

PREPOGIBANJE PAPIRJA, TRETJINJENJE KOTA IN MACLAURINOVA TRISEKTRISA

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2020): 14H45, 51M15

S prepogibanjem papirja lahko tretjinimo kot in pri tem na naraven način najdemo Maclaurinovo trisektriso. Kot lahko tretjinimo tudi z Maclaurinovo trisektriso, ki je nožiščna krivulja parabole, pa tudi inverzna slika hiperbole z razmerjem polosi $1/\sqrt{3}$ na primerni krožnici.

PAPER FOLDING, ANGLE TRISECTION, AND TRISECTRIX OF MACLAURIN

By paper folding we can trisect an angle and at the same time we find the trisectrix of Maclaurin in a natural way. The third of an angle can be constructed also by the trisectrix of Maclaurin which is the pedal curve of a parabola, and also the inverse of hyperbola with semiaxes ratio $1/\sqrt{3}$ on a suitable circle.

Uvod

V prispevku [6] smo spoznali, kako lahko s prepogibanjem papirja rešimo antični problem podvojitve kocke. Tokrat si bomo ogledali, kako s podobnim postopkom rešimo problem tretjinjenja kota. Poleg tega bomo spoznali Maclaurinovo trisektriso, krivuljo, ki se na naraven način, tako kot Slusova konhoida pri problemu podvojitve kocke, pojavi pri tretjinjenju kota z metodo prepogibanja papirja. Ugotovili bomo tudi, kako je Maclaurinova trisektrisa povezana s parabolo in hiperbolo.

O nerešljivosti treh antičnih geometrijskih problemov s šestilom in neoznačenim ravnilom lahko več preberemo v ustrezni matematični literaturi, na primer v [5].

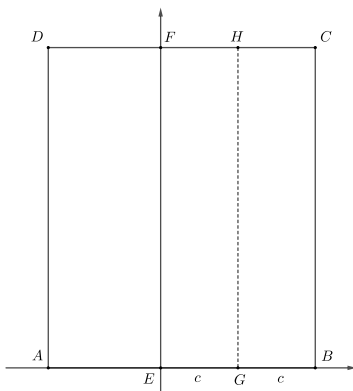
Tretjinjenje kota s prepogibanjem papirja

Opisali bomo tretjinjenje kota s prepogibanjem papirja po postopku, ki ga je razvil Hisashi Abe in ga objavil leta 1980 (več o tem v [3, 4]).

Naj ima naš osnovni list papirja obliko pravokotnika $ABCD$ s stranicama $a = |AB|$ in $b = |BC|$, pri čemer je $b \geq a$ (slika 1). Če je b v primerjavi z a

dovolj velik, lahko tretjinimo poljuben ostri kot. Izberemo poljubno točko E na stranici AB in pravokotnik prepognemo tako, da BC prekrije EF . Na ta način smo razpolovili daljici EB in FC . Če je $|EG| = c$, potem velja:

$$|EG| = |GB| = |FH| = |HC| = c.$$



Slika 1. Priprava pravokotnega lista papirja za tretjinjenje kota.

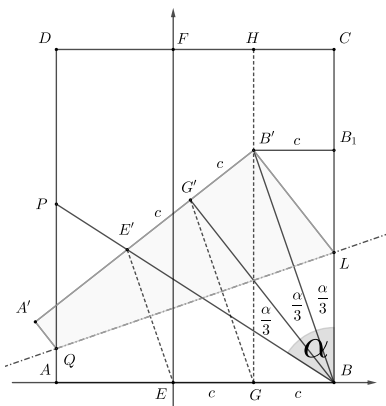
Izberimo točko P na stranici AD (slika 2) tako, da bo $\sphericalangle CBP = \alpha$ (ostri) kot, ki ga želimo tretjiniti. Najprej prepognemo pravokotnik tako, da oglišče B pade na daljico HG , točka E pa na daljico BP (slika 2). Prepogib seka rob pravokotnika v točkah Q in L . Kaj smo s tem naredili? Točke B , G , E in A smo zrcalili prek premice skozi točki Q in L in dobili ustrezne zrcalne točke B' , G' , E' in A' .

Ker je $|EG| = |GB| = c$, je tudi $|E'G'| = |G'B'| = c$. Zrcalna slika daljice EB je daljica $E'B'$, zrcalna slika daljice $B'G$ pa daljica $B'G'$. Pri tem je $B'G$ pravokotna na EB , $B'G'$ pa pravokotna na $E'B'$. Trikotnika $E'BG'$ in $B'BG'$ sta zato pravokotna in skladna, ker se ujemata v dolžinah katet $E'G'$ ter $G'B'$ in imata skupno kateto $B'G'$. To pa pomeni, da sta kota $\sphericalangle G'BE'$ in $\sphericalangle B'BG'$ skladna, oziroma da je trikotnik $B'E'B$ enakokrak in je $B'G'$ njegova simetrala.

Naj bo B_1 pravokotna projekcija točke B' na daljico BC . Zato je $|B'B_1| = c$. Pravokotna trikotnika $B'BB_1$ in $B'BG'$ sta tudi skladna, ker se ujemata v dolžinah katet $G'B'$ ter $B'B_1$ in imata skupno hipotenuzo BB' .

Torej velja relacija

$$\sphericalangle B_1BB' = \sphericalangle B'BG' = \sphericalangle G'BE' = \frac{\alpha}{3},$$



Slika 2. Tretjinjenje ostrega kota.

kar pomeni, da nam je uspelo tretjiniti (ostri) kot α . Pri izbiri $P = A$ opisana metoda pripelje do tretjinjenja pravega kota (ki je sicer enostavno).

Topi kot lahko tretjinimo tako, da ga najprej razpolovimo, polovico kota tretjinimo, nato pa dobljeni kot podvojimo. Obstajajo pa tudi metode s prepogibanjem papirja, s katerimi topi kot tretjinimo neposredno. Več o tem na primer v [2], pa tudi v nadaljevanju.

Prepogibanje papirja in Maclaurinova trisektrisa

Sedaj se posvetimo še »analitični« obravnavi tretjinjenja kota. Pravokotnik $ABCD$ (slika 1) postavimo v koordinatni sistem tako, da bo izhodišče v točki E in bosta točki B in F na abscisni in ordinatni osi.

Na daljici GH izberemo poljubno točko B' (slika 3) in narišemo simetralo s daljice $B'B$. Z R označimo razpolovišče daljice $B'B$, z E' pa zrcalno sliko točke E prek simetralske s . **Zanimalo nas bo, kakšno krivuljo opiše E' , ko B' teče po daljici GH .** Opazimo, da bo opisana konstrukcija v tesni zvezi s tretjinjenjem kota, namreč če je B' »dovolj visoko« na GH , dobljena točka E' sovпада s točko E' prejšnje konstrukcije in bo veljalo $\sphericalangle CBE' = 3\sphericalangle CBB'$.

Za izbrano točko B' na daljici GH lahko zapišemo koordinate točk B' , B in R :

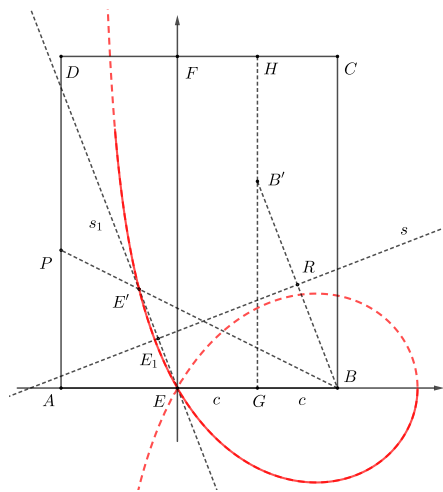
$$B'(c, t), \quad B(2c, 0), \quad R\left(\frac{3c}{2}, \frac{t}{2}\right).$$

Smerni koeficient premice skozi točki B in B' , pa tudi premice s_1 skozi E in E' (slika 3), je enak $-t/c$. Zato je smerni koeficient simetrale s enak c/t in njena enačba je

$$y - \frac{t}{2} = \frac{c}{t} \left(x - \frac{3c}{2} \right), \quad (1)$$

enačba s_1 pa je

$$y = -\frac{t}{c}x. \quad (2)$$



Slika 3. Ko točka B' potuje po daljici HG , točka E' opisuje krivuljo (polna črta) na Maclaurinovi trisektrisi (črtkana črta).

Koordinati x_1 in y_1 točke E_1 , presečišča premic s in s_1 , dobimo kot rešitev sistema enačb (1) in (2):

$$x_1 = \frac{c(3c^2 - t^2)}{2(c^2 + t^2)}, \quad y_1 = \frac{t(t^2 - 3c^2)}{2(c^2 + t^2)}.$$

Koordinati točke E' sta dvakratnika koordinat x_1 in y_1 . Točka E' je torej podana s koordinatama

$$x = \frac{c(3c^2 - t^2)}{c^2 + t^2}, \quad y = \frac{t(t^2 - 3c^2)}{c^2 + t^2}. \quad (3)$$

Z zamenjavo parametra $t \rightarrow -ct$ dobimo parametrično izraženo krivuljo:

$$x(t) = \frac{c(3-t^2)}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{ct(3-t^2)}{1+t^2}, \quad (4)$$

ki jo imenujemo *Maclaurinova¹ trisektrisa*. Če iz (2) izrazimo $t = -cy/x$ in to vstavimo v eno od enačb (3), po poenostavitvi dobimo enačbo Maclaurinove trisektrise v implicitni obliki:

$$x(x^2 + y^2) = c(3x^2 - y^2). \quad (5)$$

Zapišimo Maclaurinovo trisektriso še v polarni obliki. V enačbo (5) vstavimo $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$ in po krajšem računu izrazimo:

$$r(\varphi) = c \left(4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right). \quad (6)$$

Enačbo (6) lahko s formulama za sinus dvojnega in trojnega kota pretvorimo v obliko:

$$r(\varphi) = 2c \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}. \quad (7)$$

Maclaurinova trisektrisa je simetrična glede na abscisno os, ki jo seka v temenu $A(3c, 0)$ in v koordinatnem izhodišču $E(0, 0)$. V točki E trisektrisa seka samo sebe pod kotom $2\pi/3$ oziroma $\pi/3$. Slednje lahko ohlapno utemeljimo s sicer preprostim intuitivnim razmislekom. Ko smo dovolj blizu točke E , sta koordinati x in y zelo blizu 0. Ko se x in y približujeta 0, se leva stran enačbe (5) hitreje (red 3) približuje 0 kot desna (red 2) stran. Zato lahko rečemo, da ima zelo blizu točke E enačba (5) približno obliko $0 = 3x^2 - y^2$. Enačba $3x^2 - y^2 = (\sqrt{3}x + y)(\sqrt{3}x - y) = 0$ pa predstavlja premici $y = \pm\sqrt{3}x$, ki sta dejanski tangenti Maclaurinove trisektrise v točki E in se sekata pod kotom $2\pi/3$ oziroma $\pi/3$.

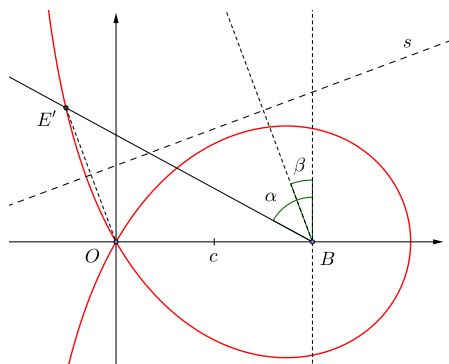
Iz enačb (3) razberemo: ko se $|t|$ približuje neskončnosti, se $|y|$ tudi približuje neskončnosti, medtem ko se x približuje vrednosti $-c$. To pomeni, da ima Maclaurinova trisektrisa za navpično asimptoto premico $x = -c$.

Kateri del Maclaurinove trisektrise opiše točka E' pri različnih vrednostih parametra t ? Iz enačb (3) razberemo, kakšne vrednosti zavzameta x in

¹Colin Maclaurin (1698–1746) je bil škotski matematik.

y pri različnih vrednostih t :

za	$t \leq -c\sqrt{3}$	sta	$x \leq 0$ in $y \leq 0$	(tretji kvadrant),
za	$-c\sqrt{3} \leq t \leq 0$	sta	$0 \leq x$ in $0 \leq y$	(prvi kvadrant),
za	$0 \leq t \leq c\sqrt{3}$	sta	$0 \leq x$ in $y \leq 0$	(četrti kvadrant),
za	$c\sqrt{3} \leq t$	sta	$x \leq 0$ in $0 \leq y$	(drugi kvadrant).



Slika 4. Tretjinjenje ostrega kota z Maclaurinovo trisektriso.

Ostri kot smo znali tretjiniti s prepogibanjem papirja. Ob razumevanju povedanega lahko tretjinimo ostre kote tudi ob predpostavki poznavanja Maclaurinove trisektrise. Začnemo v običajnem koordinatnem sistemu in z Maclaurinovo trisektriso (slika 4) s konstanto c , ki je podana z enačbo (5). Načrtamo premico $x = 2c$. Premica ustreza nosilki BC na sliki 3, katere presečišče z osjo x označimo (analogno s sliko 3) z B . Kot α , ki ga želimo tretjiniti, odmerimo od premice $x = 2c$ tako, da ima vrh v B , drugi krak kota pa seka (bolj oddaljeni del) trisektrise v točki E' . Narišemo simetralo s daljice od točke E' do koordinatnega izhodišča O . Pravokotnica na dobljeno simetralo iz točke B določa kot $\beta = \alpha/3$. Z opisano konstrukcijo v praksi ne moremo tretjiniti majhnih kotov. Za majhne kote je namreč ordinata točke B' zelo velika.

Maclaurinova trisektrisa po točkah in tretjinjenje kota

Oglejmo si še, kako pridemo do Maclaurinove trisektrise z načrtovanjem po točkah v pravokotnem koordinatnem sistemu. Že prej smo ugotovili, da Maclaurinova trisektrisa seka samo sebe pod kotom $2\pi/3$ oziroma $\pi/3$. Iz

enačbe (7) zlahka povzamemo, da je $r(-\pi/3) = r(\pi/3) = 0$ in zato $r(\varphi)$ določa Maclaurinovo trisektriso

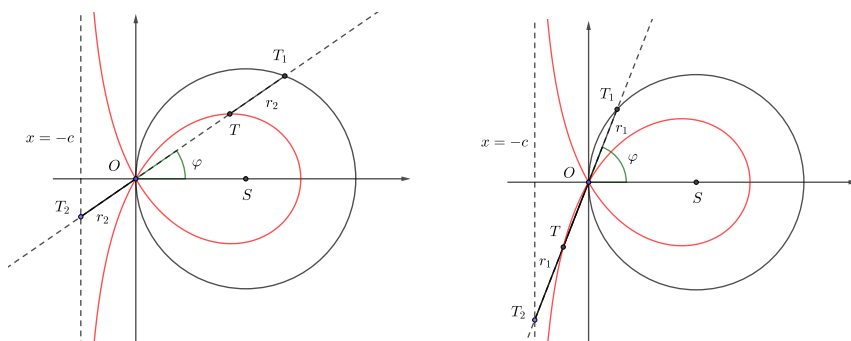
v prvem kvadrantu za $0 \leq \varphi \leq \pi/3$,
 v drugem kvadrantu za $\pi/2 < \varphi \leq 2\pi/3$ oziroma za $-\pi/2 < \varphi \leq -\pi/3$,
 v tretjem kvadrantu za $-2\pi/3 \leq \varphi < -\pi/2$ oziroma za $\pi/3 \leq \varphi < \pi/2$,
 v četrtem kvadrantu za $-\pi/3 \leq \varphi \leq 0$.

Pri tem smo v drugem in tretjem kvadrantu upoštevali, da se pri povečanju argumenta funkcije \cos za π spremeni njen predznak. Tako smo z majhno »zlorabo« polarnih koordinat (polarni radij $r(\varphi)$ je po definiciji razdalja in ne more biti negativna) dosegli, da lahko za definicijsko območje krivulje (6) namesto $[-2\pi/3, -\pi/2] \cup [-\pi/3, \pi/3] \cup (\pi/2, 2\pi/3]$ vzamemo interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Pri tem negativno vrednost $r(\varphi)$ odmerimo kot pozitivno na nasprotnem poltraku. »Zaključena zanka« Maclaurinove trisektrise v četrtem in prvem kvadrantu je opisana z $r(\varphi)$ za $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$. Krožnica $(x - 2c)^2 + y^2 = 4c^2$ in premica $x = -c$ se v polarni obliki zapišeta z enačbama $r_1(\varphi) = 4c \cos \varphi$ in $r_2(\varphi) = -c/\cos \varphi$ za $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pri tem smo pri premici zagrešili enako »zlorabo« polarnih koordinat kot zgoraj. Če polarno obliko enačbe Maclaurinove trisektrise (6) zapišemo v obliki

$$r(\varphi) = 4c \cos \varphi - \frac{c}{\cos \varphi},$$

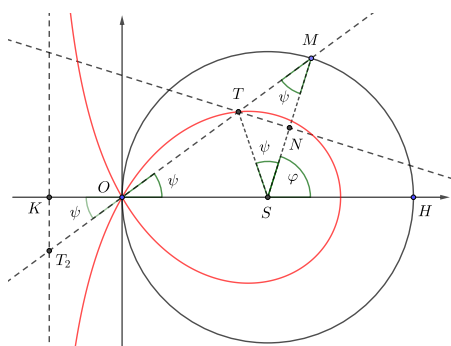
dobimo

$$r(\varphi) = r_1(\varphi) + r_2(\varphi). \quad (8)$$



Slika 5. Risanje Maclaurinove trisektrise po točkah.

Enačba določa točke na Maclaurinovi trisektrisi kot razliko razdalj na ustrezni nosilki poltraka od izhodišča do krožnice oziroma do premice $x = -c$. Pri poltraku, določenem s kotom φ za $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$, dobimo razdaljo od izhodišča do točke T na Maclaurinovi trisektrisi tako, da od razdalje od O do T_1 odštejemo razdaljo od O do T_2 (slika 5 levo). Razdalja med T in T_1 je torej $|r_2(\varphi)|$. Pri poltraku, določenem s kotom φ za $-\pi/2 < \varphi \leq -\pi/3$ in $\pi/3 \leq \varphi < \pi/2$, pa dobimo razdaljo od izhodišča do točke T na Maclaurinovi trisektrisi tako, da od razdalje od O do T_2 odštejemo razdaljo od O do T_1 (slika 5 desno). Razdalja med T in T_2 je torej $|r_1(\varphi)|$.



Slika 6. Še eno risanje Maclaurinove trisektrise po točkah.

Opišimo še en način risanja Maclaurinove trisektrise po točkah (slika 6). Spet narišemo krožnico s središčem v točki $S(2c, 0)$ in polmerom $2c$. Za kot $0 \leq \varphi \leq \pi$ izberemo točko M na krožnici tako, da bo SM z abscisno osjo oklepala kot φ . Presečišče nosilke daljice OM in simetrale daljice SM označimo s T .

Pokažimo, da T leži na Maclaurinovi trisektrisi. Ker sta ψ in φ , kot sta označena na sliki 6, obodni in središčni kot nad isto tetivo, velja $\varphi = 2\psi$. Nosilka daljice OM oklepa z abscisno osjo kot ψ . Točka M ima koordinati $x_M = 2c + 2c \cos \varphi$ in $y_M = 2c \sin \varphi$, točka N pa $x_N = 2c + c \cos \varphi$ in $y_N = c \sin \varphi$. Nosilka OM ima enačbo $y = x \operatorname{tg} \psi$, simetrala daljice SM pa $y - c \sin \varphi = -\operatorname{ctg} \varphi (x - 2c - c \cos \varphi)$. Izračunamo koordinati presečišča premic in dobimo $T(c(1 + 2 \cos \varphi), c(1 + 2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \psi)$. Če izrazimo

$$1 + 2 \cos 2\psi = 3 \cos^2 \psi - \sin^2 \psi = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}$$

in vpeljemo $t = \operatorname{tg} \psi$, dobimo znani enačbi (4):

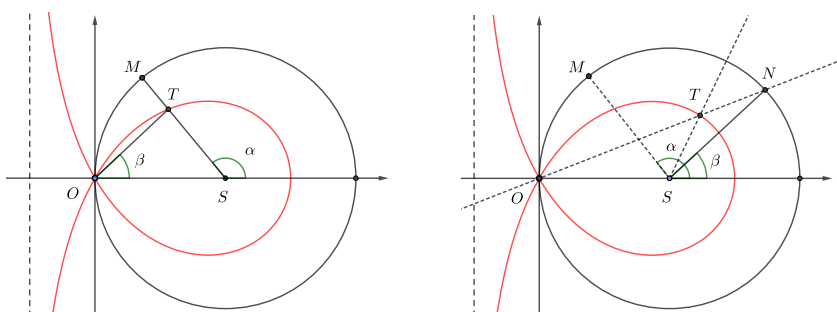
$$x(t) = \frac{c(3-t^2)}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{ct(3-t^2)}{1+t^2}.$$

Zanimivo je, da lahko zadnjo ugotovitev zelo elegantno dokažemo tudi povsem geometrijsko. Opazimo namreč, da sta trikotnika SMT in MOS enakokraka. Od tu in zaradi sovršnosti takoj sledi skladnost štirih na sliki 6 označenih kotov ψ . Ker je dolžina MN polovica dolžine MS , ki je $2c$, sta daljici OK in MN skladni in skladna sta tudi trikotnika MTN in OT_2K . Kot posledica razlage enačbe (8) sledi sklep, da je T na Maclaurinovi trisektrisi. Zelo podobni geometrijski argumenti veljajo tudi v primeru, ko je $-\pi/2 < \psi \leq -\pi/3$ ali $\pi/3 \leq \psi < \pi/2$.

Ponovimo, da velja $\varphi = 2\psi$, saj je φ središčni in ψ obodni kot nad istim lokom. Glede na oznake na sliki 6 je torej $\sphericalangle HST = 3\sphericalangle SOT$.

O tretjinjenju kota s pomočjo Maclaurinove trisektrise smo govorili že pred razdelkom o »načrtovanju Maclaurinove trisektrise po točkah«. Zadnja ugotovitev pa ponuja nov eleganten način za tretjinjenje kota s pomočjo Maclaurinove trisektrise za poljubne kote $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Če namreč začnemo z Maclaurinovo trisektriso s konstanto c in krožnico s središčem v točki $S(2c, 0)$ in polmerom $2c$ ter kot α , ki ga želimo tretjiniti, narišemo z vrhom v S tako, da je en krak na abscisni osi, drugi krak pa določa točko M na krožnici, nam daljica OT (slika 7 levo) določa kot $\beta = \alpha/3$.



Slika 7. Tretjinjenje kota z Maclaurinovo trisektriso: $\beta = \alpha/3$.

Tretjino kota α je s pomočjo Maclaurinove trisektrise mogoče dobiti še na en način. Če začnemo podobno kot v pravkar opisanem primeru

in razpolovimo kot α , dobimo točko T (slika 7 desno). Nosilka OT seka krožnico v točki N . Daljica SN določa kot $\beta = \alpha/3$. Namreč, trikotnika SNT in NOS sta enakokraka (primerjaj s trikotnikom SMT na sliki 6) in zato velja $\sphericalangle NST = \sphericalangle TNS = \sphericalangle SON$. Ker sta $\sphericalangle SON$ obodni in β središčni kot nad istim lokom, velja $\beta = 2\sphericalangle SON$. Velja tudi $\sphericalangle NST + \beta = \alpha/2$, kar pa že pomeni $\beta = \alpha/3$.

Ploščina

S pomočjo doslej povedanega zlahka izračunamo tudi ploščine nekaterih likov, ki jih omejuje Maclaurinova trisektrisa. Ploščino S_1 lista v prvem in četrtem kvadrantu (slika 8) najlažje izračunamo z uporabo polarne zapisa (6) in formule za izračun izseka krivulje, podane v polarni obliki

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

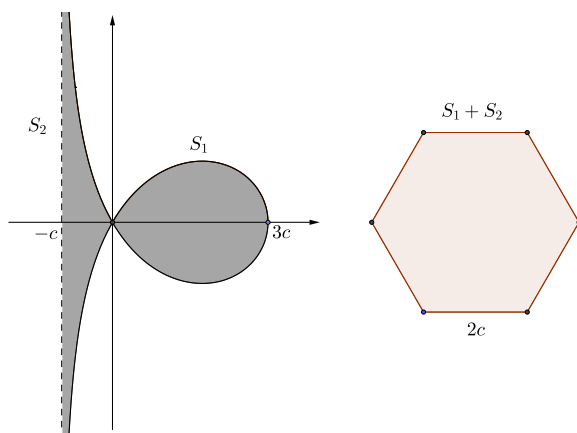
Glede na znana dejstva je

$$S_1 = 2 \cdot \frac{c^2}{2} \int_0^{\pi/3} \left(4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Integral se s klasičnimi srednješolskimi metodami enostavno izračuna in dobimo $S_1 = 3c^2\sqrt{3}$. Podobno se izračuna ploščina S_2 med Maclaurinovo trisektriso in njeno asimptoto kot »posplošeni integral« (območje ni omejeno). Ob upoštevanju (8) in s pogledom na sliko 5 (desno) dobimo

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r_2^2(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (r_2^2(\varphi) - r^2(\varphi)) d\varphi \right] \\ &= c^2\sqrt{3} + 8c^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - 2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 3c^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pri tem je prvi integral kar ploščina trikotnika, drugi integral pa zlahka izračunamo. Zanimivo, da sta ploščini S_1 in S_2 enaki. Mogoče je zanimivo opaziti, da je $S_1 + S_2$ enaka ploščini pravilnega šestkotnika s stranico $2c$.



Slika 8. List Maclaurinove trisektrise in lik med trisektriso in njeno asimptoto imata enaki ploščini.

Nožiščna krivulja parabole

Maclaurinova trisektrisa je tudi nožiščna krivulja parabole. To pomeni, da predstavlja množico pravokotnih projekcij neke točke P na vse tangente parabole (glej na primer [1, 7]).

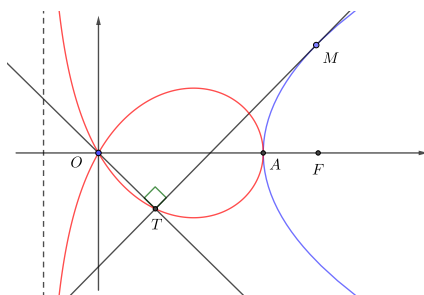
V koordinatnem sistemu narišimo parabolo, ki ima enačbo $y^2 = 4c(x - 3c)$, kjer je c pozitivna konstanta. Parabola ima teme v točki $A(3c, 0)$, gorišče v $F(4c, 0)$, ordinato v gorišču $p = 2c$ in za vodnico premico $x = 2c$ (slika 9). Na paraboli izberemo točko $M(s, t)$ in narišemo tangento na parabolo. Iz točke $O(0, 0)$ narišemo še pravokotnico na tangento. Dobimo presečišče T . Ko se točka M giblje po paraboli, opisuje točka T krivuljo, katere parametričnih enačb ni težko najti.

Tangenta na parabolo v točki M in pravokotnica nanjo iz točke $O(0, 0)$ sta premici z enačbama

$$y - t = \frac{2c}{t}(x - s), \quad y = -\frac{t}{2c}x.$$

Presečišče teh dveh premic je točka T s koordinatama

$$x_T = \frac{2c(2cs - t^2)}{4c^2 + t^2}, \quad y_T = \frac{t(t^2 - 2cs)}{4c^2 + t^2}.$$



Slika 9. Nožiščna krivulja parabole $y^2 = 4c(x - 3c)$ glede na točko O je Maclaurinova trisektrisa.

Ker točka M leži na paraboli, velja zveza $t^2 = 4c(s - 3c) = 4cs - 12c^2$, iz katere sledi $2cs = t^2/2 + 6c^2$, kar vstavimo v prejšnji enačbi in po poenostavitvi dobimo:

$$x_T = \frac{c(12c^2 - t^2)}{4c^2 + t^2}, \quad y_T = \frac{t(t^2 - 12c^2)}{2(4c^2 + t^2)}.$$

Z zamenjavo $t \rightarrow -2ct$ dobimo ravno parametrično izraženo Maclaurinovo trisektriso

$$x(t) = \frac{c(3 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y(t) = \frac{ct(3 - t^2)}{1 + t^2},$$

kot jo poznamo iz (4).

Povsem analogno bi izračunali tudi nožiščno krivuljo glede na koordinatno izhodišče za parabolo $y^2 = 2p(x - q)$ ($p \neq 0$), ki ima teme v točki $A(q, 0)$. Tedaj bi dobili krivuljo, podano z enačbama

$$x(t) = \frac{2q - pt^2}{2(1 + t^2)}, \quad y(t) = \frac{t(2q - pt^2)}{2(1 + t^2)}.$$

Ta krivulja sovpada z Maclaurinovo trisektriso v obravnavanem primeru, ko je $3p = 2q$. To pomeni, da je takrat q trikratnik razdalje od gorišča do temena parabole. V primeru $3p = -2q$ bi dobili Slusovo konhoido, za $p = 2q$ strofoido, za $q = 0$ pri poljubnem p pa Dioklovo cisoido. Več o teh krivuljah najdemo na primer v [7].

Maclaurinova trisektrisa in inverzija

Zanimivo je na Maclaurinovo trisektriso pogledati še s stališča inverzije. Začnimo spet z Maclaurinovo trisektriso (5). Spomnimo se, da seka samo

sebe v izhodišču $O = (0, 0)$. Inverzija glede na krožnico $x^2 + y^2 = R^2$ je določena s preslikavo

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right). \quad (9)$$

Inverzija preslika O v neskončno oddaljeno točko in neskončno oddaljeno točko v O . Točke na krožnici $x^2 + y^2 = R^2$ so za inverzijo (9) negibne. Inverzija preslika premice in krožnice v premice ali krožnice.

Z upoštevanjem preslikave (9) iz (5) in s krajšim računom dobimo enačbo

$$3cx^2 - R^2x - cy^2 = 0.$$

Pretvorimo jo v klasično obliko

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ki predstavlja enačbo hiperbole s središčem v točki $S(p, 0)$. Brez težav zapišemo njeni polosi a in b ter linearno ekscentričnost e :

$$a = \frac{R^2}{6c}, \quad b = \frac{R^2}{2c\sqrt{3}}, \quad e = \frac{R^2}{3c}.$$

Prav tako koordinate središča S , temen A in B ter gorišč F_1 in F_2 :

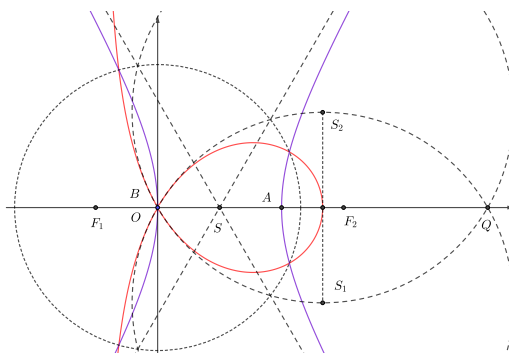
$$S \left(\frac{R^2}{6c}, 0 \right), \quad A \left(\frac{R^2}{3c}, 0 \right), \quad B(0, 0), \quad F_1 \left(-\frac{R^2}{6c}, 0 \right), \quad F_2 \left(\frac{R^2}{2c}, 0 \right).$$

Na sliki 10 je prikazana hiperbola, ki ustreza $R < 3c$.

Zanimivo je, da smo za vsak R dobili hiperbolo. Še več, iz zgornjega računa je enostavno preveriti, da imajo vse tako dobljene hiperbole konstantno razmerje polosi $a/b = 1/\sqrt{3}$ oziroma asimptoti s smernima koeficientoma $\sqrt{3}$ in $-\sqrt{3}$, in sicer:

$$y = \pm\sqrt{3} \left(x - \frac{R^2}{6c} \right).$$

Tangenti v točki O na Maclaurinovo trisektriso sta asimptotama vzporedni in se pri inverziji ne spremenita. Preprost račun takoj pokaže, da se asimptoti z inverzijo za vsak R preslikata v krožnici s središčema v točkah $S_{1,2}(3c, \mp c\sqrt{3})$ in polmerom $R_i = 2c\sqrt{3}$. Središče prve krožnice leži na drugi krožnici in obratno. Območje, ki ga ograjujeta, je v zgodovini geometrije



Slika 10. Inverzna slika Maclaurinove trisektrise je hiperbola.

znano kot »vesica piscis«². Središči teh krožnic in teme Maclaurinove trisektrise so kolinearne točke. Krožnici se sekata v točkah $O(0,0)$ in $Q(6c,0)$ pod kotom $\pi/3$ oziroma $2\pi/3$. Točki S in Q sta si inverzni. Vse se lepo sklada z dejstvom, da inverzija ohranja kote in dotike med krivuljami.

Polmera $OS_{1,2}$ določata v točki O normalni na Maclaurinovo trisektriso in R_i je celo njen krivinski polmer v O , kar potrди tudi račun z ustrezno formulo. Inverzni sliki asimptot hiperbole sta zato pritisnjeni krožnici na Maclaurinovo trisektriso v O . Zato ni nič čudnega, da sta krožnici neodvisni od R . Maclaurinova trisektrisa s pritisnjenima krožnicama v O vred se z inverzijo preslikajo v hiperbolo in njeni asimptoti. Posamezno krožnico lahko tudi geometrijsko konstruiramo, ker poteka skozi O in presečišči asimptote s krožnico $x^2 + y^2 = R^2$.

LITERATURA

- [1] D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen: Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen*, Springer Spektrum, 2017, str. 62–64.
- [2] T. Hull, *Project Origami*, Activities for Exploring Mathematics, Second Edition, CRC Press, 2013, str. 67.
- [3] K. Fushimi, *Trisection of an angle by H. Abe*, The Science of Origami, A Supplement to Saiensu (japonska verzija revije Scientific American) October 1980, str. 8.
- [4] R. J. Lang, *Origami and Geometric Constructions*, <http://www.langorigami.com>, ogleđ 25. 9. 2020).
- [5] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer, New York, 1998, str. 41–50.
- [6] M. Razpet in N. Razpet, *Prepogibanje papirja, podvojitev kocke in Slusova konhoida*, Obzornik. mat. fiz. **67** (2020), str. 41–51.
- [7] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

²V latinščini: ribji mehur.