

Tetraedrsko število 2024



BOŠTJAN KUZMAN

→ Letnica 2024 se kar sama od sebe ponuja kot navdih za tokratni GeoGebrin kotiček, saj ima število 2024 številne zanimive lastnosti. Ena izmed njih je ta, da lahko 2024 okroglih pomaranč zložimo v obliko pravega tetraedra, tako da je na vsakem robu 22 pomaranč. Ker pa bi takšna količina pomaranč tehtala približno pol tone, bomo to konstrukcijo težko naredili z resničnimi pomaranči. Namesto tega jo lahko poskusimo narisati s pomočjo GeoGebre. Čeprav je končna rešitev kratka, pot do nje ni enostavna, zato predstavlja ravno pravšnji izziv za Presekove bralce.

Trikotniška in tetraedrska števila

Spomnimo se najprej trikotniških števil. Dobimo jih z zlaganjem pomaranč ali drugih enakih objektov v obliko enakostraničnega trikotnika. Za vsako naslednje število prejšnjemu trikotniku dodamo vrstico, v kateri je en objekt več kot v prejšnji vrstici. Trikotniško število T_n je torej enako vsoti prvih n naravnih

števil, ki jo znamo izračunati po formuli

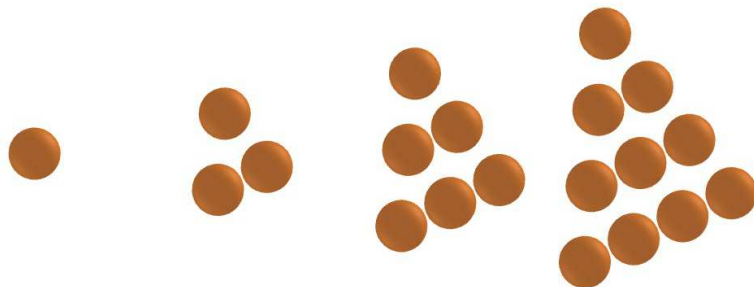
$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zaporedje trikotniških števil ima torej člene 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Tetraedrska števila pa dobimo z zlaganjem pomaranč v plasti, ki dajo tetraedrsko obliko. Plasti v tej konstrukciji torej predstavljajo zaporedna trikotniška števila, n -to tetraedrsko število pa je njihova vsota

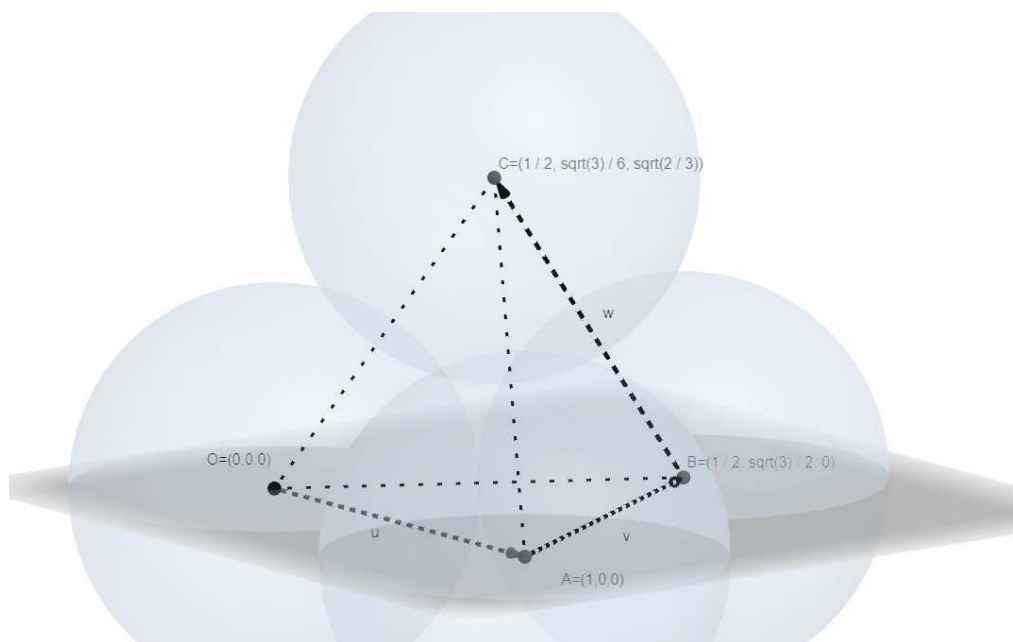
$$Tet(n) = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

S pomočjo že znanih trikotniških števil lahko brez težav izračunamo prvih nekaj tetraedrskih števil, ki so enaka 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ... Za splošno formulo za tetraedrska števila pa zapišimo $T_k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2}$ in se spomnimo formule za vsoto kvadratov $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Bralec lahko zdaj hitro preveri, da je iskana formula



SLIKA 1.

Prva štiri trikotniška števila $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ predstavljajo plasti četrtega tetraedrskega števila $Tet(4) = 20$.



SLIKA 2.

Pomikanje med središči kroglic poteka v smeri treh vektorjev na robovih pravilnega tetraedra.

za n -to tetraedrsko število

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Tet}(n) &= \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Iz formule sledi, da je dvaindvajseto tetraedrsko število enako $\text{Tet}(22) = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{6} = 2024$.

Konstrukcija tetraedrskih števil

Za konstrukcijo bomo seveda uporabili GeoGebrin 3D-način. Ustvarili bomo trojno zaporedje, odvisno od treh parametrov, ki bodo določali položaj središča vsake kroglice. Pri pomikanju od središča do središča pa si bomo pomagali z ustrezno izbranimi baznimi vektorji na robovih pravilnega tetraedra, glej sliko 2.

Denimo, da sta $O(0,0,0)$ in $A(1,0,0)$ dve izmed oglišč pravilnega tetraedra. Če tretje oglišče B leži v ravnini xy in ima nenegativne koordinate, potem je

$B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, saj je trikotnik $\triangle OAB$ enakostraničen s stranico 1. Četrto oglišče C mora ležati navpično nad težiščem tega trikotnika, torej ima prvo koordinato $\frac{1}{2}$, drugo koordinato $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, tretjo koordinato z pa določimo tako, da bo razdalja točke $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, z)$ do točke $O(0,0,0)$ enaka 1. Kratek račun pokaže, da je $z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ in izberemo lahko $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Konstrukcija je zdaj naslednja:

1. Odpremo 3D pogled v GeoGebri in ustvarimo drsnik

$$n = \text{Drsnik}(1, 22, 1),$$

ki ga zaradi preglednosti najprej nastavimo na manjšo vrednost, npr. 5.

2. S pomočjo algebrskega okna vnesemo koordinate točk

$$O = (0, 0, 0),$$

$$A = (1, 0, 0),$$

$$B = (1/2, \text{sqrt}(3)/2, 0),$$

$$C = (1/2, \text{sqrt}(3)/6, \text{sqrt}(2/3)).$$


$$\begin{aligned} u &= \text{Vektor}(0, A), \\ v &= \text{Vektor}(A, B), \\ w &= \text{Vektor}(B, C). \end{aligned}$$

```
Zaporedje(
  Zaporedje(
    Zaporedje(
      Sfera(0+m*u+(l-1)*v+(k-1/2)*w,1/2),
      k,1,l),
    l,1,m),
  m,1,n).
```

ki nam n -to tetraedrsko število tudi izračuna, ustrezno tetraedrsko število pa s pomočjo orodja za besedilo postavimo na sliko.

× × ×

PRESEK **51** (2023/2024) 4