PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 352–354

Tomaž Košir in Dragoljub M. Milošević:

PTOLEMEJEV IZREK

Ključne besede: matematika, kotne funkcije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Kosir-Milosevic.pdf

PTOLEMEJEV IZREK

Že v Preseku 1 (1987/88) smo spoznali Ptolemejev izrek: V tetivnem štirikotniku je vsota produktov dolžin nasprotnih stranic enaka produktu dolžin diagonal, torej

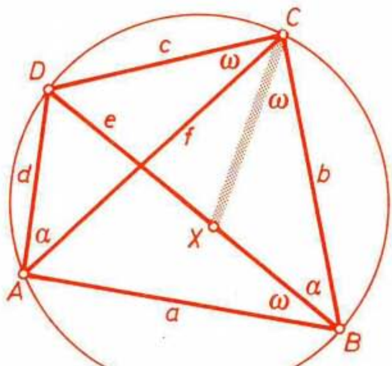
$$ac + bd = ef \qquad (1)$$

če so stranice četverotkotnika a, b, c in d ter diagonali e in f.

Tedaj smo spoznali, da lastnost (1) že določa tetivni četverokotnik. Tokrat pa si bomo ogledali elementarni dokaz Ptolemejevega izreka, ki ga najdemo v knjigi Franceta Križaniča Nihalo, prostor in delci. Problem je rešen, če v prvi potezi potegnemo pravo črto. Z daljico CX (skica 1) sestavimo trikotnik XBC, ki ima ob vrhu C isti kot kot trikotnik DAC. Kot ob B v prvem trikotniku je enak kotu ob A v drugem, saj sta to obodna kota nad istim lokom. Trikotnika sta podobna, zato velja: $|BC| : |AC| = |BX| : |AD|$. Tudi trikotnika ABC in DXC sta podobna. Kota ob C sta očitno enaka, kot ob X v trikotniku DXC pa je zunanji kot trikotnika XBC in je enak vsoti $\alpha + \omega$. Torej lahko zapišemo: $|DC| : |AC| = |DX| : |AB|$. Odtod dobimo: $|AD| . |BC| = |AC| . |BX|$ in $|AB| . |DC| = |AC| . |DX|$. Seštejemo in upoštevamo, da je $|BX| + |XD| = |BD|$. Dobimo

$$|AB| . |DC| + |AD| . |BC| = |AC| . |BD|$$

in Ptolemejev izrek je dokazan.



Slika 1

France Križanič v omenjeni knjigi pravkar dokazani izrek takoj uporabi. Zasledujmo ga, saj nam bo gotovo pokazal kaj zanimivega.

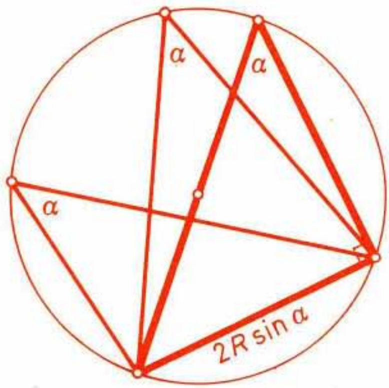
Znano je, da je dolžina tetive d odvisna le od obodnega kota α in polmera r (slika 2):

$$d = 2\,r \sin \alpha$$

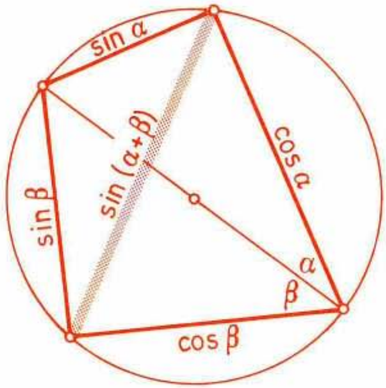
Narišimo sedaj krožnico s premerom 1 in ji včrtajmo četverokotnik, ki ima premer za diagonalo (slika 3). Diagonala razdeli kot ob izbranem vrhu v dva kota α in β. Z njima izrazimo vse štiri stranice. Druga diagonala je $\sin(\alpha + \beta)$. Po Ptolemejevem izreku velja:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

To pa je dobro znani adicijski izrek za funkcijo sinus.



Slika 2



Slika 3

Primer 1. Dokaži, da je dolžina diagonale v pravilnem petkotniku s stranico a enaka $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Rešitev: Štiri oglišča petkotnika tvorijo enakokraki trapez. Dolžina diagonale v trapezu naj bo x, dolžina kraka je a, osnovnici pa sta dolgi x in a. Če uporabimo Ptolemejev izrek za ta trapez, dobimo:

$$x^2 = a^2 + ax$$

Izraz preoblikujemo v $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, oziroma $(x - \frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{5}}{2})^2$. Po korenjenju je za nas zanimiva samo rešitev $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Primer 2. Nad hipotenuzo BC pravokotnega trikotnika ABC nariši kvadrat. Naj bo vsota dolžin obeh katet enaka m. Določi razdaljo med središčem kvadrata O in ogliščem A.

Rešitev: Četverokotnik $ABOC$ je tetivni. Ptolemejev izrek nam pove, da velja:

$$|AO| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BO| + |AB| \cdot |OC| \qquad (2)$$

Označimo $|AB| = n$ in $|BO| = k$. Potem je $|AC| = m - n$, $|OC| = k$ in $|BC| = k\sqrt{2}$. Iz enakosti (2) dobimo $|AO| . k\sqrt{2} = (m - n)k + nk = mk$. Delimo s $k\sqrt{2}$ in rešitev je $|AO| = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

Naloge

1. Dokaži Pitagorov izrek s pomočjo Ptolemejevega izreka.
2. Enakostraničnemu trikotniku ABC očrtamo krog. Točko M izberemo na tistem loku BC, ki ne vsebuje točke A. Pokaži, da potem velja $|BM| + |CM| = |AM|$.
3. V ostrokotnem trikotniku je vsota razdalj od središča očrtanega kroga do stranic enaka vsoti polmera vrčtanega in polmera očrtanega kroga. Pokaži!
4. (Naloga je s tekmovanja na Poljskem leta 1963.) Krožnica k je očrtana pravilnemu petkotniku $ABCDE$. Na krajšem loku AE izberemo točko M. Pokaži, da potem velja: $MA + MC + ME = MB + MD$. (Navodilo: Uporabi Ptolemejev izrek za četverokotnike $MABC$, $MACE$, $MBCD$ in $MCDE$.)

Tomaž Košir, primera in naloge prispeval *Dragoljub M. Milošević*