

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 22 (1994/1995)

Številka 6

Strani 321-326

Vilko Domajnko:

## ARITMETIKA S KVADRATI

Ključne besede: matematika, algebra, binarne operacije, kvadrati, seštevanje.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/22/1238-Domajnko.pdf>

© 1995 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## ARITMETIKA S KVADRATI

Geometrijskih likov ponavadi ne seštevamo, vsaj v običajnem smislu ne. V elementarni matematiki uporabljamo operacijo seštevanja največkrat le v številskih množicah; čeprav smo sicer navajeni seštevati tudi vektorje, funkcije, izraze, ...

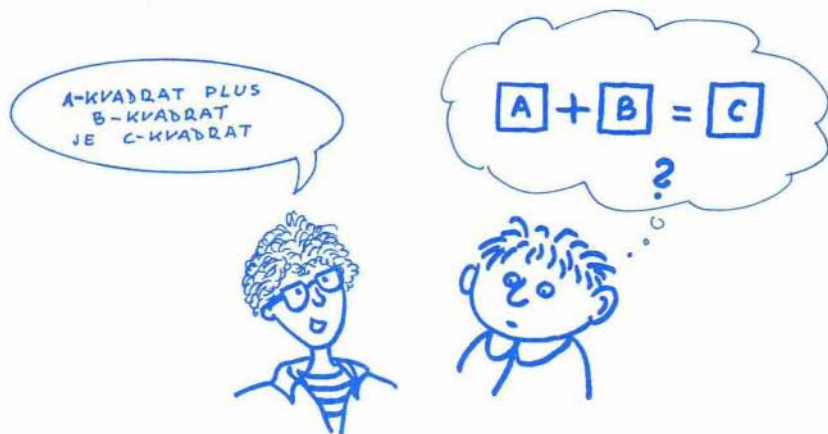
Toda spomnimo se samo, kako velikokrat na hitro povemo Pitagorov izrek:

*a kvadrat plus b kvadrat je c kvadrat.*

Mar ta stavek ne govori o natanko tistem, kar smo v uvodnem odstavku zanimali – o seštevanju kvadratov? In tudi nekoliko izboljšana "ljudska" verzija izreka ni bistveno drugačna:

*Vsota kvadratov nad katetama je enaka kvadratu nad hipotenuzo.*

Pravzaprav le še določeneje govori o – seštevanju kvadratov!

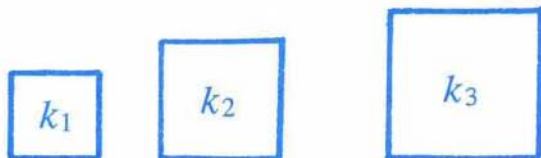


Kajpak vemo, da je posredi nesporazum, ki je bolj ali manj jezikovne narave. Po njegovi zaslugi se samo zdi, kakor da seštevamo in primerjamo geometrijske like, čeprav v resnici seštevamo in primerjamo zgolj njihove ploščine.

Pa izkoristimo ta jezikovni zaplet in definirajmo seštevanje kvadratov. Označimo s  $K$  množico vseh kvadratov v ravnini in se domenimo, da bo

vsota vsota  $k_1 \oplus k_2$  poljubno izbranih kvadratov  $k_1$  in  $k_2$  iz  $K$  spet kvadrat – in sicer tak, čigar številka vrednost ploščine je vsota številskih vrednosti ploščin kvadratov  $k_1$  in  $k_2$ :

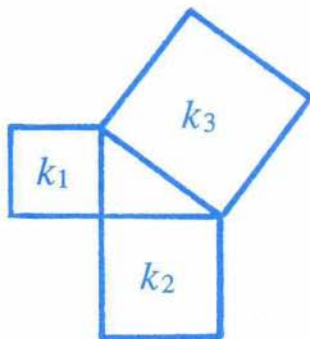
$$k_1 \oplus k_2 = k_3 \iff \text{pl}(k_1) + \text{pl}(k_2) = \text{pl}(k_3) \quad (k_1, k_2, k_3 \in K).$$



Pitagorov izrek nam pove, da je seštevanje kvadratov dokaj preprosto, če se ga lotimo zgolj po aritmetični plati – s pomočjo dolžin stranic kvadratov  $k_1$  in  $k_2$  izračunamo stranico njune vsote  $k_3$ . Tako je naša naloga že rešena. Nekoliko več truda pa zahteva geometrijski pristop po konstrukcijski poti. V tem primeru sta kvadrata  $k_1$  in  $k_2$  podana kot lika na ravnini, njuno vsoto pa smemo, kot običajno, poiskati le s pomočjo geometrijskega orodja. V nadaljevanju nas bo zanimal predvsem ta način.

Geometrijsko poiščemo vsoto kvadratov najelegantneje seveda s pomočjo *Pitagorovega izreka*. Če torej želimo sešteti par kvadratov, ni treba drugega, kakor konstruirati pravokotni trikotnik, čigar kateti imata dolžini enaki dolžinama njunih stranic. Vsota je potem kvadrat nad hipotenuzo.

Definicijo lahko zelo preprosto spoplošimo še na seštevanje treh ali več kvadratov. Tudi v tem primeru je rezultat spet kvadrat s ploščino, ki je vsota ploščin posameznih kvadratov:



$$k_1 \oplus k_2 = k_3$$

$$k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_n = k_{n+1} \iff \text{pl}(k_1) + \text{pl}(k_2) + \dots + \text{pl}(k_n) = \text{pl}(k_{n+1}) \\ (k_1, k_2, \dots, k_{n+1} \in K).$$

Na srečo je vsota kvadratov asociativna (glej nalogo 3), zato si lahko pri njeni konstrukciji pomagamo kar z zaporednim seštevanjem posameznih kvadratov. Tri kvadrate na primer seštejemo tako, kakor kaže risba na desni.

Podobno lahko definiramo tudi *razliko* kvadratov  $k_1 \Delta k_2$ . Ta naj bo tak kvadrat, katerega ploščina je (številska) razlika ploščin danih kvadratov:

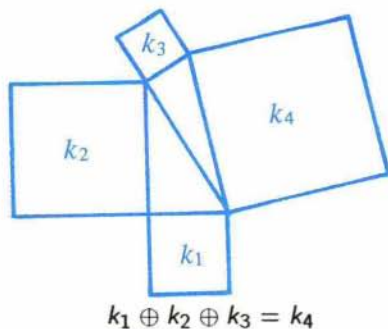
$$k_1 \Delta k_2 = k_3 \iff \text{pl}(k_1) - \text{pl}(k_2) = \text{pl}(k_3) \quad (k_1, k_2, k_3, \in K)$$

Zgornja definicija je očitno smiselna samo v primeru, ko je  $\text{pl}(k_1) \geq \text{pl}(k_2)$ . Pri konstrukciji razlike kvadratov se spet opremo na Pitagorov izrek. Konstruirati moramo pravokotni trikotnik z dano hipotenuzo (stranica prvega kvadrata) in z eno izmed katet (stranica drugega kvadrata). Preostala kateta je tedaj stranica razlike.

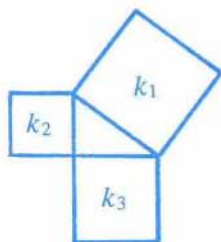
Oglejmo si naposled še *množenje kvadrata s številom*. Definiramo ga takole: produkt števila  $a$  in kvadrata  $k_1$  je tak kvadrat  $k_2$ , katerega ploščina je  $a$ -kratnik ploščine kvadrata  $k_1$ :

$$a \otimes k_1 = k_2 \iff a \cdot \text{pl}(k_1) = \text{pl}(k_2) \quad (a \in \mathbb{R}; k_1, k_2 \in K).$$

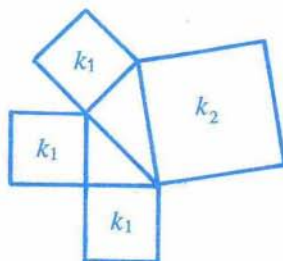
Množenje, ki smo si ga zamislili, je dokaj preprosto, če je število  $a$  naravno. V tem primeru si namreč lahko pomagamo kar s seštevanjem kvadratov, ki pa ga že poznamo – in to celo za primer poljubnega števila sumandov. Risba na desni prikazuje množenje kvadrata s 3.



$$k_1 \oplus k_2 \oplus k_3 = k_4$$



$$k_1 \Delta k_2 = k_3$$



$$3 \otimes k_1 = k_1 \oplus k_1 \oplus k_1 = k_2$$

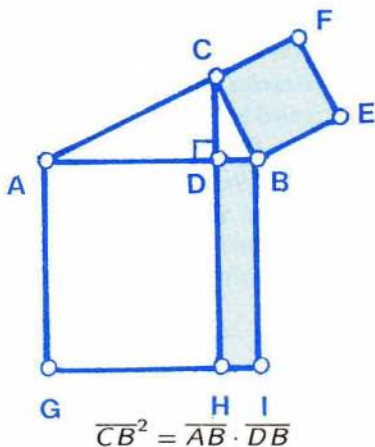
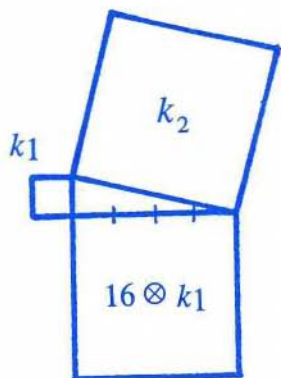
Pri množenju z nekoliko večjimi števili pa bi bil opisani postopek nedvomno precej neroden. Zato si v teh primerih pomagamo drugače. Oglejmo si, kako steče takšno množenje v primeru, ko je  $a = 17$ :

$$17 \otimes k_1 = (16 + 1) \otimes k_1 = (16 \otimes k_1) \oplus k_1 = k_2.$$

$16 \otimes k_1$  je kvadrat, ki ima 16-krat večjo ploščino od kvadrata  $k_1$ . Njegova stranica je torej 4-krat daljša od stranice kvadrata  $k_1$ . Torej pri danem kvadratu  $k_1$  konstruiramo njegov 17-kratnik tako, kakor kaže risba na desni.

Za konec opišimo še množenje kvadratov z racionalnimi števili oblike  $a = \frac{p}{q}$ , kjer sta  $p$  in  $q$  poljubni naravni števili in je  $p \leq q$ . V tem primeru se namesto na Pitagorov izrek raje opremo na prav tako dobro znani *Evklidov izrek* v pravokotnem trikotniku. Njegovo sporočilo preberemo na desni risbi.

Za ponazoritev te metode si oglejmo konstrukcijo produkta  $\frac{1}{5} \otimes k$ , kjer je  $k$  dani kvadrat. Naj bo na risbi na desni  $GIBA$  dani kvadrat  $k$ . Na stranici  $AB$  konstruiramo točko  $D$  tako, da je  $\overline{DB} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$ . Tedaj je očitno tudi ploščina pravokotnika  $HIBD$  enaka petini ploščine kvadrata  $GIBA$ . S pomočjo Talesovega izreka, da je obodni kot nad premerom pravi kot, konstruiramo pravokotni trikotnik  $\triangle ABC$ , kjer je  $DB$  pravokotna projekcija katete  $CB$  na hipotenuzo  $AB$ . Kvadrat s stranico  $CB$  je tedaj  $\frac{1}{5}$ -kratnik kvadrata  $k$ .



## Naloge

1. Na ravnini izberi kvadrata  $k_1$  in  $k_2$ . Zatem konstruiraj:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } k_1 \oplus k_2, & \text{b) } k_1 \Delta k_2 \text{ (ali } k_2 \Delta k_1), \\ \text{c) } (2 \otimes k_1) \oplus (3 \otimes k_2), & \text{d) } 6 \otimes k_1, \\ \text{e) } \frac{1}{3} \otimes k_1, & \text{f) } \frac{5}{6} \otimes k_1. \end{array}$$

2. Na ravnini izberi kvadrate  $k_1$ ,  $k_2$  in  $k_3$  tako, da boš lahko konstruiral tudi kvadrata  $k_1 \oplus k_2 \oplus k_3$  in  $k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$ .
3. Dokaži, da je vsota kvadratov asociativna; za poljubno trojico kvadratov  $k_1$ ,  $k_2$  in  $k_3$  torej velja:

$$(k_1 \oplus k_2) \oplus k_3 = k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3) = k_1 \oplus k_2 \oplus k_3.$$

4. Dokaži, da je vsota kvadratov tudi komutativna; za poljubno izbran par kvadratov  $k_1$  in  $k_2$  torej velja:

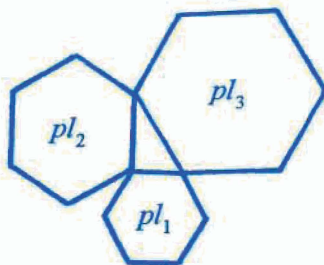
$$k_1 \oplus k_2 = k_2 \oplus k_1.$$

5. Kaj lahko rečeš o asociativnosti in kaj o komutativnosti razlike kvadratov?
6. Izberi na ravnini kvadrat  $k$ . Zatem konstruiraj:
- $\sqrt{3} \otimes k$ ,
  - $\sqrt{n} \otimes k$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).
7. Premisli, kako bi množil kvadrate s poljubnim nenegativnim realnim številom.
8. Posplošena verzija Pitagorovega izreka pravi:

*V pravokotnem trikotniku je za vsako naravno število  $n$  ( $n \geq 3$ ) vsota ploščin pravih  $n$ -kotnikov nad katetama enaka ploščini pravih  $n$ -kotnika nad hipotenuzo.*

Na naslednji strani je prikazan primer za  $n = 6$ .

- a) Dokaži izrek za  $n = 3$  in  $n = 6$ .
- b) Premisli, kako bi sešteval in odšteval poljubno izbrane pravilne  $n$ -kotnike. Podobno napravi tudi za množenje s številom.
- c) Premisli, kako bi seštel kvadrat in enakostranični trikotnik.



$$pl_1 + pl_2 = pl_3$$

*Vilko Domajnko*