predmeti.

Toliko naj omenim o načelih, katera so me vodila z ozirom na metodo te knjige. Treba je še, da izpregovorim nekoliko besedij o terminologiji. Ravnal se sem večinoma po Cigaletovi, vendar ž njo nisem izhajal v vsem. Ker je pa želeti, da se poprimemo vsi istih izrazov v terminologiji, vendar ne moremo misliti, da bi jeden z ozirom na to zmerom pravo zadel ali vsaj vsakemu ustregel; izrekam samo željo, da bi se o dvomljivih izrazih začeli v kakem listu kritično pogovarjati; na ta način bi potem najhitreje dospeli do stalnih izrazov.

Obširneje svojih načel za spisavanje geometrije za učiteljska na tem mestu ne morem razvijati, omenjati moram samo, da knjiga, katera ima moje ime na čelu, zaradi marsikaterе ovire ni popolnoma v navedenem zmislu izvršena. Vlada je izrekla,

da jej je ljubše, ako so slovenske šolske knjige preložene iz že potrjenih nemških; Matica Slovenska je kupila zaradi manjših stroškov clichés od založnika Močnikove knjige, i. t. d.

Rokopis, katerega sem iz navedenih vzrokov že sam nekoliko pre naredil, pregledovala sta gospoda profesorja Jos. Celestina in And. Senekovič in ga tudi pre narejala po svojem prepričanju. Izrekam torej obema gospodoma za ta trud, posebno pa za prijazno preskrbljevanje korekture, ter tudi gosp. profesorju Fr. Levcu, kateri je s svojimi filologičnimi sveti mnogo koristil, zaslužno zahvalo.

Kedor pa presojuje to knjigo, naj ne prezira težav, katere nahajamo vselej, kedar orjemo ledino, sodi naj iz objektivnega stališča in naj graja očitno, kar se mu zdi grajanja vredno, kajti le na ta način bo dospelo to delo do vrhunca svoje popolnosti.

V MARIBORU, meseca februarja 1882.

L. Lavtar.

Kazalo.

Predgovor	Stran III
Uvod	1

Prvi del. Planimetrija.

Prvi oddelek. Preme in koti.

Preme	4
Koti	6
Vzporednice	13
Naloge za načrtovanje	15

Drugi oddelek.

O premočrtnih likih v obče.

Trikotnik	16
Četverkotnik	21
Mnogokotnik	22

Tretji oddelek.

Skladnost premočrtnih likov.

Skladnost trikotnikov	24
Skladnost mnogokotnikov	27
Uporaba izrekov o skladnosti	28
Naloge za načrtovanje	35

Četrty oddelek.

Ploščina premočrtnih likov.

Določitev ploščine in enakost ploskev	41
Računske naloge	46
Naloge za načrtovanje	50

Peti oddelek.

Podobnost premočrtnih likov.

Geometrijska razmerja in sorazmerja	55
Podobnost trikotnikov	58
Podobnost mnogokotnikov	61
Uporaba izrekov o podobnosti trikotnikov	63
Ploščinska razmerja premočrtnih likov	65
Računske naloge	67
Naloge za načrtovanje	68

Šesti oddelek.

Krog.

Krog in točka	72
Krog in prema	73
Krog in kot	76
Dva kroga	78
Krog in mnogokotnik	81
Sorazmerja pri krogu	86
Krogomerstvo	88
Računske naloge	92
Naloge za načrtovanje	95

Sedmi oddelek.

Elipsa, hiperbola in parabola.

Elipsa	99
Hiperbola	101

	Stran
Parabola	104
Naloge za načrtovanje	105

Osmi oddelek.

Simetrična lega, projekcija.

Simetrija	107
Projekcija	108

Drugi del.

Stereometrija.

Prvi oddelek.

Preme in ravnine v prostoru.

Lega ravnin z ozirom na druge ravnine	113
Ravnina in prema	114
Simetrija z ozirom na ravnino	117
Telesni ogli	118
Projekcija na ravnino	121

Drugi oddelek.

O prostorih in telesih.

Prostori	124
Piramide	126
Prizma	130
Stožec	133
Cilinder	135
Pravilni poliedri	137
Krogla	140

Tretji oddelek.

Merjenje teles.

Površje in prostornina prizme in cilindra	146
Površje in prostornina piramide, stožca, okrajš. piramide in okrajš. stožca	148
Površje in prostornina krogle	152
Računske naloge	154

Tretji del.

Trigonometrija.

Prvi oddelek.

Kotomernice	164
Razmera med kotomernicami in polumerom	165
Izpremema kotnih funkcij s kotom	166
Natančnejša določitev kotnih funkcij	168
Funkcije sestavljenih kotov	170
Izračunavanje kotnih funkcij	173

Drugi oddelek.

Rešitev trikotnikov.

Pravokotni trikotniki	177
Poševnokotni trikotniki	180
Uporaba trigonometrije	187

Dodatek.

Nekaj o mapovanju zemljišč.

Merjenje daljic na polji	190
Merjenje kotov na polji	193
Mapovanje zemljišč	195
Terminologija	196

U v o d.

Telo, ploskev, črta in točka.

§. 1. Vsak na vse strani omejen del prostora imenujemo **telo**. Meje telesa imenujemo **ploskve**, vse ploskve skupaj pa njegovo **površje**. Meje ploskve imenujemo **črte**, vse črte skupaj pa njen **obseg**.

Ploskve so ravne ali krive; prve imenujemo kratko **ravnine**.

Telo, katero je od samih ravnin omejeno, imenujemo **ravno-plosko**, vsako drugo pa **krivoplosko**. Ravnine si mislimo navadno brezkončne, če ne omenjamo izrekoma nasprotnega.

Vsako na vse strani od črt omejeno ploskev imenujemo **lik** (figuro). Črte lika imenujemo njegove **stranice**. Po številu stranic so liki tri-, četvero-, peterostranični i. t. d.

Črte so **preme** ali **krive**; prve imenujemo kratko **preme**.

Lik je **premočrten** ali **krivočrten**; prvemu so meje preme črte, drugemu krive.

Meji črte imenujemo **točki**.

Telesa, ploskve, črte in točke imenujemo **osnovne tvore** prostora.

Katera telesa vidiš tu*)? — Katera telesa vidiš v sobi? — Ali je oblika prostora, v katerem se nahajajo, različna od oblike teh teles? — Ali je ta prostor iz kake snovi, ali ima barvo, ali je luknjičav i. t. d.?

Preštej ploskve kocke, prizme, piramide i. t. d. in pokaži površje teh teles. — Ali moreš ločiti ploskev od telesa?

Preštej črte vsake ploskve pri kocki, prizmi i. t. d., in pokaži obseg ploskve. — Ali moreš črte ločiti od ploskev? —

Primerjaj ploskve kocke, prizme, piramide s ploskvami cilindra, stožca in krogle.

*) Učitelj ima n. pr. na mizi pred seboj kocko, pokončen četrtostran paralelepiped, pokončno šesterostrano piramido, pokončen cilindar, pokončen stožec in kroglo. — Ta telesa poznajo že učenci, če ne naj jim pa učitelj pove njihova imena.

Koliko likov nahajaš na kocki, prizmi in piramidi? — Kakšne like nahajaš na vsakem teh teles z ozirom na število stranic?

Primerjaj robove kocke, prizme in piramide z robovi cilindra in stožca. Kje in kako postajajo robovi teh teles? — Kakšen osnoven tvor je rob? —

Kakšne like nahajaš pri prizmi in piramidi, pri cilindru in stožci?

Kje in kako postajajo ogli pri kocki, prizmi in piramidi? —

§. 2. Vsako telo ima troj obmer, ono je dolgo, široko in visoko (globoko, debelo); ploskev ima dvoj obmer, ona je dolga in široka; črta ima samo jeden obmer, ona je dolga.

Telesa, ploskve in črte imenujemo **prostorne količine**, ker se razprostirajo.

Točka se ne razprostira, torej tudi ni prostorna količina.

Znanstvo, katero se peča s prostornimi tvori oziraje se na njihove prostorne lastnosti, imenujemo **geometrijo**. Delimo jo v dva glavna dela: **planimetrijo** in **stereometrijo**.

Geometrijo tvorov v jedni in isti ravnini ležečih imenujemo **planimetrijo**; geometrijo pa, ki se peča s prostornimi tvori, kateri ne leže samo v jedni jedini ravnini, nego se še zunaj nje v prostoru raztegajo, **stereometrijo**.

§. 3. Osnovne tvore prostora moremo si tudi po premikanji storjene misliti.

Pot, katero premikajoča se točka za seboj pušča, je črta. Premikajoča se črta, pa ne v sebi sami, napisuje ploskev. S premikanjem ploskve, pa ne v sebi sami, postaje telo. Kedar se premika točka zmerom v isti, neizpremenjeni meri proti drugi točki, postaje prema. Mer premikanja imenujemo **mer** postale preme. Kriva črta pa postaje, ako premikajoča se točka vsak trenotek svojo mer izpreminja.

Kakšno črto napiše krogla, ako jo *a)* izpustimo na tla, *b)* ako jo vržemo napošev kvišku?

§. 4. Kedar se točka *A* (lik 1.) tako premika v ravnini naprej, da ostane ves čas jednako oddaljena od nepremične točke *O*, dokler se ne povrne v svojo prvo lego, napisuje krivo črto, katero imenujemo **črto krožnico**. Ploskev omejeno od krožnice imenujemo **krožnino**. Za krožnico in krožnino rabimo mnogokrat besedo **krog**. Nepremično točko *O* imenujemo **središče** ali **centrum** in vsako premo od središča do katerekoli točke krožnice kakor n. pr. *OA*, *OB*, **polumer** (radij) kroga. Premo, katera veže dve točki

krožnice, imenujemo **tetivo**, n. pr. AB . Tetivo, katera gre skozi središče, kakor AC , imenujemo **premer** kroga.

Vsak del krožnice, kakor AB , imenujemo **lok**, in dolžino cele krožnice **obod** ali **periferijo** kroga. Polovico oboda imenujemo **polukrog**, četrti del pa **kvadrant**.

Iz povedanega sledi:

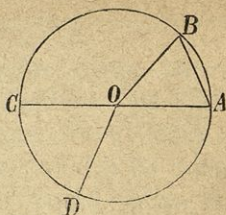
- Vsi polumeri kroga so jednaki.
- Vsak premer kroga je dvakrat daljši od polumera.
- Vsi premeri kroga so jednaki.

Opomnja. Ako vse točke kakega tvora istemu pogoju zadostujejo, imenujemo ga **geometrijsko mesto** teh točkek. Krožnica je torej geometrijsko mesto vseh točkek iste ravnine, katere so od nepremične točke jednako oddaljene.

Kaj napiše končna točka kazala na uri, ko pride od dvanajstih *a)* do dvanajstih, *b)* do dveh, *c)* do šestih in *d)* do treh? Kaj napiše točka leče pri nihalu ure? — Napiši krožnico s polumerom *a)* 3^{cm} *b)* 4^{cm} *c)* 5^{cm} 5^{mm}!

§. 5. Toček in črt v resnici risati ne moremo; to, kar je na papirji narisano, so le znaki toček ali črt.

Lik 1.



Prvi del.

Planimetrija.

Prvi oddelek.

P r e m e i n k o t i.

1. Preme.

§. 6. Skoz jedno točko moremo načrtati brezkončno mnogo prem na vse strani, skoz dve točki jedno samo. Dve točki določujeta popolnoma mer preme.

Premi, kateri imata dve točki skupni, padeta skupaj in tvorita jedno samo. Premi, različni po meri, moreta imeti le jedno samo točko skupno. Pravimo : sečeta se v tej točki, in to skupno točko imenujemo presečišče.

Načrtaj točko in skoz to toliko prem, kolikor jih le hočeš. — Načrtaj dve točki in skoz nji toliko prem kolikor jih moreš.

§. 7. Neomejeno premo imenujemo trak. Vsaka točka traka deli ga v dva polutraka; polutrak je torej na jedni strani omejena prema. Na obeh straneh omejeno premo imenujemo daljico, mejišči daljice pa njijini krajišči. Daljica med dvema točkama določuje razdaljo teh točk.

Vse trakove skupaj, katere načrtamo skoz isto točko, imenujemo trakovje (kito), skupno presečišče pa tračišče.

Točko zaznamujemo s črko.

Trak zaznačujemo z dvema v njem ležečima točkama, polutrak z mejiščem in s točko v njem ležečo, daljico s krajiščema.

§. 8. Trakove in polutrakove moremo le primerjati z ozirom na njihovo mer, daljice pa z ozirom na njihovo mer in dolžino.

Premo, katera leži v meri prosto padajočega telesa, imenujemo **navpično** (vertikalno); premo ležečo v meri površja mirne vode imenujemo **vodoravno** (horicontalno). Premi, kateri ležita v isti ravnini in se ne sečeta v nobedni točki, ako ji še toliko podaljšamo, imenujemo **vzporedni**. Vzporedni premi imata obe isto mer; nevzporednici imata različno mer, ter se zadosti podaljšani sečeta. Ravnino med vzporednicama imenujemo **progo**. Da je prema AB vzporedna s premo CD , zapišemo kratko $AB \parallel CD$.

Dve daljici sta jednako dolgi, ako ji moremo ta ko jedno na drugo položeni misliti, da se popolnoma krijeta; drugače sta nejednaki, in sicer je ona daljša, katera na jedni strani sega čez krajišče druge, ako se stikata krajišči na drugi strani.

Načrtaj po meri na oko: *a)* navpično, *b)* vodoravno premo, *c)* dve vzporedni, *d)* dve nevzporedni premi. Načrtaj *a)* dve jednaki, *b)* dve nejednaki daljici.

§. 9. Za primerjanje črt jemljemo jedno n. pr. meter, s katero merimo druge; imenujemo jo **mero** ali **mersko jednoto**, **dolgostno jednoto**. Število, katero pove, koliko merskih jednot ima črta, imenujemo njeno **mersko število**.

Katere dolgostne jednote poznaš? — Načrtaj daljice: *a)* 2^{cm} , *b)* 5^{cm} , *c)* 1^{dm} , *d)* 1^{dm} 5^{dm} dolge po meri na oko in z merilom.

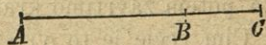
Osnovni računi z daljicami.

§. 10.

- a)* Seštevanje. Daljici AB in BC seštevati se pravi, iskati črto, katera je tako dolga, kakor obe daljici skupaj. To črto dobimo, ako podaljšamo daljico AB za daljico BC . Tedaj je

$$AB + BC = AC.$$

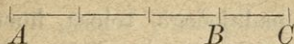
Lik 2.



- b)* Odštevanje. Daljico BC od daljice AC odštevati se pravi, iskati daljico, katera dá k BC prišteta daljico AC . To daljico dobimo, ako AC za BC skrajšamo t. j. točko C za daljico BC proti A nazaj premaknemo. To je

$$AC - BC = AB.$$

- c) Množenje. Črto BC s številom množiti se pravi, to črto tolikokrat za sumand postaviti, kolikokrat kaže to število. Tako je n. pr.



$$4 \cdot BC = AC.$$

- d) Merjenje. Ako preiskujemo, kolikokrat je BC v AC (lik 3.), merimo AC z BC . Tako je n. pr.

$$AC : BC = 4.$$

- e) Deljenje. Daljico AC s številom deliti se pravi, iskati daljico, katera dá množena s tem številom daljico AC . Tako je n. pr. po prejšnjem BC četrti del od AC t. j.

$$AC : 4 = BC.$$

Načrtaj a) dve daljici, b) tri daljice in poišči njihovo vsoto, a) po meri na oko, b) s pomočjo šestila.

Načrtaj dve daljici in poišči njihovo diferenco a) po meri na oko, b) s pomočjo šestila.

Poišči daljico, katera je 2, 3, 4krat toliko, kakor dana daljica.

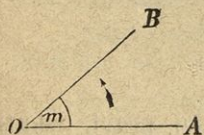
Dani sta daljša in krajša daljica, poišči a) na oko, b) s šestilom kolikokrat je druga v prvi.

Razdeli dano daljico v 2, 3, 4 jednake dele a) na oko, b) poskusoma s šestilom.

2. Koti.

§. 11. Premi AO in BO , kateri se stikata v točki O , tvorita kot. O imenujemo vrh, AO in BO kraka kota in ploskev med krakoma kotno ploskev ali kotnino. Kot

Lik 4.



zaznamujemo ali z jedno samo črko, katero zapišemo v kotnino k vrhu, ali s črko pri vrhu, ali pa s tremi črkami tako, da denemo črko pri vrhu v sredo med črki pri krakih. Kot v liku 4. imenujemo kot m , ali kot pri O ali kot BOA ali AOB .

Jeden krak, tukaj n. pr. krak OA , si hočemo misliti nepremakljiv, drugi krak OB pa vrtljiv okoli nepremakljivega vrha. Ako potem zavrtimo krak OB iz lege OA v lego OB , postane kot m . Čim večje je to vrtenje, tem večji je kot. Kolikost te vrtnje ne pa dolžina krakov določuje velikost kota.

Primerjanje kotov.

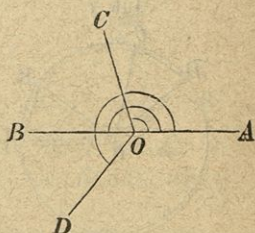
§. 12. Dva kota primerjamo z ozirom na njihino velikost, ako ja polagamo tako jednega na drugega, da se krijeta nepremakljiva

kraka in vrha. Ako se krijeta tudi premakljiva kraka, sta kota jednaka, ako pa ne, sta **nejednaka** in sicer je oni kot manjši, čegar premakljivi krak med krakoma drugega kota leži.

Obratno: Ako sta dva kota jednaka, moremo ja tako položiti jednega na drugega, da se kotnini krijeta popolnoma.

§. 13. Z vrtenjem premakljivega kraka okrog vrha dobivamo zmerom večje kote; ako zavrtimo krak toliko, da ležita oba kraka v jedni premi, pa vsak na nasprotni strani od drugega t. j., ako je kolikost vrtnje s polukrogom zaznamenovana, tvorita **iztegnen kot**, n. pr. $\sphericalangle AOB$ (lik 5.). In ako vrtimo še dalje, da napiše točka *B* premakljivega kraka cel krog, padeta oba kraka skupaj v jedno premo na isto stran in tvorita **poln kot**. Polutraka istega traka tvorita torej iztegnen kot, in poln kot je dvojen iztegnen kot.

Lik 5.

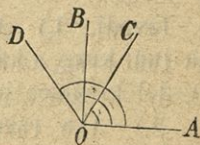


Kot, ki je manjši od iztegnenega, imenujemo **otel** n. pr. $\sphericalangle AOC$ (lik 5.), večji kot od iztegnenega pa **vzvišen kot** n. pr. $\sphericalangle AOD$ (lik 5.). Polovico iztegnenega kota imenujemo **prav kot**,*) manjši kot od pravega je **oster**, večji pa **top kot**. V liku 6. je $\sphericalangle AOB$ prav, $\sphericalangle AOC$ oster in $\sphericalangle AOD$ top.

Iz povedanega sledi:

- Iztegnen kot je enak 2 pravima.
- Poln kot je enak 4 pravim.
- Oster kot je manjši od pravega in top večji od pravega, pa manjši od iztegnenega.

Lik 6.



Kakšne kote nahajaš na kocki, paralelepipedu, 3-, 4-, 6 stranični pokončni piramidi i. t. d.?

§. 14. Količine moremo le z istovrstnimi količinami meriti, torej kote le s koti. 90. del pravega kota imenujemo **stopnja** ($^{\circ}$); 60. del stopnje **minuta** ($'$) in 60. del minute **sekunda** ($''$). Stopnja, minuta in sekunda so koti, s katerimi merimo druge, torej so jednote kotov. Število, katero pove, kolikokrat je kotna jednota v danem kotu, imenujemo **mersko število kota**.

Najpriprosteje sredstvo za merjenje kotov je krožnica.

*) Prav kot hočemo zmerom kratko zaznamenovati s črko *R*.

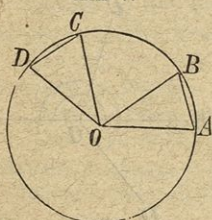
Koliko stopenj ima *a)* prav, *b)* iztegnen, *c)* vzvišen, *d)* poln, *e)* oster, *f)* top kot.

§. 15. Kot, kateri ima svoj vrh v središču kroga, imenujemo **središčen kot**.

Izrek. Pri enakih središčnih kotih istega kroga so tetive jednake in loki jednaki.

Opomnja. Geometrijski izrek imenujemo vsako geometrijsko resnico, katero še le dokazati moramo. Resnice pa, katere so same ob sebi razumljive, imenujemo **osnovne resnice, načela, aksiome** (glej aritm. str. 2). Vsak geometrijski izrek ima dva stavka 1) **pogoj**, 2) **trditev**. Trditev moramo dokazati t. j. mi moramo pokazati, da je trditev neizogibno resnična, ako le velja izrečeni pogoj.

Lik 7.



Pogoj. O je središče kroga in $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ (lik 7.).

Trditev. *) $\overline{AB} = \overline{CD}$ in $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

Dokaz. Ako položimo kot AOB na kot COD tako, da se krijeta popolnoma, kar je mogoče, ker sta ta kota po pogoju jednaka, mora tudi zaradi enakih polmerov točka A točko C in točka B točko D kriti. Tetivi se torej krijeta popolnoma, ter sta jednaki. Ker se pa krijeta konca lokov, morata se kriti tudi loka sama, kajti drugače bi ne bile vse njijine točke od središča jednako oddaljene; torej je tudi $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

Izvodi. 1.) Ako razdelimo poln kot v 360 stopenj, razdelimo tudi krog, s katerim načrtamo vrtenje, v 360 enakih delov. 360. del krožnice imenujemo **ločno stopnjo**.

2.) Ako razdelimo kotno stopnjo v 60 minut, razdelimo tudi ločno stopnjo v 60 enakih delov.

3.) Ako razdelimo kotno minuto v 60 sekund, razdelimo tudi ločno minuto v 60 enakih delov. 60. del ločne minute imenujemo **ločno sekundo**.

Opomnja. Vsako resnico, katera sledi neposredno ali s prav priprostim umovanjem iz danih pojmov ali iz prejšnjega izreka, imenujemo **izvod**.

§. 16. Kote moremo tudi meriti z ločnimi stopnjami, z ločnimi minutami in z ločnimi sekundami, ker je število ločnih stopenj, ločnih minut in ločnih sekund jednako številu kotnih stopenj, kotnih minut in kotnih sekund (§. 15.).

*) Znaka $—$, $-$ razločujeta tetivo od loka.

Na merjenje kotov z loki opira se raba transportérja.

Loki enakih središčnih kotov so pa le za isti krog jednako dolgi (§. 15.), za kroge z različnimi polumeri so pa različni.

Loke istega kroga ali z enakim polumerom imenujemo istovrstne.

Narisaj oster, top kot in izmeri ja s transportérjem. — Načrtaj s transportérjem kot, ki ima 56° .

Načrtaj v točki A' na premo $A'B'$ kot, ki je enak danemu kotu BAC .

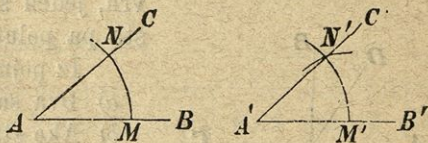
Lik 8.

Rešitev. Napiši iz točke

A s poljubnim polumerom lok MN , kateri seče kraka danega kota v točkah M in N .

Z istim polumerom napiši iz A' lok $M'N'$, kateri seče $A'B'$ v točki M' ; dalje napiši z

razdaljo toček M in N iz M' lok, kateri seče lok $M'N'$ v točki N' . Ako potegnemo skoz točki A' in N' premo $A'C'$, je $B'A'C'$ zahtevani kot.



Opomnja. Iz zadnje vaje spoznamo, da nahajamo v geometriji naloge, katere zahtevajo risanje geometrijskih tvorov po danih pogojih. Imenujemo je **naloge za načrtovanje** (konstrukcijske naloge).

Osnovni računi z istovrstnimi loki in koti.

§. 17. Osnovne račune z istovrstnimi loki izvršujemo takisto, kakor osnovne račune z daljicami, samo da nam pri računjenji z loki krog določuje mer, v kateri zdaljšujemo ali skrajšujemo lok.

Osnovni računi s koti se opirajo na osnovne račune z istovrstnimi loki, ker prve merimo tudi z drugimi.

Ako je vsota dveh kotov jednaka 2 pravima, imenujemo ja **suplementarna** kota; ako je pa vsota dveh kotov jednaka 1 pravemu, imenujemo ja **komplementarna** kota.

Dana sta dva istovrstna loka; poišči njijino *a)* vsoto, *b)* diferenco. — Dan je lok; poišči lok, ki je 2, 3, 4krat tolik. — Razdeli dan lok v 2, 3, 4 jednake dele *a)* na oko *b)* poskusoma s šestilom. — Poskušaj se šestilom, kolikokrat je dan lok v danem večjem loku.

Načrtaj dva kota in ja *a)* seštej, *b)* odštej.

Rešitev. Izmeri kota z istovrstnima lokoma, seštej loka i. t. d.

Seštej 3, 4, 5 danih kotov. — Načrtaj kot, ki je 2, 3, 4krat večji od danega *a)* ostrega, *b)* topega kota. — Načrtaj kot in razdeli ga

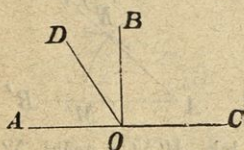
v 2, 3, 4 jednake dele *a*) na oko, *b*) poskusoma s šestilom. — Poskušaj s šestilom, kolikokrat je dan kot ∇ večjem danem kotu.

Izračunaj kot, ki je 1) suplementaren, 2) komplementaren s kotom
a) 65° , *b*) $78^\circ 12' 34''$.

O sokotih.

§. 18. Polutrak *OB* ali tudi polutrak *OD* deli iztegneni kot *COA* v dva kota *COB* in *BOA* ali *COD* in *DOA*, katera imenujemo sokota. Sokota imata skupen vrh, jeden skupen krak, druga dva kraka sta pa polutkraka istega traka.

Lik 9.



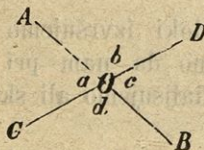
Iz pojma sokotov sledita ta-le izvoda:

- Dva sokota sta suplementarna kota.
- Ako sta dva sokota jednaka, je vsak prav kot; ako je jeden kot oster, je njegov sokot top.

Kolik je sokot kota $73^\circ 8' 43''$?

§. 19. Traka *AB* in *CD*, katera se sečeta v točki *O* (lik 10.), tvorita 4 pare sokotov *a* in *b*, *b* in *c*, *c* in *d*, *d* in *a*. Ta tvorimo imenovati sokotje.

Lik 10.



Izrek. Dve sokotji, kateri imata dva kota paroma jednaka, imata tudi vse druge kote paroma jednake.

Dokaz. Vzemimo da sta *O* in *O'* sokotji in *a*, *b*, *c*, *d* oziroma *a'*, *b'*, *c'*, *d'* njini koti, in da je $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$. Potem moremo sokotje *O'* na sokotje *O* tako položiti, da se krijeta vrha in jednaka kota, potem se pa krijeta tudi paroma podaljška krakov čez vrh teh kotov. Tedaj je

$$\sphericalangle b = \sphericalangle b', \sphericalangle c = \sphericalangle c' \text{ in } \sphericalangle d = \sphericalangle d'. *)$$

§. 20. Ako tvori prema *OB* s premo *AC* dva prava kota, pravimo, da stoji *OB* pravokotno **) (normalno) na *AC* (lik 9.), kar pišemo kratko: $OB \perp AC$. Vsaka druga prema n. pr. *OD* stoji pošev na *AC*. Točko *O* imenujemo podnožišče pravokotnice *OB* in poševnice *OD* z ozirom na premo *AC*.

*) Pokaži to na obrazcih iz žice.

**) „Navpično“ hočemo le v pomenu „vertikalno“ rabiti.

Pravokotnice načrtujemo s pravokotnim trikotnikom iz lesa ali medi.

Načrtaj na dano premo pravokotnico s pomočjo pravokotnega trikotnika *a*) v točki preme, *b*) od točke zunaj preme ležeče.

§. 21.

- a*) Ako si načrtamo iz vrha iztegnenega kota več polutrakov, postane več kotov, katere imenujemo **kote nad premo**.

Izvod. Vsota vsem kotom nad premo sta dva prava kota.

- b*) Polutraki v isti ravnini in istega tračišča tvorijo več kotov, katere imenujemo **kote krog točke**.

Izvod. Vsota vsem kotom krog točke so 4 *R*.

Kajti vsi skupaj so jednaki polnemu kotu.

O sovršnih kotih.

§. 22. V sokotjih nahajamo pare kotov, ki niso sokoti n. pr. *a* in *c*, *b* in *d* (lik 10); kraka jednega kota sta le podaljška krakov drugega čez njegov vrh. Take pare kotov imenujemo **sovršne kote**.

Izrek: **Sovršna kota sta jednaka.**

Pogoj: *a* in *c* sta sovršna kota.

Trditev: $a = c$.

Dokaz: $a + b = 2 R$, ker sta sokota,

$b + c = 2 R$, " " " ; torej (gl. aritm. str. 2, IV.)

$a + b = b + c$ in ako na vsaki strani *b* od-
vzamemo (glej aritm. str. 2, VII) $a = c$.

Takisto dokažemo, da je $b = d$.

Ali moreš ta izrek dokazati s pomočjo vrtenj pri postajanji sovršnih kotov?

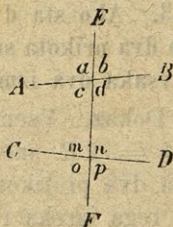
O vzporednicah.

§. 23. Prema *EF* (lik 11.), katera seče premi *AB* in *CD*, tvori z njima dve sokotji ter osem kotov. *EF* imenujemo **prečnico** (transversalo) presekanih prem *AB* in *CD*, kote *c*, *d*, *m*, *n* **notranje**, *a*, *b*, *o*, *p* pa **vnanje** kote.

Dva notranja ali pa dva vnanja kota, ležeča na isti strani prečnice, imenujemo **pri-kota**, kakor *c* in *m*, *d* in *n*, *a* in *o*, *b* in *p*.

Dva notranja ali pa dva vnanja kota, ležeča na razni strani prečnice in

Lik 11.



pri različnih vrhlih, imenujemo, izmenična kota, kakor c in n , d in m , a in p , b in o .

Jeden notranji in jeden vnanji kot, ležeča na isti strani prečnice pri raznih vrhlih, imenujemo protikota, kakor a in m , b in n , c in o , d in p .

§. 24. Izreki. 1. Ako sta dva protikota jednaka, sta *a*) tudi vsaka druga dva protikota jednaka, *b*) vsaka dva izmenična kota jednaka in *c*) vsaka dva prikota suplementarna kota (lik 12).

Lik 12.

Pogoj. $a = m$.

1. trditev. $b = n$, $c = o$, $d = p$.

2. „ $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.

3. „ $a + o = 2R$, $b + p = 2R$.
 $c + m = 2R$, $d + n = 2R$.

Dokaz. 1. trditev sledi iz §. 19.

2. $a = m$, po pogoji,

$p = m$, ker sta sovršna kota, torej

$$a = p.$$

Takisto dokažeš, da je $b = o$, $c = n$, $d = m$.

3. $a + c = 2R$, ker sta sokota.

$c = o$, kar smo že dokazali, torej

$$a + o = 2R.$$

Takisto dokažeš, da je $b + p = 2R$, $c + m = 2R$, in $d + n = 2R$.

2. Ako sta dva izmenična kota jednaka, sta *a*) tudi vsaka druga dva izmenična kota jednaka, *b*) vsaka dva protikota jednaka in *c*) vsaka dva prikota suplementarna.

Dokaz. Recimo, da je $c = n$. Ker sta c in b sovršna kota, je tudi $c = b$, torej tudi $b = n$. Ako sta pa dva protikota jednaka, so (vsled 1.) tudi vse druge trditve tega izreka resnične.

3. Ako sta dva prikota suplementarna, sta *a*) tudi vsaka druga dva prikota suplementarna, *b*) vsaka dva protikota jednaka in *c*) vsaka dva izmenična kota jednaka.

Dokaz. Vzemimo, da je $a + o = 2R$. Ker je tudi $a + c = 2R$, mora biti $a + c = a + o$, torej $c = o$. Ako sta pa dva protikota jednaka, so (vsled 1.) tudi vse druge trditve tega izreka resnične.

§. 25. Osnovna resnica. Skoz točko zunaj preme ležečo moremo s to le jedno vzporednico potegniti.

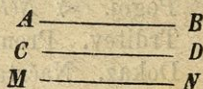
Opomnja. Mnogokrat pravimo: „Vzporednica CD seče premo AB v brezkončni oddaljenosti.“ Po tem merite vzporednici proti isti točki, ki je brezkončno oddaljena.

Izvod. Ako sta dve premi s tretjo vzporedni, sta tudi med seboj vzporedni.

Ako je (lik 13.) $AB \parallel MN$ in $CD \parallel MN$,
je tudi $AB \parallel CD$.

Lik 13.

Kajti ko bi AB ne bila vzporedna s CD , bi ona zadosti podaljšana morala to sekati; potem bi pa imeli v tem presečišču dve vzporednici z MN , kar pa prejšnji osnovni resnici nasprotuje.

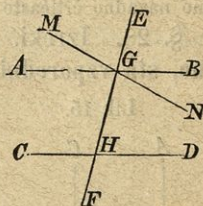


§. 26. Izreka: 1. Dve premi, kateri tretja seče, sta vzporedni, ako sta dva protikota, ali dva izmenična kota jednaka ali dva prikota suplementarna.

Mislimo si v sokotjih G in H (lik 14.) traka AB in CD vrtljiva okrog vrhov G in H .

Lik 14.

Ako sta torej protikota BGE in DHE jednaka, sta kraka GB in HD za jednako zavrtena iz nepremične preme EF , torej imata isto mer ali $AB \parallel CD$.



Ker sta dva protikota tudi jednaka, ako sta dva izmenična kota jednaka ali pa dva prikota suplementarna, je gornji izrek popolnoma dokazan.

2. Ako seče katerakoli prema dve vzporednici, sta a) vsaka dva protikota jednaka, b) vsaka dva izmenična kota jednaka in c) vsaka dva prikota suplementarna. (Obrat izreka 1).

Ako le dokažemo, da sta vsled danega pogoja dva protikota jednaka, smo že dokazali celo trditev (§. 24).

Ker sta premi AB in CD (lik 14.) vzporedni, imata isto mer, ali oni sta za jednako zavrteni od nepremične EF ; torej sta protikota BGE in DHE jednaka.

Opomnja. **Obrat** izreka imenujemo izrek, v katerem je pogoj prvega trditve in trditev prvega pogoja. Ako je izrek resničen, ni zmerom njegov obrat resničen; obrat moramo za sé dokazati. N. pr. Izrek §. 22 je resničen, njegov obrat: „Jednaka kota sta sovršna“ pa ni vsakokrat.

Prema EF seče vzporednici AB in CD v točkah G in H tako, da je $\sphericalangle AGE$ a) 57° b) $81^\circ 49'$ c) $123^\circ 8' 36''$; kolik je vsak drugi kot, ki postane v presečiščih?

§. 27. Dve nevzporedni premi v isti ravnini imenujemo na oni strani, kjer se sečeta, **primični** (konvergetni), na drugi strani pa **odmični** (divergetni.)

Izrek. Ako je vsota dveh notranjih prikotov na jedni strani prečnice manjša od $2R$, sta presekanj premi na tej strani primični.

Pogoj. $\sphericalangle NGH + \sphericalangle GHD < 2R$.

Trditev. Premi MN in CD sta na desno primični.

Dokaz. Načrtajmo skoz točko G premo $AB \parallel CD$; potem je $\sphericalangle BGH + \sphericalangle GHD = 2R$ (§. 26.) in ker je po pogoji $\sphericalangle NGH + \sphericalangle GHD < 2R$, je tudi

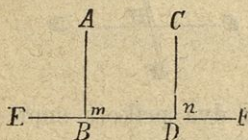
$$\sphericalangle BGH > \sphericalangle NGH$$

GN leži torej med GH in HD ali MN in CD sta na desno primični.

Opomnja. Vsako premo, katero potegnemo, da nam pomaga izvrševati dokaz ali načrtovati zahtevan tvor, imenujemo **pomočno črto**. Pomočne črte rišemo navadno črtičaste ali pikičaste.

§. 28. Izreki. 1. Dve premi, kateri stojita na tretji pravokotno, sta vzporedni.

Lik 15.



Pogoj. $AB \perp EF$ in $CD \perp EF$.

Trditev. $AB \parallel CD$.

Dokaz. Ker je $AB \perp EF$, je $m = R$ in ker je $CD \perp EF$, je tudi $n = R$; torej je $m = n$ in $AB \parallel CD$. (§. 26.)

2. Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic pravokotno na premi, stoji tudi druga na nji pravokotno.

Pogoj. $AB \parallel CD$, in $AB \perp EF$.

Trditev. $CD \perp EF$.

Dokaz. Ker je $AB \parallel CD$, je $m = n$ (§. 26, 2); in ker je $AB \perp EF$, je $m = R$, torej tudi $n = R$ t. j. $CD \perp EF$.

3. Iz točke zunaj preme moremo na to le jedno pravokotnico izpustiti.

Indirekten dokaz. Ako bi bilo mogoče, da iz dane točke izpustimo več pravokotnic na dano premo, bi morale te pravokotnice biti vzporednice (1.), kar pa je nemogoče, ker bi imele izkupno točko.

Opomnja. Dokaze, s katerimi dokazujemo, da je nasprotje trditve nemogoče in torej trditev resnična, imenujemo **indirektne**.

4. V točki preme moremo na to le jedno pravokotnico postaviti.

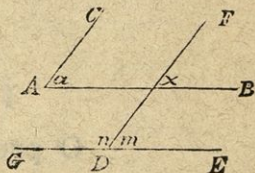
Dokaz indirekten.

§. 29. Ako merita vzporednici obe na isto stran ali pa jedna na jedno, druga na drugo stran, pravimo, da sta v istem smislu ali v nasprotnem smislu vzporedni.

Izreka. Kota, katerih kraki so paroma v istem smislu vzporedni, sta jednaka; kota pa, v katerih sta dva kraka v istem, druga dva kraka pa v nasprotnem smislu vzporedna, sta suplementarna.

Dokaz. Recimo, da je (lik 16.) $DE \parallel AB$ in $DF \parallel AC$; potem so kraki kotov a in m paroma v istem smislu vzporedni. Kraki kotov a in n so tudi paroma vzporedni, vendar sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna.

Lik 16.



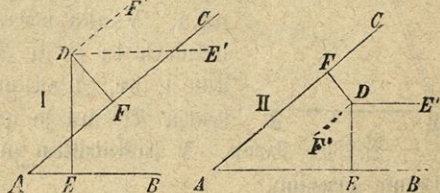
Ker je $a = x$ in $m = x$, je tudi $a = m$.

Na dalje je $n + m = 2R$, torej tudi $n + a = 2R$.

2. Ako stojé kraki dveh kotov paroma pravokotno jeden na drugem, sta kota ali jednaka ali suplementarna.

Dokaz. Vzemimo da je $DE \perp AB$ in $DF \perp AC$ (lik 17.). Zavrtimo kot EDF za 90° okoli nepremične točke D , da prideta DE in DF v lego DE' in DF' .

Lik 17.



V I so potem kraki kotov BAC in $E'DF'$ paroma v istem smislu vzporedni; torej je $\sphericalangle E'DF' = \sphericalangle BAC$ ter tudi $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$.

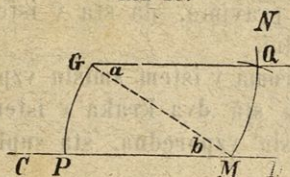
V II so kraki kotov BAC in $E'DF'$ tudi paroma vzporedni, vendar sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna. Torej je $\sphericalangle E'DF' + \sphericalangle BAC = 2R$, in zato tudi $\sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 2R$.

Naloga za načrtovanje.

Načrtaj skoz dano točko G zunaj dane preme CD s to vzporednico.

Rešitev. 1. Potegni skoz točko G (lik 14.) premo, katera seče CD v točki H ; potem načrtaj v točki G na $\angle GH \sphericalangle HGB = \sphericalangle FHD$; krak GB je zahtevana vzporednica (§. 26. 1).

Lik 18.



Rešitev 2. Napiši iz G z dosti velikim polumerom lok MN , potem iz M z istim polumerom lok GP in slednjič iz M s tetivo GP kot polumerom lok, kateri seče lok MN v Q ; skoz točki G in Q potegnena prema je zahtevana vzporednica (§. 26, 1).

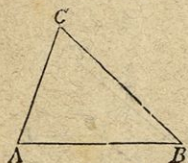
Drugi oddelek.

O premočrtnih likih v obče.

1. Trikotnik.

§. 30. Raven premočrten lik, kateri je omejen od treh daljic, imenujemo trikotnik.

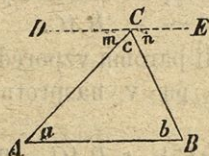
Lik 19.



Vsak trikotnik ima tri stranice in tri kote. Vrhe kotov imenujemo oglišča trikotnika. Vsaka stranica n. pr. AB ima dva priležna kota A in B in jeden nasproten C . Vsak kot n. pr. A oklepata dve stranici AB in AC , tretja BC mu je nasprotna.

§. 31. Izrek. V trikotniku je vsota vseh kotov jednaka dvema pravima.

Lik 20.



Dokaz. Potegnimo skoz točko C . (lik 20.) $DE \parallel AB$, potem je

$$\left. \begin{array}{l} a = m, \\ b = n, \\ c = c. \end{array} \right\} \text{ po §. 26, 2;}$$

torej $a + b + c = m + n + c$;

ker je pa $m + n + c = 2R$ (§. 21, a), je tudi $a + b + c = 2R$.

Izvoda.

- a) Vsota dveh kotov trikotnika je manjša od dveh pravih; v trikotniku more torej le jeden prav in le jeden top kot biti, druga dva kota morata biti ostra.

b) Ako sta dva kota jednega trikotnika paroma jednaka dvema kotoma drugega trikotnika, morata biti tudi tretja kota obeh jednaka.

Načrtaj vsoto kotov trikotnika a) posebej na strani, b) zraven jednega trikotnikovega kota. Kolika je vsota vsem? V trikotniku sta dva kota

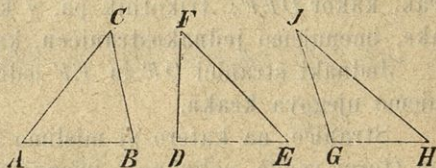
- 1) $a = 68^\circ$, $b = 73^\circ$; 2) $a = 35^\circ 57'$, $b = 102^\circ 18'$; 3) $a = 55^\circ 39' 25''$, $b = 81^\circ 17' 46''$;

kolik je tretji kot?

§. 32. Trikotnike delimo z ozirom na kote v **ostrokotne**, **pravokotne** in **topokotne**.

Trikotnik je **ostrokoten**, ako so vsi trije koti ostri; **pravokoten**, ako ima prav, **topokoten**, ako ima top kot. V liku 21. je ABC ostrokoten, DEF pravokoten in GHI topokoten trikotnik.

Lik 21.



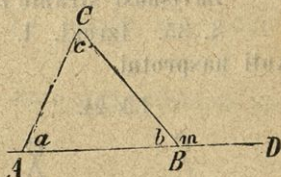
V pravokotnem trikotniku imenujemo stranico, katera je pravemu kotu nasprotna, **hipotenuzo**; stranici pa, kateri pravi kot oklepata, **kateti**. Ostrokotne in pravokotne trikotnike imenujemo sè skupnim imenom **poševnokotne** trikotnike.

§. 33. Ako podaljšamo v trikotniku jedno stranico, tvori podaljšek sè stično stranico kot, katerega imenujemo **vnanji kot** trikotnika. Kot CBD (lik 22.) je n. pr. vnanji kot trikotnika ABC .

Izrek. Vsak vnanji kot trikotnika je jednak vsoti notranjih njemu nasprotnih kotov.

Lik 22.

Dokaz. Ker je $m + b = 2R$ in $a + b + c = 2R$, je tudi $m + b = a + b + c$, ali, ako odvezamemo kot b na obeh straneh, $m = a + c$.



Izvod. Vsak vnanji kot trikotnika je večji od notranjega, njemu nasprotnega.

V trikotniku sta dva notranja kota

- a) 43° in 71° , b) $59^\circ 27' 45''$ in $102^\circ 8' 52''$;

kolik je nasprotni vnanji kot?

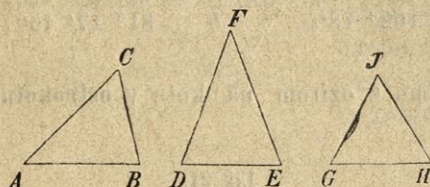
V pravokotnem trikotniku je eden vnanji kot na hipotenuzi

a) 98° , b) $145^\circ 28' 50''$;

kolik je drugi vnanji kot na hipotenuzi?

§. 34. Oziraje se na stranice delimo trikotnike v raznostranične, enakokrake in enakostranične (lik 23.).

Lik 23.



Trikotnik, v katerem ni nobedna stranica nobeden drugi jednaka, imenujemo raznostraničen, kakor ABC ; trikotnik, v katerem sta dve stranici jednaki, imenujemo enako-

krak, kakor DEF ; trikotnik pa, v katerem so vse stranice jednake, imenujemo enakostraničen, kakor GHI .

Jednaki stranici DF in EF enakokrakega trikotnika imenujemo njegova kraka.

Stranico, na katero si mislimo katerikoli trikotnik postavljen (torej vsako poljubno), imenujemo tudi **osnovnico** in tej nasprotno oglišče vrh trikotnika. V enakokrakem trikotniku jemljemo vendar navadno nejednako stranico za osnovnico.

Načrtaj se šestilom

- a) raznostraničen trikotnik, v katerem je $AB = 4\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$. — V kakšni črti leže točke, katere so od krajišč stranice AB 3cm in točke, katere so od onih krajišč 2cm oddaljene? Kje leži torej vrh C ?

- b) enakokrak trikotnik, v katerem je

$$DE = 5\text{cm}, DF = 4\text{cm};$$

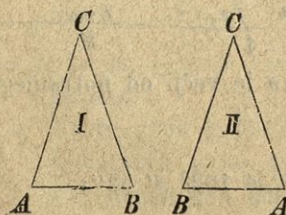
- c) enakostraničen trikotnik, v katerem je $GH = 4.5\text{cm}$.

Na katerem telesu nahajaš enakokrake, na katerem enakostranične trikotnike?

Zavisnost stranic trikotnika od nasprotnih kotov in obratno.

§. 35. Izreki. I. Jednakim stranicam trikotnika so jednaki koti nasprotni.

Lik 24.



Pogoj. $AB = BC$.

Trditev. $\sphericalangle B = \sphericalangle A$.

Dokaz. Trikotnik ima zgornjo (sprednjo) in spodnjo (zadnjo) stran. Mislimo si trikotnik I obrnen, da postane spodnja stran zgornja (glej II), in položimo trikotnik II na trikotnik I tako, da krije točka C

točko C , kot C pa kot C , kar je mogoče, ker sta kota isti kot trikotnika ABC ; potem padeta stranici CB in CA trikotnika II na stranici, CA in CB trikotnika I, in ker je $AC = BC$, krijeta točki B in A trikotnika II točki A in B trikotnika I, ali stranica BA prvega krije stranico AB drugega trikotnika. Kot B trikotnika II torej krije kot A trikotnika I, tedaj je

$$\sphericalangle B = \sphericalangle A.$$

Izvodi.

- V enakokrakem trikotniku sta kota na osnovnici jednaka.
- Vnanji kot pri vrhu enakokrakega trikotnika je dvakrat tolik, kakor vsak kot na osnovnici.
- V enakostraničnem trikotniku so vsi trije koti jednaki in vsak ima 60° .

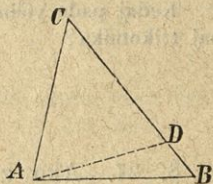
2. V vsakem trikotniku je večji stranici večji kot nasproten (lik 25).

Pogoj. $BC > AB$.

Trditev. $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ABC$.

Dokaz. Naredi $CD = AC$ in zveži A in D z daljico AD . Potem je v enakokrakem trikotniku ACD $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADC$. Ker je pa $\sphericalangle BAC > \sphericalangle DAC$, je tudi $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ADC$. Dalje je $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ABC$ (§. 33, izv.), torej tembolj $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ABC$.

Lik 25.



3. V vsakem trikotniku so enakim kotom jednake stranice nasprotne.

Pogoj. $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

Trditev. $BC = AC$.

Indirekten dokaz. Ako bi ne bila $BC = AC$, morala bi biti $BC \geq AC$ in $\sphericalangle A \geq \sphericalangle B$ (2), kar pa pogoju nasprotuje. Torej mora biti $BC = AC$.

4. V vsakem trikotniku je večjemu kotu večja stranica nasprotna.

Dokaz indirekten kakor pri 3.

Izvodi.

- V pravokotnem trikotniku je hipotenuza večja od vsake katete.
- V topokotnem trikotniku je topemu kotu nasprotna stranica največja.

c) Izmed vseh daljic, katere potegnemo od dane točke zunaj dane preme do te, je pravokotnica najkrajša.

Kajti vsaka druga daljica je hipotenuza pravokotnega trikotnika, pravokotnica pa kateta.

Pravokotnico, katero spustimo iz točke zunaj preme na to, imenujemo razdaljo ali razstoj točke od preme.

V enakokrakem trikotniku je kot pri vrhu $c = 62^{\circ} 3' 54''$; kolik je vsak kot na osnovnici?

Kot na osnovnici enakokrakega trikotnika je $a = 34^{\circ} 15' 6''$; kolik je a) kot pri vrhu, b) vnanji kot pri vrhu?

Kolik je vsak kot enakokrakega pravokotnega trikotnika?

Kolik je vsak kot enakokrakega trikotnika, ako je kot pri vrhu a) ravnoličnik, b) dvakrat tolik, c) polovica od kota na osnovnici?

§. 36. Ako spustimo v trikotniku ABC (lik 27.) od vrha C na osnovnico AB pravokotnico CD , imenujemo to premo višino trikotnika.

Lega višine zavisi od kakovosti kotov na osnovnici.

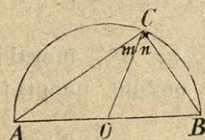
Kedaj pade višina trikotnika a) med stranici, b) v stranico, c) zunaj trikotnika?

Kot v polukrogu.

§. 37. Ako zvežemo kako točko polukrožnice n. pr. C (lik 26.) s krajiščema A in B njijinega premera, dobimo kot ACB , katerega imenujemo kot v polukrogu.

Izrek. Kot v polukrogu je prav kot.

Lik 26.



Pogoj. Vzemimo, da je $\sphericalangle ACB$ (lik 26.) kot v polukrogu.

Trditev. $\sphericalangle ACB = R$.

Dokaz. Načrtaj OC ; potem je $OA = OB = OC$, ker so polumeri, in v enakokrakih trikotnikih AOC in BOC je

$\sphericalangle m = \sphericalangle A$ in $\sphericalangle n = \sphericalangle B$, torej $\sphericalangle m + \sphericalangle n = \sphericalangle A + \sphericalangle B$ ali $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Iz tega sledi:

2. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle ACB = 2R$ in $\sphericalangle ACB = R$.

Medsebojna zavisnost stranic trikotnika.

§. 38. Izreka. 1. V vsakem trikotniku je vsota dveh stranic večja od tretje.

Dokaz. Vzemimo, da je v trikotniku ABC (lik 27.) AB največja stranica in $CD \perp AB$, potem je (§. 35, 4, izv. a)

$$\begin{aligned} AC &> AD, \text{ in} \\ BC &> BD, \text{ torej} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC + BC &> AD + BD \text{ (aritm. str. 20, 6) ali} \\ AC + BC &> AB. \end{aligned}$$

Tem bolj pa je $AB + BC > AC$ in $AB + AC > BC$.

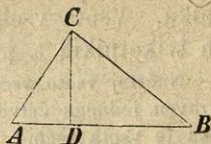
2. V vsakem trikotniku je diferenca dveh stranic manjša od tretje.

Ker je $AB < AC + BC$ in $BC < AB + AC$, je tudi (aritm. str. 24, 5) $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$ in $BC - AC < AB$.

Načrtaj trikotnik, v katerem je

a) $AB = 6^{\text{cm}}$, $AC = 4^{\text{cm}}$, $BC = 3.6^{\text{cm}}$, b) $AB = 7^{\text{cm}}$, $AC = 2^{\text{cm}}$, $BC = 4^{\text{cm}}$.

Lik 27.

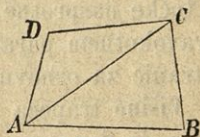


2. Četverokotnik.

§. 39. Raven lik, omejen od štirih daljic, imenujemo **četverokotnik**. Daljico med dvema nasprotnima ogliščema kakor AC (lik 28.) imenujemo **diagonalo** (prekotnico).

Lik 28.

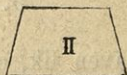
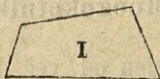
Četverokotnik ima štiri stranice, štiri kote in dve diagonali.



§. 40. Oziraje se na medsebojno lego stranic delimo četverokotnike v **trapecoide**, **trapece** in **paralelograme** (lik 29).

Četverokotnik, v katerem ni nobedna stranica z drugo vzporedna, imenujemo **trapecoid**, kakor I.

Lik 29.



Četverokotnik, v katerem sta le dve nasprotni stranici vzporedni, drugi dve pa ne, imenujemo **trapez**, kakor II; četverokotnik pa, v katerem sta po dve nasprotni stranici vzporedni, **paralelogram** (vzporednik) kakor III.

Načrtaj a) paralelogram, b) trapez po meri na oko. —

Na katerih telesih nahajaš a) paralelograme, b) trapece?

§. 41. Izrek. V četverokotniku je vsota vseh kotov jednaka štirim pravim.

Dokaz. Diagonala deli četverokotnik (lik 28.) v dva trikotnika. Vsota vseh kotov v enem trikotniku je $2R$, torej v obeh trikotnikih t. j. v četverokotniku $4R$.

Načrtaj vsoto vseh četverokotnikovih kotov *a)* posebej na strani, *b)* zraven jednega četverokotnikovega kota n. pr. zraven kota *B* (lik 28). Kolika je vsota vsem?

§. 42. Izrek. V paralelogramu sta vsaka dva nasprotna kota jednaka.

Dokaz. Po dva isti stranici priležna kota sta po §. 26, 2 jednaka dvema pravima, torej tudi po dva nasprotna kota jednaka.

Izvoda.

- a)* Ako je v paralelogramu jeden kot prav, so tudi vsi drugi
- b)* Ako je v paralelogramu jeden kot poševen, so tudi vsi drugi.

Paralelogrami so torej ali pravokotni ali poševnokotni.

Kako ležita v paralelogramu kraka jednega kota oziraje se na kraka nasprotnega kota? — Kaj sklepaš iz te lege?

V paralelogramu ima jeden kot *a)* $90^{\circ} 18' 45''$; kolik je vsak drugih treh kotov?

§. 43. Ako vzamemo jedno stranico paralelograma za osnovnico, potem imenujemo pravokotnico, katero spustimo iz katerekoli točke nasprotne stranice na osnovnico, višino paralelograma. V pravokotnem paralelogramu jemljemo jedno od dveh stikajočih se stranic za osnovnico, drugo za višino.

Višino trapeca imenujemo pravokotnico od točke jedne vzporednice do druge.

Načrtaj s trikotnikom iz lesa višino *a)* paralelograma, *b)* trapeca.

3. Mnogokotnik.

§. 44. Raven lik, omejen od več daljic, imenujemo mnogokotnik ali poligon.

Mnogokotnik ima toliko stranic, kolikor kotov in kolikor oglišč. Koti morejo biti otli in vzvišeni.

Dve oglišči mnogokotnika, kateri nista zvezani sè stranico, imenujemo nasprotni; vsako daljico med dvema nasprotnima ogliščema pa **diagonalo** (prekotec) mnogokotnika.

Število diagonal, katere moremo potegniti iz jednega oglišča mnogokotnika, je za 3 manjše od števila stranic. Te diagonale

razdelé mnogokotnik v trikotnike, katerih je za 2 menj kakor stranic.

Potegni v petero-, šestero-, sedmero- kotniku od jednega oglišča vse mogoče diagonale in primerjaj število *a*) diagonal, *b*) trikotnikov s številom stranic mnogokotnika.

§. 45. Oziraje se na število stranic razlikujemo tristranične mnogokotnike ali trikotnike, četrrostranične ali četrrokotnike, peterostranične ali peterokotnike, *n*terostranične ali *n*tero kotnike.

Oziraje se na kolikost stranic in kotov razlikujemo jednakostranične in raznostranične, jednakokotne in raznokotne mnogokotnike.

Jednakostraničen in enakokoten mnogokotnik imenujemo pravičen; vsak drug mnogotnik je nepravilen.

Na katerih telesih nahajaš pravilne mnogokotnike? —

§. 46. Izrek. Vsota vseh kotov v mnogokotniku znaša dvakrat toliko pravih, kolikor ima mnogokotnik stranic, menj štiri prave.

Dokaz. Recimo da ima mnogokotnik $ABCD \dots n$ stranic. Ako potegnemo iz točke O , ležeče v mnogokotniku, do vseh oglišč daljice $OA, OB, \dots$, ga razdelimo v n trikotnikov; vsota kotov teh trikotnikov znaša $2nR$, vsota kotov okoli točke O $4R$, torej vsota vseh kotov mnogokotnika $2nR - 4R$.

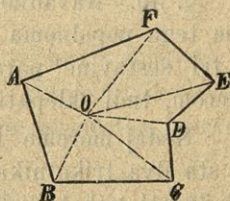
Iz tega sledi:

- a*) Vsota kotov
 trikotnika je $2R = 180^\circ$,
 četrrokotnika „ $4R = 360^\circ$,
 peterokotnika „ $6R = 540^\circ$,
 šesterokotnika „ $8R = 720^\circ$ i. t. d.

- b*) Vsak kot pravičnega *n*tero kotnika znaša $2R - \frac{4R}{n}$; tedaj

kot pravičnega trikotnika	$180^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 60^\circ$
„ „ četrrokotnika	$180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
„ „ peterokotnika	$180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$
„ „ šesterokotnika	$180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$ i. t. d.

Lik 30.



Tretji oddelek.

Skladnost premočrtnih likov.

§. 47. Dva prostorna tvora, katera si moremo tako jednega na drugega položena misliti, da se krijeta popolnoma, imenujemo **skladna** (kongruentna). Skladna prostorna tvora se ne razlikujeta čisto nič, nahajata se samo na različnih mestih.

Znak skladnosti je $\cong$.

1. Skladnost trikotnikov.

§. 48. Dva trikotnika, katera se krijeta popolnoma, torej skladna trikotnika, imata vse tri kote in vse tri stranice paroma jednake.

Iz tega sledi:

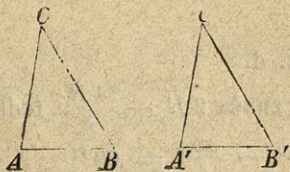
V skladnih trikotnikih so enakim kotom jednake stranice nasprotno in enakim stranicam so jednaki koti nasprotni.

§. 49. Navadno zadostujejo tri sestavine trikotnika, da nam tega popolnoma določujejo; ako imata torej dva trikotnika le tri sestavine paroma jednake, moremo v obče, vendar ne zmerom, tudi sklepati, da sta skladna.

Kedaj moremo iz treh paroma enakih sestavin sklepati, da sta dva trikotnika skladna, nam povedó ti-le štirje izreki o skladnosti trikotnikov.

§. 50. I. izrek. Dva trikotnika sta skladna, ako imata jedno stranico in tej priležna kota paroma jednaka.

Lik 31.



Pogoj. $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih $\triangle A'B'C'$ tako na $\triangle ABC$, da padeta točki A' in B' na točki A in B , kar je mogoče, ker je $AB = A'B'$. Potem pa krijeta kota A' in B' kota A in B , ker sta s tema paroma jednaka in stranica $A'C'$ mora v mer stranice AC , stranica $B'C'$ pa v mer stranice BC pasti. Stranici $A'C'$ in $B'C'$ se morata torej na istem mestu sekati kakor stranici AC in BC , ali

presečišče C' prvih dveh mora pasti na presečišče C zadnjih dveh. Trikotnika se torej krijeta popolnoma, ona sta skladna.

Izvod. Dva trikotnika sta skladna, ako imata jedno stranico, jeden tej priležen in nasproten kot paroma jednake.

Kajti potem imata tudi drugi priležni kot paroma jednak.

Kedaj sta potem izreku dva enakokraka trikotnika skladna? Kedaj dva pravokotna?

§. 51. II. izrek. Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, katerega te dve stranici oklepata, paroma jednake (lik 31).

Pogoj. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ in $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ na $\triangle ABC$ tako, da krije kot A' kot A , kar je mogoče, ker sta jednaka. Potem pa padeta $A'C'$ in $A'B'$ v mer AC in AB in točka C' na točko C , točka B' na točko B , ker je $AC = A'C'$ in $AB = A'B'$. Trikotnika se torej krijeta popolnoma ter sta skladna.

Izvod. Dva pravokotna trikotnika sta skladna, ako imata obe kateti paroma jednaki.

Kedaj sta po tem izreku dva enakokraka trikotnika skladna?

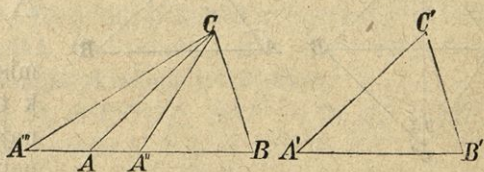
§. 52. III. izrek. Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, kateri je večji teh stranic nasproten, paroma jednake (lik 32).

Pogoj.

$CA = A'C'$, $BC = B'C'$,
 $AC > BC$, tedaj tudi
 $B'C' > A'C'$, in $\sphericalangle B$
 $= \sphericalangle B'$.

Trditev. $\triangle ABC$
 $\cong \triangle A'B'C'$.

Lik 32.



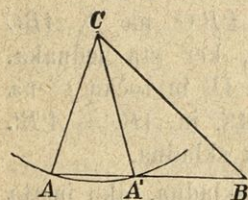
Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako na $\triangle ABC$, da krije kot B' kot B , kar je mogoče, ker sta jednaki; potem krije stranica $B'C'$ stranico BC in točka C' točko C , ker je $BC = B'C'$, in stranica $B'A'$ pade v mer stranice BA . Točka A' pa mora tudi pasti na točko A ; kajti drugače bi morala ali v stranici AB n. pr. na točki A'' ali v podaljšku te stranice n. pr. na točki A''' ležati. Ako bi točka A' ležala na točki A'' , bi bil $\triangle A''CB \cong \triangle A'B'C'$, torej $A''C = A'C' = AC$ ali tri-

kotnik $AA''C$ bi bil enakokrak in kota $AA''C$ in CAA'' ostra; potem bi pa bil kot $BA''C$ top kot in $BC > A''C$ (§. 35. 4), torej tudi $BC > AC$, kar pa pogoju nasprotuje. Takisto dokažemo, da točka A' ne more pasti na točko A'' , da torej na vsak način točko A kriti mora. Potem se pa krijeta trikotnika popolnoma ali $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Izvod. Dva pravokotna trikotnika sta skladna, ako imata hipotenuzo in jedno kateto paroma jednaki.

Dostavek. Umovanje prejšnjega dokaza opira se na pogoj, da je enak kot večji od paroma enakih stranic nasproten. Brez tega pogoja ne velja ono umovanje.

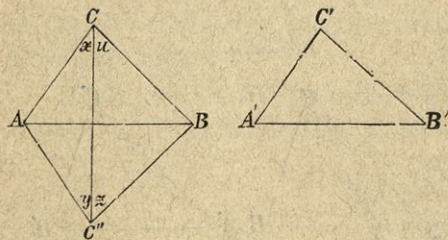
Lik 33.



skladna, ker je $\triangle A'BC$ le del $\triangle ABC$.

§. 53. IV. izrek. Dva trikotnika sta skladna, ako imata vse tri stranice paroma jednake (lik 34).

Lik 34.



na točki A in točka B' na točki B in da pade C' na nasprotno stran stranice AB , na točko C'' . Potem sta trikotnika ACC'' in BCC'' enakokraka po pogoju, torej $x = y$ in $u = z$, ali $x + u = y + z$, ali $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC''B = \sphericalangle A'C'B'$.

Ker je pa $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, je $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$ (II. izrek).

§. 54. Iz izrekov o skladnosti trikotnikov sledi, da trikotnik popolnoma določujejo:

Ako imata tedaj dva trikotnika dve stranici in manjši teh stranic nasproten kot paroma jednake, ne smemo sklepati, da sta trikotnika skladna. Res je v trikotnikih ABC in $A'BC$ (lik 33) $AC = A'C$, $BC = BC$, kjer je $AC = A'C < BC$ in $\sphericalangle B = \sphericalangle B$, in vendar trikotnika nista

Pogoj. $AB = A'B'$,
 $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong$
 $\triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako k trikotniku ABC , da se največji stranici krijeta popolnoma, da leži točka A'

1. jedna stranica s priležnima kotoma;
2. dve stranici s kotom, katerega oklepata;
3. dve stranici s kotom, kateri je večji teh stranic nasproten.

4. tri stranice.

Kajti skladni trikotniki so le ponavljani isti trikotnik.

Med sestavinami, ki določujejo trikotnik popolnoma, mora vsaj jedna stranica biti.

2. Skladnost mnogotnikov.

§. 55. Da sta dva mnogokotnika skladna t. j. da se krijeta popolnoma, morata imeti vse stranice in vse kote v istem redu jednake.

Izreka. 1. Istoležne diagonale razdelé dva skladna mnogokotnika v skladne trikotnike.

Vzemimo, da je (lik 35) $ABCD \dots \cong A'B'C'D' \dots$; potem moremo v mislih mnogokotnik $\dots A'B'C'D'$ tako na mnogokotnik $ABCD \dots$ položiti, da se krijeta popolnoma,

da torej pade A' na A , B na B , C' na C , D' na D i. t. d. ali da se krijejo istoležne diagonale, torej tudi trikotniki; ti so tedaj skladni.

2. Dva mnogokotnika sta skladna, ako sta v istem redu sestavljena iz jednako mnogo skladnih trikotnikov.

Pogoj. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$,
 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$ i. t. d. (lik 35.).

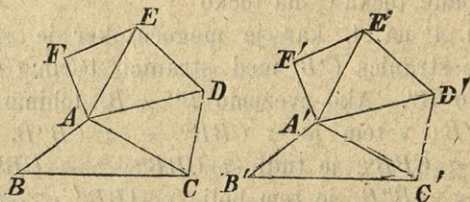
Trditev. $ABCDE \dots \cong A'B'C'D'E' \dots$

Dokaz. Položimo v mislih mnogokotnik $A'B'C'D'E' \dots$ tako na mnogokotnik $ABCDE \dots$, da trikotnik $A'B'C'$ krije ž njim skladni trikotnik ABC ; potem se pa tudi krijeta trikotnika $A'C'D'$ in ACD , $A'D'E'$ in ADE i. t. d. Krijeta se torej tudi mnogokotnika popolnoma ali $ABCDE \dots \cong A'B'C'D'E' \dots$

Načrtaj mnogokotnik, ki je skladen z danim.

Rešitev. Načrtaj stranico $A'B' = AB$ (lik 35.) in $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, $B'C' = BC$ in $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$ i. t. d.

Lik 35.



Kedaj sta dva pravilna mnogokotnika skladna? — Kedaj dva paralelograma?

Ali nahajaš na kocki, prizmi, piramidi tudi skladne mnogokotnike?

3. Uporaba izrekov o skladnosti.

Izreki o trikotnikih.

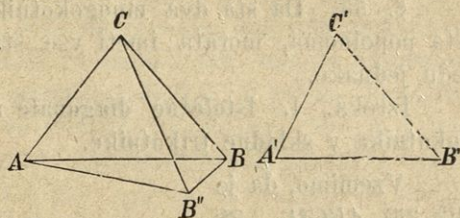
§. 56. V dveh trikotnikih, katera imata dve stranici paroma jednaki, od njiju oklepna kota pa nejednaka, je manjšemu kotu manjša stranica nasprotna (lik 36).

Pogoj $A'C' = AC$,
 $B'C' = BC$ in $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$.

Lik 36.

Trditev. $A'B' < AB$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako na trikotnik ABC , da pade točka C' na točko



C in A' na A , kar je mogoče, ker je $AC = A'C'$. Potem pa pade stranica $C'B'$ med stranici AC in CB in sicer točka B' na točko B'' . Ako zvežemo B'' z B , dobimo enakokrak trikotnik $CB''B$; v tem je $\sphericalangle CBB'' = \sphericalangle CB''B$. Ker je pa $\sphericalangle ABB'' < \sphericalangle CBB''$, je tudi $\sphericalangle CBB'' < \sphericalangle CB''B$, in ker je $\sphericalangle CB''B < \sphericalangle AB''B$, je tem bolj $\sphericalangle ABB'' < \sphericalangle AB''B$; potem je pa $AB'' < A'B$ (§. 35, 4) ali $A'B' < AB$.

Kakšen je dokaz, ako pade točka B'' v stranico AB ali znotraj trikotnika ABC ?

§. 57. V dveh trikotnikih, katera imata dve stranici paroma jednaki, tretji pa nejednaki, je manjši teh nejednakih stranic manjši kot nasproten.

Pogoj. $AC = A'C'$ (lik 36), $BC = B'C'$ in $A'B' < AB$.

Trditev. $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$.

Indirekten dokaz. Ako bi ne bil $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$, bi moral $\sphericalangle A'C'B' \geq \sphericalangle ACB$, torej $A'B' \geq AB$ biti (§. 51 in 56), kar pa je proti pogoju.

§. 58. Ako potegnemo skozi vrha dveh enakokrakih trikotnikov, katera imata skupno osnovnico, premo, razpolavlja ona 1) kota pri vrhah, 2) skupno osnovnico in 3) stoji pravokotno na osnovnici (lik 37).

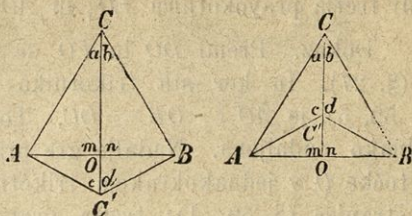
Pogoj. $AC = BC$,
 $AC' = BC'$.

Lik 37.

Trditev. 1. $a = b$.
 $c = d$.

2. in 3. $AO = OB$ in
 $CO \perp AB$.

Dokaz. $\triangle ACC' \cong$
 BCC' (§. 53), torej $a = b$,
 $c = d$.



Dokaz. 2. in 3. $\triangle AOC \cong BOC$ (§. 51); torej $AO = BO$
in $m = n = R$ ali $CO \perp AB$.

§. 59. 1. Pravokotnica, katero spustimo z vrha enakokrakega trikotnika na osnovnico, razpolavlja osnovnico in kot pri vrhu (lik 38).

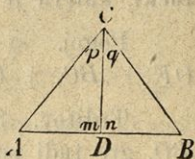
Pogoj. $AC = BC$, $CD \perp AB$ ali $m = n$.

Lik 38.

Trditev. $AD = DB$, $p = q$.

Dokaz. $\triangle ACD \cong BCD$ (§. 52), torej
 $AD = DB$ in $p = q$.

2. Daljica, katero potegnemo od vrha enakokrakega trikotnika do srede osnovnice, razpolavlja kot pri vrhu in stoji pravokotno na osnovnici.



Dokaz takisto kakor 1.

3. Prema, katera razpolavlja kot pri vrhu enakokrakega trikotnika, razpolavlja tudi osnovnico in stoji pravokotno na tej. Dokaz takisto kakor 1.

4. Prema, katero postavimo pravokotno v sredi osnovnice enakokrakega trikotnika, gre skozi vrh trikotnika.

Dokaz indirektn, s katerim prideš do protivorečja, da bi v točki preme stali dve pravokotnici.

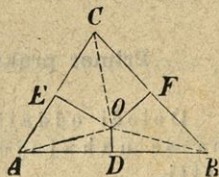
5. Ako gre v trikotniku pravokotnica, katero v sredi osnovnice postavimo, skozi njegov vrh, je trikotnik enakokrak.

Dokaz indirektn.

§. 60. 1. Pravokotnice v sredi trikotnikovih stranic na te postavljene, se sečejo v jedni sami točki, katera je od vsakega oglišča enako oddaljena.

Lik 39.

Pogoj. $AD = DB$, $BF = FC$,
 $CE = EA$. $DO \perp AB$, $FO \perp BC$
(lik 39).



Trditev. Skoz točko O , v kateri se sečeta DO in FO , gre tudi tretja pravokotnica EO ; in $AO = BO = CO$.

Dokaz. Premi DO in FO se morata sekati v jedni točki O (§. 27). In ker sta trikotnika AOB in BOC enakokraka (§. 59, 5), je $AO = OB = OC$. Točka O je torej od vseh oglišč enako oddaljena. Nadalje gre pravokotnica, katero izpustimo iz točke O v enakokrakem trikotniku AOC na AC , skoz sredo te stranice (§. 59, 1); tretja pravokotnica EO gre torej tudi skoz točko O .

Točka O je prva znamenita točka v trikotniku.

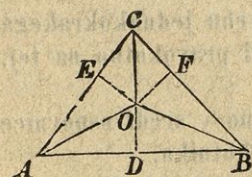
Dostavek. Točka O leži znotraj, v obsegu ali zunaj trikotnika, ako je ta ostro-, pravo-, ali topo- koten.

2. Polovnice trikotnikovih kotov se sečejo v jedni sami točki, katera je od vseh stranic enako oddaljena,

Pogoj. $\sphericalangle CAO = \sphericalangle BAO$, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO$, $OD \perp AB$, $OF \perp BC$, $OE \perp AC$ (lik 40).

Trditev. Skoz točko O , v kateri se sečeta polovnici AO in BO , gre tudi polovnica CO ; in $OD = OF = OE$.

Lik 40.



Dokaz. Polovnici AO in BO se morata sekati v točki O (§. 27). In ker je $\triangle BOD \cong \triangle BOF$ in $\triangle AOD \cong \triangle AOE$ (§. 50, izv.), je $OD = OF = OE$. Točka O je torej od vseh treh stranic enako oddaljena. Ona je pa tudi skupno presečišče polovnic kotov; kajti $\triangle CEO \cong \triangle CFO$ (§. 52) in $\sphericalangle ECO = \sphericalangle FCO$, torej CO tretja polovnica, katera gre skoz presečišče prvih dveh.

To točko O imenujemo drugo znamenito točko v trikotniku.

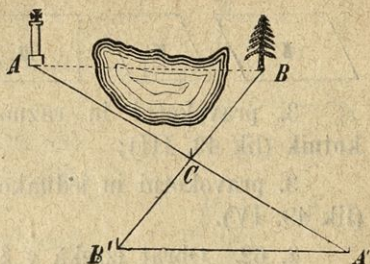
Načrtaj prvo znamenito točko v a) ostro-, b) pravo-, c) topo- kotnem trikotniku.

Primer praktične uporabe izrekov o skladnosti.

Določi oddaljenost dveh točk na polji, med katerima se nahajajo zapreke, da med njima ne moreš meriti.

Recimo, da je med točkama A in B (lik 41) ribnik in C točka na polji, od katere moremo do A in B meriti. Ako izmerimo AC in BC , ji čez vrh C podaljšamo in naredimo podaljšek $A'C = AC$ in $B'C = BC$, je $\triangle B'CA' \cong \triangle ABC$ in $A'B' = AB$, katero lahko izmerimo.

Lik 41.



Izreki o paralelogramih.

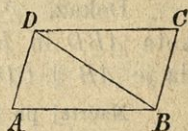
§. 61. V paralelogramu sta vsaki dve nasprotni stranici jednaki (lik 42).

Pogoj. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$.

Lik 42.

Trditev. $AB = CD, AD = BC$.

Dokaz. Ako potegnemo diagonalo BD , je $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§. 26, 2, §. 50), torej $AB = CD, AD = BC$.



Ta izrek izražujemo tudi tako: Vzporednice med dvema vzporednicama so jednake.

Izvodi.

- Pravokotnice med dvema vzporednicama so jednake (§. 28, 1).
- Ako sta dve premi vzporedni, so vse točke jedne preme od druge preme jednako oddaljene.

Kajti oddaljenost točk jedne vzporednice od druge merimo s pravokotnicami in te so jednake.

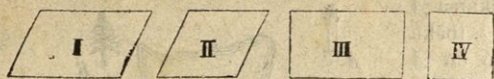
- Ako sta dve stikajoči se stranici paralelograma jednaki, so vse stranice jednake.
- Ako sta dve stikajoči se stranici paralelograma različni, sta tudi drugi dve različni.

Razlikujemo torej jednakostranične in raznostranične paralelograme.

Ozira se na stranice in kote razlikujemo štiri vrste paralelogramov:

1. poševnokotni in raznostranični paralelogram ali romboid (lik 43, I);

Lik 43.



2. poševnokotni
in enakostranični
paralelogram ali romb
(lik 43, II);

3. pravokotni in raznostranični paralelogram ali pravokotnik (lik 43, III);

3. pravokotni in enakostranični paralelogram ali kvadrat (lik 43, IV).

§. 62. Obrat izreka v §. 61.

1. Četverokotnik, v katerem sta vsaki dve nasprotni stranici jednaki, je paralelogram.

Pogoj. $AB = CD, AD = BC$ (lik 42).

Trditev. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$.

Dokaz. $\triangle ABD \cong \triangle DBC$ (§. 53), torej sta izmenična kота ABD in BDC , takisto ADB in DBC jednaka, iz česar sledi, da je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$.

Načrtaj po tem izreku paralelogram.

2. Četverokotnik, v katerem sta dve nasprotni stranici jednaki in vzporedni, je paralelogram.

Pogoj. $AB = DC, AB \parallel DC$ (lik 42).

Trditev. $AD \parallel BC$.

Dokaz. $\triangle ABD \cong \triangle BDC$ (§. 51), torej sta izmenična kота ADB in BDC jednaka, iz česar sledi $AD \parallel BC$.

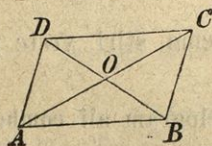
Izvod. Ako sta dve točki jedne preme od druge preme na isti strani jednako oddaljeni, sta premi vzporedni.

§. 63. Izreki o diagonalah paralelogramov.

1. Vsaka diagonalna deli paralelogram v dva skladna trikotnika. (Dokaz §. 61).

2. Diagonali paralelograma se razpolavljata (lik 44).

Lik 44.



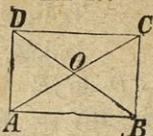
Pogoj. $AB \parallel DC, AD \parallel BC$.

Trditev. $AO = OC, BO = OD$.

Dokaz. $\triangle ABO \cong \triangle DOC$ (§. 50),
torej je $AO = OC, BO = OD$.

3. Diagonali pravokotnika sta jednaki.

Pravokotna trikotnika ABC in ABD (lik 45) sta skladna (§. 51), torej je $AC = BD$.

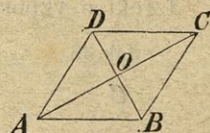


Lik 45.

4. V rombu stojita diagonali pravokotno jedna na drugi.

Kajti trikotnika DBC in ABD (lik 46) sta enakokraka in torej $AC \perp DB$ (§. 58).

Lik 46.



5. Diagonali kvadrata sta jednaki in stojita pravokotno jedna na drugi.

Sledi iz 3. in 4.

Dostavek. Obrati izrekov 2, 3, 4 in 5 so tudi resnični. —

Kako se glasé ti obrati?

Izreki o trapezih.

§. 64. 1. Ako sta kota na jedni vzporednici trapeca jednaka, sta nevzporednici tudi jednaki.

Pogoj. Recimo, da je $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $MN \parallel AB$ (lik 48).

Trditev. Potem je $AM = NB$.

Dokaz. Ako potegnemo $MP \parallel NB$, je $\sphericalangle APM = \sphericalangle B$ (§. 26, 2), torej tudi $\sphericalangle APM = \sphericalangle A$ in $AM = MP = NB$.

Trapec, v katerem sta nevzporednici jednaki, imenujemo jednakokrak (antiparalelogram).

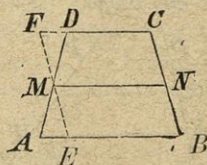
2. Prema, katero potegnemo v trapezu skoz polovišče jedne nevzporednice vzporedno z vzporednicama, razpolavlja drugo nevzporednico (lik 47).

Pogoj. $DC \parallel AB$, $AM = MD$, $MN \parallel AB \parallel CD$.

Lik 47.

Trditev. $BN = NC$.

Dokaz. Ako potegnemo skoz M $EF \parallel BC$, in ako podaljšamo CD do točke F , potem je $\triangle AEM \cong \triangle DFM$ (§. 50), torej $EM = FM$; pa $EM = BN$ in $FM = CN$, tedaj tudi $BN = NC$.



Dostavek. Obrat tega izreka je tudi veljaven. Dokaz indirekten. Daljico MN imenujemo (črto) srednico.

3. Srednica trapeca je jednaka polovici vsote obeh vzporednic.

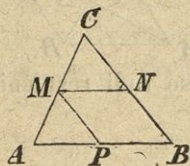
Pogoj. $AB \parallel CD$ (lik 47), $AM = DM$ in $MN \parallel AB$.

Trditev. $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Dokaz. Ako potegnemo skoz M $EF \parallel BC$ in podaljšamo CD do F , je $\triangle AEM \cong \triangle DFM$, torej $AE = DF$. Nadalje je $MN = BE = AB - AE$ in $MN = FC = CD + DF$, torej $2MN = AB + CD$ in $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Izreki o vzporednicah v trikotniku.

Lik 48.



§. 65. 1. Prema, katero potegnemo skoz polovišče jedne trikotnikove stranice vzporedno z drugo stranico, razpolavlja tretjo stranico (lik 48).

Pogoj. $AM = CM$, $MN \parallel AB$.

Trditev. $BN = NC$.

Dokaz. Ako načrtamo $MP \parallel BC$, je $\triangle AMP \cong \triangle MNC$ (§. 50), torej $MP = CN$; ker je pa $MP = BN$, je $BN = NC$.

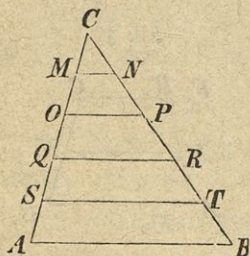
2. Prema, katero potegnemo skoz polovišči dveh trikotnikovih stranic, je vzporedna s tretjo.

Pogoj. $AM = MC$, $BN = NC$ (lik 48).

Trditev. $MN \parallel AB$.

Dokaz. Ako bi ne bila $MN \parallel AB$, bi bila druga n. pr. MN' ; potem pa mora N' stranico BC razpolavljati (1.) ali s točko N identična biti. Torej je $MN \parallel AB$.

Lik 49.



3. Ako razdelimo jedno stranico trikotnika v jednake dele in načrtamo od teh razdelišč vzporednice z drugo stranico, razdelimo s tem tretjo stranico v isto toliko enakih delov (lik 49).

Pogoj. $CM = MO = OQ = \dots$ i. t. d. in $MN \parallel OP \parallel QR \parallel \dots \parallel AB$.

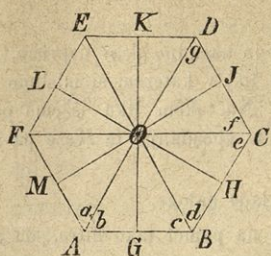
Trditev. $CN = NP = PR = \dots$

i. t. d.
Dokaz. $CN = NP$ (1.) in $NP = PR = RF$ i. t. d. (§. 64, 2).

Izreka o pravilnih mnogokotnikih.

§. 66. Ako razpolovimo v pravilnem mnogokotniku dva sosedna kota, je presečišče teh dveh polovnic jednako oddaljeno a) od vsakega oglišča, b) od vsake stranice (lik 50).

Lik 50.



Dokaz.

a) $\triangle AOB \cong \triangle BOC$ (§. 51), tedaj

$AO = OC$ in $b = e$. Zaradi $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ in $b = \frac{A}{2}$ je tedaj tudi $e = \frac{C}{2} = f$, torej $\triangle BOC \cong \triangle COD$ (§. 51) in $BO = CO$ in $d = g$. Takisto dokažemo, da je $CO = EO$ i. t. d. Ker je $b = c$, je $BO = AO$, torej po vsem prejšnjem $AO = BO = CO = DO = \dots$.

b) Ker sta trikotnika AOB in BOC enakokraka, je (§. 59, 1) $BG = \frac{AB}{2}$ in $BH = \frac{BC}{2}$, torej $BG = BH$ in $\triangle BGO \cong \triangle BHO$ (§. 51); tedaj $OG = OH$. Takisto moremo dokazati, da je $OH = OJ = OK = \dots$.

Točko O imenujemo središče pravilnega mnogokotnika.

Izvod. Ako zvežemo središče pravilnega mnogokotnika z vsemi oglišči, razpolovimo vsak njegov kot, mnogokotnik pa razdelimo v isto toliko enakokrakih skladnih trikotnikov, kolikor ima stranic.

Zveži središče pravilnega n -terokotnika z vsemi oglišči; kolik je a) kot pri vrhu, b) kot na osnovnici vsakega enakokrakega trikotnika?

Izračunaj te kote za a) enakostraničen trikotnik, b) kvadrat, c) pravilen peterokotnik, d) pravilen šesterokotnik, e) pravilen deseterokotnik, f) pravilen dvanajsterokotnik.

V katerem pravilnem mnogokotniku je kot pri vrhu a) isto tolik, b) dvakrat tolik, c) polovica od vsakega kota na osnovnici enakokrakih trikotnikov?

Naloge za načrtovanje.

Geometrijske naloge so nedoločene, ako je dano premalo pogojev tako, da je število likov, kateri tem pogojem zadostujejo, neomejeno.

Pogoj.

$AB = BC = CD = \dots$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \dots$,
 $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, $\sphericalangle c = \sphericalangle d$;
 $OG \perp AB$, $OH \perp BC$, $OJ \perp CD$
 i. t. d.

Trditev.

a) $AO = BO = CO = DO = \dots$ b) $OG = OH = OJ = OK = \dots$

Naloga pa je **določena**, ako je število likov, kateri danim pogojem zadostujejo, omejeno.

Opomnja. Za rešitev geometrijskih nalog je navadno prav uspešno, ako si mislimo nalogo rešeno t. j. ako si načrtamo lik, v katerem si mislimo ono izvršeno, kar hočemo z rešitvijo naloge doseči. Na takem liku iščemo potem zvezo med danimi in zahtevanimi sestavinami. Iz spoznanja te zveze pa sledi rešitev.

Tako postopanje imenujemo **analizo** (razklad) naloge.

Pri priprostih nalogah naredimo analizo na pamet tako hitro, da se je skoro ne zavemo.

Vsako rešitev pa moramo še **dokazati**, da je resnična.

Dokaz vendar že sledi navadno iz analize.

Mnogokrat je treba tudi preiskavati, koliko rešitev ima naloga in ali je sploh njena rešitev mogoča. Tako preiskavanje imenujemo **determinacijo** naloge.

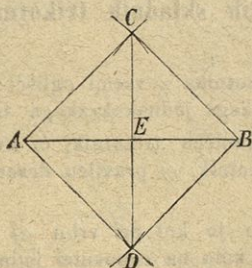
Pri rešitvi geometrijskih nalog je torej v obče paziti na: analizo, konstrukcijo, dokaz in determinacijo.

1. Razpolovi dano daljico AB (lik 51).

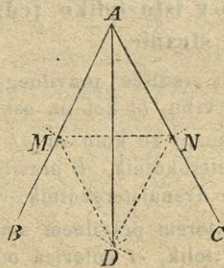
Analiza. Po pogoji §. 58. leži polovišče daljice v (črti) zveznici vrhov enakokrakih trikotnikov načrtanih nad to daljico.

Načrtovanje. Napiši iz krajišč A in B nad in pod daljico, z istim polumerom loka, katera se sečeta v točkah C in D . Skoz te točki potegni premo in ta razpolavlja daljico AB v točki E .

Lik 51.



Lik 52.



Dokaz sledi neposredno iz §. 58.

2. Razpolovi dan kot BAC (lik 52).

Analiza. Vzemimo, da je AD polovnica kota BAC . Ako je $AM = AN$, in ako zvežeš poljubno točko D polovnice s točkama M in N , je $\triangle AMD \cong \triangle AND$, tedaj $DM = DN$.

Načrtovanje. Naredi $AM = AN$ in napiši iz točk M in N loka, katera se sečeta v točki D ; prema, katero potegneš skoz točki A in D razpolavlja kot ABC .

Dokaz sledi iz analize.

3. Spusti iz točke C (lik 53) zunaj preme AB pravokotnico na to.

Analiza se opira kakor pri 1. in 2. na §. 58.

Načrtovanje. Napiši iz točke C lok, kateri seče premo AB v točkah M in N ; iz teh točk napiši zopet z istim polumerom loka, katera se sečeta v točki D ; ako zvežeš točki C in D s premo, je ta zahtevana pravokotnica.

Dokaz sledi iz §. 58.

4. Postavi v dani točki A (lik 54) preme BC pravokotnico na to.

Analiza. Ako je AD iskana pravokotnica, moremo si jo misliti spuščeno z vrha D jednokrakega trikotnika MND pravokotno na osnovnico MN ; potem je pa $AM = AN$.

Načrtovanje. Naredi $AM = AN$ in napiši iz točk M in N z istim polumerom loka, katera se sečeta v točki D . Ako zvežeš točki A in D z daljico, postaviš si zahtevano pravokotnico na BC .

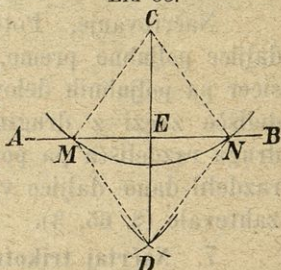
Da je $AD \perp NM$, sledi iz analize.

5. Postavi v krajišči A (lik 55) preme AB pravokotnico na to.

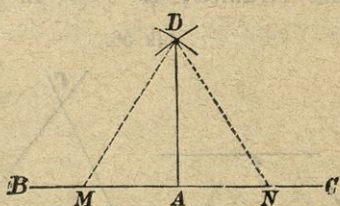
Analiza. Ako je $AE \perp AB$, je kot $DAE = R$, in moremo si misliti, da je kot v polukrogu. Točka E , skoz katero gre pravokotnica EA , je torej krajišče premere v krogu, katerega napišemo iz točke C s polumerom AC .

Načrtovanje. Napiši iz točke C zunaj preme AB krog, kateri gre skoz točko A in premo AB v točki D seče; načrtaj potem premer DE . Prema AE je zahtevana pravokotnica.

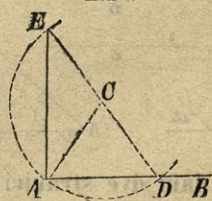
Lik 53.



Lik 54.



Lik 55.



Dokaz sledi iz analize.

Opiraje se na rešitev zadnjih treh nalog načrtaj

- kot, ki ima 1) 90° , 2) 45° ;
- " " " 1) 60° , 2) 30° , 3) 15° (lik 55).
- Razdeli prav kot v tri jednake dele.

6. Razdeli dano daljico v več enakih delov.

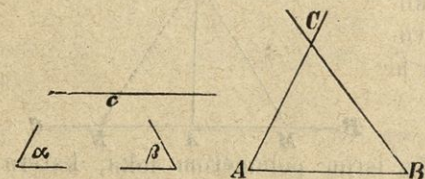
Analiza sledi iz §. 65, 3.

Načrtovanje. Potegni (lik 49.) skozi jedno krajišče dane daljice poljubno premo, vnosi na to toliko med seboj enakih sicer pa poljubnih delov, kolikor jih je zahtevanih. Zadnje razdelišče zveži z drugim krajiščem dane daljice s premo, skoz druga razdelišča pa potegni s to vzporednice. Na ta način si razdelil dano daljico v toliko enakih delov, kolikor se jih je zahtevalo (§. 65, 3).

7. Načrtaj trikotnik, ako so dani jedna stranica c in tej priležna kota α in β (lik 56).

Analiza. Vzemimo, da je ABC iskani trikotnik, $AB = c$ dana stranica, $A = \alpha$ in $B = \beta$ pa dana kota. Iz lika spoznamo, da sta mesti oglišč A in B že znani, oglišče C pa leži v presečišču krakov AC in BC danih kotov.

Lik 56.

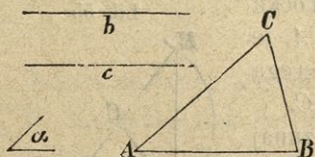


čišče krakov teh kotov je tretje oglišče C .

Kedaj je rešitev te naloge mogoča? (§. 31, a).

8. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici b in c in kot α , katerega oklepata (lik 57).

Lik 57.



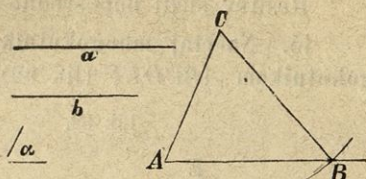
Analiza je podobna oni v prejšnji nalogi.

Načrtovanje. Načrtaj v A kot, kateri je enak danemu kotu α , naredi $AB = b$ in $AC = c$ in in potegni daljico AC .

9. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici a in b in kot α , kateri je večji stranici a nasproten (lik 58).

Načrtaj v točki A kot, kateri je enak danemu kotu α , naredi $AC = b$; napiši dalje iz C z večji stranici a enakim polmerom lok, kateri seče drugi krak v B in potegni BC .

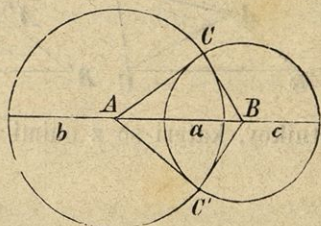
Lik 58.



10. Načrtaj trikotnik, ako so dane vse tri stranice a , b in c (lik 59).

Lik 59.

Načrtaj daljico $AB = c$, napiši iz A s polmerom b in iz B s polmerom a loka, katera se sečeta v točki C ; ako potegneš AC in BC , dobiš zahtevani trikotnik.



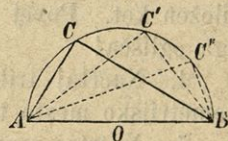
Ker se sečeta loka tudi v točki C' , dobiš še drug trikotnik ABC' , kateri je pa s trikotnikom ABC skladen.

Kedaj je rešitev te naloge mogoča? (§. 38, 1).

11. Načrtaj nad dano daljico AB (lik 60) kakor hipotenuzo pravokoten trikotnik.

Lik 60.

Razpolovi AB v točki O , napiši iz O s polmerom OA polukrog in zveži poljubno njegovo točko C z A in B ; potem je $\sphericalangle ACB = R$ (§. 37) in ACB zahtevani trikotnik.



Brezštevilo različnih trikotnikov ACB , $AC'B$, $AC''B$ zadostuje tej nalogi, ona je tedaj nedoločena.

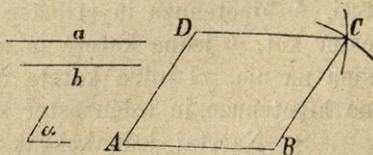
12. Načrtaj trikotnik, kateri je z danim trikotnikom skladen.

Glej nalogo 10.

13. Načrtaj paralelogram, ako sta dani dve stranici a in b in kot α , katerega oklepata (lik 61).

Lik 61.

Načrtaj v A kot, kateri je enak danemu kotu α , naredi $AB = a$ in $AD = b$ in napiši iz B in D s polmeroma b in a loka, katera se sečeta v C ; ako potegneš BC in DC je $ABCD$ zahtevani paralelogram.

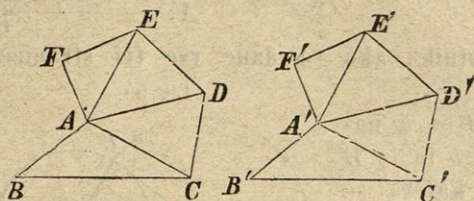


14. Poišči središče danega pravilnega mnogokotnika.

Rešitev sledi neposredno iz §. 66.

15. Načrtaj mnogokotnik, kateri je skladen z danim mnogokotnikom $ABCDEF$ (lik 62).

Lik 62.



Raztvari dani mnogokotnik $ABCDEF$ z diagonalami, katere potegneš od oglišča A do vseh drugih oglišč, v trikotnike; načrtaj potem v istem redu isto toliko tri-

kotnikov, kateri so z onimi danega mnogokotnika skladni.

Vaje.

Poišči sam razrešitev tem-le nalogam:

1. Načrtaj trikotnik, ako je dana *a)* jedna stranica, *b)* jeden kot.

2. Načrtaj trikotnik, ako sta dana dva kota.

3. Načrtaj trikotnik, ako je dana jedna stranica in nji priležen kot. Povej geometrijsko mesto dani stranici nasprotnega oglišča!

4. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici. Povej geometrijsko mesto tretjega oglišča!

5. Načrtaj pravokoten trikotnik, ako je: *a)* dana jedna kateta, *b)* dana hipotenuza, *c)* dan oster kot.

Kaj je geometrijsko mesto nasprotnega vrha v *a)* in *b)*?

6. Načrtaj enakokrak trikotnik, ako so dani: *a)* višina, *b)* kot na osnovnici, *c)* kot pri vrhu, *d)* krak.

Opomnja. Naloge 1. do 6. so nedoločene.

7. Načrtaj pravokoten trikotnik, ako so dani: *a)* obe kate, *b)* hipotenuza in priležen kot, *c)* jedna kateta in priležni oster kot, *d)* jedna kateta in nasprotni kot, *e)* hipotenuza in višina na njo, *f)* jedna kateta in višina na hipotenuzo; *g)* višina na hipotenuzo in jeden oster kot.

8. Načrtaj enakokrak trikotnik, ako so dani: *a)* osnovnica in jeden priležnih kotov, *b)* osnovnica in kot pri vrhu,

c) krak in kot na osnovnici, d) krak in kot pri vrhu, e) osnovnica in višina, f) krak in višina, g) višina in kot pri vrhu.

9. Načrtaj jednakostraničen trikotnik, ako je dana višina.

10. Načrtaj pravokoten jednakostraničen trikotnik, ako je dana višina.

11. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici in višina na jedno teh stranic.

12. Načrtaj romboid, ako sta dani obe diagonalni in kot, katerega oklepata.

13. Načrtaj romb, ako so dane: a) stranica in jeden kot, b) stranica in višina, c) obe diagonalni.

14. Načrtaj pravokotnik, ako je dana jedna stranica in nji nasprotni kot, katerega oklepata diagonalni.

15. Načrtaj kvadrat, ako je dana vsota stranice in diagonalne.

16. Načrtaj trapez, ako je dano: a) tri stranice in višina, b) vzporedni stranici in diagonalni.

Četrty oddelek.

Ploščina premočrtnih likov.

§. 67. Kolikost ploskve, katero omejeva obseg lika, imenujemo **ploskveno vsebino** (ploščino) lika.

Dva lika, katera imata jednako ploščino, imenujemo **ploskvenojednaka**.

§. 68. Za merjenje ploskev rabi nam jedna znana ploskev, s katero preiskujemo, kolikokrat je v drugi; to ploskev imenujemo **ploskveno jednota**, in število, katero izražuje, kolikokrat je ploskvena jednota v dani ploskvi, **mersko število ploskve**.

Za mersko jednota jemljemo kvadrat, čegar stranica je dolgotni jednoti jednaka. Imenujemo jo po tej:

Kvadraten-meter ($\square^m$), kvadraten-decimeter ($\square^{dm}$), kvadraten-centimeter ($\square^{cm}$), kvadraten-milimeter ($\square^{mm}$).

Večja jednota je kvadraten-kilometer ($\square^{Km}$) ali še večja kvadraten-mirijameter ($\square^{Mm}$).

$$1 \square^m = 100 \square^{dm} \dot{\text{a}} 100 \square^{cm} \dot{\text{a}} 100 \square^{mm}; 1 \square^{Mm} = 100 \square^{Km} \dot{\text{a}} 1000000 \square^m.$$

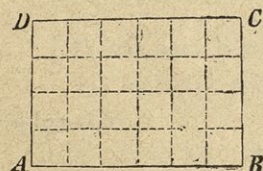
Za merjenje zemljišč jemljemo ar = $100 \square^m$ in hektar (Ha) = 100 ar^{ov} .

Ploskve, katere hočemo izmeriti so različne; zato je pa mnogokrat nemogoče, da bi jih izmerili s pokladanjem ploskvene jednote na nje. Ker pa kolikost ploskve zavisi od merskih števil gotovih daljic, treba nam le poznati pravila, po katerih moremo izračunati ploščino iz merskih števil onih daljic.

§. 69. Naloga. Kolika je ploščina (p) pravokotnika, v katerem meri osnovnica 6 (a) in višina 4 (b) takistih dolgotnih jednot?

Ker meri osnovnica (lik 63) 6 (a) dolgotnih jednot, moremo ob nji na pravokotnik 6 (a) ploskvenih jednot položiti; in ker meri višina 4 (b) dolgotnih jednot, moremo na celi pravokotnik 4 (b) takih prog po 6 (a) ploskvenih jednot t. j. 4krat 6 (b krat a) ploskvenih jednot položiti. Torej je

Lik 63.



$$p = 6 \times 4 = 24, p = a \times b = ab.$$

Mersko število pravokotnikove ploščine je jednako produktu (merskih števil) osnovnice in višine (dolžine in širine).

Iz $p = ab$ sledi:

$$a = \frac{p}{b}, b = \frac{p}{a} \text{ t. j.}$$

Jedna pravokotnikova stranica je jednaka ploščini deljeni z drugo stranico. *)

§. 70. Kvadrat je pravokotnik, v katerem je višina jednaka osnovnici, tedaj $a = b = s$ in

$$p = s \cdot s = s^2.$$

Kvadratova ploščina je jednaka drugi potenci (merskega števila) njegove stranice.

Od tod ime kvadrat za drugo potenco kacega števila v aritmetiki.

*) „Ploščino deliti sè stranico“ je krajši izraz za „mersko število ploščine deliti z merskim številom stranice.“ — Ta opomnja velja tudi za druge take slučaje.

Iz $p = s^2$ sledi

$$s = \sqrt{p}$$

§. 71. Izrek. Dva paralelograma z jednako osnovnico in jednako višino sta ploskvenojednaka.

Pogoj. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $AE \parallel BF$
(lik 64).

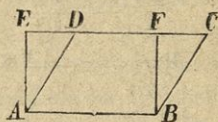
Trditev. $ABCD = ABEF$.

Dokaz. $\triangle BFC \cong \triangle AED$ (§. 51)

in $ABFD = ABFD$, torej

$$ABFD + BFC = ABFD + AED \text{ ali} \\ ABCD = ABEF.$$

Lik 64.



Izvoda. 1. Vsak paralelogram je ploskvenojednak pravokotniku, ki ima isto toliko osnovnico in isto toliko višino.

2. Paralelogramova ploščina je jednaka produktu (merskih števil) osnovnice in višine.

§. 72. Izrek. Trikotnik je polovica paralelograma, ki ima isto toliko osnovnico in isto toliko višino.

Dokaz. Ako potegnemo (lik 65) $CD \parallel AB$, $BD \parallel AC$, dobimo paralelogram $ABCD$, kateri ima isto osnovnico in isto višino, in $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (§. 63, 1), torej

$$ABC = \frac{1}{2} ABCD.$$

Izvod.

a) Trikotnikova ploščina (p) je jednaka polovici produkta iz (merskih števil) osnovnice (a) in višine (v).

$$p = \frac{1}{2} a v.$$

b) Ploščina pravokotnega trikotnika je jednaka produktu obeh katet.

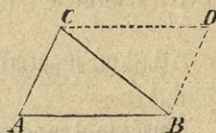
c) Dva trikotnika z isto toliko osnovnico in isto toliko višino sta ploskvenojednaka.

Iz $p = \frac{1}{2} av$ sledi

$$a = \frac{2p}{v}, v = \frac{2p}{a} \text{ t. j.}$$

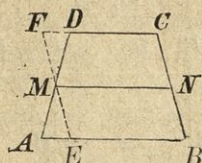
Trikotnikova osnovnica (višina) je jednaka kvocijentu iz dvojne ploščine in višine (osnovnice).

Lik 65.



§. 73. Izrek. Trapec je ploskvenojednak paralelogramu, kateri ima isto toliko višino, in čegar osnovnica je jednaka srednici onega.

Lik 66.



Dokaz. Ako je (lik 66) $AM = MD$ in ako skoz M potegnemo premo $EF \parallel BC$, da seče podaljšano vzporednico CD v točki F , je

$$\triangle AEM \cong \triangle FMD \text{ in } EMDCB = EMDCB \text{ torej}$$

$$AEM + EMDCB = FMD + EMDCB \text{ ali } ABCD = EBCF,$$

kjer je $EBCF$ paralelogram, kateri ima isto višino kakor trapec $ABCD$, za osnovnico pa

$$EB = \frac{AB + CD}{2} \text{ t. j. srednico trapecu.}$$

Izvod. Ploščina (p) trapecu je jednaka produktu (merskih števil) srednice (s) in višine (v).

$$p = s v \quad 1).$$

Ali, ker je srednica jednaka polovici vsote obeh vzporednic (a in b):

Ploščina trapecu je jednaka polovici produkta iz vsote vzporednic in iz višine.

$$p = \frac{1}{2} (a + b) \cdot v \quad 2).$$

Iz jednačeb 1) in 2) sledi

$$s = \frac{p}{v}, v = \frac{p}{s}, a = \frac{2p}{v} - b.$$

§. 74. Izrek. Ploščina pravičnega mnogokotnika je jednaka polovici produkta iz njegovega obsega in središčeve razdalje od jedne stranice.

Dokaz. Vzemimo, da je $ABCD \dots$ (lik 50) pravičen n -terokotnik, s mersko število stranice, d mersko število razdalje središča od stranice. Potem je ploščina trikotnika ABO jednaka $\frac{sd}{2}$ in ploščina vseh trikotnikov, v katere je mnogokotnik z dajicami iz središča do oglišč razdeljen, t. j. ploščina mnogokotnika

$$P = n \cdot \frac{sd}{2} = \frac{1}{2} (ns) \cdot d,$$

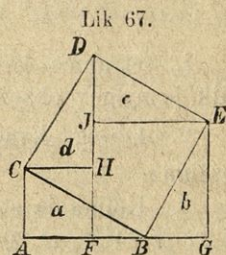
kjer je ns mersko število mnogokotnikovega obsega.

§. 75. Ploščino nepravilnega mnogokotnika dobimo, ako ga razdelimo z diagonalami v trikotnike; vsota ploščin vseh trikotnikov, katere izračunamo po znanem pravilu, je ploščina mnogokotnika.

Mnogokotnik pa moremo razdeliti tudi v trikotnike in trapeze, ako potegnemo diagonalo, na katero potem spuščamo pravokotnice iz ostalih oglišč. Ploščino vsakega teh likov izračunamo po znanem pravilu in vsota teh ploščin je ploščina mnogokotnika.

§. 76. Pitagorov izrek. V vsakem pravokotnem trikotniku je kvadrat nad hipotenuzo enak vsoti kvadratov nad obema katetama.

Načrtajmo nad hipotenuzo BC (lik 67) pravokotnega trikotnika ABC kvadrat $BCDE$ in potegnimo $DF \perp AB$, $EG \perp AB$, $EJ \perp DF$, $CH \perp DF$, potem so $AFCH$ in $FGEJ$ pravokotni paralelogrami, trikotniki a , b , c , d pa skladni (§. 52), in



$c + d = a + b$. Nadalje je
 $BCHJE = BCHJE$, torej

$$BCHJE + d + c = BCHJE + a + b \text{ ali}$$

$$BCDE = ACHJEGA = AFHC + FJEG.$$

Iz skladnosti trikotnikov a , b , c , d sledi $CH = AC$ in $EJ = EG = AB$ ali $ACHF$ je kvadrat nad kateto AC in $FJEG$ kvadrat nad kateto AB . Ako torej zaznačimo kratko $BCDE = \square BC$, $AFCH = \square AC$ in $FGEJ = \square AB$, je po gornjem

$$\square BC = \square AC + \square AB.$$

Izvod. Kvadrat nad jedno kateto je enak kvadratu nad hipotenuzo menj kvadratu nad drugo kateto.

Kajti iz $\square BC = \square AC + \square AB$,
sledi $\square AB = \square BC - \square AC$, in
 $\square AC = \square BC - \square AB$.

§. 77. Pitagorov izrek izražuje v obliki, kakersno ima v prejšnjem §., geometrično lastnost pravokotnega trikotnika. Damo pa mu lahko tako obliko, da postane aritmetični izraz medsebojne zavisnosti merskih števil stranic v pravokotnem trikotniku.

Kajti, ako so a , b , c merska števila stranic AB , AC , BC (lik 67) z ozirom na isto dolgotno jednoto, so a^2 , b^2 , c^2 merska

števíla ploščín kvadratov, katere smo nad onimi stranicami načrtali (§. 70).

Iz jednačeb prejšnjega izvoda sledé potem té-le:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ali } c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad ,, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2},$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad ,, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Izrazi te jednačbe z besedami!

Računske naloge.

1. Stranica kvadrata je *a*) 42^m, *b*) 0·835^m, *c*) 1^m 14^{dm} 7^{cm}; kolik je njegov obseg in kolika njegova ploščina?

2. Obseg kvadrata je *a*) 23^m 2^{dm}, *b*) 9¹/₃ ^m; kolika je ploščina?

3. Kolika je stranica kvadrata, čegar ploščina znaša *a*) 16□^m, *b*) 64□^m, *c*) 30·25□^{dm}, *d*) 5□^{dm} 24□^{cm} 41□^{mm}?

4. Kolika je stranica kvadratne njive, katera ima 9 *Ha* ploščine?

5. Na travniku hočejo zakliniti kvadraten prostor imajoč 9·61 arov; kolik je obseg tega prostora?

6. V pravokotniku sta dve stikajoči se stranici *a* in *b*, o obseg in *p* ploščina; izračunaj iz dveh teh količin drugi dve.

1) $a = 3^m 4^{dm} (4 \frac{1}{6}^m)$; 2) $b = 5 \cdot 7^m (5 \frac{1}{4}^m)$; 3) $a = 5^m 2^{dm} 8^{cm}$
 $b = 2^m 5^{dm} (1 \frac{3}{5}^m)$, $p = 74 \cdot 52 \square^m (11 \frac{3}{8} \square^m)$ $p = 21 \square^m 56 \square^{dm}$;

4) $a = 12 \cdot 84^m (6 \frac{3}{4}^m)$,
 $o = 40^m (22^m)$.

7. Nekdo zameni njivo, katera ima 746□^m 20□^{dm}, z drugo isto toliko pa 18^m 2^{dm} široko; kolika je dolžina druge njive?

8. Pravokotnik, ki je 2^m 1^{dm} 8^{cm} dolg, je ploskvenojednak s kvadratom, čegar stranica znaša 5^m 8^{cm}; kolika je širina pravokotnika?

9. Vrvica, ki je 10·4^m dolga, obseže ravno 3·24^m dolg pravokotnik; za koliko se razločuje ploščina tega pravokotnika od ploščine kvadrata, katerega ona vrvica tudi ravno obseže?

10. V paralelogramu (trikotniku) je *a* osnovnica, *v* višina in *p* ploščina; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$$1) a = 0.112^m, \quad 2) p = 86 \text{ arov}, \quad 3) p = 31\frac{7}{9} \square^m, \\ v = 0.058^m; \quad v = 146.3^m; \quad a = 14\frac{2}{3}^m.$$

11. Izračunaj obseg paralelograma, v katerem je dana jedna stranica ($a = 37^m$) in razstoja po dveh nasprotnih stranic ($v_1 = 21^m$ in $v_2 = 27.8^m$).

12. V pravokotnem trikotniku sta kateti 29^m 3^{dm} in $18^{m4^{dm}}$ dolgi; kolika je ploščina?

13. V pravokotnem trikotniku sta a in b kateti, c hipotenuza, o obseg in p ploščina. Izračunaj iz sledečih dveh vse druge:

$$1) a = 36^m, \quad 2) a = 13.2^m, \quad 3) b = 3.84^{dm}, \quad \left. \begin{array}{l} b = 27^m; \quad c = 14.3^m; \quad c = 73^{dm}; \end{array} \right\} (2 \text{ dec.}); \quad 4) a = 7^m \quad 2^{dm}, \\ p = 7 \square^m \quad 56 \square^{dm}.$$

14. Kolika je diagonala kvadrata sè stranico 3.2^m ?

15. V kvadratu je diagonala 2^m 1^{dm} 2^{cm} ; kolika je ploščina?

16. V enakokrakem trikotniku je a osnovnica, b krak, v višina in p ploščina. Izračunaj iz dveh teh količin drugi dve.

$$1) a = 124^{cm}, \quad 2) a = 3.5^{dm}, \quad 3) a = 2.34^m, \quad 4) v = 7.8^m, \\ b = 165^{cm}; \quad v = 5.4^{dm}; \quad p = 3.76 \square^m; \quad p = 32 \square^m.$$

17. Jednakostraničen trikotnik ima 7.2^m v obsegu; kolika mu je ploščina?

18. V pravokotniku znaša osnovnica 6.8^m in diagonala 8.5^m ; kolika je stranica kvadrata, ki je pravokotniku ploskvenojednak?

19. Obseg enakokrakega trikotnika je 16^m , krak 5^m ; kolik je obseg ploskvenojednakega kvadrata?

20. Stranica jednakostraničnega trikotnika je 16^m ; kolik je obseg ploskvenojednakega pravokotnika, čegar dolžina znaša 12.99^m ?

21. V rombu sta d_1 in d_2 diagonali; kolika je ploščina p ?

$$p = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \quad (\S. 63, 4).$$

22. 12^{dm} dolga in 9^{dm} široka miza je na sredi olepotičena z rombo, čegar diagonali sta 4^{dm} in 3^{dm} ; za koliko je miza večja od romba.

23. V rombu je ploščina $120 \square^m$ in jedna diagonala 24^m ; kolika je a) druga diagonala, b) stranica, c) višina?

24. V trapezu sta a in b vzporednici, v višina in p ploščina; izračunaj iz treh teh količin četrto.

- 1) $a = 3^m 2^{dm} 8^{cm}$, 2) $a = 5.5^m (7\frac{3}{3}^{dm})$, 3) $a = 12.8^m$,
 $b = 2^m 7^{dm} 2^{cm}$, $b = 4.4^m (5\frac{1}{6}^{dm})$, $v = 6.4^m$,
 $v = 4^m 5^{dm}$; $p = 18.81 \square^m (25\frac{2}{3} \square^{dm})$; $p = 124.8 \square^m$.

25. V enakokrakem trapezu znaša ploščina $3.72 \square^m$, višina 1.2^m in večja vzporednica 3.6^m ; kolik je njegov obseg?

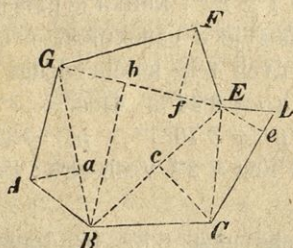
26. V trapezu sta vzporednici 2.37^m in 0.954^m , višina pa 0.753^m ; kolika je osnovnica ploskvenojednakega trikotnika, čegar višina je 0.685^m (3 dec.)?

27. Stranica pravičnega osmerokotnika znaša 1.4^m in nje razdalja od središča 1.69^m ; kolika je ploščina?

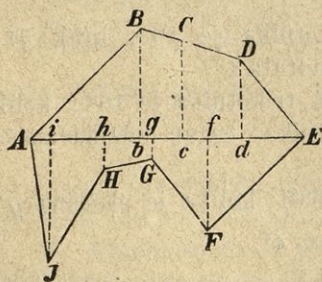
28. Obseg pravičnega šesterokotnika je 15^m ; kolika je ploščina?

29. V mnogokotniku $ABCDEFGG$ (lik 68) je

Lik 68.



Lik 69.



$$\begin{aligned} BG &= 39^m, & Aa &= 11.6^m, \\ BE &= 42.5^m, & Cc &= 19.7^m, \\ CD &= 31.5^m, & Ee &= 12.1^m, \\ EG &= 39.5^m, & Bb &= 35.4^m, \\ & & Ff &= 16.4^m; \end{aligned}$$

kolika je ploščina mnogokotnika?

30. V mnogokotniku $ABCDEFGHJ$

(lik 69) je

$$\begin{aligned} Ai &= 9.1^m, & Ji &= 63.4^m, \\ ih &= 29.2^m, & Hh &= 17.1^m, \\ hb &= 22.1^m, & Bb &= 60.5^m, \\ bg &= 6.1^m, & Gg &= 12.1^m, \\ gc &= 19.2^m, & Cc &= 57.2^m, \\ cf &= 16.4^m, & Ff &= 52.3^m, \\ fd &= 21.8^m, & Dd &= 46^m, \\ aE &= 41.6^m; \end{aligned}$$

kolika je mnogokotnikova ploščina?

31. V enakokrakem trikotniku je a stranica, v višina in p ploščina; izračunaj iz jedne teh količin drugi dve.

$$\begin{aligned} 1) \quad v &= \frac{a}{2} \sqrt{3}, & 2) \quad a &= \frac{2v}{3} \sqrt{3}, & 3) \quad a &= 2 \sqrt{\frac{p \sqrt{3}}{3}}, \\ p &= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}; & p &= \frac{v^2}{3} \sqrt{3}; & v &= \sqrt{\frac{p \sqrt{3}}{3}}. \end{aligned}$$

Dana je

$$1) a = 2^m 5^{\text{dm}} 9^{\text{em}}, \quad 2) v = 1.35^m, \quad 3) p = 36\frac{3}{4} \square^m.$$

32. V trikotniku so dane vse tri stranice; izračunaj k jedni stranici pripadajočo višino in ploščino trikotnika.

Vzemimo, da je v trikotniku ABC (lik 70) stranica $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, višina $CD = h$ in daljica $AD = x$, tedaj $BD = c - x$.

x določimo po §. 77

$$\text{iz } \triangle ADC \dots h^2 = b^2 - x^2,$$

$$\text{„ } \triangle BDC \dots h^2 = a^2 - (c - x)^2;$$

tedaj $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, in iz tega dobimo

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Ker je pa $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$, dobimo, ako nadomestimo x z ravno izračunano vrednostjo,

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}, \text{ in}$$

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}.$$

Ako zaznamenujemo polovico trikotnikovega obsega s črko s , tedaj $a + b + c = 2s$, dobimo, ako odštejemo od te jednečbe zaporedoma $2a$, $2b$, $2c$,

$$b + c - a = 2(s - a),$$

$$a - b + c = 2(s - b),$$

$$a + b - c = 2(s - c); \text{ torej}$$

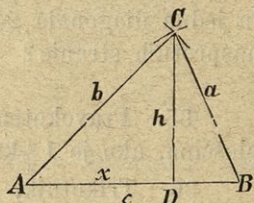
$$h = \frac{2}{c} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Ako je p ploščina trikotnika ABC , je

$$p = \frac{ch}{2} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Izrazi to formulo z besedami!

Lik 70.



33. V trikotniku je

$$\begin{array}{lll} 1) a = 35^m, & 2) a = 28 \cdot 2^m, & 3) a = 2^m \ 5^{\text{dm}} \ 7^{\text{cm}}, \\ b = 46^m, & b = 37 \cdot 5^m, & b = 3^m \ 1^{\text{dm}} \ 1^{\text{cm}}, \\ c = 53^m; & c = 40 \cdot 5^m; & c = 1^m \ 8^{\text{dm}} \ 4^{\text{cm}}; \end{array}$$

kolika je ploščina?

34. V romboidu sta dve stikajoči se stranici 25^m in 7^m in jedna diagonalna 24^m ; kolika je ploščina in kolik razstoj dveh nasprotnih stranic?

35. Pravokoten vrt ima 200^m v obsegu; kolika je njegova ploščina, ako je $1\frac{2}{3}$ krat tako dolg kakor širok?

36. Trikotnik, čegar ploščina znaša $1734 \square^m$, ima trikrat daljšo višino kakor osnovnico; kolika je vsaka?

37. V rombu je stranica 25^m in jedna diagonalna 48^m ; kolik je obseg pravokotnega enakokrakega trikotnika, kateri je rombu ploskvenojednak?

38. Trapec ima 100^m v obsegu, vzporednici sta 42^m in 24^m in jedna nevzporednica 15^m ; kolika je ploščina?

39. Obseg trikotnika je 12^m in stranice so si kakor $4 : 5 : 6$; kolika je ploščina?

40. Kolika je ploščina romba sè stranico $3^{\text{dm}} \ 8^{\text{cm}}$, ako ima jeden njegovih kotov 45° ?

41. Kolika je ploščina paralelograma, čegar dve stikajoči se stranici sta $7 \cdot 5^m$ in 6^m in kot, katerega oklepata, 60° ?

42. V pravokotniku je obseg 84^m in ploščina $432 \square^m$; koliko dolg in širok je pravokotnik?

43. Ploščina trapeza je $13 \cdot 8 \square^m$, višina 4^m in diferenca obeh vzporednic $2 \cdot 1^m$; kolika je vsaka vzporednica?

44. V trapezu znaša ploščina $2400 \square^m$ in manjša vzporednica 20^m ; kolika je višina, ako je isto toliko kakor večja vzporednica?

45. Obseg enakokrakega trikotnika je 16^m ; vsota iz višine in osnovnice pa 10^m ; izračunaj osnovnico, višino, krak in ploščino.

Naloge za načrtovanje.

(Pretvor in razdelba premočrtnih likov).

Dan lik pretvorimo v drugega, ako načrtamo lik, ki je danemu ploskvenojednak, pa ne skladen.

1. Pretvori raznostraničen trikotnik ABC (lik 71) v enakokrakega, kateri ima s prvim jednako osnovnico.

Postavi v sredi osnovnice v točki D pravokotnico DE in potegni skoz vrh C premo $CE \parallel AB$; ako zvežeš presečišče E z A in B je ABE zahtevani enakokraki trikotnik.

Da je rešitev prava, sledi iz §. 72, izv. c) in §. 59, 4.

2. Pretvori trikotnik ABC (lik 72) v drugega, kateri ima dan kot α .

Načrtaj kot $BAD = \alpha$ in $CD \parallel AB$; presečišče D prem CD in AD je vrh iskanega trikotnika ABD (§. 72, izv. c).

3. Pretvori poševnokoten trikotnik v pravokotnega.

Rešitev kakor pri nalogi 2., samo da je $\alpha = 90^\circ$.

4. Pretvori trikotnik ABC (lik 73) v drugega, kateri ima a za osnovnico.

Naredi $AD = a$, potegni CD in vzporedno s to BE , katera seče podaljšano AC v E ; ADE je potem zahtevani trikotnik. Kajti

$$\begin{aligned}\triangle ACD &= \triangle ACD, \\ \triangle CDE &= \triangle CDB, \text{ tedaj}\end{aligned}$$

$$\triangle ACD + \triangle CDE = \triangle ACD + \triangle CDB,$$

ali $\triangle ADE = \triangle ABC.$

5. Pretvori trikotnik ABC (lik 74) v drugega, kateri ima dano višino v .

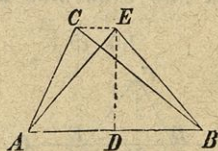
Postavi $AD = v$ pravokotno na AB , potegni $DE \parallel AB$, zveži E z B in načrtaj $CF \parallel EB$. Ako potegneš še EF , je

$$\triangle AEF = \triangle ABC.$$

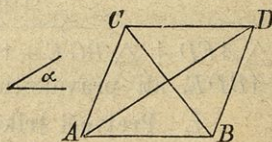
Dokaz kakor pri nalogi 4.

Dostavek. Po tej nalogi moreš zmerom trikotnike z različnimi višinami pretvarjati v take, ki imajo jednako višino;

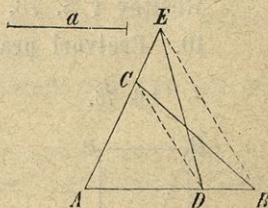
Lik 71.



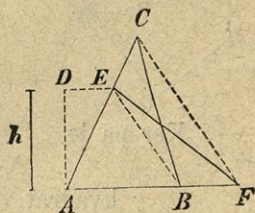
Lik 72.



Lik 73.



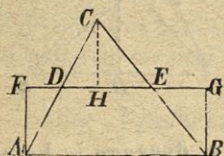
Lik 74.



potem pa tudi lahko načrtaš trikotnik, ki je enak vsoti (diferenci) dveh danih trikotnikov.

6. Pretvori trikotnik ABC (lik 75) v pravokotnik, kateri ima isto osnovnico kakor trikotnik.

Lik 75.



Razpolovi stranici AC in BC v D in E , potegni skozi te dve točki premo in postavi v A in B pravokotnici AF in BG ; $ABGF$ je iskani pravokotnik, kajti, ako potegneš, $CH \perp DE$, je

$$\triangle AFD = \triangle CHD,$$

$$\triangle BGE = \triangle CHE,$$

trap. $ABED = ABED$, tedaj

$$\triangle AFD + \triangle BGE + \text{trap. } ABDE = \triangle CHD + \triangle CEH + \text{trap. } ABDE, \text{ ali pravokotnik } ABGF = \triangle ABC.$$

7. Pretvori trikotnik v isto tako visok paralelogram.

Rešitev se opira na §. 72.

8. Pretvori paralelogram v isto tako visok pravokotnik.

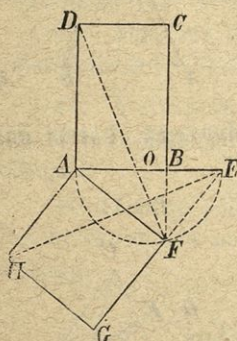
Rešitev sledi iz §. 71, izv. 1.

9. Pretvori trapez $ABCD$ (lik 66) v paralelogram.

Rešitev v §. 73.

10. Pretvori pravokotnik $ABCD$ (lik 76) v kvadrat.

Lik 76.



Podaljšaj manjšo stranico AB do E , tako da je $AE = AD$ in napiši nad AE iz njene srede O lok, kateri seče podaljšano CB v točki F . Ako potegneš AF in načrtaš nad njo kvadrat $AFGH$, je ta danemu pravokotniku ploskvenojednak.

Dokaz. Ker je $\sphericalangle AFE = R$ (§. 37) je EFG prema črta. Ako potegneš HE in DF , je po §. 72

$$\triangle AHE = \frac{1}{2} \text{ kvadrata } AFGH,$$

$$\triangle FAD = \frac{1}{2} \text{ pravokotnika } ABCD.$$

Ker pa je

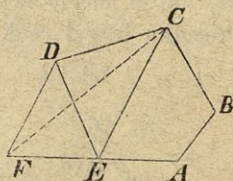
$$\triangle AHE \cong \triangle FAD, \text{ je tudi}$$

$$\text{kvadrat } AFGH = \text{pravokotniku } ABCD.$$

11. Pretvori mnogokotnik $ABCDE$ (lik 77) v drugega, kateri ima jedno stranico menj.

Potegni diagonalo CE in $DF \parallel CE$, zveži točki F in C ; potem je $ABCDE = ABCE$. Kajti oba mnogokotnika sta sestavljena iz enakih delov.

Lik 77.



Dostavek. Vsak mnogokotnik moreš pretvoriti v kvadrat. Kajti po nalogi 11 pretvoriš ga lahko v trikotnik, tega po nalogi 6 v pravokotnik in zadnjega po nalogi 10 v kvadrat.

12. Načrtaj kvadrat, kateri je enak vsoti dveh danih kvadratov.

Načrtaj pravokoten trikotnik, čegar kateti sta stranici danih kvadratov; hipotenuza tega trikotnika je stranica zahtevanega kvadrata (§. 76).

Ako ponavljaš postopanje te naloge, načrtaj lahko kvadrat, kateri je

- jednak vsoti več danih kvadratov,
- 3, 4, 5krat tolik kakor dan kvadrat.

13. Načrtaj kvadrat, kateri je enak diferenci dveh danih kvadratov.

Načrtaj pravokoten trikotnik, kateri ima stranico večjega kvadrata za hipotenuzo in stranico manjšega za jedno kateto; druga kateta je stranica iskanega kvadrata.

14. Razdeli trikotnik s premami, katere potegneš iz jednega oglišča, na več enakih delov.

Razdeli onemu oglišču nasprotno stranico na toliko enakih delov kolikor je zahtevanih in zveži razdelišča in oglišče z daljicami (§. 72, izv. c).

15. Razdeli trikotnik ABC (lik 78) od točke D , ležeče v stranici AB , na dva jednaka dela.

Lik 78.

Razpolovi AB v E , potegni CE in CD in $EF \parallel DC$; potem je

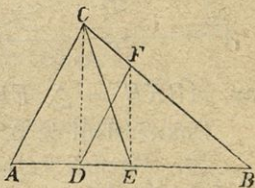
$$\triangle BDF = \triangle ADFC = \frac{1}{2} \triangle ABC.$$

Kajti $\triangle EFD = \triangle EFC$ (§. 72, izv. c),

$$\triangle BEF = \triangle CEF$$

$$\triangle BDF = \triangle BCE = \frac{1}{2} \triangle ABC,$$

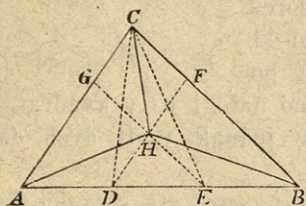
$$\text{tedaj tudi } \triangle ADFC = \frac{1}{2} \triangle ABC.$$



Takisto moreš rešiti nalogo, ako ti je razdeliti trikotnik ABC od točke D na več enakih delov.

16. Razdeli trikotnik ABC (lik 79) tako na tri jednake dele, da se sečejo iz oglišč potegnene razdelnice v jedni znotraj trikotnika ležeči točki.

Lik 79.



Razdeli stranico AB v točkah D in E na tri jednake dele, potegni $DF \parallel AC$ in $EG \parallel BC$; ako zvežeš presečišče H prem DF in EG z oglišči, je $\triangle AHC = \triangle AHB = \triangle BHC$.

Kajti ako potegneš pomočni črti CD in CE , je $\triangle AHC = \triangle ACD$ in $\triangle BHC = \triangle BCE$, tedaj tudi $\triangle AHB = \triangle DCE$.

Ker so pa trikotniki ACD , DCE , BCE jednaki, morajo biti jednaki tudi trikotniki ACH , AHB , BHC .

17. Razdeli trikotnik na štiri skladne trikotnike.

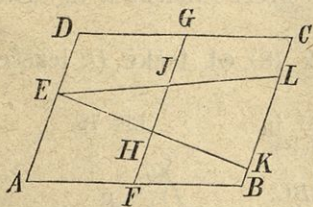
Zveži razpolovišča vseh treh stranic z daljicami.

18. Razdeli paralelogram s premami, katere so z jedno stranico vzporedne, na poljubno mnogo enakih delov.

Razdeli stranici, kateri se s to stikata, na zahtevano število enakih delov in zveži po dve nasprotni razdelišči z daljicami (§. 71).

19. Razdeli paralelogram $ABCD$ (lik 80) od točke E , ležeče v stranici AD , na določeno število, n. pr. na tri jednake dele.

Lik 80.



Zveži razpolovišči F in G stranic AB in CD z daljico FG , razdeli to na tri jednake dele in potegni skoz E in razdelišči J in H daljici EHK in EJL , potem je

trap. $ABKE = \triangle EKL = \text{trap. } ELCD = \frac{1}{3}$ paralgr. $ABCD$.

Dokaz sledi iz §. 72 in §. 73.

20. Razdeli četverokotnik $ABCD$ (lik 81) iz oglišča D na dva jednaka dela.

Potegni obe diagonali AC in BD in skoz sredo E prve $EF \parallel DB$; ako zvežeš D in F z daljico DF , razpolavlja ona četverokotnik $ABCD$.

Dokaz. Ako potegneš DE in BE , je

$$\triangle DBF = \triangle DBE \text{ (§. 72, izv. c).}$$

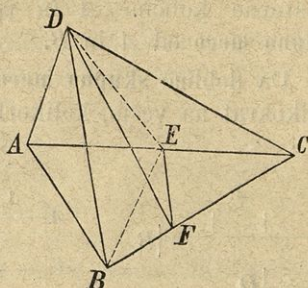
$$\triangle ABD = \triangle ABD, \text{ tedaj}$$

četverokot. $ABFD =$ četverokot. $ABED$.

Ker je pa četverokot. $ABED = \frac{1}{2} ABCD$,

je tudi „ $ABFD = \frac{1}{2} ABCD$.

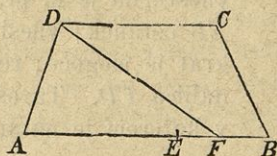
Lik 81.



21. Razdeli trapez $ABCD$ (lik 82) iz oglišča D na dva jednaka dela.

Načrtaj $AE = DC$ in $EF = FB$; daljica DF razpolavlja trapez (§. 72 in §. 73).

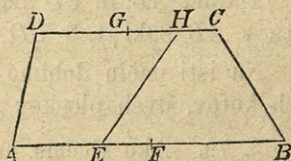
Lik 82.



22. Razdeli trapez $ABCD$ (lik 83) iz točke E , ležeče v vzporednici AB , na dva jednaka dela.

Lik 83.

Razpolovi obe vzporednici v točkah F in G , naredi $HG = EF$; daljica EH razpolavlja trapez $ABCD$ (§. 73).



Peti oddelek.

O podobnosti premočrtnih likov.

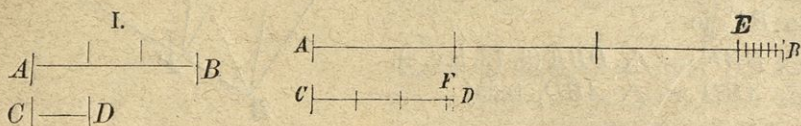
1. Geometrijska razmerja in sorazmerja.

§. 78. Prostorno količino, katero lahko od druge istovrstne prostorne količine večkrat odvzamemo in sicer brez ostanka, ime-

nujemo nje mero. Ako je prostorna količina M ob jednom mera prostorne količine A in prostorne količine B , imenujemo jo skupno mero od A in B .

Da dobimo skupno mero dveh daljic, vnesimo manjšo daljico tolikokrat na večjo, kolikorkrat je mogoče.

Lik 84.



- a) Ako je manjša daljica (lik 84, I) v večji AB večkrat n . pr. 3krat brez ostanka, je CD sama skupna mera od AB in CD .
- b) Vzemimo, da se manjša daljica ne dá na večji natanko vnesti, da je n . pr. daljica CD (lik 84, II) v AB 3krat in EB ostanek; vnesimo zdaj EB na CD tolikokrat, kolikorkrat je mogoče; recimo da je EB v DC 3krat in ostaje še daljica FD . Ta ostanek vnesimo zopet na prejšnjega EB , v katerem je natanko 6krat. Potem je

$$\begin{aligned} EB &= 6 FD, \\ CD &= 3 EB + FD = 19 FD, \\ AB &= 3 CD + EB = 63 FD. \end{aligned}$$

Daljici AB in CD imata tedaj skupno mero FD , in sicer je ta v AB 63krat, v CD pa 19krat.

Na isti način dobimo skupno mero dveh istovrstnih krogov, dveh kotov, dveh ploskev ali teles.

§. 79. Ako iščemo na v §. 78 navedeni način skupno mero dveh prostornih količin, dobivamo manjše in manjše ostanke; vender ni treba, da bi dobili kedaj ostanek, ki bi bil mera prejšnjemu. V tem slučaju nimata dani količini skupne mere.

Dve količini, kateri imata skupno mero, imenujemo **somerni**; dve količini pa, kateri nimata skupne mere, imenujemo **nesomerni**.

§. 80. Primerjanje dveh istovrstnih prostornih količin A in B v to svrho, da zvemo, kolikokrat je druga v prvi, imenujemo **razmerje**. Razmerje zaznamujemo z $A : B$ ali $\frac{A}{B}$. A je

prednji, B zadnji člen razmerja; število pa, katero pové, kolikokrat je količina B v A , eksponent razmerja.

Razmerje dveh prostornih količin določujemo z razmerjem njihovih merskih števil, ozirajočih se na isto mero. Tako je v liku 84, II

$$AB : CD = 63 \quad FD : 19 \quad FD = 63 : 19.$$

Splošno. Ako je prostorna količina C skupna mera dveh istovrstnih prostornih količin A in B , in je $A = m C$, $B = n C$, je

$$A : B = m C : n C = m : n.$$

Dostavek. Vrednost razmerja dveh somernih prostornih količin je popolnem natanko določena in sicer je *a)* eksponent celo število, ako je jedna danih dveh količin mera druge, *b)* vsaki drugikrat pa ulomek.

Vrednost razmerja dveh nesomernih prostornih količin se ne dá popolnem natanko določiti, približno pa poljubno natanko.

Kajti, ako sta A in B dve nesomerni prostorni količini, moremo razdeliti manjšo količino B v n enakih, neskončno majhnih delov C (kar je mogoče, ako vzamemo n dosti velik), tako da je $B = n C$. Ako je potem $A = m C + o$, smemo ostanek o zanemariti, ker je v primeri z $m C$ neskončno majhen. Na ta način dobimo

$$A : B = m C : n C = m : n, \text{ t. j.}$$

dve nesomerni prostorni količini smemo približno kot somerni smatrati, ako jima vzamemo za skupno mero neskončno majhno istovrstno količino.

Vsled tega bomo se pečali v sledečem le sè somernimi prostornimi količinami.

Načrtaj dve daljici, kateri se imata kakor *a)* $1 : 2$, *b)* $2 : 3$, *c)* $3 : 5$.

§. 81. Dve razmerji, kateri imata jednaka eksponenta, sta jednaki.

Ako je

$$A : B = e \text{ in } C : D = e, \text{ je}$$

$$A : B = C : D.$$

Jednačenje dveh enakih razmerij imenujemo **sorazmerje** (proporcijo). V sorazmerji $A : B = C : D$ imenujemo A in D vnjanja, B in C notranja člena.

Sorazmerje, v katerem sta notranja člena jednaka, je stalno sorazmerje; notranji člen imenujemo **srednjo geometrijsko sorazmernico** (proporcijonalo), četrti člen pa **tretjo stalno sorazmernico**,

O daljici AC , katero deli točka B tako v dva odseka, da velja sorazmerje $AC : AB = AB : BC$, pravimo, da je v točki B po stalnem sorazmerji, ali v srednjem in vnanjem razmerji razdeljena.

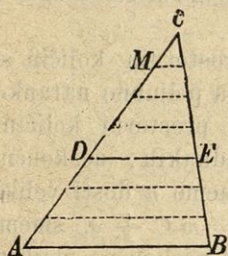
Načrtaj dva para daljic, katera sta sorazmerna.

2. Podobnost trikotnikov.

§. 82. Izreki o sorazmerni razdelbi trikotnikovih stranic.

1. Ako potegnemo v trikotniku z jedno stranico vzporednico, razdeli ta drugi dve stranici sorazmerno (lik 85).

Lik 85.



Pogoj. $DE \parallel AB$.

Trditev. $CD : DA = CE : EB$.

$CA : DA = CB : EB$.

$CA : CD = CB : CE$.

Dokaz. Vzemimo, da je CM skupna mera daljic CD in DA , in sicer $CD = m \cdot CM$, $DA = n \cdot CM$; potem je $CD : DA = m : n$.

Ako razdelimo CD v m in DA v n enakih delov in potegnemo skoz razdelišča vzporednice z AB , razdelimo na ta način (§. 65, 2) CE v m , celo CB pa v $m + n$, tedaj EB v n med seboj enakih delov; torej

$$CE : EB = m : n.$$

Iz tega in prejšnjega sorazmerja pa sledi:

$$CD : DA = CE : EB.$$

Iz sorazmerja $CD : DA = CE : EB$ pa sledi tudi resničnost drugih dveh v pogoji navedenih razmerij.

Kajti

$(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB$ ali $CA : DA = CB : EB$
in $(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE$ ali $CA : CD = CB : CE$.

Izvoda.

1. Ako sečemo dva trakova z dvema prečnicama, so odseki trakov sorazmerni.
2. Ako potegnemo od skupne točke 3, 4, 5 . . . trakov in sečemo prva dva z dvema vzporednicama, takisto družega in tretjega od presečišč v drugem, tretjega in četrtega od presečišč v tretjem i. t. d., so odseki vseh teh trakov paroma sorazmerni in prečnice tvorijo dva mnogokotnika (lik 92).

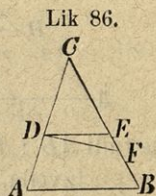
2. Prema, katera seče v trikotniku dve stranici sorazmerno, je vzporedna s tretjo trikotnikovo stranico (lik 86). (Obrat izreka 1.)

Pogoj. $CA : CD = CB : CE$.

Trditev. $DE \parallel AB$.

Dokaz. Ako bi DE ne bila vzporedna z AB , bi bila pa druga iz točke D potegnena prema n. pr. $DF \parallel AB$. Potem pa velja (po 1)

$$CA : CD = CB : CF.$$



Z ozirom na pogoj mora biti $CF = CE$ t. j. točka F s točko E identična. Tedaj je $DE \parallel AB$.

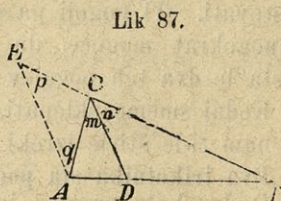
3. Ako razpolovimo v trikotniku jeden kot, deli polovnica nasprotno stranico v dva odseka, katera sta sorazmerna z njima priležnima stranicama (lik 87).

Pogoj. $\sphericalangle m = \sphericalangle n$.

Trditev.

$$AD : DB = AC : BC.$$

Dokaz. Naredimo podaljšek $CE = AC$ in zvežimo točki E in A , potem je $\triangle ACE$ enakokrak in $\sphericalangle p = \sphericalangle q$.



Ker je pa $\sphericalangle m + \sphericalangle n = \sphericalangle p + \sphericalangle q$ (§. 33), je tudi $\sphericalangle n = \sphericalangle p$, torej $CD \parallel AE$ (§. 26, 1) in $AD : DB = EC : BC$ (§. 82, 1) ali $AD : DB = AC : BC$.

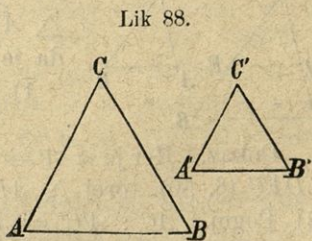
§. 83. Dva trikotnika imenujemo podobna, ako imata vse kote paroma jednake in enakim kotom nasprotno t. j. istoležne stranice paroma sorazmerne. Znak podobnosti je ∞ .

Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in $A'B'C'$ (lik 88)

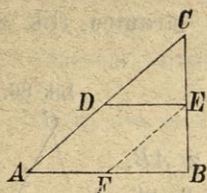
$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$,
 $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ in $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$, potem je $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$.

Da imamo sploh podobne trikotnike, spoznamo iz sledečega izreka:

Ako potegnemo v trikotniku vzporednico z jedno stranico, dobimo manjši trikotnik, kateri je večjemu podoben.



Lik 89



je tudi $AB : DE = BC : EC$, tedaj $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Izvoda.

1. Ako sečeta dve vzporedni prečnici dva traka, sta odseka prečnic sorazmerna z odseki trakov.
2. Ako sečemo več trakov s prečnicami tako, da je (lik 92) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$ i. t. d., so odseki prečnic paroma sorazmerni. Kajti vsi so sorazmerni z odsekoma istega traka.

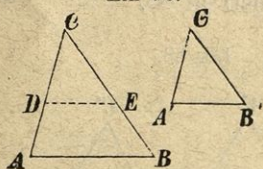
§. 84. Da sta dva trikotnika podobna, morata 6 pogojem zadostovati. Ti pogoji pa so zavisni jeden od drugega in zato je mnogokrat mogoče, da sklepamo na podobnost trikotnikov, ako sta le dva teh pogojev izpolnjena.

Kedaj smemo sklepati, da sta dva trikotnika podobna, povedó nam ti-le štirje izreki o podobnosti trikotnikov.

Dva trikotnika sta podobna, ako imata

- 1) dva kota paroma jednaka,
- 2) dve stranici paroma sorazmerni in od njih oklepana kota jednaka,
- 3) dve stranici paroma sorazmerni in večji teh stranic nasprotna kota jednaka,
- 4) vse tri stranice paroma sorazmerne.

Lik 90.



Te izreke dokažemo, ako naredimo $DC = A'C'$ (lik 90), $DE \parallel AB$, torej $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (§. 83) in dokažemo, da je $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$.

1) Pogoji. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $\sphericalangle A' = \sphericalangle A = \sphericalangle D$ in $C' = C$, je $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$ (§. 50), torej $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

2) Pogoji. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $DE \parallel AB$, imamo $AC : CD = BC : CE$ ali $AC : A'C' = BC : CE$, torej oziraje se na pogoj $CE = B'C'$ in $A'B'C' \cong \triangle DEC$ (§. 51) ter tudi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3) Pogoji. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $BC > AC$, torej tudi $B'C' > A'C'$ in $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz takisto kakor pri 2.

4) Pogoji. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $AC : A'C' = AB : A'B'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $DE \parallel AB$, imamo $AC : CD = BC : CE$ in $AC : CD = AB : DE$, ali $AC : A'C' = BC : CE$ in $AC : A'C' = AB : DE$; torej oziraje se na pogoj $CE = B'C'$ in $DE = A'B'$, in $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$ ter tudi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3. Podobnost mnogokotnikov.

§. 85. Dva mnogokotnika sta podobna, ako imata istoležne stranice paroma sorazmerne in vse kote paroma jednake.

Izvod. Dva pravilna mnogokotnika z istim številom stranic sta podobna.

§. 86. Izreka. 1. Istoležne diagonale razdeljujejo dva podobna mnogokotnika v istooliko podobnih trikotnikov.

Pogoj. Vzemimo, da je mnogokotnik $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$ (lik 91).

Lik 91.

Trditev.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D',$$

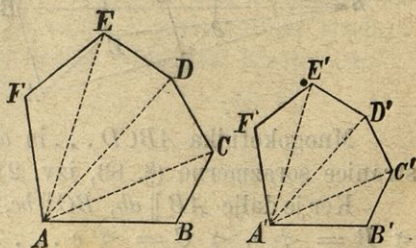
i. t. d.

Dokaz. Da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, sledi neposredno iz pogoja po §. 84, 2.

Iz podobnosti teh dveh trikotnikov pa sledi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ in $AB : A'B' = AC : A'C' = CD : C'D'$. Ker pa je po pogoju $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$, je tudi $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle A'C'B'$ ali $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A'C'D'$; to v zvezi s prejšnjim sorazmerjem pa kaže, da je $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ (§. 84, 2).

Takisto sledi podobnost vsakega sledečega para trikotnikov iz podobnosti prejšnjega para in podobnosti mnogokotnikov.

2. Obratno. Dva mnogokotnika sta podobna, ako ja moremo z istoležnimi diagonalami v istooliko podobnih mnogokotnikov razdeliti.



Dokaz. Iz pogoja lahko dokažemo, da so v obeh mnogokotnikih istoležni koti jednaki in istoležne stranice sorazmerne.

Izvod. V dveh podobnih mnogokotnikih je razmerje po dveh istoležnih diagonal enako razmerju dveh istoležnih stranic.

§. 86. Izrek. V podobnih mnogokotnikih sta obsega sorazmerna z dvema istoležnima stranicama.

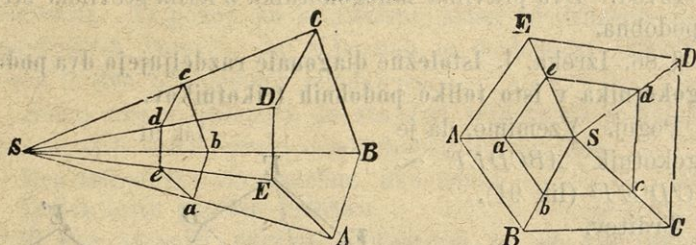
Kajti ako je (lik 91)

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \dots$$

$$\text{je tudi } (AB + BC + CD + \dots) : (A'B' + B'C' + C'D' + \dots) = AB : A'B'.$$

§. 87. Izrek. Ako potegnemo od točke S (lik 92) več v isti ravnini ležečih trakov, katere sečejo prečnice v točkah A in a , B in b , C in c , $\dots$ sorazmerno, sta mnogokotnika $ABCD \dots$ in $abcd \dots$ podobna.

Lik 92.



Mnogokotnika $ABCD \dots$ in $abcd \dots$ imata namreč istoležne stranice sorazmerne (§. 83, izv. 2).

Ker je dalje $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd$, $\dots$ je $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, $\sphericalangle C = \sphericalangle c \dots$

Mnogokotnika sta tedaj podobna.

Dva podobna mnogokotnika moremo zmerom v tako lego spraviti, da sečejo njijina oglišča trakove, katere potegnemo od točke S , sorazmerno. Tako lego dveh podobnih mnogokotnikov imenujemo **perspektivno**, točko S pa **podobnišče**.

Načrtaj k daljici AB perspektivno ležečo ab , ako je dano podobnišče S in eksponent ($e = AB : ab$).

a) $AB = 60^{\text{mm}}$, $AS = 65^{\text{mm}}$, $BS = 40^{\text{mm}}$, $e = \frac{3}{4}$;

b) $AB = 40^{\text{m}}$, $AS = 50^{\text{mm}}$, $BS = 30^{\text{mm}}$, $e = \frac{2}{5}$.

Načrtaj k trikotniku ABC perspektivno ležeč trikotnik abc , ako je dano podobnišče S in $e = AB : ab$.

$AB = 60^{\text{mm}}$, $AC = 45^{\text{mm}}$, $BC = 30^{\text{mm}}$, $AS = 60^{\text{mm}}$,

$BS = 50^{\text{mm}}$, $e = \frac{4}{3}$.

Načrtaj k četrkotniku $ABCD$ perspektivno ležeč četrkotnik $abcd$, ako je dano podobništvo S in $e = AB : ab$.

$$AB = 60^{\text{mm}}, AC = 50^{\text{mm}}, BC = 30^{\text{mm}}, AD = 32^{\text{mm}},$$

$$BD = 48^{\text{mm}}, AS = 60^{\text{mm}}, BS = 75^{\text{mm}}, e = \frac{2}{3}.$$

4. Uporaba izrekov o podobnosti trikotnikov.

§. 88. Izrek. V podobnih trikotnikih je razmerje istoležnih višin enako razmerju istoležnih osnovnic.

Pogoj.

Lik 93.

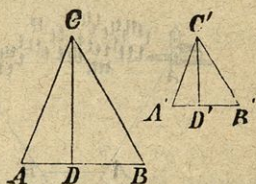
$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, $C'D' \perp A'B'$,
 $CD \perp AB$ (lik 93).

Trditev. $C'D' : CD = A'B' : AB$.

Dokaz. Iz pogoja sledi

1) $A'B' : AB = A'C' : AC$, in ker je
 $A'C'D' \sim ACD$ (§. 84, 1), je

2) $C'D' : CD = A'C' : AC$, torej tudi zaradi 1) in 2) $C'D' : CD = A'B' : AB$.



§. 89. Izrek. Ako spustimo v pravokotnem trikotniku z vrha pravega kota pravokotnico na hipotenuzo, je a) vsaka kateta srednja geometrijska proporcijonala med celo hipotenuzo in tej kateti priležnim odsekom hipotenuze, b) pravokotnica srednja geometrijska proporcijonala med obema odsekom hipotenuze.

Pogoj. $\sphericalangle ACB = R$, $CD \perp AB$
 (lik 94).

Lik 94.

Trditev.

a) $AB : AC = AC : AD$

$AB : BC = BC : BD$;

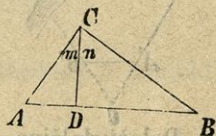
b) $AD : CD = CD : BD$.

Dokaz. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle BCD$ (§. 84, 1), in
 $\sphericalangle m = B$ in $\sphericalangle n = A$;

zaradi $ABC \sim ACD$ imamo $AB : AC = AC : AD$

„ $ABC \sim BCD$ „ $AB : BC = BC : BD$

„ $ACD \sim BCD$ „ $AD : CD = CD : BD$.



§. 90. Ako pomenijo c , a , b , r , s oziroma merska števila hipotenuze AB , katet BC in AC , hipotenuznih odsekov AD in BD , potem je

$$c : b = b : r \text{ in } c : a = a : s, \text{ tedaj}$$

$$cr = b^2 \text{ in } cs = a^2, \text{ in za to tudi}$$

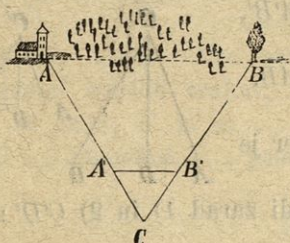
$$cr + cs = a^2 + b^2 \text{ ali } c(r + s) = a^2 + b^2 \text{ ali } c^2 = a^2 + b^2.$$

Kvadrat merskega števila hipotenuze je jednak vsoti kvadratov merskih števil obeh katet. (Glej §. 77.)

Praktična uporaba izrekov o podobnosti.

- a) Določi dolžino daljice, ako je ne moreš neposredno meriti zaradi ovir med njenima krajiščema.

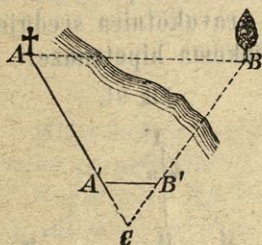
Lik 95.



To nalogo smo že rešili s pomočjo izrekov o skladnosti. Ako pa AC in BC ne moremo podaljšati, ker svet ni za to, rešimo nalogo s pomočjo izrekov o podobnosti. V tem slučaju meri tudi daljici AC in BC naredi $A'C = \frac{1}{n} AC$, $B'C = \frac{1}{n} BC$ (n. pr. $n = 4$), in izmeri $A'B'$. Ker je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, je $A'B' = \frac{1}{n} AB$.

- b) Določi dolžino daljice AB (lik 96), ako moreš le do jednega njenega krajišča A priti.

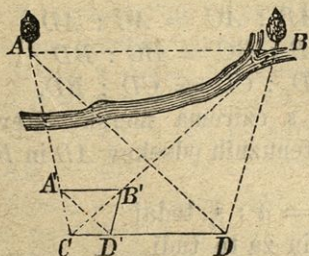
Lik 96.



Izberi si stališče C tako, da moreš AC odmeriti, naredi $A'C = \frac{1}{n} AC$ (n. pr. $n = 4$). V točki A' zaklini $\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle CAB$ in določi točko B' , katera leži v kraku $A'B'$ in v BC . Ker je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, je $AB = n \cdot A'B'$.

- c) Določi dolžino daljice AB (lik 97), katera ni na nobednem krajišči pristopna.

Lik 97.



Izberi si stališči C in D takó, da moreš med njima meriti in videti od njih do točk A in B . Izmeri potem stalnico CD in naredi $CD' = \frac{1}{n} CD$ (n. pr. $n = 4$). V točki D' zaklini $\sphericalangle CD'A' = \sphericalangle CDA$ in določi točko A' , katera leži v kraku $D'A'$ in v meri CA . Takisto zaklini v D' $\sphericalangle CD'B' = \sphericalangle CDB$ in določi točko B' , katera leži v kraku $D'B'$ in v meri CB . Potem je $AB = n \cdot A'B'$.

5. Ploščinska razmerja premočrtnih likov.

§. 91. Naloga. Izrazi ploščini p_1 in p_2 dveh a) kvadratov, b) pravokotnikov, c) paralelogramov, d) trikotnikov z občnimi izrazi in ji primerjaj.

Rešitev. Ako so s_1, o_1, v_1 in s_2, o_2, v_2 oziroma merska števila stranic kvadratov, osnovnic in višin onih likov, potem je

$$\begin{aligned} a) \quad p_1 &= s_1^2, & b) \text{ in } c) \quad p_1 &= o_1 v_1, & d) \quad p_1 &= \frac{o_1 v_1}{2}, \\ p_2 &= s_2^2, & p_2 &= o_2 v_2, & p_2 &= \frac{o_2 v_2}{2}, \text{ torej} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 : p_2 &= s_1^2 : s_2^2; \quad p_1 : p_2 = o_1 v_1 : o_2 v_2; \quad p_1 : p_2 = \frac{o_1 v_1}{2} : \frac{o_2 v_2}{2} \\ &= o_1 v_1 : o_2 v_2 \text{ t. j.} \end{aligned}$$

1. Ploščini dveh kvadratov se imata kakor drugi potenci (merskih števil) stranic.

2. Ploščini dveh paralelogramov (trikotnikov) se imata kakor produkta iz (merskih števil) njih osnovnice in višine.

Za $v_1 = v_2$ se izpremenita sorazmerji b) in d) v

$$p_1 : p_2 = o_1 : o_2 \text{ t. j.}$$

3. Ploščini dveh jednako visokih paralelogramov (trikotnikov) se imata kakor njih osnovnici.

Za $o_1 = o_2$ se izpremenita oni sorazmerji v

$$p_1 : p_2 = v_1 : v_2 \text{ t. j.}$$

4. Ploščini dveh paralelogramov (trikotnikov) z enakima osnovnicama se imata kakor višini.

§. 92. Izrek. Ploščini dveh trikotnikov, katera imata jeden kot enak, se imata kakor produkta (merskih števil) ta kot oklepajočih stranic.

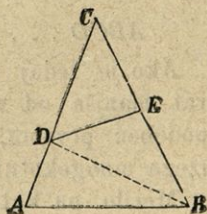
Pogoj. $\triangle ABC$ in $\triangle CDE$ (lik 98), imata $\sphericalangle C$ enak in $AC = a_1, BC = b_1, CD = a_2, CE = b_2$.

Trditev.

$$\triangle ABC : \triangle CDE = a_1 b_1 : a_2 b_2.$$

Dokaz. Ako potegnemo DB , dobimo trikotnik DBC , kateri ima isti vrh B kakor $\triangle ABC$, potem je

Lik 98.



$$\triangle ABC : \triangle DBC = AC : DC \text{ (§. 91, 3),}$$

$$\triangle DBC : \triangle DEC = BC : EC \text{ iz istega vzroka, torej}$$

$$\triangle ABC . DBC : \triangle DBC . DEC = AC . BC : DC . EC \text{ ali}$$

$$\triangle ABC : \triangle DEC = a_1 b_1 : a_2 b_2.$$

§. 93. Izrek. Ploščini dveh podobnih trikotnikov se imata kakor drugi potenci (merskih števil) istoležnih stranic.

Pogoj. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (lik 88), $AB = a_1$, $A'B' = a_2$.

Trditev. $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = a_1^2 : a_2^2$.

Dokaz.

- 1) $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB . AC : A'B' . A'C'$ (§. 92), in vsled pogoja imamo

$$AB : A'B' = AC : A'C', \text{ in ker je}$$

$$AB : A'B' = AB : A'B', \text{ je}$$

- 2) $\overline{AB^2} : \overline{A'B'^2} = AB . AC : A'B' . A'C'$. Iz sorazmerij
1) in 2) potem sledi

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB^2} : \overline{A'B'^2} \text{ ali}$$

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = a_1^2 : a_2^2.$$

§. 94. Izrek. Ploščini dveh podobnih mnogokotnikov se imata kakor kvadrata (merskih števil) istoležnih stranic.

Pogoj. $ABCD \dots \sim A'B'C'D' \dots$ (lik 91), $AB = a_1$, $A'B' = a_2$.

Trditev. $ABCD \dots : A'B'C'D' \dots = a_1^2 : a_2^2$.

Dokaz. Po §. 93 je:

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = a_1^2 : a_2^2,$$

$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = a_1^2 : a_2^2,$$

$$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = a_1^2 : a_2^2, \text{ i. t. d. tedaj tudi}$$

$$(ABC + ACD + ADE \dots) : (A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' \dots) = a_1^2 : a_2^2, \text{ ali}$$

$$ABCD \dots : A'D'C'D' \dots = a_1^2 : a_2^2.$$

Ako je tedaj vsaka stranica mnogokotnika $A'B'C'D' \dots$ m krat manjša od vsake stranice mnogokotnika $ABCD \dots$, ki je podoben prvemu, je ploščina prvega m^2 manjša od ploščine drugega mnogokotnika.

Merilo, na katerem so prave mere po danem razmerji umanjene, imenujemo **omaljeno**.

Računske na'oge.

1. Izračuni stranici $A'C'$, $B'C'$ trikotnika $A'B'C'$, kateri je podoben trikotniku ABC , ako je

$$AB = 35^m, AC = 40^m, BC = 30^m, A'B' = 12^m.$$

2. Merska števila stranic trikotnika ABC so dana; kolike so stranice podobnega trikotnika $A'B'C'$, ako je razmerje dveh istoležnih stranic $m : n$?

$$AB = 58^m, AC = 45^m, BC = 36^m, m : n = 3 : 4.$$

3. Za trikotnik ABC sta dani razmerji stranic $AB : AC$ in $AB : BC$; izračunaj tretje razmerje stranic $AC : BC$.

$$AB : AC = 7 : 9, AB : BC = 12 : 5.$$

4. Na katasterskem črtēži znaša daljica 5.75^{dm} ; kolika je njena resnična dolžina, a) ako je z 1^{cm} na črtēži načrtanih 30^{m} , b) ako je razmerje med mero na črtēži in natorno dolgostno mero $1 : 2500$?

5. Koliko dolgo moraš 648^{m} dolgo daljico po omaljenem merilu načrtati, ako narisuješ resnične dolgostne mere omaljene v razmerji $1 : 7500$?

6. Senca stolpa je 62^{m} dolga in senca 1^{m} visoke vertikalne palice 1.6^{m} ; kolika je višina stolpa?

7. Obseg trikotnika ABC je o ; kolik je obseg o' podobnega trikotnika, ako je razmerje dveh istoležnih stranic $m : n$?

$$a) o = 54^{\text{m}}, m : n = 3 : 4; b) o = 6.4^{\text{cm}}, m : n = 5 : 8,$$

8. Dan je obseg o trikotnika ABC , stranica AB in istoležna stranica $A'B'$ podobnega trikotnika $A'B'C'$; izračunaj obseg drugega trikotnika.

$$o = 54^{\text{mm}}, AB = 15^{\text{mm}}, A'B' = 27^{\text{m}}.$$

9. Obsega o in o' podobnih trikotnikov ABC in $A'B'C'$ sta dana in stranica AB ; izračunaj istoležno stranico $A'B'$.

$$o = 48^{\text{mm}}, o' = 126^{\text{mm}}, AB = 17^{\text{mm}}.$$

10. V pravokotnem trikotniku so a , b , c , v , m in n oziroma merska števila obeh katet, hipotenuze, pravokotnice od vrha pravega kota na hipotenuzo in odsekov hipotenuze; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

$$1) a = 2.8^{\text{m}}, 2) b = 27.9^{\text{m}}, 3) m = 16^{\text{m}}, \\ b = 2.1^{\text{m}}; \quad v = 23.56^{\text{m}}; \quad n = 9^{\text{m}}.$$

11. Dve istoležni stranici dveh podobnih trikotnikov sta si kakor $2 : 3$ in ploskev prvega trikotnika znaša $1.4 \square^{\text{m}}$ kolika je ploskev drugega?

12. Obsega devh podobnih trikotnikov sta $o = 54^{\text{cm}}$, $o_1 = 42^{\text{cm}}$ in ploščina prvega trikotnika $p = 176^{\square\text{m}}$; kolika je ploskev drugega?

13. Ploščini dveh podobnih trikotnikov sta $p = 5.67^{\square\text{m}}$, $p_1 = 4.27^{\square\text{m}}$ in obseg prvega $o = 6.2^{\text{m}}$; kolik je obseg drugega?

14. V stavbenem črteži, v katerem so 4^{cm} izbranega merila za 3^{m} vzeti, znaša ploščina očrta $5^{\square\text{dm}}$ $20^{\square\text{cm}}$; kolik je resnični prostor za stavbo?

15. Jedna in ista dežela je na jednom zemljevidu v razmerji 1 : 750000, na drugem v razmerji 1 : 5000 narisana; ako je na prvem zemljevidu dolžina reke 8^{cm} in ploščina jezera $2.75^{\square\text{cm}}$; kolika je dolžina reke in ploščina jezera na drugem zemljevidu?

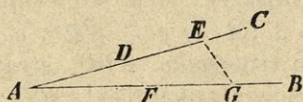
16. Posestvo meri v resnici 200^{Ha} in na črteži $60^{\square\text{dm}}$; po kakšnem merilu je posestvo narisano?

Naloge za načrtovanje.

1. Dane so tri daljice $a = 16^{\text{mm}}$, $b = 10^{\text{mm}}$, $c = 8^{\text{mm}}$; poišči četrto proporcijonalo.

Lik 99.

$$\begin{array}{c} a \\ \hline b \\ \hline c \end{array}$$



Načrtaj katerikoli kot ABC , stvari $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, zveži D in F z daljico DF in

načrtaj $EG \parallel DF$. EG je iskana 4. proporcijonala. Recimo, da je $EG = x$, potem je

$$a : b = c : x, \text{ torej } x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Načrtaj po tej nalogi te-le izraze:

$$a) \frac{3.4}{5}, \quad b) \frac{5.7}{3}, \quad c) \frac{2.3.5}{7.11}, \quad d) \frac{4}{5} = \frac{4.1}{5}, \quad e) \frac{2.3}{7} + \frac{5}{3},$$

$$f) \frac{5.8}{3} - \frac{11.3}{7}.$$

Rešitev za c):

$$\frac{2.3.5}{7.11} = \left(\frac{2.3}{7} \right) \cdot \frac{5}{11} = \frac{\left(\frac{2.3}{7} \right) \cdot 5}{11} \text{ i. t. d.}$$

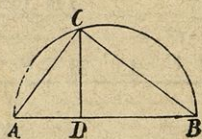
Za e) in f): Načrtaj najprej vsak del vsote (diference) in potem vsoto (diferenco).

2. Načrtaj tretjo stalno proporcijonalo k danima daljicama a in b .

Rešitev. 1. Po prejšnji nalogi, ako v nji postavimo $c = b$.

2. Analiza. Ako spustimo v pravokotnem trikotniku ABC (lik 100) z vrha C pravega kota pravokotnico na hipotenuzo, je DB tretja proporcijonala k AD in DC ali tudi DB (oziroma AD) k AB in BC (oziroma AC). Potem dobimo še dvojno rešitev te naloge.

Lik 100.



Rešitev.

a) Stvari $CD \perp AB$, $AD = a$, $CD = b$; zveži točki C in A z daljico AC in stvari $CB \perp AC$, katera seče podaljšano AD v točki B . DB je iskana tretja proporcijonala x .

Dokaz sledi iz analize.

b) Velja za $a > b$. Stvari $AB = a$, napiši nad AB polukrog in iz A s polumerom b lok, kateri seče oni polukrog v točki C . Ako načrtaš $CD \perp AB$, je AD iskana tretja proporcijonala x . Po tej nalogi je:

$$a : b = b : x, \text{ torej } x = \frac{b^2}{a}.$$

Načrtaj oziraje se na to nalogo še sledeče izraze:

$$a) \frac{2^2}{5}, \quad b) \frac{16}{7}, \quad c) \frac{25}{4} + \frac{4}{3}, \quad d) 5\frac{1}{7} - 4\frac{1}{2}.$$

3. Načrtaj srednjo geometrijsko proporcijonalo k danima daljicama a in b .

a) Stvari (lik 100) $AD = a$, $BD = b$, napiši nad AB polukrog in postavi $DC \perp AB$, katera seče polukrog v točki C . DC je srednja geometrijska proporcijonala med AD in DB .

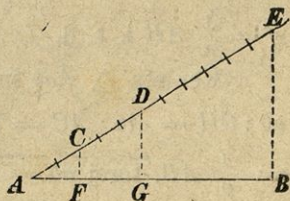
b) Stvari $BA = a$, katera je večja od b , in $AD = b$, napiši nad AB polukrog in potegni $DC \perp AB$; tetiva AC je iskana srednja geom. proporcijonala k a in b .

4. Razdeli dano daljico na več delov, kateri so med seboj v danem razmerji.

Lik 101.

Recimo, da imamo daljico AB razdeliti na 3 dele, kateri so si kakor $m : n : p$ ($2 : 3 : 6$).

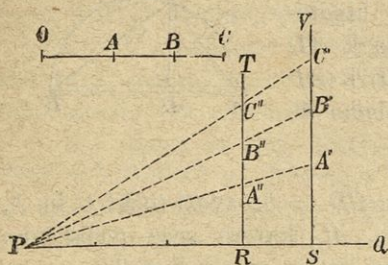
Potegni skozi A katerokoli premo AE , vnesi na njo od A do C m , od C do D n , od D do E p med seboj enakih drugače pa poljubno dolgih



delov, in potegni EB . Ako stвориš $CF \parallel DG \parallel EB$, so AF , FG , GB iskani deli daljice AB .

5. Umanji in povečaj več danih daljic po danem razmerji.

Lik 102.

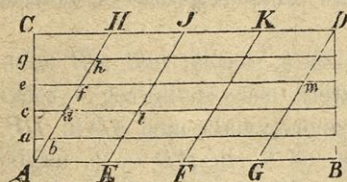


v točkah A'' , B'' , C'' ; RA'' , RB'' , RC'' so iskane daljice, katere so umanjene v razmerji 4 : 3.

Ako pa hočeš dane daljice povečati v razmerji 3 : 4, moraš jih vnesti na bližnjo pravokotnico RT ; in na pravokotnici SV imaš potem povečane daljice.

6. Razdeli daljico AB s prečnicami na $n = p \cdot r$ ($20 = 4 \cdot 5$) enakih delov.

Lik 103.



ljico CD in razdeli to tudi na p (4) enakih delov, da je $CH = HJ = JK = KD$. Ako zvežeš istoležna razdelišča pravokotnic z daljicami in točki A in H , E in J , F in K , G in D , s prečnicami AH , EJ , FK , GD je $ab = \frac{1}{n} AB$, $cd = \frac{2}{n} AB$, $ef = \frac{3}{n} AB$ i. t. d.

Ker sta $\triangle Aab$ in ACH podobna, je namreč

$ab : CH = Aa : AC = 1 : r$, torej $ab = \frac{1}{r} CH$. Nadalje je $CH = \frac{1}{p} AB$, torej $ab = \frac{1}{pr} AB$ ali $ab = \frac{1}{n} AB$.

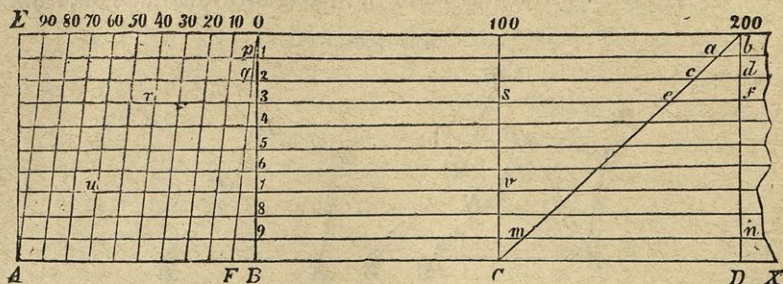
Ako hočeš dane daljice OA , OB , OC (lik 102) umanjiti n. pr. v razmerji 4 : 3, potegni premo PQ , vnesi od P do R 3 in od P do S 4 jednake dele, stvari $SV \perp PQ$ in $RT \perp PQ$, in $SA' = OA$, $SB' = OB$, $SC' = OC$, potegni skoz P in točke A' , B' , C' preme, katere sečejo bližnjo pravokotnico RT

Razdeli AB (lik 103) na p (4) enakih delov in postavi v A in B pravokotnici na njo. Na vsako teh dveh pravokotnic vnesi r (5) med seboj enakih, drugače pa poljubnih delov do C oziroma do D . Točki C in D zveži z daljico

Takisto dokažeš, da je $cd = \frac{2}{n} AB$, $ef = \frac{3}{n} AB$ i. t. d.

7. Načrtaj tisočninsko poprečno merilo.

Lik 104.



Vnesi na premo AX (lik 104) 10 enakih delov $AB = BC$ i. t. d., da dobiš daljico AM . Postavi v teh razdeliščih pravokotnice, vnesi tudi na vsako teh 10 med seboj enakih, vendar poljubnih delov in zveži razdelišča takisto, kakor v prejšnji nalogi. Potegni prečnico C 200 potem je $ab = \frac{1}{10} CD$. To daljico vnesi na AB desetkrat, isto tako na Eo , in potegni med razdelišči takisto prečnice kakor v prejšnji nalogi. Potem je $p\ 1 = \frac{1}{10} ab = \frac{1}{100} AB = \frac{1}{1000} AM$; $q\ 2 = \frac{2}{1000} AM$ i. t. d.

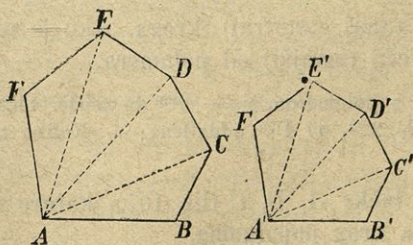
Ako je n. pr. AB namesto jednega decimetra, je BF namesto jednega centimetra, $p\ 1$ namesto jednega milimetra na omaljenem merilu.

Kako moreš s poprečnim merilom

- meriti daljico na papirji;
- načrtati daljico dane dolžine na papir;
- razdeliti dano daljico na več enakih delov;
- poiskati razmerje dveh daljic?

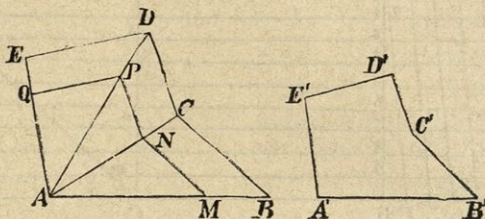
8. Načrtaj nad dano daljico $A'B'$ mnogokotnik, kateri je podoben danemu.

Lik 105.



- a) Razdeli dani mnogokotnik $ABCD \dots$ (lik 105) z diagonalami na trikotnike, napiši nad $A'B' \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, nad $A'C' \triangle A'C'D' \sim \triangle ACD$, nad $A'D' \triangle A'D'E' \sim \triangle ADE$ i. t. d.; $A'B'C'D' \dots$ je zahtevani mnogokotnik.

Lik 106.



- b) Potegni od A (lik 106) do vseh oglišč diagonale, stvari $AM = A'B'$, in potegni $MN \parallel BC$, $PN \parallel CD$ i. t. d. Mnogokotnik $ABCD \dots \sim AMNP \dots$. Ako tedaj načrtas nad $A'B'$ mnogokotnik $A'B'C'D' \dots \cong AMNP \dots$, je on zahtevani mnogokotnik.

Zmeri sobo in jo načrtaj v omaljenem merilu.

Šesti oddelek.

Krog.

1. Krog in točka.

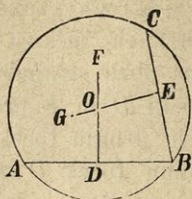
§. 95. Krožnica (§. 4.) je kriva črta, v kateri so vse točke od nepremakljive notranje točke jednako oddaljene. Ono notranjo točko imenujemo **središče**, vsako daljico pa, katera veže katerokoli točko krožnice s središčem, **polumer** (radij) kroga.

Točka leži zunaj (znotraj) kroga, ako je njen razstoj od središča kroga večji (manjši) od polumera.

Načrtaj krog s polumerom $r = 2^{\text{cm}}$ in poišči točko, katera je od središča a) 3^{cm} , b) 2^{cm} , c) 1^{cm} oddaljena. — Koliko takih točk moreš načrtati?

§. 96. Tri točke A, B, C (lik 107), katere ne leže v jedni premii, določujejo krog popolnoma.

Lik 107.



Ako potegnemo daljici AB in BC in postavimo v njijinih razpoloviščih D in E pravokotnici DF in EG na nji, morata se te dve v jedni točki O sekati. Ako potegnemo dalje OA , OB in OC , je (§. 59, 1) $OA = OB$ in $OB = OC$, tedaj tudi $OA = OB = OC$. Točke A , B , C imajo torej od O enak razstoj, in ako napišemo iz O s polumerom OA krog, mora ta iti skoz točke A , B , C .

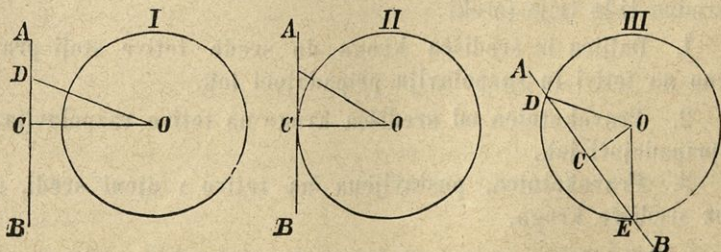
Ker se moreta pa pravokotnici DF in EG le v jedni točki sekati, načrtati moremo tudi le **jeden** krog, kateri gre skoz točke A , B , C .

Koliko krogov moreš načrtati skoz dve dani točki? (Geometrijsko mesto središč?)

2. Krog in prema.

§. 97. Prema kroga *a)* ne zadene, ali *b)* se ga dotika v jedni točki, ali *c)* ga seče v dveh točkah, ako je njen razstoj od središča kroga večji ali enak ali manjši od polumera.

Lik 108.



Dokaz.

- Ako je (lik 108, I) pravokotnica OC od središča na premo AB večja od polumera, leži že podnožišče C pravokotnice zunaj kroga, torej tem bolj vsaka druga točka D preme AB , ker je hipotenuza OD večja od kateta OC .
- Ako je (lik 108, II) pravokotnica OC od O na AB jednaka polumeru, leži njeno podnožišče C v obodu kroga; vsaka druga točka D preme AB pa mora, ker je $OD > OC$, zunaj kroga ležati.

- c) Ako je (lik 108, III) pravokotnica OC od O na AB manjša od polmera, je njeno podnožišče znotraj kroga; razstoji vseh drugih točk preme AB na obeh straneh točke C pa rastejo od tod neprestano in postanejo na obeh straneh **jedenkrat** polmeru jednaki t. j. dotični točki D in E preme AB ležita v obodu kroga. Razstoji vseh drugih točk so pa ali večji ali manjši od polmera; razun toček D in E ne leži torej nobedna v krožnici.

§. 98. Premo, katera se dotika kroga le v jedni točki tako, da ležé vse druge njene točke zunaj te krive črte, imenujemo **dotikalnico** (tangento); točko, katero imata tangenta in krožnica skupno, pa **dotikalnišče**.

Premo, katera seče krog v dveh točkah, imenujemo **sečnico** (sekanto), daljico med presečiščema pa tetivo in na tetivo pravokotno daljico od srede tetive do loka **višino loka**. Ploskev, katera je omejena od tetive in loka, imenujemo **krogov odsek** (segment), in oni del krožnine, katerega omejevata dva polmera in lok med njima, **krogov izsek** (sektor). — Vsaka tetiva razdeli krog v dva odseka, imenujemo ja **nasprotna**.

Izreki o tetivah kroga.

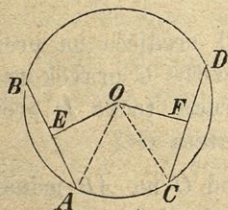
§. 99. Iz izrekov 1., 2. in 4. v §. 59 in iz §. 15. sledé neposredno ti-le trije izreki:

1. Daljica iz središča kroga do srede tetive stoji pravokotno na tetivi in razpolavlja pripadajoči lok.

2. Pravokotnica od središča kroga na tetivo razpolavlja to in pripadajoči lok.

3. Pravokotnica, postavljena na tetivo v njeni sredi, gre skoz središče kroga.

Lik 109



§. 100. V istem krogu imata dve jednaki tetivi jednak razstoj od središča.

Pogoj. $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ (lik 109).

Trditev. $OE = OF$.

Dokaz. Ako potegnemo OA in OC je $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ (§. 52),* tedaj $OE = OF$.

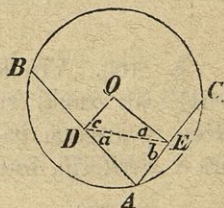
2. Dve tetivi kroga sta jednaki, ako imata enak razstoj od središča.

Recimo, da je (lik 109) $OE = OF$. Potem pa je $\triangle AEO \cong \triangle CFO$, tedaj $AE = CF$ in $AB = CD$.

3. Iz med dveh nejednakih tetiv ima večja manjši razstoj od središča.

Po 1. smemo vzeti dve tetivi, kateri imata jedno krajišče skupno. Vzemimo, da je (lik 110) $AB > AC$, $OD \perp AB$ in $OE \perp AC$. Ako potegnemo DE , je v $\triangle ADE$ $\sphericalangle b > \sphericalangle a$ (§. 35, 2), tedaj $\sphericalangle d < \sphericalangle c$ in zato tudi $OD < OE$.

Lik 110.



4. Izmed dveh nejednakih tetiv ima večja manjši razstoj od središča.

Recimo, da je (lik 110) $OD < OE$. Ako bi bila $AB \cong AC$, morala bi biti oziroma po 1. ali 3. $OD \cong OE$, kar pa je proti pogoju.

Izvod. Premer je naj večja tetiva kroga. On deli periferijo kroga v dva jednaka dela.

Izreki o tangentialah kroga.

§. 101. 1. Pravokotnica na polumer v njegovem krajišči je tangenta kroga (§. 97, 2).

2. Polumer do dotikališča stoji pravokotno na tangenti.

3. Pravokotnica na tangento v dotikališči gre skoz središče kroga.

4. Pravokotnica od središča na tangento gre skoz dotikališče.

Dokazi za obrate 2., 3. in 4. so indirektni.

Izvod. Skoz jedno točko krožnice moremo na to le jedno tangento potegniti.

§. 102. Tangenti, kateri potegnemo od zunaj kroga ležeče točke nanj, sta jednaki.

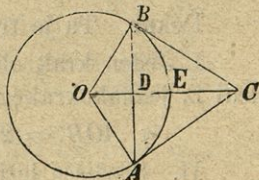
Pogoj. $AC \perp OA$, $BC \perp OB$.

Trditev. $AC = BC$.

Dokaz. Ako zvežemo točko C s središčem z daljico CO, potem je $\triangle AOC \cong \triangle BOC$, tedaj $AC = BC$.

Tetivo AB, katera veže dotikališči kroga in tangent AC in BC, imenujemo dotikalno tetivo z ozirom na točko C.

Lik 111.

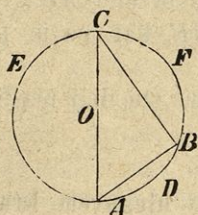


Izvod. Prema, katera veže presečišče dveh tangent s središčem kroga, razpolavlja *a)* kot med tangentama, pa tudi kot, katerega polmera oklepata, *b)* lok in dotikalno tetivo, in stoji *c)* na tej tetivi pravokotno.

3. Krog in kot.

§. 103. Vrh kota leži oziraje se na krog ali v njegovem središču ali zunaj središča; v prvem slučaju imenujemo ga **središčen**, v drugem pa **izsrediščen kot**. Ako leži vrh izsrediščnega kota v periferiji, imenujemo ga **kot v obodu** ali **oboden kot**.

Lik 112.

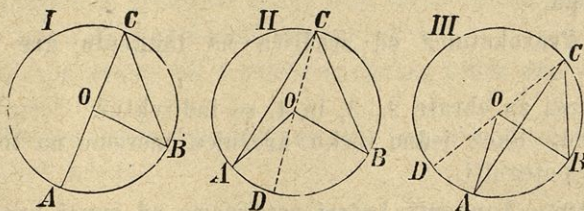


Pravimo, da stoji obodni kot ABC na loku ADB (tetivi AB), kateri je med krajiščema njegovih krakov, in da je obodni kot ACB v odseku $AECFB$, v katerem so njegov vrh in njegova kraka.

Oboden kot, čegar kraka gresta skoz krajišči premera, imenujemo kot v polukrogu, kakor ABC .

§. 104. Oboden kot je jednak polovici središčnega kota na istem loku.

Lik 113



Pogoj. Kota ACB in AOB stojita na istem loku AB .

Trditev. $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$.

Dokaz. Tu je treba razločevati tri slučaje:

I. Jeden krak obodnega kota je premer (lik 113, I). Potem sledi iz enakokrakega $\triangle BOC$ (§. 35, I, izv. b)

$$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB \text{ ali } \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

II. Središče leži med krakoma obodnega kota (lik 113, II). Ako potegnemo premer CD , je

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle AOD,$$

$$\sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD, \text{ tedaj}$$

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = \frac{1}{2} (\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOD) \text{ ali}$$

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

III. Središče leži zunaj krakov obodnega kota (lik 113, III).

Ako potegnemo premer CD , je

$$\sphericalangle BCD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD,$$

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle AOD, \text{ torej}$$

$$\sphericalangle BCD - \sphericalangle ACD = \frac{1}{2} (\sphericalangle BOD - \sphericalangle AOD), \text{ ali}$$

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

Izvodi.

a) Obodni koti na istem loku in v istem krogu so jednaki.

Kajti vsak je jednak polovici središčnega kota na istem loku.

b) Jednaki obodni koti stojé v istem krogu na enakih lokih (obrat od a).

c) Kot v polukrogu je prav.

Kajti središčni kot na istem loku je iztegnen. (Sledi tudi iz §. 37).

d) Obodni koti na lokih, kateri so manjši (večji) od polukroga so ostri (topi).

e) Dva obodna kota na isti tetivi pa v nasprotnih odsekih kroga znašata $2R$.

Kajti vsota pripadajočih središčnih kotov znaša $4R$.

§. 105. Kot med tangento in tetivo, potegneno skoz dotikališče, je enak obodnemu kotu na tej tetivi v nasprotnem odseku kroga.

Pogoj. $BC \perp AOE$ (lik 114).

Trditev.

$$a) \sphericalangle BAD = \sphericalangle AED,$$

$$b) \sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD.$$

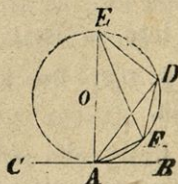
Dokaz.

a) $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle BAD = R$, in v pravokotnem $\triangle ADE$ tudi

$\sphericalangle EAD + \sphericalangle AED = R$, torej

$\sphericalangle EAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle EAD + \sphericalangle AED$ ter tudi $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AED$.

Lik 114.

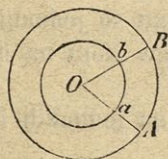


- b) $\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = 2R$ in $\sphericalangle AFD + \sphericalangle AED = 2R$
 (§. 104, e), torej je $\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle AFD$
 $+ \sphericalangle AED$ ter tudi $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD$.

4. Dva kroga.

§. 106. Dva kroga, katera imata skupno središče, imenujemo **sosredna** (koncentrična) kakor kroga v liku 115. Ploskev med dvema koncentričnima krožnicama imenujemo **kolobar** in njegov del med polumeroma in lokoma **kolobarjev izsek** kakor $AaBb$. Razloček polumerov kakor Aa imenujemo **širino kolobarja** ali kolobarjevega izseka.

Lik 115.



Dva loka ali izseka kroga za jednaka središčna kota imenujemo **istoležna**; n. pr. loka AB in ab , ali izseka AOB in aOb .

§. 107. Dva kroga, katera imata različni središči, imenujemo **izsredna** (ekscentrična) in daljico med središčema dveh ekscentričnih krogov **središnico** (centralo).

Dva ekscentrična kroga ležita ali popolnoma jeden zunaj drugega, ali popolnoma jeden znotraj drugega, ali vsak deloma znotraj deloma zunaj drugega.

Ako jeden krogov, kateri leži popolnoma zunaj (znotraj) drugega, zadene drugega, se ga na tem mestu dotika zunaj (znotraj).

Ako vsak izmed obeh krogov le deloma zunaj in znotraj drugega leži, se krožnici sečeta. Skupno ploskev krogov imenujemo **lečo**, in ostala dela **meseca**.

§. 108. Dve krožnici se sečeta v dveh in sicer le v dveh točkah.

Kajti, ako seče jedna krožnica drugo v jedni točki, preide prva v znotranje od druge; in ker sta obe skleneni črti, mora prva zopet na drugem mestu iz druge preiti v vnanje t. j. drugo sekati v drugi točki. Krožnici se pa ne moreta sekati v treh točkah, ker potem bi se popolnoma krili (§. 96).

§. 109. 1. Dve krožnici se sečeta v dveh točkah, ako je centrala manjša od vsote in večja od difference polumerov.

Vzemimo, da sta OB in $O'B$ (lik 116) polumera krožnic, kateri se sečeta.

Ker je $OB + O'B > OO'$ in $OB - O'B < OO'$, moremo nad OO' načrtati dva trikotnika s polumeroma krožnic tako, da je $OB = OB'$ in $O'B = O'B'$, torej sta B in B' skupni točki krožnic, t. j. krožnici se sečeta v teh dveh točkah.

2. Dve krožnici se dotikata v jedni točki a) od zunaj, b) od znotraj, ako je centrala jednaka a) vsoti, b) diferenci polumerov.

a) Ker je $OO' = r + r'$ (lik 117), se mora polumer druge krožnice, kateri leži v meri centrale, tam začeti, kjer se konča polumer prve krožnice; A je torej skupna točka krožnic. Vsaka druga točka D krožnice O' , leži pa zunaj krožnice O ; kajti $OD > OO' - O'D$ ali $OD > OA$.

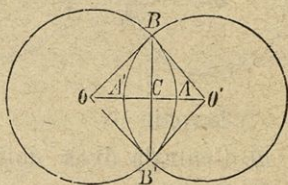
b) Po pogoji je $OO' = r - r'$ (lik 118). Ako je potem $OA = r$, je $OO' = OA - r'$, tedaj $OA - OO' = O'A = r'$; točka A leži torej v obeh krožnicah.

Ta je pa tudi jedina skupna točka; kajti $OD < OO' + O'D$ ali $OD < OA$ t. j. vsaka druga točka krožnice O' leži znotraj kroga O .

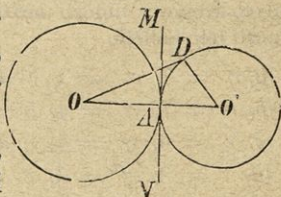
3. Dve krožnici nimata nobedne točke skupne in ležita a) jedna popolnoma zunaj druge, b) jedna popolnoma znotraj druge, ako je centrala a) večja od vsote b) manjša od difference polumerov.

a) Polumera obeh krogov O in O' (lik 119), ležeča v meri centrale, se začenjata jeden pri jednem drugi pri drugem krajišči centrale; in ker je centrala večja od vsote polumerov, se polumera ne dosežeta in točki A in A' sta za

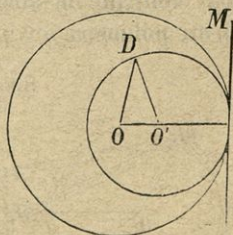
Lik 116.



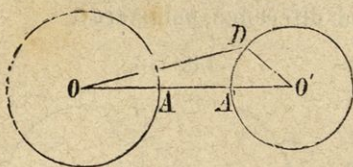
Lik 117.



Lik 118.



Lik 119.



daljico AA' narazen. Točka A' leži torej zunaj krožnice O . Leži pa tudi vsaka druga točka D krožnice O' zunaj kroga O , kajti $OD > OO' - O'D$ ali $OD > OA'$.

b) Dokaži takisto.

Izvodi.

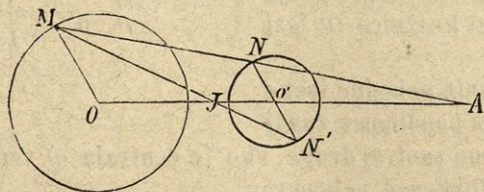
- Centrala dveh dotikajočih se krogov gre skoz dotikališče.
- Tangenta jednega kroga v skupnem dotikališču je tudi tangenta drugega kroga.
- Centrala dveh sekajočih se krogov stoji na skupni tetivi pravokotno, razpolavlja to tetivo in pripadajoča središčna kota.

Vzemimo, da sta r in r' dolžini polumerov in c dolžina centrale dveh krogov; določi medsebojno lego teh dveh krogov za sledeče vrednosti teh količin.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $r = 5, r' = 3, c = 8$; | f) $r = 6, r' = 6, c = 8$; |
| b) $r = 7, r' = 4, c = 2$; | g) $r = 10, r' = 3, c = 7$; |
| c) $r = 6, r' = 4, c = 10$; | h) $r = 5, r' = 5, c = 10$; |
| d) $r = 8, r' = 3, c = 6$; | i) $r = 12, r' = 7, c = 9$; |
| e) $r = 9, r' = 5, c = 4$; | k) $r = 9, r' = 2, c = 5$. |

§. 110. Trakovi, katere potegnemo v dveh krogih skoz krajišči po dveh vzporednih polumerov, se sečejo vsi v jedni sami točki centrale in sicer a) v njenem podaljšku, b) med središčema, ako sta polumera a) v istem smislu, b) v nasprotnem smislu vzporedna.

Lik 120.



Recimo, da je (lik 120) $OM \parallel O'N$ in $OM \parallel O'A$, potem je $\triangle OMA \sim \triangle O'NA$, torej $OA : O'A = OM : O'N$, $(OA - O'A) : OA = (OM - O'N) : OM$ ali

$$OO' : OA = (OM - O'N) : OM.$$

Ako so c, r, r' merska števila centrale in polumerov, se izpremeni zgornja proporcija v sledečo:

$c : OA = (r - r') : r$, iz česar sledi

$$OA = \frac{c r}{r - r'}.$$

Ker so c , r , r' nepremenljive, torej od lege polumerov ne zavisne količine, je tudi OA nepremenjiva t. j. vsi trakovi, katere potegnemo skoz krajišči raznih parov v istem smislu vzporednih polumerov, sečejo podaljšek centrale v isti točki A .

Dokaži takisto iz podobnosti trikotnikov OJM in $O'JN$, da je $OJ = \frac{c r}{r + r'}$ nepremenjiva količina.

Točko A imenujemo **vnanje** in točko J **notranje podobnišče** obeh krogov. Vsak trak, katerega potegnemo skoz podobnišče, imenujemo **podobnico** in sicer z ozirom na podobnišče, skoz katero gre, **vnanjo** ali **notranjo podobnico**.

Kroga sta pa **podobno ležeča** z ozirom na podobnišče.

Izvod. Ako sta polumera obeh krogov jednaka, je vnanje podobnišče brezkončno oddaljeno.

Kajti za $r = r'$ je $OA = \frac{c r}{0}$ t. j. brezkončno velika.

Načrtaj krog O' , kateri ima z danim krogom O dano podobnišče A . Koliko takih krogov moreš načrtati?

§. 111. Ako ima podobnica dveh krožnic z jedno skupno točko, jo ima tudi z drugo.

Recimo, da je AM (lik 120) podobnica, katera se kroga O dotika v M . Ako potegnemo polumer OM in polumer $O'N \parallel OM$, potem mora podaljšana daljica MN iti skoz podobnišče A t. j. MNA in podobnica AM sta ista prema ali AM ima s krogom O' točko N skupno. — Takisto izvršiš dokaz za notranjo podobnico JM .

Izvod. Ako ima podobnica dveh krogov z jednim dve točki skupni, ali jedno samo, ali nobedne, velja isto za drugi krog.

Podobnica kakor sekanta ali tangenta jednega kroga je torej tudi sekanta ali tangenta drugega kroga.

Ako gre skupna tangenta skoz vnanje ali notranje podobnišče, jo imenujemo **vnanjo** ali **notranjo**.

5. Krog in mnogokotnik.

§. 112. Mnogokotnik, kateri ima tetive (tangente) za stranice, imenujemo krog **vpisan** (opisan) mnogokotnik, ali tetiven (tangenten) mnogokotnik; krog pa je mnogokotniku **opisan** (vpisan).

§. 113. Vsakemu trikotniku moremo a) krog opisati, b) krog vpisati.

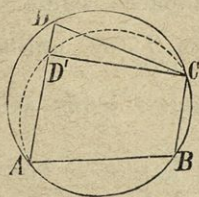
Sledi iz §. 61, 1 in 2, ker je prva znamenita točka jednako oddaljena od vseh oglišč, druga znamenita točka pa jednako oddaljena od vseh stranic trikotnika.

Dostavek. Trikotniku vpisan krog imenujemo **notranji dotikajoči krog**. Ako razpolovimo v trikotniku dva vnanja kota in skupni nasprotni kot, sečejo se polovnice v jedni točki, katera je tudi od vseh treh stranic jednako oddaljena. Na ta način dobimo tri druge dotikajoče kroge, katere imenujemo **vnanje dotikajoče kroge**.

§. 114. 1. V vsakem tetivnem četverokotniku sta vsoti nasprotnih kotov jednaki, in sicer je vsaka vsota jednaka dvema pravima. Sledi iz §. 104, e.

2. Obratno. Četverokotnik, v katerem znaša vsota nasprotnih dveh kotov dva prava, je tetiven četverokotnik.

Lik 121.



Indirekten dokaz. Skoz tri točke A, B, C (lik 121) moremo zmerom napisati krog (§. 96). Ako bi ta ne šel skoz četrto D , bi sekal tetivo AD ali pa njen podaljšek v točki D' , in potem bi bila, ako potegnemo daljico $D'C$,

$$\sphericalangle B + \sphericalangle AD'C = 2R \text{ (po 1.)};$$

po pogoji je pa tudi $\sphericalangle B + \sphericalangle ADC = 2R$, torej bi bil

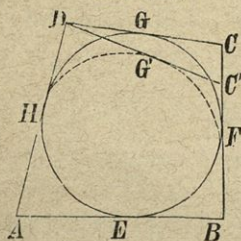
$$\sphericalangle AD'C = \sphericalangle ADC,$$

kar je pa nemogoče (§. 33, izv).

Izvod. Vsakemu kvadratu in pravokotniku moremo opisati krog.

§. 115. 1. V vsakem tangentnem četverokotniku sta vsoti iz nasprotnih dveh stranic jednaki (lik 122).

Lik 122.



Ker je po §. 102

$$AE = AH,$$

$$BE = BF,$$

$$CG = CF,$$

$$DG = DH, \text{ je tudi}$$

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH \text{ ali}$$

$$AB + CD = AD + BC.$$

2. Obratno. Četverokotnik, v katerem sta vsoti nasprotnih dveh stranic jednaki, je tangenten mnogokotnik.

Recimo, da je (lik 122) $AB + CD = BC + AD$.

Indirekten dokaz. Ako bi se krog, kateri se dotika stranic AB , BC in AD v točkah E , F , H , ne dotikal tudi stranice DC , potem bi se dotikal druge preme, katera gre skozi točko D , n. pr. DC' . Potem pa je po 1.

$$AB + DC' = AD + BC',$$

in po pogoji $AB + DC = AD + BC$, tedaj

$$DC - DC' = BC - BC' = CC', \text{ kar je pa nemogoče (§. 38, 2).}$$

Izvod. Vsakemu kvadratu in rombu moremo vpisati krog.

§. 116. 1. Vsakemu pravilnemu mnogokotniku moremo krog vpisati in opisati.

Sledi iz §. 66.

Dostavek. Središče pravičnega mnogokotnika je tudi središče opisanega in vpisanega kroga.

2. Ako razdelimo periferijo kroga v več enakih delov, tvorijo *a*) tetive med po dvema sosednjima razdeliščema pravilen vpisan in *b*) tangente v razdeliščih pravičen opisan mnogokotnik.

Pogoj. $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \dots$

Lik 123.

(lik 123).

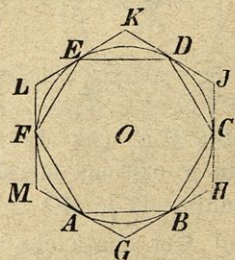
Trditev. $ABCD \dots$ in $GHJK \dots$ sta pravilna mnogokotnika.

Dokaz.

a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \dots$ (§. 15) in
 $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD \dots$
 (§. 104, izv. *a*), torej je $ABCD \dots$
 pravičen mnogokotnik.

b) $\triangle AGB$, $\triangle BHC$, $\triangle CJD$ i. t. d. so enakokraki (§. 102). Ker pa imajo osnovnice AB , BC , CD i. t. d. jednake in tudi kote na teh ležeče (§. 105), so tudi skladni. Potem je pa $\sphericalangle G = \sphericalangle H = \sphericalangle J = \sphericalangle K = \dots$ in $GB = BH = HC = CJ \dots$ ali $GH = HJ = JK = \dots$, torej mnogokotnik $GHJK \dots$ pravičen.

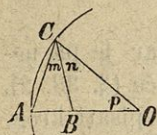
§. 117. Stranica krogu vpisanega pravičnega šesterokotnika je jednaka polumeru kroga.



Dokaz. Z daljicami od središča do oglišč šesterokotnika razdelimo tega v skladne enakokrake trikotnike (§. 66. izv.), kateri so pa tudi enakostranični, ker kot pri vrhu 60° znaša. Polumer in stranica mnogokotnika sta torej jednaka.

§. 118. Stranica krogu vpisanega pravilnega deseterokotnika je jednaka daljšemu odseku polumera, razdeljenega v notranjem in vnanjem razmerji.

Lik 124.



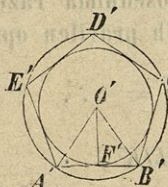
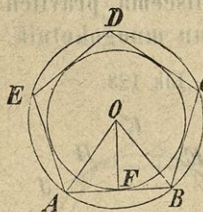
Dokaz. Ako je AC (lik 124) stranica pravilnega deseterokotnika, je $\sphericalangle AOC = 36^\circ$, $\sphericalangle A = \sphericalangle ACO = 72^\circ$, in ako stvorimo $\sphericalangle m = \sphericalangle n = \sphericalangle p$, potem sta $\triangle ABC$ in $\triangle BCO$ enakokraka in $AC = BC = BO$. Nadalje je $\triangle ABC \sim \triangle ACO$ (§. 81, 1), torej tudi

$$AO : AC = AC : AB \text{ ali}$$

$$AO : BO = BO : AB, \text{ iz česar sledi,}$$

da je AC jednaka daljšemu odseku polumera, kateri je razdeljen v vnanjem in notranjem razmerji.

Lik 125.



§. 119. V pravilnih mnogokotnikih z istim številom stranic sta si a) obsega kakor polumera tema mnogokotnikoma vpisanih ali opisanih krogov in b) ploščini kakor kvadrata onih polumerov.

Recimo, da sta $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ (lik 125) pravilna mnogokotnika, s in s' , o in o' , p in p' oziroma merski števili stranic, obsegov, ploščin. Recimo nadalje, da je $AO = R$, $A'O' = R'$, $OF = r$, $O'F' = r'$.

a) Ker imata oba pravilna mnogokotnika isto število stranic, sta podobna (§. 88, izv.); tedaj po §. 90 $o : o' = s : s'$.

Iz podobnosti trikotnikov ABO in $A'B'O'$ pa sledi

$$\begin{aligned} AB : A'B' &= OF : O'F' \quad (\S. 92) \text{ ali } s : s' = r : r' \\ &= OA : O'A' &= R : R'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tedaj tudi } o : o' &= r : r' \\ &= R : R'. \end{aligned}$$

b) Po §. 99 je $p : p' = s^2 : s'^2$

$$\text{toda } s^2 : s'^2 = r^2 : r'^2$$

$$= R^2 : R'^2;$$

$$\begin{aligned} \text{tedaj tudi } p : p' &= r^2 : r'^2 \\ &= R^2 : R'^2. \end{aligned}$$

§. 120. Izračunaj iz polumera kroga in iz stranice njemu vpisanega pravilnega mnogokotnika stranico istemu krogu opisanega pravilnega mnogokotnika z istim številom stranic.

Vzemimo, da je (lik 126) $OA = r$ polumer kroga in $AB = s_n$ stranica vpisanega n tero kotnika. Ako potegnemo $OF \perp AB$ in $CD \perp OF$, je $CD = S_n$ stranica opisanega pravilnega mnogokotnika.

Iz $\triangle CDO \sim \triangle ABO$ sledi.

$$CD : AB = OF : OE, \text{ ali}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ tedaj } S_n = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

N. pr. V pravilnem vpisanem šesterokotniku je za $r = 1$ tudi $s_6 = 1$.

Za pravilen opisan šesterokotnik je potem

$$S_6 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547005.$$

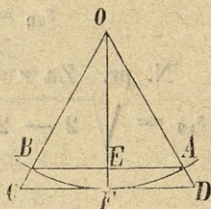
§. 121. Izračunaj iz polumera kroga in iz stranice njemu vpisanega pravilnega mnogokotnika stranico istemu krogu vpisanega pravilnega mnogokotnika z dvakrat tolikim številom stranic.

Vzemimo, da je (lik 127) $OA = r$ in $AB = s_n$. Ako potegnemo $OE \perp AB$, je tetiva $AE = s_{2n}$ stranica vpisanega pravilnega $2n$ tero kotnika. Iz pravokotnega trikotnika AEF sledi

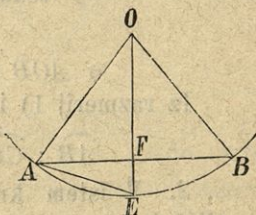
$$\overline{AE^2} = \overline{AF^2} + \overline{EF^2}; \text{ toda}$$

$$\begin{aligned} \overline{AF^2} &= \frac{s_n^2}{4} \text{ in } \overline{EF^2} = (OE - OF)^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \right)^2 \\ &= r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2 - \frac{s_n^2}{4} \end{aligned}$$

Lik 126.



Lik 127.



$$\begin{aligned}
&= 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ tedaj} \\
\overline{AE^2} &= \frac{s_n^2}{4} + 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ in} \\
s_{2n}^2 &= 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \text{ ali} \\
s_{2n} &= \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.
\end{aligned}$$

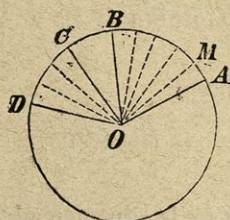
N. pr. Za $r = 1$ je $s_6 = 1$; tedaj

$$s_{12} = \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.51763818.$$

6. Sorazmerja pri krogu.

§. 122. 1. V istem krogu so loki sorazmerni s pripadajočimi središčnimi koti.

Lik 128.



Vzemimo da je (lik 128) AM skupna mera lokov AB in CD in sicer

$$\begin{aligned}
\widehat{AB} &= m \cdot \widehat{AM}, \\
\widehat{CD} &= n \cdot \widehat{AM}, \text{ tedaj}
\end{aligned}$$

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = m : n \dots 1).$$

Potegnimo dalje k vsakemu razdelišču teh dveh lokov polumer; na ta način razdelimo središčni kot AOB na m in COD na n kotu AOM enakih delov (§. 15);

$$\begin{aligned}
\text{tedaj } \sphericalangle AOB &= m \cdot \sphericalangle AOM, \\
\sphericalangle COD &= n \cdot \sphericalangle AOM, \text{ in}
\end{aligned}$$

$$\sphericalangle AOB : \sphericalangle COD = m : n \dots 2).$$

Iz razmerij 1) in 2) pa sledi:

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = \sphericalangle AOB : \sphericalangle COD.$$

2. V istem krogu so izseki sorazmerni s pripadajočimi središčnimi koti.

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Izvoda.

- a) Razmerje loka in celega oboda je jednako razmerju loku pripadajočega središčnega kota in 360° .

b) Razmerje izseka in cele krožnine je jednako razmerju pripadajočega središčnega kota in 360° .

§. 123. Istoležni loki so sorazmerni z obodi in istoležni izseki sorazmerni s krožninami pripadajočih krogov (lik 115).

Ako sta O in o oboda, P in p ploščini, R in r polumera dveh krogov, dalje L in l dva loka, pripadajoča istemu središčnemu kotu α , potem je po §. 122, izv. a).

$$L : O = \alpha^\circ : 360^\circ, \text{ in}$$

$$l : o = \alpha^\circ : 360^\circ, \text{ tedaj}$$

$$L : O = l : o, \text{ ali}$$

$$L : l = O : o.$$

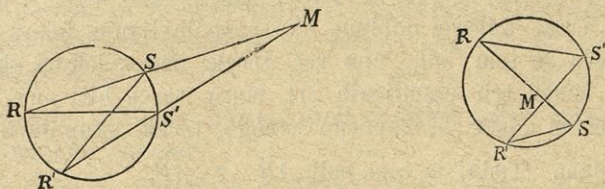
Takisto dobimo po §. 122, izv. b) sorazmerje
izsek AOB : izsek $aOb = P : p$.

§. 124. Ako zvežemo točko polukrožnice in krajišči premera s tetivama in postavimo pravokotnico na tega, je a) vsaka tetiva srednja geometrijska sorazmernica med celim premerom in oni kateti priležnim odsekom premera, b) pravokotnica je srednja geometrijska sorazmernica med obema odsekoma premera.

Sledi iz §. 109, izv. c) v zvezi s §. 93.

§. 125. Ako potegnemo iz katerekoli točke M premo, katera seče krožnico v točkah R in S , je produkt $MR \cdot MS$ nepremeljiva količina za vsako poljubno premo, katero potegnemo skoz točko M .

Lik 129.



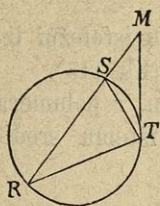
Dokaz Ker je (lik 129) $\triangle MSR' \sim \triangle MS'R$ (§. 88, 1), se ima $MS : MR' = MS' : MR$, torej je $MS \cdot MR = MS' \cdot MR' =$ neprem. količina. Ta nepremeljav produkt imenujemo **potenco** točke M za dani krog.

Ako gre prema $MS'R'$ skoz središče O , je izraz

$$(MO + r) \cdot (MO - r) = \overline{MO}^2 - r^2$$

potenca točke M , kjer je r polumer kroga in MO razdalja točke M od središča.

Lik 130.



Izvoda. 1. Ako leži točka M zunaj kroga, je njena potenca jednaka kvadratu tangente MT (lik 130), potegnene iz točke na krog. — Kajti za tangento je $MR' = MS' = MT$ in $MS \cdot MR = \overline{MT}^2$.

2. Tangenta, potegnena od točke M , je srednja geometrijska proporcijonala med celo sekanto MR in njenim vnanjim odsekom MS .

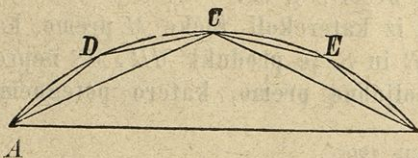
Dokaži izv. 2. iz podobnosti trikotnikov MRT in MST oziraje se na §. 105.

Kolika je potenca točke M , ako je a) $MO = 8^{\text{cm}}$, $r = 5^{\text{cm}}$; b) $MO = 5^{\text{cm}}$, $r = 5^{\text{cm}}$; c) $MO = 3^{\text{cm}}$, $r = 5^{\text{cm}}$; d) $MO = 0$, $r = 5^{\text{cm}}$?

7. Krogomerstvo.

§. 126. 1. Vsaka tetiva kroga je manjša od loka med njema krajiščema.

Lik 131.



Vzemimo, da je

$$(\text{lik 131}) \quad \widehat{AC} = \widehat{CB},$$

$$\widehat{AD} = \widehat{DC}, \quad \widehat{CE} = \widehat{EB},$$

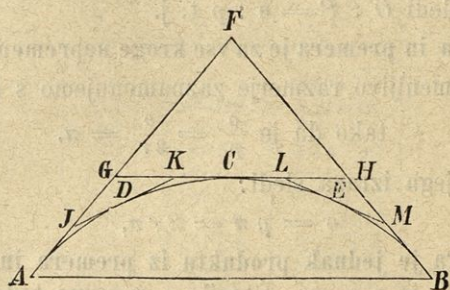
i. t. d.

Potem je po §. 38, 1 $AB < AC + BC < AD + DC + CE + EB < \text{i. t. d.}$, t. j. ulomljena črta, katero dobimo, ako razpolavljanje lokov ponavljamo, večja se tem bolj, čim več toček ima z lokom skupnih; najdaljša izmed teh ulomljenih črt mora torej biti ona, katera ima največ in sicer brezkončno mnogo toček skupnih z lokom t. j. lok sam. Tedaj je tem bolj $\overline{AB} < \widehat{AB}$.

2. Vsota tangent, potegnenih od točke na krog, je večja od loka med dotikališčema.

Recimo, da sta (lik 132) AF' in BF' iz F na krog potegnjeni tangenti, ACB pa lok, ki ga omejevata dotikališči, in C njegova središča. Ako potegnemo skoz C tangento GH na lok, potem je zaradi $GF + FH > GH$ tudi $AF + BF > AG + GH + HB$. Ako sta dalje JK in LM skoz sredi D in E lokov AC in BC potegnjeni tangenti, je ulomljena črta $AGHB > \text{od}$

Lik 132.



ulomljene črte $AJKLMB$ in tem bolj $AF + BF > AJKLMB$ t. j. ulomljena črta manjša se tem bolj, čim več točkek ima z lokom skupnih.

Najkrajša izmed teh ulomljenih črt mora torej biti ona, katera ima največ in sicer brezkončno mnogo točkek skupnih z lokom t. j. lok sam. Tedaj je tem bolj $AF + BF > \widehat{ACB}$.

Izvoda.

- Obseg vsakega krogu vpisanega (opisanega) pravilnega mnogokotnika je manjši (večji) nego obod kroga.
- Obsegi vpisanih in opisanih pravilnih mnogokotnikov dadó se obodu kroga poljubno približati, ako podvojujemo število njih stranic t. j. krog moremo smatrati za mejo, kateri se bliža obseg vpisanega (opisanega) pravilnega mnogokotnika, ako podvojujemo število njegovih stranic. V tem smislu moremo reči:

Krog je pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo brezkončno majhnih stranic.

Vsi izreki o pravilnih mnogokotnikih, katere smo dokazali brez ozira na število njihovih stranic, veljajo tudi za krog.

§. 127. Oboda dveh krogov sta sorazmerna z njijinima polumeroma ali premeroma.

Sledi iz §. 126, izv. b) in §. 119, a).

Izvodi.

- Ako so O in o , R in r , P in p oziroma merska števila obodov, polumerov in premerov v dveh krogih, je

$$O : o = R : r = P : p.$$

Iz tega sledi $O : P = o : p$ t. j.

razmerje oboda in premera je za vse kroge nepremeljiva količina.

To nepremeljivo razmerje zaznamenujemo s številom π ,

$$\text{tako da je } \frac{o}{p} = \frac{O}{2r} = \pi.$$

b) Iz prejšnjega izraza sledi:

$$o = p\pi = 2r\pi,$$

t. j. obod kroga je enak produktu iz premera in števila π .

c) Za $p = 1$, je $o = \pi$. Število π moremo tedaj smatrati za obod kroga, čegar premer je 1.

d) Ako je l dolžina loka, pripadajočega k središčnemu kotu α potem je po §. 122, izv. a)

$$l : 2r\pi = \alpha : 360;$$

tedaj

$$l = \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

§. 128. Določba števila π .

Da izračunamo število π , t. j. obod kroga, čegar premer je 1, treba da začnemo s pravilnim temu krogu vpisanim šestorokotnikom, čegar stranica je $s_6 = r = \frac{1}{2}$; iz te izračunamo po §. 121 stranico vpisanega pravilnega dvanajsterokotnika s_{12} , iz te zopet na isti način stranico 24terokotnika s_{24} i. t. d. Ako množimo posamezne stranice z dotičnimi števili, dobimo obsege $o_6, o_{12}, o_{24}, \dots$ mnogokotnikov, torej vrsto števil, od katerih je vsako manjše nego iskani obod, pa vsako sledeče bliže od prejšnjega. Potem izračunamo iz stranic $s_6, s_{12}, s_{24} \dots$ po §. 120 stranice $S_6, S_{12}, S_{24} \dots$ opisanih pravilnih mnogokotnikov oziroma z istim številom stranic, in iz teh obsege $O_6, O_{12}, O_{24} \dots$; na ta način dobimo drugo vrsto števil, od katerih je vsako večje nego iskani obod, toda vsako sledeče bliže kakor prejšnje.

Na ta način moremo število π zaporedoma med dve števili o_6 in O_6 , o_{12} in O_{12} i. t. d. spraviti ter poljubno natanko izračunati.

Resultate tega računa do 3072terokotnika navaja sledeča tablica:

n	o_n	O_n
6	3	3·464102
12	3·105829	3·215390
24	3·132629	3·159660
48	3·139350	3·146086
96	3·141032	3·142715
192	3·141452	3·141873
384	3·141558	3·141663
768	3·141584	3·141610
1536	3·141590	3·141597
3072	3·141592	3·141594

Obsega vpisanega in opisanega pravilnega 3072terokotnika razlikujeta se tedaj še le v šestem desetinskem mestu; ker je pa obod π med tema dvema obsegoma, mora skupni del zgoraj navedenih števil obod π biti; torej

$$\pi = 3\cdot14159.$$

Števila π ne moremo popolnoma natančno izračunati, vendar pa toliko natančno, kolikor le hočemo; ono je iracijonalno število. Na deset decimalk je

$$\pi = 3\cdot14159 \quad 26536.$$

Arhimed je izračunal za π vrednost $3\frac{1}{7}$, Metij $\frac{355}{113}$, Ludolf na 35 decimalk; po zadnjem imenujemo π Ludolfovo število.

§. 129. Ploščina kroga je jednaka produktu iz oboda in polovice polumera.

Sledi iz 126, izv. b) in §. 74.

Izvod.

a) Ako so r , o , p oziroma merska števila polumera, oboda in ploščine kroga, je

$$p = o \cdot \frac{r}{2}.$$

Ker je pa $o = 2 r \pi$, je tudi

$$p = r^2 \pi,$$

t. j. ploščina kroga je jednaka produktu iz kvadrata polumera in števila π .

b) Ako sta P in p ploščini, R in r pa polumera dveh krogov, je

$$P = R^2 \pi \text{ in } p = r^2 \pi, \text{ tedaj}$$

$$P : p = R^2 : r^2,$$

t. j. ploščini dveh krogov sta sorazmerni s kvadratom njihovih polumerov.

§. 130. Ploščina izseka kroga je jednaka dolžini loka množeni s polovico polumera.

Ako je p_i ploščina izseka, r polumer in α središčni kot, je

$$p_i : r^2 \pi = \alpha : 360 \text{ (§. 122, izv. b), tedaj } p_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} = \frac{r \pi \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2},$$

ali, ker je $\frac{r \pi \alpha}{180} = l$ dolžina loka, pripadajočega k središčnemu kotu α (§. 127, izv. d)

$$p_i = l \cdot \frac{r}{2}.$$

Dostavek. Ploščina krogovega odseka je jednaka, ako je odsek manjši (večji) od polukroga, diferenci (vsoti) iz pripadajočega izseka in trikotnika, omejenega od tetive in polumerov.

§. 131. 1. Ploščina kolobarja je jednaka polovici vsote obeh obodov množeni s širino kolobarja.

Ako zaznamenuje p_k ploščino kolobarja, R in O polumer in obod večjega, r in o pa polumer in obod manjšega obeh koncentričnih krogov, je

$$\begin{aligned} p_k &= R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi = (R + r)(R - r) \pi \\ &= \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r) = \frac{O + o}{2} \cdot (R - r). \end{aligned}$$

2. Ploščina kolobarjevega izseka je jednaka polovici vsote obeh lokov množeni s širino kolobarjevega izseka.

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Računske naloge.

1. V krogu je r polumer, b tetiva in d njena razdalja od središča; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$$\begin{aligned} a) \quad b &= 3.4^m, \quad b) \quad r = 1.56^m, \quad c) \quad r = 7^{\text{dm}} 2^{\text{cm}}, \\ d &= 2.5^m; \quad d = 0.84^m; \quad b = 4^{\text{dm}} 8^{\text{cm}}. \end{aligned}$$

2. V krogu ($r = 5^m 2^{\text{dm}}$) je premer razdeljen v razmerji 4 : 9; kolika je skoz razdelišče pravokotno na premer potegnena tetiva?

3. V krogu je $2r$ premer, b tetiva in v višina loka; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$$a) 2r = 36^{\text{dm}}, \quad b) b = 8^{\text{m}}, \\ v = 4^{\text{dm}}; \quad v = 2^{\text{m}}.$$

4. Dva jednaka kroga ($r = 6^{\text{cm}}$) se dotikata; kolika je a) tangenta iz središča jednega na obod drugega, b) dotikalna tetiva?

5. V krogu je r polumer, o obod, p ploščina; izračunaj iz jedne teh količin drugi dve.

$$a) r = 5 \cdot 2^{\text{m}}; \quad b) o = 1 \cdot 256^{\text{dm}}; \quad c) p = 349 \square^{\text{dm}}.$$

6. Premer zemeljskega ravnika je 12755^{Km} ; kolik je njegov obod, kolika jedna njegova stopnja? ($\pi = 3 \cdot 14159$).

7. Kolika je pot, katero preleti točka ravnikova vsled vrteuja zemlje okoli njene osi v jedni minuti?

8. Sprednje kolo pri vozu ima polumer $r = 40^{\text{cm}}$ in zadnje $R = 50^{\text{cm}}$; kolikokrat se zavrti sprednje kolo, ako se zavrti zadnje 1065krat?

9. Polumera dveh krogov sta 2^{dm} 4^{cm} in 3^{dm} 2^{cm} ; kolik je premer kroga, kateri je enak vsoti onih dveh krogov?

10. Oboda dveh krogov sta $27 \cdot 25^{\text{cm}}$ in $12 \cdot 78^{\text{cm}}$; kolik je obod kroga, čegar ploščina je jednaka diferenci onih dveh krogov?

11. Obod kroga je enak obsegu kvadrata, čegar stranica je 4^{cm} ; izračunaj razmerje njihovih ploščin.

12. Polumer kroga je 5^{dm} ; kolika je stranica ploskveno-jednakega jednakostraničnega trikotnika?

13. V krogu je r polumer, α središčen kot in l dolžina pripadajočega loka; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$$a) r = 8^{\text{dm}}, \quad b) r = 2^{\text{dm}} \quad 7^{\text{cm}}, \quad c) \alpha = 48^{\circ}, \\ \alpha = 135^{\circ}; \quad l = 2^{\text{dm}} \quad 28^{\text{mm}}; \quad l = 4^{\text{dm}} \quad 26^{\text{mm}}.$$

14. Ako je polumer kroga 1^{dm} , kolika je dolžina loka za a) 1° , b) $1'$ c) $1''$?

15. Dolžina loka je jednaka premeru; kolik je pripadajoči središčni kot?

16. Geografična širina Ljubljane je $46^{\circ} 3'$; koliko Km je od ravnika oddaljena, ako ima polumer meridijana $6371 \cdot 56^{\text{Km}}$?

17. V krogu je r polumer, α središčen kot, l dolžina pripadajočega loka in p ploščina pripadajočega izseka; izračunaj iz dveh količin drugi dve.

- a) $r = 2^m$, b) $\alpha = 35^\circ$, c) $\alpha = 75^\circ$, d) $l = 0.698^m$,
 $\alpha = 38^\circ$; $l = 2.61^m$; $p_i = 10 \square^{dm}$; $p_i = 0.349 \square^m$;
 e) $r = 4^{dm}$,
 $p_i = 20.096 \square^m$.

18. Kolika je ploščina odseka v krogu s polumerom $r = 8.5^{dm}$, ako ima središčen kot a) 60° , b) 120° ?

19. Polumera dveh koncentričnih krogov sta R in r , oboda O in o , širina kolobarja c in njegova ploščina p_k ; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

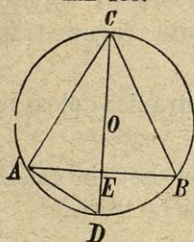
- a) $R = 6^{dm} 8^{cm}$, b) $R = 3.12^m$, c) $r = 0.75^m$, d) $O = 5^m 2^{dm}$,
 $r = 4^{dm} 5^{cm}$; $o = 11.56^m$; $p_k = 1.836 \square^m$; $c = 0.24^m$;
 e) $o = 7.134^{dm}$, f) $c = 2^m$,
 $p_k = 5.793 \square^{dm}$; $p_k = 150.792 \square^{dm}$.

20. Razdeli krog, čegar polumer je 6^{dm} dolg, s koncentričnim krogom na dva jednaka dela; kolika je širina kolobarja?

21. Kolika je ploščina kolobarjevega izseka, ako sta polumera lokov 5^{dm} in 4^{dm} , in središčen kot 48° ?

22. Izračunaj iz polumera kroga stranico vpisanega in opisanega jednakostraničnega trikotnika.

Lik 133.



Ako je (lik 133) $AB = s_3$ stranica jednakostraničnega trikotnika, $OC = r$ polumer kroga in premer $CD \perp AB$, je AD stranica vpisanega pravilnega šestekotnika in tedaj jednaka r .

V pravokotnem trikotniku CAD je potem

$$\overline{AC^2} = \overline{CD^2} - \overline{AD^2} \text{ ali } s_3^2 = 4r^2 - r^2, \text{ iz česar sledi}$$

$$s_3 = r \sqrt{3}.$$

Za opisani jednakostraničen trikotnik dobimo po §. 120

$$S_3 = \frac{r \cdot s_3}{\sqrt{r^2 - \frac{s_3^2}{4}}} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{\sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{4}}} = 2r \sqrt{3} = 2s_3.$$

23. Izračunaj iz polumera kroga stranici s_4 in S_4 vpisanega in opisanega kvadrata.

$$s_4 = r \sqrt{2}; S_4 = 2r.$$

24. V krogu je polumer 35^{cm} ; za koliko sta obod in ploščina tega kroga večja (manjša) od obsega in ploščine a) vpi-

sanega (opisanega) kvadrata, b) vpisanega (opisanega) šesterokotnika?

25. V krogu je polumer 1; izračunaj stranico in ploščino vpisanega pravilnega a) osmerokotnika, b) šestnajsterokotnika (§. 121).

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$p_8 = 2\sqrt{2}; \quad p_{16} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

26. Vsota ploščin krogu vpisanega jednakostraničnega trikotnika in kvadrata je 100dm^2 ; kolik je polumer?

27. Diferenca ploščin krogu opisanega in vpisanega kvadrata je 24dm^2 ; kolik je polumer?

28. Ako podaljšaš vrvico z drugo 1m dolgo, moreš obseči za 2m^2 večji krog; kolika je nepodaljšana vrvica?

Naloge za načrtovanje.

1. Poišči središče kroga ali loka.

Potegni dve nevzporedni tetivi in reši nalogo po §. 96.

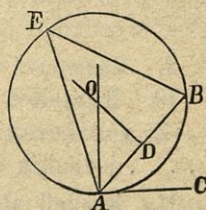
2. Potegni skoz točko znotraj kroga najkrajšo tetivo.

Potegni skoz dano točko polumer in na tega pravokotno tetivo; ta je zahtevana tetiva. Kajti vsaka druga tetiva, katero potegneš skoz dano točko, ima manjšo razdaljo od središča ter je daljša (§. 100, 4).

3. Dana je daljica; napiši nad njo kakor tetivo tak odsek kroga, da so vsi njegovi obodni koti jednaki danemu.

Vzemimo, da je (lik 134) BAC dani kot, AB dana daljica. Stvari $AD = DB$, $DO \perp AB$ in $AO \perp AC$, in napiši iz presečišča O pravokotnic s polumerom OA krog. Potem je AEB iskani odsek kroga, v katerem je obodni kot AEB enak danemu. (Zakaj?)

Lik 134.



4. Potegni skoz dano točko na obodu kroga tangento nanj.

Potegni polumer do dane točke in v krajišči postavi pravokotnico na njega.

5. Potegni skoz dano točko zunaj kroga dve tangenti nanj.

Analiza. Mislimo si nalogo rešeno ter CB in CA (lik 111) kakor iskani tangenti. Potem je $\sphericalangle OBC = R$, torej leži njegov vrh t. j. dotikališče B v obodu polukroga, napisanega nad OC ; B pa tudi leži v obodu danega kroga, torej v presečišči obeh. Isto velja o kotu OAC .

Načrtovanje. Zveži središče danega kroga in dano točko C z daljico OC , razpolovi to in napiši iz njene srede krog, kateri seče dani krog v točkah A in B ; premi CA in CB sta iskani tangenti.

Dokaz sledi iz analize.

6. Dan je krog s premerom NN' (lik 120); načrtaj krog, kateri leži podobno k danemu, ako je dano podobnišče A in $AN : AM = e$.

$$NN' = 50^{\text{mm}}, AN = 65^{\text{mm}}, AN' = 74^{\text{mm}}, e = \frac{3}{5}.$$

Za koliko mora biti točka C oddaljena, da sta tangenti vzporedni?

7. Poišči vnanje in notranje podobnišče dveh krogov s centralo c .

$$a) R = 30^{\text{mm}}, r = 15^{\text{mm}}, c = 60^{\text{mm}};$$

$$b) R = 25^{\text{mm}}, r = 10^{\text{mm}}, c = 35^{\text{mm}};$$

$$c) R = 35^{\text{mm}}, r = 10^{\text{mm}}, c = 30^{\text{mm}};$$

$$d) R = 40^{\text{mm}}, r = 18^{\text{mm}}, c = 12^{\text{mm}}.$$

8. Načrtaj k dvema krogoma (R in r) s centralo c skupne tangente.

$$R = 25^{\text{mm}}, r = 6^{\text{mm}}, c = 35^{\text{mm}}.$$

Potegni v obeh krogih dva v istem smislu vzporedna polumera in skoz njijini krajišči premo; ta seče centralo v vnanjem podobnišči krogov. Potem podaljšaj polumer jednega kroga čez središče do oboda in potem potegni premo skoz krajišče tega polumera in skoz krajišče polumera v drugem krog; njeno presečišče s centralo je no tranje podobnišče krogov (§. 110).

9. Razpolovi dan lok. (§. 99, 1).

10. Razpolovi obod kroga.

Z nadaljevanim razpolavljanjem razdeliš obod na 4, 8, 16, enakih delov.

11. Razdeli obod na šest enakih delov. (§. 117).

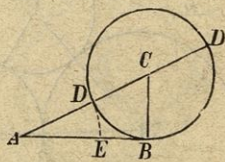
Dva taka loka skupaj znašata tretji del oboda.

Z razpolavljanjem lokov razdeliš obod v 12, 24, enakih delov.

12. Razdeli dano daljico po stalnem sorazmerji (v srednjem in vnanjem razmerji).

Potegni (lik 135) $BC \perp AB$, stvari $BC = \frac{1}{2} AB$, napiši iz C s polumerom CB krog, in potegni skoz točki A in C sekanto, katero seče krog v točkah D in D' ; ako stvariš še $AE = AD$, je AB v točki E po stalnem sorazmerji razdeljena.

Lik 135.



Kajti $AD' : AB = AB : AD$ (§. 128, izv. 2).
tedaj tudi $AB : (AD' - AB) = AD : (AB - AD)$.

Ker je pa

$$AD' - AB = AD' - D'D = AD = AE,$$

$$AB - AD = AB - AE = BE,$$

je $AB : AE = AE : BE$.

13. Razdeli obod kroga na deset enakih delov.

Razdeli polumer po stalnem sorazmerji (nalogi 12), in vnesi večji odsek kakor tetivo v krog. (§. 129).

Dva taka loka skupaj znašata peti del oboda.

Z razpolajljanjem lokov razdeljujemo obod na 20, 40, enakih delov.

Ako zvežeš po dva sosedna razdelišča oboda v nalogi 10, 11, 13, vpišeš krogu pravilne mnogokotnike s tolikim številom stranic, kolikor je razdelišč, ako pa načrtas v razdeliščih na krog tangente, dobiš pravilne opisane mnogokotnike.

14. Napiši krog, kateri je enak *a*) vsoti, *b*) diferenci dveh danih krogov ($r_1 = 30^{\text{mm}}$, $r_2 = 20^{\text{mm}}$).

Analiza. Recimo, da je r polumer iskanega kroga, potem je

$$a) r^2 \pi = r_1^2 \pi + r_2^2 \pi \text{ ali } r^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

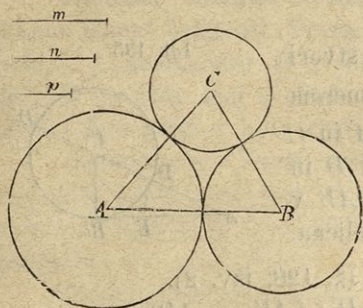
$$b) r^2 \pi = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi \text{ ali } r^2 = r_1^2 - r_2^2;$$

Načrtovanje. Načrtaj pravokoten trikotnik *a*) s katetama r_1 in r_2 , *b*) s hipotenuzo r_1 in s kateto r_2 i. t. d.

15. Napiši s polumeroma 3^{cm} in 2^{cm} kroga, katera se dotikata *a*) od zunaj, *b*) od znotraj (§. 109, izv. *a*).

16. Načrtaj s polumeri m , n , p tri kroge, kateri se vsi od zunaj dotikajo.

Lik 136.



Načrtaj trikotnik ABC sè stranicami $AB = m + n$, $AC = m + p$, in $BC = n + p$, napiši iz A , B , C s polumeri m , n , p kroge; ti zadostujejo nalogi.

Kako izvršiš nalogo, ako so polumeri vseh krogov jednaki?

17. Napiši iz danega središča krog, kateri se dotika dane preme.

Potegni od dane točke pravokotnico OA na premo, in napiši s polumerom OA krog. (§. 101, 4).

18. Napiši iz danega središča krog, kateri se dotika danega kroga. (§. 114, izv. a).

19. Napiši z danim polumerom krog, a) kateri gre skoz dano točko, b) kateri se dotika danega kroga, c) kateri zadostuje obema pogojema.

- Središče iskanega kroga leži v obodu kroga, katerega napišemo iz dane točke z danim polumerom. — Nedoločena naloga. Povej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri tej nalogi zadostujejo.
- Središče iskanega kroga leži v obodu kroga, katerega napišemo iz središča danega kroga s polumerom, ki je jednak vsoti ali diferenci danih polumerov (§. 109, 2). — Nedoločena naloga. Povej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri tej nalogi zadostujejo.
- Središče iskanega kroga leži v presečišču geometrijskih mest za a) in b).

20. Napiši krog z danim polumerom, kateri

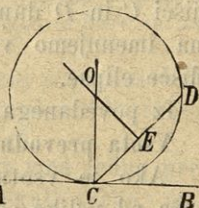
- gre skoz dve točki;
- gre skoz dano točko in se dotika dane preme (§. 102, 5);
- se dotika dveh danih prem;
- se dotika dane preme in danega kroga;
- se dotika dveh danih krogov.

Razloži te naloge, kakor to vidiš v nalogi 19. in določi najprej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri bi samo jednemu pogoju vsake naloge zadostovali.

21. Napiši krog, kateri gre skozi dano točko in se dotika dane preme v dani točki.

Ako je AB (lik 137) dana prema, C dana točka v njej in D dana točka zunaj te preme, leži središče iskanega kroga v $CO \perp AB$ (§. 104, 4) in v pravokotnici EO , katero postaviš v sredi daljice CD , torej v presečišču O (§. 59, 4).

Lik 137.



22. Napiši krog, kateri gre skozi A dano točko in se dotika danega kroga v dani točki (§. 109. izv. a).

23. Napiši krog, kateri se dotika dveh danih prem in sicer jedne v dani točki (§. 101, 3).

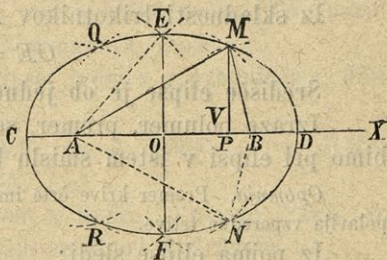
Sedmi oddelek.

Elipsa, hiperbola in parabola.

1. Elipsa.

§. 132. Razpolovi dano daljico CD v O , napravi $OA = OB$ (lik 138), razdeli s poljubno ležečo točko V premo CD v dva dela ter napiši iz točk A in B s polumeroma CV in DV loke nad in pod CD , kateri se sečejo v obče v štirih točkah M , Q , N in R . Takisto načrtovanje točk ponavljaj večkrat, tako da lego točke V na premi CD menjavaš. Vse dobljene točke zveži zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto. Vsota razdalj vsake točke v tej črti od točk A in B je jednaka CD . Krivo črto, v kateri je vsota razdalj vsake točke od dveh nepremičnih točk dani daljici jednaka, imenujemo elipso (pakrog).

Lik 138



V elipsi je torej $AM + BM = CD$.

Nepremični točki A in B imenujemo gorišči (žarišči) elipse, daljici AM in BM , kateri vezeta točko M z goriščema, prevodnici te točke.

Iz načrtovanja sledi:

1) $AC = BD$, torej tudi

$$AC + CB = BD + AD = CD \text{ t. j.}$$

krajišči C in D dane daljice sta tudi točki elipse. Daljico med njima imenujemo **veliko os**; njijini krajišči **temeni** in **sredo** O **središče** elipse.

Iz povedanega sledi:

Vsota prevodnic katerekoli točke elipse je jednaka veliki osi.

Ako je vsota razdalj katere točke od gorišč večja ali manjša od velike osi, leži točka oziroma zunaj ali znotraj elipse.

2) Ker je $OA = OB$, velja:

Središče elipse je jednako oddaljeno od gorišč.

Razdaljo gorišč od središča imenujemo **ekscentričnost** (izsrednost) elipse.

Elipsa je tem bolj krogu podobna, čim manjša je njena ekscentričnost.

3) Daljico EF , katera stoji v O pravokotno na veliki osi, imenujemo **malo os** elipse.

Ako zvežemo E z A in B , sta trikotnika AEO in BEO skladna (§. 50); torej je

$$AE = BE = \frac{CD}{2}.$$

Isto velja za točko F .

Krajišči male osi sta od gorišč jednako oddaljeni.

Iz skladnosti trikotnikov AOF in AOE sledi

$$OE = OF.$$

Središče elipse je ob jednom tudi razpolovišče male osi.

Izraze polumer, premer, sekanta, tangenta, obod i. t. d. rabimo pri elipsi v istem smislu kakor pri krogu.

Opomnja. Premer krive črte imenujemo sploh vsako daljico, katera razpolavlja vzporedne tetive.

Iz pojma elipse sledi:

1. Polumeri (premeri) elipse niso vsi jednaki.

2. Največji (najmanjši) premer je velika (mala) os.

Iz pravokotnega trikotnika AOE sledi, ako so a, b, c merska števila polovice velike osi, polovice male osi in ekscentričnosti, po Pitagorovem izreku:

$$a^2 = b^2 + e^2 \text{ torej tudi}$$

$$a = \sqrt{b^2 + e^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - e^2}, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1. Načrtaj elipso, v kateri je $CO = a$, $AO = e$.

$$a = 3^{\text{cm}}, 2.5^{\text{cm}}, 2^{\text{cm}}; e = 2.5^{\text{cm}}, 2.3^{\text{cm}}, 1.3^{\text{cm}}.$$

2. Kolika je velika os elipse, ako je mala os 1^{m} , ekscentričnost 3^{dm} ?

3. Ekscentričnost elipse je 0.34^{m} , velika os 1.3^{m} ; kolika je mala os?

4. Vrtnar mora načrtati elipso, v kateri je velika os 58^{dm} in mala os 45^{dm} ; za koliko morata gorišči oddaljeni biti?

5. Pot naše zemlje krog solnea je elipsa, v kateri je polovica velike osi 153280134^{km} , polovica male osi 153260842^{km} ; kolika je ekscentričnost zemljine poti (ekliptike)?

§. 133. Prema, katera razpolavlja kot med jedno prevodnico in podaljškom druge prevodnice katerekoli točke, je tangenta elipse v tej točki.

Pogoj. AM in BM sta prevodnici točke M (lik 139) in $\sphericalangle EMF = \sphericalangle FMA$.

Trditev. NT je tangenta elipse.

Dokaz. Naredimo $EM = AM$, potem je $EF = AF$ in $FM \perp AE$ (§. 59, 5). Ako je N poljubna točka preme FM , je tudi $EN = AN$ (§. 59, 5).

Na dalje je $EN + BN > EB = CD$ ali

$$AN + BN > AM + BM = CD \text{ t. j.}$$

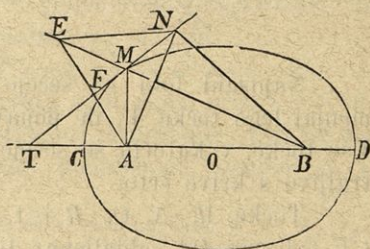
vsota razdalj točke N od gorišč je večja od velike osi, N leži torej zunaj elipse. Ker pa to za vsako točko preme TN , razun točke M , dokazati moremo, je TN tangenta elipse.

Izvod. Vsaka tangenta elipse tvori s prevodnicama dotikališča jednaka kota.

Kajti $\sphericalangle AMF = \sphericalangle EMF$, pa $\sphericalangle EMF = \sphericalangle BMN$; torej je tudi $\sphericalangle AMF = \sphericalangle BMN$.

Ta izvod ima posebno važnost v fiziki. Valovni traki, izhajajoči iz jednega gorišča, združijo se zopet v drugem.

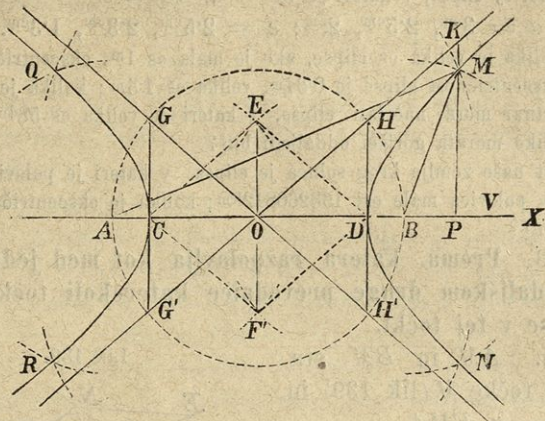
Lik 139.



2. Hiperbola.

§. 134. Razpolovi dano daljico CD v O , podaljšaj jo na obe strani in napravi $OA = OB$ (lik 140), vzemi na premi OX točko V poljubno in napiši s polumerom CV iz točk A in B nad in pod premo OX loke, potem takisto s polumerom DV .

Lik 140.



Napisani loki se sečejo v točkah M, N, Q, R . Potem menjaj lego točke V , in ponavljaj takisto načrtovanje večkrat. Vse točke, v katerih se sečejo loki, zveži zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto.

Točke M, N, Q, R i. t. d so od točerk A in B za daljico CV oziroma DV oddaljene; diferenca teh razdalj je jednaka AB .

Krivo črto, v kateri je diferenca razdalj vsake točke od dveh nepremičnih točerk jednaka dani daljici, imenujemo **hiperbolo**. — Hiperbola ima dve rami.

V hiperboli je torej za vsako točko M : $AM - BM = CD$.

Nepremični točki A in B imenujemo **gorišči** hiperbole, daljici AM in BM pa **prevodnici** točke M .

Iz načrtovanja hiperbole sledi:

1) $CA = DB$, torej tudi

$$CB - AC = DA - DB = CD \text{ t. j.}$$

krajišči C in D dane daljice sta tudi točki hiperbole.

Daljico med njima imenujemo **glavno os**, njeni krajišči C in D temeni, točko O središče hiperbole.

Iz povedanega sledi:

Diferenca prevodnic katerekoli točke hiperbole je jednaka glavni osi.

Ako je diferenca razdalj katere točke večja ali manjša od glavne osi, leži ta oziroma znotraj ali zunaj hiperbole.

2) Ker je $OA = OB$, velja:

Središče hiperbole je od obeh gorišč jednako oddaljeno.

Razdaljo gorišč od središča imenujemo **ekscentričnost** hiperbole.

Ako napišemo iz točk C in D s polumerom AO loke, kateri se sečejo v E in F in potegnemo premo EF , stoji ta pravokotno na glavni osi in jo seče v točki O . Trikotnika CDE in CDF sta namreč enakokraka.

Premo EF imenujemo **postransko os** hiperbole.

3) Ker je $\triangle COE \cong \triangle COF$, je $OE = OF$; t. j.

Središče hiperbole razpolavlja tudi njeno postransko os.

Ako so a , b , e merska števila polovice glavne osi, polovice postranske osi in ekscentričnosti hiperbole, je v trikotniku COE po Pitagorovem izreku:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{e^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Ako napišemo iz središča O s polumerom OA krožnico in načrtamo tetivi GG' in HH' pravokotno na AB , je

$$CG = CG' = DH = DH' = \sqrt{e^2 - a^2} = b.$$

Premi GH in $G'H'$, kateri gresta tudi skozi središče O hiperbole, imenujemo **asimptoti** (nestižnici) hiperbole. Oni ne sečeta nikjer hiperbole, ako ji še tako podaljšamo, vendar se ji pa bližata bolj in bolj.

Načrtaj hiperbolo, v kateri je glavna os a , ekscentričnost e .

$$a = 2^{\text{cm}}, 2.5^{\text{cm}}, 3^{\text{cm}}; \quad e = 1.8^{\text{cm}}, 3.5^{\text{cm}}, 1.5^{\text{cm}}.$$

Primerjaj dobljene hiperbole z ozirom na to, za koliko so odprte.

- Glavna os hiperbole je 0.4^{m} , postranska os 0.5^{m} ; kolika je ekscentričnost?
- Ekscentričnost hiperbole je 5.12^{dm} , glavna os 3.85^{dm} ; kolika je postranska os?
- Ekscentričnost hiperbole je $3^{\text{dm}} 9^{\text{cm}}$, postranska os $2^{\text{dm}} 2^{\text{cm}}$; kolika je glavna os?

§. 135. Prema, katera razpolavlja kot med prevodnicama točke, je tangenta hiperbole v tej točki.

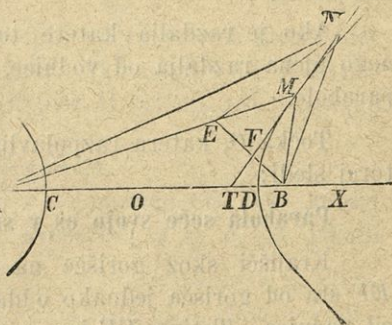
Recimo, da je (lik 141)

Lik 141.

$\sphericalangle AMT = \sphericalangle TMB$ in $EM = MB$,
potem je $MF \perp EB$ in $EF = FB$.

Ako je N katerakoli druga točka preme MT in ako potegnemo preme AN , BN in EN , je tudi $EN = BN$. (§. 59, 5.)

Na dalje je $AN - EN < AE$ ali $AN - BN < CD$. Točka N leži zunaj hiperbole. Ker isto za vsako drugo točko preme TM , razun točke M , dokazati moremo, je NT tangenta hiperbole.



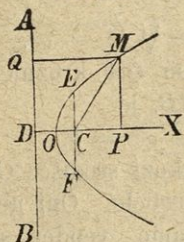
Izvod. Vsaka tangenta tvori s prevodnicama dotikališča jednaka kota.

Ta izvod je tudi važen v fiziki.

3. Parabola.

§. 136. Dana je prema AB in zunaj te točka C . Načrtaj skoz C premo $DX \perp AB$ in postavi v katerikoli točki P te preme $NM \perp DX$. Napiši z razdaljo DP iz točke C loka, katera sečeta pravokotnico v točkah M in N .

Lik 142



Točki M in N sta od točke C in od preme AB jednako oddaljeni. Takisto načrtaj več takih točk in zveži jih zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto, v kateri je tedaj razdalja vsake točke od točke C jednaka razdalji od preme AB .

Krivo črto, v kateri je vsaka točka od dane nepremične točke in dane nepremične preme jednako oddaljena, imenujemo **parabolo** (metnico).

V parabolli je torej

$$MQ = MC$$

kjer je $MQ \perp AB$.

Nepremično točko C imenujemo **gorišče**, nepremično premo AB **vodnico**, premo DX , katera stoji pravokotno na AB in gre skoz C , **os** parabole, in presečišče parabole z osjo njeno **teme**; daljico MC , katera veže gorišče s katerokoli točko parabole, **prevodnico** one točke.

Ako je razdalja katere točke od gorišča večja ali manjša nego njena razdalja od vodnice, leži ta oziroma zunaj ali znotraj parabole.

Točka O , katera razpolavlja premo DC , je točka parabole, torej sledi:

Parabola seče svojo os v sredi med goriščem in vodnico.

Krajišči skoz gorišče na os pravokotno potegnene tetive EF sta od gorišča jednako oddaljeni, ker imata jednaki razdalji od vodnice. Tetivo EF imenujemo **parameter** parabole.

§. 137. 1. Prema, katera razpolavlja kot med prevodnico točke in pravokotnico iz te točke na vodnico, je tangenta parabole.

Recimo, da je (lik 143) $\sphericalangle CMT = \sphericalangle TMQ$, potem je, ako potegnemo premo QC , $QF = FC$ in $FM \perp QC$. Ako je N katerakoli druga točka preme TM in ako potegnemo daljice CN , QN in $NR \perp AB$, je $\triangle CNF \cong QNF$, torej $CN = QN$; pa $QN > NR$, ali $CN > NR$. Točka N leži

Lik 143.

zunaj parabole. Taisto moremo za vsako drugo točko preme MT , razun točke M , dokazati, torej je MT tangenta parabole.

Izvod. Vsaka tangenta parabole tvori jednaka kota s prevodnico dotikališča in s pravokotnico iz tega na vodnico.

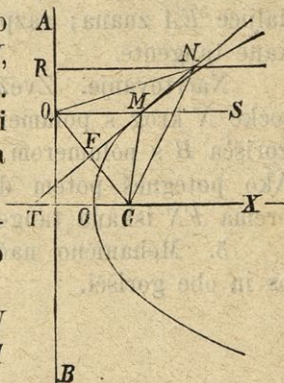
2. Presečišče tangente z osjo parabole in dotikališče sta od gorišča jednako oddaljeni.

Kajti $\sphericalangle CTM = \sphericalangle SMN$; $\sphericalangle SMN = \sphericalangle QMT = \sphericalangle TMC$; torej $\sphericalangle CTM = \sphericalangle TMC$. Trikotnik TMC je enakokrak in $CT = MC$.

Načrtaj parabolo, ako je razdalja gorišča od vodnice a .

$$a = 5^{\text{mm}}, 1^{\text{cm}}, 2^{\text{cm}}, 3^{\text{cm}}.$$

Primerjaj dobljene parabole z ozirom na to, koliko so odprte.



Naloge za načrtovanje.

1. Mehanično načrtovanje elipse, ako je dana velika os in gorišči.

V goriščih zatakni trdno dve igli, na te priveži konca niti, katera je z veliko osjo jednako dolga. Ako napneš nit sè svinčnikom in ga okrog gorišč vrtiš, napiše ti svičnik pri tej vrtnji elipso.

2. Dani sta osi elipse, poišči gorišči.

Napiši iz točke E (lik 138) s polumerom CO lok, kateri seče veliko os v točkah A in B . Presečišči A in B sta iskani gorišči.

Dokaz napravi sam.

3. Načrtaj skoz točko M (lik 139) elipse tangento na to.

Analizo napravi sam.

Načrtovanje. Potegni obe prevodnici k točki M in podaljšaj BM ; ako razpoloviš kot AME , je razpolovnica TM iskana tangenta.

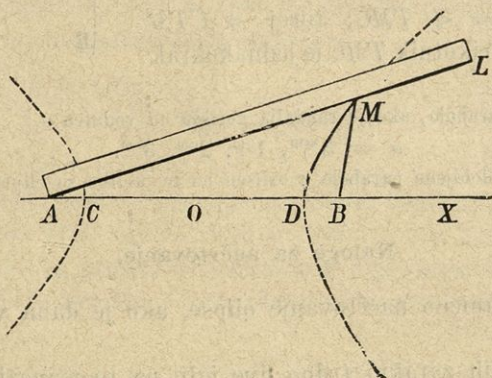
4. Načrtaj iz dane točke N (lik 139) zunaj elipse tangento na to.

Analiza. Recimo, da je MN iskana tangenta. Potem je $NE = NA$. (§. 133) in $BE = CD$, torej lega točke E in tudi daljice EA znana; razpolovišče F te daljice je druga točka iskane tangente.

Načrtovanje. Zveži točko N z goriščem A in napiši iz točke N krog s polumerom NA ; napiši pa tudi krog iz drugega gorišča B s polumerom CD ; presečišče obeh krogov je točka E . Ako potegneš potem daljico EA in jo v točki F razpoloviš, je prema FN iskana tangenta.

5. Mehanično načrtovanje hiperbole, ako je dana glavna os in obe gorišči.

Lik 144.



Vzemi ravnilo (lineal) in napravi, da je v gorišči A (lik 144) vrtljivo; na drugem konci ravnila L pripiši konec niti v , katera je za veliko os CD krajša od ravnila, drugi konec niti zatakni v gorišči B . Ako tedaj vrtiliš ravnilo okrog točke A in ako pritiskaš nit k ravnilu s svinčnikom, da ostane nit na obeh straneh napeta, napišeš s svinčnikom jeden del hiperbole. Kajti za vsako lego točke M je

$$\begin{aligned} AM - BM &= (AM + ML) - (BM + ML) \\ &= AL - v = CD. \end{aligned}$$

Kako moreš načrtati še druge dele hiperbole?

6. Načrtaj skoz točko M (lik 141) hiperbole tangento na to.

Potegni prevodnici AM in BM in razpolovi kot AMB ; polovnica MT je zahtevana tangenta.

7. Mehanično načrtovanje parabole, ako je dana vodnica in gorišče.

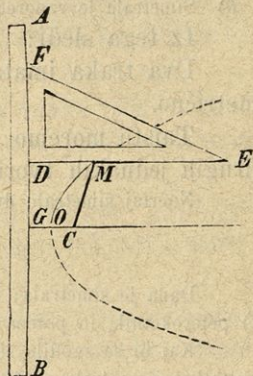
Vzemi lesen pravokoten trikotnik EDF (lik 145) in nit, katera je jednaka DE ; pripni jeden konec niti v gorišči C in drugi v E . Ako trikotnik s kateto DE ob vodnici premikaš in nit sè svinčnikom k trikotniku pritiskaš, da ostane vedno napeta, napišeš zgornji del parabole. Kajti za vsako lego točke M je $CM = MD$.

Kako moreš načrtati spodnji del parabole?

8. Načrtaj skoz dano točko M (lik 143) parabole tangento na to.

Potegni MC in $MQ \perp AB$, razpolovi kot QMC ; polovnica TM je iskana tangenta.

Lik 145.



Osmi oddelek.

Simetrična lega, projekcija.

Simetrija.

§. 138. Načrtaj na dano premo SS' pravokotnico AB , katera seče prvo v točki C in napravi $AC = BC$.

Takisto načrtaj drugo pravokotnico $A'B'$ na SS' in napravi $A'C' = B'C'$; potem pa zveži točki A in A' , B in B' z daljicama AA' in BB' . Daljici AA' in BB' sta vzporedni s premo SS' .

Točki A in B imenujemo **simetrično** (istomerno) ležeči z ozirom na premo SS' , ako stoji njijina zveznica $AB \perp SS'$ in ako SS' razpolavlja daljico AB .

Premo SS' imenujemo **os simetrije** ali **simetralo**.

Daljici AA' in BB' ležita simetrično z ozirom na premo SS' , ako nahajamo za vsako točko jedne daljice simetrično ležečo točko na drugi daljici z ozirom na SS' .

Taisto velja splošno o simetrično ležečih tvorih.

Načrtaj simetralo dveh danih trakov, ako sta a) nevzporedna, b) vzporedna.

Rešitev.

a) Simetrala je polovnica kota, katerega tvorita traka.

b) Simetrala je vzporednica s trakoma, ležeča v sredi med njima.

Iz tega sledi:

Dva traka imata zmerom simetralo ali ležita zmerom simetrično.

Taisto moremo reči o dveh enakih krogih in nekaterih drugih enakih tvorih.

Načrtaj simetralo dveh enakih krogov s centralo c .

$$R = 2^{\text{cm}}, 2.5^{\text{cm}}, 3^{\text{cm}};$$

$$c = 5^{\text{cm}}, 5^{\text{cm}}, 4^{\text{cm}}.$$

Dana je simetrala; narisaj na jedno stran te a) trikotnik, b) četverokotnik, c) peterokotnik, in potem k vsakemu teh likov simetrično ležečega.

Kaj bi se zgodilo s simetričnima likoma, ako zavrtiš jednega okoli nepremične simentrale za 180° proti drugemu?

§. 139. Nekatero tvore moremo s premo razdeliti v dve simetrični polovici; take tvore imenujemo sploh **simetrične**.

Simetrični tvorji so n. pr.

1. Trak; vsaka pravokotnica na njega je njegova simetrala.

2. Daljica; pravokotnica v njeni sredi je simetrala.

3. Kot; prema, katera ga razpolavlja, je njegova simetrala.

4. Jednakokrak trikotnik; daljica, ki veže vrh z razpoloviščem osnovnice je njegova simetrala.

5. Krog; vsak premer je simetrala.

6. Elipsa; velika in mala os sta simetrali.

Simetrični so sploh vsi oni tvorji, katere moremo s premo razdeliti v dve skladni polovici.

Projekcija.

§. 140. Ako spustimo z dane točke A zunaj preme XX' pravokotnico AB na to, pravimo, da **projiciramo** (vzmetnemo) točko A na premo XX' .

Podnožišče B pravokotnice imenujemo **projekcijo** (vzmet) točke na premo, in to premo pa **os projekcije** ali kratko **os**.

Projekcijo daljice na dano premo imenujemo daljico med projekcijama njenih krajišč.

Projekcija z osjo vzporedne daljice je tej jednaka, postaje manjša, ako se kot, katerega tvorita dana daljica in os, bliža pravemu; za prav kot je projekcija daljice točka.

§. 141. Ako je dana točka ali daljica, je njena projekcija na dano os popolno določena. Obratno pa točka ali daljica ni določena, ako je dana njena projekcija.

Kajti pravokotnica na os je projekcija vsake točke v pravokotnici; in vse daljice, katere potegnemo med pravokotnicama na os, imajo isto projekcijo.

Ako sta izmed količin: daljica, projekcija in kot, katerega tvori daljica z osjo, dani dve, moremo tretjo določiti z načrtovanjem.

Za daljico, katero na ta način določimo, vemo vendar le njeno dolžino, ne pa natančno njene lege; kajti jednako dolge vzporednice med pravokotnicama na os, imajo jednako projekcijo in tvorijo z osjo jednak kot.

Projiciraj daljico $AB = 4^{\text{cm}}$ zunaj preme XX' na to, ako tvori (podaljšana) AB s XX' kot

a) 0° , *b)* 15° , *c)* 30° , *d)* 45° , *e)* 60° , *f)* 90° .

Dana je daljica AB in kot a , katerega tvori z osjo; odmeri dolžino projekcije z merilom.

$$AB = 6^{\text{cm}}, a = 60^\circ; AB = 7^{\text{cm}}, a = 45^\circ; AB = 5^{\text{cm}}, a = 75^\circ.$$

Dan je kot a za daljico AB in njena projekcija $A'B'$; kolika je AB ?

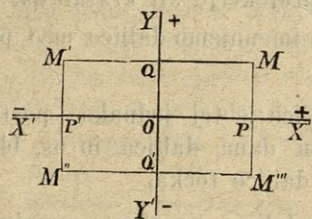
$$A'B' = 4^{\text{cm}}, a = 60^\circ; A'B' = 5^{\text{cm}}, a = 30^\circ; A'B' = 6^{\text{cm}}, a = 54^\circ.$$

Dana daljica AB in njena projekcija $A'B'$; načrtaj kot med njima in odmeri ga s transportêrjem.

$$AB = 7^{\text{cm}}, A'B' = 5^{\text{cm}}; AB = 8^{\text{cm}}, A'B' = 5^{\text{cm}}; AB = 9^{\text{cm}}, A'B' = 3^{\text{cm}}.$$

§. 142. Lego točke M (lik 146) v ravnini določimo s projekcijo popolnoma, ako jo projiciramo na dve pravokotni osi, na ho-

Lik 146.



O ordinato (y) točke M .

Absciso in ordinato imenujemo skupno **koordinati** in so, XX' in YY' osi **koordinat** in sicer v posebnem XX' os **abscis** YY' os **ordinat**; presečišče O teh osi pa **izhodišče** koordinat.

Da moremo lego točke v ravnini popolno na tanko določiti, vzamemo os **abscis** na desno izhodišča pozitivno, na levo negativno. Koordinate so potem tudi pozitivne ali negativne. Ako je (lik 146) absolutna vrednost daljice $OP = OP' = a$, in $OQ = OQ' = b$, je

$$\begin{aligned} \text{za točko } M & \dots\dots x = +a, y = +b; \\ \text{" " } M' & \dots\dots x = -a, y = +b; \\ \text{" " } M'' & \dots\dots x = -a, y = -b; \\ \text{" " } M''' & \dots\dots x = +a, y = -b. \end{aligned}$$

S koordinatami krajišč daljice, t. j. s projekcijama daljice na dve pravokotni osi, pa določimo tudi popolnoma lego daljice.

Dani sta osi koordinat; načrtaj točko M , za katero je:

$$x = +3^{\text{cm}}, -4^{\text{cm}}, -2^{\text{cm}}, +5^{\text{cm}};$$

$$y = +2^{\text{cm}}, +3^{\text{cm}}, -5^{\text{cm}}, -4^{\text{cm}}.$$

Dani sta osi koordinat; načrtaj daljico AB , ako pomenjata x in y koordinati točke A , x' in y' koordinati točke B :

$$x = +1^{\text{cm}}, +2^{\text{cm}}, -5^{\text{cm}}, -1^{\text{cm}};$$

$$y = +1^{\text{cm}}, -3^{\text{cm}}, +3^{\text{cm}}, -1^{\text{cm}};$$

$$x' = +3^{\text{cm}}, +4^{\text{cm}}, -5^{\text{cm}}, -3^{\text{cm}};$$

$$y' = +2^{\text{cm}}, -3^{\text{cm}}, -2^{\text{cm}}, -4^{\text{cm}}.$$

§. 143. 1. Namesti v jednačbi

$$y = ax$$

števili a in x z drugimi danimi števili in izračunaj y .

a) $a = 0.5, x = +1^{\text{cm}}, +2^{\text{cm}}, +3^{\text{cm}}, +4^{\text{cm}}, \dots$

$a = 0.5, x = -1^{\text{cm}}, -2^{\text{cm}}, -3^{\text{cm}}, -4^{\text{cm}}, \dots$

b) $a = 1, x = \pm 1^{\text{cm}}, \pm 2^{\text{cm}}, \pm 3^{\text{cm}}, \pm 4^{\text{cm}}, \dots$

c) $a = 2, x = \pm 1^{\text{cm}}, \pm 2^{\text{cm}}, \pm 3^{\text{cm}}, \pm 4^{\text{cm}}, \dots$

Načrtaj osi koordinat, poišči lego toček za vsak izračunan par x in y , in zveži dobljene točke; kakšen tvor dobiš? (Premo.)

2. Namesti v enačbi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

y in a z drugimi števili, ter izračunaj x .

$$a) a = 1^{\text{cm}}, y = 0; b) a = 2^{\text{cm}}, y = 0; c) a = 5^{\text{cm}}, y = \pm 3^{\text{cm}}.$$

Načrtaj osi koordinat, poišči lego toček za vsak znan x in y in načrtaj iz izhodišča krožnico skoz dobljene tri točke. — Načrtaj koordinate x in y katerekoli točke krožnice in zveži krajšče ordinate z izhodiščem; kakšno enačbo dobiš iz dobljenega trikotnika po Pitagorovem izreku? ($x^2 + y^2 = a^2$).

Iz povedanega sledi:

Jednačbi $y = ax$ in $x^2 + y^2 = a^2$ izražujeta oziroma premo in krog ali prema in krog sta geometrijski mesti vseh toček, katerih koordinate x in y zadostujejo tema enačbama.

Takisto moremo tudi druge črte n. pr. elipso, hiperbolo in parabolo izraževati z enačbami; o tem na tem mestu vendar ne mislimo natančneje govoriti.



Drugi del.

Stereometrija.

Prvi oddelek.

Preme in ravnine v prostoru.

§. 144. Skoz jedno točko moremo v prostoru brezkončno mnogo trakov potegniti; vsi skupaj tvorijo **trakovje v prostoru**.

Premo v prostoru določujeta dve točki popolnoma.

Skoz jedno premo moremo v mislih brezkončno mnogo ravnin položiti. Vse ravnine skupaj, katere gredó skoz isto premo, imenujemo **ravninje**, premo pa **os ravninja**. Os ravninja razpolavlja vsako ravnino na dve **poluravnini**.

V ravninji moremo vsako ravnino z vrtenjem okolo osi v lego vsake druge ravnine spraviti. Ako si tedaj mislimo tri točke, dve v osi in jedno zunaj nje, ležita prvi dve ves čas vrtenja v ravnini, tretja pa samo v jedni njeni legi. Torej velja:

Tri točke, katere ne ležé vse v jedni premi, določujejo ravnino popolnoma.

Ravnino tudi določujeta: a) prema in točka zunaj nje, b) dve premi, kateri se sečeta, c) dve vzporedni premi.

Dve ravnini se moreta sekati le v premi.

Kajti, ako bi se sekali v krivi črti, imeli bi vsaj tri točke skupne, katere ne ležé v isti premi, potem pa bi bile obe jedna in ista ravnina, kar je proti pogoju.

Pokaži ravnine na prizmah, piramidah, v sobi in na vsaki tri točke, katere vsako teh ravnin popolnoma določujejo. — Pokaži premo, v kateri se dve ravnini teh teles sečeta.

1. Lega ravnin z ozirom na druge ravnine.

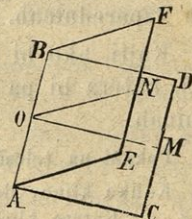
§. 145. Dve poluravnini z isto osjo tvorita ploskven kot ali klin. Os imenujemo rob, in poluravnini kračji ali stranski ploskvi (krakini ali stranini) klina.

V liku 147 vidimo klin $E(BA)C$, ali AB ali F, C .

Lik 147.

Ako načrtamo kjerkoli na rob klina dve v stranskih ploskvah ležeči pravokotnici BD in BF , je kot DBF povsod iste kolikosti.

Pogoj. $BD \perp AB, BF \perp AB, AC \perp AB, AE \perp AB$.



Trditev. $\sphericalangle DBF = \sphericalangle CAE$.

Dokaz. Stvorimo $AO = OB$ in $MO \perp AB, NO \perp AB$. Ako potem premikamo tvor $MONFBD$ tako navzdolj, da ostane lik $OMDB$ in $ONFB$ ves čas oziroma v ravnini BC in BE , pride jedenkrat B na O in O na A , ker je $BO = AO$, in BD na OM , OM na AC , BF na ON , in ON na AE t. j. tvor $OMDBFN$ krije tvor $ACMONE$ popolnoma, torej je $\sphericalangle DBF = \sphericalangle MON = \sphericalangle CAE$.

Kot MON jemljemo za mero klina in imenujemo ga naklonski kot obeh stranskih ploskev.

Kakor postaje z vrtenjem premičnega kraka kot MON oster, prav, top, iztegnen, vzvišen in poln, velja to tudi za klin.

Ako je naklonski kot dveh ravnin prav ali poševen, stojita ravnini jedna na drugi pravokotno ali poševno.

Imenuj na telesih prave, ostre, tope kline z *a*) vertikalnim, *b*) horizontalnim, *c*) poševnim robom. — Na katerih telesih nahajaš prav ostre kline?

Kakšen ploskven kot stvarja vetrnica, ako se obrne *a*) od severja do juga, *b*) od severja do vzhoda, *c*) od severja čez zahod in jug do vzhoda, *d*) od severja do jugo-vzhoda?

Primerjaj kline s koti in povej, katere kline bi potem imenovali *a*) sokline, *b*) sovršne kline? In kaj bi imenovali soklinje? — V koliko delov razdeli soklinje brezkončni prostor?

§. 146. Dve ravnini, za kateri je naklonski kot enak 0 , se ne sečeta nikjer, oni sta vzporedni. Prostor med dvema vzporednima ravninama (vzporedninama) imenujemo plast.

O vzporednih ravninah moremo (takisto kakor o vzporednicah) reči: Presečnica dveh vzporednih ravnin leži v brezkončnosti.

Pokaži na telesih vzporedne ravnine; kje bi se sekale te ravnine, ako si jih misliš brezkončno razširjene? — Ali je plast na vse strani omejena?

§. 147. 1. Vsaka ravnina seče dve vzporedni ravnini v dveh vzporednicah.

Kajti, ako bi presečnici ne bili vzporedni, bi se sekali v točki, katera bi pa potem ležala ob jednom v obeh vzporednih ravninah.

Pokaži na telesih dve ravnini, kateri seče tretja, in presečnici.

Koliko klinov dobiš, ako sečeš dve vzporedni ravnini s tretjo ravnino? — Katere kline bi potem imenovali protikline, izmenične kline in prikline?

Izvod. Vzporednice med dvema vzporednima ravninama so jednake.

2. Skoz jedno točko M zunaj ravnine R moremo položiti le jedno s prvo vzporedno ravnino.

Kajti, ako bi mogli skoz točko M še drugo ravnino položiti, vzporedno z R , bi skoz M položena tretja ravnina sekala vse tri ravnine v treh vzporednih premah, izmed katerih bi šle dve skoz točko M , kar je pa nemogoče.

3. Ako sta dve ravnini vzporedni s tretjo, sta tudi med seboj vzporedni.

Kajti drugače bi se sekali in imeli bi dve ravnini, kateri bi šle skoz isto točko in bi bili vzporedni s tretjo.

§. 148. Dve premi v prostoru moreta jedna proti drugi trojno lego imeti: ali ležita obe v jedni ravnini ter sta ali vzporedni ali se sečeta, ali pa ležita tako, da si ne moremo obeh v jedni sami ravnini misliti, oni se križata (gresta jedna mimo druge).

2. Ravnina in prema.

§. 149. Prema leži z ozirom na ravnino ali v nji ali zunaj nje. Prema, katera ima dve točki z ravnino skupni, leži popolnoma v tej, kar se samo ob sebi umé. Prema pa, katera ne leži v ravnini, ima s to samo jedno točko skupno ali pa nobedne, ona je naklonjena proti ravnini ali pa je vzporedna z njo.

Presečišče preme z ravnino imenujemo **podnožišče** preme v ravnini.

Naklonjena prema stoji na ravnini ali **pravokotno** ali **poševno**, ako stoji na vsaki skoz njeno podnožišče potegnjeni premi pravokotno, ali pa ne.

Pokaži na telesih preme, katere stojé na ravnini *a)* pravokotno, *b)* poševno.

Katero mer (lego) ima prema (ravnina) v prostoru, ako stoji pravokotno na *a)* vertikalni, *b)* horizontalni, *c)* poševni ravnini (premi)?

§. 150. Dva kota v prostoru, katera imata krake paroma vzporedne, sta *a)* jednaka, ako sta oba para krakov v istem, ali oba v nasprotnem smislu vzporedna; *b)* suplementarna, ako sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna.

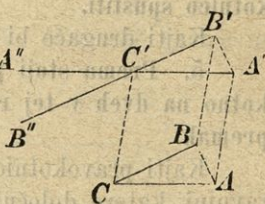
Dokaz.

Lik 148.

a) Recimo, da je (lik 148) $AC \parallel A'A''$,

$BC \parallel B'B''$.

Ako stvorimo $AC = A'C'$ in $BC = B'C'$, A'' — C' — A' in ako potegnemo preme, AA' , BB' , CC' , AB in $A'B'$, je $AA' \parallel CC'$ (§. 62, 2) in $BB' \parallel CC'$, torej tudi $AA' \parallel BB'$ in $AB = A'B'$. Potem pa je



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, torej $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$.

Ker je $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A''C'B''$ je tudi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A''C'B''$.

b) Ker je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ in $\sphericalangle A'C'B' + \sphericalangle A''C'B' = 2R$, je tudi $\sphericalangle ACB + \sphericalangle A''C'B' = 2R$.

§. 151. 1. Ako je prema z ravnino vzporedna, je tudi vzporedna s presečnico te ravnine in ravnine, katero položimo skoz premo.

Dokaz indirekten. Primerjaj §. 147.

Obratno velja tudi:

2. Prema je vzporedna z ravnino, ako je vzporedna s premo, katera leži v tej ravnini.

Dokaz indirekten.

3. Skoz točko zunaj ravnine moremo potegniti brezkončno mnogo vzporednih prem, katere ležé vse v jedni ravnini, vzporedni s prvo.

Dokaz sledi iz §. 147, 1 in iz 2 tega §.

Katero mer (lego) v prostoru more ali mora imeti prema (ravnina), ako stoji poševno na *a*) vertikalni, *b*) horizontalni, *c*) poševni ravnini (premi)?

§. 152. V ravnini *R* moremo na premo *AB* v točki *C* samo jedno pravokotnico *CD* postaviti (§. 31 izv. *a*).

Ako vrtimo tvor $CD \perp AB$ okoli nepremične *AB*, prehaja *CD* v razne lege in napiše ravnino, na kateri je *AB*, pravokotna (§. 149). Iz tega sledi:

1. Nobedna pravokotnica na *AB* v točki *C* ne leži zunaj ravnine, na kateri stoji *AB* pravokotno.

2. Skoz točko preme moremo položiti le jedno pravokotno ravnino.

3. V točki ravnine moremo na to le jedno pravokotnico postaviti.

4. S točke zunaj ravnine moremo na to le jedno pravokotnico spustiti.

Kajti drugače bi imeli trikotnik z dvema pravima kotoma.

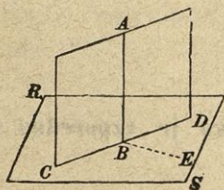
5. Prema stoji pravokotno na ravnini, ako stoji le pravokotno na dveh v tej ravnini skoz njeno podnožišče potegnenih premah.

Kajti pravokotnici na *AB* ležita v isti, na *AB* pravokotni ravnini, katero določujeta popolnoma.

6. Pravokotnica je najkrajša izmed vseh daljic, katere potegnemo s točke zunaj ravnine na to; podnožišča jednako dolgih daljic so jednako oddaljena od podnožišča pravokotnice.

§. 153. Ako stoji prema pravokotno na ravnini, stoji na tej tudi vsaka skoz premo položena ravnina pravokotno.

Lik 149.



Recimo, da je (lik 149) $AB \perp RS$, in položimo skoz *AB* ravnino *ACD*. Ako potegnemo v ravnini *RS* na presečnico *CD* obeh ravnin še pravokotnico *BE*, je $\sphericalangle ABE$ naklonski kot, ker stoji tudi $AB \perp CD$; pa $\sphericalangle ABE = R$, ter $AB \perp RS$; torej je ravnina *ACD* $\perp$ ravnini *RS*.

§. 154. 1. Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic pravokotno na ravnini, stoji na tej tudi druga pravokotno.

Recimo da je $AB \parallel CD$ in $AB \perp$ ravnini *M*. Ako položimo skoz vzporednici ravnino, stoji *AB* pravokotno na presečnici *BD* ter $CD \perp BD$ (§. 28, 2). In ako stvorimo v ravnini *M*

$BE \parallel FD$, je tudi $AB \perp BE$ in $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDF$ (§. 150) ter $CD \perp FD$, torej tudi $CD \perp M$.

2. Dve pravokotnici na isto ravnino sta vzporedni.

Kajti, ako bi ne bili vzporedni, bi mogli skoz podnožišče jedne pravokotnice potegniti premo, ki bi bila vzporedna z drugo pravokotnico; potem bi pa stali v tem podnožišči dve pravokotnici (1.), kar je nemogoče.

Izvoda.

- Vse pravokotnice od raznih točk preme na ravnino leže v jedni sami ravnini, torej vsa njih podnožišča v jedni sami premi.
- Pravokotnice med dvema vzporednima ravninama so jednake.

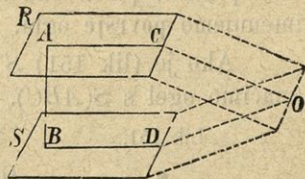
3. Dve premi, vzporedni s tretjo, sta tudi med seboj vzporedni.

Kajti, obe te dve premi stojita pravokotno na ravnini, na kateri stoji tudi tretja pravokotno.

§. 155. 1. Dve ravnini sta vzporedni, ako stoji prema na obeh pravokotno.

Vzemimo, da je (lik 150) $AB \perp AR$ in $AB \perp BS$, potem mora biti $AR \parallel BS$. Kajti, ako bi se te dve ravnini sekali, tvorile bi pravokotnica AB in zveznici njenih podnožišč s poljubno točko O presečnice obeh ravnin trikotnik ABO , kateri bi imel dva prava kota, kar je nemogoče.

Lik 150.



2. Prema AB , katera stoji na jedni dveh vzporednih ravnin pravokotno, je tudi pravokotna na drugi.

Ako položimo skoz premo dve ravnini, sta presečnici na jedni vzporedni ravnini paroma vzporedni s presečnicama v drugi vzporednih ravnin. Ker pa stoji AB pravokotno na prvih dveh presečnicah, stoji tudi takisto na drugih dveh, ali AB je pravokotna na drugi ravnini (§. 152, 5).

Simetrija z ozirom na ravnino.

§. 156. Dve točki ležita simetrično z ozirom na ravnino, ako ležita na nasprotnih stranéh ravnine, jednako od nje oddaljeni, a v isti pravokotnici na ravnino.

Ako nahajamo na vsaki strani ravnine po jedno črto, kateri imata lastnost, da ima vsaka točka jedne črte simetrično ležečo točko v drugi črti, sta črti **simetrično ležeči**.

Isto velja za vsakovrstne druge tvore prostora.

Človeško telo n. pr. obstoji iz dveh simetrično ležečih delov, na katere ga deli vertikalna ravnina; ali v zrcalu je predmetova podoba simetrično ležeča s predmetom.

3. Telesni ogli.

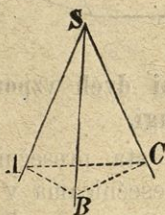
§. 157. Tri ali več ravnin, katere se sečejo zaporedoma tako, da gredó vse presečnice skoz jedno in isto točko, stvarjajo tvor v prostoru, katerega imenujemo **telesen ogel** ali kratko **ogel**.

Ogel je na jedno stran omejen del brezkončnega prostora.

Skupno točko vseh ravnin imenujemo **vrh**, presečnice vsakih dveh ravnin **robe**, kote dveh sosednih robov **robovne kote**, ravnine teh kotov **stranske ploskve** in kote sosednih dveh stranskih ploskev **ploskvene kote** ogla. Vse stranske ploskve skupaj imenujemo **površje** ogla.

Ako je (lik 151) S vrh ogla, SA , SB , SC njegovi robi, označimo ogel s $S(ABC)$.

Lik 151.



Kakor stvarjata dva kraka dva kota (otlega in vzvišenega), tako stvarjajo stranske ploskve ogla **otel** in **vzvišen ogel**. Jeden ogel imenujemo **vnanji ogel** drugega.

Tu se hočemo pečati le z ogli, v katerih je vsak roboven kot in vsak ploskven kot manjši od 180° t. j. z otlimi ogli.

Ogel ima toliko robovnih kotov in toliko stranskih ploskev kolikor robov.

Po številu stranskih ploskev razločujemo **tri-**, **četero-**, **petero-**, **nterostrane** ogle, po številu robov jih tudi imenujemo **tri-**, **četero-**, **petero-**, **nterorobovnike**.

Ako podaljšamo vse robe ogla čez njegov vrh, imenujemo ogel, v katerem so ti podaljški robi, **sovršni ogel** prvega.

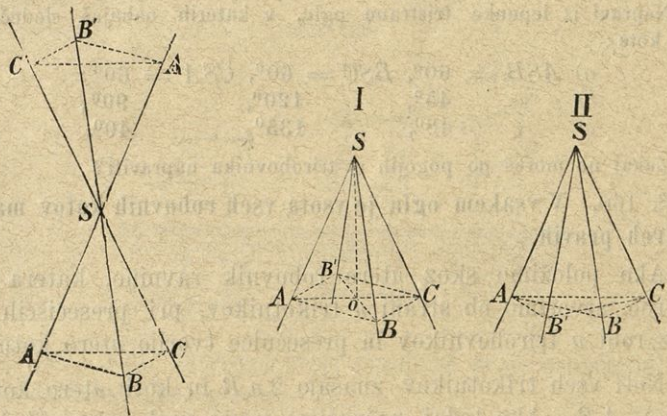
Pokaži to na prizmah in v sobi.

Pokaži na telesih ogle in ravnine, katere ga napravljajo. — Napravi take ogle iz lepenke.

Položi skoz ploskven kot tretjo ravnino, katera seče rob samo v jedni točki. — Na koliko delov razdelé te ravnine brezkončni prostor? Položi skoz skupno točko četrto ravnino, katera le sosedni dve ravnini seče; takisto peto, šesto ravnino i. t. d.

§. 158. Dva ogla imenujemo skladna, ako ja moremo v mislih tako jednega v drugega položiti, da se krijeta popolnoma; to je pa le mogoče, ako so vsi robovni in ploskveni koti paroma jednaki in sicer v istem redu. V sovršnih oglih so vsi robovni in vsi ploskveni koti paroma jednaki, vendar v nasprotnem redu. V obče ja ne moremo tako skupaj položiti, da bi se krila. To lahko spoznaš iz lika 152.

Lik 152.



Napravi iz lepenke ogla *a)* in *b)*, v katerih nahajaš sledeče robovne kote:

$$a) \text{ } ASB = 80^{\circ}, \text{ } BSC = 100^{\circ}, \text{ } CSA = 60^{\circ},$$

$$b) \text{ } ASB = 60^{\circ}, \text{ } BSC = 100^{\circ}, \text{ } CSA = 80^{\circ},$$

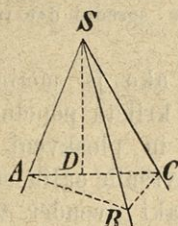
in spravi ja v tako lego, da je jeden sovršni ogel drugega. — Prepričaj se s poskusom, da jeden nikoli ne more drugega popolnoma kriti, ako ravno imata robovne in ploskvene kote paroma jednake.

Ogle, kateri imajo vse robovne in ploskvene kote paroma jednake, vendar v nasprotnem redu, imenujemo simetrično-jednake.

Izvod. Vsak ogel je svojemu sovršnemu oglu simetrično-jednak.

§. 159. V vsakem tristranem oglu (tri-robovniku) je vsota dveh robovnikih kotov večja od tretjega.

Lik 153.



Recimo, da je (lik 153) $\sphericalangle ASC$ največji robovnik kot in stvorimo v njegovi ravnini $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ASB$, $SD = SB$, potem je $\triangle ASD \cong \triangle ASB$ ter $AD = AB$. Nadalje je v $\triangle ABC$ $BC > AC - AB$ ali $BC > AC - AD$, torej $BC > DC$ in $\sphericalangle BSC > \sphericalangle CSD$ (§. 57). Potem je pa tudi $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASD + \sphericalangle CSD$ ali $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$.

Ako je pa že vsota manjših dveh robovnikih kotov večja od tretjega, velja to tem bolj za vsoto drugih dveh robovnikih kotov.

Napravi iz lepenke tristrane ogle, v katerih nahajaš sledeče robovne kote:

- a) $ASB = 60^\circ$, $BSC = 60^\circ$, $CSA = 60^\circ$;
 b) 45° , 120° , 90° ;
 c) 48° , 135° , 40° .

Zakaj ne moreš po pogojih c) tri-robovnika napraviti?

§. 160. V vsakem oglu je vsota vseh robovnikih kotov manjša od štirih pravih.

Ako položimo skoz n tero robovnik ravnino, katera seče vsak rob, stvorimo ob strani n trikotnikov, pri presečiščih ravnine z robu n tri-robovnikov in presečnice tvorijo n tero kotnik.

Koti vseh trikotnikov znašajo $2nR$ in koti n tero kotnika $2nR - 4R$. Ako tedaj začnemo vsoto vseh robovnikih kotov pri vrhu ogla z v in vsoto kotov na osnovnicah trikotnikov z v' je

$$v + v' = 2nR, \quad v' > 2nR - 4R \quad (\S. 159),$$

torej po odštevanji nejednačbe od jednačbe $v < 4R$.

Narisaj na lepenko razgrnen plašč peterorobovnika $S(ABCDE)$

$$ASB = 40^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ, \quad 75^\circ,$$

$$BSC = 60^\circ, \quad 60^\circ, \quad 30^\circ, \quad 80^\circ,$$

$$CSD = 100^\circ, \quad 60^\circ, \quad 150^\circ, \quad 120^\circ,$$

$$DSE = 60^\circ, \quad 60^\circ, \quad 30^\circ, \quad 60^\circ,$$

$$ESA = 40^\circ; \quad 60^\circ; \quad 60^\circ; \quad 45^\circ;$$

in napravi potem ogel. — V katerem slučaju ne moreš napraviti ogla?

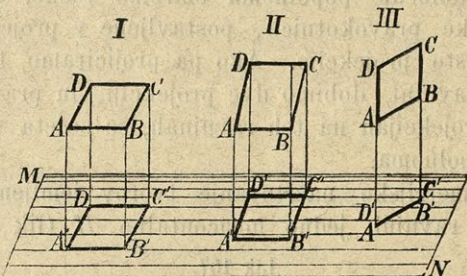
Projekcija na ravnino.

§. 161. Ako potegnemo pravokotnico od točke A (lik 154) na ravnino MN , imenujemo podnožišče A' projekcijo točke A na ravnino M , ravnino pa projekcijsko ali vzmetno ravnino (vzmetnino).

Lik 154.

Projekcije daljic (premočrtnih likov) na ravnino načrtujemo, ako zvezujemo, projekcije njih krajišč (oglišč) z daljicami. Glej lik 154 in lik 155, kjer je daljica (kvadrat) v raznih legah proti ravnini MN . Projekcijo drugih tvorov dobivamo takisto, ako zvezujemo zaporedoma projekcije vsake točke s črtami.

Lik 155.

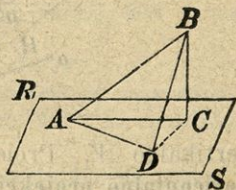


§. 162. Kot, katerega tvori prema s svojo projekcijo, imenujemo naklonski kot preme.

Naklonski kot preme je najmanjši izmed vseh kotov, katere tvori ona s premami, potegnenimi skoz njeno podnožišče v ravnini.

Recimo, da je (lik 156) $BC \perp RS$, torej AC projekcija preme AB na ravnino RS . Ako potegnemo skoz A v ravnini RS daljico $AD = AC$ in še CD in BD , je $BC > BD$, ker je $\sphericalangle BCD = 90^\circ$. In v trikotnikih BAC in BAD je $\sphericalangle BAC < BAD$ (§. 57).

Lik 156.



Ako je naklonski kot jednak 0° t. j. ako je daljica vzporedna z ravnino, je projekcija jednaka daljici; z večjim naklonskim kotom postaje projekcija manjša, in ako je

naklonski kot 90° t. j. ako stoji daljica pravokotno na ravnini, je njena projekcija le točka.

AA' je pravokotna na ravnino MN ; kaj je skupna projekcija vseh točk te pravokotnice na ravnino MN ? — Ali določuje projekcija točke tudi njeno lego? — Postavi $AA' \perp MN$ in $BB' \perp MN$ in potegni več daljic, katere imajo svoja krajišča v teh pravokotnicah; določi skupno projekcijo teh daljic na ravnino MN . Ali določi projekcija daljice nje kolikost in lego? — Določi projekcijo četvero-, petero-, šesterkotnika na ravnino MN . —

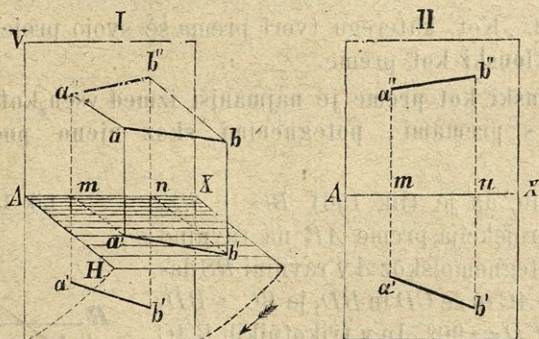
Kakšen tvor je projekcija kroga, ako je krožna ploskev

- vzporedna z vzmetno ravnino,
- poševna proti vzmetni ravnini,
- pravokotna na vzmetni ravnini? — Ali moreta mnogokotnik in krog imeti isto projekcijo? — Kedaj je projekcija krive črte zopet kriva črta, kedaj prema?

§. 163. Točka, daljica, premočrten lik i. t. d. imajo za dano ravnino popolnoma določene projekcije. Obratno pa projekcija še ne določuje popolnoma oziroma točke, daljice i. t. d. Kajti vse točke pravokotnice, postavljene v projekciji na ravnino, imajo isto projekcijo. Ako pa projiciramo točko na dve nevzporedni ravnini, dobimo dve projekciji, in pravokotnici, postavljeni v projekcijah na teh ravninah, se sečeta v točki ter jo določujeta popolnoma.

Za geometrijsko načrtovanje tvorov jemljemo zategadelj dve vzmetni ravnini, jedno horicontalno H (lik 157) in jedno

Lik 157.



vertikalno V . Projekcijo na horicontalno ravnino imenujemo horicontalno projekcijo ali očrt, in projekcijo na vertikalno ravnino vertikalno projekcijo ali načrt; presečnico AX obeh vzmetnih ravnin pa njijino os.

V liku 157 sta a' in a'' taki projekciji točke a in sicer je prva očrt, druga pa načrt točke a , ker je $aa' \perp H$ in $aa'' \perp V$.

Ravnina, katero položimo skoz pravokotnici aa' in aa'' , seče vzmetni ravnini v premah $a'm$ in $a''m$ in projekciji sta nasprotni oglišči pravokotnika $aa''ma'$.

Tisto velja za vsako drugo točko, tako da je v liku 157 $a'b'$ očrt in $a''b''$ načrt daljice ab . Očrt in načrt določujeta lego in dolžino daljice popolnoma.

Kakšni projekciji ima daljica v prostoru, ako je *a)* z vertikalno, *b)* s horizontalno, *c)* z obema vzmetnima ravninama vzporedna; ako stoji *d)* na vertikalni, *e)* horizontalni vzmetni ravnini pravokotno; ako leži *f)* v vertikalni, *g)* v horizontalni vzmetni ravnini? — Kolika je daljica, ležeča v vertikalni vzmetni ravnini, ako sta njeni krajišči od horizontalne vzmetne ravnine, za 30^{mm} in 48^{mm} oddaljeni, in ako je nje horizontalna projekcija 20^{mm} ? — Kolika je projekcija 60^{dm} dolge daljice, ležeče v horizontalni vzmetni ravnini, ako sta nje krajišči 20^{dm} in 45^{dm} od vertikalne vzmetne ravnine oddaljeni?

Ker ležita pri risanju obe projekciji na papirju t. j. v isti ravnini, si mislimo horizontalno vzmetno ravnino zavrneno okolo osi AX za 90° v ravnino vertikalne vzmetne ravnine. Po tem leži očrt pod in načrt nad osjo (lik 157, II); obe projekciji točke pa ležita v jedni in isti pravokotnici na os.

a) Narisaj projekcije daljic prejšnje vaje.

b) Narisaj očrt in načrt točke, katera leži v V in je od H za h oddaljena.

$$h = 0.031^{\text{m}}, 0.051^{\text{m}}.$$

c) Narisaj očrt in načrt točke, katera leži v H in je od V za v oddaljena.

$$v = 0.025^{\text{m}}, 0.044^{\text{m}}.$$

d) Narisaj očrt in načrt točke, katera je od V in H oziroma za v in za h oddaljena.

$$v = 0.025^{\text{m}}, 0.055^{\text{m}};$$

$$h = 0.058^{\text{m}}, 0.031^{\text{m}}.$$

e) Daljica AB stoji pravokotno na H ; nje razdalja od V je v in spodnje krajišče A je od H za h oddaljeno; narisaj očrt in načrt te daljice.

$$AB = 0.04^{\text{m}}, v = 0.025^{\text{m}}, h = 0.018^{\text{m}}.$$

f) Narisaj očrt in načrt 45^{mm} dolge daljice, katera je vzporedna z vsako vzmetno ravnino in je od horizontalne 25^{mm} in vertikalne 33^{mm} oddaljena.

g) Daljica AB je vzporedna s H in poševna proti V ; nje razdalja od H je h , razdalji A in B od V sta oziroma a in b ; narisaj očrt in načrt te daljice.

$$AB = 0.035^{\text{m}}, h = 0.022^{\text{m}}, a = 0.016^{\text{m}}, b = 0.025^{\text{m}}.$$

- h) Daljica AB je vzporedna z V in poševna proti H ; njena razdalja od V je v , razdalji krajišč A in B sta oziroma a in b ; narisaj nje očrt in načrt.

$$AB = 0.035^m, v = 0.021^m, a = 0.021^m, b = 0.042^m.$$

- i) Daljica AB je poševna proti H in proti V ; razdalji krajišč A in B od H sta oziroma a in b , od V a' in b' in dolžina nje horizontalne projekcije je $A'B'$; narisaj nje očrt in načrt.

$$A'B' = 0.052^m, a = 0.008^m, b = 0.033^m, a' = 0.030^m, b' = 0.040^m.$$

Kakor pa narisujemo očrt in načrt daljic, takisto tudi posamezne stranice premočrtnega lika ter lik sam.

Kakšni projekciji ima krog v prostoru, ako je

- vzporeden s horizontalno vzmetno ravnino;
- z vertikalno „ „ ;
- pravokoten na obeh vzmetnih ravninah;
- „ „ horizontalni vzmetni ravnini in poševen proti vertikalni;
- „ „ vertikalni „ „ „ „ „ horizontalni;
- poševen proti vertikalni in horizontalni vzmetni ravnini?

- a) Kvadrat sè stranico $s = 0.053^m$ je vzporeden z V (H) in od te oddaljen za $a = 0.05^m$; narisaj njegov očrt in načrt.

- b) Narisaj očrt in načrt taistega kvadrata, ako ni stranica, ampak diagonala s H (V) vzporedna in od te za a oddaljena.

- c) Narisaj očrt in načrt jednakostraničnega trikotnika sè stranico $s = 0.60^m$. Recimo, da je vzporeden s H (V) in od te za $m = 0.025^m$ oddaljen, in da je stranica vzporedna s V (H) in od te za $n = 0.02^m$ oddaljena.

- d) Narisaj očrt in načrt pravilnega šesterokotnika sè stranico $s = 0.046^m$. Šesterokotnik je vzporeden s H in od te za $h = 0.03^m$ oddaljen, njega stranica je vzporedna z V in od te za $v = 0.03$ oddaljena.

- e) Narisaj očrt in načrt romba z diagonalama $d = 0.065^m$ in $d_1 = 0.042^m$. Romb je vzporeden z V in od te za $v = 0.033^m$ oddaljen, večja diagonala je vzporedna s H in od te za $h = 0.033^m$.

Drugi oddelek.

O prostorih in telesih.

1. O prostorih.

§. 164. Ravnina meji prostor na jedno, klin na dve strani; stranske ploskve telesnega ogla pa prostora samo na jedno stran ne omejujejo; tak prostor imenujemo piramidast.

Piramidast prostor postaja, ako premikamo v mislih trak ob stranicah mnogokotnika tako, da gre ves čas skoz nepremično točko zunaj ravnine mnogokotnika. Premikan trak, tako imenovana tvorna prema, napisuje stranske ploskve piramidastega prostora. Obseg mnogokotnika imenujemo (črto) vodnico, nepremično točko vrh in vse stranske ploskve skupaj obstransko površje piramidastega prostora.

Vodnica more biti tudi pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo in brezkončno majhnimi stranicami t. j. krog; potem je obstransko površje kriva ploskev. To krivo ploskev imenujemo plašč in od nje omejen prostor stožkovit (koničen).

Kolikokrat izpremeni tvorna prema med premikanjem svojo mer, ako je vodnica pravilen tri-, četvero, šestero-, dvanajstero-, štiriindvajsetero-, petdesetero-, tisočero kotnik, krog?

Ako pa premikamo tvorno premo ob obsegu mnogokotnika (kroga) na okolo ves čas vzporedno s prvo lego, omejuje obstransko površje (plašč) prizmatičen (valjast) prostor.

Piramidast (koničen) prostor prehaja v prizmatičen (valjast), ako oddaljujemo vrh od ravnine vodnice zmerom bolj; vrh, odmaknen v brezkončno razdaljo od ravnine vodnice, izpremeni prva dva prostora v druga dva, katera nista na dveh stranéh omejena.

Trak, kateri gre skoz vrh koničnega prostora in skoz središče vodnice, je os tega prostora. Tudi valjast prostor ima os; ta je trak, kateri gre skoz središče vodnice, vzporedno s tvorno premo.

Na plašči koničnega ali valjastega prostora moremo le v meri tvorne preme narisati preme; te imenujemo stranice onih prostorov.

Na piramidastem in prizmatičnem prostoru nahajamo toliko robov, kolikor ima vodnica stranic.

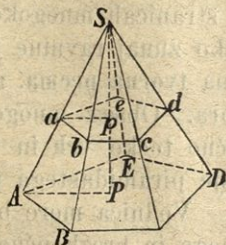
Izvod. Robi prizmatičnega ali stranice valjastega prostora so vzporedni.

§. 165. 1. Ako sečemo piramidast prostor z dvema vzporednima ravninama tako, da sečeta te ravnini vse njegove robe, tvorijo a) presečnice dva podobna lika in b) ploščini teh likov sta si kakor kvadrata njijinih razdalj od vrha.

a) Recimo, da je (lik 158) ravnina $ACD \parallel$ z ravnino acd in $SP \perp ACD$ ter $Sp \perp acd$, potem je tudi $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ i. t. d. (§. 147, 1) in $\sphericalangle bae = \sphericalangle BAE$,

$\sphericalangle cba = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle deb = \sphericalangle DCB$
i. t. d. (§. 150). Nadalje je $\triangle abs \sim \triangle ABS$, $\triangle bcs \sim \triangle BCS$,
 $\triangle eds \sim \triangle CDS$ i. t. d., torej
 $ab : AB = Sa : SA = bc : BC$
 $= Sc : SC = cd : CD$ i. t. d. in
 $abcd \dots \sim ABCD \dots$

Lik 158.



b) Ker je $ap \parallel AP$ (§. 147, 1), je tudi
 $Sp : SP = Sa : SA = ab : AB$ ali $\overline{Sp^2} : \overline{SP^2} = \overline{ab^2} : \overline{AB^2}$;
in ker sta si po §. 94

$abcd \dots : ABCD \dots = \overline{ab^2} : \overline{AB^2}$, sta si tudi
 $abcd \dots : ABCD \dots = \overline{Sp^2} : \overline{SP^2}$.

2. Ako sečemo plašč koničnega prostora z dvema vzporednima ravninama na okolo, tvorita presečnici dva podobna lika in njijini ploščini sta si kakor kvadrata njijinih razdalj od vrha.

Sledi iz 1., ker si moremo koničen prostor misliti piramidast.

Izvod. Ako gre jedna vzporednih ravnin skoz ravnino vodnice, sta podobna lika kroga.

Opomnja. Okrog in okrog sklenjena presečnica, katera ni vzporedna z ravnino vodnice, je **elipsa**. Ako pa sečemo koničen prostor z ravnino, katera je sè stranico vzporedna, ne seče ona plašča okrog in okrog in presečnica je **parabola**; takisto seče ravnina plašč koničnega prostora v **hiperboli**, ako ga ne seče okrog in okrog in tudi ni vzporedna z nobedno stranico. Elipso, parabolo in hiperbolo imenujemo zategadelj **stožkosečnice**.

3. Ako sečemo prizmatičen prostor z dvema vzporednima ravninama tako, da sečeta ravnini vse njegove robe, tvorijo presečnice dva skladna lika.

Kajti ona imata vse kote (§. 150) in vse stranice (§. 61) paroma jednake.

4. Ako sečemo plašč valjastega prostora na okolo z dvema vzporednima ravninama, tvorita presečnici dva skladna lika.

Sledi iz 3., ker si moremo valjast prostor misliti prizmatičen.

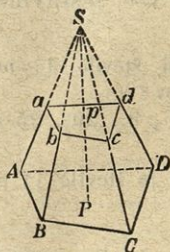
Izvod. Ako gre jedna vzporednih ravnin skoz ravnino vodnice, sta skladna lika kroga.

2. O telesih.

§. 166. Ravnina, katera seče piramidast prostor tako, da seče vse njegove robe, zapira tega na vse strani. Ta na vse

strani omejen prostor imenujemo **piramido**. Telo $SABCD$ (lik 159) je piramida.

Lik 159.



Piramido omejujejo **trikotniki** sè skupnim vrhom v vrhu piramide in **mnogokotnik**, kateri ima osnovnice onih trikotnikov za stranice.

Trikotnike imenujemo **obstranske ploskve**, mnogokotnik **osnovno ploskev** (osnovnino) in razdaljo vrha od osnovne ploskve **višino** piramide. Stranice osnovne ploskve imenujemo **osnovne robe**, vse druge pa **obstranske robe**. Število obstranskih ro-

bov je jednako številu obstranskih ploskev in tudi jednako številu osnovnih robov.

Ravnino, katero položimo skoz vrh in skoz diagonalo osnovne ploskve, imenujemo **diagonalen presek** (diagonalno presečnino) piramide.

Diagonalni preseki piramide so trikotniki.

Presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo, so tej podobne (§. 165, 1) in one so v perspektivni legi (§. 87.).

§. 167. Po številu obstranskih ploskev razdeljujemo piramide na tri-, četvero-, petero-, . . . n -tero strane. Tristrano piramido imenujemo tudi **četverec**, (tetraeder); v ožjem smislu je pa tetraeder le ona tristrana piramida, katera je omejena le od enakokranih trikotnikov.

Piramido imenujemo **pokončno**, ako so obstranski robi jednaki. V pokončni piramidi ležé ogli osnovne ploskve v obodu kroga, kateri ima podnožišče višine za središče (primerjaj §. 150, 6). Ako je osnovna ploskev pokončne piramide pravičen mnogokotnik, imenujemo jo **pravilno** piramido. Piramido, katera ni pokončna, imenujemo **poševno**. Obstranske ploskve pokončne piramide so enakokraki trikotniki; na pravilni piramidi so ti trikotniki tudi skladni. Razdaljo vrha od osnovnice takega trikotnika imenujemo **obstransko višino** pravilne piramide.

Diagonalni preseki pravilne piramide so tudi enakokraki trikotniki; presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo, so nji podobni pravilni mnogokotniki. Vsako piramido moremo z diagonalnimi preseki razdeliti na isto toliko visoke tristrane piramide.

Dve piramidi sta skladni t. j. moremo ji v mislih tako jedno v drugo položiti, da se krijejo ploskve, katere ji mejé, ako imata vse robe, robovne in ploskvene kote v istem redu paroma jednake. Simetrični pa sta, ako imata sicer vse sestavine paroma jednake vendar v nasprotnem redu.

a) Koliko je v 3-, 4-, 5-, . . . n strani piramidi število 1) mejnih ploskev, 2) robov, 3) oglišč, 4) robovnihi kotov?

b) Kolika je vsota vseh robovnihi kotov v 3-, 5-, 8-, 20-, 25-strani piramidi?

c) Število mejnih ploskev piramide je M ; koliko je število 1) robov, 2) oglov, 3) robovnihi kotov?

$$M = 4, 6, 10, 13, 19, m.$$

d) Število robov piramide je R ; koliko je število 1) obstranskih ploskev, 2) oglov, 3) robovnihi kotov?

e) Število oglov piramide je O ; koliko je število 1) mejnih ploskev, 2) klinov, 3) robovnihi kotov?

f) Ako pomenijo O , M , R oziroma število oglov, mejnih ploskev in robov, velja Eulerjev zakon $O + R = M + 2$. Izrazi ta zakon z besedami.

§. 168. Dve vzporedni presečni ploskvi piramidastega prostora zapirata z obstranskim površjem ta prostor na vse strani; ta prostor imenujemo **okrajšano piramido**. To telo je namreč piramida, okrajšana za manjšo tako zvano **dopolnilno piramido**.

Okrajšano piramido omejujejo trapeci in dva vzporedna mnogokotnika; prve imenujemo nje **obstranske ploskve**, druga dva nje **osnovni ploskvi**.

Izvod. Osnovni ploskvi sta podobni (§. 165, 1).

Takisto kakor pri piramidi razločujemo tudi pri okrajšani piramidi osnovne in obstranske robe, in takisto razdeljujemo okrajšane piramide na tri-, četvero-, petero-, . . . n tero strane, na pokončne in poševne. Razdaljo obeh osnovnin imenujemo višino okrajšane piramide.

Diagonalni preseki okrajšane piramide so trapeci, presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama, so tema podobne.

Obstranske ploskve pokončne okrajšane piramide so jednako-kraki trapeci; ti so na okrajšani pravilni piramidi tudi skladni.

Višina trapeca je obstranska višina pravilne okrajšane piramide.

O skladnosti in simetriji okr. piramide primerjaj §. 167.

Dopolnilna piramida je celi piramidi podobna, ker sta obe v istem redu omejeni od podobnih ploskev in ker imata v istem

redu jednake robovne in ploskvene kote. Ako nahajamo na dveh piramidah podobne ploskve in jednake kote pa v nasprotnem redu, sta simetrično podobni.

- Recimo, da ima piramida višino $V = 0.20^m$, in obstranski rob $S = 0.25^m$; kolika je višina dopolnilne piramide, ako je nje istoležni rob $s = 0.10^m$?
- Okrajšana piramida je $V = 0.36^m$ visoka in ima obstranski rob $s = 0.45^m$; kolika je višina cele piramide, ako je istoležni obstranski rob $S = 0.60^m$?
- Višina dopolnilne piramide je $\frac{2}{5}$ višine cele piramide; kako sta si njijini osnovni ploskvi? (§. 165, 1).
- Osnovni ploskvi dveh piramid sta si kakor $9 : 16$; kako sta si njijini višini?
- Višini dveh podobnih piramid sta $V = 0.25^m$, $v = 0.12^m$; kolika je osnovna ploskev druge piramide, ako je ona prve $o = 2.16 \square^{cm}$?

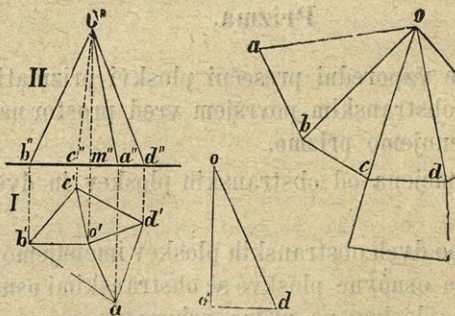
Geometrijski naris piramide.

§. 169. Ako razgrnemo vse mejne ploskve (mejnine) telesa zdržema po jedni ravnini, dobimo njega mrežo.

Projekcijo telesa na ravnino dobivamo, ako vzmetamo vse njegove črte in ploskve na to ravnino.

Z očrtom in načrtom telesa so določene črte in ploskve, od katerih zavisi prostornina teles. Očrt in načrt torej opisujeta geometrijsko njegovo prostornino.

Lik 160.



V liku 160. vidimo v I očrt, v II načrt in v III mrežo četrverostrane piramide.

V očrtu je osnovna ploskev, v načrtu pa višina piramide tolika, kolikoršna je v resnici.

V mreži so obstranske ploskve sè skupnim vrhom jedna zraven druge in osnovna ploskev se drži spodej jednega trikotnika.

Projekciji okrajšane piramide dobimo, ako določimo projekciji nje osnovnih ploskev in njihovih oglišč, s katerimi so tudi že določene projekcije obstranskih robov.

Ker so osnovni robi paroma vzporedni, so tudi njih projekcije.

1. a) Načrtaj mrežo pravilne tri-, četrno-, petero-, šestero-strane piramide tako, da se vse obstranske ploskve drže osnovne ploskve.
- b) Stvari iz lepenke take piramide. — Napravi takiste okrajšane piramide iz lepenke.
2. a) Narisaj projekciji pravilne tri-, četrno-, šestero-strane piramide, ako je osnovni rob $s = 0.02^m$ in višina $v = 0.053^m$ in osnovna ploskev vzporedna s H v razdalji $a = 0.01^m$.
- b) Pokončna piramida ima pravokotnik sè stranicama $a = 0.048^m$, $b = 0.021^m$ za osnovno ploskev in je visoka 0.06^m ; narisaj nje očrt in načrt, ako leži osnovna ploskev v H .
- c) Narisaj projekciji piramide, kakor zahteva prejšnja naloga, in določi projekciji presečne ploskve, katera je vzporedna z osnovno ploskvijo in od vrha 0.025^m oddaljena.
- d) Narisaj projekciji poševne piramide, katera ima katerikoli peterokotnik za osnovno ploskev v H .
- e) Narisaj projekciji pokončne okrajšane piramide, katera ima pravilen s H vzporeden peterokotnik za osnovno ploskev, ako je višina $v = 0.042^m$ in rob zgornje osnovne ploskve polovica vsakega spodnje.

Prizma.

§. 170. Dve vzporedni presečni ploskvi prizmatičnega prostora omejujeta s obstranskim površjem vred prostor na vse strani in ta prostor imenujemo prizmo.

Prizma je omejena od obstranskih ploskev in dveh osnovnih ploskev.

Presečnice po dveh obstranskih ploskev imenujemo obstranske robe in presečnice osnovne ploskve sè obstranskimi osnovne robe; razdaljo osnovnih ploskev pa višino prizme.

Izvodi. 1. Osnovni ploskvi sta skladna mnogokotnika.

Sledi iz §. 164, 3.

2. Vse obstranske ploskve so paralelogrami (§. 164, izv., §. 145, 1).

3. Vsi obstranski robi so jednaki.

Ravnino, katero položimo skoz dve istoležni diagonalni osnovnih ploskev, imenujemo **diagonalen presek** prizme.

Izvodi. 1. Vsak diagonalen presek prizme je paralelogram (§. 145, 1).

2. Vsaka presečna ploskev, vzporedna z osnovno je s to skladna (§. 165, 1).

3. Vsako mnogostrano prizmo moremo z diagonalnimi preseki razdeliti na isto toliko visoke tristrane prizme.

§. 171. Število obstranskih robov prizme je jednako številu osnovnih robov.

Po številu obstranskih ploskev razdeljujemo prizme na tri-, četvero-, petero-, . . . ntero strane prizme.

Ako stojé obstranski robi pravokotno na osnovni ploskvi, je prizma **pokončna**, drugače pa **poševna**; pokončna prizma je **pravilna**, ako je osnovna ploskev pravilen mnogokotnik.

Prizmo, na kateri sta osnovni ploskvi paralelograma, imenujemo **paralelepiped**: pokončen paralelepiped pa, na katerem je osnovna ploskev pravokoten paralelogram, **pravokoten paralelepiped**. Pravokoten paralelepiped z enakimi robi imenujemo **kocko** (kubus) in vsak nje rob **stranico** kocke. Vsak paralelepiped omejeva šest paralelogramov, vsak pravokoten paralelepiped šest pravokotnikov in vsako kocko šest kvadratov.

O skladnosti, simetriji in podobnosti prizem velja isto, kar smo o tem povedali pri piramidah (v §. 167 in §. 168).

a) Koliko je v 3-, 4-, 5-, . . . n strani prizmi število 1) mejnih ploskev, 2) osnovnih robov (klinov), 3) obstranskih robov (klinov), 4) vseh robov (klinov), 5) oglišč (telesnih oglov), 6) robovnihi kotov?

b) Število mejnih ploskev prizme je M ; koliko je število 1) osnovnih robov, 2) obstranskih robov, 3) robov, 4) oglov, 5) robovnihi kotov?
 $M = 11, 17, 23, 37, m.$

c) Število osnovnih robov na prizmi je R_0 ; koliko je število 1) vseh robov, 2) obstranskih klinov, 3) oglov, 4) mejnih ploskev, 5) robovnihi kotov?

$$R_0 = 8, 12, 28, 42, r.$$

d) Število obstranskih robov na prizmi je R_p ; koliko je število 1) osnovnih klinov, 2) vseh klinov, 3) oglov, 4) robovnihi kotov, 5) mejnih ploskev?

$$R_p = 5, 8, 13, 27, r.$$

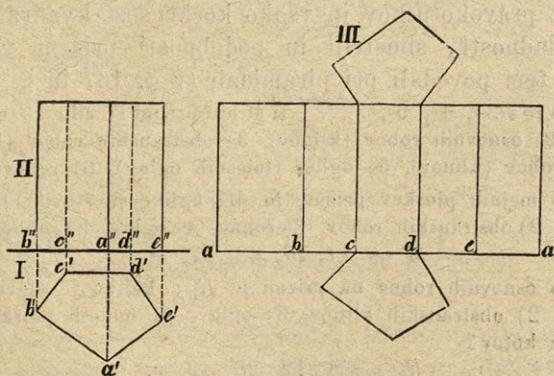
- e) Število vseh robov na prizmi je R ; koliko je število 1) osnovnih robov, 2) obstranskih klinov, 3) telesnih oglov, 4) mejnih ploskev?
 $R = 9, 15, 21, 27, r.$
- f) Število oglov prizme je O ; koliko je število 1) vseh klinov, 2) mejnih ploskev, 3) osnovnih robov?
 $O = 8, 24, 46, 52, o.$
- g) Število robovnihi kotov prizme je K ; koliko je število 1) obstranskih ploskev, 2) osnovnih klinov, 3) telesnih oglov?
 $K = 18, 30, 48, 72, k.$
- h) Ako pomenijo O, M, R oziroma število oglov, mejnih ploskev in robov velja Euler'jev zakon $O + M = R + 2$. Izrazi ta zakon z besedami.

Geometrijski naris prizme.

§. 172. V liku 161. I in II vidimo očrt in načrt, v III pa mrežo pokončne peterostrane prizme, katera stoji sè svojo osnovno ploskvijo na horizontalni ravnini in jedna njena obstranska ploskev je vzporedna z vertikalno ravnino. Očrt obeh osnovnih ploskev je z njima skladen, njiin načrt je pa daljica.

Ako zvežemo načrte pripadajočih oglišč, dobimo načrte obstranskih robov. V očrtu vidimo osnovno ploskev, v načrtu pa višino prizme, kakeršna je v resnici.

Lik 161.



Mrežo prizme dobimo, ako načrtamo obstranske ploskve, (paralelograme, pravokotnike) tako jedno zraven druge, da se držé skupaj, in osnovni ploskvi nad in pod jednem paralelogramom.

1. a) Narisaj mrežo pokončne tri-, četvero-, petero-, šestero-strane prizme, na kateri sta osnovni ploskvi pravilna mnogokotnika.
- b) Stvari iz lepenke take prizme.
2. a) Načrtaj očrt in načrt pokončne prizme s kvadratno osnovno ploskvijo, ako je osnovni rob $s = 0.054^m$, in obstranski rob $v = 0.065^m$, in ako je diagonalna osnovne ploskve naklonjena proti V za 60° .
- b) Narisaj očrt in načrt pravokotnega paralelepipeda, ako je jeden osnoven rob $a = 0.055^m$, drugi $b = 0.065^m$ in višina $v = 0.073^m$, in ako je osnovni rob naklonjen proti V za 45° .
- c) Osnovna ploskev pokončne 0.070^m visoke prizme je romb. Jedna diagonalna osnovne ploskve je $d = 0.061^m$, druga $d' = 0.045^m$, in prva je naklonjena proti V za 30° . Narisaj očrt in načrt te prizme.
- d) Narisaj očrt in načrt pravilne 1) peterostrane, 2) šesterostrane prizme z osnovnim robom $s = 0.030^m$ in z višino $v = 0.057^m$.

Stožec.

§. 173. Ravnina, katera seče koničen prostor na okolo, zapira tega s plaščem vred na vse strani. Ta na vse strani omejen prostor imenujemo **stožec**.

Stožec omejujeta kriva ploskev in krog; prvo imenujemo njega **plašč**, drugo pa njega **osnovno ploskev**. Razdaljo od vrha do osnovne ploskve imenujemo **višina**, daljico od vrha do središča osnovne ploskve **os stožca**. Stožec ima samo jeden rob in ta je meja osnovni ploskvi. Preme, katere moremo potegniti od vrha stožca do točke v obodu osnovne ploskve, imenujemo njega **stranice**.

Ako vrtimo pravokoten trikotnik okolo jedne katete, napiše njegova ploskev stožec; os tega stožca stoji na osnovni ploskvi pravokotno; ako stoji os stožca pravokotno na osnovni ploskvi, je stožec **pokončen**, drugače pa **poševen**.

V pokončnem stožci sta os in višina ista daljica, in vse stranice so jednake. Pokončen stožec, na katerem je stranica jednaka premeru osnovne ploskve, imenujemo **jednakostran**.

§. 174. 1. Presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo stožca, so krogi (§. 165, 2, izv.), in vrh je vnanje podobnišče teh krogov.

Kajti vsaka prema, katera gre skoz krajišči dveh vzporednih polumerov, gre tudi skoz vrh stožca.

2. Presečna ploskev skoz os je trikotnik.

Kajti vsaka prema, položena skoz os, seče osnovno ploskev v premeru in plašč v dveh stranicah stožca.

Presečno ploskev skoz os in višino imenujemo **znamenljiv trikotnik**; njega ravnina stoji na osnovni ploskvi pravokotno (§. 153) in razdeljuje stožec na dva simetrična dela.

Dve presečni ploskvi koničnega prostora, vzporedni z ravnino vodnice, zapirata s plaščem vred na vse strani omejen prostor, katerega imenujemo **okrajšan stožec**. To telo je namreč stožec, okrajšan za manjši tako zvani **dopolnilni stožec**. Okrajšan stožec omejujeta dva vzporedna nejednaka kroga, njega **osnovni ploskvi**, in kriva ploskev, njega **plašč**.

Razdaljo osnovnih ploskev imenujemo **višino** okrajšanega stožca.

Okrajšan stožec je pokončen ali poševen, kakor stožec sam.

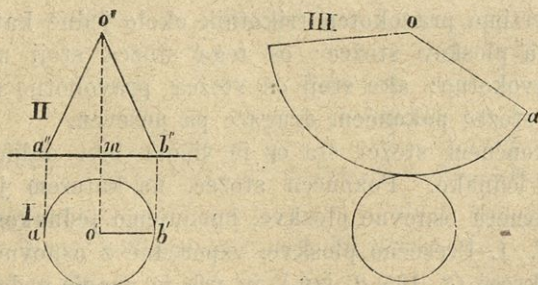
Diagonalni preseki okrajšanega stožca so trapezi; presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama, so krogi.

O skladnosti in simetriji stožcev primerjaj §. 167, o podobnosti §. 168.

Geometrijski naris stožca.

§. 175. V liku 162. I vidimo očrt, v II načrt pokočnega stožca; z očrtom je narisana osnovna ploskev (polumer), z načrtom višina in stranica stožca, kakeršni sta v resnici.

Lik 162.



Plašč pokončnega stožca, po ravnini razgrnen, je izsek kroga (lik III), v katerem je polumer oa stranica stožča in lok jednak obodu t. j. $3\frac{1}{7}$ krat tolik kakor premer osnovne ploskve. Ako nari-

samo še krog, ki je jednak osnovni ploskvi in z lokom v dotiki, napravili smo mrežo stožca (lik III).

1. Narisaj mrežo *a)* pokončnega stožca, *b)* pokončnega okrajš. stožca in napravi ji iz lepenke.
2. *a)* Narisaj projekciji pokončnega stožca, na katerem je polumer osnovne ploskve $r = 0.02^m$ in višina $v = 0.058^m$, ako je:
 - 1) Os stožca pravokotna na H ;
 - 2) os pravokotna na V ;
 - 3) os vzporedna s V in proti H naklonjena za 30° ;
 - 4) os vzporedna s H in proti V naklonjena za 45° .
- b)* Načrtaj projekciji pokončnega stožca, na katerem je polumer osnovne ploskve $r = 0.028^m$ in višina $v = 0.06^m$, ako leži osnovna ploskev v H ; potem narisaj projekciji 1) dveh presečnih ploskev, vzporednih z osnovno ploskvijo. 2) presečne ploskve, katera gre skoz sredo osi in stoji pravokotno na V in je proti H za 30° naklonjena, 3) presečne ploskve, katera gre vzporedno s stranico skoz sredo osi in stoji pravokotno na V .

Cilinder.

§. 176. Dve presečni ploskvi valjastega prostora, vzporedni z ravnino vodnice, zapirata s plaščem vred na vse strani omejen prostor, katerega imenujemo **valj** (cilinder).

Cilinder omejujejo kriva ploskev in dva kroga; prvo imenujemo njega **plašč**, drugi dve pa njega **osnovni ploskvi**. Meji osnovnih ploskev sta jedina roba cilindra. Razdaljo osnovnih ploskev imenujemo **višino** in daljico med središčema osnovnih ploskev **os** cilindra. Preme, katere moremo potegniti na plašči od točke v obodu jedne osnovne ploskve do točke v obodu druge osnovne ploskve, imenujemo **stranice**; te so vzporedne in jednake.

Ako stoji os cilindra pravokotno na osnovnih ploskvah, je cilinder **pokončen**, drugače pa **poševen**. Pokončen cilinder, na katerem je stranica jednaka premeru osnovne ploskve, imenujemo **jednakostran**.

Pravokotnik, katerega vrtiš okolo jedne njegove nepremične stranice, napisuje tudi pokončen cilinder.

§. 177. 1. Presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama cilindra, so krogi, skladni z osnovnima ploskvama. (165, izv. 4).

2. Presečna ploskev, položena skoz os cilindra ali vzporedno z njo, je paralelogram.

Kajti vsaka ravnina, katera gre skozi os ali vzporedno z njo, seče plašč v dveh vzporednih in enakih stranicah.

Presečna ploskev, položena skozi os pokončnega cilindra, je pravokotnik in skozi os jednakostranega cilindra kvadrat.

Znamenljiv paralelogram t. j. presečna ploskev skozi os in višino, razdeljuje cilinder na dva simetrična dela.

Ako sečemo cilinder z ravnino, katera ni vzporedna ne z osjo in ne z osnovnima ploskvama, je presečna ploskev elipsa.

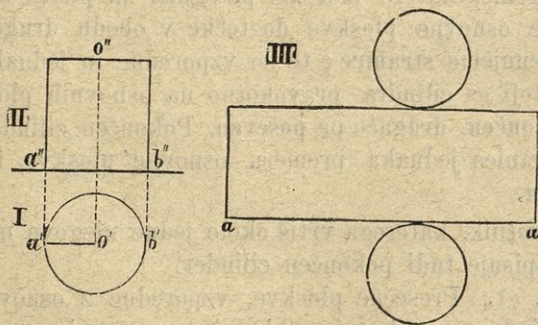
- Cilinder leži s plaščem na horizontalni ravnini; kakšno lego ima njega os proti isti ravnini in kakšno ploskev napiše ona, ako se cilinder potaka? — Kakšen lik napiše črta, v kateri se cilinder dotika ravnine?
- Na koliko strani moreš 1) kocko, 2) pravilno n -tero strano prizmo, 3) cilinder jednako lahko prevreči, ako stoji vsako teh teles na osnovni ploskvi?
- Koliko presečnih ploskev razdeljuje 1) pokončen, 2) poševen cilinder na dva simetrična dela?

O skladnosti in simetriji cilindrov primerjaj §. 167.

Geometrijski naris cilindra.

§. 178. Plašč pokončnega cilindra, razgrnen po ravnini, je pravokotnik, v katerem je osnovnica jednaka obodu t. j. $3\frac{1}{7}$ krat toliko kakor premer osnovne ploskve, in višina jednaka višini

Lik 163.



cilindra. V mreži pokončnega cilindra (lik 163, III) vidiš zraven razgrnjenega plašča še dva kroga (osnovni ploskvi), katera se dotikata osnovnice in tej nasprotne stranice pravokotnika.

Z očrtom (lik I) je narisana osnovna ploskev (polumer), z načrtom (lik II) višina pokončnega cilindra, kakeršni sta v resnici.

Narisaj mrežo pokočnega cilindra in napravi ga iz lepenke.

- Pokončen cilinder, na katerem je premer osnovne ploskve $2r = 0.03^m$ in višina $v = 0.085^m$, stoji na horizontalni vzmetni ravnini H ; narisaj očrt in načrt cilindra. Kaj je očrt in načrt 1) presečnih ploskev, vzporednih z osnovno ploskvijo, 2) presečne ploskve, katera gre skozi sredo osi in je naklonjena proti H za 45° (60° , ?)
- Narisaj projekciji jednakostranega cilindra z višino $v = 0.032^m$, ako je njega os vzporedna z V a proti H za 45° naklonjena.
- Narisaj projekciji kocke s stranico $a = 0.05^m$ in njej vpisanega jednakostranega cilindra, ako je os cilindra z V vzporedna in proti H za 45° naklonjena.

Š. 179. Telesa, katera so samo od ravnin omejena, imenujemo **ravnoploska ali poliedre**, vsa druga pa **krivoploska**.

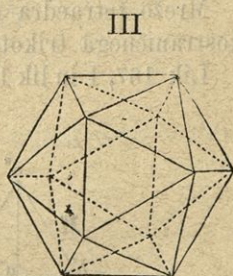
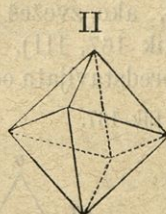
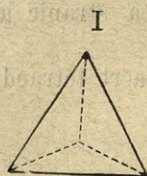
Poliedri so pravilni (v ožjem pomenu), ako so omejeni samo od pravilnih skladnih mnogokotnikov, kateri stvarjajo skladne ogle.

Pravilnih poliedrov je mogočih le pet.

Dokaz. Ker ima vsak ogel pravičnega telesa najmenj tri robovne kote, in ker je vsota teh kotov zmerom manjša od $4R$, moremo v enem oglu nahajati le:

- 3 kote po 60° — to telo je (pravilni) **tetraeder** (lik 164, I);
- 4 " " " — " " " " **oktaeder** (lik 164, II);
- 5 " " " — " " " " **ikozaeder** (lik 164, III);

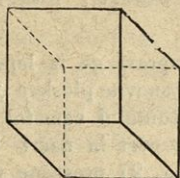
Lik 164.



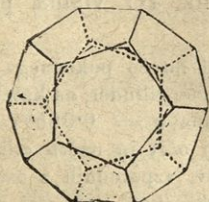
- 3 kote po 90° — to telo je (pravilni) **heksaeder** (lik 165);
- 3 " " 108° — " " " " **dodekaeder** (lik 166).

Šest kotov po 60° , 4 po 90° , 4 po 108° i. t. d. znašajo že $4R$ ali pa še več.

Lik 165.



Lik 166.



Tetraeder je omejen od 4 jednakostraničnih trikotnikov, ima 6 robov in 4 ogle.

Oktaeder je omejen od 8 jednakostraničnih trikotnikov, ima 12 robov in 6 oglov.

Ikozaeder je omejen od 20 jednakostraničnih trikotnikov, ima 30 robov in 12 oglov.

Heksaeder je omejen od 6 kvadratov, ima 12 robov in 8 oglov.

Dodekaeder je omejen od 12 pravih peterokotnikov, ima 30 robov in 20 oglov.

V vsakem pravilnem telesu je točka, katera je *a*) od vsake mejne ploskve, *b*) od vsakega ogla in *c*) od vsakega roba jednako oddaljena. To točko imenujemo **središče telesa**.

Geometrijski naris pravih teles.

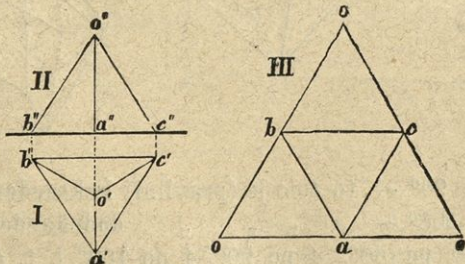
§. 180.

a) Tetraeder (četverec).

Mrežo tetraedra narediš, ako zvežeš polovišča stranic jednakostraničnega trikotnika (lik 167, III).

Lik 167, I in lik 167, II predstavljata očrt in načrt tetraedra.

Lik 167.

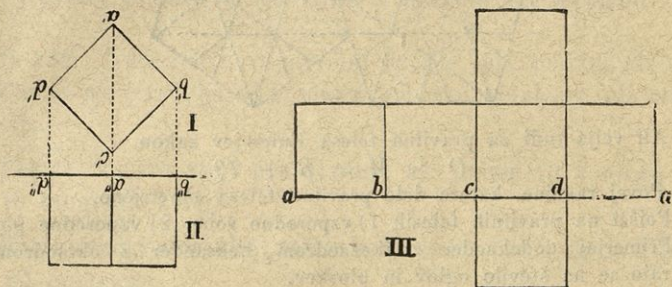


b) Heksaeder (šesterec, kocka, kubus).

Mrežo kocke napraviš, ako narišeš zdržema 4 kvadrate (obstranske ploskve) in na nasprotnih straneh jednega kvadrata še dva kvadrata (lik 168, III).

V liku 168 I in II vidiš očrt in načrt kocke.

Lik 168.

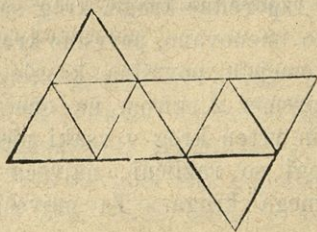


c) Oktaeder (osmerek).

Za to in za sledeča pravilna telesa hočemo narisati le. mrežo.

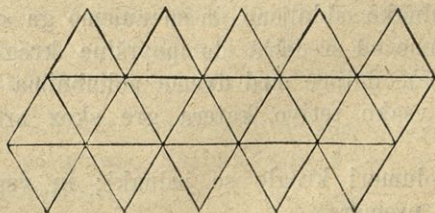
Mreža oktaedra obstoji iz dveh skladnih mrež tetraedra, kateri se držita z jedno stranjo skupaj (lik 169).

Lik 169.



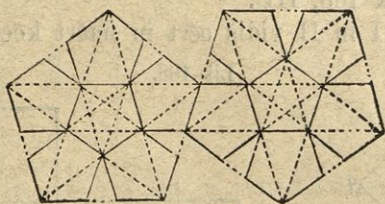
d) Ikozader (dvajseterec). Mrežo tega telesa vidiš v liku 170

Lik 170.



e) Dodekaeder (dvanajsterec). Mrežo vidiš v pridjanem liku 171.

Lik 171.



1. Ali velja tudi za pravilna telesa Euler-jev zakon

$$O + M = R + 2?$$
2. a) Povej ravnine, katere delé pravilna telesa simetrično.
 b) Poišči na pravilnih telesih 1) vzporedne robe, 2) vzporedne ploskve.
 c) Primerjaj dodekaeder z ikozaedrom, heksaeder z oktaedrom ozi-
 raje se na število oglov in ploskev.
3. a) Narisaj na lepenko mrežo 1) tetraedra z robom $a = 1^{\text{dm}}$; 2) ok-
 taedra z robom $a = 5^{\text{cm}}$; 3) dodekaedra z robom 2^{cm} ; 4) iko-
 zaedra z robom $a = 3^{\text{cm}}$, 5) heksaedra z robom $a = 1^{\text{dm}}$.
 b) Napravi ta telesa iz njih mrež.

Kroгла.

§. 181. Točke kroga, katerega vrtimo okolo nepremičnega premera, napisujejo **vzporedne kroge**, krog sam pa na vse strani zaprto ploskev, tako imenovano, **površino krogle ali obla** (oblino). Prostor, katerega omejuje površina krogle, imenujemo **kroglo** (oblo), nepremičen premer z ozirom na one vzporedne kroge **os**, nje krajišči **tečaja** in vrten krog v vsaki njegovi legi **meridijan**.

Vzporedni krogi so različni, največji je oni, kateri gre skozi središče vrtenega kroga. Ta največji krog imenujemo **ravnik** (ekvator).

Izvod. Ravnine vzporednih krogov stojé pravokotno na osi in na ravninah meridijanov.

Središče kroga, kateri napisuje površino krogle, je od vseh njenih točk enako oddaljeno, in imenujemo ga **središče krogle**. Daljice, potegnene od središča do površine krogle, imenujemo **polumere** (radije), daljice med dvema poljubnima točkama površine **tetive**, in vsako tetivo, katera gre skozi središče, **premer** krogle.

Izvod. Polumeri krogle so jednaki; in vsak polumer je jednak polovici premera.

Središče določuje lego krogle, polumer pa njeno kolikost.

Izvod. Dve krogli z enakima polumeroma sta skladni, z neenakima polumeroma pa podobni.

Točka, prema in ravnina z ozirom na kroglo.

§. 182. Točka leži v površini krogle, ali znotraj ali zunaj nje, ako je nje razdalja od središča jednaka polumeru ali manjša ali večja.

Prema, katera stoji pravokotno na polumeru v njega krajišči, je tangenta krogle.

Kajti razdalja vsake točke te preme razun dotikališča je večja od polumera.

Prema nima z kroglo ali nobedne točke skupne, ali jo seče v dveh točkah, ako je nje razdalja od središča večja ali manjša od polumera.

Kajti v prvem slučaju je razdalja najbližje nje točke od središča večja od polumera; v drugem slučaju je razdalja najbližje njene točke manjša od polumera, ona torej leži znotraj površine, in na premi sta le dve točki, kateri sta od središča za polumer oddaljeni.

Ako si napravimo v mislih tri preme pravokotno na os, jedno zunaj kroga, drugo kakor tangento in tretjo kakor sekanto tega kroga, napisuje pri vrtenji krog kroglo, preme pa vzporedne ravnine. Prva ravnina leži popolnoma zunaj krogle, druga se je dotika le v jedni točki, tretja jo seče v krogu.

Ravnino, katera se kroglo dotika le v jedni točki, imenujemo **dotikalno ravnino**; in ono, katera seče kroglo v krogu, **presečno ploskev**.

Ako si mislimo v vsaki točki krogle dotikalno ravnino, ga te obvijajo popolnoma. Površino krogle si torej smemo misliti obstoječo iz brezkončno mnogo, brezkončno majhnih ravnin.

Razdalja dotikališča, torej tudi dotikalne ravnine od središča je jednaka polumeru; vsaka druga točka te ravnine ima večjo razdaljo od središča.

- a) Koliko tangent moreš potegniti na površino krogle v jedni njeni točki? — V kakšni ploskvi leže vse te tangente?
- b) Koliko tangent moreš potegniti na površino od točke zunaj nje? — V kakšni ploskvi leže vse te tangente? — Kako poiščeš daljico med dano točko in dotikališčem take tangente? — V kakšni črti leže vsa ta dotikališča?
- c) Koliko tangent moreš potegniti na površino krogle, ako so vse z danim premerom vzporedne? — Kakšno ploskev stvarjajo te tangente? — V kakšni črti leže vsa njih dotikališča?
- d) Potegni v mislih polutrak iz središča krogle; v kakšnih ploskvah leže tangente, katere potegneš zaporedoma od vsake njegove točke, začeniši pri presečišču, do njegove točke v brezkončni razdalji? — V kakšnih črtah leže dotikališča tangent od vsake točke, in kako se razločujejo te črte med seboj z ozirom na lego in kolikost?
- e) Kolika je razdalja krogline tetive od središča krogle ($r = 0.246^m$), ako je jednaka polumeru krogle?
- f) Kolika je tetiva, katera je od središča krogle ($r = 0.246^m$) za $\frac{2}{3}$ polumera oddaljena?
- g) Kolik je polumer krogle, ako je tetiva $t = 0.133^m$ od središča za dvojno njeno dolžino oddaljena?
- h) Koliko kroglinih površin more iti skoz dve točki v prostoru? — V kakšni ploskvi leže središča vseh teh krogel? — Koliko krogel more iti skoz 3 točke v prostoru? — V kakšni črti leže središča vseh teh krogel? — Koliko krogel more iti skoz štiri točke, katere ne leže vse v isti ravnini? — Koliko točk torej določuje kroglo popolnoma?
- i) Koliko točk imata krogla in ravnina skupnih, ako leži prva na drugi? Koliko dotikalnih ravnin moreš položiti skoz jedno točko krogline površine?
- k) Koliko dotikalnih ravnin moreš položiti na kroglo od točke zunaj nje? — V kakšni črti leže dotikališča vseh teh dotikalnih ravnin?
- l) Kako ležita dve ravnini, kateri se dotikata krogle v krajišjih premera, jedna proti drugi?
- m) Recimo, da leži prema zunaj krogle; koliko dotikalnih ravnin moreš skoz njo položiti na kroglo?
- n) Koliko dotikalnih ravnin, vzporednih z dano ravnino, moreš položiti na kroglo?
- o) Krogla se potaka po poševni ravnini takó, da napiše dotikališče premo; določi natančneje pot središča.

§. 183. Vsak presek krogle z ravnino je krog.

Recimo, da je AMB (lik 172) presek krogle z ravnino, $OP \perp$ na ravnino AMB , potegnimo dve poljubni daljici PA in PM

k obodu presečne ploskve in še polumera OA in OM , potem je $\triangle AOP \cong \triangle MOP$, torej $AP = PM$ t. j. vsaka točka presečnice je od točke P jednako oddaljena ali presečnica je krog.

Krog AMB zovemo **kroglin krog**.

Ako pomeni R kroglin polumer, r polumer presečne ploskve, d razdaljo presečne ploskve od središča krogle, je

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Kedar je $d = 0$ ali $d = R$ ali $0 < d < R$, je $r = R$ ali $r = 0$ ali $r < R$ t. j.

1. Krog, ki gre skozi središče krogle, je največji; imenujemo **zategadelj take kroge največje krogline kroge**. Njega polumer je enak polumeru krogle.

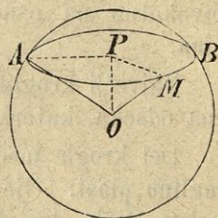
2. Kroglin krog je tem manjši, čim bolj je oddaljen od središča krogle.

3. Kroglin krog preide v točko, ako je od središča krogle za polumer oddaljen.

4. Kroglini krogi, jednako oddaljeni od središča krogle, so jednaki.

- Ali določuje največji kroglin krog to popolnoma z ozirom na lego in na kolikost? — Ali to stori manjši krog?
- Kako sta si razdalja presečne ploskve in polumer krogle, ako je presečna ploskev tretjina največjega kroga?
- Recimo, da je obod kroglinega kroga $\frac{2}{3}$ oboda največjega kroga iste krogle; kolika je razdalja prvega od središča krogle, ako je polumer krogle $r = 0.255^m$?
- Kako sta si razdalji dveh presečnih ploskev od središča krogle s polumerom $r = 0.165^m$, ako je obod prve 2krat, druge 4krat manjši od oboda največjega kroga?
- Kolik je polumer, obod in ploščina presečne ploskve, katera je od središča za $d = \frac{r}{2}$ oddaljena?
- Kolik je polumer krogle, ako je ploščina presečne ploskve $p = 0.1 \square^m$ in nje razdalja od središča $d = 0.245^m$?
- Kolik je polumer krogle, ako je obod presečne ploskve $o = 0.434^m$ in nje razdalja $d = 0.075^m$?

Lik 172.



§. 184. Vsaka ravnina razdeljuje kroglo na dva dela, katera imenujemo **kroglina odseka**. Kroglin odsek je omejen od krožnine in krive ploskve, katero imenujemo **krogline kapico**. Krog je

osnovna ploskev kroglineta odseka, in daljica, katero postavimo pravokotno na osnovno ploskev od središča do kapice, njega višina.

Največji kroglin krog razdeljuje kroglo na dva jednaka kroglineta odseka, katera **polukroglin** (poluobli) imenujemo.

Del krogle med dvema vzporednima presekom imenujemo **kroglineta plast**. Nje meji sta kroga (osnovni ploskvi) in kriva ploskev zvana **kroglineta pas**. Razdalja osnovnih ploskev je višina krogline plasti.

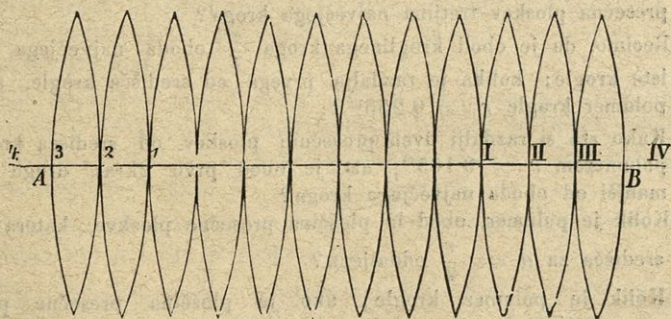
Plašč stožca, kateri ima svoj vrh v središču krogle, seče nje površino v krog. Prostor med plaščem imenujemo **kroglineta stožec** ali **kroglineta izsek**; on obstoji iz kroglinega odseka in pokončnega navadnega stožca.

Geometrijski naris krogle.

§. 185. Plašč stožca ali cilindra moremo po ravnini razgrniti, krogline površine vendar ne; prvi krivi ploskvi sta enojno-, druga pa dvojno- zavita.

Natančne krogline mreže torej ne moremo napraviti; približno pa dobimo tako-le:

Lik 173.

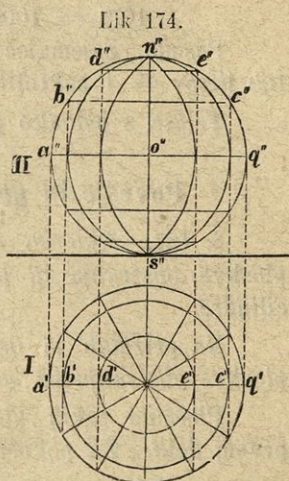


Razdeli daljico AB (lik 173), katera, je $3\frac{1}{7}$ -krat tolika kakor premer krogle, na 12 enakih delov in vnesi na nje podaljška od A in B dalje še po 9 takih delov. Ako napišeš od točk 1, 2, 3, ... in takisto od točk I, II, III, ... loke s polumerom, ki je enak 10 takim delom, dobiš 12 enakih dvokotnikov,

iz katerih precej natančno napraviš krogolino površino, ako jih primerno zvežeš.

V liku 174. I in II vidiš očrt in načrt krogle.

Očrt in načrt krogle sta kroga, jednaka največjemu kroglinemu krogu. Ako stoji kroglina os pravokotno na horizontalni vzmetni ravnini, je očrt vsakega meridijana premer, načrt jednega kroga, drugega premer in ostalih elipse; očrt vzporednih krogov koncentrični krogi, načrt vzporedne tetive.



- Narisaj očrt in načrt globusa s polumerom $r = 4^{\text{cm}}$, ako stoji njega os pravokotno na H in ako je prvi meridijan vzporeden z V ; in načrtaj še projekciji obeh povratnikov, (krogov) tečajnikov in meridijana, kateri leži 60° proti zahodu.
- Narisaj projekciji krogle s polumerom $r = 0.055^{\text{m}}$ in potem projekciji onega preseka, kateri gre skoz središče, stoji pravokotno na V in je proti H za 45° naklonjen.
- Narisaj projekciji krogle s polumerom $r = 3^{\text{cm}}$ in projekciji onega preseka, kateri je za $\frac{r}{2}$ od središča oddaljen, stoji na V pravokotno in je proti H za 30° naklonjen.

Tretji oddelek.

Merjenje teles.

§. 186. Vse ploskve skupaj, s katerimi je telo omejeno, imenujemo njega površje, vsoto vseh obstranskih ploskev pa njega obstransko površje ali odstranje. O merskih enotah glej §. 68. Kolikost prostora, katerega oklepajo mejne ploskve telesa, imenujemo njega prostornino (telesno vsebino ali telesnino). To merimo s prostorom znanega telesa in sicer s prostorom kocke, na kateri je rob jednak dolgotni jednoti. Tako kocko imenujemo kubičen meter (m^3), kub. decimeter (dm^3), kub. centimeter i. t. d.

$$1\text{m} = 1000\text{dm} \text{ à } 1000\text{cm} \text{ à } 1000\text{mm}.$$

Posodo, zajemajočo jeden kub. decimeter, imenujemo liter;
100 litrov = 1 hektoliter.

Telesa z jednako prostornino imenujemo prostorno-jednaka.

Površje in prostornina prizme in cilindra.

§. 187. Ako so a, b, p oziroma merska števila osnovne ploskve, obstranja in površja je $p = 2a + b$ za prizme in za cilindre.

Na prizmah je osnovna ploskev mnogokotnik, posamezne ploskve obstranja pa so paralelogrami.

Ploščino takih ploskev izračunamo, kakor smo osvetlili v prvem delu. Za pokočno prizmo je

$$b = ov,$$

kjer pomeni o obseg osnovne ploskve in v višino prizme.

Kocka je prizma, omejena s 6 skladnimi kvadrati; za njo je

$$p = 6s^2,$$

kjer pomeni s mersko število nje stranice.

Na cilindru sta osnovni ploskvi kroga, plašč pokončnega cilindra, razgrnen po ravnini, pa pravokotnik, v katerem je osnovnica jednaka obodu osnovne ploskve, višina pa stranici cilindra.

Potem je

$$b = 2r\pi \cdot v \text{ in } p = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v).$$

Ker je stranica s jednakostraničnega cilindra jednaka $2r$ je

$$b = 4r^2\pi \text{ in } p = 6r^2\pi.$$

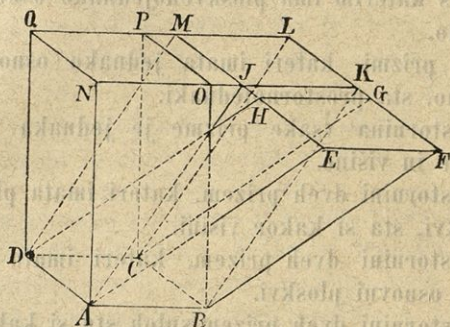
Primerjaj $a)$ obstranje, $b)$ površje jednakostraničnega cilindra z njega osnovno ploskvijo.

§. 188. Raven lik, katerega premikamo v mislih ves čas vzporedno s prvo lego, opisuje telo, katero je del plasti med ravninama, položenima skoz prvo in zadnjo lego; ako ga pa premikamo v njega lastni ravnini, je njega pot zmerom še ravnina. Prostornina telesa zavisi torej le od velikosti premikanega lika in od višine plasti.

Prizme (cilindri) so torej prostornojednake(i), ako imajo jednake osnovne ploskve in jednake višine.

Tako so n. pr. prizme (lik 175) prostornojednake.

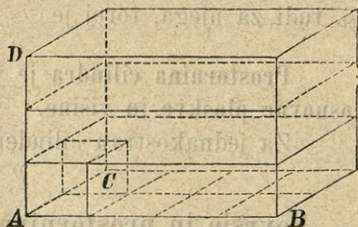
Lik 175.



§. 189. Recimo, da je pravokoten paralelepiped $ABCD$ (lik 176) a dolgostnih jednot dolg, b dolg. jednot širok in c dolg.

Lik 176.

jednot visok. V tem moremo a kubičnih jednot položiti na osnovno ploskev poleg dolžine, na celo osnovno ploskev pa b takih vrst, torej b krat a ali ab in v celi paralelepiped c takih plasti, torej c krat ab t. j. abc kubičnih jednot. Ako torej p prostornino pomeni, je



$$p = abc.$$

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu iz (merskih števil) dolžine, širine in višine.

Ker je ab ploščina osnovne ploskve, moremo tudi reči:

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.

Za kocko je $a = b = c = s$, kjer pomeni s mersko število nje stranice, in

$$p = s^3.$$

Prostornina kocke je jednaka tretji potenci nje stranice.

Ako so p_1 in p_2 , s_1 in s_2 oziroma merska števila prostornin in stranic dveh kock je,

$$p_1 : p_2 = s_1^3 : s_2^3.$$

Prostornini dveh kock sta si kakor tretji potenci njijinih stranic.

§. 190. Iz §. §. 188, 189 sledi:

1. Vsaka prizma je prostornojednaka s pravokotnim paralelepipedom, s katerim ima ploskvenojednako osnovno ploskev in jednako višino.

2. Dve prizmi, kateri imata jednako osnovno ploskev in jednako višino, sta prostornojednaki.

3. Prostornina vsake prizme je jednaka produktu iz osnovne ploskve in višine.

4. Prostornini dveh prizem, kateri imata ploskvenojednaki osnovni ploskvi, sta si kakor višini.

5. Prostornini dveh prizem, kateri imata jednaki višini, sta si kakor osnovni ploskvi.

6. Prostornini dveh prizem sploh sta si kakor produkta iz osnovne ploskve in višine.

Izrazi izvode 4, 5, 6 matematično.

§. 191. Ker si cilinder moremo misliti kakor prizmo z brezkončno mnogo obstranskih ploskev, veljajo izreki prejšnjega §. tudi za njega, torej je

$$p = r^2 \pi v.$$

Prostornina cilindra je jednaka produktu iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.

Za jednakostran cilinder je $v = 2r$, torej

$$p = 2r^3 \pi.$$

Površje in prostornina piramide, stožca, okrajšane piramide in okrajšanega stožca.

§. 192. Površje (p) piramide (stožca) je jednako vsoti iz osnovne ploskve (a) in odstranjanja (b).

$$p = a + b.$$

Osnovna ploskev piramide je mnogokotnik, odstranske ploskve pa so trikotniki.

Na pokončni piramidi je odstranje jednako polovici produkta iz obsega (o) osnovne ploskve in odstranske višine (v_1)

$$b = \frac{1}{2} o v_1,$$

kajti odstranski trikotniki so jednakokraki in skladni ter vsakega višina jednaka odstranski višini piramide.

Plašč pokončnega stožca, razgrnen po ravnini, je krogov izsek, čegar polumer je jednak stranici (s) in lok jednak obsegu osnovne ploskve stožca. Potem takem je

$$b = r \pi s.$$

Plašč pokončnega stožca je enak produktu iz oboda osnovne ploskve in iz višine.

Površje pokončnega stožca je tedaj

$$p = r^2 \pi + r \pi s = r \pi (r + s).$$

Za jednakostran stožec je

$$b = 2 r^2 \pi \text{ in } p = 3 r^2 \pi.$$

§. 193. Površje okrajšane piramide (okrajš. stožca) je jednako vsoti odstranjanja in obeh osnovnih ploskev (A in a).

$$p = b + A + a.$$

Obstranske ploskve pokončne okrajšane piramide so skladni jednakokraki trapezi; ploščina **jednega trapeca** je jednaka produktu iz (merskih števil) srednice in višine, **vseh trapecev** t. j. odstranjanja jednaka produktu iz vseh srednic t. j. iz obsega (ϕ) srednjega preseka in iz skupne višine (v_1), katera je tudi obstranska višina okrajšane piramide. Potem takem je

$$1) \dots b = \phi v_1.$$

Plašč pokončnega okrajšanega stožca, razgrnen po ravnini, je kolobarjev izsek, čegar širina je jednaka stranici (s) okrajš. stožca in čegar loka sta oboda osnovnih ploskev. Potem takem je

$$2) \dots b = \frac{2 R \pi + 2 r \pi}{2} \cdot s = (R + r) s \pi.$$

Dostavek. Za $r = 0$ je $b = R s \pi$ t. j. plašč pokončnega stožca si moremo misliti kakor plašč okrajš. stožca, pri katerem je polmer manjše osnovne ploskve enak ničli.

Za $r = R$ je $b = 2 R \pi s$ t. j. plašč pokončn. cilindra si moremo misliti kakor plašč okrajš. stožca, pri katerem sta polmera osnovnih ploskev jednaka.

Za celo površje pokončnega okrajš. stožca pa velja izraz

$$3) \dots p = R^2 \pi + r^2 \pi + (R + r) s \pi,$$

kar si lahko sam raztolmačiš.

§. 194. Ako premikamo v mislih horizontalno osnovno ploskev piramide vzporedno s prvo lego do vrha, ter jo ves čas tako izpreminjajo, da ostajajo nje oglišča v robih piramide, napiše ona prostornino piramide. Prostornine bi pa ne napisala čisto nič, ko bi jo premikali v nje lastni ravnini.

Prostornino piramide določuje potem takem kolikost premikane ploskve v vsakem trenutku premikanja in dolžina nje poti v navpični meri, torej višina piramide.

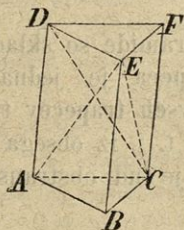
Ako pa imata dve piramidi ploskvenojednaki osnovni ploskvi in jednaki višini, sta tudi vsaki dve presečni ploskvi, vzporedni

z osnovno ploskvijo v isti razdalji od vrha, ploskvenojednaki. (Sledi iz §. 165, 1). Iz vsega sledi:

Dve piramidi s ploskvenojednakima osnovnima ploskvama in z enakima višinama sta prostornojednaki.

§. 195. Vsako tristrano prizmo moremo razsekati v tri prostornojednake piramide.

Lik 177.



Take piramide dobimo namreč, ako sečemo prizmo (lik 177) z ravninama AEC in DEC . Piramidi $ABCE$ in $DEFC$ sta prostornojednaki, ker imata isto višino in tudi isto osnovno ploskev (kakor prizma). Piramidi $DECA$ in $DEFC$ imata jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini, torej sta tudi oni prostornojednaki in po prejšnjem vse tri.

Izvod. Vsaka tristrana piramida je tretji del tristrane prizme z jednako osnovno ploskvijo in jednako višino.

§. 196. Iz §. §. 194 in 195 sledé ti-le izvodi:

1. Prostornina tristrane piramide je jednaka tretjemu delu produkta iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.

2. Vsaka piramida je prostornojednaka s tristrano piramido, katera ima ploskvenojednako osnovno ploskev in jednako višino.

3. Dve piramidi, kateri imata jednako osnovno ploskev in jednako višino, sta prostornojednaki.

4. Prostornina vsake piramide je jednaka tretjemu delu produkta iz osnovne ploskve in višine.

5. Prostornini dveh piramid, kateri imata ploskvenojednaki osnovni ploskvi, sta si kakor višini.

6. Prostornini dveh piramid, kateri imata jednaki višini, sta si kakor osnovni ploskvi.

7. Prostornini dveh piramid sploh sta si kakor produkta iz osnovnih ploskev in višine

Izrazi izvode 4, 5, 6, 7 matematično.

§. 197. Ker si moremo stožec misliti kakor piramido, veljajo izvodi 4, 5, 6, 7 prejšnjega paragrafa tudi za njega. Potem takem je

$$p = \frac{1}{3} r^2 \pi v.$$

Prostornina stožca je jednaka tretjemu delu produkta iz osnovne ploskve in višine.

Za pokončen stožec je $v = \sqrt{s^2 - r^2}$, kjer pomeni s mersko število stranice, torej

$$p = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}$$

Za jednakostran stožec je $s = 2r$ torej

$$p = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$$

§. 198. Prostornina okrajšane piramide je jednaka prostornini cele piramide zmanjšani za prostornino dopolnilne piramide.

$$p = \frac{AV}{3} - \frac{ax}{3},$$

kjer pomenijo A , a , V , x osnovno ploskev oziroma višino cele in dopolnilne piramide.

Ako pomeni v mersko število višine okrajšane piramide, je $V = v + x$ in $p = \frac{A(v+x)}{3} - \frac{ax}{3} = \frac{Av}{3} + \frac{A-a}{3}x$.

Ozira se na §. 165, 1 je

$$A : a = (v+x)^2 : x^2 \text{ ali } \sqrt{A} : \sqrt{a} = (v+x) : x \text{ ali } (\sqrt{A} - \sqrt{a}) : \sqrt{a} = v : x, \text{ iz česar sledi: } x = \frac{v \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}}.$$

Potem pa je

$$p = \frac{Av}{3} + \frac{A-a}{3} \cdot \frac{v \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} = \frac{Av}{3} + \frac{\sqrt{A} + \sqrt{a}}{3} \cdot v \sqrt{a} \text{ ali}$$

$$p = (A + \sqrt{Aa} + a) \frac{v}{3}.$$

Prostornina okrajšane piramide je jednaka s tretjim delom višine množeni vsoti obeh osnovnih ploskev in njijine srednje geometrijske proporcijonale.

Za okrajšan stožec, katerega si moremo misliti kakor okrajšano piramido, je potem

$$p = (R^2 \pi + Rr\pi + r^2 \pi) \frac{v}{3}.$$

Prostornina okrajšanega stožca je jednaka s tretjino višine množeni vsoti obeh osnovnih ploskev in njiju srednje geometrijske proporcijonale.

§. 199. Površje pravilnih teles izračunamo, ako množimo mersko število jedne obstranske ploskve z njih številom.

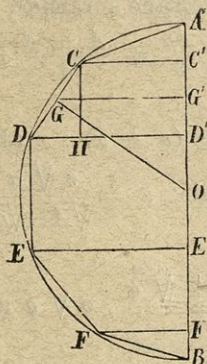
Prostornino pravih teles pa dobimo, ako množimo površje s stretim delom razdalje središča od jedne obstranske ploskve. Kajti središče si moremo misliti kakor vrh piramid, katerim so obstranske ploskve pravih teles osnovne ploskve.

Pravilen tetraeder si pri tem izračunanji moremo tudi misliti kakor piramido, in kocko kakor prizmo.

Površje in prostornina krogle.

§. 200. Ako napravimo na površino krogle brezkončno mnogo vzporednih krogov, razdelimo njeno površje na brezkončno mnogo pasov in na dve brezkončno majhni kapici. Pase si moremo misliti kakor plašče pokončnih okrajš. stožcev, takisto kapici (§. 193, dostavek), in površje krogle je jednako vsoti vseh teh plaščev.

Lik 178.



Plašč (a) okrajš. stožca je

$$a = (r + r') s \pi \quad (\S. 193, 2).$$

Ako si mislimo krog, katerega vrtime okolo osi AB (lik 178), vpisan pravičen mnogokotnik z brezkončno mnogo brezkončno malimi stranicami, napiše krog, takisto tudi mnogokotnik kroglo in stranice mnogokotnika plašče onih okraj. stožcev.

Te plašče moremo potem izraziti s polumerom krogle in z onim delom osi, kateri je jednak višini okrajšanega stožca.

Recimo, da je CD brezkončno majhna stranica (s) plašča (mnogokotnika), katero si večjo risati moramo, kakor si jo mislimo, $OG = R$ polumer krogle ali razdalja stranice CD od središča, $CC' = r$ in $DD' = r'$, GG' srednica trapeza CC' , DD' t. j. njeno mersko število srednje število onih dveh polumerov torej $GG' = \frac{r + r'}{2}$, in $C'D'$ višina (v) stožca. Potem je plašč okrajš. stožca

$$a = (r + r') s \pi = 2 \overline{GG'} \cdot s \pi.$$

Ako napravimo $CH \perp DD'$, je $CH = C'D'$ in $\triangle DHC \propto \triangle GOG'$, torej $CD : CH = OG : GG'$ ali $s : v = R : \overline{GG'}$, iz česar sledi

$$s \cdot \overline{GG'} = vR \text{ in } a = 2R\pi \cdot v.$$

Plašč okrajš. stožca je torej v tem slučaju enak produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz onega dela osi, kateri je enak višini okrajšanega stožca.

Površje (p) krogle je jednako vsoti vseh onih plaščev ali produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz vseh dotičnih delov osi skupaj t. j. iz osi same, katera je pa kroglin premer. Potem je

$$p = 2 R \pi \cdot 2 R = 4 R^2 \pi.$$

Površje krogle je jednako štirikratni ploščini največjega kroglinega kroga.

Ako pomenijo P , p , R , r oziroma merska števila površij in polumerov dveh krogel, je

$$P : p = R^2 : r^2.$$

Površji dveh krogel sta si kakor kvadrata njijinih polumerov.

Iz prejšnjega sledi kakor za kroglo tudi za kapico in pas krogle:

Ploščina kapice ali kroglinega pasa je jednaka produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz nje (njega) višine.

§. 201. Z vzporednimi krogli in z meridijani razdelimo površje krogle na štirioglate (pri tečajih trioglate) like, kateri so krivi; in s polumeri (R), katere potegnemo do onih oglov, narišemo piramide za polumer visoke s krivimi osnovnimi ploskvami, v katere moremo kroglo razsekati. Ako si mislimo število vzporednih krogov in meridijanov brezkončno, misliti si smemo one like (osnovne ploskve piramid) ravne. Prostornina jedne piramide je pa jednaka tretjini z višino (polumerom) množene osnovne ploskve in prostornina (P) vseh piramid t. j. prostornina krogle tretjini s polumerom množenih vseh osnovnih ploskev t. j. tretjini s polumerom množenega površja O krogle.

$$P = \frac{1}{3} OR.$$

Prostornina krogle je jednaka tretjini s polumerom množenega površja.

Ker je $O = 4 R^2 \pi$, je tudi

$$P = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Dostavki. Ako pomenijo P , p , R , r oziroma merska števila prostornin in polumerov dveh krogel, je

$$P : p = R^3 : r^3.$$

1. Prostornini dveh krogel sta si kakor tretji potenci njihovih polumerov.

2. Prostornina kroglinega izseka je jednaka tretjini s polumerom množene njega kapice.

3. Kroglin odsek, kateri je manjši ali večji od polukrogle, si moremo misliti kakor diferenco ali vsoto kroglinega izseka in pokončnega stožca, kateri ima z odsekom skupno osnovno ploskev in vrh v središči krogle, in takisto izračunjavamo tudi njega prostornino.

4. Krogolino plast si mislimo kakor diferenco dveh kroglinih odsekov in takisto izračunjavamo njega prostornino.

Računske naloge.

1. Merska števila stranice, površja in prostornine kocke so oziroma s , p in t ; izračunaj iz jedne teh količin drugi dve.

$$a) s = 1^m 4^{dm}; \quad b) p = 50 \square^{dm} 80 \cdot 86 \square^{cm}; \quad t = 12 \cdot 326391 \bigcirc^m;$$

$$s = 1 \cdot 375^m; \quad p = 50 \square^{dm}; \quad t = 29791 \bigcirc^{cm}.$$

2. Kockasta, zgorej odprta posoda iz ploščevine zajema $8 \bigcirc^{dm}$; koliko ploščevine je bilo za njo potreba?

3. Kolika je prostornina (stranica a) kocke, ako je nje stranica (prostornina) za m večja ali za n manjša od stranice (prostornine) druge kocke s telesnino t' (sè stranico a')?

$$a) t' = 125 \bigcirc^m, \quad b) a' = 12^m,$$

$$m = 3^{cm}, \quad m = 1016 \bigcirc^m,$$

$$n = 4^{dm}; \quad n = 728 \bigcirc^m.$$

4. Stranici dveh kock sta a in a' ; kolika je stranica a'' tretje kocke, katera je jednaka vsoti (diferenci) prvih dveh kock?

$$1) a = 5^m, \quad 2) a = 4^m,$$

$$a' = 15^{dm}; \quad a' = 20^{dm}.$$

5. Ako pretopiš tri svinčene kocke sè stranicami $a = 2^m$, $a' = 25^{dm}$, $a'' = 15^{dm}$ v jedno kocko; kolika je stranica te kocke?

6. Recimo, da je prostornina kocke t ; kolikokrat večja ali manjša je stranica druge kocke, ako je njena prostornina m krat večja ali n krat manjša?

$$m = 27, 3 \frac{3}{8}, 0 \cdot 729, 0 \cdot 000512, a;$$

$$n = 8, 64, 2 \frac{10}{27}, 1728, b.$$

7. Stranica kocke je a ; kolika je stranica druge kocke, ako je njena prostornina m krat večja ali n krat manjša?

$$a = 4^{\text{dm}}, 3^{\text{cm}}, 6^{\text{dm}}, p;$$

$$m = 27, 125, 27, r;$$

$$n = 8, 17, 642, s.$$

8. Kako sta si prostornini t in t' dveh kock, ako sta si njijini stranici kakor $m : n$?

$$m = 2, \frac{2}{3}, 0.5, a;$$

$$n = 3, \frac{3}{4}, 1.5, b.$$

9. Kako sta si stranici a in a' dveh kock, ako sta si prostornini kakor $m : n$?

$$m = 27, \frac{8}{27}, 3\frac{3}{8}, a;$$

$$n = 8, \frac{125}{216}, 2\frac{10}{27}, b.$$

10. Kako sta si površji p in p' dveh kock, ako sta si njijini prostornini kakor $m : n$?

$$m = 27, 64, 0.512, a;$$

$$n = 8, 125, 0.125, b.$$

11. Kako sta si prostornini t in t' dveh kock, ako sta si njijini površji kakor $m : n$?

$$m = 4, 64, 1\frac{17}{46}, a;$$

$$n = 19, 625, 7\frac{1}{9}, b.$$

12. Koliko kock sè stranico s je v kocki sè stranico s' ?

$$s = 2^{\text{m}}, 1\frac{1}{2}^{\text{m}}, 2.5^{\text{m}}, a;$$

$$s' = 4^{\text{m}}, 3^{\text{m}}, 50^{\text{dm}}, b.$$

13. Kolika je prostornina prizme z osnovno ploskvijo o in višino v ?

$$o = 0.128\text{cm}^2, 110.3\text{cm}^2, a;$$

$$v = 0.5^{\text{m}}, 0.75^{\text{m}}, b.$$

14. Izračunaj iz prostornine t in višine v prizme nje osnovno ploskev.

$$t = 462\text{cm}^3, 4.375\text{cm}^3, a;$$

$$v = 0.04^{\text{m}}, 0.125^{\text{m}}, b.$$

15. Izračunaj iz prostornine t in osnovne ploskve o prizme nje višino.

$$t = 462\text{cm}^3, 4.375\text{cm}^3, a;$$

$$o = 77\text{cm}^2, 1.25\text{cm}^2, b.$$

16. Kako sta si prostornini dveh prizem z osnovnima ploskvama o in o' in višinama v in v' ?

$$\begin{aligned}
 o &= 2.33 \square^m, 7.12 \square^{dm}, 115.2 \square^m, a, a, a; \\
 v &= 0.67^m, 3.5^{dm}, 10.5^m, b, b, b; \\
 o' &= 2.574 \square^m, 7.12 \square^{dm}, 7.2 \square^m, c, a, c; \\
 v' &= 0.67^m, 7^{dm}, 5.184, b, c, d.
 \end{aligned}$$

17. Dana je pokončna prizma; kako izračunaš *a*) obseg osnovne ploskve, ako sta plašč in njega višina, *b*) višino, ako sta plašč in obseg osnovne ploskve znana?

18. Kako sta si obstranski površji dveh pokončnih prizem, ako sta obsega njiju osnovnih ploskev *o* in *o'* in njiju višini *v* in *v'*?

$$\begin{aligned}
 o &= 0.875^m, 1.35^m, 10.71^m, a, a, a; \\
 v &= 0.42^m, 0.91^m, 0.25^m, b, b, b; \\
 o' &= 0.125^m, 1.35^m, 42.50^m, c, a, c; \\
 v' &= 0.42^m, 1.17^m, 0.90^m, b, c, d.
 \end{aligned}$$

19. Kako sta si obstranski površji dveh pokončnih prizem, ako sta *a*) obsega osnovnih ploskev jednaka, *b*) višini jednaki, *c*) obsega in višini različni?

20. Izračunaj površje in prostornino 0.16^m visoke pokončne prizme, na kateri je osnovna ploskev pravokoten trikotnik s katetama $a = 0.14^m$ in $b = 0.26^m$.

21. Pokončna prizma, 0.32^m visoka, ima prostornino $t = 0.10^m$; koliki so osnovni robi, ako je osnovna ploskev enakokrak pravokoten trikotnik?

22. Koliki sta površje in prostornina pokončne 0.215^m visoke prizme, ako je nje osnovna ploskev jednakokraničen trikotnik s stranico $s = 0.115^m$?

23. Koliki sta površje in prostornina pravilne tristrane prizme, ako so vsi robi jednaki $r = 0.164^m$?

24. Tristrana pravilna prizma ima prostornino $t = 0.0720^m$; ako rase nje višina za 0.04^m , rase prostornina za 0.002880^m ; koliki so nje robi od začetka?

25. Robi tristrane pravilne prizme so vsi jednaki; koliki so ti robi, ako je prostornina $t = 0.07350^m$?

26. Osnovna ploskev pokončne, 0.2^m visoke prizme, je romb z diagonalama $d = 0.18^m$ in $d' = 0.142^m$; izračunaj nje površje in prostornino.

27. Osnovna ploskev 0.28^m visoke prizme je enakokrak trapez z vzporednicama $a = 0.73^m$, $b = 0.52^m$ in nevzporednico $c = 0.336^m$; koliko je nje površje in kolika prostornina?

28. Koliko je površje in prostornina pravilne šesterostrane, 0.32^m visoke prizme, ako je a) osnoven rob $s = 0.072$, b) razdalja središča osnovne ploskve od nje stranice $r = 0.14^m$, c) razdalja središča od oglišča osnovne ploskve $R = 0.19^m$?

29. Pravilna šesterostrana prizma, katera ima vse robe jednake, ima prostornino $t = 0.3275 \text{ } \text{dm}^3$; koliki so nje rob?

30. V pokončnem pravokotnem paralelepipedu je razmerje v jednom oglu stikajočih se robov $3 : 4 : 18$, njih vsota 50^m . a) Koliki sta njega površje in prostornina, b) kolik je rob prostornojednake kocke?

31. Osnovna ploskev pokončne 6^{dm} visoke prizme je kvadrat. Kolik je osnoven rob in kolika prostornina prizme, ako je površje $72.5 \text{ } \text{dm}^2$?

32. Recimo, da so r, v, o, t oziroma merska števila polumera, višine, plašča, prostornine pokončnega cilindra; izračunaj iz dveh teh količin obe drugi.

- 1) $r = 1.57^{\text{dm}}$, a ; 2) $v = 1.5^m$, a ; 3) $r = 1.85^m$, a ;
 $v = 1.19^m$, b . $o = 1.1386 \text{ } \text{dm}^2$, b . $t = 37.2680 \text{ } \text{dm}^3$, b .
 4) $o = 20 \text{ } \text{dm}^2$, a ;
 $t = 20 \text{ } \text{dm}^3$, b .

33. Ako je pokončen cilinder prejšnje naloge jednakostan, ali moraš tudi dve onih količin vedeti, da moreš izračunati druge? — Dana je jedna izmed količin r, v, o, t ; izračunaj vsako drugo.

34. Ako je prostornina pokončnega cilindra $p = 310 \text{ } \text{cm}^3$ in višina $v = 0.09^m$; koliko je njega površje?

35. Dan je plašč $o = 1.35 \text{ } \text{dm}^2$ in polumer $r = 0.15^m$ pokončnega cilindra; kolika je višina v in prostornina t ?

36. Kako sta si dva cilindra, ako sta njiju polumera r in r' in njiju višini v in v' ?

- $r = 0.05^m, 0.055^m, 0.06, a, a, a$;
 $v = 0.06^m, 0.06^m, 0.05^m, b, b, b$;
 $r' = 0.15^m, 0.055^m, 0.15^m, c, a, c$;
 $v' = 0.06^m, 0.24^m, 0.12^m, b, c, d$.

37. Kako sta si plašča dveh pokončnih cilindrov, ako sta polumera njiju osnovnih ploskev r in r' in njiju višini v in v' ?

$$r = 0.06^m, 0.12^m, 0.04^m, a, a, a;$$

$$v = 0.09^m, 0.16^m, 0.03^m, b, b, b;$$

$$r' = 0.18^m, 0.12^m, 0.18^m, a, c, c;$$

$$v' = 0.09^m, 0.24^m, 0.20^m, c, b, d.$$

38. Koliki sta površje in prostornina valjaste cevi, ako je $R = 0.19^m$, $r = 0.17^m$ in $v = 4^m$? — Reši to nalogo tudi z občnimi števili.

39. Valjasta posoda meri 36 litrov; koliko meri posoda, na kateri so razsežnosti dvakrat tolike?

40. Cement za liter ima valjasto obliko in njega višina je dvakrat toliko kakor premer; kolike so razsežnosti tega cementa na milimetre?

41. Valjasto deblo s premerom $d = 0.5^m$ in z dolžino $a = 15^m$ si misli obtesano na kvadratno bruno; koliko lesa gre v treske?

42. Železen cilinder, 1.5^m dolg, tehta 589.05^{kg} ; kolik je njega premer (spec. težk. = 7.78)?

43. Kolik je tlak 750^{mm} visokega živosrebrene stolpa na krožnato osnovno ploskev s polumerom $r = 1^{\text{cm}}$ (spec. težk. 13.6)?

44. Za vodovod potrebujejo 840^m dolge svinčene cevi, katere so 16^{cm} debele in imajo 2^m svetlobe; koliko velja svinec, ako stane 1 Kg. 40 kr. (spec. težk. = 11.35)?

45. Koliko tehta 2^m dolg votel železen cilinder, ako znaša njega vnani obseg $o = 2.094^m$ in debelost stene 0.04^m ?

46. Prostornina 4^{dm} dolzega cilindra znaša 200^{cm} ; izdolbi ga koncentrično tako, da je ostala prostornina le $\frac{1}{4}$ začetne; koliko je stena votlega cilindra debela?

47. Površje jednakostranega cilindra je $p = 3560^{\text{cm}}$; izračunaj površje in prostornino najmanjše kocke, iz katere ga moreš izrezati.

48. Premer in višina cilindra sta si kakor $3 : 5$; izračunaj iz njega površja $m = 1.30^m$ njega prostornino.

49. Plašč cilindra je $o = 10000^{\text{cm}}$; kolik je njega premer in njega višina, ako je obod osnovne ploskve, $1\frac{1}{2}$ krat večji od njega višine.

50.

a) Koliko je površje pravilne a) četverostrane, b) tristrane, c) šesterostrane piramide, ako je osnoven rob $s = 0.25^m$ in obstranska višina $v_1 = 0.4^m$?

b) Koliko je površje teles prejšnje naloge, ako je dan namesto v_1 obstranski rob $s_1 = 0.2^m$?

51. Koliko je površje okrajšane pravilne a) tristrane b) četverostrane, c) šesterostrane piramide, ako je spodnj osnoven rob $s = 0.15^m$, zgorenj osnoven rob $s_1 = 0.08^m$ in obstranska višina $v_1 = 0.15^m$?

52. Izračunaj površje pokončne okrajšane štiristrane piramide, na kateri sta osnovni ploskvi pravokotnika, ako sta različni stranici spodnje osnovne ploskve $a = 0.5^m$, $b = 0.175^m$, zgornje osnovne ploskve pa kakor 5 : 3 v razmerji z istoležnima spodnjima, in ako je obstranska višina $v_1 = 0.3^m$?

53. Kolika je prostornina piramide z osnovno ploskvijo o in višino v ?

$$o = 1.2\Box^m, 0.05\Box^m, a;$$

$$v = 0.81^m, 0.27^m, b.$$

54. Izračunaj višino piramide, ako sta nje prostornina t in osnovna ploskev o dani.

$$t = 0.36\Box^m, 1.728\Box^m, a;$$

$$o = 1.2\Box^m, 7.2\Box^m, b.$$

55. Kako sta si prostornini dveh piramid z osnovnima ploskvama o in o' in višinama v in v' ?

$$o = 0.17\Box^m, 1.27\Box^m, 100\Box^{cm}, a, a, a;$$

$$v = 1.2^m, 1.75^m, 8^{cm}, b, b, b;$$

$$o' = 0.17\Box^m, 6.35\Box^m, 24\Box^{cm}, a, c, c;$$

$$v' = 0.6^m, 1.75^m, 10^{cm}, c, b, d.$$

56. Kako sta si prostornini dveh podobnih piramid a) z višinama $V = 0.25^m$ in $v = 0.075^m$, b) z istoležnima osnovnima roboma $S = 1.2^m$ in $s = 0.84^m$?

57. Kako sta si višini ali dva istoležna roba podobnih piramid s prostorninama $T = 3.375$ in $p = 1.331$?

58. Kolika je prostornina teles naloge 50, 51?

59. Koliko je površje in prostornina pravilne a) tristrane, b) četverostrane piramide z osnovnim robom $s = 0.135^m$, ako so vsi robi jednaki?

60. Višina pravilne četrstrostrane piramide je dvakrat toliko kakor osnoven rob; koliki so robi, ako je prostornina $t = 0.3456 \text{ m}^3$?

61. Robi pravilne tristrane piramide so vsi jednaki, kolika je prostornina, ako je površje $m = 0.224 \text{ m}^2$?

62. Kolika je prostornina okrajš. piramide s kvadratnima osnovnima ploskvama, ako je spodenj rob $S = 0.25 \text{ m}$, zgorenj rob $s = 0.16 \text{ m}$ in višina $v = 0.08 \text{ m}$?

63. Pravilna četrstrostrana piramida in pravilna tristrana piramida imata isto prostornino $V = 0.125 \text{ m}^3$ in isto višino $v = 0.6 \text{ m}$; primerjaj njiju površji.

64. Piramida z osnovno ploskvijo $o = 0.22 \text{ m}^2$ in z višino $v = 0.36 \text{ m}$ je prostornojednaka s kocko; kolik je rob kocke?

65. Napravi si iz pravilne četrstrostrane piramide z osnovnim robom $s = 0.145 \text{ m}$ in z višino $v = 0.21 \text{ m}$ okrajš. piramido s prostornino $t = 500 \text{ cm}^3$; kolika je razdalja preseka od vrha?

66. Streha cerkvenega stolpa, katero hočejo pokriti s ploščevino, ima podobo pravilne šesterstrostrane piramide; recimo, da je obseg osnovne ploskve $o = 12.5 \text{ m}$ in obstranska višina $v_1 = 7.2 \text{ m}$; koliko $a = 0.56 \text{ m}$ dolgih in $b = 0.33 \text{ m}$ širokih ploščevin je potreba, ako se je zaradi stikanja ploščevin 5% več porabi?

67. Recimo, da so r , v , s , p , t oziroma merska števila polumera, višine, stranice plašča, prostornine pokončnega stožca; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

- 1) $r = 3.5 \text{ dm}$, $v = 8.4 \text{ dm}$; 2) $r = 0.8 \text{ m}$, $s = 1.25 \text{ m}$;
 3) $r = 1.76 \text{ m}$, $p = 13.56 \text{ m}^2$; 3) $r = 4.21 \text{ dm}$, $t = 1137.85 \text{ dm}^3$;
 5) $v = 0.5 \text{ m}$, $s = 0.8 \text{ m}$; 6) $v = 3.5 \text{ dm}$, $t = 55.194 \text{ dm}^3$.

68. Izračunaj površje in prostornino jednakostanega stožca, ako je a) višina $v = 0.1 \text{ m}$, b) polumer osnovne ploskve $r = 0.25 \text{ m}$, c) stranica $s = 0.465 \text{ m}$.

69. Izračunaj iz površja $p = 4310 \text{ m}^2$ jednakostanega stožca njega prostornino.

70. Prostornina jednakostanega stožca $t = 0.156 \text{ m}^3$; koliko je njega površje?

71. Kako sta si prostornini dveh stožcev, ako sta polumeri osnovnih ploskev r in r' in višini v in v' ?

$$\begin{aligned} r &= 0.75^m, 0.6^m, 12^{cm}, a, a, a; \\ v &= 1.2^m, 0.5^m, 20^{cm}, b, b, b; \\ r' &= 0.75^m, 0.9^m, 8^{cm}, a, c, c; \\ v' &= 1.8^m, 0.5^m, 16^{cm}, c, b, d. \end{aligned}$$

72. Kako sta si prostornini dveh podobnih stožcev z višinama v in v' ?

$$\begin{aligned} v &= 0.1^m, 0.25^m, a; \\ v' &= 0.12^m, 0.75^m b. \end{aligned}$$

73. Kako sta si višini dveh podobnih stožcev s prostorninama t in t' ?

$$\begin{aligned} t &= 0.125\text{O}^m, 0.334\text{O}^m, a; \\ t' &= 0.216\text{O}^m, 1\text{O}^m, b. \end{aligned}$$

74. Koliki sta površje in prostornina okrajš. stožca s polumeroma R in r in z višino v ?

$$\begin{aligned} R &= 0.5^m, 0.65^m; \\ r &= 0.2^m, 0.45^m; \\ v &= 0.3^m, 0.03^m. \end{aligned}$$

75. Ako vrliš pravokoten trikotnik s katetama $a = 0.25^m$ in $b = 0.575^m$ okolo njega hipotenuze, napišeš dvojen stožec; koliko je njega površje in prostornina?

76. Plašč stožca, razgrnen po ravnini, je krogov izsek s središnim kotom $\alpha = 120^\circ$ in s polumerom $r = 0.125^m$; kolika je prostornina stožca?

77. Jednakostran železen stožec mora 10 Kg. tehtati; kolika je njega višina?

78. Z vodo do vrha napolnjena čaša ima podobo okrajš. stožca in je 12^{cm} visoka; gornji premer je $D = 6^{cm}$, spodnji $d = 4^{cm}$. Ako izpiješ vode do polovice višine, koliko tekočine ostane še v čaši?

79. Cement za 1 deciliter (posode za suhe stvari) ima obliko okrajš. stožca, na katerem je gornji premer enak premeru prostornojednakega jednakostranega cilindra, in spodnji premer $\frac{5}{4}$ gornjega; kolike so njega razsežnosti na milimetre?

80. Izračunaj *a)* površje, *b)* prostornino tetraedra z robom $a = 0.34^m$.

81. Koliko je površje oktaedra z robom $a = 0.05^m$?

82. Izračunaj prostornino oktaedra z robom $a = 0.12^m$.

83. Kolika je prostornina oktaedra s površjem $m = 1\Box^m$?

84. Koliko je površje ikozaedra z robom $a = 0.08^m$?

85. Kako so si površja tetraedra, oktaedra in ikozaedra, ako so njih robi jednaki?

86. Merska števila polumera, površja, prostornine krogle so r , p , t ; išči iz vsake teh količin obe drugi.

1) $r = 1.5^m; 1^m, 2^{dm}, 4^{cm}, a.$

2) $p = 572.555\Box^{cm}, 22.1671\Box^{dm}, b.$

3) $t = 100\bigcirc^{dm}, 5.712\bigcirc^m, c.$

87. Koliko je *a)* površje, *b)* prostornina naše zemlje, ako je nje polumer 6370 Km? ($\pi = 3.141592$).

88. Obod največjega kroglinega kroga je o ; koliko je površje in prostornina krogle?

$$o = 0.35^m, 1^m, a.$$

89. Kako sta si *a)* površji, *b)* prostorni dveh krogel s polumeroma r in r' ?

$$r = 0.5^m, 0.36^m, 1^m, a;$$

$$r' = 0.25^m, 0.48^m, 0.2^m, b.$$

90. Kako sta si polumera dveh krogel s površjema p in p' ?

$$p = 0.64\Box^m, 1\Box^m, a.$$

$$p' = 1.44\Box^m, 1.94\Box^m, b.$$

91. Kako sta si polumera dveh krogel s prostorninama t in t' ?

$$t = 0.8\bigcirc^m, 0.039\bigcirc^m, a;$$

$$t' = 2.7\bigcirc^m, 4.875\bigcirc^m, b.$$

93. Kako sta si prostornini dveh krogel, ako sta si njiju površji kakor $m : n$?

$$m = 4, 36, 48, 275, a;$$

$$n = 9, 25, 75, 396, b.$$

94. Kako sta si površji dveh krogel, ako sta si njiju prostornini kakor $m : n$?

$$m = 1, 27, 125, 243, a;$$

$$n = 8, 64, 343, 1125, b.$$

95. Kolik premer bi moral imeti globus, na katerem bi bil 1 cm^2 enak omaljenemu kvadratnemu mirijametru?

96. Kolika je prostornina največje krogle, katero moreš napraviti iz kocke z robom $a = 0.15\text{ m}$? Kolik je odletek?

97. Kolika je krogla, katera se natančno prilega mejnim ploskvam jednakostranega cilindra z višino $v = 2.25\text{ m}$? Kolik je prostor med cilindrom in kroglo?

98. Iz polukrogle s polumerom $r = 0.1\text{ m}$ napravi stožec z jednako osnovno ploskvijo in jednako višino; kolik je odletek? Kako sta si prostornina stožca in prostornina polukrogle?

99. Vnanji polumer otle krogle je $r = 0.145\text{ m}$ in debelina stene $a = 0.012\text{ m}$; kolika je njega prostornina?

100. Polumer osnovne ploskve pokončnega 0.8 m visokega stožca je $r = 0.3\text{ m}$; kolik je premer krogle, katere površje je toliko kakor plašč onega stožca?

101. Valjast paren kotel s polukroglastima koncema je 1 m obširen in 4 m dolg tako, da znaša dolžina cilindra 3 m , koliko je a) površje, b) prostornina kotla?

102. Kako so si prostornine jednostranemu cilindru vpisanega pokončnega stožca, vpisane krogle in onega cilindra?

103. Recimo, da je krogli opisan jednakostran cilindar in jednakostran stožec; kako so si a) površja, b) prostornine teh treh teles?

104. Površje krogle je $p = 0.28\text{ cm}^2$ (a); koliko je površje krogle z $2\frac{1}{2}$ -krat (bkrat) tolikim polumerom?

105. Koliko debela mora biti stena otle krogle z vnanjim polumerom $R = 0.335\text{ m}$, da je notranje površje polovica vnanjega?

106. Površje kocke je $p = 0.24\text{ cm}^2$ koliko je površje krogle z jednako prostornino?

107. Steklена krogla z notranjim površjem $p = 0.325\text{ cm}^2$ tehta 2.8 Kg. ; koliko tehta, ako je napolnjena z vodo?

108. Sveteča točka je od središča krogle s polumerom $r = 0.355\text{ m}$ oddaljena 1.22 m ; kolik je polumer kroglinega kroga, kateri loči razsvetljen del krogle od nerazsvetljenega?

109. Svinčena otla krogla 3 Kg. težka naj plava na vodi tako, da je gleda polovica iz vode; kolik mora biti vnanji polumer in koliko debela stena?

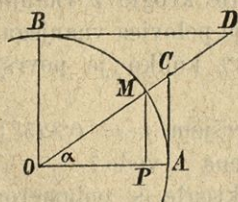
Tretji del.

Trigonometrija.

§. 202. Iz treh nezavisnih sestavin trikotnika moremo v obče z načrtovanjem določiti vse druge. Ako te merimo, dobivamo števila, katera izražujejo njih kolikost. Zarad pomankljivosti načrtal in meril in zarad lastnih pogreškov pri tem opravku ne dobivamo popolnoma zanesljivih rezultatov. Zato je želeti, da si pripravimo boljših pripomočkov za določevanje daljic in kotov.

Do najboljšega uspeha pridemo z računanjem, kakor smo se uže prepričali o takem s Pitagorovim izrekom. Ker pa kote z drugačnimi jednotami merimo kakor črte, moramo skušati, da kolikost kotov določujemo z daljicami, ako hočemo vselej izračunati neznane sestavine trikotnika iz danih.

Lik 179.



Recimo, da je $MP \perp OA$, $AC \perp OA$, $OB \perp OA$, $BD \perp OB$. Kolikost kota α zavisi od kolikosti vrtnje premičnega kraka OD od nepremičnega OA . Od te pa zavisi tudi kolikost daljic MP , OP , AO , OC , BD in OD , katere imenujemo oziroma črto sinus, črto kosinus, črto tangento, črto sekanto, črto kotangento, črto kosekanto.

Za jednake kote α in jednake polumere krogov je dolžina vsake teh daljic zmerom ista. Za manjše kote postajajo MP , AC , OC krajše, OP , BD , OD pa daljše.

Dolžina teh daljic je torej določena s kolikostjo kota ali narobe te daljice določujejo kolikost kota; imenujemo jih **kotomerne** (gonijometrijske) črte, **kotomernice**; oni del geometrije pa,

kateri govori o njih lastnostih in o njih zavisnosti, **kotomerstvo** (gonijometrijo).

Razmera med kotomernicami in polumerom.

§. 203. Načrtaj kotomernice kota 40° za polumer *a*) 2^{cm} *b*) 3^{cm} . V dobljenem liku zaznači kotomernice za *a*) kakor v liku in za *b*) črke s črtami; n. pr. sinus črto z *MP* oziroma *MP'*.

Kotomernice istega kota se izpreminjajo s polumerom in sicer so večje za večji polumer. Ker so trikotniki *OMP*, *OAC*, *OBD*, *OMP'*, *OA'C'* in *OB'D'* podobni (zakaj?), veljajo ta-le sorazmerja:

$$1) \frac{MP}{OM} = \frac{MP'}{OM'}, \quad 2) \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}, \quad 3) \frac{AC}{OA} = \frac{A'C'}{OA'}, \quad 4) \frac{BD}{OB} = \frac{B'D'}{OB'},$$

$$5) \frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'} \quad \text{in} \quad 6) \frac{OD}{OB} = \frac{OD'}{OB'}.$$

Vrednost razmerja med kotomernico in polumerom se ne izpreminja s polumerom.

Vrednost vsakega teh razmerij imenujemo oziroma **sinus**, **kosinus**, **tangento**, **kotangento**, **sekanto** in **kosekanto** kota α . Ta merska števila zavisé samo od kota α , kateri jih določuje, ter so **kotne funkcije**, in sicer so sinus, tangenta, sekanta **glavne funkcije**, kosinus, kotangenta, kosekanta pa **kofunkcije**.

S kotnimi funkcijami moremo prav priprosto kolikost kota izraževati.

Nauk o uporabi kotnih funkcij za izračunjevanje sestavin trikotnika, mnogokotnika imenujemo **trigonometrijo** (trikotomerstvo), **poligonometrijo** (mnogokotomerstvo).

Gonijometrijo, trigonometrijo i. t. d. imenujemo navadno trigonometrijo.

Kedar izračunavamo neznane sestavine trikotnika (mnogokotnika) iz danih, katere ga določujejo popolnoma, pravimo, da **razrešujemo trikotnik** (mnogokotnik).

Vrednost onih razmer se tudi ne izpremeni, ako vzamemo za polumer jednoto daljic. Ako je $OM = 1$, je

$$1) MP = \sin \alpha^*), \quad 2) OP = \cos \alpha, \quad 3) AC = \tan \alpha, \\ 4) BD = \cotang \alpha, \quad 5) OC = \sec \alpha, \quad 6) OD = \csc \alpha.$$

Z daljicami *MP*, *OP*, *AC*, *BD*, *OC*, *OD* so načrtana merska števila kotnih funkcij.

*) Beri : sinus α , kosinus α i. t. d.

Iz prejšnjega §. sledi z ozirom na trikotnik OMP (lik 179):

$$1) \frac{MP}{OM} = \sin \alpha, \quad 2) \frac{OP}{OM} = \cos \alpha, \quad 3) \frac{AC}{OA} = \frac{MP}{OP} = \tan \alpha,$$

$$4) \frac{BD}{OB} = \frac{OP}{MP} = \cotg \alpha, \quad 5) \frac{OC}{OA} = \frac{OM}{OP} = \sec \alpha,$$

$$6) \frac{OD}{OB} = \frac{OM}{MP} = \operatorname{kosek} \alpha.$$

1. Sinus kota α je razmerje med temu kotu nasprotno kateto in hipotenuzo.

2. Kosinus kota α je razmerje med kateto, na kateri ta kot leži, in hipotenuzo.

3. Tangenta kota α je razmerje med temu kotu nasprotno kateto in drugo.

4. Kotangenta kota α je razmerje med katetama vendar obratno oziraje se na tangento.

5. Sekanta kota α je razmerje med hipotenuzo in kateto, na kateri ta kot leži. Nje vrednost je recipročna vrednost kosinusa.

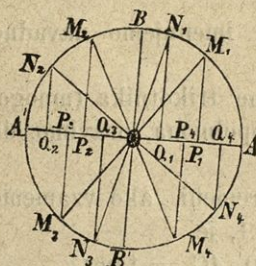
6. Kosekanta kota α je razmerje med hipotenuzo in temu kotu nasprotno kateto. Nje vrednost je recipročna vrednost sinusa.

Izpremembra kotnih funkcij s kotom. *)

§. 204. Z drugačnim kotom postajajo kotomernice ter tudi kotne funkcije drugačne.

a) V pridjanem liku vidimo sinuse in kosinuse raznih kotov in iz njega spoznamo na ravnost:

Lik 180.



1. Najmanjša vrednost sinusa in kosinusa je jednaka ničli, in sicer je:

$$\left. \begin{array}{l} \sin 0^\circ, \sin 180^\circ, \sin 360^\circ \\ \cos 90^\circ, \cos 270^\circ \end{array} \right\} = 0$$

2. Največja vrednost sinusa in kosinusa je jednaka 1 in sicer je:

$$\left. \begin{array}{l} \sin 90^\circ, 270^\circ \\ \cos 0^\circ, \cos 180^\circ, \cos 360^\circ \end{array} \right\} = 1.$$

3. Z večjim kotom postaja sinus in kosinus:

*) Krog si mislimo s horizontalnim in vertikalnim premerom razdeljen v 4 kvadrante, katere imenujemo zaporedoma prvi, drugi, tretji in četrti kvadrant oziroma za ostre, tope, vzvišene kote do 270° in vzvišene kote do 360° .

- V 1. kvadrantu večji oziroma manjši,
 „ 2. „ manjši „ večji,
 „ 3. „ večji „ manjši,
 „ 4. „ manjši „ večji.

4. Jednake sinuse in jednake kosinuse imajo koti:

$$\sphericalangle \alpha, 180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha.$$

Opomnja. Ako je kot α prav majhen, je to tudi daljica MP (lik 179) in ona pokriva lok AM skorej popolnoma; in ker tudi zadnji s polumerom OA prav kot napravlja, se izpreminja sinus kota α skorej proporcionalno z lokom, kosinus pa ostane neizpremenjen.

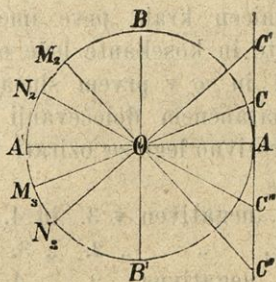
Za kot, ki je blizo jednak pravemu, velja isto samo ravno narobe.

Ako je α zelo majhen kot in l pripadajoč lok, je

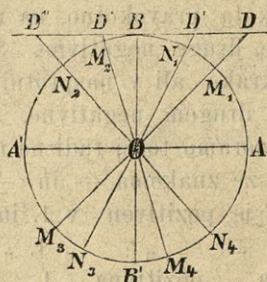
$$\sin \alpha = l, \sin 2\alpha = 2l, \sin 3\alpha = 3l \text{ i. t. d.}$$

b) V pridjanih likih vidimo tangente in sekante, kotangente kosekante raznih kotov, in iz njih spoznamo na ravnost:

Lik 181.



Lik 182.



1. Najmanjša vrednost tangente in kotangente je jednaka ničli, sekante in kosekante pa jednoti, in sicer je:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tang } 0^\circ, \text{ tang } 180^\circ, \text{ tang } 360^\circ \\ \text{kotang } 90^\circ; \text{ kotang } 270^\circ \end{array} \right\} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sek } 0^\circ, \text{ sek } 180^\circ, \text{ sek } 360^\circ \\ \text{kosek } 90^\circ, \text{ kosek } 270^\circ \end{array} \right\} = 1.$$

2. Največja vrednost tangente in kotangente, sekante in kosekante je brezkončno velika, in sicer je:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tang } \left\{ \begin{array}{l} 90^\circ \\ \text{sek} \end{array} \right. \text{ tang } \left\{ \begin{array}{l} 270^\circ \\ \text{sek} \end{array} \right. \\ \text{kotang } \left\{ \begin{array}{l} 0^\circ \\ \text{kosek} \end{array} \right. \text{ kotang } \left\{ \begin{array}{l} 180^\circ \\ \text{kosek} \end{array} \right. \text{ kotang } \left\{ \begin{array}{l} 360^\circ \\ \text{kosek} \end{array} \right. \end{array} \right\} = \infty$$

3. Z večjim kotom postajata tangenta in sekanta, kotangenta in kosekanta

v 1. kvadrantu večji oziroma manjši,

„ 2. „ manjši „ večji,

„ 3. „ večji „ manjši,

„ 4. „ manjši „ večji.

4. Jednake tangente, jednake kotangente, jednake sekante in jednake kosekante imajo koti:

$$\alpha, 180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha.$$

Iz vsega izpoznamo:

Sama vrednost kotne funkcije še ne določuje kota popolnoma.

Natančnejša določitev kotnih funkcij.

§. 205. Kotne funkcije raznih kotov imajo razno lego. Sinusi ležé ali nad premičnim krakom ali pod njim, takisto tangente; prve imenujemo pozitivne, druge negativne. Kosinusi in tangente ležé na desni ali na levi polumera, katerega postavimo v vrhu kota pravokotno na nepremičen krak, prve imenujemo pozitivne, druge negativne. Sekante in kosekante ležé od vrha v meri kraka ali v nasprotni meri in so v prvem slučaju pozitivne, v drugem negativne. Pri natančnem določevanju kotnih funkcij moramo torej tudi na njih protivno lego se ozirati in značimo jih zè znakoma + in —.

Sinus je pozitiven v 1. in v 2., negativen v 3. in 4. kvadr.

Kosinus „ „ „ 1. „ „ 4., „ „ 2. „ 3. „

Tangenta „ pozitivna „ 1. „ „ 3., negativna „ 2. „ 4. „

Kotangen. „ „ „ 1. „ „ 3., „ „ 2. „ 4. „

Sekanta „ „ „ 1. „ „ 4., „ „ 2. „ 3. „

Kosekan. „ „ „ 1. „ „ 2., „ „ 3. „ 4. „

Ako torej postavimo pred kotno funkcijo znak, ima ona še dvojen pomen. Za kote, od katerih vemo, da so manjši od 180° , kakor n. pr. pri trikotnikih, imajo kotne funkcije zè znakom razen sinusa in kosekante le jeden pomen.

Zavisnost kotnih funkcij med seboj.

§. 206. Iz lika 179 izpoznamo:

$$MP^2 + OP^2 = OM^2, AC^2 + OA^2 = OC^2, BD^2 + OB^2 = OD^2.$$

Recimo, da je $OM = 1$, torej $MP = \sin \alpha$, $OP = \cos \alpha$, $AC = \tan \alpha$, $OC = \sec \alpha$, $BD = \cot \alpha$, $OD = \csc \alpha$, potem prehajajo one jednačbe v sledeče:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 2) \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha,$$

$$3) \cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha.$$

Ker je $\triangle AOC \sim MOP$ in $BOD \sim MOP$, je

$$AC : OA = MP : OP, \quad BD : OB = OP : MP,$$

$$OC : OM = OA : OP, \quad OD : OB = OM : MP; \text{ ali}$$

$$\tan \alpha : 1 = \sin \alpha : \cos \alpha, \quad \cot \alpha : 1 = \cos \alpha : \sin \alpha,$$

$$\sec \alpha : 1 = 1 : \cos \alpha, \quad \csc \alpha : 1 = 1 : \sin \alpha, \text{ torej}$$

$$4) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad 5) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$6) \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad 7) \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Jednačbe 1) — 7) ne veljajo samo za ostre kote, ampak tudi za kote vsakega kvadranta, o čemur se moremo takisto prepričati, ako si načrtamo za nje kotne funkcije.

§. 207. Ako poznamo le **jedno** kotno funkcijo kota, moremo s pomočjo jednačb prejšnjega §. vsako drugo izračunati.

Recimo, da je dan $\sin \alpha$.

Iz jednačbe 1) dobimo: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, torej

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. *)$$

Iz jednačb 4), 5), 6) in 7) sledi oziraje se na predstoječo jednačbo:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Takisto kakor iz sinusa moremo iz druge dane kotne funkcije izračunati vsako.

Za uporabo so sinus, kosinus, tangenta in kotangenta najbolj važne kotne funkcije. Za to hočemo v prihodnje le o teh govoriti.

*) Znaka $\pm$ pred korenem hočemo navadno izpuščati, omeniti je le, da določuje vsaka posamezna naloga po velikosti kota, kedaj velja znak $+$ in kedaj znak $-$.

Funkcije sestavljenih kotov.

Vsota in diferenca dveh kotov.

§. 208. Recimo, da je (lik 183) $BD = \sin \alpha$, $OD = \cos \alpha$,

Lik 183.

$CE = \sin \beta$, $OE = \cos \beta$, $CF = \sin(\alpha + \beta)$,

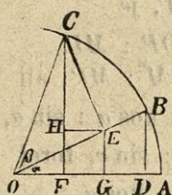
$OF = \cos(\alpha + \beta)$, in $HE \perp CF$, $EG \perp OA$.

Potem je

$$CF = HF + HC = EG + HC,$$

$$OF = OG - GF = OG - EH.$$

Ker je $\triangle EGO \sim BDO$, je



$$EG : OE = BD : OB, \quad OG : OE = OD : OB, \text{ ali}$$

$$EG : \cos \beta = \sin \alpha : 1, \quad OG : \cos \beta = \cos \alpha : 1, \text{ torej}$$

$$EG = \sin \alpha \cos \beta, \quad OG = \cos \alpha \cos \beta.$$

Takisto je $\triangle CHE \sim OBD$ (zakaj?), torej

$$CH : CE = OD : OB, \quad HE : CE = BD : OB, \text{ ali}$$

$$CH : \sin \beta = \cos \alpha : 1, \quad HE : \sin \beta = \sin \alpha : 1, \text{ iz česar sledi:}$$

$$CH = \cos \alpha \sin \beta, \quad HE = \sin \alpha \sin \beta.$$

Ako namestimo v jednačbah za CF in OF vrednosti posameznih količin, dobimo

$$8) \dots \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$9) \dots \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Dobljeni jednačbi 8) in 9) veljata tudi, ako je jeden ali tudi vsak izmed kotov α , β , $(\alpha + \beta)$ top ali še večji, o čemur se prepričamo takisto, kakor za ostre kote.

Ker je

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta},$$

dobimo, ako delimo števec in imenovalec s $\cos \alpha \cos \beta$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \text{ ali}$$

$$10) \dots \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Takisto dobimo

$$11) \dots \cotan(\alpha + \beta) = \frac{\cotan \alpha \cotan \beta - 1}{\cotan \alpha + \cotan \beta}.$$

§. 109. Ako rečemo, da je $\alpha + \beta = x$, torej $\beta = x - \alpha$, dobimo iz jednačb 8) in 9) sledeči

$$\sin x = \sin \alpha \cos (x - \alpha) + \cos \alpha \sin (x - \alpha),$$

$$\cos x = \cos \alpha \cos (x - \alpha) - \sin \alpha \sin (x - \alpha),$$

kateri moremo rešiti z ozirom na $\sin (x - \alpha)$ in $\cos (x - \alpha)$. Prvo jednačbo množivši s $\cos \alpha$ in drugo s $\sin \alpha$ dobimo po odštevanji teh jednačb oziraje se na jednačbo 1) §. 206.

$$\sin (x - \alpha) = \sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha.$$

Takisto dobimo iz onih jednačb, ako prvo množimo s $\sin \alpha$ in drugo s $\cos \alpha$, po seštevanji

$$\cos (x - \alpha) = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha.$$

Ker x in α pomenita poljubna kota, moremo namesto njiju zopet zapisati oziroma α in β ; potem je

$$12) \dots \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$13) \dots \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Iz jednačb 12) in 13) moremo takisto kakor jednačbi 10) in 11) iz 8) in 9) dobiti sledeči

$$14) \dots \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta},$$

$$15) \dots \cotang (\alpha - \beta) = \frac{\cotang \alpha \cotang \beta + 1}{\cotang \beta - \cotang \alpha}.$$

Funkcije dvojnega kota in njega polovice.

§. 210. Iz jednačb 8), 9), 10) in 11) dobimo za $\beta = \alpha$.

$$16) \dots \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$17) \dots \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$18) \dots \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$19) \dots \cotg 2\alpha = \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{2 \cotg \alpha}.$$

Ako v izrazih 16) in 17) 2α namestimo z α torej α z $\frac{\alpha}{2}$, dobimo

$$20) \dots \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$21) \dots \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Ker je pa } 1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$22) \dots 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$23) \dots 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

torej

$$24) \dots \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$25) \dots \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Ako delimo zadnja izraza jednega z drugim, dobimo

$$26) \dots \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$27) \dots \cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

§. 211. Ako seštevamo in odštevamo jednačbi 8) in 12) in jednačbi 9) in 13), dobimo

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Recimo, da je $(\alpha + \beta) = \alpha'$, $\alpha - \beta = \beta'$, torej

$$\alpha = \frac{\alpha' + \beta'}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$

potem sledi iz onih jednačb α' in β' zamenjaje z α in β

$$28) \dots \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$29) \dots \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$30) \dots \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$31) \dots \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Iz 28) in 29) sledi

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cotg \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ali}$$

$$32) \dots \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

§. 212. 1. Recimo, da je $\alpha + \beta = R$, torej $\beta = R - \alpha$, potem dobimo oziraje se na jednačbi 12) in 13).

$$\sin \beta = \sin (R - \alpha) = \sin R \cos \alpha - \cos R \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \cos (R - \alpha) = \cos R \cos \alpha + \sin R \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} (R - \alpha) = \frac{\sin (R - \alpha)}{\cos (R - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{kotg} \alpha$$

$$\operatorname{kotag} \beta = \operatorname{kotg} (R - \alpha) = \frac{\cos (R - \alpha)}{\sin (R - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Torej smemo reči:

Funkcija ostrega kota je jednaka kofunkciji njega komplementarnega kota.

2. Ako je $\alpha + \beta = 2R$, torej $\beta = 2R - \alpha$, dobimo takisto

$$\sin \beta = \sin \alpha, \cos \beta = -\cos \alpha, \operatorname{tang} \beta = -\operatorname{tang} \alpha,$$

$$\operatorname{kotg} \beta = -\operatorname{kotg} \alpha$$

t. j. absolutni vrednosti funkcij suplementarnih kotov sta jednaki; znaka pa sta si nasprotna razen pri sinusu.

3. Iz jednačb 12) in 13) tudi sledi:

$$\sin (R + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos (R + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\sin (2R + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos (2R + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin (3R + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos (3R + \alpha) = -\sin \alpha$$

in iz teh jednačb

$$\operatorname{tang} (R + \alpha) = -\operatorname{kotg} \alpha, \operatorname{kotg} (R + \alpha) = -\operatorname{tang} \alpha,$$

$$\operatorname{tang} (2R + \alpha) = \operatorname{tang} \alpha, \operatorname{kotg} (2R + \alpha) = \operatorname{kotg} \alpha,$$

$$\operatorname{tang} (3R + \alpha) = -\operatorname{kotg} \alpha, \operatorname{kotg} (3R + \alpha) = -\operatorname{tang} \alpha.$$

Ako pomeni α oster kot, značimo z α , $R + \alpha$, $2R + \alpha$, $3R + \alpha$ vse mogoče kote med 0° — 360° . Potem takem smemo reči: Funkcijo vsakega kota med 0° in 360° moremo izraziti s funkcijami ostrega kota. Oziraje se na 1) celo moremo reči:

Funkcije vseh kotov med 0° — 360° moremo izraziti s funkcijami kotov med 0° — 45° .

Izračunanje kotnih funkcij.

§. 213. Ker znaša vsak kot jednakostraničnega trikotnika 60° , je

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0.86603.$$

Oziraje se na jednačbe 24) in 25) je

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}}{2}} = 0.25882,$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}} = 0.96593.$$

Takisto dobimo po enačbah 24) in 25) vrednosti sinusa in kosinusa kotov $7\frac{1}{2}^\circ$, $3\frac{3}{4}^\circ$, $1\frac{7}{8}^\circ$, $56' 15''$ $52\frac{47}{64}''$.

Za prav majhne kote moremo reči, da je razmerje sinusov jednako razmerju kotov; tedaj je

$$\sin 52\frac{47}{64}'' : \sin 60'' = 52\frac{47}{64} : 60,$$

in ker je $\sin 52\frac{47}{64}'' = 0.00025566189$, je

$$\sin 60'' = \sin 1' = 0.00029089.$$

Ako določimo iz tega $\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'}$, dobivamo po enačbah 16), 17), 8), 9) sinus in kosinus za $2'$, $4'$, $8'$,, sinus in kosinus za $1' + 2' = 3'$, za $2' + 3' = 5'$, za $2' + 5' = 7'$, in iz teh zopet za $6'$, $10'$, $14'$, $9'$, $15'$, $21'$, i. t. d. do $60' = 1^\circ$.

Iz $\sin 1^\circ$ in $\cos 1^\circ$ dobivamo takisto sinus in kosinus vseh kotov do 45° .

Za kote manjše od $1'$ moremo tem bolj reči, da so sinusi sorazmerni s koti, torej je

$$\sin 60'' : \sin 1'' = 60 : 1, \text{ iz česar sledi}$$

$$\sin 1'' = \frac{\sin 60''}{60} = 0.000004848.$$

Nadalje je

$$\sin 2'' = 2 \sin 1'', \sin 3'' = 3 \sin 1'', \sin 4'' = 4 \sin 1'' \text{ i. t. d.}$$

Iz tega moremo zopet določiti kosinuse za posamezne sekunde.

Ako so pa izračunani sinusi in kosinusi kotov od 0° do 45° , moremo po enačbah 4) in 5) tudi njih tangente in kotangente določiti. Sploh so nam potem po prejšnjem §. funkcije vseh kotov znane. Po tej težavni poti so izračunali prve tabele za sinuse.

Vaja. Kolik je sinus, kosinus, kolika tangenta in kotangenta kota 45° ? — Odgovor sledi iz Pitagorovega izreka za sinus in kosinus, za tangento in kotangento pa iz njih enakosti s polumerom.

§. 214. Kakor smo se v prejšnjem §. prepričali, so kotne funkcije iracionalna števila, katera tem bolj natančno izražujemo, čim več decimalk za nje izračunujemo. Z večjo natančnostjo

torej postaja množenje in deljenje s kotnimi funkcijami težavnejše; zato se poslužujemo logaritmov pri trigonometrijskih računih in v posebnih tabelah imamo zbrane logaritme kotnih funkcij urejene po njih vrednosti.

V manjših logaritmovnikih nahajamo navadno logaritme kotnih funkcij od 0° do 90° od minute do minute izračunane na 5 decimalk.

Stopnje od 0° do 45° so napisane na vsaki strani na vrhu, urejene po njih kolikosti, ter minute na levi v prvem vertikalnem razredku. Stopnje od 45° do 90° nahajaš spodej, urejene po njih kolikosti tako, da pridejo manjše za večjimi, minute pa stojé na desni v zadnjem vertikalnem razredku.

Vsi logaritmi so, da se ognemo negativnim mantisam, izračunani na karakteristiko — 10, katera je vendar v logaritmovniku izpuščena; ako si tedaj poiskal logaritem iz tabel, moraš mu še pripisati karakteristiko — 10.

Logaritme posameznih funkcij dobiš v vertikalnih razredkih, nad ali pod katerimi so napisana imena teh funkcij, v povprečnej vrsti, nad za kote med 0° in 45° , pod za kote med 45° in 90° .

§. 215. Trigonometrijski logaritmovnik nam služi, da iščemo *a)* logaritem funkcije danega kota, *b)* kot za dan logaritem kotne funkcije.

a) Logaritem kotne funkcije danega kota dobiš na ravnost v logaritmovniku, ako kot nima sekund, in sicer v vertikalnem razredku one funkcije na povprečni vrsti, zaznačeni sè številom minut.

1. Logaritma sinusov kotov $16^{\circ} 18'$ in $16^{\circ} 19'$ sta 9.44819—10 in 9.44862—10; kolik je *a)* razloček teh logaritmov, *b)* razloček za $1''$, ako rečemo, da se diferencea logaritmov v teh mejah (med $60''$) izpreminja sorazmerno z diferenco kotov?

2. Poišči logaritma druge kotne funkcije kotov, katera se razločita za $1'$; kolik je *a)* razloček teh logaritmov, *b)* razloček za $1''$?

3. Primerjaj difference logaritmov sinusa za prav majhne (manjše od 3°) in kosinusa za kote blizu 90° , kotov različnih po $1'$, z differenceami logaritmov srednje velikih kotov; kaka je izprememba logaritmov v prvem slučaju v primeru z izpremembo v drugem slučaju?

Diferenceo logaritmov za $1''$ dobivamo mnogokrat v logaritmovnikih navedeno.

Ako pa ima kot tudi sekunde, poišči za sinus in tangento logaritem manjšega kota, za kosinus in kotangento logaritem večjega kota, katerega nahajaš v tabelah. Odštevaj dan in iz

tabel vzet kot in sicer manjšega od večjega in množi diferenco kotov (število sekund) z diferenco za 1". Dobljeni produkt prišteva k poiskanemu logaritmu. N. pr.

1. log sin $24^{\circ} 34' 15''$

$$24^{\circ} 34' - \dots\dots\dots 9.61883-10$$

15"

7

$$\times 0.47$$

$$9.61890-10$$

$$\text{poprava} = 7.05$$

2. log kotang $63^{\circ} 52' 45''$

$$63^{\circ} 53' - \dots\dots\dots 9.69042-10$$

15"

8

$$\times 0.53$$

$$9.69050-10$$

$$\text{poprava} = 7.95$$

Za kote med 0° in 3° in za one blizo 90° je iskanje logaritmov kotnih funkcij nekoliko drugačno ter bolj natančno, kakor to uče boljši logaritmovniki.

Zakaj moraš korekturo **prištevati** logaritmu vzetemu iz tabele?

- b) Logaritem kotne funkcije nahajaš v tabelah ali natančno ali pa ne. V prvem slučaju dobivaš stopnje iskanega kota vrh ali spodej tabele, minute pa na levi ali pa na desni v povprečni vrsti, kjer je poiskan logaritem, ako je ime kotne funkcije zgorej ali spodej.

Tako dobivaš n. pr.

$$\text{za log sin } x = 9.22878-10, x = 9^{\circ} 45'$$

$$\text{,, ,, tang } x = 12.00478-10, x = 89^{\circ} 26'$$

$$\text{,, ,, kotg } x = 10.12315-10, x = 36^{\circ} 59'$$

$$\text{,, ,, kos } x = 9.61578-10, x = 65^{\circ} 37'.$$

Diferenca za 1" logaritmov kotnih funkcij je a) 0.40, b) 0.52, c) 0.12, diferenca kotov m in p pa 1'; za koliko sekund velja diferenca a) 8, b) 14, c) 6?

Kedar pa ne nahajaš danega logaritma natančno v tabelah, poišči za sinus in tangento manjši, za kosinus in kotangento večji logaritem iz tabel; odštevaj dani in poiskani logaritem, manjšega od večjega in deli dobljeno diferenco z diferenco za 1" logaritmov, med katerimi leži dani logaritem. N. pr.

$$\log \operatorname{tang} x = 9.73704 - 10$$

687

$$17 : 0.5 = 34''$$

$$x = 28^{\circ}, 27' 34''$$

$$\log \cos x = 9.44305 - 10$$

341

$$36 : 0.73 = 49.3''$$

$$x = 73^{\circ} 53' 49''.$$

Zakaj moraš sekunde **prištevati** kotu vzetemu iz tabel?

Za kote med 0° in 3° ali med 90° in 87° je iskanje kota iz danega logaritma nekoliko drugačno; o tem govore boljše tabele natančneje.

Poišči iz tabel sledeče logaritme:

- | | |
|--|---|
| 1) $\log \sin 38^{\circ} 17'$, | 2) $\log \sin 17^{\circ} 8' 20''$, |
| 3) $\log \sin 51^{\circ} 58' 33''$, | 4) $\log \operatorname{tang} 69^{\circ} 27'$, |
| 5) $\log \operatorname{tang} 23^{\circ} 23' 23''$ | 6) $\log \operatorname{tang} 58^{\circ} 12' 16''$, |
| 7) $\log \cos 57^{\circ} 48'$, | 8) $\log \cos 39^{\circ} 9' 47''$, |
| 9) $\log \cos 50^{\circ} 19' 8''$, | 10) $\log \operatorname{kotg} 77^{\circ} 31'$, |
| 11) $\log \operatorname{kotg} 8^{\circ} 8' 54''$, | 12) $\log \operatorname{kotg} 53^{\circ} 29' 8''$. |

Poišči za sledeče logaritme pripadajoče kote:

- | | |
|--|---|
| 1) $\log \sin x = 9.49654 - 10$, | 2) $\log \sin y = 9.79358 - 10$ |
| 3) $\log \operatorname{tang} x = 0.29283$ | 4) $\log \operatorname{tang} y = 0.18748$ |
| 5) $\log \operatorname{tang} z = 9.30936 - 10$, | 6) $\log \cos x = 9.97930 - 10$ |
| 7) $\log \cos y = 9.84129 - 10$, | 8) $\log \cos z = 9.99138 - 10$ |
| 9) $\log \operatorname{kotg} x = 0.08055$, | 10) $\log \operatorname{kotg} y = 9.85927 - 10$. |

Drugi oddelek.

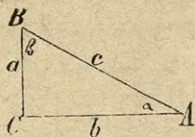
I. Rešitev trikotnikov.

1. Pravokotni trikotniki.

Osnovne enačbe pravokotnega trikotnika.

§. 216. *Opomnja.* Merska števila trikotnikovih stranic in stranicam nasprotnih kotov hočemo v sledečem zaznamenjevati

Lik 184.



s črkami a , b , c (lik 184) oziroma z A , B , C . In recimo, da je v pravokotnem trikotniku C njega pravi kot ter c njega hipotenuza.

V §. 203 je določen pomen kotnih funkcij in iz njega sledi:

$$1) \frac{a}{c} = \sin A, \frac{b}{c} = \sin B, \text{ torej tudi } a = c \sin A, \\ b = c \sin B;$$

$$2) \frac{b}{c} = \cos A, \frac{a}{c} = \cos B, \text{ torej tudi } b = c \cos A, \\ a = c \cos B;$$

$$3) \frac{a}{b} = \tan A, \frac{b}{a} = \tan B, \text{ torej tudi } a = b \tan A, \\ b = a \tan B;$$

$$4) \frac{b}{a} = \cotg A, \frac{a}{b} = \cotg B, \text{ torej tudi } b = a \cotg A, \\ a = b \cotg B.$$

Tedaj je

1) Vsaka kateta jednaka hipotenuzi množeni s sinusom tej kateti nasprotnega kota;

2) vsaka kateta jednaka hipotenuzi množeni s kosinusom tej kateti priležnega kota;

3) vsaka kateta jednaka drugi kateti množeni s tangento prvi nasprotnega kota;

4) vsaka kateta jednaka drugi kateti množeni s kotangento prvi priležnega kota.

Nadalje je po Pitagorovem izreku

$$5) c^2 = a^2 + b^2.$$

Z navedenimi petimi enačbami moremo reševati vse naloge ozirajoče se na pravokoten trikotnik.

§. 217. Slučaji za rešitev.

I. Dani sta kateti a in b ; izračunati moramo hipotenuzo c in kota A in B .

Iz prejšnjega §. vemo, da je

$$\tan A = \cotg B = \frac{a}{b} \text{ ali izraženo z logaritmi}$$

$$\log \tan A = \log \cotg B = \log a - \log b,$$

po čemer moremo izračunati kota A in B . Ako je izračunan kot A , dobimo kot B tudi iz $B = 90^\circ - A$.

Hipotenuzo c določujemo iz jednačbe

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ali } c = \frac{a}{\sin A} \text{ torej } \log c = \log a - \log \sin A.$$

Za primer recimo, da je $a = 325$, $b = 418$.

Potem je

$$\log a = 2.51188$$

$$\log b = 2.62118$$

$$\log \tan A = 9.89070 - 10 = \log \tan 37^\circ 71' 54''$$

$$A = 37^\circ 51' 54''$$

$$\text{torej } B = 52^\circ 8' 6''.$$

Nadalje je

$$\log a = 2.51188$$

$$\log \sin A = 9.78803 - 10$$

$$\log c = 2.72385 = \log 529.48$$

$$C = 529.48$$

II. Dana je hipotenuza c in kateta a ; izračunati moramo kateto b in kota A in B .

Iskane sestavine trikotnika določuješ z uporabo logaritmov iz jednačb

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c}, \quad b = \sqrt{(c + a)(c - a)} \text{ ali } b = \frac{a}{\tan A}$$

III. Dana je kateta a in jeden kot, n. pr. A ; izračunati moramo kot B , kateto b in hipotenuzo c .

To nalogo rešuješ z jednačbami

$$B = 90^\circ - A, \quad c = \frac{a}{\sin A}, \quad b = \frac{a}{\tan A}.$$

IV. Dana je hipotenuza c in jeden kot n. pr. A ; izračunati moramo kot B in kateti a in b .

Rešitev:

$$B = 90^\circ - A, \quad a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

Dostavek. Ploskvena vsebina je določena z jednačbami

$$p = \frac{ab}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{(c + b)(c - b)} = \frac{a^2}{2 \tan A} = \frac{b^2}{2 \tan B}$$

$$= \frac{c^2}{2} \sin A \cos A = \frac{c^2}{4} \sin 2A.$$

Izračunaj sledeče naloge:

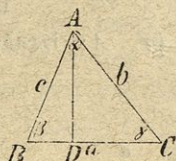
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>			<i>B</i>			<i>p</i>
92	525	533	9°	56'	22"	80°	3'	38"	24150
96	180	204	28	4	21	61	55	39	8640
160	231	281	34	42	29	55	17	31	18480
180	189	261	43	36	10	46	23	50	17010
200	609	641	18	10	50	71	49	10	60900
208	105	233	63	12	54	26	47	6	10920
228	325	397	35	3	4	54	56	56	37050
272	225	353	50	24	8	39	35	52	30600
336	377	505	41	42	32	48	17	28	63336
340	189	389	60	55	52	29	4	8	32130
396	403	565	44	29	53	45	30	7	79794
420	341	541	50	55	6	39	4	24	71610
540	99	549	79	36	40	10	23	20	26730
900	301	949	71	30	28	18	29	32	135450
924	43	925	87	20	8	2	39	52	19866

2. Poševnokotni trikotniki.

Osnovne jednačbe trikotnika.

§. 218. 1. V vsakem trikotniku so si stranice kakor sinusi tem stranicam nasprotnih kotov.

Lik 185



Recimo, da je $AD \perp BC$. Potem je v pravokotnih trikotnikih ADC in ADB $AD = AC \cdot \sin C$ in $AD = AB \cdot \sin B$, torej $AC \cdot \sin C = AB \cdot \sin B$, iz česar sledi $AC : AB = \sin B : \sin C$ ali

$$\text{Takisto dobimo } \left. \begin{array}{l} 1) b : c = \sin B : \sin C \\ 2) a : b = \sin A : \sin B \\ 3) a : c = \sin A : \sin C \end{array} \right\} \text{I.)}$$

Te jednačbe se ne izpremené, ako je jeden kot top n. pr. kot B , ter pravokotnica AD zadeva podaljšek stranice BC ; potem dobimo

$$b : c = \sin (180^\circ - B) : \sin C = \sin B : \sin C.$$

2. V vsakem trikotniku sta si vsota dveh stranic in njuna diferenca kakor tangenta razpolovljene vsote tema stranicama nasprotnih kotov in tangenta razpolovljene difference istih kotov.

Ker je

$$b : c = \sin B : \sin C,$$

je tudi

$$(b + c) : (b - c) = (\sin B + \sin C) : (\sin B - \sin C).$$

Je pa

$$(\sin B + \sin C) : (\sin B - \sin C) = \operatorname{tang} \frac{B + C}{2} : \operatorname{tang} \frac{B - C}{2} \quad (\S. 211).$$

$$\text{torej} \quad (b + c) : (b - c) = \operatorname{tang} \frac{B + C}{2} : \operatorname{tang} \frac{B - C}{2}.$$

Ta jednačba je le pretvorjena osnovna jednačba I.

3. V vsakem trikotniku je kvadrat jedne stranice jednak vsoti kvadratov obeh drugih stranic zmanjšani za dvojni produkt iz obeh teh stranic in kosinusa od njih oklenenega kota.

Recimo, da je v liku 185 $AD \perp DC$, $AD = x$, $DC = y$, $BD = z$, potem je $x = c \sin B$, $z = c \cos B$, $y = a - c \cos B$
in $b^2 = x^2 + y^2$.

Ako x in y namestimo z njih vrednostima, dobimo

$$b^2 = (c \sin B)^2 + (a - c \cos B)^2, \text{ ali}$$

$$b^2 = c^2 \sin^2 B + a^2 - 2ac \cos B + c^2 \cos^2 B \text{ ali}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \dots \text{II}).$$

Osnovno jednačbo II moremo še tako-le pisati, ako zamenjamo črke:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Ako pade višina AD zunaj trikotnika, potem je

$$x = c \sin (\sin 180^\circ - B) = c \sin B, \quad z = c \cos (180^\circ - B) \\ = -c \cos A$$

$$\text{in} \quad b^2 = x^2 + (a + z)^2 = (c \sin B)^2 + (a - c \cos B)^2,$$

iz česar spet sledi osnovna jednačba II, katera je torej sploh veljavna.

Dostavek. Pitagorov izrek je samo poseben slučaj tega (3); kajti jednačba II preide za $\sphericalangle B = 90^\circ$ v $b^2 = a^2 + c^2$.

Slučaji za rešitev.

§. 219. I. Dana je stranica a in oba priležna kota B in C ; izračunati moramo kot A in stranici b in c .

Najpred je $\sphericalangle A = 180^\circ - (B + C)$.

Na dalje sledi iz osnovnih jednačb 2, 3, I

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} \text{ ali}$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

Recimo, da je $a = 453$, $B = 73^\circ 48' 12''$, $C = 28^\circ 51' 44''$.

Potem je

$$A = 77^\circ 20' 4''$$

$$\log a = 2.65610$$

$$\log a = 2.65610$$

$$\log \sin B = 9.98241 - 10 \quad \log \sin C = 9.68368 - 10$$

$$12.63851 - 10$$

$$12.33978 - 10$$

$$\log \sin A = 9.98930 - 10 \quad \log \sin A = 9.98930 - 10$$

$$- \quad +$$

$$- \quad +$$

$$\log b = 2.64921$$

$$\log c = 2.35048$$

$$b = 445.9$$

$$c = 224.1$$

Takisto izvršujemo račun, ako je dana stranica jeden priležen in nasprotni kot.

§. 220. II. Dani sta dve stranici n. pr. b in c in kot A od njih oklenen; izračunaj kota B in C in stranico a .

Rešitev. Ker je

$$B + C = 180^\circ - A, \text{ torej}$$

$$\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

znano, moremo tudi iz

$$\operatorname{tang} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tang} \frac{B + C}{2} \quad (\S. 2, 218.)$$

s pomočjo logaritmov $\frac{B - C}{2}$ izračunati. Iz $\frac{B + C}{2}$ in $\frac{B - C}{2}$ dobimo po seštevanji B in po odštevanji C .

Tretjo stranico dobivamo iz enačbe

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Iz b , c in A moremo na ravnost izračunati ploščino trikotnika.

Lik 186.

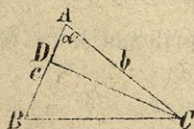
Recimo, da je $CD \perp AB$, in $CD = v$, potem je

$$p = \frac{c \cdot v}{2};$$

pa $v = b \sin A$, torej

$$p = \frac{bc}{2} \sin A$$

t. j. ploščina trikotnika je jednaka polovici produkta iz dveh stranic in iz sinusa od teh oklenenega kota.



Recimo, da je n. pr. $b = 508$, $c = 401$ in $A = 84^{\circ} 16' 30''$.

Račun izvršujemo tako-le:

$$\begin{array}{ll} b + c = 909 & \log(b + c) = 2.95856 \\ b - c = 107 & \log(b - c) = 2.02938 \\ B + C = 95^{\circ} 43' 30'' & \\ \frac{B + C}{2} = 47^{\circ} 51' 45'' & \log \tan \frac{B + C}{2} = 10.04347 - 10 \\ \frac{B - C}{2} = 7^{\circ} 24' 46'' & 12.07285 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \log(b + c) = 2.95856 \\ B = 55^{\circ} 16' 31'' & \log \tan \frac{B - C}{2} = 9.11429 - 10 \\ C = 40^{\circ} 26' 59'' & \\ \log b = 2.70586 & \log c = 2.60314 \\ \log \sin A = 9.99783 - 10 & \log b = 2.70586 \\ & \log \sin A = 9.99783 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 12.70586 - 10 \\ \log \sin B = 9.91482 - 10 & 5.30683 \\ \log a = 2.78887 & \log 2 = 0.30103 \\ a = 614.9 & 5.00580 \\ & p = 101344 \end{array}$$

§. 221. III. Dani sta stranici b in c ($b < c$) in večji nasprotni kot C ; izračunati moramo kota B in A in tretjo stranico a .

Rešitev. Po osnovni enačbi I je

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c}$$

Iskani kot B določuje njegov sinus; sinusa dveh sokotov sta jednaka (primerjaj §. 205). Kot B torej ni določen.

Ako si pa mislimo, da je 1) $c > b$, mora kot $B < C$ torej oster kot biti in naloga je določena. Za 2) $c < b$ je $B > C$, torej kot B ali oster ali top in naloga je nedoločena (primerjaj planimetrija III izrek skladnosti).

Na dalje je $A = 180^{\circ} - (B + C)$.

Stranico a izračunaš iz enačbe

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

Recimo, da je 1) $b = 3961$, $c = 5407$, $C = 64^{\circ} 17' 10''$, potem dobimo $B = 41^{\circ} 18'$ (vender ne $B = 138^{\circ} 42'$) $A = 74^{\circ} 24' 50''$, $a = 5780.71$.

Vzemimo 2) za $b = 2.718$, $c = 1.944$, $C = 40^{\circ} 49' 15''$, potem dobimo $B = 66^{\circ} 3' 36''$ ali $B = 113^{\circ} 56' 24''$, $A = 73^{\circ} 7' 9''$ ali $A = 25^{\circ} 14' 21''$ in $a = 2.846$ ali $a = 1.268$. Naloga ima v tem slučaju dvojen pomen.

§. 222. IV. Dane so vse tri stranice a , b , c ; izračunati moramo vse kote A , B , C .

Iz osnovne jednačbe II §. 218 sledi:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dokler so števila a , b , c le jedno- ali dvoštevila, moremo to jednačbo prav pripravno porabiti za izračunanje kota A ; kajti v tem slučaju izračunaš vrednosti a^2 , b^2 , c^2 najrajše brez logaritmov.

Recimo, da je n. pr. $a = 11^m$, $b = 17^m$, $c = 20^m$; potem je $a^2 = 121$, $b^2 = 289$, $c^2 = 400$ tedaj

$$\cos A = \frac{289 + 400 - 121}{2 \cdot 17 \cdot 20} = \frac{568}{680} \text{ in ker je}$$

$$\log 568 = 2.75435$$

$$\log 680 = 2.83251, \text{ je}$$

$$\log \cos A = 9.92184 - 10 \text{ in}$$

$$A = 33^{\circ} 21' 13''.$$

Takisto izračunaš kota B in C .

Ako so pa a , b , c mnogoštevila števila, je računanje brez logaritmov nepripravno in dobro je, da gornjo jednačbo namestimo z drugo, katero moremo logaritmovati.

Iz jednačb

$$1 = 1,$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

dobiš po odštevanji in seštevanji

$$1 - \cos A = \frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}.$$

Ker je po §. 210,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \text{ in } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \text{ je}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}}.$$

Priprostejši moremo te jednačbi napraviti, ako vzamemo za polovico obsega število s , torej

$$a + b + c = 2s.$$

Po odštevanji izraza $2c$, ali $2b$, ali $2a$ od vsake strani te jednačbe, dobimo še

$$a + b - c = 2(s - c),$$

$$a - b + c = 2(s - b),$$

$$b + c - a = 2(s - a).$$

Potem je

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}, \text{ in tedaj}$$

$$\text{tang } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}.$$

Treba je v predstojećih jednačbah črke samo zamenjati, da dobimo,

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}},$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s - b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}},$$

$$\text{tang } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}}, \quad \text{tang } \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}.$$

Koti $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ so na vsak način ostri koti, torej imajo samo jednojen pomen ter so s temi jednačbami popolnoma določeni.

Najbolj zanesljive rezultate dobivaš iz jednačbe za tangento. Dobro pa je, ako izračunaš kot po vsaki teh jednačb.

Ker je ploščina p trikotnika

$$p = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{ab}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2};$$

torej po nameščenji gornjih vrednosti za $\sin \frac{C}{2}$ in $\cos \frac{C}{2}$

$$p = ab \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \text{ ali}$$

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

moremo iz danih stranic trikotnika na ravnost njega ploščino izračunati.

Recimo, da je $a = 1244$, $b = 939$, $c = 317$. Potem imamo

$$a = 1244$$

$$b = 939$$

$$c = 317$$

$$2s = 2500$$

$$s = 1250$$

$$s - a = 6$$

$$s - b = 311$$

$$s - c = 933$$

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log(s-b) = 2.49276$$

$$\log(s-c) = 2.96988$$

$$5.46264$$

$$\log s = 3.09691 \quad \}$$

$$\log(s-a) = 0.77815 \quad \}$$

$$21.58758 - 20$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{A}{2} = 10.79379 - 10$$

$$\frac{A}{2} = 80^{\circ} 52' 0''$$

$$A = 161^{\circ} 44' 0''$$

Takisto izračunaš $B = 13^{\circ} 41' 8''$, $C = 4^{\circ} 34' 52''$.

Vsota vseh polovic kotov mora znašati 90° ; mogoče je vendar zaradi nenatančnosti tabel, da se ta vsota za malo razlikuje od 90° , kar se pa dá zravnavati s tem, da to razliko razdeliš kolikor mogoče enakomerno na vse tri kote.

Za določitev ploščine imamo

$$\log s = 3.09691$$

$$\log(s-a) = 0.77815$$

$$\log(s-b) = 2.49276$$

$$\log(s-c) = 2.96988$$

$$9.33770$$

$$\log p = 4.66885$$

$$p = 46650$$

Izračunaj sledeče naloge:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>			<i>B</i>			<i>C</i>			<i>f</i>
17	113	120	7°	37'	41"	61°	55'	39"	110°	26'	40"	899
93	34	65	137	40	39	14	15	0	28	4	21	744
318	532	510	35	27	30	76	2	58	68	29	22	62512
328	169	241	104	53	51	29	51	46	45	14	23	19680
388	389	195	75	10	52	75	45	0	29	4	8	36666
436	365	507	57	15	28	44	45	37	77	58	55	77826
510	533	317	68	23	7	76	18	52	35	18	1	78540
565	445	606	62	51	33	44	29	53	72	22	34	119988
569	281	680	55	17	31	23	57	8	100	45	21	78540
606	565	445	72	38	34	62	51	33	44	29	53	151872
704	302	670.1	83	40	0	25	14	13	71	5	47	100287
716	185	543	156	1	45	6	1	32	17	56	43	20406
748	375	671.3	86	23	7	30	1	23	63	35	30	125615
788	825.5	951.3	52	4	7	55	43	18	72	12	35	309707
956	533	1011	68	39	18	31	17	4	80	3	38	250950
1196	353	951	126	43	0	13	41	8	39	35	52	134550
1772	593	1479	110	2	0	18	19	29	51	38	31	411990
200.2	453	554.9	19	47	22	50	0	0	110	12	38	85098
330.1	412.2	371.3	49	29	50	71	42	42	58	47	28	58188
432.5	589.7	634.2	41	11	13	63	52	46	74	56	1	246282

II. Uporaba trigonometrije.

§. 223. 1. Določi iz dolžine sence vertikalno postavljene palice višino solnca.

Recimo, da je $AB = h$ (lik 187.) vertikalna palica in $AC = a$ nje senca. Višina solnca t. j. kot C določiš potem iz enačbe

$$\operatorname{tang} C = \frac{h}{a}.$$

Primer: $h = 2^m$, $a = 1.82^m$.

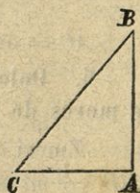
2. Določi višino h predmeta, do čegar podno-
žišča meriti moreš.

Zmeri horizontalno razdaljo točke C od podnožišča A predmeta AB (lik 187) in kot C ; ako dobiš $AC = a$ in $C = m$, potem je

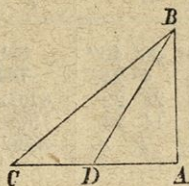
$$h = a \operatorname{tang} m$$

3. Določi višino h predmeta AB (lik 188), do čegar podnožišča ne moreš meriti.

Lik 187.



Lik 188.



Misli si skoz AB položeno vertikalno ravnino, katera horizontalno seče v AC . Zmeri potem stalnico $CD = a$ in na nje krajiščih kota $ACD = m$ in $ADB = p$; potem je

$$h = BC \cdot \sin m, \text{ in}$$

$$BC : CD = \sin BDC : \sin CBD, \text{ ali}$$

$$BC : a = \sin p : \sin (p - m), \text{ torej}$$

$$BC = \frac{a \sin p}{\sin (p - m)}, \text{ in tedaj}$$

$$h = \frac{a \sin m \sin p}{\sin (p - m)}.$$

4. Določi razdaljo dveh točk na polji, ako je ne moreš meriti naravnost zaradi ovir med njima.

To nalogo smo že rešili v prvem delu (glej lik 95). Zmerili smo od stališča C razdalji CA in CB ; to storimo tudi tu, zmerimo pa še med njima ležeči kot ACB . Potem poznamo dve stranici trikotnika ABC in od njih okleneni kot, torej moremo tudi izračunati tretjo AB (§. 220).

Recimo, da je $CB = 54^m$, $CA = 58^m$, in $\sphericalangle ACB = 65^\circ 29'$; kolika je AB ?

5. Določi razdaljo dveh točk na polji, ako moreš le do jedne teh točk priti.

Zmeri od stališča C (lik 96) razdaljo $CA = a$ pa kota C in A . Potem dobiš iz trikotnika ABC

$$AB = \frac{a \sin A}{\sin (A + C)}.$$

$$AC = 52^m, C = 63^\circ 15', A = 57^\circ 18'; \text{ kolika je } AB?$$

6. Določi razdaljo AB (lik 97) dveh točk na polji, ako ne moreš do nobedne priti.

Zmeri stalnico $CD = a$ in na nje krajiščih kote $ACB = m$, $ACD = n$, $CDA = p$ in $CDB = r$.

Potem moreš izračunati v $\triangle ACD$ iz stranice CD in kotov n in p stranico AD , takisto v $\triangle BCD$ iz stranice CD in kotov $(n - m)$ in r stranico BD . Ker pa poznaš stranici AD in BD in kot $(r - p)$ trikotnika ABD , moreš izračunati tudi tretjo AB .

Recimo, da je $CD = 75^m$, $ACB = 59^\circ 17'$, $ACD = 101^\circ 46'$, $CDA = 42^\circ 10'$ in $CDB = 108^\circ 39'$; kolika je AB ?

7. Izračunaj dolžino loka b največjega kroga zemlje, katero prežreš iz višine h .

Recimo, da je $OB = r$ (lik 189) polumer zemlje, $BC = h$ višina očesa nad zemeljskim površjem in CD tangenta na največji krog zemlje od očesa potegnena, potem je, ako še zaznačimo kolikost pripadajočega središčnega kota z α ,

$$\cos \alpha = \frac{r}{h + r}.$$

Iz α moremo potem določiti b (§. 129 prvi del).

Kako daleč vidi oko, katero je 2 Km nad morjem, ako si mislimo zemljo popolnoma kot kroglo s polumerom 6370 Km.

8. Določi iz zemljepisne širine kraja polumer vzporednega kroga gredočega skoz ta kraj in njega razdaljo od središča zemlje.

Recimo, da je $AO = r$ (lik 190) polumer zemlje AQ ekvator, N severni tečaj, C kraj na površini zemlje, njega zemljepisna širina AC ali $\sphericalangle AOC = \varphi$, $CM = r'$ polumer vzporednega kroga CD in $OM = d$ njega razdalja od središča. Iz pravokotnega trikotnika CMO , v katerem je kot $COM = 90^\circ - \varphi$, dobimo

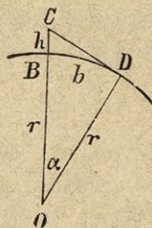
$$r' = r \cos \varphi \text{ in } d = r \sin \varphi.$$

Koliko mirijametrov ima vzporedni krog, kateri gre skoz Dunaj (zemljepisna širina $= 48^\circ 12' 35''$)?

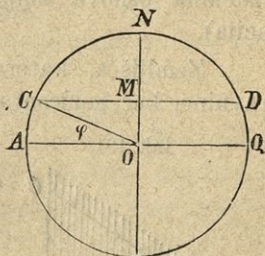
Za katero zemljepisno širino znaša stopnja vzporednega kroga 60 kilometrov?

Določi višino a) vročega pasu na polukrogli, b) zmernege pasu, c) mrzlega pasu zemlje, ako vzamemo za polumer zemlje $r = 6370$ Km in za razdaljo kroga tečajnikovega od tečajev kakor tudi za razdaljo kroga povratnikovega od ekvatorja $m = 23^\circ 28'$. Izračunaj tudi za iste pogoje ploščino vsakega pasu na zemlji.

Lik 189.



Lik 190.

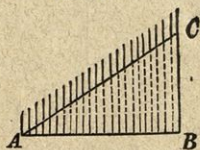


Dodatek.

Zemljišča niso vsa ravna in tudi ne horizontalno ležeča, ampak njih meje stvarjajo like, izmed katerih ne leži vsak popolnoma v jedni sami ravnini. Ako vežemo podnožišča navpičnic, katere spuščamo od vsake mejne točke zemljišča na katerokoli horizontalno ravnino s črtami, dobivamo njega **horizontalno projekcijo** ali **očrt**. Kolikost in obliko horizontalne projekcije zemljišča določevati se pravi njega **mapovati**; popolnoma izdelana osnova mapovanih zemljišč je njih **tlavid** (mapa, situacija).

Zemljišča, katera mapujemo, vzmetavamo na horizontalne ravnine, ker horizontalno lego laglje določujemo in ker rastline vse kviško t. j. v vertikalni meri rastejo, torej nima na strmih tleh AC več rastlin prostora nego na horizontalnih AB (na horizontalni projekciji prvih). Primerjaj pridjani lik.

Lik 191.



Pri mapovanju je treba meriti daljice in kote in izmerjeno unašati na papir.

I. Merjenje daljic na polji.

Pri merjenju daljic na polji je treba opravljati dvoje: **določevati njih merodajne točke** in jih v resnici tudi **meriti**.

A. Merodajne točke daljice so: nje mejišči, in ako je teh razdalja prevelika, več vmesnih točk, nadalje nje presečišča s potrebnimi pomočnimi črtami.

Za določevanje točk na polji se poslužujemo **kolčkov**, **merskih drog** (iztaknjul) in **merskih praporcev**.

Merski drogi so 2^m do 3^m dolgi in 3^{cm} močni, zdolaj so okovani z železom na šilo (čevelj), in razdeljeni so na jednake dele, kateri so menjoma rudeči in beli. Takisto so ustrojeni merski praporci, samo da so še daljši in da imajo na gornjem koncu rudeče-belo zastavo; te rabijo namesto merskih drogov za večje razdalje.

Naloga 1. Izkolčevanje daljice na polji.

Dve točki A in B , kateri sta na polji zaznamenovani z dvema navpičnima drogoma, določujeta popolnoma mer daljice. Ako je treba več toček te daljice ustanoviti, postavlja se merjevec za jeden drog B in gleda na drug drog A v meri obeh; med tem skuša pomočnik ravna se po mahljajih merjevčeve roke na ono mesto svoj med dvema prstoma prosto viseč drog postaviti, kjer namerava merjevec vmesno točko ustanoviti. Ko merjevec vidi, da se pokrivajo vsi trije krogi v meri daljice t. j. ko ugleda pomočnikov drog v meri drogov A in B , izpusti drugi na dano znamenje prvega drog iz roke in ga utakne v tej legi v zemljo.

Tako postopanje imenujemo **ugledovanje**.

Kedar izkolčujemo dolge črte, ustanovljajo najpred bolj oddaljene vmesne točke.

Naloga 2. Podaljšanje na polji izkolčene daljice.

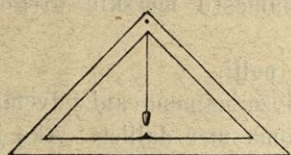
Daljico AB podaljšaš do točke C , ako se vstopiš po meri na oko blizu tjâ, kjer bi imela točka C biti, in ako ugledavaš drog, katerega držiš prosto med dvema prstoma, v mer drogov B in A toliko časa, dokler se ne pokrivajo vsi trije drogi; tu utakni drog v zemljo.

B. Za merjenje v resnici se poslužujejo ali merske letve po $2\frac{1}{2}^m$ ali 5^m dolge, ali merskega lanca z dvema lančevima drogoma in z desetimi lančevimi utikljaji (zaznamenjevalkami). Merski lanec je dvajset metrov dolg in sestoji iz železnih šibic, katere so zvezane z okroglimi sklepi iz medi; na koncih sta dva večja medena sklepa, skoz katera utikujejo lančeva droga. Ta dva sta okolo 1^m dolga in spodej z železom okovana na šilo. Utikljaji so $3-4^{dm}$ dolgi, narejeni iz železne žice blizo tako debele, kakor gosje pero, zgoraj imajo obročkast obešaj in spodaj so šiljaste. Razen tega mora imeti merjevec meter razdeljen na nižje dolgostne jednote ali mersko vrvico.

Za določevanje vertikalne meri se poslužujejo svinčnice, ali tudi pogreznjule t. j. okrogle $1\frac{1}{2}$ metrov dolge palice iz lahkega

lesa, katera je spodaj okovana s težkim železom na šilo, da jo to spravlja v vertikalno mer, ako jo držiš prav rahlo med dvema prstoma.

Lik 192.



je ta horicontalna. Uporaba tega orodja se uže spozna iz njega naprave.

Ako razuljo postaviš na daljico, da pozveš te lego, udarja svičnica v žlep ali na stran, kedar je ta daljica horicontalna ali poševna.

Nologa 1. Merjenje daljice na horicontalnih tleh.

- a) **Z merskima letvama.** Vzemi dve jednaki (n. pr. 5^m) dolgi merski letvi, položi jedno na daljico, začeniš v te krajišči in drugo v isti meri tako k prvi, da se s koncema dotikata; potem poberi prvo letvo in jo položi h koncu druge in ponavljaj tako pokladanje do družega krajišča daljice. Merske letve šteje glasno, ko jih pobiraš.
- b) **Z merskim lancem.** Ako se ima črta *AB*, katera je zaznana z merskima praporcema v *A* in *B*, počeniš od *A* meriti, vzameta dva pomočnika merski lanec, katerega natakneš s končnima sklepoma na lančeva droga. Zadnji pomočnik postavi s svojim lančevim drogom v točko *A*; sprednji pa, kateri ima vse utikljaje, vleče lanec dalje v meri daljice proti *B*. Ko zadnji pomočnik lančev drog sprednjega v meri meri daljice *AB* ugleda, napne ta lanec, valovaje ž njim po zraku, dobro in točno s svojim drogom, ter utakne prvi utikljaj na koncu lanca v zemljo. Zdaj vleče sprednji pomočnik lanec toliko časa naprej, da pride zadnji do točke *C*. Tukaj pobere utikljaj, utakne na njega mesto svoj drog, ter ugledava spet drog sprednjega pomočnika, sploh ponavljata prejšnje postopanje toliko časa, da dospeta do družega krajišča daljice *AB*. Od zadnjega utikljaja do krajišča *B* izmeriš dolgost z lancem, kateri je čez *B* razpet; dolžine krajše od decimetra meriš z merilom. Na zadnje prešteje zadnji

orehovich diljic, kateri narejata prav kot in imata na koncih pravokotno postavljene osi iz rumene medi; pritrjen je horizontalno na stojalu.

Naloga 1. Postavljanje pravokotnice v točki izkolčene daljice.

Ako imamo v točki C daljice AB postaviti pravokotnico, zatakujemo v točki C stojalo križa navpično tako, da pride jeden krak križa t. j. glednica njega osti v mer daljice AB . Potem ugledavamo čez osti drugega kraka in zatakujemo v njegini meri drog; na tem mestu je točka, skoz katero gre iskana pravokotnica.

Naloga 2. Spuščanje pravokotnice od dane točke C zunaj izkolčene daljice AB na to.

V to svrhu postavimo križ v daljici AB tam, kjer presojamo, da bi moglo biti podnožišče pravokotnice. Recimo, da je ta po presojevanji izbrana točka D . Zdaj uravnamo jeden krak križa v mer daljice AB , z drugim pa ugledavamo čez njega osti.

Ako ni točka C v meri te glednice, premeščujemo križ, ne da bi izpreminjali mer prvega kraka, proti levi ali proti desni toliko časa v daljici AB , da gre ona glednica na ravnost skoz točko C ; točka E , kjer je zdaj zataknen križ, je podnožišče iskane pravokotnice.

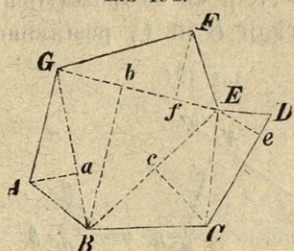
B. Priprave, s katerimi določujemo kolikost poljubnih kotov na polji, imenujemo kotomere; te so prav različno urejene. Najpriprostejši kotomer je astrolab. Na njem nahajamo tako zvano ziralo. Ono sestoji iz dobro in točno izdelanega ravnila iz medi in iz dveh navpičnih nastavkov na njega koncih. Jeden teh nastavkov je zgorej prebit, da je prozoren in ima v sredi tega prozira napet las (žimo), od spodej pod prozirom je pa prav ozko izrezan; drug nastavek je takisto izdelan, samo da je proziren spodej in izreza zgorej. Prozir z napetim lasom imenujemo predmetnico, izrezo pa očnico, ker pri zadnji ugledavamo skoz prvo na predmet.

Tako ziralo je pritrjeno na premeru medenega polukroga, kateri je razdeljen na stopnje in njih dele. Na astrolabu je pa še drugo tako ziralo, katero je vrtljivo okolo središča onega polukroga.

Cela naprava stoji na trinogatem stojalu.

Naloga. Mapovanje kota na polji.

Lik 194.

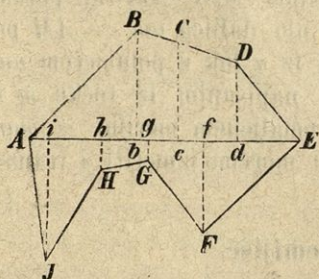


V mapi moremo tudi izmeriti višine trikotnikov ter izračunati ploščino cele ploskve (I. del, §. 72); da se pa moremo na dobljene rezultate bolje zanašati, izkolčujemo na polji tudi višine trikotnikov in jih merimo.

b) Po koordinatnem načinu.

Ko smo lik obkolčili, izkolčimo daljico AE (lik 195 med najbolj oddaljenima točkama. Na to daljico (črto - absciso)

Lik 195.



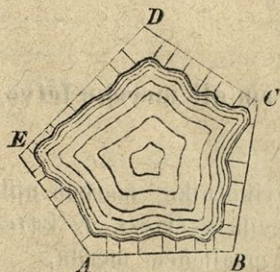
spuščamo pravokotnice (ordinate) od vseh zaznačenih točk na obsegu in merimo posamezne dele črte-abscise in vse ordinate. Doma moremo potem stvoriti mapo. Narišemo si najpred premo, na katero vnašamo abscise od A do $i, h, b, \dots$; v teh točkah postavimo pravokotnice in vnašamo na nje ordinate v redu, kakor se nahajajo na polji. Ako na zadnje zvežemo vse dobljene točke obsega, stvorili smo mapo.

Izračunanje ploskve izvršujemo, kakor smo učili v prvem delu.

c) Po oklepanji lika.

Meje nekaterih ploskev so jako zakrivljene n. pr. meje potov; drugih ploskev zopet ne moremo meriti od znotraj n. pr. ribnikov, potokov i. t. d. V tem slučaju oklepamo meje (lik 196) s stranicami mnogokotnika $ABC \dots$ (s črtami-abscisami) in spuščamo na te pravokotnice (ordinate) iz točk, v katerih je meja zakrivljena. Potem merimo posamezne abscise, pripadajoče ordinate in kote, katere stvarjajo črte-abscise med seboj. Doma narišemo na papir najpred črte-abscise $AB = ab$,

Lik 196.



$BC = bc$, $CD = cd$ po omaljenem merilu in kote $A = a$, $B = b$ i. t. d. zaporedoma, kakor se nahajajo v prirodi;

potem postavljamo ordinate v krajiščih vnešenih abscis po istem omaljenem merilu. Ako zvežemo krajišča ordinat, dobimo mapo ploskve v prirodi.

2. Mapovanje ploskve na polji s kotomerom.

a) Iz točke znotraj ploskve.

Vzemimo, da hočemo izmeriti lik $ABCDEF$ iz točke O , od katere moremo meriti na vse strani. V to svrho postavimo kotomer v točki O , merimo kote AOB , BOC , COD i. t. d. in razdalje OB , OC , OD i. t. d. Doma narišemo na papir okolo O vse izmerjene kote, vnašamo na njih krakih izmerjene daljice po omaljenem merilu in zvežemo krajišča vnešenih daljic, da dobimo mapo ploskve na polji.

b) Iz dveh stališč.

Pri tem mapovanju si izberemo v ploskvi $ABCD \dots$ (lik 198) stališči M in N , med katerima moremo meriti, izmerimo stalnico MN , postavimo kotomer v točki M in merimo kote NMA , NMB , $NMC, \dots$; potem gremo s kotomerom v točko N in merimo takisto kote MNA , MNB , $MNC \dots$. Doma narišemo na papirji stalnico po omaljenem merilu in vnašamo zaporedoma izmerjene kote; ako zvežemo presečišča a , b , $c \dots$ njih krakov, dobimo mapo ploskve na polji.

Ako pripuščajo okolščine, jemljemo tudi za stališči dve oglišči lika.

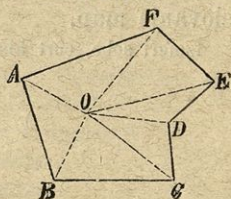
c) Iz obsega.

Vzemimo, da je $ABCDEF$ (lik 198) gozd, skoz katerega ne moremo meriti. Potem merimo obsežne črte AB , BC , $BD, \dots$ in kote A , B , $C, \dots$. Doma vnašamo te črte po omaljenem merilu in kote zaporedoma na papir, ter dobimo mapo ploskve na polji.

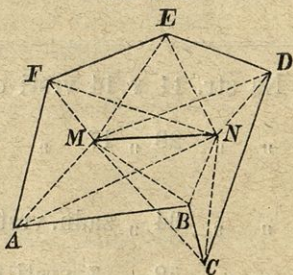
O izdelovanji map.

O izdelovanji mape z barvami in o označenji raznih kultur na tem mestu ne moremo obširnejše govoriti; pristaviti hočemo samo pravilo, po katerem se v obče ravna. To je:

Lik 197.



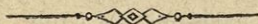
Lik 198.



Pri načrtovanju predmetov, posnemajo njih podobo kolikor mogoče; drugače pa rabijo za nje označila, kakoršna so sploh v navadi.

V posebnih litografiranih pregledih nahajamo označene predmete in kulture: travnike, pašnike, močvirja, ograje, vinograde, polja, vrte, perivoje, hmeljnike, skalovje in pečine, jezera, reke, mostove i. t. d. In vse to je zadosten napotek za izdelovanje map.

Izmeri sobo, očrt hiše in drugo ter načrtaj to po omaljenem merilu.



Popravki važnejših pogreškov.

	napačno	popravljeno
Na str. 11 v 14 vrsti odsp.	$a = b$	$a = c$
" " 28 " 17 " "	$\nless CBB'' \nless$ $CB''B$	$\nless ABB'' \nless$ $CB''B$
" " 34 " zadn. vrsti odsp.	b	$b)$
" " 58 " 7 vrsti odsp.	prečnicama	vzporednicama
" " 133 " 20 " "	Stožec omejujeta	Stožec, kakeršnega hočemo tu v mislih imeti, omejujeta

Terminologija. *)

A.

Abseisa, Abseisse.
 Abstand, razdalja, razstoj.
 Abstecken, izkolčiti*, iztikati.
 Absteckstab, iztahnjula*.
 Analiza, Analysis.
 Anliegend, priležen.
 Anwinkel*, prikot.
 Astrolab, Astrolabium.
 Ausdehnung, obmer.

B.

Bestimmt, določen.
 Betragen, znašati.
 Bogen, lok.

C.

Centrale, središnica.
 Centriwinkel*, središčen kot.
 Centrum, središče.
 Cilinder, Cylinder.
 Complementwinkel*, komplementaren kot.
 Congruent, skladen.

Č.

Četverokotnik, Viereck.
 Četverorobovnik, Vierkant.
 Četverostran, četverostraničen*, vierseitig.
 Črta, Linie.
 Črta, — sinus, — kosinus, — tangenta
 — sekanta, — kotangenta, — kosekanta, Sinus-, Cosinuslinie etc.
 Črticast*, gestrichelt.
 Črticast-pikičast, gestrichelt-punktirt.

D.

Daljica*, Strecke.
 Determinacija*, Determination.
 Diagonala, Diagonale.
 Dodekaeder, dvanajsterec.
 Določen, bestimmt.
 Dolžina, Länge.
 Dopolnilna piramida, Ergänzungs-pyramide.
 Dopolnilen stožec, Ergänzungskegel.
 Dostavek, Zusatz.
 Dotikališče*, Berührungspunkt.
 Dotikalna ravnina*, Berührungs-Ebene.
 Dotikalna tetiva, Berührungs-Sehne.
 Dotikalnica*, Berührungslinie.
 Dreieck, trikotnik*.
 Durchmesser, premer.
 Durchschnittspunkt, presečišče.

E.

Ebene, ravnina.
 Ebene Fläche, ravna ploskev.
 Eckpunkt, oglišče.
 Einheit, jednota*.
 Endpunkt, krajišče.

F.

Fest, nepremičen*.
 Figur, lik, figura.
 Fläche, ploskev.
 Flächengleich, ploskveno-jednak*.
 Flächeneinheit, ploskvna jednota.
 Flächeninhalt, ploščina*.
 Fusspunkt, podnožišče.

*) Izrazov, zaznačenih z zvezdicami, ne nahajamo v Cigaletovi terminologiji.

G.

Gebilde, tvor.
 Gegenüberliegend, nasproten.
 Gegenwinkel, protikot*.
 Geometrijsko mesto, geometrischer Ort.
 Gerade, prema; pokončen*.
 Geradlinig, premočrten.
 Gestrichelt, črticast.
 Gestrichelt-punktirt, črtičast-pikičast.
 Glavna funkeija, Hauptfunction.
 Glednica, Visierlinie.
 Gleichschenklig, jednakokrak.
 Gleichseitig, jednakostraničen*, jedna-
 kostran.
 Gleichwinklig, jednakokoten.
 Gorišče*, Brennpunkt.
 Grad, stopnja.
 Greblia, Schrottwage.
 Grenzpunkt, mejišče*.
 Grundgebilde, osnoven tvor.
 Grundlinie, osnovnica.

H.

Halbieren, razpoloviti, razpolavljati*.
 Halbierungslinie, polovnica.
 Halbierungspunkt, polovišče.
 Halbkreis, polukrog.
 Halbmesser, polumer.
 Halbstral, polutrak*.
 Hipotenuza, Hypotenuse.

I.

Ikozaeder, dvajseterec.
 Indirekten, indirekt.
 Istoležen*, gleichliegend.
 Istovrsten*, gleichartig.
 Izhodišče, Anfangspunkt.
 Izmeničen kot, Wechselwinkel.
 Izrek*, Lehrsatz.
 Izsek, Ausschnitt.

J.

Jednak, gleich.
 Jednakokoten, gleichwinklig.
 Jednakokrak, gleichschenklig.

Jednakostran-, straničen, gleichseitig.
 Jednota, Einheit.

K.

Kateta, Kathete.
 Klin, Keil.
 Kocka, Würfel.
 Körper, telo.
 Konfunkeija, Confunction.
 Količina, Grösse.
 Kolček*, Pflock.
 Kolobar, Ring.
 Koordinata, Coordinate,
 Kosekanta, Cosecante.
 Kosinus, Cosinus.
 Kot, Winkel.
 Kot iztegnen, gestreckter W.
 Kot izsrediščen, excentrischer W.
 Kot komplementaren, Complemen-
 winkel.
 Kot naklonski, Neigungswinkel.
 Kot nasproten, gegenüberliegender W.
 Kot notranj, innerer W.
 Kot oboden, Peripheriewinkel.
 Kot oster, spitzer W.
 Kot otel, hohler W.
 Kot ploskven, Flächenwinkel.
 Kot poln, voller W.
 Kot prav, rechter W.
 Kot priležen, anliegender W.
 Kot roboven*, Kantenwinkel.
 Kot središčen*, Centriwinkel.
 Kot suplementaren, Supplementwinkel.
 Kot top, stumpfer W.
 Kot vnanj, äusserer W.
 Kot v polukrogu, Winkel im Halb-
 kreise.
 Kot vzvišen, erhobener W.
 Kotangenta, Cotangente.
 Koti nad premo, Winkel an einer Ge-
 raden.
 Koti krog točke, Winkel um einen Punkt
 herum.
 Kotna ploskev, kotnina*, Winkelfläche.
 Kotna funkeija, Winkelfunction.

Kotomer, Winkelmesser.
 Krajšče, Endpunkt.
 Kračja ploskev*, krakina, Schenkel-
 fläche.
 Krak, Schenkel.
 Kriv, krumm.
 Krivočrten, krummlinig.
 Krivoplosk*, krummflächig.
 Krog, Kreis.
 Kroglja, Kugel.
 Kroglin* izsek, Kugel-Ausschnitt.
 Kroglin odsek, Kugel-Abschnitt.
 Kroglin pas, Kugel-Zone.
 Kroglina kapica*, Kugel-Mütze.
 Kroglina plast, Kugel-Schichte.
 Krožnica, Kreislinie.
 Krožnina*, Kreisfläche.
 Kubičen, kubisch.
 Kvadrat, Quadrat.
 Kvadratni meter, Quadratmeter.
 Kvadrant, Quadrant.

L.

Lančev drog, Kettenstab.
 Linie, črta.
 Lik, Figur.
 Lok, Bogen.

M.

Mapa, Mappe.
 Mapovati, aufnehmen.
 Masseinheit, merska jednota.
 Masszahl, mersko število.
 Meja, Grenze.
 Mejišče, Grenzpunkt.
 Mejna ploskev, mejnina, Grenzfläche.
 Mer, Richtung.
 Mera, Mass.
 Merska letva, Messplatte.
 Merska vrstica, Messband.
 Merski drog, Messtange.
 Merski lanec, Messkette.
 Merski praporec, Messfahne.
 Minuta, Minute.
 Mittelpunkt, središče.

Mittellinie, srednica*.
 Mnogokotnik, Vieleck.
 Mnogokotnik vpisan, eingeschrieben.
 Mnogokotnik opisan, umgeschrieben.
 Mnogokotomerstvo, Polygonometrie.
 Mreža, Netz.

N.

Načelo, Grundsatz, Axiom.
 Načrt, Aufriss.
 Naloga, Aufgabe.
 Naloga za načrtovanje, Constructions-
 Aufgabe.
 Nasproten, gegenüberliegend.
 Naris*, Darstellung.
 Navpičen, lothrecht.
 Nebenwinkel, sokot.
 Nedoločeni, unbestimmt.
 Nejednak, ungleich.
 Nepravilen, unregelmässig.
 Nepremičen, fest.
 Nesomeren, incommensurabel.
 Nevzporednica, eine nicht parallele
 Gerade.
 Normalno, normal.

O.

Oberfläche, površje.
 Oblo, Kugel.
 Oblina*, Kugelfläche.
 Obmer, Ausdehnung.
 Obod, Kreisumfang.
 Obrat, Umkehrung.
 Obseg, Umfang.
 Obstransko površje (obstranje*), Seiten-
 oberfläche.
 Obstranska višina, Seitenhöhe.
 Očnica, Ocular.
 Očrt, Grundriss.
 Odmičen, divergent.
 Odsek, Abschrift.
 Ogel, Ecke.
 Ogel dovršen, Scheitecke.
 Oglišče, Eckpunkt.
 Okrajšana* piramida, Pyramidalstumpf.

Okrajšan stožec, Kegelstumpf.
 Oktaeder, osmerec.
 Omaljeno*merilo, verkleinerter Massstab.
 Ordinata, Ordinate.
 Os, Axe.
 Os postranska, Nebenaxe.
 Os glavna, Hauptaxe.
 Os simetrije, Axe der Symetrie.
 Osnovna resnica, Grundwahrheit.
 Osnovna ploskev, osnovina*, Grundfläche.
 Osnovnica, Grundlinie.
 Osnovni tvor, Grundgebilde.
 Ostrokoten, spitzwinklig.

P.

Parallel, vzporeden.
 Parallele, vzporednica.
 Paralelepiped, Parallelepiped.
 Paralelogram, Parallelogramm.
 Periferija, Peripherie.
 Perspektiven, perspectivisch.
 Peterokotnik, Fünfeck.
 Peterostran-, straničen, fünfseitig.
 Pikičast, punktiert.
 Piramida, Pyramide.
 Piramidast, pyramidal.
 Plast, Schichte.
 Plašč, Mantel.
 Ploskev, Fläche.
 Ploskveno-jednak*, flächengleich.
 Ploskvena vsebina*, ploščina*, Flächeninhalt.
 Ploskvena jednota, Flächeneinheit.
 Podaljšek*, Verlängerung.
 Podnožišče, Fusspunkt.
 Podobnišče*, Aehnlichkeitspunkt.
 Pogoji, Bedingung, Voraussetzung.
 Pogreznjula*, Senkelstock.
 Pokončen*, gerade.
 Polieder, Polyeder.
 Poln, voll.
 Polovišče, Halbierungspunkt.
 Polovnica, Halbierungslinie.
 Polukrog, Halbkreis.

Polukrogla*, Halbkugel.
 Polumer, Halbmesser.
 Poluravnina*, Halbebene.
 Polutrak*, Halbstral.
 Pomočna črta, Hilfslinie.
 Poševen, schief.
 Poševnokoten, schiefwinklig.
 Povečati, vergrössern.
 Površje, Oberfläche.
 Pravilen, regelmässig.
 Pravokoten, rechtwinklig.
 Pravokotnica, senkrechte Linie.
 Provokotnik, Rechteck.
 Pravoktni križ, Winkelkreuz.
 Prečnica, Transversale.
 Predmetnica, Objectiv.
 Prekotnica, Diagonale.
 Prema, Gerade.
 Premier, Durchmesser.
 Premo-črten, gerad-linig.
 Presečišče, Durchschnittpunkt.
 Presečna ploskev (presečnina*), Schnittfläche.
 Presek, Schnitt.
 Pretvor, Verwandlung.
 Pretvoriti, verwandeln.
 Prevodnica, Leitstral.
 Prikot*, Anwinkel.
 Priležen, anliegend.
 Primičen, convergent.
 Prizma, Prisma.
 Proga, Streifen.
 Proizvodnica*, Resultatslinie.
 Projicirati, projicieren.
 Proportion, sorazmerje.
 Proportioniert, sorazmeren.
 Prostor, Raum.
 Prostornina, Rauminhalt.
 Protikot*, Gegenwinkel.
 Protivorečje, Widerspruch.
 Punkt, točka.

R.

Radij, Halbmesser.
 Raumgrösse, prostorna količina.

Raven, eben.
 Ravninje*, Ebenenbüschel.
 Ravnoplosk*, ebenflächig.
 Razdalja, razstoj, Abstand.
 Razmerje, Verhältniss.
 Raznokoten, ungleichwinklig.
 Raznostran-, straničen, ungleichseitig.
 Razpoloviti, razpolavljati, halbieren.
 Razrešiti, razreševati, auflösen.
 Razulja, Schrotwage.
 Rechtwinklig, pravokoten.
 Regelmässig, pravilen.
 Resultatslinie, proizvodnica.
 Richtung, mer.
 Rob, Kante.
 Romb, Rhombus.
 Romboïd, Rhomboid.

S.

Scheitel, vrh, teme.
 Scheitelwinkel, sovršen kot.
 Schenkel, krak.
 Schief, poševen.
 Schiefwinklig, poševnokoten.
 Sečnica, Sekante.
 Seite, stran, stranica, stranina.
 Sekunda, Secunde.
 Senkrecht, navpičen.
 Simetrāla, Symmetrale.
 Simetričen, symmetrisch.
 Simetrično-jednak, symmetrisch-gleich.
 Skladen, congruent.
 Skladnost, Congruenz.
 Skupna mera, gemeinschaftliches Mass.
 Sokot, Nebenwinkel.
 Sokotje*, Nebenwinkelgebilde.
 Somenen*, commensurabel.
 Sorazmeren, proportionirt.
 Sorazmerje, Proportion.
 Sorazmerica, Proportionale.
 Sosreden, concentrisch.
 Spitzwinklig, ostrokoten.
 Središče, Mittelpunkt.
 Središčen* kot, Centriwinkel.
 Središnica, Centrale.

Srednica*, Mittellinie.
 Standpunkt, stališče.
 Standlinie, stalnica.
 Stopnja, Grad.
 Stopnja ločna*, Bogengrad.
 Stopnja kotna, Winkelgrad.
 Stožec, Kegel.
 Stožkovit, konisch.
 Stral, trak.
 Stralenbüschel, trakovje*.
 Stralenpunkt, tračišče.
 Stran, stranica, stranina, Seite.
 Stranska ploskev (stranina), Seitenfläche.
 Streeke, daljica.
 Stumpfwinklig, topokoten.
 Supplementwinkel, suplementaren* kot.
 Svinčnica, Senklot.

Š.

Šesterokotnik, Sechseek.
 Šesterostran-, straničen, sechsseitig.
 Šestilo, Cirkel.

T.

Tečaj, Pol.
 Telo, Körper.
 Teme, Scheitel.
 Tetiva, Sehne.
 Tetraeder, četverec.
 Tisočnisko poprečno merilo, tausendtheiliger Transversal-Massstab.
 Tlavid*, Mappe, Situation.
 Točka, Punkt.
 Topokoten, stumpfwinklig.
 Trašišče, Stralenpunkt.
 Trak, Stral.
 Trakovje*, Stralenbüschel.
 Transversale, prečnica.
 Trapec, Trapez.
 Trapecoid, Trapezoid.
 Trditev, Behauptung.
 Trikotnik, Dreieck.
 Trikotomerstvo, Trigonometrie.
 Trirobovnik, Dreikant.

Tristran-, straničen, dreiseitig.
 Tvor, Gebilde.
 Tvor na prema, erzeugende Gerade.

U.

Ugledavati*, einvisieren.
 Umanjiti, verkleinern.
 Umfang, obseg; Umfang des Kreises, obod.
 Unašati, auftragen.
 Unbestimmt, nedoločén.
 Ungleichseitig, raznostran.
 Ungleichwinklig, raznokoten.
 Unregelmässig, nepravilen.
 Utikljaj, Kettennagel.

V.

Valj, Cylinder.
 Verbindungslinie, (črta) zveznica.
 Verhältniss, razmerje.
 Verlängerung, podaljšek.
 Vieleck, mnogokotnik.
 Vierflächig, četveroplosk.
 Vierseitig, četverostran-, straničen.
 Višina, Höhe.
 Vodnica, Leitlinie.
 Vodoraven, wagrecht.

Voll, poln.
 Vrh, Scheitel.
 Vrtenje, vrtnja, Drehung.
 Vzmetna ravnina (vzmetnina), Projectionsebene.
 Vzmetniti, projicieren.
 Vzporeden, parallel.
 Vzporednica, Parallele.
 Vzporednik, Parallelogramm.

W.

Wagrecht, vodoraven.
 Wechselwinkel, izmeničen kot.
 Winkel, kot.
 Winkelfläche, kotna ploskev, (kotnina).

Z.

Zavit, gekrümmt.
 Zavisen, abhängig.
 Zavisnost, Abhängigkeit.
 Zaznamenjevalka, Zeichenstab.
 Znamenljiv, charakteristisch.
 Zusatz, dostavek.
 Zveznica, Verbindungslinie.

Ž.

Žarišče, Brennpunkt.



