MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#1

PRESEK LETNIK 48 (2020/2021) ŠTEVILKA **1**

PRESEK

→ GLASBENA LESTVICA

→ SLIKE ZNAKOV NA MORSKIH VALOVIH

→ RETROGRADNO GIBANJE

→ O PREDSTAVITVI PODATKOV V RAČUNALNIKU: CELA ŠTEVILA

ISSN 0351-6652

9 770351 665814

Slika črne luknje

Slika prvega obrisa črne luknje je bil velik uspeh astrofizike, vendar podobno kot ostali znanstveni in tehnološki preboji tudi ta ne bi bil mogoč brez matematike. S pomočjo geometrije, trigonometrije in kompleksnih števil so znanstveniki uskladili in združili ogromne količine podatkov osmih observatorijev v slikovno predstavo, za katero bi sicer potrebovali teleskop v velikosti Zemlje. Da so zagotovili nepristransko obravnavo podatkov, je signale analiziralo več neodvisnih ekip, ki so s pomočjo matematičnih metod podatke spremenile v sliko črne luknje, ki jo lahko vidite na tej strani. Ker so se slike različnih raziskovalnih skupin presenetljivo ujemale v tisočerih parametrih, je bil to dovolj trden dokaz, da so svetu lahko predstavili nekaj, kar je bilo prej nevidno.

Slika je navdušila tudi, ker potrjuje mnoge teoretične rezultate o črnih luknjah, ki izhajajo iz enačb splošne relativnosti. Čeprav so te enačbe zelo težko rešljive, je 50 let po njihovi postavitvi matematik Roy Kerr navdušil znanstveno srenjo z eksaktnimi rešitvami enačb za primer vrtečih se črnih lukenj in s pomembnimi lastnostmi, ki jih opisujejo, npr. njihovo vrtilno količino. Takšne raziskave skušajo razumeti zelo pomembna, a na videz protislovna astronomska telesa, ki so hkrati črna in svetla ter imajo ogromno maso skoncentrirano v majhni točki. Boljše poznavanje črnih lukenj bi lahko prispevalo celo k poenotenju teorij kvantne mehanike in gravitacije.

Kogar tema bolj zanima, si lahko prebere članek »Black hole imaged for first time«, ki ga je v reviji Nature aprila 2019 objavil Davide Castelvecchi.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2020/2021 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Komet NEOWISE z uradno kataloško oznako C/2020 F3 so astronomi odkrili konec marca letos. Po prisončju je sicer prej skromni komet razvil velik prašnati in nekoliko manj izrazit ionski rep in postal v juliju viden že s prostim očesom. V začetku julija smo ga lahko občudovali na jutranjem nebu, od sredine julija pa na večernem nebu. NEOWISE je dolgoperiodični komet z zelo ekscentrično orbito in izhaja iz Oortovega oblaka, skrajnega roba Osončja. Njegovo jedro je veliko vsega 5 kilometrov. Fotografija: Andrej Guštin

Marija Vencelj (1941–2020)

↓↓↓
UREDNIŠTVO

→ **Sredi junija 2020 je umrla upokojena višja predavateljica mag. Marija Vencelj, bivša odgovorna urednica Preseka. Urejala ga je v letih od 1991 do 2003 in obenem skrbela tudi za matematično vsebino časopisa.**

Rojena je bila v Kranju, kjer se je šolala, preden je leta 1959 na Univerzi v Ljubljani začela študirati matematiko. Diplomirala je leta 1963 kot pripadnica prve generacije t. i. tehničnih matematikov. V začetku se je ukvarjala z numerično matematiko in bila v pionirskih časih računalništva na Slovenskem ena od prvih računalniških pogramerjev. Potem je postala asistentka na katedri za matematiko ljubljanske univerze, kjer je vodila vaje iz analize in drugih predmetov. Istočasno je na 3. stopnji v Zagrebu študirala topologijo in tam leta 1970 magistrirala. Čez pet let je bila v Ljubljani izvoljena za predavateljico (štiri leta kasneje za višjo predavateljico) in pričela predavati na pedagoški smeri matematike predmet *elementarna matematika z metodiko*, v začetku osemdesetih let pa še voditi pedagoški seminar. Od tedaj je vse do svoje upokojitve imela na skrbi izobraževanje bodočih srednješolskih (in nekaj časa tudi osnovnošolskih) učiteljev matematike. Pripravljala jih je na pedagoški poklic, po njihovi diplomi pa z njimi še naprej sodelovala v zvezi s hospitacijami in nastopi vedno novih generacij študentov. Poleg tega je predavala osnovno matematiko še na drugih, v glavnem tehniških, študijskih smereh ljubljanske univerze.

SLIKA 1.
Mag. Marija Vencelj (foto: Peter Legiša).

Še bolj kot na pedagoškem je mag. Marija Vencelj zaznamovala slovensko matematiko na področju popularizacije matematike. V okviru stalnega strokovnega izpopolnjevanja učiteljev matematike in na strokovnih srečanjih Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je na seminarjih večkrat predavala učiteljem o različnih matematičnih temah. O njih in o številnih drugih zanimivostih iz elementarne matematike in njene uporabe je veliko pisala v slovenske matematične časopise, kot so *Presek*, *Obzornik za matematiko in fiziko* ter *Matematika v šoli*. Za zbirko Knjižnica Sigma je prevedla *Matematični leksikon za nematematike* avtorja Zlatka Šporerja. Prispevala pa je svoj del tudi k drugim knjižnim izdajam pri društvu in drugje.

Njeno glavno in najpomembnejše delo v zvezi s popularizacijo matematike pa je povezano prav s časopisom, ki ga držite v roki. S Presekom je začela intenzivneje sodelovati konec osemdesetih leti prejšnjega stoletja. Leta 1989 je postala članica uredniškega odbora, čez dve leti pa odgovorna urednica in urednica za matematiko. To dolžnost je opravljala do leta 2003. Bila je prva, ki je Presek urejala tako dolgo obdobje; prejšnji uredniki so zdržali največ štiri leta. Urejala ga je z veliko predanostjo v skladu z njegovim poslanstvom, tj. širjenjem zanimanja za matematiko med mladimi, z veliko lastno angažiranostjo in z občutkom za bralce. Imela je posluh za jezik, za lepo slovensko besedo in tudi smisel za čisto tehnična vprašanja urejanja publikacije. S primerno in raznovrstno vsebino časopisa je skrbela za ohranjanje visokega strokovnega nivoja. Predvsem pa je v času urejanja, pa tudi še desetletje po tem, zelo veliko sama pisala v Presek. V njem je objavila (poleg 13 prevodov besedil drugih avtorjev) več kot 200 lastnih prispevkov, večino v zaporednih letih od 1988 do 2010, kakšno leto tudi več kot 20 zapisov. Med njimi je seveda veliko kratkih prispevkov (raznih ugank, zanimivih igric in matematično pobarvanih zgodbic, posameznih domiselnih nalog in njihovih rešitev), a tudi daljših besedil (npr. ocene novih slovenskih knjig ali poročil o aktualnih domačih in tujih dogodkih o matematičnih temah). Objavila je celo nekatere prave več strani dolge strokovne razprave, nekatere v nadaljevanjih. Vsebinsko je obravnavala naloge iz teorije števil (npr. razni kriteriji za deljivost, številski sestavi), tudi iz kombinatorike, pa seveda številne probleme iz elementarne geometrije (npr. različne konstrukcijske naloge in drugo), topologije (npr. mala šola topologije v več delih, vprašanje dimenzije). Daljše razprave je napisala tudi o geometriji (npr. Eulerjeva poliedrska formula, Cevov izrek, posebne konstrukcijske naloge, Pitagorov izrek, Reuleauxov trikotnik), kriptografiji (npr. šifriranje, tajnopisi), o uporabi matematike pri proučevanju naravnih in drugih pojavov (npr. mavrica, vzorci v naravi, urejena lepota rastlin: filotaksa in Fibonaccijeva števila, matematika in glasba). O znamenitih svetovnih matematikih preteklih stoletij najdemo serijo zapisov (o Sonji Kovalevski, Lobačevskem, Descartesu, Hilbertu, Laplaceu, Da Vinciju, Galoisu, Vièteu, Abelu, Jacobiju, Cramerju, Gaussu, Bernoulliju in Eulerju), med poročili o aktualnem dogajanju pa omenimo zapise o srečanju mladih raziskovalcev, o petindvajseti obletnici smrti profesorja Plemlja, o državni znanstveni nagradi profesorju Vidavu, o rešitvi Fermatovega problema, o prvem kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, o ustanovitvi Abelove nagrade in njenem prvem dobitniku, o 90-letnici profesorja Vidava ter o priznanju Preseku s strani Slovenske znanstvene fundacije.

Za svoje pedagoško delo in za trud na področju popularizacije matematike je leta 1999 prejela društveno priznanje, leta 2002 pa je gospa Marija Vencelj postala častna članica DMFA Slovenije. Obema priznanjema se s posthumno zahvalo njenemu predanemu in požrtvovalnemu delu za mladino s tem zapisom pridružuje tudi uredništvo Preseka.

***

V tej številki prinašamo ponatis dveh daljših člankov mag. Marije Vencelj s skupnim naslovom Glasbena lestvica iz prve in druge številke 16. letnika Preseka (1988/89) ter nalogo z naslovom Skrita računa na vazi iz prve številke 36. letnika (2008/09).

× × ×

Glasbena lestvica

Marija Vencelj

Ste že kdaj pogledali v klavir pod tisti veliki pokrov, ki ga na koncertih dvignejo? Koliko strun skriva v sebi, posebno če ga primerjamo s kitaro ali violino! In vendar je teh strun v nekem smislu malo, kot bomo videli.

Da se bomo laže razumeli, si za začetek oglejmo nekaj fizikalnih in glasbenih pojmov. Pri tem se bomo omejili le na najnujnejše, kar potrebujemo za ta sestavek.

Vsako *nihajoče telo* je izvir prostorskega longitudinalnega valovanja, ki se širi na vse strani in po vseh snoveh. Ena od bistvenih značilnosti nihanja telesa in z njim vzbujenega valovanja je njuna *frekvenca*, to je število nihajev v eni sekundi. Merska enota za frekvenco je 1 s^{-1}, za katero pogosto uporabljamo tudi oznako 1 Hz (Hertz). Človeško uho je sposobno zaznati valovanje zraka v širokem frekvenčnem območju od 16 do 20 000 Hz in ga pretvoriti v slušni dražljaj. Prostorsko longitudinalno valovanje v tem frekvenčnem območju imenujemo *zvok*. Zvok je torej vse, kar *lahko slišimo*. Nihajoče telo, ki je izvir zvoka, bomo imenovali *zvočilo*.

Pomudimo se še malo ob zvoku. Zvočne pojave lahko razdelimo na *tone*, *zvene* in *šume*. Če obidemo strogo fizikalno definicijo, lahko rečemo, da je *šum* neurejena mešanica valovanj vseh mogočih frekvenc, ki jih s sluhom ne ločimo med seboj. Glede zvenov in tonov se glasbena in fizikalna definicija nekoliko razlikujeta. *Ton* je s fizikalnega stališča zvok z neko natanko določeno frekvenco. Mi bomo takemu zvoku rekli *čisti* ali *sinusni ton*, za razliko od *glasbenega tona*. Ustvarimo ga lahko le umetno s tonskimi generatorji. *Glasbeni ton* pa je posebna kombinacija čistih tonov. Poleg osnovnega, to je tona, ki ima v tej kombinaciji najmanjšo frekvenco, recimo f, nastopajo v njej še tako imenovani *delni* ali *alikvotni* toni, to so sinusni toni, katerih frekvence so večkratniki frekvence osnovnega tona: $2f, 3f, \ldots$. V našem ušesu zveni taka kombinacija *sozvočno*. Dejansko posameznih delnih tonov s sluhom niti ne razločimo, zaznavamo eno samo tonsko višino – *višino glasbenega tona*. Ta je določena s frekvenco f osnovnega tona. Čim večja je ta frekvenca, tem višji se nam zdi ton. Od števila in medsebojnega razmerja jakosti posameznih delnih tonov pa je odvisna tako imenovana *barva glasbenega tona*. Več jih je, bogateje in polneje nam ton zveni. Na vprašanje, zakaj je tako, je odgovor preprost: tako smo pač narejeni. Glasbeni ton je poseben primer tistega, kar v fiziki imenujemo *zven*. Ta je sestavljen iz večjega števila čistih, ne nujno alikvotnih tonov. Razen za glasbene tone se pojma fizikalnega in glasbenega zvena ujemata. Za primer navedimo, da je zven npr. zvok zvona, gonga, činel.

ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
frekvenca	260	294	330	349	392	440	494	523

TABELA 1.

Vsi zvoki lahko postanejo glasbeno gradivo. Sodobne skladbe vsebujejo tudi šume, evropska glasba zadnjih stoletij pa je uporabljala predvsem glasbene tone in zvene. Najosnovnejši zidaki so glasbeni toni. Kako neizmerno je to zvočno gradivo, povesta dva podatka. Da sega naše slušno območje od 16 Hz do 20 000 Hz, že vemo. Drugi podatek pa pravi, da smo v bolj občutljivem delu tega območja tja do 4000 Hz sposobni med seboj ločiti tona, ki se razlikujeta za vsega 1 Hz. Zato ni čudno, da si je človek že od nekdaj prizadeval v glasbo vnesti določeno enotnost in red. Nastali so razni *tonski sestavi* s svojimi *glasbenimi lestvicami*, ki so določale množico tonov, iz katere je dani tonski sistem črpal svoje tone. Poznamo veliko lestvic, ki so bile v različnih zgodovinskih obdobjih različno pomembne. Prav gotovo vsi poznate C-durovo lestvico, ki je del *zahodnoevropskega tonskega sestava*, v katerem oblikujejo skladbe že več kot tristo let. Poglejmo tabelo približnih frekvenc za tone prve oktave:

Že iz tabele 1 lahko sklepamo, da v glasbi uporabljamo le majhno število tonov. V tem sestavku bomo pogledali, na osnovi kakšnih principov so izbrani toni evropskega tonskega sestava in do kakšne mere so ta načela realizirana.

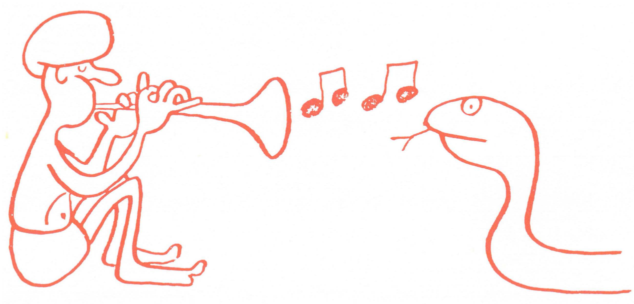
Prej pa smo dolžni še neko pojasnilo. Zgoraj smo rekli, da so tonski sestavi nastali iz človekove želje po urejenosti v glasbi, ne nazadnje zaradi možnosti njenega zapisa. Mogoče pa se to vprašanje sploh ne bi pojavilo, ali vsaj ne s tako nujnostjo, če bi na vsakem glasbilu lahko dobili ton poljubne višine – glede na frekvenco zvezen zvok brez presledkov. Na številnih glasbilih – na kitari, violini, violončelu ... – res lahko zaigramo poljuben ton (v mejah obsega glasbila). Obstajajo po tudi instrumenti, katerih zgradba dopušča le razmeroma majhno število možnih tonov, denimo orgle, klavir, harfa. Če bi povečali število dopustnih tonov v tonskem sistemu, bi to izredno povečalo nekatere instrumente in zapletlo njihovo konstrukcijo. Vidimo torej, da je tudi iz tehničnih razlogov potrebno, da vsebuje glasbena skala razmeroma malo tonov.

Pozoren bralec je lahko opazil, da smo že dvakrat primerjali klavir z godali. Ugotovili smo, da ima klavir precej strun, pa zmore razmeroma malo tonov, violina pa ima strun malo, tonov pa lahko iz nje izvabimo zelo veliko. Kako razložiti to navidezno nasprotje, še večje, ker je v obeh glasbilih osnovno zvočilo struna? Za to je potrebno vedeti, kako niha struna, in pozorno opazovati igri violinista in pianista.

Nihanje strune je mogoče teoretično obravnavati s sredstvi višje matematike. Pojav je zelo zanimiv za fiziko, pa tudi z glasbenimi instrumenti se da napraviti nekatere poskuse, ki nam dajo določene informacije o frekvencah, s katerimi struna niha. Mi se bomo tu seznanili le z rezultati. Najprej povejmo, da struna nikdar ne niha z eno samo frekvenco. Poleg najmanjše frekvence, s katero niha, to je osnovne lastne frekvence f, niha še z vsemi frekvencami, ki so večkratniki te osnovne frekvence. *Struna* torej ne oddaja čistega tona, ampak *glasbeni ton*. Osnovna frekvenca f oziroma višina tona je odvisna od karakteristik strune. To so *dožlina* in *presek strune*, *gostota materiala*, iz katerega je narejena, ter *velikost sile*, s katero je struna napeta. Pri dani struni sta njen presek in gostota materiala določeni, nespremenljivi količini. Pač pa lahko npr. spremenimo silo, s katero je struna napeta. Vsi smo že kdaj videli violinista pri uglaševanju violine. Dejansko pri tem s sukanjem ključev na vratu violine uravnava velikost sil, ki napenjajo strune. Podobno je pri klavirju. Od časa do časa vijaki, s katerimi so napete strune, popustijo in poklicati je treba uglaševalca. – Pa denimo, da sta sedaj violina in klavir vsak po svoje dobro uglašena. Torej o višini tona odloča le še dolžina strune. No, tu pa je bistvena razlika med klavirjem in violino. Klavirske strune določenih dolžin so pritrjene lepo na varnem v resonančni omari instrumenta. Pianist povzroči, da struna zaniha, tako da udari tipko klaviature, udarec pa se nato preko kladivca prenese na struno. Po vsem, kar smo povedali, je očitno, da lahko iz klavirja izvabimo kvečjemu toliko glasbenih tonov, kot je v njem strun. Drugače je z violino. Violinist povzroči nihanje strune tako, da potegne po njej z lokom. Istočasno s prsti proste roke pritiska strune ob podlago in pri tem mesto pritiska neprestano menjava. S tem spreminja dolžino nihajočega dela strune in z njo tonsko višino. Očitno torej res lahko na violino zaigramo poljuben ton v mejah njenega obsega.

Povrnimo se sedaj k našemu problemu. Radi bi odgovorili na vprašanje, zakaj so ravno nekateri toni vključeni v glasbeno skalo.

Konstrukcija glasbene skale ni tako preprosta kot na primer zgradba temperaturne skale. Tam je inter-



SLIKA 1.

val med zmrziščem in vreliščem vode razdeljen na sto enakih delov. Pri glasbeni skali pa je treba upoštevati določena načela, ki slede iz narave zvočil in iz občutkov, ki jih v nas ustvarjajo razne kombinacije tonov. Po prvem načelu je treba skalo izbrati tako, da bodo uporabljeni toni najbolj sozvočni. Povedali smo že, da so toni dvojne, trojne, ...frekvence povsem sozvočni s tonom osnovne frekvence. Torej moramo zahtevati, naj glasbena skala hkrati s tonom frekvence f vsebuje vsaj ton frekvence $2f$. Če bomo govorili tudi o frekvencah, manjših od f, bomo najprej postavili zahtevo po tonu frekvence $f/2$. Interval med danim tonom in tonom dvojne frekvence imenujemo oktava. Je kar precej širok in za glasbo so samo oktavni intervali premalo. Pri izbiri nadaljnjih tonov, ki naj zapolnijo oktavne intervale, moramo izpolniti še en pogoj. Vsi vemo, da lahko isto pesem pojemo više ali niže, pač glede na glas. Če zanemarimo ritem, torej o melodiji ne odloča zaporedje tonov določenih višin, saj bi se ob prenosu na višje ali nižje sicer skazila. Tudi razlike med frekvencami zaporednih tonov niso odločilne za melodijo, kot bi kdo lahko prehitro napak pomislil. Isto melodijo slišimo, če je razmerje frekvenc tonov, ki jo sestavljajo, obakrat isto. Spet bomo rekli, da smo tako narejeni. Prenesti melodijo više torej pomeni izvesti jo z drugimi, primerno višjimi toni, toda z natančno ohranitvijo razmerij frekvenc tonov, ki jo sestavljajo. Naša druga zahteva, ki jo bomo postavili pri konstrukciji glasbene skale, bo sposobnost poljubnega prenosa katerekoli melodije više ali niže.

Predpostavimo, da smo uspeli konstruirati tako skalo, to je skalo, ki izpolnjuje naslednja pogoja:

a) hkrati s tonom frekvence f vsebuje tudi tona frekvence $2f$ in $f/2$,

b) dopušča naj prenos vsake melodije brez skaženosti.

Denimo, da so v tej skali v mejah ene oktave toni naslednjih frekvenc:

- $f = f_0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_{m-1} < f_m = 2f$

Že zaporedje teh tonov pomeni preprosto melodijo. Prenesimo jo navzgor neskvarjeno tako, da bo najnižji ton f_0 prešel v f_1. Nova melodija bo začela s tonom f_1 in se končala z nekim tonom f_{m+1}, ki mora biti oktavni dvakratnik tona f_1, ker je $f_m = 2f_0$. Poleg tega mora biti razmerje med prvim in zadnjim tonom melodije obakrat isto. Ton f_{m+1} je že višji od zadnjega tona f_m v oktavi, je pa prvi za njim. Res. Če bi naša skala vsebovala neki ton f' med f_m in $f_{m+1} = 2f_1$, potem bi bil zaradi zahteve a) v njej tudi ton $f'/2$, za katerega bi iz $2f_0 = f_m < f' < f_{m+1} = 2f_1$ sledilo:

- $f_0 < f'/2 < f_1$.

To pa je protislovje, ker med f_0 in f_1 po predpostavki ni nobenega tona v skali.

Naša začetna melodija sestoji iz $(m + 1)$ različnih tonov. Navzgor prenešena jih ima seveda prav toliko, začenja pa s tonom f_1 in končuje s tonom f_{m+1}. Torej mora porabiti ravno vse tone od f_1 do f_{m+1} in je takale

- $f_1 < f_2 < \ldots < f_m < f_{m+1}$.

Ker mora biti zaradi zahteve b) neskvarjena, sledi od tod enakost razmerij:

- $\dfrac{f_1}{f_0} = \dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{f_3}{f_2} = \ldots = \dfrac{f_{m+1}}{f_m}$.

Zahtevama a) in b) torej lahko ustrezajo le tako imenovane enakorazmerne skale. Matematično se lepše sliši, če rečemo, da morajo frekvence f_0, f_1, f_2, ..., f_n tvoriti geometrijsko zaporedje. Začetni člen je f_0, poiščimo še količnik. Če ga označimo s q, imamo

- $f_m = q^m f_0 = 2f_0$,

torej

- $q^m = 2$.

Skala bo natančno določena, če bo znano število m, to je število stopnič med f_0 in $2f_0$.

Geometrijsko zaporedje navadno podamo z začetnim členom, količnikom in številom členov. Pri glasbeni lestvici je naravneje podati namesto začetnega člena kakšen ton iz dobro slišnega območja, takšen, ki ga lahko zaigramo na večino inštrumentov in ki ga lahko zapoje večina ljudi. Po mednarodnih standardih je to ton a_1, ki ima frekvenco 440 Hz. Legenda pripoveduje, da je v starem veku vsako jutro ob zori oddajal ta ton ogromen Memnonov steber v bližini egipčanskih Teb, tako da so po njem glasbeniki lahko uglaševali svoje inštrumente. Steber naj bi prenehal zveneti ob začetku našega štetja. Dandanašnji pa ta ton oddajajo običajno glasbene vilice, ki jih uporabljajo uglaševalci.

Od tona a_1 navzdol in navzgor je nato zgrajeno geometrijsko zaporedje teoretično smiselno do mej našega slušnega območja.

Ugotovili smo že, da ustreza količnik tega zaporedja enačbi

$$q^m = 2 \tag{1}$$

kjer je m naravno število, ki pove, na koliko delov je razdeljen oktavni interval. Število m ne sme biti preveliko, ker bi bila potem tudi nekatera glasbila prevelika; prav tako ne more biti enako ena, ker bi bila glasba s samimi oktavnimi intervali revna. Število m pa je sicer lahko še poljubno, kar nam omogoča, da za glasbeno skalo postavimo še kakšno dodatno zahtevo. Lahko bi npr. v glasbeno lestvico na intervalu $(f, 2f)$ uvedli kakšen tak ton, ki bi bil lepoti glasbe posebej v prid. Sama od sebe pa se ponuja tudi misel, naj bi bil v skali razen $2f$ denimo še alikvotni ton $3f$ (ton frekvence $4f$ je kot dvakratnik $2f$ že vključen). Videli bomo, da si želji pravzaprav ne nasprotujeta. Poleg pogojev a) in b), ki smo ju postavili v prvem delu, postavimo torej še pogoj

c) hkrati s tonom frekvence f naj vsebuje skala tudi ton frekvence $3f$.

Ker mora zaradi pogoja a) skala z vsakim tonom vsebovati tudi ton polovične frekvence, to pomeni prisotnost tona $\frac{3}{2}f$ v skali. Ta ton pa leži med f in $2f$. Interval $\left(f, \frac{3}{2}f\right)$ se imenuje *čista kvinta*, harmoničen (sočasen) zveni posebej lepo. Dejstvo, da človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Zdi se, kot da smo pri koncu naše naloge. S pomočjo pogoja c) bomo določili še eksponent m iz enačbe (1) in delo bo opravljeno!

Pa temu ni tako! Vse skupaj se šele sedaj prav zaplete: *čiste kvinte v enakorazmerni razdelitvi oktavnega intervala ni mogoče realizirati.*

Nobeno geometrijsko zaporedje namreč ne more hkrati vsebovati členov f, $\frac{3}{2}f$ in $2f$. Res! Za vsako geometrijsko zaporedje s količnikom q, katerega člena sta f in $2f$, velja enačba (1) za neki $m \in \mathbb{N}$. Če bi tako zaporedje vsebovalo še člen $\frac{3}{2}f$, bi to pomenilo, da obstaja tako naravno število k, za katerega je

$$fq^k = \frac{3}{2}f, \tag{2}$$

torej

$$q^k = \frac{3}{2}$$

za neki $k \in \mathbb{N}$. S potenciranjem dobimo iz enačbe (1)

$$q^{km} = 2^k$$

in iz enačbe (2)

$$q^{km} = \left(\frac{3}{2}\right)^m.$$

To da

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m \tag{3}$$

oziroma

$$2^{k+m} = 3^m. \tag{4}$$

Enačba (4) pa je za $k, m \in \mathbb{N}$ protislovna, saj imamo na levi sodo, na desni pa liho število. Čiste kvinte torej v enakorazmerni skali ni!

Kaj sedaj? Treba se bo nečemu odpovedati. Enakorazmerni skali bi se zaradi prenosa melodij težko, laže se odpovemo čisti kvinti. Natančneje povedano, odpovemo se njeni čistosti, kvinti sami pa pravzaprav ne. To naredimo z izbiro takega m v enačbi (1), da bo v enakorazmerni skali nastopal tudi ton, ki bo dober približek za $\frac{3}{2}f$. Dober približek pomeni to, da naše uho ne bo zaznalo razlike, torej se bo moral ta približek v slušno najbolj občutljivem območju razlikovati od $\frac{3}{2}f$ za manj kot 1 Hz. Videli bomo, da →

se to res da doseči in to pri relativno majhnem m. Poglejmo!

Potrebovali bomo nekaj več matematičnega znanja kot doslej. Nadomestimo obe strani enačbe (3) z njunima logaritmoma z osnovo 2. Če nato še delimo z m, dobimo

$$\frac{k}{m} = \log_2 \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Ker ni takih naravnih števil k in m, ki bi ustrezali enačbi (3), sledi, da ni takega ulomka $\frac{k}{m}$, da bi bila izpolnjena enačba (5). Lepše povedano: $\log_2 \frac{3}{2}$ ni racionalno število. So pa racionalna števila povsod gosta v množici realnih števil. To pomeni, da lahko k vsakemu realnemu številu najdemo tak racionalen približek, da bo razlika med njima poljubno majhna. Torej obstaja tudi tak ulomek $\frac{k}{m}$, ki bo za naše potrebe dovolj blizu števila $\log_2 \frac{3}{2}$.

Za konstrukcijo racionalnih približkov iracionalnih števil so zelo dobro sredstvo tako imenovani *verižni ulomki*, to so izrazi oblike

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0. Vsako pozitivno realno število lahko na en sam način razvijemo v verižni ulomek – neskončen, če je število iracionalno. Najnujnejše informacije o verižnih ulomkih, kakor tudi to, kako pridemo do razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ v verižni ulomek, boste našli v dodatku ob koncu tega sestavka. Zapišimo nekaj prvih členov tega razvoja:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}} \tag{6}$$

Vrednosti zaporednih delnih ulomkov

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{5},$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{7}{12},$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41}, \quad \text{itd.}$$

so čedalje boljši racionalni približki števila $\log_2 \frac{3}{2}$. Povejmo še to, da so približki, ki jih dajejo delni ulomki verižnega ulomka, v nekem smislu najpreprostejši racionalni približki danega števila. Velja namreč, da ima vsak ulomek, ki dano število aproksimira bolje kot neki delni ulomek temu številu pripadajočega verižnega ulomka, imenovalec večji od imenovalca tega delnega ulomka. Za nas je ta vidik še kako pomemben. Imenovalec ulomka $\frac{k}{m}$, ki ga bomo vzeli za približek števila $\log_2 \frac{3}{2}$ bo, kot vemo, pomenil število tonov v eni oktavi. Torej bomo dobili z verižnimi ulomki optimalno aproksimacijo kvinte glede na število tonov v eni oktavi.

Poglejmo zaporedne približke! Prva dva: 1 in 1/2 sta pregroba že na prvi pogled. Izračunajmo, kako natančen približek čiste kvinte v prvi oktavi dajejo naslednji ulomki. Prva oktava začenja s tonom c_1, ki ima frekvenco 262 Hz. Torej nas zanima aproksimacija tona s frekvenco $\frac{3}{2} \cdot 262\text{Hz} = 393\,\text{Hz}$. Če vzamemo tretji približek, torej $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{3}{5}$, je $\frac{3}{2} \approx 2^{3/5}$. Hitro lahko izračunamo, da je $2^{3/5} \cdot 262\,\text{Hz} = 397\,\text{Hz}$. To pa je preslab približek za 393 Hz, saj je razlike kar za 4 Hz. Po teoriji mora biti naslednji približek boljši. Res dobimo za $\frac{k}{m} = \frac{7}{12}$ vrednost $2^{7/12} \cdot 262\,\text{Hz} = 392{,}5\,\text{Hz}$, kar pomeni aproksimacijo čiste kvinte na 0,5 Hz natančno. Zato se bomo odločili za približek $\frac{7}{12}$. To sicer pomeni, da bo napaka čiste kvinte v drugi oktavi, kjer so vse frekvence pomnožene z dva, že enaka 1 Hz. Toda raje se bomo sprijaznili s tem, kot da bi vzeli naslednji približek, ki nam ponuja kar 41 stopenj v eni oktavi.

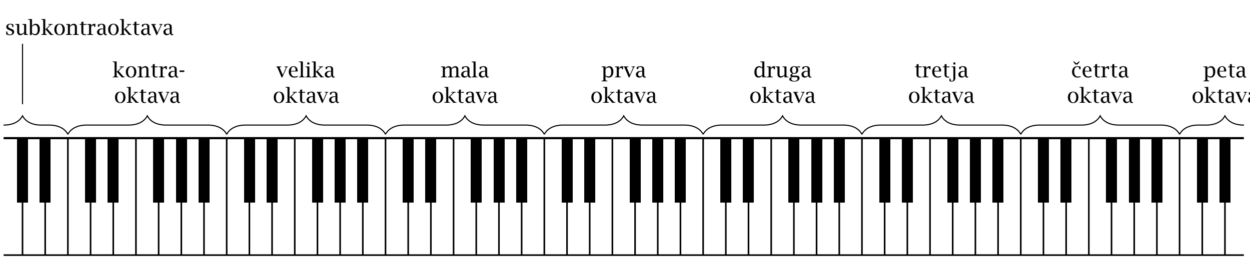
Vidimo torej, da tako imenovana *dvanajststopenjska enakorazmerna lestvica* uspešno reši naš problem. Omeniti pa moramo še nekaj. Iz analize narodne in umetne glasbe sledi, pa tudi teoretično lahko spoznamo, da so poleg oktave in kvinte v glasbi pomembni še nekateri intervali, npr.: velika sekunda $\left(f, \frac{9}{8}f\right)$, mala terca $\left(f, \frac{6}{5}f\right)$, velika terca $\left(f, \frac{5}{4}f\right)$, kvarta $\left(f, \frac{4}{3}f\right)$, mala seksta $\left(f, \frac{8}{5}f\right)$, velika seksta $\left(f, \frac{5}{3}f\right)$, velika septima $\left(f, \frac{15}{8}f\right)$. Tudi ti intervali so v dvanajststopenjski lestvici dokaj dobro aproksimirani, čeprav ne tako zelo dobro kot kvinta. Še najbolj moti slaba velika terca, pomemben interval, aproksimiran v prvi oktavi le z natančnostjo 2,5 Hz.

Tako smo matematični del naloge opravili. Glasbena lestvica je torej zaporedje tonov, katerih frekvence tvorijo geometrijsko zaporedje s členom a_1, ki ima frekvenco 440 Hz, in količnikom $q = \sqrt[12]{2}$, kar za $m = 12$ izračunamo iz (1) . Glasbeniki tako izbiro osnovnih zidakov glasbe imenujejo tudi *dvanajststopenjske temperirana uglasitev*.

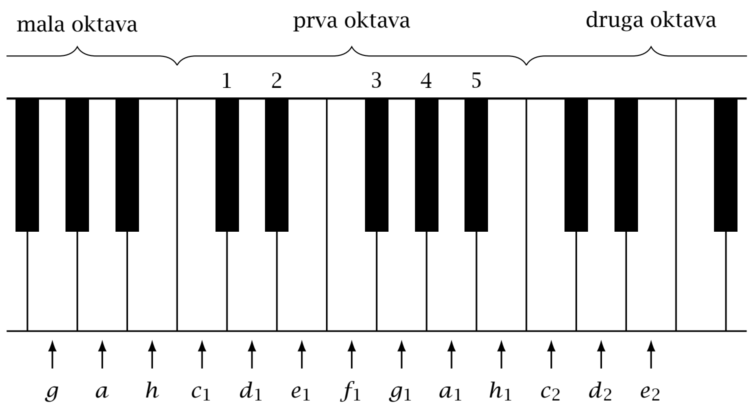
Frekvenci dveh sosednjih tonov v skali se torej razlikujeta za faktor $\sqrt[12]{2}$. Ta najmanjši možni zvočni interval imenujemo *polton*. Interval, ki sestoji iz dveh sosednjih poltonov, se imenuje *cel ton*.

Poleg tona a_1 imajo imena tudi drugi toni glasbene lestvice. Vsa skala je razdeljena na oktave, istoležni toni v posameznih oktavah imajo isto ime. Iz katere oktave so, ločimo z indeksi ali velikostjo črke, npr. A, a, a_1, a_2, ... Razdelitev na oktave je prikazana na sliki 2.

Poimenujmo sedaj tone prve oktave. V njej leži tudi ton a_1, in sicer devet poltonskih stopenj za začetnim tonom. Začetni ton se imenuje c_1. Najprej poimenujemo osnovne tone, to so toni, ki so v naši lestvici približki za veliko sekundo, veliko terco, kvarto, kvinto, veliko seksto in veliko septimo. V razdalji celega tona od c_1 je ton d_1, še cel ton dalje je e_1 in še pol tona više f_1. Ti štirje osnovni toni tvorijo tako imenovani *tetrakord*. V drugem delu oktave imamo drugi tetrakord, kot melodija identičen s prvim. Začenja z g_1, ki tvori s c_1 kvinto, čez cel ton imamo a_1, še čez cel ton h_1 in nato še polton do c_2. To pa je že oktavni dvakratnik c_1 in smo ga zato spet imenovali c. To so toni, za katere smo navedli frekvence v tabeli 1 na začetku sestavka. Zaigramo jih lahko z belimi tipkami na klavirju. Ostalo nam je še pet tonov. Tem damo imena po sosednjih osnovnih tonih z dodajanjem besedice *is* ali *es*, kar pomeni za polton više ali za polton niže od ustreznega osnov-



SLIKA 2.



1– $cis = des$
2– $dis = es$
3– $fis = ges$
4– $gis = as$
5– $ais = hes$
(tudi b)

SLIKA 3.

nega tona. Na klavirju jih predstavljajo črne tipke (slika 3).

»Melodija« iz osnovnih tonov c, d, e, f, g, a, h, c se imenuje *C-durova lestvica*. Če to melodijo prenesemo nespremenjeno navzgor, z začetki na različnih mestih v oktavi, dobimo še 11 durovih lestvic. Vsaka nosi ime po svojem začetnem tonu. Obstaja pa še 12 tako imenovanih molovih lestvic. Tako ima c-molova lestvica melodijo: c, d, es, f, g, as, b, c. Ostale dobimo z ustreznim prenosom. Medtem ko je intervalni sestav durovih lestvic: cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton, cel ton, polton, imamo za molove lestvice: cel ton, polton, cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton. Praviloma so skladbe pisane v nekem izbranem duru ali molu, pri čemer – razen morda na redkih posamičnih mestih – uporabljajo le tone ustrezne lestvice. Drugače izbrani osnovni toni molskih tonalitet vnašajo v melodije neko prikrito disonanco, zato imajo v molu pisane skladbe značilen mehko otožen značaj.

Za zaključek omenimo še nekaj, česar glasbena teorija doslej še ni povsem razjasnila. Naša zgornja premišljanja nas silijo k zaključku, da vseh 12 durovih tonalitet identično zveni, podobno vseh 12 molovih. Vendar glasbeniki ugotavljajo, da imajo posamezne tonalitete individualne lastnosti. Tako npr. *C-dur* ustvarja sončne, jasne, spokojne občutke (Bethovnova »Aurora«), *E-dur* strastno napeto pričakovanje (številna Lizstova dela, Čajkovskega »Bo prevladal dan«) in *Fis-dur* romantično veselje (Griegova »Pomlad«). Možato žalost oznanja *c-mol* (»Posmrtna koračnica« iz Bethovnove simfonije »Eroica«), globoko tragiko *es-mol* (arija Pauline iz Čajkovskega opere »Pikova dama«). Ni povsem jasno, ali gre pri tem za ustaljeno tradicijo ali za kako objektivno zakonitost.

Dodatek

Verižni ulomki

Verižni ulomki so bili in so še predmet številnih matematičnih raziskav. Obstajajo cele knjige, ki obravnavajo le verižne ulomke.

Če zapišemo neko pozitivno realno število a v obliki

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}} \tag{7}$$

kjer so členi a_1, a_2, a_3, ... naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0, pravimo, da smo število a razvili v *verižni ulomek*. Tako je npr.

$$\frac{7}{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} \quad \text{in} \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

kjer se člen 2 ponavlja v nedogled. Verižni ulomek je torej lahko končen ali neskončen. Ni pa nujno, da je periodičen, kot je naš drugi zgled. Končne verižne ulomke imajo racionalna števila, neskončne vsa ostala.

Verižne ulomke a_1, $a_1 + \frac{1}{a_1}$, $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$, ... imenujemo *delni ulomki* verižnega ulomka (7). Njihove vrednosti so očitno racionalna števila. Te vrednosti konvergirajo k številu a, vsaka naslednja je bliže a od vseh prejšnjih. Kot zanimivost povejmo še, da so izmenično ena manjša, druga večja od a.

Kako po iščemo nekaj začetnih členov verižnega ulomka, če je število a iracionalno, ilustrirajmo na primeru $a = \log_2 \frac{3}{2}$. Po definiciji logaritma je

$$2^a = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

Ker je $a < 1$, je $a_1 = 0$. Člen a_2 bomo dobili kot celi del števila $x = \frac{1}{a}$. Iz (8) dobimo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2. \tag{9}$$

Ker je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

leži x med 1 in 2, torej je $a_2 = 1$. Zapišimo sedaj $x = 1 + \frac{1}{y}$. Izračunajmo a_3, ki mora biti celi del števila y. V ta namen preoblikujmo enačbo (9) v

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/y} = 2,$$

od koder dobimo $\left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{3}{2}$. Spet ugotovimo, da je $\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, kar pomeni, da je $a_3 = 1$. Če tako nadaljujemo, dobimo še $a_4 = a_5 = 2$ in $a_6 = 3$, tako, da je začetek razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ tak, kot ga kaže formula (6).

Literatura

[1] G. E. Šilov, *Prostaja gama – Ustrojstvo muzykal'noj škaly*, Moskva, 1980.

[2] Leksikon CZ, *Glasba*, Ljubljana 1980

[3] H. Davenport, *The higher aritmetic*, New York, 1960.

[4] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA SRS, Ljubljana, Knjižnica Sigma **38**, 1984.

× × ×

Skrita računa na vazi

Marija Vencelj

→ Matematiku so prijatelji za rojstni dan poklonili šopek vrtnic z vazo, na katero so napisali dva skrita računa seštevanja, enega v angleškem in drugega v francoskem jeziku.[1]

[1] Računa so prijatelji priredili iz ene od angleških knjig rekreativne matematike.

Poskusite ju rešiti tudi vi. Za reševanje veljajo pravila, ki so pri takih nalogah običajna. Nad vodoravno črto so skrito zapisani seštevanci, pod njo njihova vsota. Enake črke moramo nadomestiti z enakimi desetiškimi števkami in različne z različnimi tako, da dobimo pravilen račun. Vodilne števke nastopajočih števil so od nič različne.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{P} & \mathrm{P} & \mathrm{Y}\\
\mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{P} & \mathrm{P} & \mathrm{Y}\\
\mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{P} & \mathrm{P} & \mathrm{Y}\\
 & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{Y} & \mathrm{S}\\
\hline
\mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \mathrm{A} & \mathrm{D}
\end{array}$$

1. račun (slika 1)

SLIKA 1.

SLIKA 2.

V nalogi je pravzaprav v angleščini zapisano voščilo prijatelju (happy = srečen, day(s) = dan (dnevi), ahead = spredaj, v prihodnje). Računi, ki imajo, tako kot tale, tudi v skriti obliki določen pomen, so nekaj posebnega in jih je težko sestaviti. Posebej imenitni so taki, ki imajo samo eno rešitev.

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & & \mathrm{U} & \mathrm{N} & & \\
 & & & \mathrm{U} & \mathrm{N} & & \\
 & & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{U} & \mathrm{X} & \\
 & \mathrm{D} & \mathrm{O} & \mathrm{U} & \mathrm{Z} & \mathrm{E} & \quad \mathrm{DOUZE} \mid \mathrm{D\ O\ U\ Z\ E}\\
\hline
 & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{Z} & \mathrm{E} &
\end{array}$$

2. račun (slika 2)

Tudi drugi račun ima pomen že v skriti obliki. Poglejmo prevod uporabljenih francoskih besed: un = ena, deux = dve, douze = dvanajst in seize = šestnajst. Res je

- $1 + 1 + 2 + 12 = 16.$

Pri reševanju bistrovidno upoštevajte tudi pripis desno ob računu, pa naj se vam zdi napisani pogoj še tako čuden in nepotreben.[2] Napisan je bil tudi na vazi, a se na fotografiji ne vidi.

SLIKA 3.
Ob praznovanju devetdesetega rojstnega dne je med drugimi darili profesor Vidav dobil od svoje nekdanje asistentke in dolgoletne sodelavke mag. Marije Vencelj lep šopek vrtnic in vazo, na kateri sta bila napisana njemu v razvedrilo dva skrita računa (kriptaritma) v angleščini in francoščini (glej sliki vaz).

× × ×

[2] Nenavaden zapis DOUZE | D O U Z E pomeni, da je število, ki je, zapisano s števkami D O U Z E, deljivo z 12. V izvirni inačici naloge je na vazi poleg francoske dvanajstice pisalo na še bolj zavit način $n \equiv 0 \pmod{n}$, kar je nalogo naredilo težje razumljivo.

Slike znakov na morskih valovih

Nada Razpet

→ Na mirni vodni gladini mlak, jezer ali počasi tekočih rek lahko opazujemo slike okolice. Kaj pa na morski gladini? Odgovor je – kakor kdaj.

SLIKA 1.
Tri fotografije slik kopaliških znakov na rahlo vzvalovani morski gladini.

Nekega pomladanskega jutra, ko je bilo Sonce še nizko nad obzorjem in morje le rahlo vzvalovano, smo na morski gladini opazili slike kopaliških znakov (slika 1). Včasih je bilo slik več, včasih manj. Opazili smo, da je bil na nekaterih slikah najvišje postavljeni kopališki znak zgoraj, na drugih pa spodaj. Trije kopališki znaki so bili postavljeni na skupnem drogu in obrnjeni proti vzhodu, tako da jih je Sonce ravno lepo obsijalo (slika 2).

SLIKA 2.
Kopališki znaki na skupnem drogu, pritrjenem ob koncu pomola, obrnjeni proti vzhodu. Pri poskusu smo namesto znakov uporabili tulec, na katerega smo nalepili tri dvojne obroče izolirnega traku.

Poskusi z zrcalno folijo

Seveda nas je zanimalo, ali lahko naredimo poskus, pri katerim bi opazili podobne slike na rahlo nagubani površini. V ta namen smo vzeli kos samolepljive zrcalne folije. Njene zaščitne podlage nismo odstranili. Na debelejši karton smo na vsakih osem centimetrov nalepili dvostranski selotejp in nanj nalepili zrcalno folijo. Gube smo naredili s približno dva centimetra širokimi in pet milimetrov debelimi letvicami. Namesto znakov smo na kartonski tulec nalepili šest trakov. Uporabili smo dva rdeča, dva

18 nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka

IZRAZNI GIB, KRETNJA | REKVIZIT ZA TENIS IN BADMINTON | DALMATINSKA OBLIKA IMENA ANA | KRAJ PRI IGU

12

GRAFIČNO OBLIKOVANJE, MATEVŽ BOKALIČ | ŠTUDENT PRED DIPLOMO | AMERIŠKI IGRALEC (JACK) | FOSILI | DEDNI, HRASTOV, JAVORJEV, JUROVSKI, MAČJI ? | SLOVITA AMERIŠKA KOŠARKARSKA LIGA | JUPITROVA LUNA | ŠTIRIKOTNO OBTESANO DEBLO | OTROŠKA OBLEKA | SLABŠALNA OZNAKA ZA BANTUJSKA LJUDSTVA V J. AFRIKI | dMFA | NAŠ RAČUNALNIČAR (ALEŠ)

STEČE V OJAČEVALNI ELEKTRONKI | NIZOZEMSKI SLIKAR MANIERISTIČNEGA SLOGA (CORNELIS) | MEDNARODNI JEZIK | IZKORIŠČEVALSKI OBRTNIK | 1

V ŠPAN. OKOLJU RAZŠIRJENA PRIREDITEV, KORIDA | 11 | HRV. KIPAR ANGELI - RADOVANI | GL. MESTO ITALIJE | NAŠA IGRALKA (EMA) | MITIČNO BITJE

MILANSKA OPERA | POLJSKI FILOZOF, LOGIK IN MATEMATIK

ENOTA ZA ELEKTRIČNO UPORNOST | BOTO, ČERNE, HREN, MOŠKON, SRŠEN | KALCIJ | UGOTAVLJANJE VREDNOSTI FIZIKALNE KOLIČINE | KUHARSKI IZDELEK | VRSTA MEHANIČNEGA KLAVIRJA | KROM

IZPUŠNI, KONDENZACIJSKI, PAPINOV ? | NEBRZDAN DIVJAK | ANTIČNO KONJENIŠKO LJUDSTVO | GL. MESTO WYOMINGA | ZAVETNIK DEŽELE KRANJSKE | UMETNOST (LATINSKO)

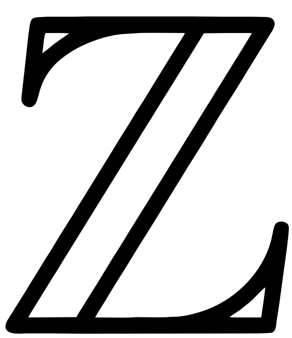
JAJČNA ZAKUHA ZA JUHO | BENEDIKTINSKI SAMOSTAN NA BAVARSKEM | NEMŠKA DETELJA | MAŠČOBA

MESTO OB NILU V ZGOR. EGIPTU | 10 | POROČNO PRAZNOVANJE, SVATBA | KRIPTON | GRŠKO MIT. PODZEMLJE | GORA NAD ZG. SELŠKO DOLINO | ČUDODELNA SV. POSODA | 6 | UNIVERZA V PENSILVANIJI

SVETOPISEMSKI OČAK | USTVARJALEC, OBLIKOVALEC | SILA | PRAŠIČJI PODOČNIK | VZKLIK ZARADI BOLEČINE | GLASBENIK ATANASOVSKI | DEŽEVNI OBLAK

SPLETNA DOMENA TUNIZIJE | SODOBNI NEMŠKI MATEMATIK (GERHARD) | FEVDALNI PODLOŽNIKI | FR.-ŠVIC. MATEMATIK (JOHANN H.) | KAMNITI METEORIT | ENAKA SOGLASNIKA

IGRALKA RINA | NAŠ SMUČAR (KLEMEN)



GLAVNO MESTO KABARDINO-BALKARIJE V RUSIJI | 16 | BELO TEKOČE ŽIVILO

NOVO MESTO | OČE | PRIPRAVA ZA VODENJE KONJA | MERILNIK ZRAČNEGA TLAKA | DELEC Z NABOJEM | 7

EVROPSKA RADIODIFUZNA ZVEZA | 14 | 3. OSEBA MNOŽINE | ANG. OBLIKA IMENA ANA | ORGAN NA OBRAZU | VTISNJEN ZNAK NA KOVANCU

dMFA | JAKOBOV BRAT DVOJČEK | SOSEDI ČRKE Š | BLIŽNJE OBMOČJE | DOMENA SAVDSKE ARABIJE

TRDNINE | OŽULJENO MESTO NA KOŽI

OSEMVRSTIČNA KITICA, OKTAVA | ENOTA ZA MOČ | NEMŠKI FIZIK (MAX VON)

NAŠ LETALSKI IZUMITELJ (FRANJO)
AMERIŠKA PISATELJICA FERBER
NITROCELULOZNI LAK
MISELNA POVEZAVA

AVTOR MARKO BOKALIČ
PREGLEDNICE LEG NEBESNIH TELES
NEKDANJA AMERIŠKA OTROŠKA FILMSKA ZVEZDA
DRAMATURGINJA RATEJ
KILOTONA
ITALIJANSKI OTOK
TRIVRSTIČNA KITICA SONETA
POSODA ZA GOJENJE VODNIH BITIJ

3

PRAVILA O VEDENJU V DRUŽBI

9

TEKAŠKI TRENING SPREMINJAJOČE HITROSTI

GRŠKA ČRKA
OZEK MOSTIČEK ČEZ VODO
KAMION KIPER

KRAVJA IZJAVA
LJUDSKI IZRAZ ZA KVAŠO
IZTOK MLAKAR

OLIMPIJSKE IGRE
OŠABNOST, PREVZETNOST
ARABSKI KNEZ
2
SLOVNIČNA MNOŽINA
IRIDIJ
GORENJSKO MESTO

8
MIŠI PODOBEN LETEČI SESALEC
NAŠ SKLADATELJ ZABAVNE GLASBE (BOJAN)
RIBOLOVNA NASTAVA V OBLIKI KOŠA ALI KLETKE
ŠPANSKI NOGOMETAŠ (MARCO)
MESTO NA VZHODU ČEŠKE
NASELJE, MESTO

JAPONSKI OTOK
TEMELJNA MATEMAT. RESNICA
NAŠA GLASBENA SKUPINA
SOSEDNJI ČRKI
URŠKA ŽOLNIR
SPREHAJALIŠČE
VODJA ODPRAVE ARGONAVTOV
BORIŠČE V AMFITEATRU

SPROŽI JO DELEC, KI ZADENE ATOMSKO JEDRO
4
17

ČLANICA DIPLOMATSKEGA PREDSTAVNIŠTVA
IZDELOVALEC GLIN. POSODE
PREBAVNI ORGAN

CESTNO VOZILO
NAŠ POKOJNI KMEČKI POLITIK (IVAN)
SCVRT KOŠČEK MESA V MASTI
LAVO ČERMELJ
DROBNO FRANCOSKO PECIVO
RAFKO IRGOLIČ
SREBRO
ZAC EFRON
ZGOLJ

IRACIONAL. KONSTANTA
AMERIŠKA IGRALKA (SHIRLEY)
VELIKA SLADKOVODNA RIBA
ARKTIČNI PTIČ, ALK
RAZSTAVITEV NA SPEKTRALNE BARVE

VANJO SE VTAKNE VTIČ
NADSTROPJE
13
DUŠEVNI JAZ
KONJENIŠKA OVIRA
NEVTRAL ZA MNOŽENJE

BOLGARSKI PISATELJ (JORDAN)
MAK. POLITIK (ZORAN)
5

IGRALEC HANKS
PRELAZ V FRANC. IMENIH
ZLATA OGNJANOVIĆ
ZAPOREDNI ČRKI
PREBIVALKE IRSKE

SLUŽBA ZA STIKE Z JAVNOSTJO
ENAKI ČRKI
AMERIŠKA PEVKA (DIANA)

18
TROJANSKI JUNAK
RIMSKA 50

15
JUNAŠKE DEVICE V NORDIJ. MITOLOGIJI

NAGRADNI RAZPIS

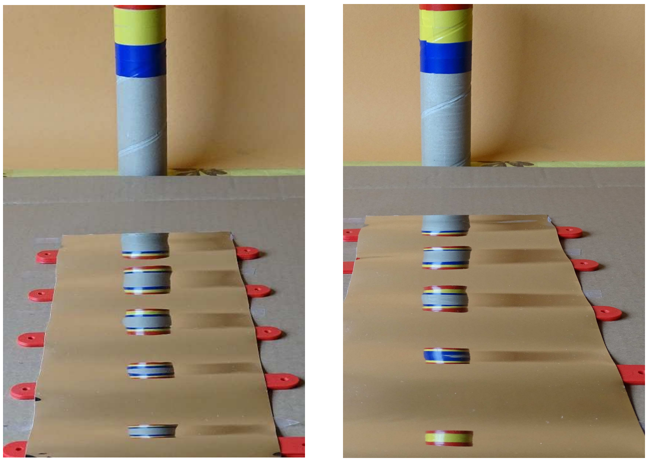
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

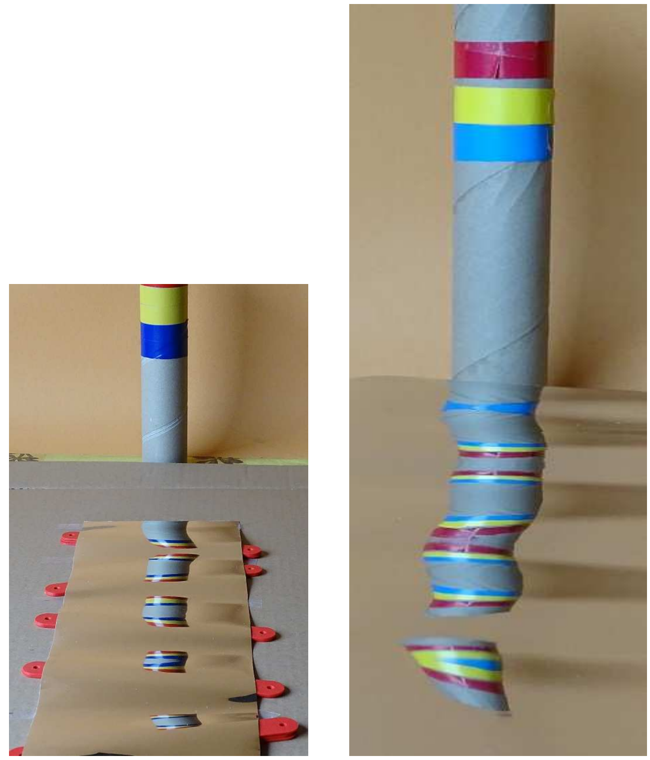
ter ga oddajte do **15. oktobra 2020**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

15
nadaljevanje s strani



SLIKA 3.
Zrcalno folijo smo v enakih razdaljah z dvostranskim selotejpom zalepili na karton in vmes pod folijo potisnili pet milimetrov debele letvice. Na »valovih« se vidijo slike barvnih trakov. Kaj vidimo, je odvisno od razdalje in višine, s katere gledamo na folijo. Sliki sta posneti iz enakih višin in različnih razdalj.



SLIKA 4.
Levo: Slike obročev na foliji, ko valovni hrbti niso vzporedni. Desno: Slike obročev na foliji, ko smo po enem dnevu odstranili letvice in jo odlepili od podlage.

rumena in dva modra izolirna trakova. Tulec smo postavili navpično na podlago tako, da smo na foliji videli slike barvnih obročkov (slika 3).

Koliko slik in katere barvne obroče vidimo pri dani valovitosti folije in legi tulca, je odvisno od razdalje in višine, s katere gledamo.

Opazimo, da je na nekaterih slikah rdeč obroček zgoraj, na nekaterih pa spodaj. Ker so letvice, ki smo jih potisnili pod folijo, približno vzporedne, so hrbti valov med seboj vzporedni – rečemo, da smo naredili ravne valove. Slike niso »zverižene«, kot to opazimo na fotografijah. Hrbti so izbočena cilindrična zrcala, doline pa vbočena cilindrična zrcala.

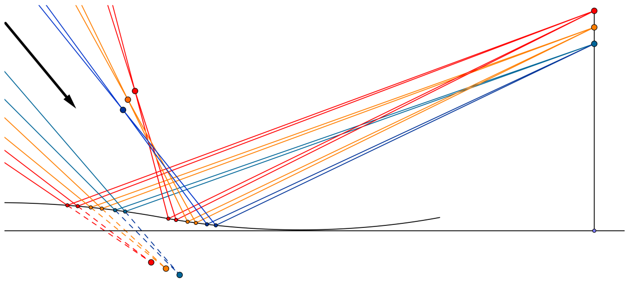
Zdaj pa prečke premaknimo tako, da niso vzporedne. Opazimo, da so zdaj slike obročkov nekoliko »zverižene« (slika 4 levo).

Če folijo pustimo dolgo časa zalepljeno na kartonu in podprto z letvicami (dan ali dva), potem pa jo odlepimo, je folija še vedno rahlo nagubana. Ko pogledamo slike, opazimo, da so precej podobne fotografijam kopališkihznakov (slika 4 desno).

Naredimo še skico poskusa. Omejimo se na en hrbet in eno dolino. Na izbočenem delu folije se sekajo podaljški odbitih žarkov, slika je pokončna in navidezna. Na vbočenem delu pa se sekajo odbiti žarki, slika je realna in obrnjena. Na sliki 5 smo z debelo puščico označili tudi smer gledanja. Da vidimo slike obročev, mora pasti odbita svetloba od zrcala v oko, zato s premikanjem višine glave vidimo različne slike, odvisno od tega, katere odbite žarke zajamemo. Na skici smo tulec postavili bliže hrbtu zato, da je skica preglednejša.

Če želimo videti več slik, morajo od obročev odbiti žarki na folijo vpadati pod večjim vpadnim kotom, torej moramo tulec oddaljiti od roba ali pa obročke postaviti nižje. Pri tem se obe sliki pomakneta bliže površini zrcala in težko opazimo, da je ena slika v »zraku«.

Da je ena slika navidezna, ena pa realna, se prepričamo tudi tako, da naredimo malo daljši val in predmet postavimo nad valovito folijo. Če predmet postavimo v pravo razdaljo in gledamo z ustreznega



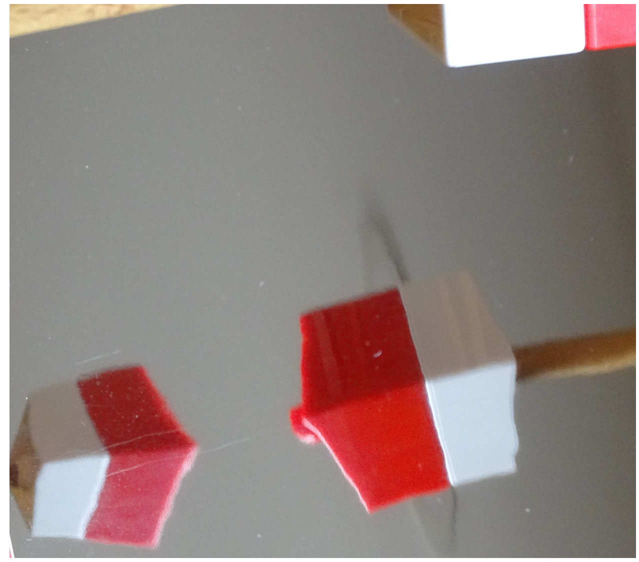
SLIKA 5.
Slika pik na izbočenem delu folije, konveksnem cilindričnem zrcalu, je navidezna in pokončna, sekajo se podaljški žarkov. Slika pik nad vbočenim delom, konkavnem cilindričnem zrcalu, pa je realna in obrnjena. Gledamo v smeri debelejše puščice.

mesta, vidimo, da slika »lebdi« nad zrcalno folijo. Imamo dve očesi, zato vidimo globinsko; fotoaparat pa ima le eno »oko«, zato lahko razliko opazimo le, če nastavimo ostrino na realno sliko, potem so ostale slike in predmeti, ki so v drugačni oddaljenosti, nejasne. To je vidno na fotografiji 6. Realna slika predmeta je spodaj desno.

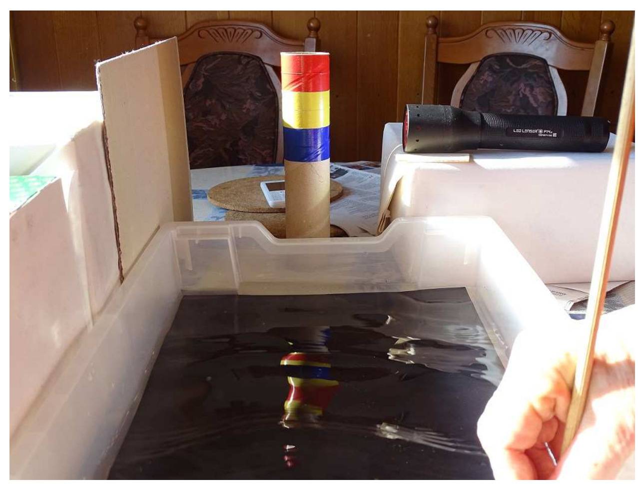
Na takšni valoviti zrcalni foliji lahko torej pokažemo sliko enega predmeta v dveh različnih zrcalih hkrati, na izbočenem in vbočenem.

Hitro pripravljen poskus

Ali lahko take slike na vodnih valovih opazujemo tudi doma, v sobi? Odgovor je pritrdilen. V kadičko smo nalili vodo, na dno pa postavili črno folijo. Dodatno smo tulec osvetlili še z baterijsko svetilko. Na levo stran kadičke smo postavili zaslon in tako zastrli svetlobo, ki prihaja skozi okno. Tanjšo deščico smo enakomerno pomakali v vodo in jo hkrati malo odrinili proti tulcu. Hitro smo opazili, da moramo ujeti pravo frekvenco pomakanja in da deščice pri tem ne smemo preveč odriniti. Pri ravno pravih valovih opazimo slike obročev (slika 7). Poskusite!



SLIKA 6.
Predmet smo postavili nad folijo, vidimo ga na zgornjem desnem robu fotografije. Ostra je le fotografija realne slike predmeta.



SLIKA 7.
Hitro postavljen poskus na jedilni mizi. Tulec dodatno osvetlimo z baterijsko svetilko. V kadičko nalijemo vodo, na dno pa postavimo črno folijo. Za boljšo vidljivost slik postavimo na levi strani še zaslon. Valove delamo s pomakanjem deščice v vodo.

× × ×

Magneti 2: Kaj smo spoznali o magnetnih sučnih nihalih?

Odgovor naloge

Mojca Čepič

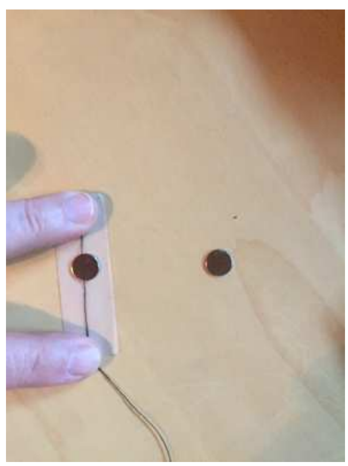
Danes se posvetimo raziskovanju magnetnih nihal. Naj na hitro predstavim še eno inačico izdelave magnetnega nihala. Med dva neodimska magneta je potrebno napeljati tanek, 20 do 30 cm dolg sukanec.

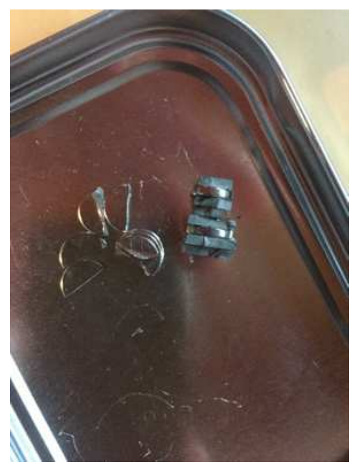
Najenostavneje je, da magnet nalepite na selotejp, selotejp z gladko stranjo položite na mizo, preko magneta na mizi pa na selotejp nalepite še sukanec (slika 1 a). Nato ob strani z dvema prstoma pritisnete lepilni trak s sukancem vred ob mizo (slika 1 b), tej kompoziciji pa približate drugi magnet. Ko bo drugi magnet dovolj blizu, bo »skočil« na prvega in trdno stisnil sukanec med oba magneta. Drugi magnet trdno držite in ga poskušajte približati čim bolj počasi, da preprečite preveč sunkovit »skok«. Magneti so namreč krhki in se radi polomijo (slika 1c). Selotejp z zunanje strani odstranite in nihalo je narejeno. Daljši sukanec potrebujemo zato, da si 10–20 cm sukanca navijemo okoli dlani, magnetni dvojec pa prosto visi in se suče na približno 10 cm dolgem prostem delu sukanca.

Sedaj se pa posvetimo nalogam oziroma povzemimo, kaj ste najverjetneje opazili, če ste se z magnetnimi nihali igrali.

Naloga je bila [1]: Sukanec dvignimo, da magnet prosto obvisi. Oglejte si ga? Kako je usmerjena simetrijska os magnetov?

Če niste magnetov na sukancu dvignili preveč sunkovito, je dvojec sučno zanihal in se počasi umiril. Če eno stran dvojca označimo, opazimo, da ob hoji po prostoru orientacija magnetov ostaja enaka. Tudi če se zasučemo, sta magneta vedno zasukana v enako smer.





SLIKA 1.
Leva: Potrebščine za pripravo nihala. Srednja: Z eno roko trdno primemo selotejp z nalepljenima magnetom in sukancem, z drugo pa približamo drugi magnet. Desna: Bodimo previdni, ker so neodimski magneti zelo krhki in se radi lomijo.

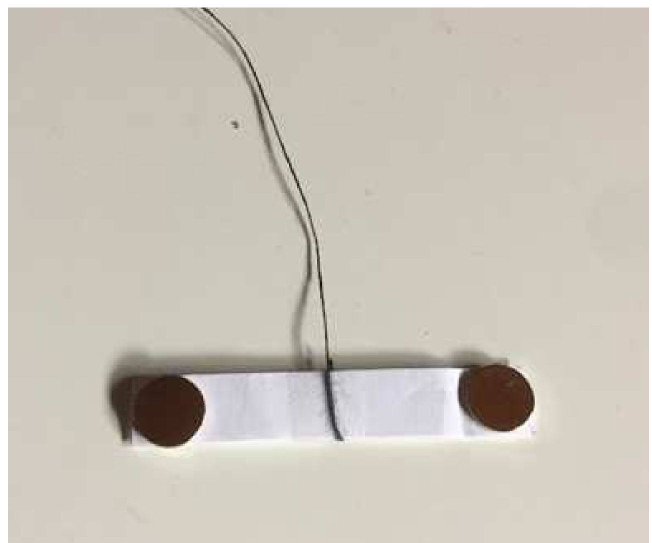
Kot smo omenili že zadnjič, je Zemlja velik magnet, vsi pa se neprestano nahajamo v njenem magnetnem polju. Magnetno polje ni prav veliko. Vodoravna komponenta gostote magnetnega polja v Sloveniji je približno 22 μT in velikost gostote magnetnega polj približno 48 μT. Pri nas smer gostote magnetnega polja oklepa približno 63° z vodoravnico. Da smer magnetnega polja ni vodoravna pokaže tudi naše nihalo, saj simetrijska os dvojca magnetov oklepa z vodoravnico manjši kot (slika 2).

SLIKA 2.
Magnetni dvojec visi navpično ob lesenem ravnilu in se ga z gornjim robom dotika. Vidimo, da spodnji rob dvojca odmaknjen od roba ravnila. Navor zaradi zemeljskega magnetnega polja poskuša dvojec zasukati v nasprotni smeri kot navor njegove teže.

Pozorno oko pa opazi, da se orientacija dvojca magnetov včasih spremeni. Če dvojec približamo železnemu predmetu, se bo zasukal tako, da bo simetrijska os dvojca bolj ali manj obrnjena proti predmetu. Železo se namreč v magnetnem polju dvojca magnetizira, predmet iz železa postane magnet in povratno spremeni polje na mestu, kjer dvojec visi. To je razlog za privlak železnih in drugih predmetov iz feromagnetnih snovi. Če orientacija dvojca na nekem mestu odstopa od običajne, boste v neposredni bližini gotovo našli kaj feromagnetnega.

Magnet na sukancu tudi sučno niha. Če ga približamo železu ali drugemu magnetu, vidimo, da se frekvenca sučnega nihanja poveča, iz česar lahko sklepamo, da velja: v čim večjem magnetnem polju se dvojec magnetov nahaja, tem večja je frekvenca nihanja.

Sedaj pa poskusimo frekvenco še zmanjšati. Lahko povečamo vztrajnostni moment magnetnega dvojca. Vzemimo približno 4 cm dolg in 1,5–2 cm širok kos papirja in ga po dolgem dva do trikrat preložimo. Vsako stran tako nastale ploske paličice vpnemo v dvojec magnetov, na sredino paličice pa privežemo sukanec (slika 3). Kako niha paličica z magnetnim dvojcem? V kateri smeri se paličica umiri, če sta magneta na obeh konceh enako orientirana? V kateri pa, če sta nasprotno? Kakšna je frekvenca nihanja v obeh primerih? Ta vprašanja so že nova naloga.



SLIKA 3.
Magnetno nihalo z večjim vztrajnostnim momentov. Orientaciji dvojcev sta lahko enaki ali nasprotni in to vpliva na smer ravnovesne lege in sukanje. Kako?

Sedaj pa še malo teoretične razlage. Kot že omenjeno, je dvojec magnetov magnetni dipol. Magnetni dipolni moment označimo s p_m. Magnetni dipol dvojca je vektor v smeri simetrijske osi usmerjen iz severnega pola dvojca, ki smo ga določili že zadnjič. Kadar dipol oklepa z magnetnim poljem na mestu dipola nek kot, se pojavi navor, ki ga suče v ravnovesno lego, v kateri je smer dipola vzporedna z magnetnim poljem.

$$\mathbf{M} = \mathbf{p_m} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

Zaradi navora magnet zaniha okoli ravnovesne lege

$$p_m B \sin\varphi = J\ddot{\varphi} \tag{2}$$

kjer je φ kot med dipolom in magnetnim poljem, J vztrajnostni moment dvojca okoli osi v smeri vrvice ter $\ddot{\varphi}$ je trenutni kotni pospešek sukanja dvojca magnetov. Za majhne kote je nihanje sinusno in iz enačbe (2) razberemo kotno frekvenco nihanja $\omega = 2\pi\nu$ oziroma frekvenco nihala

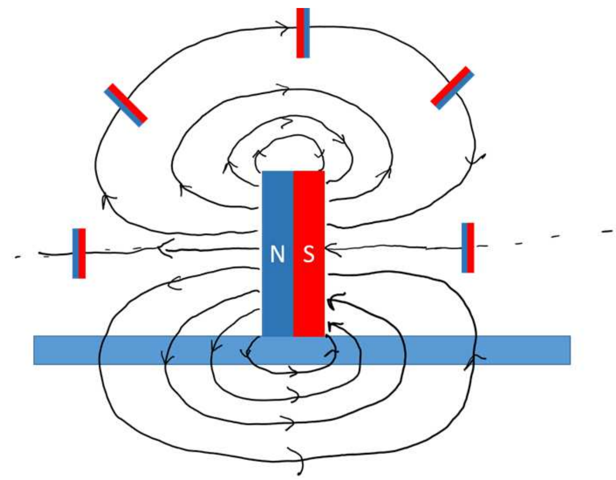
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p_m B}{J}} \tag{3}$$

Odgovorimo še na zadnje vprašanje. Kako zmanjšati frekvenco nihanja ali celo doseči, da se magnetni dvojec prosto vrti? Odpraviti oziroma zelo zelo zmanjšati moramo magnetno polje. A Zemljino magnetno polje je povsod okoli nas. Narišimo najprej silnice okoli dvojca magnetov (slika 4).

Dvojec magnetov stoji na robu na podlagi, ki je na sliki označena z dolgim modrim pravokotnikom. Simbolično sta označena tudi severni (N) in južni (S) pol dvojca. Silnice magnetnega pola so zaključene, tudi tista na sredini, ki se daleč stran obrne … Silnice ponazarjajo magnetno polje dvojca, mali dvojci pa svojo orientacijo, če bi v označenih položajih prosto viseli in ne bi bilo drugih magnetnih polj, npr. Zemljinega. Kjer so silnice bolj goste, je magnetno polje večje in sučno nihalo iz magnetnega dvojca bi nihalo z večjo frekvenco.

Takle, na svojem robu na mizi stoječi dvojec pa lahko izkoristimo tudi za izničenje Zemljinega magnetnega polja. S pravilno orientacijo dvojca na mizi lahko dosežemo, da je v eni točki magnetno polje, ki ga povzroča magnetni dvojec na mizi, nasprotno enako zemeljskemu. Ker je ploskev dvojca na vrvici skoraj navpična, je dovolj, če najdemo točko, v kateri sta nasprotno enaki vodoravni komponenti. V tej točki se bo sučno nihalo iz magnetnega dvojca skoraj prosto vrtelo. V ravnovesno lego ga vrača le še sukanec, navori zaradi zvijanja sukanca pa so zelo zelo majhni. Kako je potrebno zasukati dvojec na mizi, da to lahko dosežemo? Pa je pred vami še ena nalogica.

Tudi ta delavnica je nekoliko predelana delavnica Leoša Dvoraka [2, 3].



SLIKA 4.
Pogled s strani na dvojec magnetov, ki na podlagi stoji na robu. Simbolično sta pola označena tudi barvno, položaj črk naj ne zavede. Na desni je južni pol kombiniranega magneta, a levi severni. Če bi magneta razdružili, bi za vsakega od njiju lahko označili oba, moder in rdeč del, kot kažejo simbolične slike manjših magnetov in njihove orientacije v magnetnem polju dvojca.

Literatura

[1] M. Čepič, *Magneti 1*, Presek: list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, 2019/2020, **47**, 1, 18–20.

[2] Dvořák L., *O magnetu, magnetických tělesech a velikém magnetu Zemi*, In: Dílny Heuréky 2016/Heureka Workshops 2016. Sborník konference projektu Heuréka. E.: V. Koudelková. Matfyzpress Praha 2017. ISBN 978-80-7378-338-9 (PDF, v češčini), str. 7–23. Dostopno na `kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf`, ogled 6. 12. 2019.

[3] Dvořák L., *Magnets and magnetic field around them: what can we learn from simple experiments*, sprejeto v objavo v zbornik konference GIREP v Dublinu 2017.

× × ×

Retrogradno gibanje

↓↓↓
Vid Kavčič
→

Uvod

Telesa v našem Osončju, to so planeti, pritlikavi planeti, kometi, asteroidi in ostala telesa, se gibljejo okoli Sonca. Če Osončje pogledamo iz smeri nad Sončevim severnim polom, se večina teles giblje v nasprotni smeri urinih kazalcev, nekatere izjeme pa v smeri, enaki gibanju urinih kazalcev. Za prve od teh pravimo, da je njihovo pravo gibanje **progradno**, izjeme pa se gibljejo **retrogradno.**

Skoraj vsi planeti Osončja (Merkur, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun) se gibljejo okoli svoje osi progradno, izjema je Zemljina dvojčica Venera, ki se okoli svoje osi edina giblje retrogradno. Toda prav vsi planeti se gibljejo progradno po svojih tirnicah okoli Sonca.

Predstavljajmo si, da sredi neke jasne noči na nebu opazujemo rdeči planet **Mars.** Ker se tako naša modra Zemlja kot tudi Mars okoli Sonca gibljeta progradno in je kotna hitrost Zemlje okoli Sonca večja od Marsove, gre sklepati, da se Mars na našem nebu glede na zvezde pomika v smeri vzhoda. Pomika se in pomika, vzhodno in še bolj vzhodno, po nekem času pa bo naredil polni obhod, čez nekaj časa še enega, potlej še enega ... Vse se zdi prav enostavno, a le na prvi pogled. Zmoti nas Marsovo nadvse čudno vedenje. Opazimo ga, če pod nebesnim svodom preživimo mnogo dni, veliko enostavneje pa lahko njegovo nenavadno vedenje razberemo s slike 1.

Mars se očitno do neke točke giblje povsem običajno v smeri vzhoda, nakar se začne premikati v nasprotno stran – v smer zahoda, čez čas pa si premisli in svojo pot kot prej ponovno nadaljuje v smeri vzhoda.

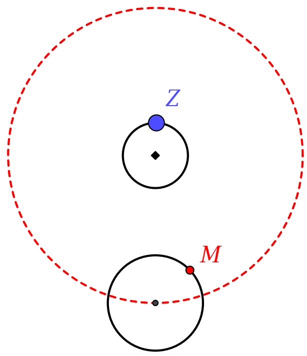
Navideznemu gibanju planeta v nasprotni smeri gibanja ostalih teles v Osončju pravimo **navidezno retrogradno gibanje.** Ker je le-to za nas na tem mestu veliko zanimiveje od pravega retrogradnega gibanja, bomo sedaj z besedno zvezo retrogradno gibanje mislili na navidezno retrogradno gibanje. Za opazovalca na Zemlji je retrogradno gibanje predvsem gibanje zunanjih planetov, ki so od Sonca oddaljeni bolj kot Zemlja.

SLIKA 1.
Zanimanja vreden posnetek Marsovega vedenja

Retrogradno gibanje je za astronome sicer zelo zanimiv pojav. Pred davnimi časi so še verjeli, da je Zemlja središče vesolja, v veljavi je bil t. i. geocentrični sistem. Ko so hoteli na podlagi tega modela utemeljiti retrogradno gibanje, so s težavo ugotovili, da vsak planet, ki kroži okoli Zemlje, še posebej kroži okoli navidezne točke na svoji orbiti, kot prikazuje slika 2.

Kopernik je šele na prehodu iz 15. v 16. stoletje utemeljil svojo heliocentrično teorijo, ki upošteva, da se planeti in ostala telesa gibljejo okoli Sonca in ne Zemlje. Tedaj je bilo potrebno poiskati novo razlago za retrogradno gibanje planetov. Kaj se zares zgodi? Odgovor na to vprašanje še najbolje razkriva slika 3, ki prikazuje resnično gibanje Zemlje in Marsa ter navidezno gibanje Marsa na nebesni sferi.

Gibanje nekega zunanjega planeta je torej retrogradno v času, ko ga Zemlja *prehiteva*, kar pa se dogaja v času okoli **opozicije.** Kar hitro pa se pojavi →



SLIKA 2.
Tako so skušali retrogradno gibanje pojasniti z geocentričnim sistemom. Zemlja se giblje po majhni krožnici okoli *središča vesolja*. Mars kroži okoli navidezne točke, ki pa se premika po rdeči tirnici okoli središča vesolja.

vprašanje, koliko časa retrogradno obdobje sploh traja. Vsekakor bi to lahko ugotovili ob nekaj dnevnem druženju z našim rdečim prijateljem, pa vendar bi bilo verjetno hitreje in morda tudi bolj zanimivo, da bi trajanje retrogradnega gibanja kar izračunali. Poskusimo torej!

Čas retrogradnega gibanja

Za začetek narišemo dovolj verodostojno skico in skušamo opisati lego Zemlje in Marsa v odvisnosti od časa t.

Predpostavimo, da sta orbiti Zemlje in Marsa krožni in da ležita v isti ravnini. V to ravnino postavimo pravokotni koordinatni sistem s središčem v Soncu in abscisno osjo skozi zveznico Sonce, Zemlja, Mars v času opozicije Marsa, torej ko ležijo kolinearno.

Za planeta Zemljo in Mars napišemo koordinate v odvisnosti od časa. Pri tem upoštevamo, da je kot $\varphi = \omega \cdot t$. V enačbah je d oddaljenost posameznega planeta od Sonca in ω kotna hitrost posameznega planeta.

Za Zemljo pišemo

$$x_\oplus = d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)\,,$$
$$y_\oplus = d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t)\,,$$

zelo podobno tudi za Mars

$$x_♂ = d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t)\,,$$
$$y_♂ = d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t)\,.$$

Opazovali bomo smerni količnik zveznice Zemlja-Mars. Med progradnim gibanjem Marsa se le-ta veča, med retrogradnim pa manjša. Zato s pomočjo že dobljenih zvez zapišimo izraz za ta smerni količnik k v odvisnosti od časa t.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_♂ - y_\oplus}{x_♂ - x_\oplus} = \frac{d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t)}{d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)} \qquad (1)$$

Spreminjanje kotnega količnika $k(t)$ grafično prikazuje slika 5.

Zanimata nas lokalna ekstrema tega količnika; čas med trenutkom enega in drugega je namreč čas retrogradnega gibanja.

Zato moramo k odvajati in odvod izenačiti z 0. Ker nas zanimajo lokalni ekstremi, je dovolj, da ugotovimo, kdaj je števec odvoda enak nič.

Označimo števec in imenovalec k-ja:

$$a = d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t)\,,$$
$$b = d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)\,.$$

Zaradi preglednosti najprej odvajamo posebej a in b. Pri tem uporabimo pravili za posredno odvajanje kotnih funkcij sinusa in kosinusa, ki sta tudi posebej navedeni v dodatku.

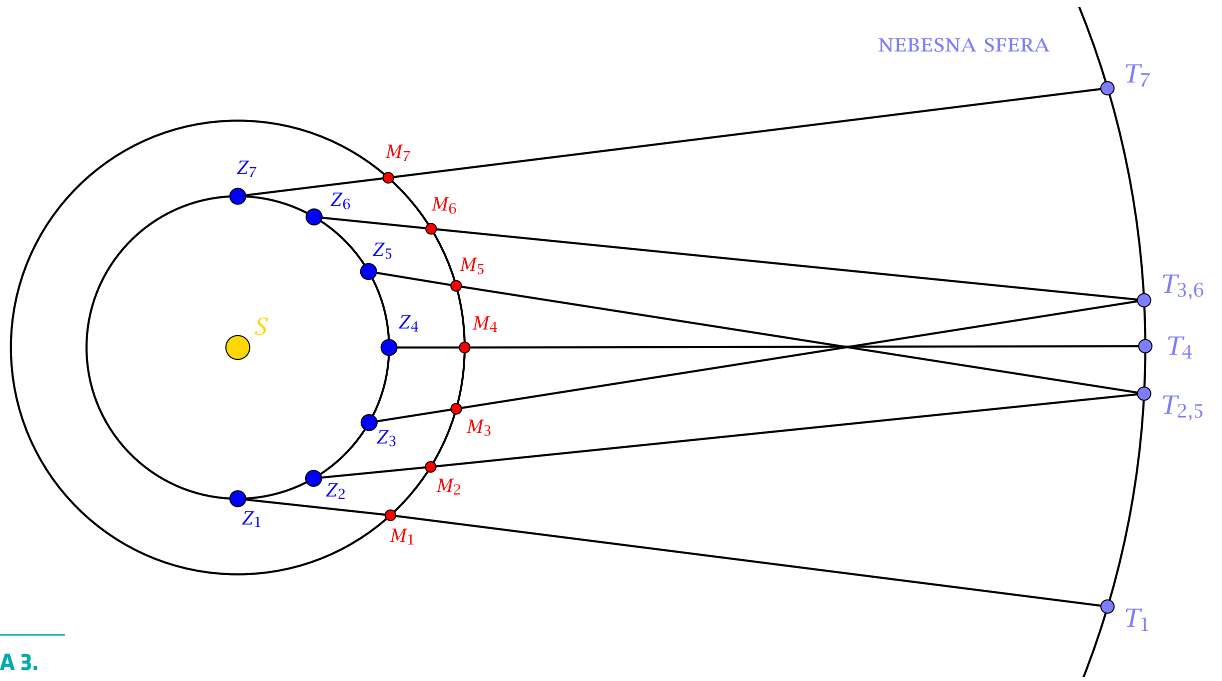
$$a' = \omega_♂ d_♂ \cdot \cos(\omega_♂ t) - \omega_\oplus d_\oplus \cdot \cos(\omega_\oplus t)$$
$$b' = \omega_\oplus d_\oplus \cdot \sin(\omega_\oplus t) - \omega_♂ d_♂ \cdot \sin(\omega_♂ t)\,.$$

Po pravilu za odvajanje količnika je števec odvoda enak nič, ko velja

$$a'b - ab' = 0$$
$$a'b = ab' \qquad (2)$$

V (2) vstavimo izraze za a, a', b in b' ter z uporabo zvez med kotnimi funkcijami in adicijskega izreka za kosinus razlike, navedenimi v dodatku, dobimo zvezo

$$\cos\left((\omega_♂ - \omega_\oplus)\,t\right) = \frac{\omega_♂ d_♂^2 + \omega_\oplus d_\oplus^2}{d_\oplus d_♂ \cdot (\omega_\oplus + \omega_♂)}. \qquad (3)$$



SLIKA 3.
Skica, ki nazorno razloži retrogradno gibanje. Z rumenim S je označeno Sonce, najmanjša krožnica je Zemljina tirnica, sledi ji Marsova tirnica. Označenih je sedem zaporednih položajev Zemlje in Marsa, ki so v časovnem razmiku okoli enega meseca. Krožni lok na desni strani predstavlja nebesno sfero (na videz nepremično ozadje daljnih zvezd), na kateri so s T_i označene projekcije zveznice Z_iM_i v položaju i, ki so pravzaprav tisto, kar vidimo na nebu. Na sferi se tako Mars iz T_1 premakne v točko $T_{2,5}$, potlej v $T_{3,6}$, sledi položaj opozicije T_4, nato pa se Mars zopet premakne v $T_{2,5}$, nadalje pa spet v $T_{3,6}$ in potem v T_7.

Dobimo dve družini rešitev

- $$t_1 = \arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_\oplus d_\oplus^2}{d_\oplus d_{♂} \cdot (\omega_\oplus + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_\oplus} + K \cdot 360°,$$
  $$t_2 = -\arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_\oplus d_\oplus^2}{d_\oplus d_{♂} \cdot (\omega_\oplus + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_\oplus} + K \cdot 360°.$$

Čas retrogradnega gibanja izrazimo kot

- $$\Delta t = t_1 - t_2 = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\omega_{♂} d_{♂}^2 + \omega_\oplus d_\oplus^2}{d_\oplus d_{♂} \cdot (\omega_\oplus + \omega_{♂})}\right) \cdot \frac{1}{\omega_{♂} - \omega_\oplus}. \tag{4}$$

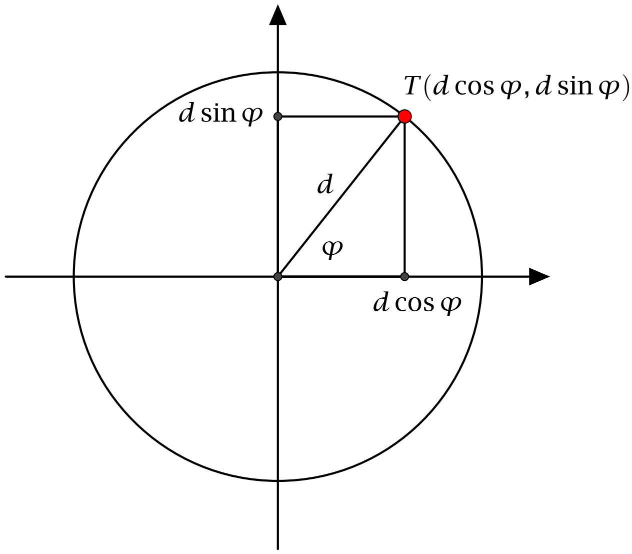
Na spletu najdemo natančne podatke oziroma te izračunamo; v enačbo (4) vstavimo $d_\oplus = 1$ *a.e.*, $d_{♂} \doteq 1{,}524$ *a.e.*, $\omega_\oplus \doteq 0{,}986$ °/dan, $\omega_{♂} \doteq 0{,}524$ °/dan.

Dobimo $\Delta t = 72{,}72$ dni, kar se lepo sklada s podatkom 72 dni, ki ga dobimo v viru [1]. Razlog za odstopanje utegnejo biti nekolikšna sploščenost in medsebojna nagnjenost (inklinacija) orbit obeh planetov, privzeli smo namreč, da sta orbiti planetov krožni in da krožita v isti ravnini.

Zdaj pa bralca vabim, da se preizkusi v spodnjih bolj ali manj trdih astronomskih orehih.

Naloge bralcu

- Koliko časa traja retrogradno gibanje Jupitra? Veš le, da je Jupiter od Sonca oddaljen okoli 5,2 *a.e.*, njegov obhodni čas okoli Sonca pa je 11,86 leta.
- Čeprav je Merkur notranji planet, lahko tudi pri njem opazimo retrogradno gibanje. Koliko časa traja obdobje retrogradnega Merkurja? Veš le, da je Merkur od Sonca oddaljen približno 0,39 *a.e.*
- Čezvesoljska zombi ladja obišče pritlikavi planet Ceres. Zombija Miho zanima, koliko časa na njihovi postojanki traja retrogradno gibanje Saturna.



SLIKA 4.
Dovolj verna skica, s katero opišemo koordinate posameznega planeta v odvisnosti od časa.

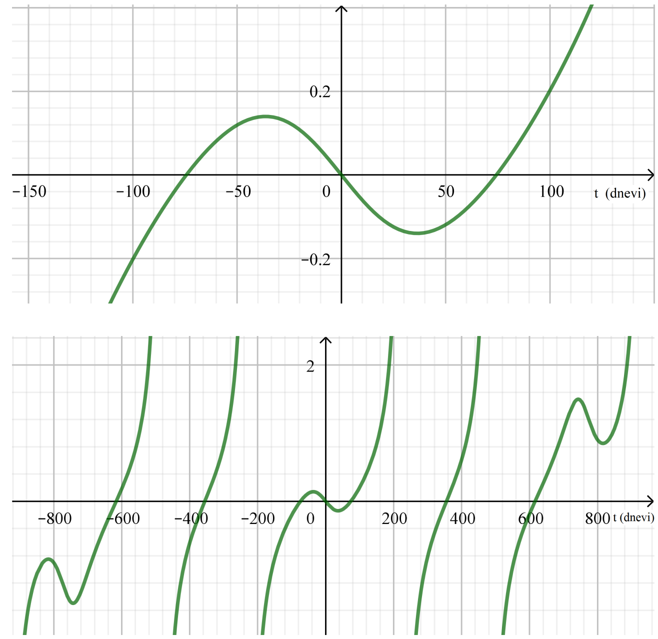
Pomagaj Mihi potešiti njegovo zombi radovednost! Pri tem si lahko pomagaš le s podatkoma, da je Ceres, ko je glede na Zemljo v (zgornji) konjunkciji, od Zemlje oddaljen približno 3,77 *a.e.*, in da Saturn za obhod Sonca potrebuje 10365 dni več kot Ceres.

- Jupiter je bil v opoziciji 10. junija 2019. Kdaj se je oziroma se bo po tem datumu pričel zopet gibati retrogradno? Veš, da je navidezna magnituda Jupitra na Zemlji v času opozicije $-2{,}7$, v času konjunkcije pa $-1{,}85$.
- Izrazi čas retrogradnega gibanja planetov kot funkcijo obhodnih časov dveh planetov.

Dodatek

V tem razdelku pojasnimo nekaj zvez v povezavi z odvodom in kotnimi funkcijami, ki jih uporabimo v rešitvi.

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- $\sin'(ax) = a\cos(ax)$
- $\cos'(ax) = -a\sin(ax)$
- $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$



SLIKA 5.
Zgoraj: Spreminjanje smernega količnika k v času retrogradnega gibanja.
Spodaj: Vidimo, da se v časovnem intervalu, ki ga prikazuje graf, retrogradno obdobje dogodi trikrat.
Grafa odvisnosti smernega količnika zveznice Zemlja-Mars v odvisnosti od časa $k(t)$. Časovna enota je dan. Če smo prebrisani, lahko čas retrogradnega gibanja približno odčitamo tudi iz grafov.

Literatura

[1] *Apparent retrograde motion*, *Wikipedia*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Apparent_retrograde_motion`, ogled: 13. 3. 2020.

[2] *Vzvratno gibanje*, *Wikipedija*, dostopno na `sl.wikipedia.org/wiki/Vzvratno_gibanje`, ogled: 13. 3. 2020.

[3] *What is retrograde motion*, *EarthSky*, dostopno na `earthsky.org/space/what-is-retrograde-motion`, ogled: 21. 3. 2020.

× × ×

O predstavitvi podatkov v računalniku: cela števila

Jure Slak

Velikokrat slišimo, da računalniki vse podatke hranijo kot zaporedja ničel in enic. Vse lepo in prav, to za moderne računalnike drži, vendar ne pove prav veliko o tem, kako so shranjeni konkretni podatki. Večina podatkov, ki jih shranjujemo, npr. slike, zvok ali besedilo, so shranjena kot zaporedja celih števil.

Obstaja več dogovorjenih načinov, kako sliko, zvok ali besedilo pretvorimo v zaporedje števil. Ti načini so večini ljudi znani kot datotečni formati, za slike poznamo `jpg`, `png`, `gif` (in druge), za zvok `mp3`, `flac` ipd. Običajni uporabniki ne potrebujejo nobenega znanja o tem, kako formati delujejo, pomembno je le, da oba programa, tako tisti, ki shranjuje, kot tisti, ki prikazuje, uporabljata enak format. S predstavitvijo večjih kosov podatkov, kot so slike ali besedilo, se bomo ukvarjali kdaj drugič; tokrat pa se bomo spustili še en nivo globlje in se vprašali, kako delamo s seznamom števil oziroma celo kako predstavimo le eno celo število. Morda je odgovor na prvi pogled preprost: pretvorimo število v dvojiški sistem, pa smo! To je tudi res, vendar bo po poti potrebno rešiti še nekaj težav.

Dvojiški sistem

Kot vam je verjetno znano, števila običajno zapisujemo v desetiškem sistemu in za zapis števil uporabljamo števke od 0 do 9. Število 593 tako pomeni

$$593 = 5 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3 = 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Podobno lahko vsako število zapišemo v kakšnem drugem sistemu, za računalništvo je posebej zanimiv dvojiški, saj ima le dve števki: 0 in 1. Število 593 bi tako napisali kot

$$\begin{aligned} 593 &= 1 \cdot 512 + 0 \cdot 256 + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + \\ &\quad + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + \\ &\quad + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1001010001_{(2)}, \end{aligned}$$

kjer s podpisano (2) označimo, v katerem sistemu je število zapisano (v desetiškem podnapis ponavadi izpustimo).

Drugi zanimivi sistemi so potence dvojiškega, npr. osmiški in šestnajstiški, saj dovolijo krajši zapis kot dvojiški, vendar jih je še vedno enostavno pretvoriti v dvojiškega ali nazaj; enostavno pretvorimo vsako števko posebej v ustrezno število bitov (običajno bi morali uporabiti npr. Evklidov algoritem). Zgornje število bi v osmiškem zapisali kot $1121_{(8)}$.

Sistemske omejitve

Osnovna enota informacije je en bit – vrednost, ki je lahko le 0 ali 1. Toda, računalniki s posameznim bitom naenkrat ne morejo delati neposredno. Najmanjša enota, ki jo lahko neposredno uporabimo, je en bajt – ta ima osem bitov. Računalniški pomnilnik (RAM) si lahko predstavljamo kot ogromno tabelo s prostori, ki so veliki en bajt. Če imamo npr. 4GiB[1] pomnilnika, imamo torej prostora za 4 294 967 296

[1] Formalno obstaja razlika med enotama GiB in GB. Enote brez ›i‹, kot so kB, MB, GB, uporabljajo standardne fizikalne predpone kilo-, mega-, giga- in faktor 1000, medtem ko enote z ›i‹, torej KiB, MiB, GiB, uporabljajo predpone kibi-, mebi-, gibi- in faktor 1024. V praksi se uporablja zmešnjava vsega. Več o standardizaciji lahko preberete na strani ameriškega nacionalnega inštituta za standarde in tehnologijo: `physics.nist.gov/cuu/Units/binary.html`

bajtov. Vsak bajt predstavimo kot zaporedje osem bitov in ga shranimo v posamezno celico, kot je shematsko prikazano na sliki 1.

naslov	podatek
0	10101001
1	10110001
2	01011000
3	10100011
4	00001001
⋮	
4294967294	01000000
4294967295	10011110

SLIKA 1.
Shema računalniškega polnilnika

Sedaj ko poznamo omejitve sistema, se lahko pogovorimo o tem, kako velika števila bomo shranjevali. Nekateri programski jeziki, npr. Python, dopuščajo uporabo poljubno velikih števil. Vendar je to zgolj iluzija za uporabnika: ko števila postanejo prevelika, se v ozadju shranijo kot zaporedje manjših števil. Če dopuščamo le omejena števila, je najbolj skopuška možnost, da bi omejili delo s števili na en bajt. Največje število, ki bi ga tako lahko zapisali, bi bilo $11111111_{(2)}$ oz. 255. To bi bilo za vsakodnevno uporabo premalo, saj si hitro lahko zamislimo uporabo za večja števila. Običajno imamo pri programiranju opravka s števili, ki so velika 32 ali pa 64 bitov (torej štiri ali osem bajtov). Največje število, ki ga lahko shranimo v 32 bitov, je $11111111111111111111111111111111_{(2)}$ oziroma $2^{32}-1 = 4\,294\,967\,295$, kar je malo več kot štiri milijarde. Največje 64-bitno število, pa je $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$, kar je nekaj več kot 18 trilijonov. Že 32 bitna števila so dovolj za večino praktičnih potreb, vendar so kdaj neustrezna. Naštejmo nekaj znanih težav, kjer 32-bitna števila niso bila zadostna. Ponavadi imamo opravka s predznačenimi števili, ki lahko hranijo pozitivne in negativne vrednosti, tako da se zgornja meja zmanjša za približno polovico, na 2 147 483 647. Pred nekaj leti je YouTube video Gangam style dosegel dovolj ogledov in so morali število ogledov hraniti v 64-bitnih številih. Za težavami z omejenimi števili trpijo tudi marsikatere (pogosto starejše) računalniške igrice. Igra *Minecraft* je do verzije 1.7.3 napačno generirala teren, če je igralec šel predaleč od sredine sveta (ta teren je postal znan pod imenom Daljne dežele (*Farlands*)), in še danes imajo nekatere verzije to težavo. Zanimiva težava, ki nas še čaka, pa je povezana s shranjevanjem časa. Računalniki pogosto shranjujejo trenutni čas kot število sekund od 1. januarja 1970 in v torek 19. januarja 2038 bo število sekund preveliko, da bi ga shranili v 32-bitno število. Ta datum je znan kot »konec časa« in do takrat morajo programi začeti uporabljati 64-bitna števila. Pri shranjevanju časa bodo 64-bitna števila zadostovala še za naslednjih 585 milijard let in nas pred tem lahko skrbi marsikaj drugega.

Kljub temu, da kdaj povzročajo težave, so omejena števila praktično neizmerno uporabna. Če se dogovorimo, da bomo uporabljali 32-bitna števila, vemo, da moramo prebrati naslednje štiri bajte, in ti vsebujejo naše število. V nasprotnem primeru bi morali na kakšen bolj zapleten sporočiti, kako dolgo je število (morda najprej poslati dolžino, toda tudi to je število, kako pa sporočimo število). V praksi se pri večini zapisov in protokolov dogovorimo za omejitev velikosti števil.

Veliki in mali endian

Denimo, da želimo zapisati ali poslati število 2 740 498 857 z bitno reprezentacijo

- 2 740 498 857 =
  10100011 01011000 10110001 10101001,

kjer smo števke s presledki ločili po bajtih. Za lažje razumevanje jih oštevilčimo:

1. bajt	2. bajt	3. bajt	4. bajt
10100011	01011000	10110001	10101001

Pojavljata se dva smiselna načina pošiljanja: ali bajte pošljemo v vrstnem redu 1234 ali pa 4321. Bomo najprej poslali bajt 1, ki vsebuje »največje« števke (t. i. *most significant byte*) ali četrti bajt z »najmanjšimi« števkami? V praksi glede tega ni bilo sklenjenega kompromisa in uporabljata se oba načina. Pri komunikaciji prek omrežja se bajte ponavadi pošilja v vrstnem redu 1234, torej najprej »z velikega konca«, pri zapisu v pomnilnik ali pri procesorskih operacijah pa se na večini modernih arhitektur uporablja zapis 4321, torej »z manjšega konca«. Zgornje število je v pomnilniku na sliki 1 zapisano z manjšega konca v celicah 0–3. Prikaz obeh zapisov je bolj pregledno napisan na sliki 2.

mali endian

naslov	podatek	
x	10101001	4. bajt
$x+1$	10110001	3. bajt
$x+2$	01011000	2. bajt
$x+3$	10100011	1. bajt

veliki endian

naslov	podatek	
x	10100011	1. bajt
$x+1$	01011000	2. bajt
$x+2$	10110001	3. bajt
$x+3$	10101001	4. bajt

SLIKA 2.
Mali in veliki endian zapis števila 2 740 498 857

Zapis števila 4 kot 32-bitnega števila z »manjšega konca« bi bil tako

$$4 = 00\ldots0100 = \begin{array}{c} 00000100 \\ 00000000 \\ 00000000 \\ 00000000 \end{array}.$$

Angleški izraz za zapis »z velikega konca«, torej 1234, je *big endian*, za zapis »z manjšega konca«, torej 4321, pa *little endian*. Izraza izhajata iz satiričnega romana Guliverjeva potovanja, ki ga je napisal Johnatan Swift leta 1726. Roman je kritika takratne angleške družbe; v njem Guliver doživi brodolom in se zbudi v deželi Liliput, kjer živijo Liliputanci. Deželo težijo razdori in borbe med Liliputanci, eden izmed glavnih razlogov pa je, ali je treba trdo kuhano jajce najprej razbiti na zgornji (manjši) ali spodnji (večji) strani. V angleščini so se zagovorniki strani, ki je jajce razbijala z manjšega konca (*from the little end*) imenovali *little endians*, njihovi nasprotniki pa *big endians*. Izraz je v računalništvu populariziral Danny Cohen v malo manj, a kljub vsemu nezanemarljivo satiričnem članku *O svetih vojnah in prošnja za mir* [1], objavljenem s strani takratne »delovne skupine za internet« (*Internet Engineering Task Force (IETF)*). Tam potegne nekaj vzporednic med zagovorniki ene in druge strani in jih tudi okliče za *Little-* ali *Big-Endians*. Od takrat se je izraz obdržal, splošnemu principu, kako lahko števila različno napišemo, pa rečemo *endianess*. V slovenskem prevodu se zgornji in spodnji del jajca pri Liliputancih imenujeta »vršek« in »tušek«, vendar terminologija (še?) ni prišla v rabo pri računalniških arhitekturah.

Negativna števila

Do sedaj smo se ukvarjali samo z zapisom pozitivnih števil. Običajna števila, ki jih uporablja računalnik, so predznačena, torej imajo predznak + ali −, in so lahko negativna. Kako pa zapišemo ta? En način je, da prvi bit žrtvujemo za predznak: dogovorimo se, da če je prvi bit enak 0, pomeni, da je število pozitivno, sicer pa negativno, preostanek pa interpretiramo kot običajno pozitivno število. Tako bi npr. 00000001 pomenilo število 1, 10000001 pa −1. Ta sistem se imenuje »predznak in velikost«, *sign and magnitude*

Na žalost se ta način ne uporablja pri celih številih. Zgoraj opisani način ima med drugim težavo, da ima dve ničli (+0 in −0), ki sta kot števili seveda enaki, bitna zapisa imata pa različna. To povzroča tudi težave pri postopku za seštevanje. Sistem, ki se večinoma uporablja dandanes, se imenuje »komplement dvojke« (*two's complement*) in teh težav nima, ima pa tudi smiselno matematično strukturo.

Da bo manj pisanja, denimo, da delamo z osem bitnimi števili. Pa se vprašajmo, katero število je −5? To je število, ki ga moramo prišteti 5, da dobimo 0. Trdim, da je pri osem bitnih številih to število v resnici 251. Pa poglejmo: 5 v dvojiškem zapišemo kot $101_{(2)}$, 251 pa kot $11111011_{(2)}$. Pisno ju seštejmo:

$$\begin{array}{cc|ll} & & 00000101_{(2)} & = 5 \\ + & & 11111011_{(2)} & = 251 \\ \hline = & 1 & 00000000_{(2)} & = 256 \end{array}$$

Ker imamo samo osem bitov, rezultatu »odpade« prvi bit in dobimo odgovor 0. Če torej velja, da je $5 + 251 = 0$, je 251 nasprotna vrednost 5, torej −5. Po enakem principu je tudi $5 = -251$. Stvar dogovora je, kako si bomo posamezna števila interpretirali: če se dogovorimo, da binarni zapis 251 ne pomeni 251 ampak −5, potem pač nimamo nobenega načina, da bi zapisali število 251. Ampak nič hudega, jasno je, da bomo morali nekaj števil žrtvovati. Vseh števil je 256 in če hočemo imeti nekaj negativnih števil, moramo na nekaj pozitivnih števil gledati kot na negativna. Smiselno je razdeliti na polovico. Števila od 0–127 ostanejo nedotaknjena (to so števila od 00000000 do 01111111) in jih interpretiramo kot prej. Števila od 128 do 255 pa interpretiramo kot negativna števila. Namreč $255 + 1 = 256$, kar je v 8-bitnem sistemu enako kot 0. Podobno velja $254+2 = 0$, $253+3 = 0$ in na koncu $129 + 127 = 0$. Odločimo se torej, da bomo $255 = 11111111_{(2)}$ gledali kot -1, in tako naprej do $129 = 10000001_{(2)}$ kot -127. Od tod tudi razlog za ime »komplement dvojice«: v n-bitnem sistemu število negiramo tako, da ga odštejemo od 2^n, v našem primeru od $2^8 = 256$. Rešiti moramo le še število 128, ki je samo sebi nasprotno število in ga lahko interpretiramo kot negativno ali pozitivno. Dogovor je, da ga gledamo kot negativno. To ima prednost, saj lahko predznačenost števila še vedno ugotovimo, tako da pogledamo prvi bit – 0 pomeni nenegativno, 1 pa negativno (le preostanek se drugače interpretira).

Naš razpon števil torej izgleda takole:

bitni zapis	nepredznačeno število	predznačeno število
00000000	0	0
00000001	1	1
00000010	2	2
⋮	⋮	⋮
01111110	126	126
01111111	127	127
10000000	128	-128
10000001	129	-127
10000010	130	-126
⋮	⋮	⋮
11111110	254	-2
11111111	255	-1

Zanimiva posledica takega zapisa je, kaj se zgodi, če imamo predznačeno celo 8-bitno število, ki je na začetku 0 in ga povečujemo za 1 v neskončni zanki. Vrednost bo rasla do $127 = 01111111_{(2)}$, nakar bo postala 10000000, kar si interpretiramo kot -128. Ko na desni strani prekoračimo največjo vrednost, pridemo ven pri najmanjši vrednosti. Če sedaj nadaljujemo, bo naslednja vrednost, ko prištejemo 1, enaka 10000001, kar si interpretiramo kot -127. Nato bo sledila 10000010, kar je -126. Vidimo, da se povečevanje pravilno obnaša, razen ko preskoči (kar ne drži pri predstavitvi, opisani na začetku). To pomeni, da lahko računalnik s števili pri seštevanju in odštevanju dela, kot da so pozitivna, in samo na koncu drugače pogleda na rezultat.

Naredimo en primer s polnimi 32-bitnimi števili. Najprej izračunajmo razpon predstavljivih števil v n-bitnem sistemu. V zadnjih $n-1$ bitov kot običajno zapišemo števila od 0 do $2^{n-1}-1$. Preostala števila od -2^{n-1} do -1 so negativna. V 32-bitnem sistemu je torej največje število $2^{31}-1 = 2147483647$, najmanjše pa $-2^{31} = -2147483648$.

Primer, ki si ga je enostavno zapomniti, je število z zapisom

- 11111111 11111111 11111111 11111111.

To število je -1, kar hitro vidimo na dva načina. Kot pozitivno število je enako $2^{32}-1$, torej je njegova vrednost $2^{32}-(2^{32}-1) = 1$, obravnavamo pa ga kot negativno, ker ima prvi bit 1. Še lažje, pogledamo, kaj se zgodi, če prištejemo 1: dobimo same 0 in enico, ki pade čez rob – torej je to število plus 1 enako 0 in je število torej -1.

Za vajo si sedaj interpretirajmo še število z zapisom

- 10100011 01011000 10110001 10101001.

Običajno interpretirano je to število $2\,740\,498\,857$. Toda vidimo, da ima na prvem mestu 1, in si ga moramo interpretirati kot negativno: izračunamo $2^{32} - 2\,740\,498\,857 = 1\,554\,468\,439$ in vemo, da zgornji zapis predstavlja -1554468439. S tem lahko tudi seštevamo, kot da delamo s pozitivnimi števili. Izračunajmo na ta način

- $-1554468439 + (-5)$,

torej $2\,740\,498\,857 + 4\,294\,967\,291 = 7\,035\,466\,148$, kar v bitih izgleda kot

$$
\begin{array}{rl}
 & 10100011\ 01011000\ 10110001\ 10101001 \\
+ & 11111111\ 11111111\ 11111111\ 11111011 \\
= 1 & 10100011\ 01011000\ 10110001\ 10100100
\end{array}
$$

Enica, ki gleda čez, odpade in preostane vrednost, ki si jo interpretiramo kot -1554468444, kar je pravilen rezultat. Enako velja tudi za prištevanje pozitivnih števil. Izračunajmo npr. $-1554468439 + 1554468444$ in pričakujemo rezultat 5. Res, $2\,740\,498\,857 + 1\,554\,468\,444 = 4\,294\,967\,301 = 2^{32} + 5$, oz. v dvojiškem

$$
\begin{aligned}
&\ 10100011\ 01011000\ 10110001\ 10101001\\
&+\ 01011100\ 10100111\ 01001110\ 01011100\\
&=1\ 00000000\ 00000000\ 00000000\ 00000101,
\end{aligned}
$$

kar je po tem, ko odrežemo enico, enako 5.

Za konec še trik, kako lahko hitro dobimo bitni zapis nasprotnega števila, če že poznamo bitni zapis originala. Postopek gre takole: vzamemo bitni zapis originala in obrnemo vse bite (0 postane 1 in obratno). Nato prištejemo 1.

Najprej preizkusimo na primeru, potem pa razložimo, zakaj deluje. Vzemimo število 19 z zapisom

- 00000000 00000000 00000000 00010011.

Obrnemo bite in dobimo

- 11111111 11111111 11111111 11101100.

Prištejemo 1, dobimo

- 11111111 11111111 11111111 11101101

in trdimo, da je to -19. Pa poglejmo: kot pozitivno število je to enako $4\,294\,967\,277$, toda ko ga seštejemo z 19 dobimo točno 2^{32}, kar je v 32-bitnih številih enako kot 0, torej je moralo število res biti -19.

Premislimo še, zakaj postopek res deluje. Imejmo na začetku število X, obrat bitov pa označimo z $\sim X$. Pokazati želimo, da je $\sim X + 1$ nasprotno število od X. To je najlažje storiti tako, da ju seštejemo, in moramo dobiti 0. Poglejmo, kaj se zgodi, ko seštevamo $\sim X$ in X. Ker so vsi biti nasprotni, je rezultat vedno enak $11111\ldots11$. Ko temu prištejemo 1, dobimo ravno same ničle in enico, ki pade čez rob, torej je rezultat res 0.

Literatura

[1] D. Cohen, *On holy wars and a plea for peace*, Computer, 14(10), 48–54, 1981, dostopno na `www.ietf.org/rfc/ien/ien137.txt`, ogled: 5. 8. 2020.

× × ×

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 47/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka je **Algoritem.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Vid Kavčič iz Črnomlja, Martin Mah iz Šmartnega pri Litiji in Ema Hajnšek iz Ljubljane, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

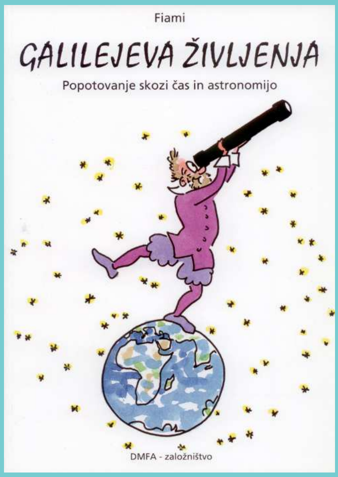
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.