Dr. Fr. Ritter von Močnik

Arithmetik

III.

Zulässig erklärt mit hoh. k. k. Erlass vom 12. November 1889, Zahl 22782.

Lehr- und Übungsbuch

der

Arithmetik

für die

unteren Classen der Realschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Achtzehnte verbesserte Auflage.

Drittes Heft.

Preis: geheftet 30 kr., gebunden 45 kr.

Prag. F. Tempsky. Wien. F. Tempsky, Leipzig. G. Freytag.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

1890.

Druck von Rudolf M. Rohrer in Brünn.

I. Allgemeine Zahlen.

§. 1. Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen; sie werden durch Ziffern bezeichnet. Z. B. 5 ist eine besondere Zahl; sie drückt eine genau bestimmte Menge von Einheiten aus, indem man sich darunter nicht mehr und nicht weniger als 5 Einheiten vorstellen kann. Rechnungen, die man mit besonderen Zahlen ausführt, können darum auch nur für einzelne besondere Fälle gelten, und müssen so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besonderen Werten der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen und die dadurch gefundenen Ergebnisse in einer leicht übersichtlichen und allgemeinen Form darstellen zu können, hat man Zahlen eingeführt, welche jede beliebige Menge von Einheiten bedeuten können und darum allgemeine Zahlen genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellen sich die Buchstaben dar. So drückt z. B. a als Zahlzeichen eine allgemeine Zahl aus, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten oder deren Theilen vorstellen kann; a kann 1, 2, 10, $\frac{3}{5}$, oder jede andere Zahl anzeigen. Nur ist zu bemerken, dass jeder Buchstabe den Wert, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muss; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Wert, z. B. 2 an, so muss man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Wert 2 beibehalten.

Die Wahl der Buchstaben zu allgemeinen Zahlzeichen rührt wahrscheinlich davon her, dass man anfänglich die Wörter selbst in die Rechnung setzte und später nur die Anfangsbuchstaben beibehielt. Wir haben z. B. in der Procentrechnung (II. Heft, §. 37) nachgewiesen, dass der Antheil der Procente eines Betrages berechnet wird, indem man den Betrag mit dem Procentsatze multipliciert und das Product durch 100 dividiert. Man könnte diesen Satz auf folgende Art allgemein ersichtlich machen:

$$\text{Antheil der Procente} = \frac{\text{Betrag} \times \text{Procentsatz}}{100},$$

oder, wenn man statt der Wörter nur ihre Anfangsbuchstaben setzt, und zwar die kleinen lateinischen,

$$a = \frac{b \times p}{100}.$$

Hier kann b jeden willkürlich großen oder kleinen Betrag, p jeden beliebigen Procentsatz vorstellen; a ist dann die Zahl, welche den zu dem angenommenen Betrage und dem angenommenen Procentsatze gehörigen Antheil an Procenten anzeigt. Der Ausdruck $a = \frac{b \times p}{100}$ stellt daher den oben angeführten Satz ganz allgemein und doch so klar dar, dass ihn jeder sogleich herauslesen kann, wenn er nur die Bedeutung der Buchstaben a, b, p kennt.

Wenn in einer Rechnung verschiedene Buchstaben vorkommen, so werden dadurch im allgemeinen auch eben so viele verschiedene Zahlen angedeutet; in besonderen Fällen ist es jedoch möglich, dass zwei Buchstaben denselben Wert haben. So können in dem obigen Ausdrucke die Zahlen b und p, wiewohl durch verschiedene Buchstaben ausgedrückt, in einzelnen Fällen auch einander gleich sein.

Werden in der Arithmetik nur besondere Zahlen in Betrachtung gezogen, so heißt sie **besondere Arithmetik** oder **Zifferrechnen**; werden in derselben nebst besonderen auch allgemeine Zahlen betrachtet, so heißt sie **allgemeine Arithmetik** oder **Buchstabenrechnen.**

§. 2. Die **Operationszeichen** sind bei allgemeinen Zahlen dieselben wie bei besonderen Zahlen.

Sind a und b zwei allgemeine Zahlen, so drückt

$a + b$ ihre **Summe**,

$a - b$ ihre **Differenz**,

$a \times b$ oder $a \,.\, b$ ihr **Product**, und

$a : b$ oder $\frac{a}{b}$ ihren **Quotienten**

aus. Das Multiplicationszeichen wird bei allgemeinen Zahlen weggelassen; z. B.

statt $a \times b$	oder $a \,.\, b$	schreibt man ab,
„ $a \times b \times c$	„ $a \,.\, b \,.\, c$	„ „ abc,

In einer Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerte setzen und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt **substituieren.**

Ist z. B. der Ausdruck $x = a + b - c$ für die besonderen Werte $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ zu berechnen, so hat man

$$x = 2 + 3 - 4 = 5 - 4 = 1.$$

§. 3. Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Bestandtheile enthält, heißt ein **mehrgliedriger Ausdruck** oder ein **Polynom**. Die einzelnen durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine **Glieder**. Kommen in einem Ausdrucke zwei Glieder vor, so heißt er insbesondere ein **Binom**; kommen darin drei Glieder vor, so heißt er ein **Trinom**. So ist z. B. $a + b$ ein Binom, $a - b + c$ ein Trinom, und beide Ausdrücke sind mehrgliedrig.

Ein Zahlenausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein **eingliedriger Ausdruck** oder ein **Monom**; z. B. a, x.

§. 4. Ist mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke eine weitere Rechnungsoperation vorzunehmen, so schließt man denselben in **Klammern** ein, welche jedoch weggelassen werden können, sobald dadurch keine Zweideutigkeit entsteht.

Ist z. B. von a die Differenz $b-c$ zu subtrahieren, so schreibt man: $a - (b - c)$. Ohne Klammern würde der Ausdruck $a - b - c$ bedeuten, dass von a b zu subtrahieren, und von der erhaltenen Differenz noch c zu subtrahieren ist. So wird für die Zahlenwerte $a = 8$, $b = 5$ und $c = 2$

$$a - (b - c) = 8 - (5 - 2) = 8 - 3 = 5,$$
$$a - b - c = 8 - 5 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Um anzudeuten, dass $a + b$ mit $c - d$ zu multiplicieren sei, schreibt man: $(a + b)(c - d)$. Beim Weglassen der Klammern hätte der Ausdruck $a + b \,.\, c - d$ die Bedeutung, dass zu a das Product $b \,.\, c$ zu addieren, und von der erhaltenen Summe d zu subtrahieren ist. Wird z. B. $a = 4$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 3$ gesetzt, so ist

$$(a + b)(c - d) = (4 + 1)(5 - 3) = 5 \,.\, 2 = 10,$$
$$a + b \,.\, c - d = 4 + 1 \,.\, 5 - 3 = 4 + 5 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

Sollen in einer durch die Zeichen $+$ und $-$ vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden, so kann man, ohne der Bestimmtheit dadurch Abbruch zu thun, die Klammern weglassen. Hiernach kann man setzen:

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$
$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$
$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d.$$

Aufgaben.

Gib die Bedeutung folgender Ausdrücke an:

1. $a + (c - d)$. **2.** $x - (y + z)$.

3. $a + [b - (c + d)]$. **4.** $x - [(a - b) - c]$.

5. $(m - n) + (p - q)$. **6.** $a - [b - \{c + (d - e)\}]$.

7. $(a + b) \, . \, m$. 8. $a \, . \, (m - n)$.
9. $(a - b)(c - d)$. 10. $[m - (p - q)] \, . \, (x - y)$.
11. $(a : b) \, . \, c$. 12. $(a - x) \, . \, (m : n)$.
13. Wie unterscheiden sich die Ausdrücke:
$mx + y - z$, $m(x + y) - z$, $m(x + y - z)$?

14. Wie unterscheiden sich die Ausdrücke $(a : b) : c$ und $a : (b : c)$? Welche Zahlenwerte erhalten sie für $a = 16$, $b = 4$, $c = 2$?

15. Berechne die Zahlenwerte folgender Ausdrücke:
a) $x - [(a - b) - (m - n)]$, b) $x - [a - (b - m - n)]$
c) $x - [a - (b - m) - n]$, d) $x - [(a - b - m) - n]$
für $x = 15$, $a = 15$, $b = 7$, $m = 4$ und $n = 2$.

§. 5. Das 2fache, 3fache, 4fache, . . einer allgemeinen Zahl a wird durch 2a, 3a, 4a, . . ausgedrückt. In einem solchen Ausdrucke 4a heißt dann a die Hauptgröße und 4 der Coefficient.

Der Coefficient zeigt also an, wie oft die Hauptgröße als Summand zu setzen ist; er kann daher immer als Factor der Hauptgröße betrachtet werden; so ist

$$4a = a + a + a + a = a \times 4,$$

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet daher a soviel als 1a.

Der Coefficient kann selbst auch eine allgemeine Zahl sein; z. B. ma bedeutet, daß a m mal als Summand zu setzen ist, also

$$ma = a + a + a + a + a + \ldots \text{ (m mal)}.$$

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. 5a und 6a, 3x und x. Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. 3a und 7b, 5x und 5y.

II. Addition und Subtraction.

1. Addieren allgemeiner Zahlen.

§. 6. 1. Die Addition zweier allgemeinen Zahlen a und b ist im allgemeinen als ausgeführt anzusehen, wenn man den Ausdruck $a + b$ hinsetzt.

Die Summe $a + b$ enthält so viele Einheiten als die Summanden a und b zusammen genommen.

2. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, welche erhalten wird, indem man zu der Summe der beiden ersten Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert. Es ist demnach

$$a + b + c = (a + b) + c,$$
$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ u. s. f.}$$

Rechengesetze der Addition.

§. 7. 1. Da die Gesammtheit der in den Summanden enthaltenen Einheiten dieselbe bleibt, mögen diese in was immer für einer Ordnung gezählt werden, so folgt:

Die Reihenfolge der Summanden ist für den Wert der Summe gleichgiltig.

$$5 + 4 = 4 + 5 = 9, \qquad a + b = b + a;$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots$$

2. Ist zu der Zahl 3 die Summe $4 + 5$ zu addieren, so gelangt man zu derselben Zahl 12, ob man in der natürlichen Zahlenreihe von 3 aus auf einmal um $4 + 5$ d. i. um 9 Einheiten vorwärts schreitet, oder ob man von 3 zuerst um 4 Einheiten, und dann von 7 noch um 5 Einheiten vorwärts schreitet; es ist somit

$$3 + (4 + 5) = 3 + 4 + 5.$$

Allgemein $a + (b + c) = a + b + c$.

Zu einer Zahl wird also eine Summe addiert, indem man zu ihr die einzelnen Summanden addiert.

Ebenso ist $(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$.

Hieraus folgt: Enthält ein mehrgliedriger Ausdruck bloß Summanden, so kann man in demselben die Klammern ohne weiteres weglassen, aber auch umgekehrt wieder nach Belieben anbringen.

§. 8. Eine Abkürzung kann in der Summe nur eintreten, wenn die Summanden gleichnamige Ausdrücke sind.

Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man ihre Coefficienten addiert und die erhaltene Summe vor die gemeinsame Hauptgröße setzt. Z. B. $3a + 4a = 7a$;

$$\begin{array}{rl} \text{denn } 3a &= a + a + a \\ 4a &= a + a + a + a \\ \hline 3a + 4a &= a + a + a + a + a + a + a = 7a. \end{array}$$

Aufgaben.

1. $a + a$. **2.** $b + b + b$. **3.** $2x + x$.

4. $3m + 2m$. **5.** $7c + 3c$. **6.** $8y + y + 5y$.

7. $2a + 4a + 6a + 8a$. **8.** $3x + 5x + 7x + 9x$.

9. $8{\cdot}25a + 5{\cdot}5a + 3{\cdot}75a$. **10.** $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x$.

11. Wenn $n + 3$ eine ganze Zahl vorstellt, wie heißen dann die vier nächstfolgenden ganzen Zahlen?

12. $(a + 2) + 3$. **13.** $(3x + 5) + 4x$.

14. $(3a + 5x) + 7x$. **15.** $(5b + 2y) + 3b$.

16. Bestimme die Zahlenwerte der Summanden und der Summe in der Aufg. 14 für $a = 2$ und $x = 4$, in der Aufg. 15 für $b = 5$ und $y = 3$.

17. $[(3x + 14y) + 2y] + 5x$. **18.** $[(4a + 3b) + 5a] + 6b$.

19. $2 + (5a + 3)$. **20.** $7m + (3m + 4)$.

21. $(5x + 3) + (2x + 4)$. **22.** $(3y + 2z) + (8y + 5z)$.

23. $\begin{array}{r} 3a + 2b \\ 9a + b \\ \hline \end{array}$ **24.** $\begin{array}{r} 2a + 5b + 8c \\ 10a + 7b + 4c \\ \hline \end{array}$

25. $\begin{array}{r} 0{\cdot}6a + 0{\cdot}2b \\ 1{\cdot}3a + 1{\cdot}6b \\ \hline \end{array}$ **26.** $\begin{array}{r} 6{\cdot}34x + 5{\cdot}15y + 7{\cdot}62z \\ 3{\cdot}72x + 4{\cdot}55y + 5{\cdot}84z \\ \hline \end{array}$

27. Welchen Zahlenwert haben die Summanden und die Summe in 26. für $x = 0{\cdot}5$, $y = 0{\cdot}8$ und $z = 1{\cdot}5$?

28. $\begin{array}{r} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \\ \hline \end{array}$ **29** $\begin{array}{r} a + \frac{3}{2}b + \frac{6}{5}c \\ 2a + \frac{4}{3}b + \frac{5}{8}c \\ \hline \end{array}$

30. $\begin{array}{r} 5x + 2y + 8z \\ 4x + 7y + 3z \\ 8x + 5y + 6z \\ \hline \end{array}$ **31.** $\begin{array}{r} m + 2n + 3p + 4q \\ 2m + 4n + 6p + 8q \\ 4m + 8n + 12p + 16q \\ \hline \end{array}$

32. Berechne die Werte folgender Summen für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$:

a) $8a + 6\,(b + c)$; b) $8b + 6\,(a + c)$;

c) $8c + 6\,(a + b)$; d) $8\,(a + b) + 6c$.

2. Subtrahieren allgemeiner Zahlen.

§. 9. Die Differenz $a - b$ zweier Zahlen muss so beschaffen sein, dass der Subtrahend b zu ihr addiert den Minuend a gibt.

$(8 - 3) + 3 = 8$, oder $3 + (8 - 3) = 8$;

$(a - b) + b = a$, „ $b + (a - b) = a$.

Aus dem Begriffe der Subtraction folgt:

Ist der Subtrahend dem Minuend gleich, so ist die Differenz gleich Null

$$4 - 4 = 0, \qquad a - a = 0.$$

Rechengesetze der Subtraction.

§. 10. 1. Ist zu der Zahl 8 die Differenz $7 - 4$ zu addieren, so ist es gleichgiltig, ob man in der natürlichen Zahlenreihe von 8 aus auf einmal um die Differenz $7 - 4$ d. i. um 3 Einheiten vorwärts schreitet, oder ob man von 8 zuerst um 7 Einheiten vorwärts, und dann um 4 Einheiten rückwärts schreitet; es ist daher

$$8 + (7 - 4) = 8 + 7 - 4.$$

Allgemein $a + (b - c) = a + b - c$.

Zu einer Zahl wird also eine Differenz addiert, indem man zu ihr den Minuend addiert und davon den Subtrahend subtrahiert.

Ebenso ergibt sich durch entsprechendes Vorwärts- und Rückwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe die Richtigkeit folgender Sätze:

2. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man von ihr die einzelnen Summanden subtrahiert.

$$12 - (3 + 4) = 12 - 3 - 4,$$
$$a - (b + c) = a - b - c.$$

3. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man von ihr den Minuend subtrahiert und den Subtrahend dazu addiert.

$$10 - (8 - 3) = 10 - 8 + 3,$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

4. Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addiert, indem man zu ihr die Summanden addiert und davon die Subtrahenden subtrahiert.

$$a + (b - c - d + e) = a + b - c - d + e.$$

5. Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahiert, indem man von ihr die Summanden subtrahiert und die Subtrahenden dazu addiert.

$$a - (b - c - d + e) = a - b + c + d - e.$$

Aus den voranstehenden Rechengesetzen ergibt sich:

a) Sind mehrgliedrige Ausdrücke in Klammern eingeschlossen, so kann man die Klammern nach folgendem Gesetze auflösen: Steht vor der Klammer das Zeichen +, so darf man die Klammern ohne alle weitere Veränderung weglassen; steht jedoch vor der Klammer das Zeichen —, so muss beim Weglassen der Klammer jedes + in den Klammern in —, jedes — in den Klammern in + verwandelt werden.

b) Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen + beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen läßt, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen — beginnt, jedem der umschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen gibt.

§. 11. Eine Abkürzung kann in der Differenz nur eintreten, wenn in derselben gleichnamige Ausdrücke vorkommen.

Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Coefficienten subtrahiert und die erhaltene Differenz vor die gemeinsame Hauptgröße setzt. Z. B.

$$5a - 2a = 3a;$$
$$\text{denn } 5a = a + a + a + a + a$$
$$2a = a + a$$
$$\overline{5a - 2a = a + a + a = 3a.}$$

Ein mehrgliedriger Ausdruck, welcher mehrere gleichnamige Ausdrücke enthält, wird auf einen einfacheren Ausdruck reduciert, indem man zuerst die Summanden, dann die Subtrahenden addiert und die zweite Summe von der ersten subtrahiert. Z. B.

$$7a - 4a - 5a + 8a - 2a = (7a + 8a) - (4a + 5a + 2a)$$
$$= 15a - 11a = 4a.$$

Aufgaben.

1. $5a - 5a$. **2.** $8x - 3x$. **3.** $14y - y$.

4. $5m + 6m - 8m$. **5.** $6n - 3n + 7n$.

6. $3x + 7x - 9x + 2x$. **7.** $20m - 5m - 6m - 2m$.

8. $3{\cdot}6a - 2{\cdot}7a + 1{\cdot}8a$. **9.** $^{3}/_{4}x + {}^{5}/_{8}x - {}^{2}/_{3}x - {}^{1}/_{6}x$.

10. $6m + 9m - 12m + 18m - 15m - 5m$.

11. $5a + 10b - 2a - 6b + 3a - b$.

12. Wenn $n + 5$ eine ganze Zahl vorstellt, wie heißen dann die fünf nächstvorhergehenden ganzen Zahlen?

13. $(m + 6) - 2$. **14.** $(7b + 8) - 3b$.

15. $(9x + 5y) - 4x$. **16.** $(x - 4) + 3x$.

17. $(14a - 12b) + a$. **18.** $(8b - 5) - 3$.

19. $(17a - 12) - 11a$. **20.** $7 + (x - 4)$.

21. $3a - (a + 5)$. **22.** $8b - (3a + b)$.

23. $8x - (3x - 6)$. **24.** $20 - (12 - 4m)$.

25. Bestimme für die Substitutionen $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$ und $d = 1$ die Werte folgender Ausdrücke:

a) $a - b - c + d$; b) $a - (b - c) + d$;

c) $a - b - (c + d)$; d) $a - (b - c + d)$.

26. $(5x + 3y) - (3x + y)$. **27.** $(6a + 9m) - (3a - 4n)$.

28. $\begin{array}{rr} 12a & -\ 7b \\ 5a & -\ 9b \\ - & + \\ \hline \end{array}$ **29.** $\begin{array}{rr} 8x & -\ 9y \\ 4x & -\ 10y \\ \hline \end{array}$

30. $\begin{array}{l} 17m - 15n + 13p \\ 12m + 14n + 10p \\ \hline \end{array}$ **31.** $\begin{array}{l} 9a + 8b - 27c \\ 2a + 8b - 16c \\ \hline \end{array}$

32. $\begin{array}{l} 23a - 26b + 19c - 7d \\ 18a + 14b - c + 8d \\ \hline \end{array}$ **33.** $\begin{array}{l} 15u + 38x - 9y - 26z \\ 8u + 22x + 9y - 25z \\ \hline \end{array}$

34. $\begin{array}{l} ^{7}/_{12}a + {}^{7}/_{8}b \\ ^{4}/_{9}a - {}^{1}/_{6}b \\ \hline \end{array}$ **35.** $\begin{array}{l} ^{3}/_{4}x - {}^{4}/_{5}y - {}^{5}/_{6}z \\ ^{2}/_{3}x + {}^{7}/_{10}y - {}^{7}/_{8}z \\ \hline \end{array}$

36. $\begin{array}{l} 3{\cdot}14x - 5{\cdot}08y \\ 2{\cdot}37x - 4{\cdot}63y \\ \hline \end{array}$ **37.** $\begin{array}{l} 35{\cdot}2a + 17{\cdot}3b - 23{\cdot}8c \\ 6{\cdot}4a - 8{\cdot}5b + 11{\cdot}2c \\ \hline \end{array}$

38. Welchen Zahlenwert haben der Minuend, der Subtrahend und die Differenz in Aufg. 37 für $a = 3\cdot5$, $b = 2\cdot4$, $c = 1\cdot6$?

39. $(6x - 17y) + (9x - 11y) - (7x - 20y)$.

40. $(27a - 18b + 15c) - (20a + 2b - 15c) + (8a - 5b + 20c)$.

41. $(a + b) - [a - \{x - (b - a)\}]$.

42. $2x - \{(3a + 4x) - (4x - 1)\} - (x - 2a - 2)$.

43. Bestimme die Werte folgender Ausdrücke für $x = 8$, $y = 6$:
   a) $10x - 8y - (6x - 4y) - (2x + y)$;
   b) $10x - 8y - [6x - (4y - 2x)] + y$;
   c) $10x - (8y - 6x) - [4y - (2x + y)]$;
   d) $10x - [8y - (6x - 4y)] - (2x + y)$.

3. Algebraische Zahlen.

§. 12. Die Subtraction kann, so lange man auf das Gebiet der natürlichen Zahlen beschränkt ist, nur dann ausgeführt werden, wenn der Minuend größer oder eben so groß ist, als der Subtrahend. Ist z. B. von 6 die Zahl 4 zu subtrahieren, so schreitet man in der Zahlenreihe von 6 aus um 4 Einheiten zurück, wodurch man zur Zahl 2 gelangt; also ist $6 - 4 = 2$. Ist ferner von 6 die gleiche Zahl 6 zu subtrahieren, so schreitet man von 6 um 6 Einheiten zurück, und gelangt zur Null, welche der Ausgangspunkt der natürlichen Zahlen ist; man hat also $6 - 6 = 0$.

Ist dagegen von 6 eine größere Zahl, z. B. 8 zu subtrahieren, so müsste man, nachdem man von 6 zuerst um 6 Einheiten zurückgezählt hat und dadurch zur Null gelangt ist, von Null aus noch um 2 Einheiten weiter zurückschreiten, was jedoch an der natürlichen Zahlenreihe, da dieselbe mit 0 abbricht, nicht möglich ist.

Um daher die Subtraction auch dann ausführen zu können, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, ist man genöthigt, auch Zahlen anzunehmen, welche durch das Rückwärtszählen von 0 aus erhalten werden. Es kommt dabei nur darauf an, dass die ursprünglich bloß nach vorwärts ohne Ende fortschreitende Zahlenreihe nach dem gleichen Bildungsgesetze von 0 auch nach rückwärts erweitert, und dass der Gegensatz der von 0 nach vorwärts und rückwärts fortschreitenden Zahlen entsprechend ausgedrückt werde. Letzteres geschieht, indem man die ursprünglich vorhandenen Zahlen, welche von 0 aus immer um eine Einheit nach vorwärts schreiten, positiv, die Zahlen aber, zu denen man gelangt, wenn man von 0 nach demselben Bildungsgesetze rückwärts schreitet, negativ nennt, und die ersteren mit dem Vorzeichen + (plus), die letzteren mit dem Vorzeichen — (minus) bezeichnet. Die dadurch entstehende zweiseitige Zahlenreihe ist daher

$$\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ldots$$

Während hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorstellen, treten die negativen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken. $+4$ bedeutet 4 von 0 aus nach vorwärts gezählte Einheiten, -4 bedeutet 4 von 0 aus nach rückwärts gezählte Einheiten.

Hiernach ist die oben gesuchte Differenz $6 - 8 = -2$, also eine negative Zahl.

Man kann die positiven und negativen Zahlen bildlich darstellen, indem man auf eine gerade Linie von einem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken versinnlichen die auf einander folgenden natürlichen (positiven) Zahlen.

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad\ 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

Um dann an dieser Zahlenlinie auch die negativen Zahlen zu veranschaulichen, darf man nur die ursprünglich bloß nach einer Richtung (nach rechts) sich erstreckende gerade Linie über den Anfangspunkt 0 hinaus auch nach der entgegengesetzten Richtung (nach links) verlängern, und auch hier gleich große Strecken auftragen; die Endpunkte der links aufgetragenen Strecken versinnlichen die negativen Zahlen.

§. 13. Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden relative oder algebraische Zahlen genannt, im Gegensatze zu den Zahlen ohne Vorzeichen, welche absolute Zahlen heißen.

Jede algebraische Zahl besteht aus einem Vorzeichen und einem absoluten Werte. Das Vorzeichen zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet; der absolute Wert zeigt an, welche Stelle die algebraische Zahl in der Reihe der positiven oder negativen Zahlen einnimmt.

Es ist nicht nöthig, stets beide Vorzeichen zu gebrauchen; man pflegt das Vorzeichen $+$ als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

Zwei algebraische Zahlen, welche gleichen absoluten Wert, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander entgegengesetzt; z. B. $+a$ und $-a$.

§. 14. Der Begriff des Gegensatzes, welcher zwischen den positiven und negativen Zahlen besteht, tritt in zahlreichen Fällen des praktischen Lebens hervor, z. B. bei den Richtungen vorwärts und rückwärts, rechts und links, aufwärts und abwärts, bei der Zeit vor und nach Christi Geburt, bei Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust u. dgl. Der Gegensatz besteht darin, dass je zwei solche entgegengesetzte Größen mit einander in Verbindung gebracht, sich gegenseitig entweder ganz oder theilweise aufheben. Z. B. Wenn jemand in einer bestimmten Richtung 20 Schritte vorwärts geht und dann von dem erreichten Punkte 20 Schritte in entgegengesetzter Richtung, also nach rückwärts macht, so ist er, obwohl er 40 Schritte weit gegangen, doch um nichts von seinem anfänglichen Orte entfernt, und es ist in Bezug auf das erreichte Ziel eben so viel, als wenn er sich gar nicht bewegt hätte; 20 Schritte nach vorwärts und 20 Schritte nach rückwärts heben sich also gegenseitig ganz auf. Ebenso heben sich 20 fl. Vermögen und 20 fl. Schulden ganz auf; dagegen heben sich 20 fl. Vermögen und 8 fl. Schulden nur theilweise auf, indem durch ihre Vereinigung d. i. nach der Tilgung der Schulden noch 12 fl. Vermögen übrig bleiben.

Von zwei entgegengesetzten Größen wird die eine, gleichviel welche, als positiv und die ihr entgegengesetzte als negativ angenommen. Betrachtet man z. B. Vermögen als positiv, so muss man Schulden als negativ annehmen.

4. Addition und Subtraction algebraischer Zahlen.

Addieren algebraischer Zahlen.

§. 15. Nachdem durch die Einführung der negativen Zahlen das ursprüngliche Zahlengebiet erweitert wurde, muss man auch die früheren Begriffe der Rechnungsoperationen angemessen erweitern, so dass sie auch auf negative Zahlen anwendbar werden.

Zu einer Zahl eine absolute (positive) Zahl addieren heißt, in der Zahlenreihe von der ersten Zahl aus um so viele Einheiten vorwärts schreiten, als die zweite Zahl angibt.

Für negative Zahlen wird man, da diese den Gegensatz zu den positiven Zahlen ausdrücken, die Erklärung so fassen müssen:

Zu einer Zahl eine negative Zahl addieren heißt, in der Zahlenreihe von der ersten Zahl um die Einheiten der zweiten rückwärts schreiten.

Eine positive Zahl addieren heißt also, ihren absoluten Wert addieren; eine negative Zahl addieren heißt, ihren absoluten Wert subtrahieren.

$8 + (+2) = 8 + 2,$ $\qquad a + (+b) = a + b,$

$8 + (-2) = 8 - 2,$ $\qquad a + (-b) = a - b,$

§. 16. Nach diesen Erklärungen erhält man

$$(+6)+(+2)=+(6+2)=+8,$$
$$(-6)+(-2)=-(6+2)=-8;$$

allgemein

$$(+a)+(+b)=+(a+b),$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b);\ \text{d. h.}$$

Zwei gleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man ihre absoluten Werte addiert und dieser Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.

2. Ebenso erhält man

$$(+6)+(-2)=+(6-2)=+4,$$
$$(-6)+(+2)=-(6-2)=-4;$$

allgemein

$$(+a)+(-b)=+(a-b),\ \text{oder} =-(b-a),$$
$$(-a)+(+b)=-(a-b),\ \text{oder} =+(b-a);\ \text{d. h.}$$

Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man den kleineren absoluten Wert von dem größeren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren absoluten Wertes gibt.

3. Endlich ergibt sich

$$(+6)+(-6)=+6-6=0;$$

allgemein

$$(+a)+(-a)=+a-a=0;\ \text{d. h.}$$

Zwei entgegengesetzte Zahlen geben zur Summe Null (heben sich gegenseitig auf).

Die Summe zweier Gewinne wie zweier Verluste ist wieder bezüglich ein Gewinn oder ein Verlust; die Summe eines Gewinnes und eines Verlustes gibt den Überschuß des einen über den andern als Gewinn oder Verlust; sind Gewinn und Verlust einander gleich, so heben sie sich gegenseitig ganz auf.

Subtrahieren algebraischer Zahlen.

§. 17. Ist von einer Zahl eine absolute (positive) Zahl zu subtrahieren, so schreitet man in der Zahlenreihe vom Minuend um so viele Einheiten rückwärts, als der Subtrahend anzeigt.

Von einer Zahl eine negative Zahl subtrahieren heißt nun, in der Zahlenreihe vom Minuend um die Einheiten des Subtrahends vorwärts schreiten.

Eine positive Zahl subtrahieren heißt also, ihren absoluten Wert subtrahieren; eine negative Zahl subtrahieren heißt, ihren absoluten Wert addieren.

§. 18. Aus diesen Erklärungen folgt

$$(+a)-(+b)=+a-b.$$

Nach der Erklärung der Addition ist aber auch

$$(+a) + (-b) = +a - b;$$

folglich ist

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b).$$

Ebenso ergibt sich

$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b),$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b),$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b).$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach subtrahiert, indem man zum unveränderten Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Statt Jemandem 3 fl. Vermögen zu nehmen, kann man ihm 3 fl. Schulden (die Verpflichtung, so viel zu bezahlen) geben; statt ihm 3 fl. Schulden abzunehmen, kann man ihm 3 fl. Vermögen (damit er selbst die Schuld damit zahle) geben.

§. 19. Eine Summe aus positiven und negativen Zahlen heißt eine algebraische Summe; z. B.

$$(+a) + (-b),$$
$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Nach der Erklärung der Addition algebraischer Zahlen ist

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) = a - b - c + d.$$

Jede algebraische Summe kann daher als ein mehrgliedriger Ausdruck dargestellt werden, indem man die Additionszeichen und die Klammern wegläßt und dann die Vorzeichen als Operationszeichen ansieht.

Da die algebraischen Summen auch gewöhnlich in dieser Form dargestellt werden, so ergeben sich für die Addition und Subtraction algebraischer Summen aus den Rechengesetzen 4 und 5 in §. 10 folgende zwei Sätze:

1. Zu einer Zahl wird eine algebraische Summe addiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit unveränderten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

2. Von einer Zahl wird eine algebraische Summe subtrahiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

Aufgaben.

1. $(+8) + (-5)$.	**2.** $(+7) + (-7)$.
3. $(-13) + (+6)$.	**4.** $(-38) + (-12)$.
5. $(+3{\cdot}105) + (-4{\cdot}342)$.	**6.** $(-5{\cdot}684) + (+10)$.
7. $(+28) - (-28)$.	**8.** $(-317) - (+509)$.
9. $(+35^2/_3) - (+24^1/_2)$.	**10.** $(-71^3/_8) - (-80^3/_5)$.

11. Das Festland Europas liegt zwischen 36^0 und 71^0 nördlicher Breite, zwischen 12^0 westlicher und 63^0 östlicher Länge (von Paris aus); wie viele Grade dehnt sich dasselbe a) in die Breite, b) in die Länge aus?

12. Drei Orte A, B und C liegen in gerader Linie, C ist von A um 13·784 *km*, von B um 8·095 *km* entfernt; wie weit ist B von A entfernt, a) wenn C zwischen A und B liegt, b) wenn C auf der Verlängerung der Strecke AB liegt?

13. Ein Dampfschiff wird durch die Einwirkung des Stromes allein jede Minute 65 *m* abwärts getrieben, durch die Kraft des Dampfes allein legt es jede Minute 312 *m* zurück; wie viel Meter legt es in der Minute a) stromabwärts, b) stromaufwärts zurück?

14. $(+4a)+(+6a)$. **15.** $(+9m)+(-5m)$.

16. $(-13x)-(+8x)$. **17.** $(+16n)-(-5n)$.

18. $(+2{\cdot}8a)-(+3{\cdot}6a)$. **19.** $(-4{\cdot}39s)-(-6{\cdot}15s)$.

20. $(+15)+(-8)+(+5)$. **21.** $(-378)-(-249)-(+518)$.

22. $(-75)+(+52)-(-58)$.

23. $(-4x)+(-2x)-(-x)+(+9x)$.

24. $(+8a)-(-9a)-(+7a)+(-a)$.

25. Jemand geht 65 Schritte vorwärts, hierauf 37 Schritte rückwärts, dann wieder 48 Schritte vorwärts: a) wie viel Schritte hat er im ganzen gemacht; b) wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausgieng?

26. Berechne $x-(x-2)+(x-4)-(x-6)+(x-8)$ für $x=3$.

27. $(+987)+[-368-(-245)]$.

28. $(-37{\cdot}68)-[+24{\cdot}02-(+10{\cdot}08)]$.

29. $(+95358)-[-13561+\{+58912-(-3796)\}]$.

30. $(7a-4b-2c)+(-5a+5b-c)$.

Addiere:

31.
$$\begin{array}{r} 3x-2y+z \\ -x+3y+2z \\ 2x-y+3z \\ \hline \end{array}$$

32.
$$\begin{array}{r} 13x+7y-3z \\ -4x+3y+4z \\ 8x-10y-z \\ \hline \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{r} 0{\cdot}092a+3{\cdot}174b-3{\cdot}28c-6{\cdot}2d \\ 0{\cdot}135a-1{\cdot}895b+4{\cdot}016c+6{\cdot}57d \\ -0{\cdot}06a+0{\cdot}96b-4{\cdot}188c+6{\cdot}915d \\ \hline \end{array}$$

34. Welchen Zahlenwert haben die Summanden und die Summe in 33. für $a=0{\cdot}5$, $b=0{\cdot}4$, $c=0{\cdot}3$ und $d=0{\cdot}2$?

Subtrahiere:

35.
$$\begin{array}{r} -3x-4y+5z \\ -4x+2y-6z \\ \hline \end{array}$$

36.
$$\begin{array}{r} 35{\cdot}2a+17{\cdot}3b-23{\cdot}8c \\ -6{\cdot}4a+8{\cdot}5b+11{\cdot}2c \\ \hline \end{array}$$

37. $\frac{5}{12}a + \frac{7}{8}b$
$-\frac{4}{9}a + \frac{1}{6}b$

38. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{3}{4}z + \frac{4}{5}$
$-\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}y - \frac{5}{6}z + \frac{7}{8}$

39. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$.

40. $(a+b)-(a-b)+(-a+b)+(a-c)+(a+b-c)-(a-b+c)+(a-b-c)-(-a+b-c)$.

41. $2a+3b+[5a-2b+\{6b-12a+(6a-8b)\}]$.

42. $a-[b-\{a-[(a-b)-a]+b\}-b]$.

43. $2x-y-[2x-\{2x-3y-(2x+3y)\}]$.

44. $9a-5b-[7a-4b-\{3a+10b-(4b-7a)\}]$.

45. $9-13m+18n-(10-3m+14n)-[(7-5m)-(10+6n)]-[(-15m+9n)-(8-11m)]$.

III. Multiplication und Division.

1. Multiplicieren allgemeiner Zahlen.

§. 20. 1. Das **Product** $a \,.\, b$ oder ab zweier Zahlen zeigt an, dass der Multiplicand a so oft als Summand zu setzen ist, als der Multiplicator b anzeigt; also

$$a \,.\, b = a + a + a + a + \ldots \text{(bmal)}.$$

2. Unter dem **Producte mehrerer Zahlen** versteht man das Product, welches erhalten wird, indem man das Product der ersten zwei Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl, u. s. w. multipliciert. Hiernach ist

$$a \,.\, b \,.\, c = (ab) \,.\, c,$$
$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = [(ab) \,.\, c] \,.\, d, \text{ u. s. w.}$$

3. Ein Product, dessen Factoren einander gleich sind, wird **abgekürzt** dadurch bezeichnet, dass man nur einen Factor anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie vielmal derselbe vorkommt; z. B.:

statt $4 \,.\, 4$ schreibt man 4^2,
„ aaa „ „ a^3,
„ $xxxx$ „ „ x^4.

Ein Product gleicher Factoren nennt man eine **Potenz**; die Zahl der gleichen Factoren heißt der **Potenzexponent**, auch bloß **Exponent**, und der Factor, der so oft vorkommt, als der Exponent anzeigt, die **Wurzel** oder **Basis**. So ist a^4 eine Potenz, 4 ist der Exponent und a die Basis.

Die Begriffe Coefficient und Exponent dürfen mit einander nicht verwechselt werden; es ist

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; z. B. für $a = 2$ ist

$$4a = 2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$
$$a^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$$

Jede Zahl a wird als die erste Potenz von a angesehen; also $a = a^1$. Die zweite Potenz a^2 einer Zahl a wird insbesondere auch das Quadrat, die dritte Potenz a^3 der Cubus von a genannt.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Übersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten der gemeinsamen Basis zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz beginnt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läſst, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinsamen Basis enthält und dann zu immer höheren Potenzen hinaufsteigt. Im ersten Falle heiſst das Polynom nach fallenden, im zweiten nach steigenden Potenzen der gemeinsamen Basis geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

Zusatz. Jede dekadische Zahl kann als ein nach den fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom dargestellt werden. Z. B.

$$\begin{aligned} 6547 &= 6000 + 500 + 40 + 7 \\ &= 6 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10 + 7. \end{aligned}$$

Rechengesetze der Multiplication.

§. 21. 1. Die Reihenfolge der Factoren ist für den Wert eines Zahlenproductes gleichgiltig.

Es seien z. B. 5 und 3 die beiden Factoren; zerlegt man 5 in fünf Einheiten, die in einer wagrechten Reihe anschaulich gemacht werden, und bringt 3 solche Reihen unter einander an,

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

so erhält man offenbar gleichviel, ob man die Einheiten aller wagrechten oder jene aller lothrechten Reihen zusammenzählt. Zählt man die Einheiten der wagrechten Reihen, so erhält man 5 Einheiten 3mal, oder $5 \,.\, 3$; zählt man die Einheiten der lothrechten Reihen, so bekommt man 3 Einheiten 5mal, oder $3 \,.\, 5$. Es ist daher $5 \,.\, 3 = 3 \,.\, 5$.

Allgemein ist

$$a \,.\, b = b \,.\, a.$$

Um zu zeigen, dass der Satz auch für drei Factoren gilt, setze man die Zahl a bmal als Summand und bringe c solche Reihen unter einander an, nämlich

$$\begin{array}{l} a + a + a + \ldots (\text{bmal}) \\ a + a + a + \ldots (\text{bmal}) \\ a + a + a + \ldots (\text{bmal}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\text{cmal}). \end{array}$$

Jede wagrechte Reihe enthält a bmal, also ab; alle c wagrechten Reihen enthalten ab cmal, also das Product (ab) c. Jede lothrechte Reihe enthält a cmal, also ac; alle b lothrechten Reihen enthalten ac bmal, also das Product (ac) b. Es ist somit (ab) c = (ac) b.

Ebenso ergibt sich (ba) c = (bc) a und (ca) b = (cb) a.

Man hat daher

$$(ab)\,c = (ba)\,c = (ac)\,b = (ca)\,b = (bc)\,a = (cb)\,a,$$
oder $abc = bac = acb = cab = bca = cba.$

2. Nach dem Vorhergehenden ist

$$a\,(bc) = (bc)\,a = (ab)\,c = (ac)\,b = abc = acb.$$

Eine Zahl wird also mit einem Producte multipliciert, indem man sie mit dem einen Factor und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

Ebenso ist (ab) (cd) = abcd.

Hieraus folgt: Enthält ein Ausdruck bloß Factoren, so kann man in demselben die Klammern nach Belieben weglassen und ebenso nach Belieben wieder anbringen.

3. Kommen in den Factoren Potenzen derselben Basis vor, so lässt die Rechnung eine bedeutende Vereinfachung zu. Es ist

$$a \,.\, a^2 = a \,.\, aa = aaa = a^3,$$
$$a^5 \,.\, a^2 = aaaaa \,.\, aa = aaaaaaa = a^7,$$

allgemein

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}.$$

Potenzen derselben Basis werden also multipliciert, indem man der gemeinsamen Basis die Summe der Exponenten der Factoren zum Potenzexponenten gibt.

4. Für algebraische Zahlen muss der Begriff des Multiplicierens entsprechend erweitert werden.

Ist eine Zahl mit einer absoluten (positiven) Zahl zu multiplicieren, so setzt man den ungeänderten Multiplicand so oft als Summand, als der Multiplicator anzeigt.

Im Gegensatze dazu heißt dann eine Zahl mit einer negativen Zahl multiplicieren, den Multiplicand so oft als Subtrahend, d. i. den Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen so oft als Summand setzen, als der absolute Wert des Multiplicators anzeigt.

Nach diesen Erklärungen ist

$$(+4) \,.\, (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12,$$
$$(+4) \,.\, (-3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12,$$
$$(-4) \,.\, (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12,$$
$$(-4) \,.\, (-3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12;$$

allgemein

$$(+a) \,.\, (+b) = +ab,$$
$$(+a) \,.\, (-b) = -ab,$$
$$(-a) \,.\, (+b) = -ab,$$
$$(-a) \,.\, (-b) = +ab.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach mit einander multipliciert, indem man das Product aus ihren absoluten Werten positiv oder negativ nimmt, je nachdem beide Factoren gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Man drückt diesen Satz auch so aus:

Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleichbezeichnete Factoren ein negatives Product.

Wer 4 Schritte nach vorwärts 3mal macht, kommt 12 Schritte nach vorwärts; wer 4 Schritte nach rückwärts 3mal macht, legt 12 Schritte nach rückwärts zurück. Jemandem 4 fl. Gewinn 3mal hinwegnehmen (ihn darum verkürzen), ist so viel, als ihm einen Verlust von 12 fl. zuziehen. Jemandem 4 fl. Verlust 3mal hinwegnehmen (ersparen), ist so viel, als ihm einen Gewinn von 12 fl. zumitteln.

Für drei oder mehrere Factoren ergibt sich aus dem vorgehenden Satze:

Sind alle Factoren positiv, so ist auch das Product positiv.

Sind alle oder auch nur einige Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die negativen Factoren in gerader oder in ungerader Anzahl vorkommen.

Aus den voranstehenden Rechengesetzen lassen sich für die Multiplication zweier eingliedriger Ausdrücke folgende Regeln zusammenfassen:

a) Rücksichtlich des Zeichens ist das Product positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Factoren gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

b) Der Coefficient des Productes ist das Product aus den Coefficienten der Factoren; denn

$$3a \,.\, 4b = 3 \,.\, a \,.\, 4 \,.\, b = 3 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, b = 12ab.$$

c) Die Hauptgröße des Productes erhält man, indem man die Buchstaben, welche in den Hauptgrößen der Factoren vorkommen, (in alphabetischer Ordnung) neben einander stellt, und bei Potenzen derselben

Basis der gemeinsamen Basis die Summe der Exponenten zum Exponenten gibt.

§. 22. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl multipliciert und die einzelnen Producte mit den Zeichen der Glieder des Multiplicands zusammenstellt.

$$(a - b + c) \,.\, m = am - bm + cm.$$

Beweis für $m = 4$:

$$\begin{aligned} (a - b + c) \,.\, 4 &= a - b + c + a - b + c + a - b + c + a - b + c \\ &= a + a + a + a - b - b - b - b + c + c + c + c; \end{aligned}$$

also $\quad (a - b + c) \,.\, 4 = a \,.\, 4 - b \,.\, 4 + c \,.\, 4.$

Da man die Factoren eines Zahlenproductes vertauschen darf, so ist auch

$$m \,.\, (a - b + c) = am - bm + cm.$$

§. 23. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdruck multipliciert, indem man den ganzen Multiplicand, d. i. jedes Glied desselben, mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die einzelnen Producte als Summanden oder Subtrahenden zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

$$\begin{aligned} (a - b + c) \,.\, (m + n - p) = &\; (a - b + c) \,.\, m \\ &+ (a - b + c) \,.\, n \\ &+ (a - b + c) \,.\, - p \\ = &\; am - bm + cm \\ &+ an - bn + cn \\ &- ap + bp - cp. \end{aligned}$$

Zusätze. a) Insbesondere erhält man

$$\begin{aligned} (a + b)\,(a - b) &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2; \text{ d. h.} \end{aligned}$$

Die Summe zweier Zahlen multipliciert mit deren Differenz gibt die Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

Umgekehrt: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen multipliciert mit ihrer Differenz.

b) Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche eben so geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, dass ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$$\begin{array}{rrrrrl} & 4a^2 & -\ 3a & -\ 4 & & \text{Multiplicand} \\ & 3a^2 & -\ 7a & +\ 5 & & \text{Multiplicator} \\ \hline 12a^4 & -\ 9a^3 & -\ 12a^2 & & & \\ & -\ 28a^3 & +\ 21a^2 & +\ 28a & & \\ & & +\ 20a^2 & -\ 15a & -\ 20 & \\ \hline 12a^4 & -\ 37a^3 & +\ 29a^2 & +\ 13a & -\ 20 & \text{Product.} \end{array}$$

Aufgaben.

1. $5a \,.\, 4.$ 2. $3a \,.\, b.$ 3. $m \,.\, 6n.$
4. $4xy \,.\, 2.$ 5. $7x \,.\, 3y.$ 6. $a \,.\, 8bc.$
7. $9ab \,.\, 5c.$ 8. $5x \,.\, y \,.\, 3.$ 9. $3x \,.\, 4y \,.\, 5z.$
10. $a^3 \,.\, a^2.$ 11. $x^4 \,.\, x.$ 12. $m^5 \,.\, m^3.$
13. $ax^2 \,.\, a^2x.$ 14. $5xy \,.\, 8yz.$ 15. $x^2y^4 \,.\, x^3y.$
16. $a^4b^3c^2 \,.\, ab^2c^3.$ 17. $13{\cdot}6ax \,.\, 9{\cdot}55bx.$
18. $\frac{2}{3}a^3 \,.\, \frac{9}{10}a^2.$ 19. $2\frac{1}{2}a^2x \,.\, 3\frac{3}{5}b^2x.$
20. $a^4 \,.\, a^3 \,.\, a.$ 21. $x^3 \,.\, 3x \,.\, 6x^4.$
22. $3a^2 \,.\, 4a^3 \,.\, 5a^4.$ 23. $6x^3 \,.\, 5b^2 \,.\, bx.$
24. $8x^2y^3 \,.\, 4x^4z \,.\, y^3z^5.$ 25. $ab^2c^3 \,.\, 2a^2bd^2 \,.\, 3c^3d^4.$
26. $+9 \,.\, -5.$ 27. $-12 \,.\, +4.$ 28. $-12 \,.\, -4.$
29. $-118 \,.\, 63.$ 30. $5{\cdot}3 \,.\, -0{\cdot}8{\cdot}$ 31. $-3\frac{3}{4} \,.\, 5\frac{3}{5}.$
32. Ein Körper, welcher sich in gerader Linie in jeder Secunde 12 *m* a) nach vorwärts, b) nach rückwärts bewegt, befindet sich gegenwärtig im Punkte A; auf welcher Seite und in welchem Abstande von A wird er sich nach 25 Secunden befinden? Auf welcher Seite und in welchem Abstande von A befand sich derselbe vor 25 Secunden?
33. $-7a \,.\, a.$ 34. $-x^2 \,.\, -3x.$ 35. $2a^2 \,.\, -7a^3.$
36. $-2a^2x \,.\, 8ax^2.$ 37. $-5{\cdot}2by^3 \,.\, -3{\cdot}5b^3y.$
38. $-19 \,.\, -27 \,.\, +31.$ 39. $83 \,.\, -25 \,.\, +49.$
40. $-35 \,.\, -63 \,.\, +14 \,.\, -84 \,.\, -49.$
41. Berechne $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10)$ für $x=3$.
42. Berechne $x^2-6x-16$ für $x=-2$.
43. $7a^2b^3 \,.\, 4a^2c^3 \,.\, -3bc.$ 44. $5a^2x^2 \,.\, 6axy^2 \,.\, -2y^4.$
45. Welchen Zahlenwert hat der Ausdruck in 44. für $a=5$, $x=2$ und $y=3$?

---

46. $(2a-3b) \,.\, 4c.$ 47. $(3x^2-5x+1) \,.\, -1.$
48. $(x^2+y^2-z^2) \,.\, a^2xyz.$
49. $(8x^2-3xy+5y^2) \,.\, -2xy.$
50. $(ab^2c^3-a^2b^3c-a^3bc^2) \,.\, a^2b^2c^2.$
51. Welchen Zahlenwert hat der Ausdruck in 50. für $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{2}{3}$ und $c=\frac{3}{4}$?
52. $(1-5x+6x^2+3x^3-2x^4) \,.\, -5x^2.$

53. $-3x \cdot (-2a + 2b - 4c)$.

54. $9a^2x^2 \cdot (4a^4 - 5a^3x + 2a^2x^2)$.

55. $(\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{2}{5}y^3) \cdot \frac{3}{5}x^2y^2$.

Addiere:

56.
$$\begin{array}{r} 7ax - 4by \\ 5ax + 6by \\ 9ax - by \\ \hline \end{array}$$

57.
$$\begin{array}{rrrrr} 8x^4 & - 6x^3y & - 4x^2y^2 & & \\ & 12x^3y & + 9x^2y^2 & + 6xy^3 & \\ & & + 16x^2y^2 & - 12xy^3 & - 8y^4 \\ \hline \end{array}$$

Subtrahiere:

58.
$$\begin{array}{r} 8am - 7bn + 6cp \\ -2am + 7bn + 6cp \\ \hline \end{array}$$

59.
$$\begin{array}{r} 9x^3 - 36x^2 + 63x - 54 \\ 9x^3 - 18x^2 + 37x \\ \hline \end{array}$$

60. $(x^2y - 2xy^2 + 4y^3) \cdot 6x^2 + (3x^3 + 2x^2y - xy^2) \cdot 3xy$.

61. $5y(6y^3 - 4y^2 - 8y + 1) - 6y^2(5y^2 - 4y + 6)$.

---

62. $(x + 3)(y + 2)$.

63. $(m - 5)(n + 4)$.

64. $(2x + 3y)(3x - 2y)$.

65. $(6a - 2b)(4a + 3b)$.

66. $(4ax + 8by)(2ax - 2by)$.

67. $(5x^2 - 3y^2)(3x^2 - 4y^2)$.

68. $(a + 3)(a - 3)$.

69. $(x + 5)(x - 5)$.

70. $(3a + 2b)(3a - 2b)$.

71. $(4x^2 - 3y^2)(4x^2 + 3y^2)$.

72. $4m^2 - (2m + 3)(2m - 3)$.

73. $(6a + 7b + 8c)(3x + 4y)$.

74. $(a^3 - 5a^2 + 6)(4a - 7)$.

75. $(9x^2 - 24x + 16)(3x - 4)$.

76. $(x^7 + x^5 + x^3 + x)(x^2 - 1)$.

77. $(2a^2x^2 - 4ax - 9)(7ax + 8)$.

78. $(16a^4 + 8a^2b^2 + b^4)(4a^2 - b^2)$.

79. $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$.

80. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$.

81. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.

82. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.

83. $(x - y - z)(x + y - z)$.

84. $(4x + 7y - 5)(3x - 5y - 6)$.

85. $(3x^2 - 4x - 5)(2x^2 - 3x + 4)$.

86. $(1 - 2x + 3x^2)(3 - 2x + 4x^2)$.

87. $(5b^2 + 3by - y^2)(2b^2 - 4by + 5y^2)$.

88. $(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z)(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{3}{4}z)$.

89. $(6x^3 + 5x^2y - 5xy^2 - y^3)(2x^2 - xy + 3y^2)$.

90. $(1 - 3a + 5a^2 - 7a^3)(2 + 4a - 6a^2 - 8a^3)$.

91. $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)$.

92. $(x - 5)(x - 4)(x - 3)$.

93. $(3x - 5a)(6x - 7a)(7x + 4a)$.

94. $(7a^2x^2 + 4ax + 1)(3a^2x^2 + 3ax + 2)(a^2x^2 - 2ax + 3)$.

2. Quadrieren und Cubieren.

Quadrieren mehrgliedriger Ausdrücke.

§. 24. Eine Zahl quadrieren oder zum Quadrat erheben heißt, sie zweimal als Factor setzen, also mit sich selbst multiplicieren.

Um das Binom $a + b$ zum Quadrat zu erheben, darf man es nur mit $a + b$ multiplicieren; man erhält

$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$, oder

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Das Quadrat eines Binoms besteht also aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Die zwei Quadrate a^2 und b^2 sind immer positiv; das doppelte Product $2ab$ ist dagegen positiv oder negativ, je nachdem a und b gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. Es ist

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Um ein Trinom $a + b + c$ zum Quadrate zu erheben, betrachte man dasselbe als ein Binom, indem man $a + b$ als das erste, und c als das zweite Glied ansieht; es ist also

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2\,(a + b)\,.\,c + c^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\,.\,c + c^2.\end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned}&(a + b + c + d)^2 =\\ &= [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2\,(a + b + c)\,.\,d + d^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\,.\,c + c^2 + 2\,(a + b + c)\,.\,d + d^2,\\ &(a + b + c + d + e)^2 =\\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2 + 2\,(a + b + c)\,d + d^2\\ &\qquad + 2\,(a + b + c\quad d)\,e + e^2,\end{aligned}$$

u. s. w.

Aus den hier abgeleiteten Ausdrücken ergibt sich für das Quadrieren eines Polynoms folgendes Bildungsgesetz:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.
2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile: das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder mit diesem Gliede, und das eigene Quadrat.
3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Z. B. $(2a - 3b + 4c)^2 =$

$= 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 2\,(2a - 3b)\,.\,4c + 16c^2$

$= 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2$.

Aufgaben.

. $(x + 1)^2$.	**2.** $(x - 1)^2$.	**3.** $(a - 3)^2$.
4. $(x + 2a)^2$.	**5.** $(2x - 3y)^2$.	**6.** $(5ax - 4by)^2$.
7. $(a^2 - 4)^2$.	**8.** $(1 - 2x^2)^2$.	**9.** $(2x^2 + 3y^2)^2$.
10. $(6m^2 - 5n^2)^2$.	**11.** $(1{\cdot}4a + 0{\cdot}5b)^2$.	**12.** $(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y)^2$.

13. $(x + 4)^2 - 8x$. 14. $(2a - 5)^2 + 20a$.
15. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. 16. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
17. $(a + 2b - 3c)^2$. 18. $(5x - 4y + 3z)^2$.
19. $(2x^2 - 5x + 4)^2$. 20. $(5a^2 - 2ab + 3b^2)^2$.
21. $(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c)^2$. 22. $(x^3 - 3x^2 + 5x - 7)^2$.

Quadrieren dekadischer Zahlen.

§. 25. Das Quadrat einer dekadischen Zahl erhält man am einfachsten durch unmittelbare Multiplication der Zahl mit sich selbst.

Z. B. $137^2 = 137 \,.\, 137 = 18769$,
$2{\cdot}73^2 = 2{\cdot}73 \,.\, 2{\cdot}73 = 7{\cdot}4529$.

Das Quadrat eines Decimalbruches enthält doppelt so viel Decimalen als der Decimalbruch selbst, woraus folgt, daß in einem vollständigen Quadrate die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müssen.

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind:

Zahl: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
Quadrat: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Um später das Ausziehen der Quadratwurzel (§. 32) leichter begründen zu können, soll hier für das Quadrieren einer dekadischen Zahl noch ein zweites Verfahren aufgestellt werden.

Da sich nämlich jede dekadische Zahl als ein nach den fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läßt, so kann man das fürs Quadrieren mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke abgeleitete Verfahren auch auf dekadische Zahlen anwenden.

Um z. B. 736 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$736^2 = (700 + 30 + 6)^2$$
$$= 700^2 + 2 \,.\, 700 \,.\, 30 + 30^2 + 2 \,.\, 730 \,.\, 6 + 6^2,$$

oder, wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt,

$$\begin{array}{rrr} 736^2 = & 700^2 \ldots & 490000 \\ + \; 2 \,.\, 700 \,. & 30 \ldots & 42000 \\ & + \; 30^2 \ldots & 900 \\ + \; 2 \,.\, 730 \,. & 6 \ldots & 8760 \\ & + \; 6^2 \ldots & 36 \\ \hline & & 541696, \end{array}$$

oder, da die Nullen rechts weggelassen werden können, sobald nur jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts gerückt wird,

$$\begin{array}{rl} 736^2 & \\ \hline 7^2 \ldots\ldots & 49 \,. \\ 2 \,.\, 7 \,.\, 3 \ldots\ldots & \;\;42 \,. \\ 3^2 \ldots\ldots & \;\;\;\;9 \,. \\ 2 \,.\, 73 \,.\, 6 \ldots\ldots & \;\;\;\;876 \,. \\ 6^2 \ldots\ldots & \;\;\;\;\;\;36 \\ \hline & 541696 \,. \end{array}$$

Man verfährt daher, um eine dekadische Zahl zum Quadrat zu erheben, auf folgende Art:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrat.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile: das Product aus der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer und ihr eigenes Quadrat.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert; die Summe ist das gesuchte Quadrat.

Aufgaben.

1. $41{\cdot}7^2$

4^2 . . . 16.
2 . 4 . 1 . . . 8.
1^2 . . . 1.
2 . 41 . 7 . . . 574.
7^2 . . . 49.
1738·89

2. 3508^2

3^2 . . . 9.
2 . 3 . 5 . . . 30.
5^2 . . . 25..
2 . 350 . 8 . . . 5600.
8^2 . . . 64
12306064

Berechne ebenso:

3. 87^2.	**4.** 63^2.	**5.** $0{\cdot}58^2$.
6. 729^2.	**7.** 581^2.	**8.** $6{\cdot}02^2$.
9. 593^2.	**10.** 806^2.	**11.** $36{\cdot}5^2$.
12. 354^2.	**13.** $0{\cdot}257^2$.	**14.** $15{\cdot}9^2$.
15. 3579^2.	**16.** 86.42^2.	**17.** 4051^2.
18. $8{\cdot}136^2$.	**19.** 5703^2.	**20.** 9472^2.
21. 30809^2.	**22.** 23456^2.	**23.** $1{\cdot}0817^2$.
24. $13{\cdot}057^2$.	**25.** $372{\cdot}18^2$.	**26.** 49055^2.

Cubieren mehrgliedriger Ausdrücke.

§. 26. Eine Zahl cubieren oder zum Cubus erheben heißt, die Zahl dreimal als Factor setzen. Um das Binom $a + b$ zum Cubus zu erheben, braucht man nur das Quadrat $(a + b)^2$ noch mit $a + b$ zu multiplicieren. Es ist also

$$(a + b)^3 = (a + b)^2\,(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a + b).$$

somit

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$ d. i.

der Cubus eines Binoms besteht aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten Gliede, dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Um nach diesem Satze den Cubus eines Trinoms $a + b + c$ zu erhalten, betrachtet man $a + b$ als das eine Glied und c als das andere Glied eines Binoms; man erhält dann

$$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3$$
$$= (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2 \,.\, c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3.$$

Eben so folgt

$$(a + b + c + d)^3 = [a + b + c) + d]^3 =$$
$$= (a + b + c)^3 + 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a + b + c)\,d^2 + d^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$$
$$+ 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a + b + c)\,d^2 + d^3,$$

u. s. f.

Hieraus ergibt sich für das **Cubieren eines mehrgliedrigen Ausdruckes** folgendes Bildungsgesetz:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile: das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Cubus.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

Z. B. $\qquad (y^2 + 2y - 3)^3 =$

$$= y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9\,(y^2 + 2y)^2 + 27\,(y^2 + 2y) - 27$$
$$= y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9y^4 - 36y^3 - 36y^2 + 27y^2 + 54y$$
$$- 27 = y^6 + 6y^5 + 3y^4 - 28y^3 - 9y^2 + 54y - 27.$$

Aufgaben.

1. $(x + 1)^3$. **2.** $(x - 1)^3$. **3.** $(m - 2)^3$.
4. $(3a + 2)^3$. **5.** $(2x - 3)^3$. **6.** $(3a + 4b)^3$.
7. $(ax + 26y)^3$. **8.** $(8mx - 5ny)^3$. **9.** $(x^2 - 5)^3$.
10. $(5a^2 + 46^2)^3$. **11.** $({}^2/_3\,a + {}^3/_4\,b)^3$. **12.** $(2{\cdot}5x - 1{\cdot}6y)^3$.
13. $(3a - 2b + c)^3$. **14.** $(y^2 + y - 1)^3$.
15. $(ax^2 + by^2 - cz^2)^3$. **16.** $({}^1/_3x^2 - {}^1/_2y^2 - 1)^3$
17. $(a^2 - 3ab + 2b^2)^3$. **18.** $(1 - 2x + 3x^2 - 4y^3)^3$.

Cubieren dekadischer Zahlen.

§. 27. Um eine dekadische Zahl zum Cubus zu erheben, setzt man dieselbe 3mal als Factor; z. B.

$$319^3 = 319 \,.\, 319 \,.\, 319 = 32461759,$$
$$1{\cdot}28^3 = 1{\cdot}28 \,.\, 1{\cdot}28 \,.\, 1{\cdot}28 = 2{\cdot}097152.$$

Da der Cubus eines Decimalbruches 3mal so viel Decimalen als der gegebene Decimalbruch enthält, so muss in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen stets ein Vielfaches von 3 sein.

Die dritten Potenzen der einziffrigen Zahlen sind:

Zahl: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
Cubus: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Zur leichteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Cubikwurzel (§. 34) soll auch hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Cubus zu erheben, abgeleitet werden. Dasselbe beruht auf dem Bildungsgesetze für den Cubus eines mehrgliedrigen algebraischen Ausdruckes. Zerlegt man z. B. die Zahl 423 in ihre dekadischen Bestandtheile und entwickelt dann den Cubus, so ergibt sich:

$$
\begin{array}{rlr}
423^3 = (400 + 20 + 3)^3 & & \\
= \quad 400^3 & \ldots\ldots & 64000000 \\
+ \; 3 \,.\, 400^2 \,.\, 20 & \ldots & 9600000 \\
+ \; 3 \,.\, 400 \,.\, 20^2 & \ldots & 480000 \\
+ \; 20^3 & \ldots & 8000 \\
+ \; 3 \,.\, 420^2 \,.\, 3 & \ldots & 1587600 \\
+ \; 3 \,.\, 420 \,.\, 3^2 & \ldots & 11340 \\
+ \; 3^3 & \ldots & 27 \\
\hline
 & = & 75686967,
\end{array}
$$

oder mit Weglassung der Nullen:

$$
\begin{array}{rll}
423^3 & & \\
\hline
4^3 & \ldots\ldots & 64. \\
3 \,.\, 4^2 \,.\, 2 & \ldots\ldots & 96. \\
3 \,.\, 4 \,.\, 2^2 & \ldots\ldots & 48. \\
2^3 & \ldots\ldots & 8. \\
3 \,.\, 42^2 \; 3 & \ldots\ldots & 15876. \\
3 \,.\, 42 \,.\, 3^2 & \ldots\ldots & 1134. \\
3^3 & \ldots\ldots & 27 \\
\hline
 & & 75686967
\end{array}
$$

Zur Entwicklung des Cubus einer dekadischen Zahl ergibt sich hiernach folgendes Verfahren:

1. Man erhebe die erste Ziffer links zum Cubus.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, endlich ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Aufgaben.

Entwickle nach dem abgeleiteten Verfahren:

1. 49^3.	2. 71^3.	3. $5{\cdot}8^3$.
4. 734^3.	5. 376^3	6. 862^3.
7. 897^3.	8. $9{\cdot}17^3$.	9. $0{\cdot}813^3$.
10. $1{\cdot}05^3$.	11. 158^3.	12. $55{\cdot}4^3$.
13. 2543^3.	14. 8316^3.	15. 6035^3.
16. $5{\cdot}946^3$.	17. $50{\cdot}79^3$.	18. 1376^3.
19. 4827^3.	20. $930{\cdot}1^3$.	21. $0{\cdot}7935^3$.
22. 78256^3.	23. $21{\cdot}709^3$.	24. 92058^3.

3. Dividieren allgemeiner Zahlen.

§. 28. Der Quotient $a:b$ zweier Zahlen muss so beschaffen sein, dass er mit dem Divisor b multipliciert den Dividend b gibt.

$$(a : b) \,.\, b = a.$$

Aus dem Begriffe der Division folgt:

1. Dividiert man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor.

$$ab : a = b; \qquad ab : b = a.$$

2. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten.

$$a : a = 1; \text{ denn } 1 \,.\, a = a.$$

3. Jede Zahl durch 1 dividiert gibt sich selbst zum Quotienten.

$$a : 1 = a; \qquad 1 : 1 = 1.$$

Rechengesetze der Division.

§. 29. 1. Ein Product wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Factoren dadurch dividiert.

$$(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b \text{ oder } (a \,.\, b) : c = a \,.\, (b : c).$$

Soll der Ausdruck $(a : c) \,.\, b$ der richtige Quotient sein, so muss er mit dem Divisor c multipliciert den Dividend $a \,.\, b$ geben. Nun ist wirklich

$$(a : c) \,.\, b \,.\, c = (a : c) \,.\, c \,.\, b = a \,.\, b.$$

Ebenso ist $a \,.\, (b : c)$ eine richtige Form des Quotienten; denn

$$a \,.\, (b : c) \,.\, c = a \,.\, b.$$

2. Eine Zahl wird durch ein Product dividiert, indem man sie durch den einen Factor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividiert.

$$a : (b \,.\, c) = (a : b) : c.$$

Denn

$$[(a : b) : c] \,.\, b \,.\, c = [(a : b) : c] \,.\, c \,.\, b = (a : b) \,.\, b = a.$$

3. Einfach gestaltet sich die Division allgemeiner Zahlen, wenn sie Potenzen derselben Basis sind. Man hat

$$a^3 : a = aaa : a = aa = a^2,$$
$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = aaaa = a^4,$$

allgemein

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Potenzen derselben Basis werden also dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahiert, und die erhaltene Differenz der gemeinsamen Basis zum Potenzexponenten gibt.

Dieser Satz hat vorerst nur Sinn und Giltigkeit, wenn der Potenzexponent m des Dividends größer ist als der Potenzexponent n des Divisors. Sind beide Exponenten gleich, so würde man nach diesem Satze eine Potenz mit dem Exponenten Null erhalten; ist der Exponent des Dividends kleiner als der des Divisors, so käme bei Anwendung des obigen Satzes eine Potenz mit negativem Exponenten zum Vorschein. Es muss daher zunächst noch die Bedeutung solcher Potenzen festgestellt werden.

Nach dem obigen Satze ist

$$a^3 : a^3 = a^0;$$

es ist aber auch

$$a^3 : a^3 = aaa : aaa = 1;$$

folglich

$$a^0 = 1$$

d. h. eine Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich 1.

Nach dem obigen Satze hat man ferner

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3};$$

es ist aber auch

$$a^2 : a^5 = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3};$$

folglich

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3};$$

d. h. eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich 1 dividiert durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes einer Potenz hat nun der oben für die Division zweier Potenzen derselben Basis aufgestellte Satz allgemeine Giltigkeit.

4. Bei der Division algebraischer Zahlen sind vier Fälle zu unterscheiden.

a) Ist $+ ab$ durch $+ b$ zu dividieren, so muss der Quotient $+ a$ sein, weil nur eine positive Zahl $+ a$ mit einer positiven $+ b$ multipliciert ein positives Product $+ ab$ geben kann; also

$$(+ ab) : (+ b) = + a.$$

b) Es sei $+ ab$ durch $- b$ zu dividieren; hier muss man den Quotienten a so bezeichnen, dass er mit $- b$ multipliciert $+ ab$ gibt; nun kann nur eine negative Zahl mit einer negativen multipliciert ein positives Product geben; der Quotient a muss also negativ sein und man hat

$$(+ ab) : (- b) = - a.$$

c) Um $- ab$ durch $+ b$ zu dividieren, muss man eine Zahl suchen, welche mit $+ b$ multipliciert $- ab$ gibt; diese Zahl kann nur $- a$ sein; somit

$$(- ab) : (+ b) = - a.$$

d) Durch dieselbe Schlussfolge erhält man auch

$$(- ab) : (- b) = + a.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach durch einander dividiert, indem man den Quotienten ihrer absoluten Werte positiv oder negativ nimmt, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Aus den voranstehenden Rechengesetzen ergibt sich für die Division zweier eingliedriger Ausdrücke:

a) Bezüglich des Zeichens ist der Quotient positiv oder negativ zu setzen, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

b) Der Coefficient des Quotienten ist der Quotient des Coefficienten des Dividends durch den des Divisors.

c) Die Hauptgröße des Quotienten ist die Hauptgröße des Dividends nach Weglassung derjenigen Buchstaben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl, als sie im Divisor enthalten sind, folglich bei Potenzen derselben Basis die gemeinschaftliche Basis mit einem Potenzexponenten, welcher gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors. Kommen im Divisor Buchstaben vor, welche der Dividend nicht enthält, so kann man die Division durch dieselben nur anzeigen, indem man sie in den Quotienten als Nenner setzt; z. B.:

$$abx : by = \frac{ax}{y}.$$

§. 30. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividiert und den einzelnen Quotienten die Rechnungszeichen der Glieder des Dividends gibt.

$$(a - b - c + d) : m = (a : m) - (b : m) - (c : m) + (d : m).$$

Denn $[(a : m) - (b : m) - (c : m) + (d : m)] . m = (a : m) . m - (b : m) . m - (c : m) . m + (d : m) . m = a - b - c - d$.

§. 31. Sind Dividend und Divisor mehrgliedrige Ausdrücke, so läſst sich das Divisionsverfahren am einfachsten aus der Art und Weise ableiten, wie der Dividend durch die Multiplication aus dem Divisor und Quotienten entsteht, wie dabei die Theile des Divisors und Quotienten in ihrem Producte, dem Dividende zu einander gestellt erscheinen. Ist der Divisor $a + b + c$, der Quotient $m + n + p$, so erhält man durch die Multiplication, wenn die Theilproducte unter einander geschrieben werden,

$$\begin{array}{rl} \text{Divisor} & a + b + c \\ \text{Quotient} & m + n + p \\ \hline \text{Dividend} & \left\{ \begin{array}{l} am + bm + cm \\ + an + bn + cn \\ + ap + bp + cp. \end{array} \right. \end{array}$$

Der erste Theil am des Dividends ist das Product aus dem ersten Theil a des Divisors und dem ersten Theile m des Quotienten; man erhält daher den ersten Theil des Quotienten, wenn man den ersten Theil des Dividends durch den ersten Theil des Divisors dividiert. — Bildet man nun die Bestandtheile, welche m im Producte hervorgebracht hat, indem man den ganzen Divisor mit m multipliciert, und subtrahiert dieses Product vom Dividende, so ist der erste Theil an des Restes das Product aus dem ersten Theile a des Divisors und dem zweiten Theile n des Quotienten. Wird daher dieser erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividiert, so erhält man den zweiten Theil des Quotienten. — Wenn man das Theilproduct, welches n im Dividende hervorbrachte, nämlich das Product aus dem ganzen Divisor und aus n, von dem früheren Reste subtrahiert, so ist der erste Theil des Restes ap, welches das Product aus dem ersten Theile a des Divisors und dem dritten Theile p des Quotienten darstellt. Man findet daher den dritten Theil des Quotienten, wenn man den ersten Theil des letzten Restes durch den ersten Theil des Divisors dividiert; u. s. w.

Hieraus ergibt sich folgendes **Verfahren für das Dividieren zweier mehrgliedriger Ausdrücke**:

Man dividiere, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfahre man dann eben so, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das zweite Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f. Z. B.

$$\begin{array}{l}
(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b \\
\;\;3a^2 + 2ab \\
\;\;- \;\;\;\; - \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\; - 6ab - 4b^2 \\
\;\;\;\;\;\;\;\; - 6ab - 4b^2 \\
\;\;\;\;\;\;\;\; + \;\;\;\;\;\;\; + \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\; 0
\end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \text{ und}$$
$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b;$$

d. h. die Differenz zweier Quadrate durch die Summe der Wurzeln dividiert gibt die Differenz der Wurzeln; die Differenz zweier Quadrate durch die Differenz der Wurzeln dividiert gibt die Summe der Wurzeln.

Aufgaben.

1. $3a : 3$. **2.** $3a : a$. **3.** $6x : 2$.
4. $5ab : 5a$. **5.** $24mx : 4x$. **6.** $36xy : 9x$.
7. $3abc : ac$. **8.** $4ax : 2by$. **9.** $abx : 3ay$.
10. $a^4 : a$. **11.** $8a^5 : a^2$. **12.** $4a^2 : 2a^4$.
13. $9x^4y^2 : 3x^3y$. **14.** $7a^2m^5 : 4a^2m$.
15. $54ab^2x^3 : bx^2$. **16.** $a^2b^3x^4 : 8ab^2x^5$.
17. $+ 72 : - 9$. **18.** $- 72 : + 9$.
19. $- 48 : - 12$. **20.** $- 144 : - 6$.
21. $- 73{\cdot}242 : + 13$. **22.** $+ 104{\cdot}16 : - 4{\cdot}8$.
23. $+ \frac{5}{6} : - \frac{3}{4}$. **24.** $- 2\frac{1}{2} : - 2\frac{1}{7}$.

25. Das Thermometer zeigte an einem Tage morgens $- 8^0$ R., mittags $+ 1^0$ R., abends $- 5^0$ R., wie groß war die mittlere Tagestemperatur?

26. $[+ 74608 - (- 14816)] : [- 278 - (- 422)]$.

27. Berechne $\dfrac{3x - 1}{7 - x} - \dfrac{8 - x}{1 - 2x} + \dfrac{6(x - 2)}{1 - x}$ für $x = 3$.

28. $- 6ab : + 2b$. **29.** $+ 18a^5 : - 3a^3$.
30. $- 10p^4 : - 5p$. **31.** $- 4a^2b^3x^9 : + 2b^2x^2$.
32. $\dfrac{12ax}{5y} : - 3a$. **33.** $- 2ab : \dfrac{4ax}{5y}$.
34. $- \dfrac{2mn}{7pq} : \dfrac{8nx}{21qy}$. **35.** $\dfrac{8a^6xy^3}{3bc^4z^5} : - \dfrac{4a^5x^3y}{5b^3c^2z^4}$.

---

36. $(20ac + 12bc) : 4c$. **37.** $(15a^2 - 25ab) : 5a$.
38. $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2$.

39. $(12x^3 - 24x^2y + 30xy^2) : 6x.$
40. $(5a^3 - 35a^4 - 15a^5 + 10a^6) : - 5a^3.$
41. $(16x^3y^3 - 12x^2y^2 + 8xy + 4) : 4x^2y^2.$
42. $(7xy - 14xz + {}^7/_2yz) : {}^7/_3xy.$

43. Bestimme:

a) $(2a^2 - ab - 2a) : a.$ b) $(2a^2 - a)(b - 2a) : a.$
c) $2a^2 - (ab - 2a) : a.$ d) $2a^2 - [(ab - 2a) : a].$
e) $2a^2 - a(b - 2a) : a.$ f) $2a^2 - a[(b - 2a) : a].$

44. Berechne die Zahlenwerte der Ausdrücke in 43. für $a = 4$ und $b = 7$.

---

45. $(15a^2 + 10ab - 10b^2) : (5a - 2b).$
46. $(35x^2 - 27xy - 18y^2) : (5x - 6y).$
47. $(4a^2 - 28ay + 49y^2) : (2a - 7y).$
48. $(24a^2x^2 - 38abxy + 15b^2y^2) : (4ax - 3by).$
49. $(42a^4 - 23a^2x^2 - 5x^4) : (7a^2 - 5x^2).$
50. $(36x^2y^2 + 37xy - 10) : (4xy + 5).$
51. $(104x^4 + 88ax^2 - 19) : (13x^2 - 2a).$
52. $(64y^2 - 25) : (8y + 5).$
53. $(9x^2 - 49) : (3x - 7).$
54. $(4x^3 - 16x^2 + 7x + 20) : (2x - 5).$
55. $(15x^3 + 4x^2y - 29xy^2 + 10y^3) : (3x + 5y).$
56. Berechne den Zahlenwert des Ausdruckes in 55. für $x = 3{\cdot}6$ und $y = 2{\cdot}5$.
57. $(x^8 - 1) : (x^2 + 1).$ **58.** $(a^7 - 1) : (a - 1).$
59. $(48x^2 - 12y^2 - 111x + 5y + 72) : (8x - 4y - 9).$
60. $15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4) : (3 + 4x - 5x^2).$
61. $(3a^4 - 11a^3 + 29a^2 - 27a + 30) : (3a^2 - 2a + 5).$
62. $(12 + y - 18y^2 - 73y^3 + 36y^5) : (4 - 5x - 6x^2).$
63. $(8m^6 + 27) : (4m^4 - 6m^2 + 9).$
64. $(12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20) : (3a^2 - 7a + 5).$
65. $(18x^6 - 47x^4 - 10x^3 + 55x^2 + 42x - 49)$
$: (6x^2 + 4x - 7).$
66. $(12a^2 + 26ab - 10b^2 - 36ac + 29bc - 21c^2)$
$: (2a + 5b - 7c).$
67. $(a^6 - 9a^4x^2 + 27a^2x^4 - 27x^6) : (a^4 - 6a^2x^2 + 9x^4).$
68. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^3)$
$: (5x^2 + 6xy - 8y^2)$
69. $(x^6 - y^6) : (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3).$

70. $(a^6 - 16a^3b^3 + 64b^6) : (a^4 + 4a^3b + 12a^2b^2 + 16ab^3 + 16b^4)$.
71. $(17{\cdot}28x^4 - 6{\cdot}74x^2y^2 - 5{\cdot}59y^4) : (5{\cdot}4x^2 - 4{\cdot}3y^2)$.
72. $({}^1/_5 - 14a^2 + 45a^4) : ({}^1/_5 + 2a + 3a^2) = ?$
73. $({}^{25}/_{96}x^4 + x^2y^2 + 6y^4) : ({}^5/_8x^2 - {}^3/_2xy + 3y^2) =$
74. $(a^2 - {}^1/_2ab - {}^5/_2b^2 - {}^{23}/_4ac + {}^{81}/_8bc - {}^1/_2c^2) : (3a - 5b + {}^1/_4c.)$

IV. Ausziehen der Quadrat- und der Cubikwurzel.

1. Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 32. Aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert die gegebene Zahl zum Producte gibt. Die Quadratwurzel aus einer Zahl wird durch das vorgesetzte Wurzelzeichen $\sqrt{}$ angezeigt.

Z. B. Aus 64 die Quadratwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert 64 gibt; diese Zahl ist 8, denn $8 \times 8 = 64$. Man schreibt $\sqrt{64} = 8$ und liest: Quadratwurzel aus 64 ist gleich 8.

Die einziffrigen Quadratwurzeln sind:

$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{49} = 7$,
$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{64} = 8$,
$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{81} = 9$.

§. 33. Das Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung der oben in §. 25 dargestellten Erhebung zum Quadrate. So wie beim Quadrieren die aus den Wurzelziffern gebildeten Bestandtheile des Quadrates in diesem zusammengesetzt wurden, eben so müssen dieselben beim Ausziehen der Quadratwurzel wieder auseinander genommen werden.

Es sei z. B. 467 zum Quadrate zu erheben, und dann aus dem gefundenen Quadrate die Quadratwurzel zu ziehen.

Wir stellen, um die Vergleichung zu erleichtern, das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel neben einander.

467^2				$\sqrt{}$	21	80	89	= 467
4^2 . . .	16			. . . . . .	16			
					5	80		: 8 . . . 2 . 4
2 . 4 . 6 . . .	4	8			4	8		
6^2		36		. . . .		36		
						64	89	: 92 . . . 2 . 46
2 . 46 . 7		64	4	. . . .		64	4 .	
7^2			49	. . . .			49	
	21	80	89				0	

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Wenn man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern theilt, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat. Im vorliegenden Falle hat das Quadrat 218089, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; man findet daher die erste Ziffer der Quadratwurzel, wenn man die Zahl sucht, deren Quadrat der Zahl in der ersten Abtheilung am nächsten kommt, ohne größer als sie zu sein; diese Zahl ist 4. Wird ihr Quadrat $4^2 = 16$ von der ersten Abtheilung subtrahiert, so bleibt 5 als Rest.

Setzt man zu dem Reste 5 die zweite Abtheilung 80 hinzu, so müssen in der so entstehenden Zahl 580 die Bestandtheile vorkommen, welche die zweite Wurzelziffer im Quadrate hervorbringt, nämlich das Product aus ihr und der doppelten ersten Ziffer und ihr Quadrat, und zwar erstreckt sich jenes Product nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Abtheilung, ist also in 58 enthalten. Dividiert man daher die Zahl 580 mit Ausschluss der letzten Ziffer, nämlich 58, durch das doppelte der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 8, so erhält man die zweite Wurzelziffer 6. Wenn man dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Wurzelziffer entstehen, nämlich $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ und $6^2 = 36$ an den gehörigen Stellen von 580 subtrahiert, so bleibt 64 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die dritte Abtheilung 89 hinzu, so enthält die dadurch entstehende Zahl 6489 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Product aus dieser Wurzelziffer und der doppelten ihr vorangehenden bereits gefundenen Zahl in der Zahl 6489 mit Ausschluss der letzten Ziffer, also in 648 vor. Dividiert man daher 648 durch das doppelte der bereits gefundenen Wurzel, d. i. durch 92, so erhält man die dritte Wurzelziffer 7; u. s. w.

Aufgaben.

Bestimme folgende Quadratwurzeln, indem du dabei die in dem obigen Beispiele durchgeführten Schlüsse anwendest:

1. $\sqrt{47|61} = 69$

$6^2 \,.\,.\, 36$

$116{,}1 : 12$

$2 \cdot 6 \cdot 9 \,.\,.\, 108$

$9^2 \,.\,.\,.\, 81$

0

2. $\sqrt{96|04} = 98$

81

$150{,}4 : 18$

144

64

0

3. $\sqrt{1024}$. **4.** $\sqrt{5625}$. **5.** $\sqrt{6561}$.

6. $\sqrt{21609}$. 7. $\sqrt{65536}$. 8. $\sqrt{408321}$.
9. $\sqrt{49729}$. 10. $\sqrt{654481}$. 11. $\sqrt{820836}$.

12. $\sqrt{26|52|25} = 515$
5^2 . . 25
15,2 : 101
101 . 1 . . 101
512,5 : 1025
1025 . 5 . . 5125
0

Anstatt die beiden Bestandtheile, welche jede neue Wurzelziffer im Quadrate hervorbringt, einzeln zu bilden und ihre Summe zu subtrahieren, kann man die neugefundene Wurzelziffer sogleich zu dem doppelten der früheren Wurzelziffern d. i. zu dem bezüglichen Divisor dazusetzen, und sodann das Product aus der dadurch gebildeten Zahl und der neuen Wurzelziffer subtrahieren.

Rechne ebenso:

13. $\sqrt{15376}$. 14. $\sqrt{654481}$. 15. $\sqrt{404496}$.
16. $\sqrt{299636}$. 17. $\sqrt{5943844}$. 18. $\sqrt{11943936}$.

19. $\sqrt{32|52|42|09} = 5703$
75,2 : 107
34209 : 11403
0

Das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neue Wurzelziffer angehängt hat, und aus dieser neuen Ziffer kann auch sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende subtrahiert werden.

Bestimme ebenso:

20. $\sqrt{91068849}$. 21. $\sqrt{104101209}$.
22. $\sqrt{11669056}$. 23. $\sqrt{100020001}$.
24. $\sqrt{1655025124}$. 25. $\sqrt{6449053636}$.
26. $\sqrt{4222140484}$. 27. $\sqrt{5478220225}$.

28. $\sqrt{1|52{\cdot}27|56} = 12{\cdot}34$
5,2 : 22
82,7 : 243
985,6 : 2464
0

Bei Decimalbrüchen geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpunkte gegen die Linke und die Eintheilung der Decimalen vom Decimalpunkte gegen die Rechte; es wird dann in der Wurzel der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung zieht.

29. $\sqrt{0{\cdot}2407}$. 30. $\sqrt{59{\cdot}29}$.
31. $\sqrt{5{\cdot}4756}$. 32. $\sqrt{229{\cdot}2196}$.
33. $\sqrt{0{\cdot}556516}$. 34. $\sqrt{6325{\cdot}0209}$.
35. $\sqrt{27{\cdot}973521}$. 36. $\sqrt{0{\cdot}0001522756}$.

37. Bestimme $\sqrt{7{\cdot}38}$.

Da man für 7·38 auch 7·380000 . . setzen kann, so ist

$\sqrt{7{\cdot}38} = 2{\cdot}716\ldots$
33,8 : 47
90,0 : 541
3590,0 : 5426
3344

Bleibt beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest, so ist die vorgelegte Zahl kein vollständiges Quadrat; die Wurzel ist in diesem Falle nicht genau, sie kann jedoch näherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man sich nämlich der vorgelegten Zahl beliebig viele Decimalabtheilungen von Nullen beigefügt denkt, und dem jedesmaligen Reste eine Abtheilung von zwei Nullen anhängt, übrigens aber wie vorhin verfährt. Eine solche Wurzel heißt irrational.

Wenn die gegebene Zahl ein Decimalbruch ist und die letzte Abtheilung rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird derselben sogleich eine Null angehängt.

Bestimme auf 3 Decimalen:

38. $\sqrt{3 \cdot 5}$. **39.** $\sqrt{10}$. **40.** $\sqrt{28 \cdot 314}$.
41. $\sqrt{0 \cdot 9}$. **42.** $\sqrt{9 \cdot 0571}$. **43.** $\sqrt{0 \cdot 0087}$.
44. $\sqrt{7 \cdot 801}$. **45.** $\sqrt{378 \cdot 853}$. **46.** $\sqrt{0 \cdot 0413}$.

Bestimme auf 4 Decimalen:

47. $\sqrt{2}$. **48.** $\sqrt{229}$. **49.** $\sqrt{0 \cdot 2734}$.
50. $\sqrt{80}$. **51.** $\sqrt{6335}$. **52.** $\sqrt{13 \cdot 7945}$.
53. $\sqrt{0 \cdot 05}$. **54.** $\sqrt{2 \cdot 1731}$. **55.** $\sqrt{0 \cdot 00418}$.

---

56. $\sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{576}} = \frac{5}{24}$.

57. $\sqrt{\frac{441}{3364}}$. **58.** $\sqrt{\frac{139876}{178929}}$. **59.** $\sqrt{\frac{998001}{22667121}}$.
60. $\sqrt{\frac{3}{25}} = \sqrt{0 \cdot 12} = 0 \cdot 34641 \ldots$
61. $\sqrt{\frac{15}{81}}$. **62.** $\sqrt{\frac{17}{24}}$. **63.** $\sqrt{123\frac{116}{233}}$.

Sind s, d und f bezüglich die Maßzahlen der Seite, der Diagonale und des Flächeninhaltes eines Quadrates, so hat man

$$s = \sqrt{f}, \qquad d = s\sqrt{2}, \qquad s = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

64. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt a) 9216 cm^2, b) 1·1025 m^2, c) 87 m^2 4 dm^2 89 cm^2, beträgt?

65. Die Seite eines Quadrates ist a) 57 *cm*, b) 3 *m* 8 *dm* 4 *cm*, c) $37^2/_5$ *dm*; wie groß ist die Diagonale?

66. Die Diagonale eines Quadrates ist a) 38 *cm*, b) 0·578 *m*, c) $128^1/_2$ *cm*; wie groß ist die Seite?

67. Ein Meßtischblatt ist ein Quadrat von 7 *dm* 8 *cm* Seitenlänge; wie lang ist die Diagonale?

68. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist als zwei andere Quadrate zusammengenommen, deren Seiten 1 *m* 2 *dm* 4 *cm* und 1 *m* 5 *dm* 2 *cm* sind?

69. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 19 m^2 44 dm^2; wie lang ist eine Kante desselben?

Bezeichnet man die Maßzahl der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes durch a, und die Maßzahlen der beiden Katheten durch b und c, so ist

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

70. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind

a) 4·51 *m*, 6·04 *m*; b) 1 *m* 5 *dm* 9 *cm*, 2 *m* 1 *dm* 2 *cm*;

wie groß ist die Hypotenuse?

71. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist

die Hypotenuse	a) 397 *cm*,	b) 5·65 *m*,
eine Kathete	a) 228 *cm*,	b) 3·96 *m*;

wie groß ist die zweite Kathete?

72. Wie lang muss eine Leiter sein, um bis zur Spitze einer 4·35 *m* hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten 2·32 *m* von der Mauer absteht?

73. Eine 6 *m* 15 *cm* lange Leiter wird gegen eine verticale Wand so aufgestellt, dass der Fuß der Leiter 2 *m* 75 *cm* von der Wand absteht wie weit ist das obere Ende der Leiter vom Fußboden entfernt?

74. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite 2·34 *m* beträgt?

75. Wie groß ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreieckes, in welchem die Grundlinie 136 *cm* und ein Schenkel 85 *cm* beträgt?

76. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie 38·88 *dm* und die Höhe 36·45 *dm*; wie groß ist die Länge eines Schenkels?

77. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist ein Schenkel 13 *m* 9 *dm* 1 *cm* und die Höhe 5 *m* 3 *dm* 5 *cm*; wie groß ist die Grundlinie?

78. Auf ein 8 *m* 85 *cm* breites Haus soll ein 3 *m* 75 *cm* hohes Dach gesetzt werden; wie lang müssen die Dachsparren sein, wenn sie 64 *cm* Vorsprung erhalten?

Bezeichnet r die Maßzahl des Halbmessers eines Kreises, f die Maßzahl des Flächeninhalts und π die Ludolf'sche Zahl, d. i. einen der Näherungswerte $3\frac{1}{7}$, 3·14 oder genauer 3·1416, so ist

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

79. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt

a) 2909·34 dm^2, b) 14 m^2 86 dm^2 17 cm^2;

wie groß ist der Halbmesser?

80. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt $38\frac{1}{2}$ dm^2 beträgt?

81. Ein kreisrunder Tisch soll 1 m^2 Fläche haben; wie groß muss der Halbmesser genommen werden?

82. Die Seite eines Quadrates ist 3·85 *dm*; wie groß ist der Durchmesser eines flächengleichen Kreises?

Ist r die Maßzahl des Halbmessers und o die Maßzahl der Oberfläche einer Kugel, so ist, wenn π die Ludolf'sche Zahl bezeichnet,

$$r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$$

83. Die Oberfläche einer Kugel beträgt

a) 10 dm^2 b) 49 m^2 88 dm^2 92 cm^2;

wie groß ist der Halbmesser?

84. Eine Kugel hat gleiche Oberfläche mit einem Würfel, dessen Kante 2 *dm* 4·5 *cm* beträgt; wie groß ist der Durchmesser der Kugel?

2. Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 34. Aus einer Zahl die Cubikwurzel ausziehen heißt, eine Zahl finden, welche dreimal als Factor gesetzt die gegebene Zahl gibt. Um die Cubikwurzel aus einer Zahl anzuzeigen, setzt man vor diese das Wurzelzeichen und in dessen Öffnung die Ziffer 3.

Z. B. Aus 216 die Cubikwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche dreimal als Factor gesetzt 216 zum Producte gibt; diese Zahl ist 6, denn $6 \times 6 \times 6 = 216$. Man schreibt $\sqrt[3]{216} = 6$ und liest: Cubikwurzel aus 216 ist gleich 6.

Die einziffrigen Cubikwurzeln sind:

$$\sqrt[3]{1} = 1, \qquad \sqrt[3]{64} = 4, \qquad \sqrt[3]{343} = 7,$$
$$\sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[3]{125} = 5, \qquad \sqrt[3]{512} = 8,$$
$$\sqrt[3]{27} = 3, \qquad \sqrt[3]{216} = 6, \qquad \sqrt[3]{729} = 9.$$

§. 35. Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die Cubikwurzel ausgezogen wird, läſst sich aus dem in §. 27. entwickelten Gesetze ableiten, nach welchem die Bestandtheile der Cubikwurzel in dem Cubus zusammengestellt erscheinen.

Erhebt man z. B. 537 zum Cubus, und ist dann aus dem gefundenen Cubus die Cubikwurzel zu ziehen, so hat man

537^3			$\sqrt[3]{154\,854\,153} = 537$
5^3 .	125	. . . . .	125
			29 854 : 75 . . $3 . 5^2$
$3 . 5^2 . 3$.	22 5	. . . . .	22 5
$3 . 5 . 3^2$.	1 35	. . . .	1 35
3^3 .	27	. . . . .	27
			5 977 153 : 8427 . . $3 . 53^2$
$3 . 53^2 . 7$.	5 898 9	. . . . .	5 898 9
$3 . 53 . 7^2$.	77 91	. . . . .	77 91
7^3 .	343	. . . . .	343
	154 854 153		0

Da die erste Wurzelziffer im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal so viel Ziffern, als deren die Cubikwurzel hat, oder um zwei oder eine weniger. Theilt man daher den Cubus von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Wurzel Ziffern enthält. Im vorliegenden Falle hat der Cubus 154854153, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Der Cubus der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; die erste Ziffer der Cubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die größte Zahl nimmt, deren Cubus in der ersten Abtheilung enthalten ist; in 154 ist der Cubus von 5, nämlich 125, enthalten: die erste Wurzelziffer ist also 5. Wird $5^3 = 125$ von der ersten Abtheilung subtrahiert, so bleibt 29 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die zweite Abtheilung hinzu, so enthält die so entstehende Zahl 29854 die Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer hervorgehen, nämlich das Product aus dem dreifachen Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das Product aus der dreifachen ersten Ziffer mit dem Quadrate der zweiten, und den Cubus der zweiten Wurzelziffer, und zwar erstreckt sich das erste Product nur bis auf die erste Ziffer der zweiten Abtheilung. Wird daher die Zahl 29854 mit Ausschluss der letzten zwei Ziffern, nämlich 298, durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 75, dividiert, so erhält man die zweite Wurzelziffer 3. Entwickelt man dann die drei Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich $3 . 5^2 . 3 = 225$, $3 . 5 . 3^2 = 135$ und $3^3 = 27$, rückt jeden derselben um eine Stelle weiter nach rechts und subtrahiert dann diese Zahlen von 29854, so erhält man 5977 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die dritte Abtheilung dazu, so enthält die so gebildete Zahl 5977153 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer im Cubus hervorbringt, und zwar kommt das Product aus dieser Wurzelziffer und dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl in der Zahl 5977153 mit Ausschluss der letzten zwei Ziffern, also in 59771, vor. Dividiert man daher 59771 durch $3 . 53^2 = 8427$, so erhält man die dritte Wurzelziffer 7; u. s. w.

Aufgaben.

1. $\sqrt[3]{592|704} = 84$
8^3 . . 512
807,04 : 192
$3 . 8^2 . 4$ . . 768
$3 . 8 . 4^2$ . . 384
4^3 . . 64
0

2. $\sqrt[3]{5832}$.
3. $\sqrt[3]{97336}$.
4. $\sqrt[3]{205379}$.
5. $\sqrt[3]{614125}$.
6. $\sqrt[3]{912673}$.

7. $\sqrt[3]{7301384}$. **8.** $\sqrt[3]{139798359}$.

9. $\sqrt[3]{223648543}$. **10.** $\sqrt[3]{152273304}$.

11. $\sqrt[3]{281011375}$. **12.** $\sqrt[3]{731432701}$.

13. $\sqrt[3]{12230590464}$. **14.** $\sqrt[3]{60006085875}$.

15. $\sqrt[3]{12{\cdot}2\,30|590|464} = 2{\cdot}304$

8

4 2,30 : 12

3 6

5 4

27

635904,64 : 158700

634800

1104 0

64

0

Bei Decimalzahlen geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpunkte gegen die Linke, die Eintheilung der Decimalen gegen die Rechte; in der Cubikwurzel wird der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung bringt.

16. $\sqrt[3]{571{\cdot}787}$. **17.** $\sqrt[3]{0{\cdot}103823}$.

18. $\sqrt[3]{11089{\cdot}567}$. **19.** $\sqrt[3]{15{\cdot}252992}$.

20. $\sqrt[3]{796{\cdot}597983}$. **21.** $\sqrt[3]{644972{\cdot}544}$.

22. $\sqrt[3]{12{\cdot}895213625}$. **23.** $\sqrt[3]{1593{\cdot}413632}$.

24. $\sqrt[3]{0{\cdot}074246873427}$. **25.** $\sqrt[3]{914{\cdot}367667816}$.

26. $\sqrt[3]{9,2\,95} = 21{\cdot}025\ldots$

8

1 2,95 : 12

1 2

6

1

340000,00 : 132300

264600

252 0

8

75147 920,00 : 13255212

66276 060

15 765 0

1 25

8856 093 75

Bleibt beim Ausziehen der Cubikwurzel am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht genau; sie läſst sich aber mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmen, indem man dem zuletzt erhaltenen und jedem folgenden Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

Bestimme auf 3 Decimalstellen:

27. $\sqrt[3]{5}$. 28. $\sqrt[3]{8 \cdot 539}$. 29. $\sqrt[3]{0 \cdot 8037}$.

30. $\sqrt[3]{100}$. 31. $\sqrt[3]{0 \cdot 72}$. 32. $\sqrt[3]{1133}$.

33. $\sqrt[3]{7958}$. 34. $\sqrt[3]{12345}$. 35. $\sqrt[3]{0 \cdot 0125}$.

36. $\sqrt[3]{7 \cdot 1856}$. 37. $\sqrt[3]{25 \cdot 47382}$. 38. $\sqrt[3]{8 \cdot 103218}$.

---

39. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

40. $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$. 41. $\sqrt[3]{\frac{729}{2197}}$. 42. $\sqrt[3]{10\frac{23067}{54872}}$.

43. $\sqrt[3]{\frac{11}{40}} = \sqrt[3]{0 \cdot 275} = 0 \cdot 651$.

44. $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$. 45. $\sqrt[3]{\frac{17}{48}}$. 46. $\sqrt[3]{5\frac{17}{25}}$.

Bezeichnen s und v bezüglich die Maßzahlen der Seite und des Cubikinhaltes eines Würfels, so ist

$$s = \sqrt[3]{v}.$$

47. Der Cubikinhalt eines Würfels beträgt

a) $195 \cdot 112\ dm^3$, b) $72\ dm^3\ 511\ cm^3\ 713\ mm^3$;

wie groß ist die Seite des Würfels?

48. Wenn man 21952 gleiche würfelförmige Steine so in einen Haufen bringen würde, dass in der Länge, Breite und Höhe gleich viele Stücke sind; wie viel Steine kommen in jede Reihe?

49. Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum einnimmt, als zwei Würfel zusammengenommen, deren Seiten 3 *dm* 4 *cm* und 2 *dm* 7 *cm* sind?

50. Es soll ein würfelförmiger Kessel gefertigt werden, welcher 18 *hl* hält; wie lang wird eine Seite des Kessels werden? ($1\ l = 1\ dm^3$.)

51. Ein eiserner Würfel wiegt 18 *kg*; wie groß ist eine Seite, wenn $1\ dm^3$ Eisen $7 \cdot 8$ *kg* wiegt?

Ist r die Maßzahl des Halbmessers, v der Cubikinhalt einer Kugel und π die Ludolf'sche Zahl, so hat man

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}.$$

52. Der Cubikinhalt einer Kugel ist

a) 10 dm^3, b) 13·144256 dm^3;

wie groß ist der Halbmesser?

53. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, welche mit einem Würfel von 1 *m* 5 *dm* Seitenlänge gleichen Inhalt hat?

54. Wie groß ist der Durchmesser einer 25 *kg* schweren Kanonenkugel, wenn 1 dm^3 Eisen zu $7\frac{4}{5}$ *kg* angenommen wird?

V. Zinseszinsenrechnung.

§. 36. Wenn der Zins am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Capital geschlagen, und die so vermehrte Summe von neuem verzinset wird, so nennt man die daraus hervorgehenden Interessen Zinseszinsen, während die gewöhnlichen Zinsen einfache genannt werden.

1. Berechnung des Wertes eines Geldbetrages nach einer bestimmten Zeit.

§. 37. Um den Betrag, zu welchem ein Capital mittelst Zinseszinsen in einer bestimmten Zeit anwächst, zu berechnen, könnte man den Zins für jede einzelne Verzinsungsperiode suchen und jedesmal zu dem Anfangscapitale jener Periode addieren.

Z. B. Zu welchem Betrage werden 5000 fl. in 3 Jahren anwachsen, wenn man die 4 % Interessen am Ende eines Jahres zum Capitale schlägt und mit diesem weiter verzinset?

Anfangscapital	fl.	5000	
Zins des 1. Jahres	„	200	
Capital am Ende des 1. Jahres	fl.	5200	
Zins des 2. Jahres	„	208	
Capital am Ende des 2. Jahres	fl.	5408	
Zins des 3. Jahres	„	216	„ 32
Capital am Ende des 3. Jahres	fl.	5624	„ 32.

Durch die einfachen Zinsen wäre das Anfangscapital in 3 Jahren nur auf fl. 5600 angewachsen.

Ein kürzeres Verfahren, den Endwert eines auf Zinseszins angelegten Capitals zu berechnen, läßt sich aus der Kettenrechnung herleiten.

Es soll zunächst bestimmt werden, zu welchem Werte eine Capitalseinheit (1 Gulden, 1 Mark) mittelst Zinseszinsen à 4 % nach 3 Jahren anwächst. Da 100 fl. am Anfange des Jahres mit den Zinsen à 4 % am Ende desselben Jahres auf 104 fl. anwachsen, also 1 fl. Anfangscapital am Ende des Jahres 1·04 fl. wert ist, so hat man folgende Kettenrechnung:

x fl. Wert am Ende des 3. Jahres	1 fl. Anfangscapital
1	1·04 fl. am Ende des 1. Jahres
1	1·04 „ „ „ „ 2. „
1	1·04 „ „ „ „ 3. „

$$x = 1{\cdot}04 \times 1{\cdot}04 \times 1{\cdot}04, \text{ oder}$$
$$x = (1{\cdot}04)^3.$$

Der Endwert einer auf Zinseszins angelegten Capitalseinheit nach einer bestimmten Zeit wird also gefunden, indem man die Summe aus 1 und dem 100sten Theil des Procentsatzes zur sovielten Potenz erhebt, d. i. sovielmal als Factor setzt, als Zeitperioden da sind.

Ein Anfangscapital von 5000 fl. wird bei der angegebenen Verzinsungsweise nach 3 Jahren auf 5000mal $(1{\cdot}04)^3$ fl. anwachsen; sein Endwert beträgt also, da $(1{\cdot}04)^3 = 1{\cdot}124864$ ist,

$$1{\cdot}124864 \text{ fl.} \times 5000 = 5624{\cdot}32 \text{ fl.}$$

Um daher den Endwert irgend eines auf Zinseszins angelegten Capitals nach einer bestimmten Zeit zu erhalten, multipliciert man den *Endwert* einer Capitalseinheit nach dieser Zeit mit der Zahl der Capitalseinheiten.

Werden die Zinsen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale geschlagen, so nimmt man doppelt so viele Zeitperioden, als Jahre gegeben sind, somit für das obige Beispiel 6 Halbjahre, dagegen für eine Zeitperiode nur die Hälfte des Procentsatzes, also für das frühere Beispiel 2%. Da hiernach 100 fl. nach einem halben Jahre 102 fl. wert sind, 1 fl. also auf 1·02 fl. anwächst, so hat man folgende Kette:

x fl. Wert am Ende des 6. Halbj.	1 fl. Anfangscapital
1	1·02 fl. am Ende des 1. Halbj.
1	1·02 „ „ „ „ 2. „
1	1·02 „ „ „ „ 3. „
1	1·02 „ „ „ „ 4. „
1	1·02 „ „ „ „ 5. „
1	1·02 „ „ „ „ 6. „

$$x = (1{\cdot}02)^6 = 1{\cdot}126162$$

5000 fl. Capital geben dann mittels Zinseszinsen à 4% bei halbjähriger Capitalisierung nach 3 Jahren

$$1{\cdot}126162 \text{ fl.} \times 5000 = 5630{\cdot}81 \text{ fl.}$$

Die folgende Tabelle enthält die bereits ausgerechneten Endwerte, zu denen eine Capitalseinheit mittels Zinseszinsen à 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5% nach 1, 2, 3, . . . 30 Zeitperioden anwächst.

Endwert

einer auf Zinseszins angelegten Capitalseinheit nach 1, 2, 3, . . . 30 Zeitperioden.

Zeitperioden	2%	2½%	3%	4%	5%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·131408	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·159683	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345868	1·448298	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·521618	1·652848	1·947901	2·292018
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·638616	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·679582	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·721571	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·764611	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	1·808726	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	1·853944	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	1·900293	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	1·947800	2·221289	2·883369	3·733456
28	1·741024	1·996495	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·046407	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·097568	2·427262	3·243398	4·321942

Die Rechnung, die in dem Vorangehenden für Capitalien, die auf Zinseszinsen angelegt werden, abgeleitet wurde, kann auch auf andere Größen, die in einem beständigen Verhältnisse anwachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes einer Waldung u. dgl., angewendet werden.

Aufgaben.

1. Ein Capital von 1000 fl. ist zu 5% angelegt; wie viel wird es, Zins von Zins gerechnet, nach 4 Jahren wert sein?

$1{\cdot}215506 \times 1000 = 1215{\cdot}506$ fl. = fl. 1215 „ 51,

2. Jemand legt ein Capital von 3485 fl. zu 4% Zins an; wie hoch wird das Capital a) mit den einfachen Zinsen, b) mit Zinseszinsen in 5 Jahren anwachsen?

3. Zu welcher Summe wachsen mit Zinseszinsen und bei ganzjähriger Capitalisation an: a) 2390 fl. à 3% in 25 Jahren?
b) 7500 fl. à 4% in 20 Jahren?
c) 4365 fl. à 5% in 16 Jahren?

4. Jemand legt 3560 fl. zu 4% unter der Bedingung an, dass die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden; wie hoch wird das Capital in 10 Jahren anwachsen?

Hier muss der Endwert für 20 Zeitperioden (halbe Jahre) zu 2% genommen werden.

5. Zu welcher Summe wachsen mit Zinseszinsen und bei halbjähriger Capitalisation an: a) 3840 fl. à 4% in 15 Jahren?
b) 1950 fl. à 5% in 9 Jahren?
c) 2700 fl. à 3% in 12 Jahren?

6. Ein Capital von 2800 fl. ist zu 4% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung in 8 Jahren anwachsen?

7. Wie viel betragen die Zinseszinsen zu 5% von 5260 fl. in 12 Jahren a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung?

8. Wenn A dem B 3845 fl. schuldig ist und 25 Jahre lang keine Zinsen bezahlte, B aber die Zinsen jedes Jahr zum Capital rechnet; wie viel beträgt die ganze Schuld bei 5%?

9. Jemand legt in eine Sparcasse ein Capital von 3580 fl.; wenn nun die Sparcasse mit 4% jährlich verzinst und die Zinsen halbjährig zum Capitale schlägt, welchen Wert wird jenes Capital nach 8 Jahren haben?

10. Ein Vater will seiner Tochter ein Capital sichern, welches ihr nach 14 Jahren ausgezahlt werden soll; zu dem Ende legt er eine Summe von 3500 fl. in eine Sparcasse, welche dieselbe mit 4% und zwar halbjährig verzinset. Welchen Betrag wird die Sparcasse der Tochter zur bedungenen Zeit auszuzahlen haben?

11. Eine Stadt hatte im Jahre 1870 35846 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung derselben im Jahre 1888 bei einer jährlichen Zunahme von 2%?

12. Der Bestand eines Waldes ist gegenwärtig 18770 m^3; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von $2\frac{1}{2}\%$ nach 12 Jahren sein?

13. Jemand legt am Anfange eines jeden Jahres 2000 fl. zu 5% Zins von Zins an; am Ende des dritten Jahres fordert er sämmtliche Capitalien sammt Zinsen von Capital und Zinsen ein; wie groß wird dieser ganze Betrag sein?

Die ersten 2000 fl. liegen durch drei Jahre an, die zweiten durch zwei Jahre, die dritten durch ein Jahr. Man hat daher:

2000 fl.	sind nach	3 Jahren	1·157625	fl. × 2000 wert,	
2000 „	„ „	2 „	1·1025	„ × 2000,	
2000 „	„ „	1 Jahre	1·05	„ × 2000;	
Gesammtbetrag	nach	3 Jahren	3·310125	fl. × 2000	= 6620·25 fl.

14. Wenn jährlich in eine Versicherungsbank 200 fl. eingezahlt werden, welches Capital kann nach 8 Jahren bei 5% Zinseszins dafür behoben werden?

15. Jemand erspart jährlich 350 fl. und legt diese am Ende eines jeden Jahres auf 5% Zinseszinsen an; zu welchem Betrage wachsen diese Ersparnisse in 10 Jahren an?

16. Jemand legt durch 6 Jahre zu Anfang eines jeden derselben 325 fl. auf Zins von Zins an; wie hoch wird das Capital bei ganzjähriger Capitalisation zu 4% in jener Zeit anwachsen?

Da die erste Summe durch 6, die zweite durch 5, . . . die sechste durch 1 Jahr anliegt, so hat man

1. Summe	nach	6 Jahren	1·265309	fl. × 325
2. „	„	6 „	1·216653	„ × 325
3. „	„	6 „	1·169859	„ × 325
4. „	„	6 „	1·124864	„ × 325
5. „	„	6 „	1·081600	„ × 325
6. „	„	6 „	1·040000	„ × 325
Gesammtbetrag	nach	6 Jahren	6·898295	fl. × 325 = 2241·946 fl.
				= 2241 fl. 95 kr.

17. Ein Arbeiter legt zu Anfang jedes halben Jahres 50 fl. in eine Sparcasse, welche halbjährig 2% Zinsen zum Capitale schlägt; wie viel hat die Sparcasse nach Ablauf von 12 Jahren an ihn auszuzahlen?

18. Jemand ist verpflichtet, 3000 fl. nach 1 Jahre, 2000 fl. nach 2 Jahren, 1000 fl. nach 3 Jahren und 4000 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren wert sein, wenn man 5% Zinseszins rechnet und wenn die Capitalisierung ganzjährig geschieht?

2. Berechnung des Wertes eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit.

§. 38. Die Aufgabe, den Wert eines Geldbetrages vor einer gewissen Zeit, oder was dasselbe ist, den gegenwärtigen oder Barwert eines nach einer bestimmten Zeit zahlbaren Capitals mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu bestimmen, ist die Umkehrung der in 1. behandelten Aufgabe.

Ist zunächst der gegenwärtige Wert einer z. B. nach 3 Jahren fälligen Capitalseinheit, den Zins von Zins zu 4% gerechnet, zu bestimmen, so hat man folgenden Ansatz:

1 fl. gegenw. Wert $(1\cdot04)^3$ fl. nach 3 Jahren $\quad x : 1 = 1 : (1\cdot04)^3$,

x fl. " " 1 fl. " " " $\quad$ daher $x = \frac{1}{(1\cdot04)^3}$.

Der Barwert einer nach einer bestimmten Zeit fälliger Capitalseinheit bei Anrechnung von Zinseszinsen wird also gefunden, indem man 1 durch die sovielte Potenz der Summe aus 1 und dem 100sten Theil des Procentsatzes, als Zeitperioden da sind, d. i. durch die Zahl, welche den Endwert einer Capitalseinheit nach dieser Zeit ausdrückt, dividiert.

Da $(1\cdot04)^3 = 1\cdot124864$ ist, so ist der Barwert einer nach 3 Jahren fälligen Capitalseinheit bei 4% Zinseszins

$$1 : 1\cdot124864 = 0\cdot888996.$$

Der Barwert eines nach 3 Jahren fälligen Capitals von 2000 fl. bei 4% Zinseszins ist dann 2000mal 0·888996 fl., also 1777·992 fl.

Um daher den Barwert irgend eines nach einer bestimmten Zeit fälligen Capitals mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu erhalten, multipliciert man den Barwert einer nach dieser Zeit fälligen Capitalseinheit mit der Zahl der Capitalseinheiten.

Findet die Capitalisierung halbjährig statt, so nimmt man doppelt so viele Zeitperioden, als Jahre gegeben sind, dagegen für eine Periode nur den halben Procentsatz, also für das frühere Beispiel 6 Zeitperioden und 2%. Bei halbjähriger Verzinsung ist demnach der Barwert einer nach 3 Jahren fälligen Capitalseinheit

$$\frac{1}{(1\cdot02)^6} = 1 : 1\cdot126162 = 0\cdot887971 \text{ fl.},$$

daher eines nach 3 Jahren fälligen Capitals von 2000 fl.

$$0\cdot887971 \text{ fl.} \times 2000 = 1775\cdot942 \text{ fl.}$$

In der folgenden Tabelle erscheinen die Barwerte einer nach 1, 2, 3, . . . 30 Zeitperioden fälligen Capitalseinheit bei 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5% Zinseszins bereits ausgerechnet.

Barwert

einer nach 1, 2, 3, . . . 30 Zeitperioden fälligen Capitalseinheit mit Rücksicht auf Zinsenszinsen.

Zeit-perioden	2%	2½%	3%	4%	5%
1	0·980392	0·975610	0·970874	0·961538	0·952381
2	0·961169	0·951814	0·942596	0·924556	0·907029
3	0·942322	0·928599	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·905951	0·888487	0·854804	0·822702
5	0·905731	0·883854	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·862297	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·841265	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853490	0·820747	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·800728	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820348	0·781198	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·762145	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·743556	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·725420	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·707727	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·690466	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·673625	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714163	0·657195	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·641166	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·625528	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·610271	0·553676	0·456387	0·376889
21	0·659776	0·595386	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·580865	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·566697	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621721	0·552875	0·491934	0·390121	0·310068
25	0·609531	0·539391	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·526235	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·513400	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·500878	0·437077	0·333477	0·255094
29	0·563112	0·488661	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·476743	0·411987	0·308319	0·231377

Aufgaben.

1. Welchen gegenwärtigen Wert haben 2485 fl., nach 5 Jahren zahlbar, wenn man 5% Zinseszins und ganzjährige Capitalisierung rechnet?

$0·783526 \times 2485 = 1947·062$ fl.

2. Welchen Barwert haben 6000 fl., nach 6 Jahren zahlbar, bei 3% Zinseszins?

3. Welchen gegenwärtigen Wert haben bei Berechnung von ganzjährigen Zinseszinsen:

a) 6050 fl., fällig nach 8 Jahren, à 5%?
b) 2900 „ „ „ 14 „ à 3%?
c) 4682 „ „ „ 12 „ à 4%?

4. Ein Capital hat sich bei 4% Zinseszins in 16 Jahren auf 36400 fl. vergrößert; wie viel betrug das ursprüngliche Capital?

5. Welches Capital wird zu 4% bei halbjähriger Verzinsung nach 9 Jahren auf 5000 fl. anwachsen, oder: wie viel sind 5000 fl. vor 18 Perioden und bei 2% Zinseszins wert?

6. Wie viel Capital muss man zu 4% Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 fl. anwachse?

7. Welchen Barwert haben bei Berechnung von Zinseszinsen und bei halbjähriger Capitalisierung:

a) 5540 fl. à 4%, zahlbar nach 15 Jahren?
b) 3059 „ à 5%, „ „ 10 „
c) 8480 „ à 6%, „ „ 12 „

8. Welches Capital muss ein Vater für seinen Sohn bei einer Versicherungsgesellschaft einzahlen, wenn der Sohn nach 20 Jahren bei 5% Zinseszins 6000 fl. erhalten soll?

9. Wenn jemand nach 12 Jahren sich ein Capital von 3000 fl. dadurch sichern will, dass er sogleich in eine Versicherungsanstalt eine bestimmte Summe einlegt, wie hoch wird diese Summe sein müssen, wenn die Anstalt die Zinsen à 5% halbjährig zum Capitale schlägt?

10. Jemand will nach 15 Jahren 8000 fl. beziehen; a) wie viel muss er gegenwärtig bei 4% Zinseszins und ganzjähriger Verzinsung anlegen, um diesen Zweck zu erreichen; b) wie viel bei halbjähriger Capitalisation?

11. Ein Land zählt gegenwärtig 1258750 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 25 Jahren, wenn dieselbe jährlich um $2\frac{1}{2}$% zunahm?

12. Ein 60jähriger Mann will auf den Todesfall seinem treuen Diener einen Betrag von 800 fl. versichern. Welche Einlage muss er zu diesem Ende bei einer Versicherungsanstalt, welche die Capitalien ganzjährig zu 4% verzinst, machen, wenn man annimmt, dass ein 60jähriger Mann noch 12 Jahre leben wird?

13. Jemand hat die Obliegenheit, durch 4 Jahre am Schlusse eines jeden Jahres 500 fl. zu bezahlen; wie viel muss er bei 4% Zinseszins und ganzjähriger Capitalisierung sogleich zahlen, um sich dieser ganzen Verpflichtung zu entledigen?

Die ersten 500 fl. sind hier um 1 Jahr früher, die zweiten um 2 Jahre früher, die dritten um 3, die vierten um 4 Jahre früher zu entrichten, man hat also

$$\begin{array}{l} 0{\cdot}961\,538 \times 500 \\ 0{\cdot}924\,556 \times 500 \\ 0{\cdot}888\,996 \times 500 \\ \underline{0{\cdot}854\,804 \times 500} \\ 3{\cdot}629\,894 \times 500 = 1814{\cdot}85 \text{ fl.} \end{array}$$

14. Jemand will durch die nächsten 5 Jahre am Ende jedes derselben eine jährliche Summe (Jahresrente) von 1000 fl. beziehen; wie viel Capital muss er zu diesem Ende anlegen, wenn die Zinseszinsen ganzjährig zu 5% gerechnet werden?

15. Jemand will durch 12 Jahre nach Ablauf jedes Jahres eine Rente von 860 fl. beziehen; welchen Betrag muss er dafür sogleich erlegen, wenn die Rentanstalt 4% Zins von Zins rechnet?

16. Welchen Barwert hat eine durch 8 Jahre am Ende eines jeden Jahres mit 250 fl. zu leistende Rente bei 4% Zinseszins?

17. Welches Capital gewährt zu 4% Zinseszins auf 8 Jahre eine nachschussweise jährliche Rente von 620 fl.?

18. Jemand kauft ein Haus mit der Verpflichtung, dem bisherigen Besitzer 15 Jahre hintereinander eine nachschussweise Rente von 600 fl. auszuzahlen; wie hoch stellt sich hiernach der Kaufschilling, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

19. A hat an B, so lang dieser lebt, eine jährliche Rente von 320 fl. zu bezahlen, B wünscht aber sogleich den Betrag aller Renten bar zu empfangen; wie viel muss ihm A geben, wenn man annimmt, dass B noch 18 Jahre leben wird, und wenn man ganzjährig 5% Zinseszins rechnet?

VI. Vermischte Wiederholungsaufgaben
mit besonderer Rücksicht auf das bürgerliche Geschäftsleben.

1.* 1 *hl* kostet 32 fl.; wie viel kosten 52 *l*?

2.* Von welchem Capitale betragen die jährlichen Zinsen

a) 43 fl. zu 5%? b) 78 fl. zu 6%?

3.* Welche Feinheit in Tausendtheilen hat ein Silberbarren von 20 *kg* Gewicht, wenn sich darunter 15 *kg* feines Silber befinden?

4.* Wie viel *l* Wein à 32 kr. und wie viel à 48 kr. muss man mischen, um ein *hl* à 36 fl. zu erhalten?

5.* Welche Zahl ist es, deren 3faches zu ihrem 5fachen addiert 104 gibt?

6.* Von welcher Zahl betragen $^5/_8$ genau 100?

7.* Dividiert man eine Zahl durch 8 und addiert zum Quotienten 8, so erhält man 20; welche Zahl ist es?

8.* A ist dem B um 450 *m* voraus; wenn nun in einer Minute A 75 *m* und B 90 *m* zurücklegt, wann wird B den A einholen?

9.* Wenn man das Sonnenjahr, welches 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden beträgt, zu 365 Tageu rechnet und wegen des dabei Vernachlässigten jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen annimmt; wie groß wird der Fehler, den man bei dieser Rechnungsweise in 400 Jahren begeht?

10. Eine Dampfmaschine von 4 Pferdekraft vermag in 5 Secunden eine Last von 1500 *kg* 1 *m* hoch zu heben; wie viel *kg* wird eine Maschine von 7 Pferdekraft in 12 Secunden eben so hoch heben?

11. Für eine Steuer sammt 4% Zuschuss wurden 468 fl. bezahlt; wie groß war der eigentliche Steuerbetrag?

12. Wie viel beträgt der in dem Verkaufspreise von 788 fl. enthaltene Gewinn à 6%?

13. Für eine mit 3% Verlust verkaufte Ware werden 520 fl. gelöst; wie groß ist a) der Verlust, b) der Einkaufspreis?

14. Wie viel beträgt die Sensarie à $^1/_2$% bei einer Partie Baumwolle, gewogen 3198 Pfd. Brutto, 285 Pfd. Tara, der Centner Netto zu $134^1/_5$ Mark gerechnet?

15. Wie viel Zins geben

a) 3750 fl. zu $5^1/_2$% in 2 Jahren 5 Mon. 20 Tagen?

b) 5080 fl. zu $6^1/_4$% in 3 Jahren 7 Mon. 12 Tagen?

16. a) $(5ax - 2by) . 3z$. b) $(5x^2 - 3x + 3) . - 2x^2$.

17. a) $(2a + x)(2a - x)$. b) $(7a - 5)^2$.

18. a) $(4x^2 + 3a^2)^2$. b) $(5x - 6a)^3$.

19. $(3{\cdot}4x - 0{\cdot}5y)(2{\cdot}5x - 1{\cdot}2y)$.

20. $(12x^3 - 7x^2 + 4x - 1)(8x - 5)$.

21. Bei einem Geschäfte, zu welchem A 4800 fl., B. 3650 fl. und C 3280 fl. hergegeben hat, werden 12% gewonnen; wie viel gewinnt jeder?

22. Jemand soll 200 fl. nach 2 Jahren und 1800 fl. nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlen; er bezahlt 2500 fl. schon nach $1^1/_2$ Jahren; wann muss er dann den Rest zahlen?

23. Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre in $2^1/_2$, durch eine zweite in $3^1/_2$ Stunden gefüllt werden; in wie viel Stunden wird der Wasserbehälter voll, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind?

24. a) $\sqrt{208574891}$. b) $\sqrt{52301824}$.

25. a) $\sqrt{412455481}$. b) $\sqrt{3163725009}$.

26. a) $\sqrt[3]{0·857375}$. b) $\sqrt[3]{109902239}$.

27. a) $\sqrt[3]{80677·568161}$. b) $\sqrt[3]{69021909208}$.

28. Ein Haus wurde für 24500 fl. gekauft; der jährliche Mietzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 125 fl. in Anschlag gebracht werden und wenn die Steuer 35% des Mietzinses beträgt?

29. Ein Triester kauft in Amsterdam 3214 Pfd. Kaffee und bezahlt das Pfd. mit $^4/_5$ fl. holländisch; die Spesen betragen 20%; wie viel fl. ö. W. muss er bezahlen, wenn 100 fl. holl. = 101 fl. ö. W. gerechnet werden?

30. Ein Wiener ist nach Hamburg den Reinertrag einer Verkaufsrechnung mit 2155 fl. ö. W. schuldig und übermacht dafür einen Hamburger Wechsel; auf wie viel Mark muss dieser gestellt werden, wenn der Curs auf Hamburg 59·75 ist.

31. Am 13. März werden verkauft:

6000 fl.	C.	M.	böhm.	Grundentlastungs-Oblig.	à 109,
2500 „	„	„	niederösterr.	„ „	à 110 und
3000 „	„	„	tirol.	„ „	à 105.

(Zinsen à 5% mit 10% Einkomm.-St. seit 1. November.)

32. Jemand erspart jährlich 450 fl. und legt diese am Ende eines jeden Jahres auf 5% Zinseszinsen an; zu welchem Betrage wachsen diese Ersparnisse in 15 Jahren an?

33. Jemand hat nach 4 Jahren 5250 fl. zu fordern; wie viel erhält er jetzt für seine Forderung, die Zinseszinsen zu 5% gerechnet?

34. Aus 1 *kg* feinen Silbers werden 90 österr. Guldenstücke geprägt; wie viel Guldenstücke gehen auf 1 *kg* Münzsilber d. i. $^9/_{10}$ feines Silber?

35. Wenn 100 *kg* einer Ware für 87 fl. eingekauft, und überdies 2% Provision gegeben werden, wie theuer muss man das *kg* verkaufen, wenn man $12^1/_2$% gewinnen will?

36. A erhielt 5 Kisten einer Ware, von denen jede 82 *kg* Brutto wog, gegen 12% Tara, zu dem Einkaufspreise von $^3/_5$ fl. pr. *kg* Netto; wenn nun die Ware mit $11^3/_4$% Gewinn wieder verkauft wurde, wie groß war der ganze Gewinn?

37.* Für 20 fl. kauft man 48 *kg*; wie viel für 45 fl.?

38.* Für 5 Monate beträgt der Zins eines Capitals 16 fl. 50 kr.; wie viel für 1 Jahr?

39.* a) 450 fl. Capital geben jährlich 27 fl. Zins,
b) 360 „ „ „ „ $16\frac{1}{5}$ fl. Zins;
zu wie viel % sind diese Capitalien angelegt?

40.* Ein *hl* Wein à 60 kr. pr. *l* war gemischt aus 60 *l* à 65 kr. und einer geringeren Sorte; welchen Wert hatte 1 *l* der zweiten Sorte?

41.* Von zwei Zahlen ist die zweite 5mal so groß als die erste, ihre Summe beträgt 72; wie heißen die zwei Zahlen?

Da die zweite Zahl das 5fache der ersten ist, so ist die Summe beider das 6fache der ersten Zahl. Ist nun diese Summe, d. i. das 6fache der ersten Zahl, gleich 72, so ist die erste Zahl selbst der 6te Theil von 72, somit 12, und folglich die zweite Zahl 5mal 12, also 60.

42.* Von zwei Zahlen, deren Differenz 30 ist, ist die eine 3mal so groß als die andere; welche Zahlen sind es?

43.* Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der 6te und 9te Theil derselben. Wie viel Schüler hatte er?

44.* Drei Personen sollen 350 fl. so unter sich theilen, dass B 18 fl. mehr erhält als C, und A 14 fl. mehr als B; wie viel erhält jeder?

45.* Eine bestimmte Arbeit kann A allein in 5 Tagen, B allein in 7 Tagen zustande bringen; wann wird die Arbeit fertig, wenn A und B gleichzeitig arbeiten?

46. a) $\sqrt{3{\cdot}0976}$. b) $\sqrt{514089}$.

47. a) $\sqrt{97535376}$. b) $\sqrt{422220304}$.

48. a) $\sqrt[3]{41063625}$. b) $\sqrt[3]{961504{\cdot}803}$.

49. a) $\sqrt[3]{1767172329}$. b) $\sqrt[3]{627881709547}$.

50. An einem *q* Kaffee gewinnt man 24 fl. oder 15%; wie groß ist die Verkaufssumme?

51. 20 Gasflammen 300 Nächte und zwar jede Nacht 6 Stunden zu unterhalten, kostet 675 fl.; wie viel kosten 30 Gasflammen von gleicher Stärke, die man 240 Nächte zu 4 Stunden jede Nacht brennen lässt, wenn das Gas um $\frac{1}{10}$ im Preise gestiegen ist?

52. Wie hoch sind die Assecuranzkosten von einer Ware, welche mit 7600 fl. versichert wird, wenn die Assecuranzprämie $1\frac{1}{8}$%, die Sensarie 1‰, die Provision $\frac{1}{3}$% beträgt und die Polizze 2 fl. kostet?

53. Am 8. November werden gekauft:
8 Stück Rudolfsbahn-Actien à 194, und
14 Stück Siebenbürgerbahn-Actien à 190.
(Nominalwert einer Actie 200 fl., Zinsen 5% seit 1. Juli.)

54. Am 25. Juni werden folgende Wechsel zu 4% discontiert:
2735 fl. auf F. Lang, pr. 20. Juli;
3088 „ „ K. Fritsche, pr. 31. Juli;
wie groß ist der discontierte Wert dieser Wechsel?

55. a) $(a + b)^2 + (a - b)^2$.
b) $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

56. $25x^2 - (5x + 3y)(5x - 3y)$.

57. $(3a + 8x)^2 + (4a + 6x)^2 - (5a - 10x)^2$.

58. $(x^3 + 2ax^2 - 2a^2x + a^3)(x + 2a)$.

59. $(4a^4 + 6a^2b^2 - 6b^4)(2a^2 - 3ab + 4b^2)$.

60. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{4x^2}{5} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$.

61. Für 100 *kg* Weizen bezahlte man an einem Tage in Breslau 22·4 Mark und in Budapest 12·6 fl.; wie theuer hätte der Weizen in Breslau sein müssen, damit die Preise an beiden Orten gleich wären, wenn an diesem Tage der Curs auf Breslau 59·60 fl. pr. 100 Mark war?

62. Drei Personen beschließen auf 2 Jahre ein Geschäft in Gemeinschaft zu führen; A legt dazu 4800 fl., B ebenfalls 4800 fl. und C 6000 fl. ein. Nach 4 Monaten nimmt A 800 fl., nach 8 Monaten B 300 fl. und nach 10 Monaten C 1000 fl. zurück. Am Schlusse theilten sie einen Gewinn von 1415 fl.; wie viel gebürt jedem?

63. Es hat jemand nach und nach folgende Zahlungen zu leisten: den 17. März 250 fl., den 13. Juli 300 fl., den 21. August 400 fl., den 7. October 250 fl. und den 18. December 500 fl. An welchem Tage kann er diese sämmtlichen Posten auf einmal abtragen? (Man berechne hier die einzelnen Zeiten vom 1. März an, von welchem Zeitpunkte aus dann auch das Resultat zu nehmen ist.)

64. Eine Arbeit, für welche 18 fl. gezahlt werden, können A und B in 4 Tagen vollenden, A und C in 5 Tagen, B und C in 6 Tagen; wie hoch würde sich hiernach der Tagelohn für jeden der drei Arbeiter stellen?

65. Ein Capital, wovon die eine Hälfte zu 6%, die andere zu $5\frac{1}{2}$% angelegt ist, bringt jährlich 324·3 fl. Zinsen; wie groß ist das Capital?

66. Jemand hat in der Sparcasse 2345 fl. 30 kr.; er legt zu Anfange eines jeden halben Jahres 50 fl. dazu; wie groß wird das Capital nach 4 Jahren bei 5% halbjähriger Verzinsung?

67. Ein Kaufmann eröffnete sein Geschäft mit einem Fonde von 22800 fl.; wenn er nun durch 10 Jahre jährlich 6% beim Geschäfte gewann, wie groß wird der Handelsfond am Ende des 10. Jahres?

68. Ein Leipziger Kaufmann bezieht von Wien eine Ware à 40 kr. pr. *kg*, Spesen sind 10%; er verkauft das Pfund $= \frac{1}{2}$ *kg* für 52 Pfenn.; wie viel % gewinnt er, wenn 100 Mark $=$ 60 fl. sind?

69. Berechne folgende Factura (Einkaufsrechnung):

Hamburg, am . . . . .

42 Kisten Congo-Thee		
Brutto 4034 Pfund		
. . „ Tara 16 Pfund pr. Kiste		
Netto . . Pfund à $1\frac{3}{4}$ Mark pr. Pfd. . . Mark	. . . .	. .
Diverse Spesen . . . . . Mark 123 „ 18,		
Ausgangszoll $\frac{1}{8}\%$ . . . „ . . ., „	. . . .	. .
Mark	. . . .	. .
Provision $\frac{1}{2}\%$ „	. . . .	. .
Mark	. . . .	. .

70. In einer Factura ist der Preis der gekauften Waren 2260 fl. 18 kr., Sconto $1\frac{1}{2}\%$, verschiedene Spesen 62 fl. 20 kr., Sensarie 1% (vom Preis), Provision $2\frac{1}{2}\%$. Wie groß ist der Betrag der Einkaufsrechnung?

71.* Ein Arbeiter hat in $2\frac{2}{3}$ Monaten $181\frac{3}{5}$ fl. verdient; wie viel in $\frac{1}{3}$ Monat?

72.* Der Arbeitslohn für 4 Arbeiter auf 5 Wochen ist 140 fl.; wie viel beträgt derselbe für 7 Arbeiter auf 9 Wochen?

73.* Ein Wucherer lieh einen Landmann 45 fl. und forderte als Zins jedes Vierteljahr $2\frac{1}{4}$ fl.; wie viel % nahm er?

74.* A, B und C kaufen gemeinschaftlich 40 *m* Tuch für 150 fl.; A erhält 6 *m* und C 4 *m* mehr als B; wie viel muss jeder bezahlen?

75.* Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass ihr 5ter Theil 8mal genommen um 6 größer ist als die Zahl selbst?

76.* Theile die Zahl 48 in zwei Theile so, dass der eine um 18 größer sei als der andere.

77.* Von 120 *kg* wurde ein Theil verkauft und es blieben noch 28 *kg* mehr übrig als verkauft wurden; wie viel *kg* wurden verkauft?

78.* Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 3, ihre Summe ist 56; welches sind die Zahlen?

79.* In 2 Zimmern befinden sich 32 Personen; gehen aus dem ersten Zimmer so viele in das zweite als schon dort sind, so sind in beiden gleich viele. Wie viele Personen waren in jedem Zimmer?

80. Berechne die Zinsen folgender Capitalien;

a) 4007 fl. zu $4\frac{1}{2}\%$ vom 1. Juli bis 23. November;

b) 6140 fl. zu $5\frac{3}{4}\%$ vom 14. Oct. bis 31. December.

81. a) $\sqrt{95481}$; b) $\sqrt{788544}$.
82. a) $\sqrt{1216\cdot6144}$. b) $\sqrt{8450649}$.
83. a) $\sqrt[3]{181321496}$. b) $\sqrt[3]{527\cdot514112}$.
84. a) $\sqrt[3]{7976023992}$. b) $\sqrt[3]{43022168054}$.

85. Ein Commissionär rechnet die Provision, anstatt zu $1^3/_4\%$, irrig zu 2% und findet so 86 fl.; wie viel beträgt die richtig gerechnete Provision?

86. Jemand hat ein Jahreseinkommen von 2400 fl.; wie viel kann er täglich ausgeben, wenn er 3% an Einkommensteuer zahlen muss und jährlich 500 fl. ersparen will?

87. Bei dem Kaufe eines Ackers wird bestimmt, dass von der Kaufsumme 600 fl. sogleich, die übrigen 636 fl. aber nach 1 Jahre gezahlt werden sollen; der Käufer zahlt jedoch auch diese sogleich und erhält 5% Discont; wie viel hat er zusammen bar zu zahlen?

88. Jemand hat nach 6 Monaten 4000 fl. zu bezahlen; er zahlt 2400 fl. bar; wann hat er den Rest zu zahlen?

89. Jemand mischt 27 *kg* einer Waare, von der das *kg* 28 kr. kostet, mit 12 *kg* einer geringeren Sorte, und nun kommt das *kg* der Mischung auf 24 kr.; wie viel kostet 1 *kg* der zweiten Sorte?

90. Zu einem Geschäfte gibt A 12500 fl., B 10500 fl., C 14000 fl.; wenn nun der Gewinn von 7500 fl. so getheilt wird, dass A für seine besondere Mühe als Geschäftsleiter außer seinem verhältnismäßigen Antheile noch 15% des Gewinnes erhält, wie viel bekommt jeder?

91. $(4a^3b^4 + 8a^5b^5 - 12a^7b^6) : 2a^2b^3$.

92. $(8a^3 - 27b^3) : (2a - 3b)$.

93. $(16a^2 - 46ax + 15x^2) : (8a - 3x)$.

94. Wenn man eine Ware für 150 fl. verkauft, so verliert man 10%; wie theuer muss man sie verkaufen, um 5% zu gewinnen?

95. Beim Verkaufe einer Ware zu 462 fl. gewinnt man $16^2/_3\%$; wie viel $\%$ gewinnt man, wenn sie für 420 fl. verkauft wird?

96. Am 18. Mai wird ein Wechsel von 1355 fl., zahlbar ultimo Juni, à 4% discontiert; wie groß ist dessen Wert?

97. A bezog für einen nach 72 Tagen fälligen Wechsel bei 5% Discont 594 fl.; auf welche Summe lautete der Wechsel?

98. Für eine nach $3^1/_2$ Jahren fällige Schuld erhielt jemand nach Abzug von 6% Jahresdiscont bar 3555 fl.; wie groß war die Schuld?

99. $(5a^2x^2 - 4ax + 6)(3a^2x^2 + 4ax - 5)$.

100. $(^2/_5a^2 + {}^5/_6ab - {}^3/_4b^2)(^5/_6a^2 - {}^3/_5ab + {}^2/_3b^2)$.

101. $\left(\frac{8x}{9y} - \frac{2}{3} + \frac{3y}{4x}\right)\left(\frac{4x}{3y} + \frac{3}{2} - \frac{9y}{8x}\right)$.

102. Jemand will ein Grundstück verkaufen. A bietet ihm 3900 fl. bar, B 4250 fl. ohne Zins nach 2 Jahren zahlbar, C 4310 fl. ohne Zins nach 3 Jahren zahlbar. Welches Anerbieten stellt sich bei 5% ganzjähriger Verzinsung als das vortheilhafteste für den Verkäufer heraus?

103. A legt in einem Geldinstitute, welches die eingezahlten Beträge mit 5% jährlich capitalisiert, 2850 fl. an; welche Summe kann er nach 18 Jahren beheben?

104. A nimmt ein Capital von 12000 fl. auf und zahlt für Rechnung der 5% Zinsen und der Capitaltilgung am Schlusse eines jeden Jahres 800 fl.; a) wie groß wird noch der Schuldrest nach 10 Jahren sein, b) welchen gegenwärtigen Wert hat dieser Schuldrest?

105. In einem österr. Zehnkreuzerstücke sind Silber und Kupfer in dem Verhältnisse 2 : 3 mit einander gemischt; wie viel Silber und wie viel Kupfer hat man nöthig, um 6600 fl. in Zehnkreuzerstücken zu prägen, wenn 300 Zehnkreuzerstücke $\frac{1}{2}$ *kg* wiegen?

106. Wie viel muss man am 14. August für 1500 fl. ungar. Goldrente zum Curse 101 zahlen? (Zinsen zu 4% seit 1. April.)

107. Die 5% österr. Papierrente steht an einem Tage auf 97; welches wäre der entsprechende Curs für $4\frac{1}{5}$% allgemeine Papierrente?

108. Was ist vortheilhafter, allgemeine Papierrente (Zinsen $4\frac{1}{5}$%) zum Curse 82 oder österr. Goldrente (Zinsen 4% in Gold) zum Curse 110 zu kaufen, wenn das Gold gegen Papiergeld 20% Agio genießt?

109. Ein Wiener hat in London 215 Pfund Sterling zu fordern. Was ist für ihn vortheilhafter, über diesen Betrag unmittelbar auf London einen Wechsel zum Curse 122 fl. für 10 Pfund St. zu ziehen, oder durch einen Frankfurter jene Summe auf London zum Curse 204 Mark für 10 Pfund St. zu entnehmen und sich von ihm den Betrag zum Curse 168 Mark für 100 fl. zu übermitteln zu lassen, wenn der Frankfurter Geschäftsfreund $\frac{3}{4}$% Provision rechnet?

110.* 20 *m* kosten 36 fl.; wie viel kosten 35 *m*?

111.* Jemand braucht in 30 Tagen 48 fl. 50 kr.; wie viel kommt auf 21 Tage?

112.* Theile die Summe von 126 fl. im Verhältnisse der Zahlen 2, 3 und 4.

113.* In wie viel Jahren betragen die Zinsen eines zu 4% angelegten Capitals so viel als das Capital selbst?

114.* Die Hälfte und der dritte Theil einer Zahl betragen um 7 weniger als die Zahl; wie heißt sie?

115.* Von zwei Zahlen ist die erste 4mal so groß als die zweite; vermindert man die erste um 6 und vermehrt die zweite um 6, so erhält man gleichviel. Welche Zahlen sind es?

116.* A und B haben gleich viel Geld; tritt A an B 15 fl. ab, so hat B doppelt so viel als A; wie viel Geld hatte jeder?

117.* Ein Bauernmädchen wurde gefragt, wie viel Eier sie im Korbe trage. $^3/_4$ davon, erwiderte sie, betragen 5 mehr als $^5/_8$ derselben. Wie viel Eier trug sie?

118. a) $\sqrt{545 \cdot 2225}$. b) $\sqrt{50 \cdot 296464}$.

119. a) $\sqrt{1292114916}$. b) $\sqrt{0 \cdot 1626186276}$.

120. a) $\sqrt[3]{125751501}$. b) $\sqrt[3]{256047875}$.

121. a) $\sqrt[3]{2 \cdot 918076589}$. b) $\sqrt[3]{166920094216}$.

122.* Ein Eisenbahnzug geht von Wien auf der Westbahn ab und legt stündlich 30 *km* zurück; nach $1^1/_2$ Stunden wird ihm eine Locomotive nachgesendet, welche stündlich 45 *km* zurücklegt; in welcher Zeit wird sie den Zug erreichen?

123. Eine Dampfmaschine von 36 Pferdekraft bewegt in 18 Tagen à 12 Stunden eine Erdmasse von 9 *m* Länge, 5 *m* Breite und 6·3 *m* Höhe; in wie viel Tagen ununterbrochener Arbeit wird eine Erdmasse von 15 *m* Länge, 7 *m* Breite und 4 *m* Höhe durch eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft bewegt werden?

124. Ein Legat von 1800 fl. soll unter drei Diener im Verhältnis ihres Alters und ihrer Dienstzeit vertheilt werden. A war 44 Jahre alt und diente 15 Jahre, B war 40 Jahre alt und diente 12 Jahre, C war 36 Jahre alt und diente 10 Jahre; wie viel erhält jeder?

125. Einem Arbeiter wird sein Wochenlohn von 7 fl. 20 kr. auf 8 fl. 28 kr. erhöht; wie viel % beträgt die Lohnerhöhung?

126. Der Reinertrag einer Verkaufsrechnung betrug nach Abzug von $2^1/_4$% Spesen 3479·9 fl.; für wie viel fl. war die Ware verkauft worden?

127. $(4^1/_4x - 8^1/_2y + 5^2/_3) - (2^3/_8x + 1^1/_3y - 1^5/_6)$.

128. $5a + 3b - [3a - (2b + 4c)]$.

129. $7x - 2y - [x - (3y - z) + (2x - 3z)]$.

130. $8a - 3b + (6 - 5b) - [5b - 7b - (3a - 6)]$.

131. Zu wie viel % wurde ein am 12. August fälliger Wechsel von 3456 fl. am 23. Juni discontiert, wenn der Discont 19 fl. 20 kr. betrug?

132. Wie viel kostet ein Wechsel auf Paris pr. 2920 Franken zum Curse 48·65?

133. Jemand leiht 2450 fl. auf ein Jahr zu 6% aus, zieht aber die Zinsen sogleich ab; um wie viel ist dabei der Schuldner, welcher die Zinsen erst nach Ablauf des Jahres zu zahlen hätte, im Nachtheil?

134. Jemand leiht ein Capital von 3600 fl. zu $5\frac{1}{2}\%$ aus, wovon er selbst einen Theil zu 4% aufgenommen hat; wie groß ist der ihm gehörende Theil des Capitals, wenn er einen jährlichen Zinsüberschuss von 154 fl. hat?

135. A, B und C erlitten bei einem gemeinschaftlichen Geschäfte 20% Verlust; ihre Einlagen verhalten sich wie 9 : 8 : 7 und das Capital nach Abzug des Verlustes beträgt 22480 fl. 80 kr.; a) wie viel erhält jeder zurück; b) wie viel hat jeder verloren?

136. Zur Ausführung einer Arbeit verwendet man anfangs 20 Mann 3 Wochen lang jeden Tag 8 Stunden, dann 30 Mann 4 Wochen täglich 10 Stunden, und endlich 40 Mann, welche in 2 Wochen bei täglich 9stündiger Beschäftigung mit der Arbeit fertig werden. In wie viel Wochen würden 50 Mann bei täglich 12stündiger Arbeit das ganze Werk zustande gebracht haben?

137. A hat nach 3 Jahren 300 fl., nach 4 Jahren 500 fl. und nach 5 Jahren 600 fl. zu zahlen; er zahlt jedoch schon nach 2 Jahren 400 fl. und nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 500 fl.; wann wird der Rest fällig sein?

138. Wenn 1 *kg* Gold $15\frac{1}{2}$ mal so viel wert ist als 1 *kg* Silber, welchen Wert in Gulden ö. W. hat ein neues 4-Guldenstück, da aus 500 *g* Gold, das $\frac{9}{10}$ fein ist, 155 4-Guldenstücke geprägt werden?

139. Ein österr. Ducaten wiegt 3·49058 *g* und ist $23\frac{2}{3}$ Karat fein; wie viele Ducaten können aus 1 *kg* feinen Goldes geprägt werden?

140. Ein Commissionär kauft 75 20-Frankstücke im Curse zu 9 fl. 66 kr. und 80 Stück russ. Halbimperiale à 10 fl. 65 kr. und rechnet $\frac{1}{2}‰$ Sensarie und $\frac{1}{2}\%$ Provision; auf welchen Betrag lautet die Rechnung?

141. $(225a^2 - 480ab + 256b^2) : (15a - 16b)$.

142. $\left(\frac{2x^2}{3y^2} - \frac{11}{45} - \frac{2y^2}{3x^2}\right) : \left(\frac{3x}{2y} + \frac{5y}{4x}\right)$.

143. $(63x^3 - 16x^2 - 132x - 80) : (9x + 10)$.

144. $(30x^4 - 2x^3 - 125x^2 - 51x + 27) : 5x^2 - 7x - 9)$.

145. Am 22. Februar werden gekauft:

2500 fl. Pfandbriefe der Bodencredit-Anstalt à 101·25
(Zinsen à 4% seit 1. Nov.);

2000 fl. Pfandbriefe der galiz. Rustical-Credit-Anst. à 56
(Zinsen à 3% seit 1. Jänner).

146. Ein Prager Kaufmann erhält aus Amsterdam 25 Ballen englischen Pfeffer, Brutto 3540 Pfund, Tara 4 Pfund pr. Ballen, à 40 Cents pr. Pfund, Sconto 2%; verschiedene Spesen fl. 18 „ 72, Sensarie $\frac{1}{2}\%$, Provision $1\frac{1}{2}\%$. Wie lautet die Factura?

147. Ein Kaufmann in Wien verkauft für einen Triester Kaufmann 6 Fässer Tafelöl, gewogen Brutto 3285 *kg*, Tara 24% zu fl. 75 pr. *q* Netto; Spesen fl. 21 „ 35, Sensarie $^1/_2$%, Provision $1^3/_4$%. Stelle die Verkaufsrechnung zusammen.

148. Ein Dienstbote legt zu Anfange jedes halben Jahres 25 fl. in eine Sparcasse, welche halbjährig 2% Zinsen zum Capitale schlägt; wie viel hat die Sparcasse nach Ablauf von 6 Jahren an ihn auszuzahlen?

149. Jemand bietet für ein Haus 20000 fl. unter der Bedingung dass dieser Kaufschilling erst nach 4 Jahren bezahlt werde; wie hoch ist dieses Anbot, 5% Zinseszins und ganzjährige Verzinsung vorausgesetzt, für den Augenblick anzuschlagen?

150.* Ein Fäßchen Wein, das 45 *l* hält, kostet 16 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 10 *l*?

151.* Wenn man das *hl* Wein zu 24 fl. kauft und das *l* um 32 kr. verkauft, wie viel % gewinnt man?

152.* Für $^3/_4$ Jahre wurden 285 fl. an Wohnzins gezahlt; wie groß ist der jährliche Wohnzins?

153.* Ein Hausbesitzer steigerte die Mietzinse in seinem Hause um 15% und nahm dann an Mietzins 3680 fl. ein; wie viel hatte er früher eingenommen?

154.* Welche Zahl hat die Eigenschaft, dass ihr 4faches um 13 vermehrt eben so viel gibt, als ihr 6faches um 9 vermindert?

155.* Die Summe dreier Zahlen ist 70, die erste ist doppelt so groß als die zweite, diese doppelt so groß als die dritte; wie heißen die drei Zahlen?

156.* Wenn ich das 5fache einer Zahl durch 4 dividiere und zu dem Quotienten 10 addiere, so ist die Hälfte des Resultats 23; bestimme diese Zahl.

157.* Einem Boten, der vor drei Tagen von A aus abgieng und täglich 48 *km* zurücklegt, wird von demselben Orte aus ein zweiter Bote nachgeschickt, der täglich 72 *km* macht. In wie viel Tagen wird der zweite Bote den ersten einholen?

Berechne abgekürzt auf 4 Decimalen:

158. a) $\sqrt{38}$. b) $\sqrt{210}$. c) $\sqrt{0{\cdot}016}$. d) $\sqrt{5{\cdot}833}$.

159. a) $\sqrt[3]{25}$. b) $\sqrt[3]{653}$. c) $\sqrt[3]{0{\cdot}47}$. d) $\sqrt[3]{2{\cdot}0894}$.

160. In einer Fabrik belaufen sich die jährlichen Kosten für 250 Gasflammen, welche einzeln in jeder Stunde 160 dm^3 Gas verzehren und 1440 Stunden brennen, auf 8064 fl.; wie hoch kommt hiernach die Gasbeleuchtung in einer anderen Fabrik, in welcher 220 Flammen brennen, jede stündlich 144 dm^3 Gas verzehrt und die Beleuchtungszeit 1560 Stunden beträgt?

161. Zur Heizung eines Schulzimmers waren für jeden Winter 18 m^3 Buchenholz erforderlich; in Zukunft will man mit Steinkohlen heizen. Wie viel Tonnen Steinkohlen wird man brauchen, wenn 1 m^3 Buchenholz 376 *kg* wiegt und wenn die Heizkraft der Steinkohlen um 70% größer ist als die einer gleichen Gewichtsmasse Buchenholz?

162. Ein Unternehmer verpflichtet sich, eine bestimmte Arbeit in 40 Tagen zu vollenden. Er verwendet zuerst 36 Arbeiter, welche nach 25 Tagen die Hälfte der Arbeit fertig brachten. Wie viele Arbeiter muss er noch beistellen, um seiner Verpflichtung nachzukommen?

163. A ist an B zu zahlen schuldig: 200 fl. sogleich, 300 fl. nach 5 Monaten, 450 fl. nach 8 Monaten, 300 fl. nach 11 Monaten, 600 fl. nach 15 Monaten und 400 fl. nach 30 Monaten. Dagegen ist A an B zu zahlen schuldig: 350 fl. nach 3 Monaten, 500 fl. nach 7 Monaten und 600 fl. nach 1 Jahre. Nun wollen beide mit einander abrechnen und soll der Rest auf einmal berichtiget werden; wie viel beträgt der Rest, und wann muss seine Zahlung erfolgen?

164. A hat an zwei Gläubiger nach einem Jahre zusammen 5319 fl. ohne Zinsen zu entrichten; er bezahlt bar, und erhält von dem ersten bei $4\frac{1}{2}$% Discont einen Nachlass von 135 fl.; wie groß wird der Abzug bei dem zweiten sein, der ihm nur 4% Discont gewährt?

165. Ein Vater legt für seinen 14jährigen Sohn 3500 fl. in einer Sparcasse an, welche zu 4% jährlich capitalisiert; welche Summe wird der Sohn nach seinem 24sten Lebensjahre aus der Sparcasse zu beheben haben?

166. Jemand verkauft eine durch 6 Jahre, jedesmal am Ende des Jahres ällige Rente von 560 fl.; wie viel erhält er dafür bei 5% Zinseszinsen?

167. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.

168. $(48x^2 - 12y^2 - 118x + 5y + 72) : (8x - 4y - 9)$.

169. $(9x^4 - 58x^2y^2 + 49y^4) : (3x^2 - 4xy - 7y^2)$.

170. $(30a^4 + 11a^3 - 20a^2 + 29a - 6) : (5a^2 - 4a + 3)$.

171. Berechne $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für $a = 5{\cdot}23$, $b = 4{\cdot}78$, $c = 3{\cdot}45$ und $s = \frac{a+b+c}{2}$ auf 4 Decimalstellen.

172. Jemand läst am 7. October folgende Prioritäten verkaufen:
10 Stück böhm. Westbahn à 100·10 (Nominalwert 200 fl., 4% Zinsen seit 1. Juli); und
12 Stück Siebenbürger Bahn à 98·20, (Nominalwert à 200 fl., 5% Zinsen seit 1. October);
wie viel erhält er dafür, wenn die Sensarie $\frac{1}{2}$‰ und die Provision $\frac{1}{3}$% beträgt?

173. In Breslau werden im Auftrage eines Prager Committenten 218 Centner Weizen à 21 Mark 80 Pfenn. pr. 200 Pfund verkauft; die Spesen betragen 30 Pfenn. pr. Ctr. Maßgeld, Trinkgeld ꝛc. 10 Mark 80 Pfenn., Sensarie $^1/_2$%; auf welchen Reinertrag lautet die Verkaufsrechnung, wenn die Provision zu $2^1/_4$% gerechnet wird?

174. Ein Kaufmann kauft 3250 *kg* Kaffee à 126 fl. pr. *q* und bezahlt für Fracht und andere Spesen 78 fl. 45 kr.; wenn er nun den Kaffee durch einen Sensalen mit $^1/_2$% Sensarie zu 160 fl. pr. *q* verkauft; wie viel gewinnt er a) im ganzen, b) in Procenten?

175. Ein Wiener erhält aus Hamburg die Factura über 2 Suronen Cochenille Brutto 214, 204 Pfd., Tara 2 Pfd. pr. Surone, zu $4^1/_2$ Mark pr. Pfd. Netto, die Sensarie beträgt $^1/_2$%, Emballage und Packen 5 Mark 8 Pfenn., kleine Spesen 3 Mark 11 Pfenn., Provision $1^1/_2$%; 100 Mark = 59·80 fl. ö. W. In Wien werden vorgefunden 207 *kg* Brutto, 205 *kg* Netto, die Fracht beträgt 2 fl. 10 kr., Einfuhrzoll 7 fl. 30 kr., Spesen in Wien 3 fl. 29 kr.

Stelle nach diesen Angaben die Factura zusammen und berechne, wie hoch 1 *kg* in Wien zu stehen kommt.

Inhalt des dritten Heftes.