# KUBIČNI ZLEPKI Z MAJHNO PROŽNOSTNO ENERGIJO

GAŠPER JAKLIČ in EMIL ŽAGAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 41A05, 41A15, 65D05, 65D07, 65D17

V članku obravnavamo enega od osnovnih interpolacijskih problemov: dano je zaporedje točk v ravnini, poiskati pa želimo interpolacijsko krivuljo, ki se „dobro“ prilega podatkom. Uporabljamo kubični zlepek in metodo, ki minimizira približno prožnostno energijo krivulje. Izpeljemo pogoje za obstoj interpolanta, ki ima lepo obliko (je regularen, nima zank, osti in zavihkov) in predstavimo enostavno lokalno geometrijsko konstrukcijo.

## CUBIC SPLINES WITH SMALL STRAIN ENERGY

In the paper one of the basic interpolation problems is considered. A sequence of points in the plane is given. Our goal is to find an interpolatory curve which fits the data “nicely”. Cubic splines are used and a method, which minimizes the approximate strain energy of the curve. Conditions on the existence of the interpolant, which has a nice shape (it is regular, loop-, cusp- and fold-free), are derived and a simple local geometric construction is presented.

## 1. Uvod

Pomembna veja raziskovanja na meji med računalništvom in matematiko je računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (angl. Computer Aided Geometric Design ali na kratko CAGD). Problemi, s katerimi se ukvarjamo raziskovalci na tem področju, so povezani predvsem z geometrijsko predstavitvijo objektov (krivulj, ploskev, teles, ...), ki se pojavljajo v različnih raziskovalnih in industrijskih problemih (konstrukcija letal, ladij, avtomobilov, oblikovanje izdelkov, ...). Panoga je v zadnjih nekaj desetletjih doživela nesluten razvoj, saj je oblikovanje izdelkov postalo pomemben dejavnik v proizvodnem procesu.

Med standardne probleme, ki jih srečamo na omenjenem področju, sodi gotovo konstrukcija ravninskih parametričnih krivulj, ki temelji na interpolaciji danih ravninskih točk. Oglejmo si to nalogo malo podrobneje.

Dane so točke

$$\boldsymbol{T}_j \in \mathbb{R}^2, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Iščemo ravninsko parametrično polinomsko krivuljo $\boldsymbol{p}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$ stopnje $\leq n$ (torej $\boldsymbol{p}(t) = (x_n(t), y_n(t))^T$, kjer sta $x_n$ in $y_n$ skalarna polinoma stopnje

$\leq n$), ki interpolira podane točke pri predpisanih vrednostih naraščajočih interpolacijskih parametrov $t_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\boldsymbol{p}(t_j) = \boldsymbol{T}_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,, \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_n\,.$$

Konkretna izbira interpolacijskih paramerov $t_j$ enolično določa *parametrizacijo* $(x_n, y_n)$ interpolacijske krivulje $\boldsymbol{p}$. Znano je, da različne izbire porajajo različne parametrizacije krivulje $\boldsymbol{p}$, ki se lahko močno izražajo v njeni obliki. Med najbolj znanimi parametrizacijami so $\alpha$-parametrizacije [2], pri katerih interpolacijske parametre določimo na podlagi razdalj med interpolacijskimi točkami (1), torej

$$t_{j+1} = t_j + \|\boldsymbol{T}_{j+1} - \boldsymbol{T}_j\|^{\alpha}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad t_0 := 0\,, \quad \alpha \in [0, 1]\,. \tag{2}$$

Pri tem smo z $\|\cdot\|$ označili evklidsko normo v $\mathbb{R}^2$. Najbolj znani primeri so: *enakomerna* parametrizacija ($\alpha = 0$), *centripetalna* parametrizacija ($\alpha = 1/2$) in *tetivna* parametrizacija ($\alpha = 1$).

Če je $n$ veliko število, je točk preveč, da bi jih lahko interpolirali z eno samo polinomsko krivuljo $\boldsymbol{p}$. Že iz teorije interpolacije funkcij je namreč znano, da interpolacija s polinomom visoke stopnje lahko vodi v neželene oscilacije interpolacijskega polinoma. Smiselna rešitev je tako na dlani. Kopico točk razdelimo na majhne skupine (recimo po dve) in vsako skupino posebej interpoliramo s polinomsko krivuljo nizke stopnje. Če zagotovimo, da se posamezni polinomski interpolanti v stičnih točkah gladko staknejo, smo dobili *zlepek*. Z višanjem stopnje se število koeficientov polinoma na vsaki komponenti krivulje veča. Ti predstavljajo proste parametre, ki jih lahko izkoristimo za izboljšanje gladkosti. Ker je smiselno proste parametre razdeliti simetrično na robni interpolacijski točki, naj bi jih bilo na vsaki komponenti krivulje sodo mnogo, to pa je res za krivulje lihe stopnje. Zato ponavadi uporabljamo zlepke stopnje tri, pet, ... Ker višanje stopnje prinaša več računanja, je običajno sprejemljiv kompromis kubična krivulja. Zlepek, ki ga dobimo, pa je enkrat, včasih celo dvakrat zvezno odvedljiv. Oglejmo si primer gladkega kubičnega zlepka podrobneje.

Iščemo kubični parametrični ravninski zlepek $\boldsymbol{s}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$, za katerega je

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{s}_i := \boldsymbol{s}|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathbb{P}_3\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i(t_{i-1}) = \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i(t_i) = \boldsymbol{T}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i'(t_{i-1}) = \alpha_{i,0}\boldsymbol{d}_{i-1}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i'(t_i) = \alpha_{i,1}\boldsymbol{d}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem smo s $\mathbb{P}_3$ označili prostor ravninskih parametričnih polinomov stopnje $\leq 3$, torej

$$\mathbb{P}_3 = \left\{ \boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}(t) = \left( \sum_{i=0}^{3} a_i t^i, \sum_{i=0}^{3} b_i t^i \right)^T,\, a_i, b_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 0,1,2,3 \right\},$$

in z $\boldsymbol{d}_j$, $j = 0,1,2,\ldots,n$, enotske smeri tangent v stičnih točkah. Posebno pozornost si zaslužita zadnji dve enakosti v (3). Dodatna parametra $\alpha_{i,0}$ in $\alpha_{i,1}$ nista uvedena naključno. V primeru, ko za vsak $i$ oba zavzameta vrednost 1, je parametrični zlepek $\boldsymbol{s}$ očitno zvezno odvedljiv. A v praksi velikokrat zadošča, da se odvoda sosednjih segmentov zlepka v stični točki ujemata le po smeri, ne pa tudi po velikosti. Tedaj je dovolj, da sta omenjena parametra poljubni pozitivni števili. Taki zveznosti pravimo $G^1$ ali *geometrijska zveznost reda 1.*

**Definicija.** Naj bosta $\boldsymbol{p}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ in $\boldsymbol{q}\colon [b,c] \to \mathbb{R}^2$ dve gladki ravninski parametrični krivulji, za kateri je $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{p}(b) = \boldsymbol{q}(b)$. Če je $\boldsymbol{q}'(b) = \alpha\, \boldsymbol{p}'(b)$ za neki $\alpha > 0$, potem pravimo, da se $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ v točki $\boldsymbol{T}$ zlepita $G^1$ **zvezno**.

**Opomba.** Definicija geometrijske zveznosti reda 1 je ekvivalentna dejstvu, da se **enotska tangenta** krivulje spreminja zvezno.

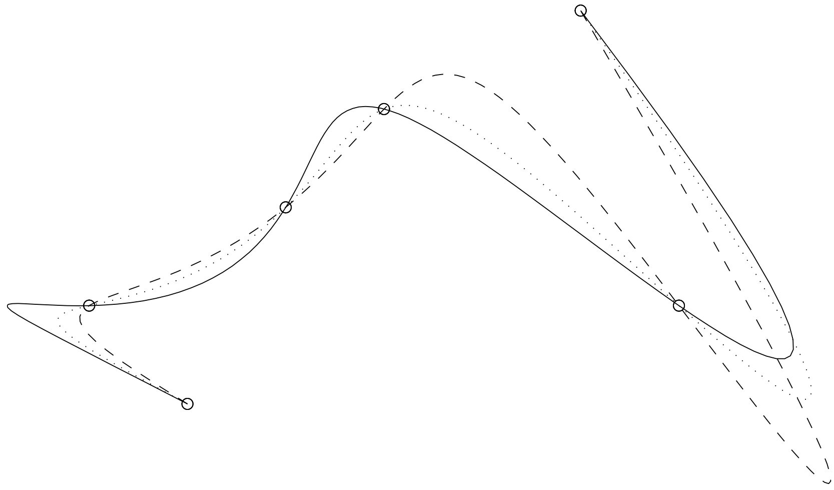
V CAGD tako zveznost pogosto srečamo, saj je za obliko objektov klasična zveznost odvodov ponavadi prehuda zahteva.

Ničesar še nismo povedali o izbiri interpolacijskih parametrov $t_j$ in $\alpha_{j,k}$ ter enotskih vektorjev $\boldsymbol{d}_j$, $j = 0,1,\ldots,n$, $k = 0,1$. Omenili smo že, da določitev interpolacijskih parametrov $t_j$ v splošnem močno vpliva na obliko zlepka (slika 1). Vendar to ni več res, kadar zahtevamo geometrijsko zveznost. V tem primeru oblika zlepka ni odvisna od parametrizacije, kar je zelo zaželena lastnost v CAGD (ni namreč pomembno, kako smo do oblike objekta prišli, pomembne so njegove geometrijske lastnosti). Za konstrukcijo in kasnejšo uporabo zlepka pa je izbira interpolacijskih parametrov nujna. Poznamo veliko načinov, kako določiti interpolacijske parametre, a nobeden od njih ni univerzalen. Več o možnih izbirah si bralci lahko preberejo v [6].

Še bolj zanimiv problem (predvsem za geometrijsko zvezne zlepke) je izbira enotskih vektorjev $\boldsymbol{d}_i$ in parametrov $\alpha_{i,k}$, $k = 0,1$. Ko tudi te enkrat izberemo, je zlepek enolično določen in $\boldsymbol{s}_i \in \mathbb{P}_3$, ki ga določajo enačbe (3), lahko dokaj preprosto konstruiramo z rešitvijo naslednjega matričnega sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{i-1} & t_{i-1}^2 & t_{i-1}^3 \\ 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & 1 & 2t_{i-1} & 3t_{i-1}^2 \\ 0 & 1 & 2t_i & 3t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{i-1}^T \\ \boldsymbol{T}_i^T \\ \alpha_{i,0} \boldsymbol{d}_{i-1}^T \\ \alpha_{i,1} \boldsymbol{d}_i^T \end{bmatrix}.$$

Poudarimo, da je pri $G^1$ zveznosti izbira zgoraj omenjenih količin bistvena za obliko zlepka. Ponavadi imamo tri možnosti:



**Slika 1.** Različne izbire interpolacijskih parametrov (2) vodijo do različnih interpolantov stopnje 5 na istih interpolacijskih točkah. Prikazane so enakomerna parametrizacija (polna črta), tetivna parametrizacija (črtkana črta) in centripetalna parametrizacija (pikčasta črta).

(a) smeri tangent so dane vnaprej;

(b) izbira smeri je prepuščena uporabniku;

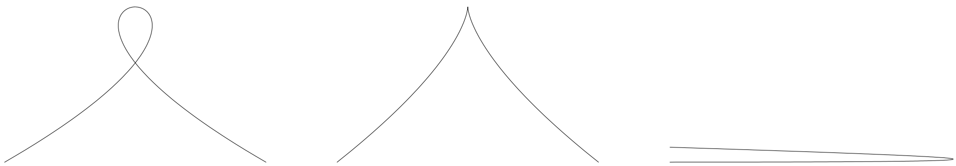
(c) za interpolacijski zlepek zahtevamo samo $G^1$ zveznost, medtem ko smeri tangent ne predpišemo.

Prva dva načina vodita v lokalne interpolacijske sheme (konstrukcija se izvaja segment za segmentom), zadnja pa vodi v globalno shemo, pri kateri je treba reševati (ponavadi velike) sisteme linearnih enačb. Naj opozorimo, da je druga možnost omejena le na manjše popravke že konstruiranega zlepka, saj sicer lahko „laični" pristop uporabnika hitro zapelje v konstrukcijo zlepkov z nesprejemljivo obliko.

Za zlepek, ki zadošča (3), je pomembno predvsem to, da nima neželenih osti, zank ali zavihkov (slika 2) in da smiselno rekonstruira obliko prvotnih podatkov (1). Običajno zahtevamo, da je krivulja $\boldsymbol{s}$ *regularna*, kar zadosti nekaterim zgoraj zapisanim zahtevam. Spomnimo se, da regularnost pomeni neničelnost odvoda $\boldsymbol{s}'(t)$ pri vsakem parametru $t$ iz domene (oz. grad $\boldsymbol{s}(t) \neq \boldsymbol{0}$).

## 2. Interpolacijski problem

Najprej predstavimo oznake, ki jih bomo uporabljali. Za $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^T$ in $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)^T$ naj bo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1\, b_1 + a_2\, b_2$ skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$ ter $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$



**Slika 2.** Zanka (levo), ost (v sredini) in zavihek (krivulja se obrne in teče nazaj po sami sebi) (skica desno).

kot med vektorjema $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$. Spomnimo se, da je

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,, \quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\,,$$

kjer je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := a_1b_2 - a_2b_1$ planarni vektorski produkt. Uporabljali bomo tudi standardno diferenčno notacijo $\Delta(\bullet)_i = (\bullet)_{i+1} - (\bullet)_i$.

Študirali bomo naslednji problem. Denimo, da so dane točke (1), kjer je $\boldsymbol{T}_j \neq \boldsymbol{T}_{j+1}$ in pripadajoči interpolacijski parametri $(t_j)_{j=0}^n$. Opomnimo, da se točke kasneje lahko ponovijo ($\boldsymbol{T}_{i+k} = \boldsymbol{T}_i, k \neq \pm 1$), le zaporedni dve ne smeta sovpadati. Predpostavili bomo, da so interpolacijski parametri podani vnaprej (običajno jih sicer izračunamo iz podatkov, na primer s centripetalno ali tetivno parametrizacijo (2)). Včasih so namreč tudi interpolacijski parametri neznanke, kar vodi v reševanje nelinearnih problemov in je večinoma zelo težka naloga. O takih problemih za kubične krivulje si lahko bralci kaj več preberejo v [5].

Želimo poiskati $G^1$ zvezen parametrični zlepek $\boldsymbol{s}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$, za katerega velja (3). Obstaja neskončno rešitev problema, saj vsaka izbira $\alpha_{i,0} > 0$, $\alpha_{i,1} > 0$ in $\boldsymbol{d}_i$ poda enoličen zlepek $\boldsymbol{s}$. Tako imamo na voljo veliko število prostih parametrov, ki jih lahko uporabimo kot parametre oblike krivulje.

Naravni pristop, kako izkoristiti parametre oblike, je minimizacija ustreznega funkcionala. Ker je oblika krivulje odvisna predvsem od njene ukrivljenosti $\kappa$, je smiselno minimizirati naslednji funkcional:

$$\varphi_s(\boldsymbol{\alpha}) := \int_{t_0}^{t_n} \|\kappa(t)\|^2 \|\boldsymbol{s}'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t_n} \frac{(\boldsymbol{s}'(t)\times\boldsymbol{s}''(t))^2}{\|\boldsymbol{s}'(t)\|^5}\, dt\,, \tag{4}$$

kjer je $\boldsymbol{\alpha} := ((\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{2n}$. Funkcionalu (4) pravimo *prožnostna energija* (angl. strain energy) krivulje in ima fizikalno ozadje, saj predstavlja energijo elastične palice zaradi fleksijskega zvijanja. V praksi [1, 7] se namesto (4) običajno uporablja *približna prožnostna energija* (tudi *linearizirana upogibna energija*)

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) := \int_{t_0}^{t_n} \|\boldsymbol{s}''(t)\|^2 dt\,. \tag{5}$$

Če je $\|\boldsymbol{s}'(t)\| \approx 1$, je parametrizacija blizu naravni in kot $\angle(\boldsymbol{s}'(t), \boldsymbol{s}''(t))$ blizu pravemu. Tako opazimo, da je v tem primeru (5) dobra aproksimacija (4). Odvod $\boldsymbol{s}''$ ni nujno zvezen, vendar pa ima samo končno število končnih skokov, zato integral (5) obstaja. Omenimo še, da med vsemi gladkimi interpolacijskimi krivuljami kubični $C^2$ zlepek minimizira linearizirano upogibno energijo [1].

Očitno lahko minimizacijo izvajamo lokalno. Velja namreč

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\boldsymbol{\alpha}_i} \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\,,$$

kjer je

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) := \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{s}_i''(t)\|^2 dt\,, \tag{6}$$

in $\boldsymbol{\alpha}_i := (\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1})$. Iz geometrije sledi, da morajo biti komponente $\boldsymbol{\alpha}_i$ pozitivne, sicer tangentna vektorja na $\boldsymbol{s}_i$ pri $t_{i-1}$ in $t_i$ ne bi imela enakih smeri kot vektorja $\boldsymbol{d}_{i-1}$ in $\boldsymbol{d}_i$. Torej moramo dejansko izvajati minimizacijo z omejitvami

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{D}_i} \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\,, \quad \mathcal{D}_i := \{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boldsymbol{\alpha}_i > \mathbf{0}\}\,.$$

Tu je neenakost $\boldsymbol{\alpha}_i > \mathbf{0}$ mišljena po komponentah. Na žalost za dani smeri tangent $\boldsymbol{d}_{i-1}$, $\boldsymbol{d}_i$, globalni minimum ni vedno v območju $\mathcal{D}_i$, kar so opazili že v [8]. Problem so rešili tako, da so dodali eno ali dve novi „umetni“ točki, s katerima so dosegli, da je minimum vedno v želenem območju. Tu se pojavi standardni problem, kako dobro izbrati nove točke. Metoda ima veliko pomanjkljivost: predpostavka, da so smeri tangent podane vnaprej, je v praksi žal vse prej kot realistična. Čeprav je postopek relativno preprost, zahteva kar nekaj dodatnega dela, kar lahko pomeni precejšnjo oviro v aplikacijah, ki imajo opravka z velikimi količinami podatkov.

V nadaljevanju bomo študirali pristop, ki se izogne gornjim problemom. Namesto dodajanja novih interpolacijskih točk in smeri tangent, če minimum $\varphi_i$ ni v dopustni domeni $\mathcal{D}_i$, bomo predpostavili, da so smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ neznane. Če vztrajamo pri fiksnem številu interpolacijskih točk, funkcional $\varphi_i$ morda ne bo imel minimuma v dopustnem območju $\mathcal{D}_i$ za kakšno smer $\boldsymbol{d}_{i-1}$ ali $\boldsymbol{d}_i$. Namesto tega bomo uporabili primerno aproksimacijo funkcionala $\varphi_i$, kar vodi k bolj milim pogojem na dopustno območje za smeri tangent.

## 3. Minimizacija

Nadaljujmo z aproksimacijo funkcionala (6). Kot v prejšnjem razdelku predpostavljamo, da imamo dane točke $\boldsymbol{T}_i$, enotske smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ in parametre $t_i$. Naraven način aproksimacije (6) je uporaba kakšnega kvadraturnega pravila. Uporabimo enega najpreprostejših, trapezno pravilo. Tako dobimo

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{s}_i''(t)\|^2 dt \approx \frac{\Delta t_{i-1}}{2}\left(\|\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})\|^2 + \|\boldsymbol{s}_i''(t_i)\|^2\right). \tag{7}$$

Toda $\|\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})\|$ in $\|\boldsymbol{s}_i''(t_i)\|$ sta odvisna od obeh smeri tangent $\boldsymbol{d}_{i-1}$ in $\boldsymbol{d}_i$, zato lahko pričakujemo podobne težave in omejitve na dopustna območja kot v članku [8]. Temu se lahko izognemo z aproksimacijo izraza (7). Poiskali bomo najboljšo aproksimacijo za $\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})$ kot linearno kombinacijo $\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})$, $\boldsymbol{s}_i'(t_{i-1})$ in $\boldsymbol{s}_i(t_i)$, in podobno, najboljšo aproksimacijo za $\boldsymbol{s}_i''(t_i)$ s $\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})$, $\boldsymbol{s}_i'(t_i)$ in $\boldsymbol{s}_i(t_i)$. Tu z najboljšo aproksimacijo mislimo na aproksimacijo, ki je točna za polinome stopnje $\leq k$ za čim večji $k$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1}) &\approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}}\left(\frac{\boldsymbol{s}_i(t_i)-\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}} - \boldsymbol{s}_i'(t_{i-1})\right),\\
\boldsymbol{s}_i''(t_i) &\approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}}\left(\boldsymbol{s}_i'(t_i) - \frac{\boldsymbol{s}_i(t_i)-\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}}\right),
\end{aligned}$$

in po (3) in (7) lahko aproksimiramo $\varphi_i$ z

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}}\psi_i(\boldsymbol{\alpha}), \tag{8}$$

kjer je

$$\psi_i(\boldsymbol{\alpha}) := \left\|\frac{1}{\Delta t_{i-1}}\Delta\boldsymbol{T}_{i-1} - \alpha_{i,0}\,\boldsymbol{d}_{i-1}\right\|^2 + \left\|\alpha_{i,1}\,\boldsymbol{d}_i - \frac{1}{\Delta t_{i-1}}\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\right\|^2. \tag{9}$$

**Izrek 1.** *Nelinearni funkcional $\psi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ima enoličen globalni minimum v notranjosti $\mathcal{D}_i$ natanko takrat, ko velja*

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* := \frac{1}{\Delta t_{i-1}}\left(\boldsymbol{d}_{i-1}\cdot\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}, \boldsymbol{d}_i\cdot\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\right)^T > \boldsymbol{0}.$$

*Vrednost ekstrema je*

$$\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i^*) = \frac{2 - c_{i,0}^2 - c_{i,1}^2}{(\Delta t_{i-1})^4}\,\|\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\|^2,$$

*kjer je*

$$c_{i,k} = \cos\angle\left(\boldsymbol{d}_{i+k-1}, \Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\right), \quad k = 0, 1.$$

*Dokaz.* Funkcional (9) lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) = & \frac{1}{(\Delta t_{i-1})^2} \left( (\Delta t_{i-1})^2 \left(\alpha_{i,0}^2 + \alpha_{i,1}^2\right) \right. \\ & \left. - 2\Delta t_{i-1}(\alpha_{i,0}\, \boldsymbol{d}_{i-1} + \alpha_{i,1}\, \boldsymbol{d}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} + 2\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 \right).\end{aligned}$$

Minimum $\psi_i$ je bodisi na robu $\mathcal{D}_i$ ali pa ga dobimo prek parcialnih odvodov $\psi_i$. V drugem primeru je lokalni minimum pri $\boldsymbol{\alpha}_i^* := \left(\alpha_{i,0}^*, \alpha_{i,1}^*\right)^T$, kjer je

$$\alpha_{i,k}^* = \frac{\boldsymbol{d}_{i+k-1} \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}}{\Delta t_{i-1}}, \quad k = 0, 1\,,$$

kar vodi do

$$m := \psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i^*) = \frac{2 - c_{i,0}^2 - c_{i,1}^2}{(\Delta t_{i-1})^2} \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2.$$

Pokazati je treba, da je to tudi globalni minimum. Vzemimo poljuben $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1})^T$ na robu območja $\mathcal{D}_i$. Tako je $\alpha_{i,k} = 0$ za vsaj en $k \in \{0, 1\}$. Če je $\alpha_{i,0} = \alpha_{i,1} = 0$, potem je $\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) = 2\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2/(\Delta t_{i-1})^2 \geq m$, in obravnavati je treba samo primer, ko je eden od $\alpha_{i,k}$ pozitiven. Zaradi simetrije je dovolj gledati $\alpha_{i,0} > 0$. V tem primeru je enostavno preveriti, da funkcional $\psi_i|_{\alpha_{i,1}=0}$ doseže svoj globalni minimum pri $\alpha_{i,0} = (\boldsymbol{d}_{i-1} \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1})/\Delta t_{i-1}$, torej je $\psi_i(\alpha_{i,0}, 0) = \left(2 - c_{i,0}^2\right) \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2/(\Delta t_{i-1})^2 \geq m$. S tem je dokaz končan. ∎

Minimum je lahko tudi 0. V tem primeru je $c_{i,0} = c_{i,1} = 1$ (lahko bi bilo tudi $-1$, vendar ima krivulja tedaj nezaželeni zavihek) in kubični odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ postane ravna črta

$$\boldsymbol{s}_i(t) = \boldsymbol{T}_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\,.$$

**Posledica 2.** *Pogoji $\boldsymbol{\alpha}_i^* > \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, imajo enostavno geometrijsko interpretacijo, namreč $\angle\left(\boldsymbol{d}_{i+k-1}, \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\right) \in [0, \frac{\pi}{2})$, $k = 0, 1$.*

Naj bodo predpostavke izreka 1 izpolnjene. Zastavimo si lahko pomembno vprašanje: ali je dobljeni kubični odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ regularen na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Odgovor je pritrdilen, še več, dokažemo lahko, da $\boldsymbol{s}_i$ nima osti, zank in zavihkov (slika 2).

**Izrek 3.** *Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka 1 in $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dobljeni geometrijski interpolant, definiran s* (3)*. Potem je odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ regularen in brez zank, osti in zavihkov.*

Zainteresirani bralci lahko dokaz preberejo v [3].

## 4. Konstrukcija smeri tangent

V prejšnjem razdelku smo konstruirali kubičen $G^1$ zlepek z minimizacijo prožnostne energije. Pri tem smo predpostavili, da so enotske smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ znane vnaprej in da so parametri $\boldsymbol{\alpha}_i$ dobljeni prek minimizacije. Iz izreka 1 sledi, da morajo biti smeri tangent primerno izbrane, sicer zlepek ne obstaja.

V tem razdelku bomo obravnavali problem konstrukcije ustreznih smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$. Zahtevati moramo

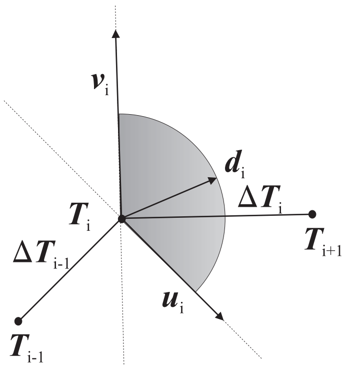
$$\boldsymbol{d}_{i+k-1} \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} > 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad k = 0, 1\,.$$

Da bi izpolnili te pogoje, obravnavajmo $i$-ti in $(i+1)$-i segment zlepka $\boldsymbol{s}$ (slika 3). Definirajmo rotacijo za $\pi/2$ v pozitivni smeri

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

in $z_i := \operatorname{sign}(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \times \Delta \boldsymbol{T}_i)$, ter

$$\boldsymbol{u}_i := z_i R \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \;\; \boldsymbol{v}_i := -z_i R \Delta \boldsymbol{T}_i\,, \;\; \boldsymbol{w}_i := \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i + (1-\lambda_i)\, \boldsymbol{v}_i\,,\; \lambda_i \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$




**Slika 3.** Dopustni položaji za $\boldsymbol{d}_i$. V prikazanem primeru je $z_i = -1$.

**Lema 4.** *Če je $z_i \neq 0$ in $\lambda_i \in (0,1)$, potem je $\boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_j > 0$, $j = i-1, i$.*

*Dokaz.* Dokazali bomo, da velja $\boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_j > 0$, $j = i-1$. Dokaz za $j = i$ je podoben in ga bomo izpustili. Vzemimo poljuben $\boldsymbol{w}_i = \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i + (1-\lambda_i)\, \boldsymbol{v}_i$ z $\lambda_i \in (0,1)$. Po (10) in (11) velja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} &= \lambda_i \boldsymbol{u}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} + (1-\lambda_i) \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} = \\ &= -(1-\lambda_i) z_i (R \Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \end{aligned}$$

ker sta $\boldsymbol{u}_i$ in $\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}$ pravokotna. Očitno je dovolj preveriti

$$z_i = -\text{sign}\left((R\,\Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\right).$$

Ker je $z_i \neq 0$, je $\angle\left(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}, \Delta \boldsymbol{T}_i\right) \neq 0, \pi$, in obravnavamo dve možnosti. Če je $z_i < 0$, iz (11) in slike 3 sledi $\angle\left(R\Delta \boldsymbol{T}_i, \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\right) < \pi/2$ in je skalarni produkt $(R\Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}$ pozitiven. Podobno obravnavamo še primer $z_i > 0$. ■

Iz leme 4 sledi, da vsak $\lambda_i \in (0,1)$ določa $\boldsymbol{w}_i$, ki vodi k minimizaciji funkcionala (9). Vzamemo na primer kar $\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{w}_i/\|\boldsymbol{w}_i\|$. Tako lahko na $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gledamo kot na proste parametre, ki vplivajo na obliko zlepka $\boldsymbol{s}$. Ena od možnih izbir je $\lambda_i = \|\boldsymbol{v}_i\|/(\|\boldsymbol{u}_i\| + \|\boldsymbol{v}_i\|)$, kar pomeni, da $\boldsymbol{d}_i$ kaže iz $\boldsymbol{T}_i$ v smeri simetrale kota $\angle(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ (glejte sliko 3 in posledico 6). To je naravna hevristična izbira, ker tako smer $\boldsymbol{d}_i$ postane najbolj oddaljena od neželenih smeri, ki vodijo do $\alpha_{i,k} = 0$ za $k = 0$ ali $k = 1$. Lema 4 izpušča dve možnosti, $\angle\left(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}, \Delta \boldsymbol{T}_i\right) = 0, \pi$. Če je obravnavani kot enak 0, lahko vzamemo $\boldsymbol{w}_i = \Delta \boldsymbol{T}_i$, in spet veljajo sklepi leme. Primer, ko je kot enak $\pi$, pomeni, da ima vsaka parametrizacija takih podatkov zavihek. Torej je treba takšen primer izločiti s pomočjo poprejšnje obdelave podatkov, na primer z dodajanjem nove, „umetne“ točke zunaj premice, s čimer se izognemo nezaželenemu zavihku.

Gornje metode ne moremo uporabiti za smeri prve in zadnje tangente, vendar lahko izberemo kar $\boldsymbol{d}_0 = \Delta \boldsymbol{T}_0/\|\Delta \boldsymbol{T}_0\|$ in $\boldsymbol{d}_n = \Delta \boldsymbol{T}_{n-1}/\|\Delta \boldsymbol{T}_{n-1}\|$. Tako lahko za dane parametre oblike $\lambda_i \in (0,1)$ uporabimo algoritem 1 za konstrukcijo smeri tangent in $G^1$ kubičnega zlepka.

**Algoritem 1.** Algoritem za konstrukcijo smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ in kubičnega $G^1$ zlepka $\boldsymbol{s}$:

```
for i = 1 to n − 1
    if ∠(ΔT_{i−1}, ΔT_i) = π
        Exit.
    end if
end for
d_0 = ΔT_0/‖ΔT_0‖
for i = 1 to n − 1
    if ∠(ΔT_{i−1}, ΔT_i) = 0
        d_i = ΔT_i/‖ΔT_i‖
    else
        u_i = z_i R ΔT_{i−1}
        v_i = −z_i R ΔT_i
        w_i = λ_i u_i + (1 − λ_i) v_i
        // λ_i ∈ (0, 1) so podani vnaprej ali izračunani po izreku 5
        d_i = w_i/‖w_i‖
    end if
end for
```

$\boldsymbol{d}_n = \Delta \boldsymbol{T}_{n-1}/\|\Delta \boldsymbol{T}_{n-1}\|$
**for** $i = 1$ **to** $n$
  Konstruiraj segment zlepka $\boldsymbol{s}_i$ z uporabo $\boldsymbol{T}_j, \boldsymbol{d}_j$, $j = i-1, i$,
  in izreka 1.
**end for**

Izrek 1 ponuja širok nabor dopustnih smeri tangent. Nato lahko z algoritmom 1 lokalno konstruiramo zlepek. Naravno vprašanje je, katere so optimalne smeri tangent.

**Izrek 5.** *Minimalna vrednost funkcionala* (9) *je dosežena pri smereh tangent* $\boldsymbol{d}_i := \boldsymbol{w}_i/\|\boldsymbol{w}_i\|$ *iz* (11) *in*

$$\lambda_i = \frac{2\Delta t_i^3}{A \pm \sqrt{B}}\, \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\,, \tag{12}$$

*kjer je*

$$\begin{aligned} A &:= \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 + 2\Delta t_i^3\, \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i - \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2, \\ B &:= \left(\Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 - \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2\right)^2 + 4\Delta t_{i-1}^3 \Delta t_i^3 (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i)^2. \end{aligned}$$

*Če je* $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \neq 0$, *predznak v imenovalcu* (12) *izberemo tako, da je* $\lambda_i \in (0,1)$, *sicer pa postavimo*

*a)* $\lambda_i = 0$ *za* $z_i = -1$, *ali*
*b)* $\lambda_i = 1$ *za* $z_i = 1$.

*Dokaz.* Poiskati je treba optimalne smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$, ki minimizirajo približno prožnostno energijo (8). Če smeri tangent že poznamo, z izrekom 1 dobimo optimalne $\boldsymbol{\alpha}_i$. Ker smer $\boldsymbol{d}_i$ nastopa samo v dveh sosednjih odsekih v (9), je dovolj minimizirati izraz

$$\frac{2}{\Delta t_{i-1}} \left\| \alpha_{i,1} \boldsymbol{d}_i - \frac{1}{\Delta t_{i-1}} \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \right\|^2 + \frac{2}{\Delta t_i} \left\| \frac{1}{\Delta t_i} \Delta \boldsymbol{T}_i - \alpha_{i+1,0} \boldsymbol{d}_i \right\|^2.$$

Z uporabo izreka 1 in (11), izračunom parcialnih odvodov na $\lambda_i$ in precej računanja dobimo naslednjo kvadratno enačbo:

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda_i) :=& \lambda_i^2 \big( (\Delta t_{i-1}^3 - \Delta t_i^3) \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i + \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 - \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 \big) + \\ &+ \lambda_i \big( \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 + 2\Delta t_i^3 \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i - \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 \big) - \Delta t_i^3 \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 0. \end{aligned}$$

Če je $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \neq 0$, je $\Lambda(0)\,\Lambda(1) = -\Delta t_{i-1}^3\, \Delta t_i^3\, (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i)^2 < 0$, torej je natanko ena od rešitev gotovo na $(0,1)$. V primeru $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 0$ pa sta rešitvi ravno 0 in 1. Pravo rešitev izberemo glede na (11). ■

Za posebno izbiro parametrizacije $\alpha = 2/3$ (2) se da izraz (12) zelo poenostaviti. Opazimo, da del izraza $B$ in koren izgineta. Tako dobimo naslednji rezultat:

**Posledica 6.** *Za 2/3-parametrizacijo,*

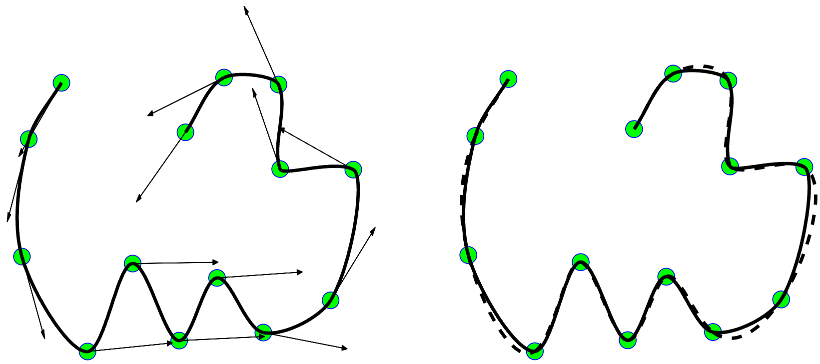
$$\frac{\Delta t_{i-1}}{\Delta t_i} = \left( \frac{\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|}{\|\Delta \boldsymbol{T}_i\|} \right)^{\frac{2}{3}},$$

*optimalne smeri tangent ležijo na simetralah kotov* $\angle(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ *pri vrednostih parametrov*

$$\lambda_i := \frac{\|\Delta \boldsymbol{T}_i\|}{\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\| + \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|}.$$

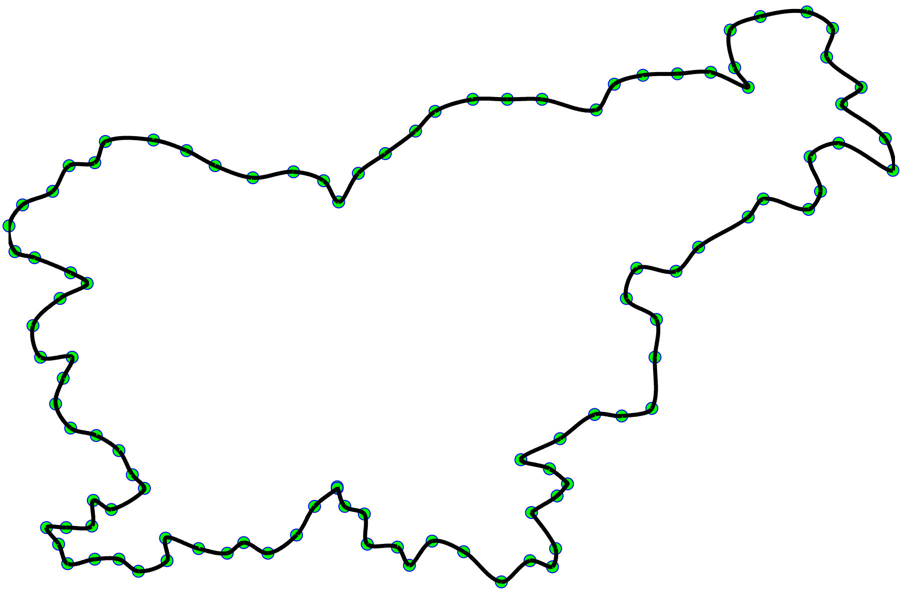
Dobljene rezultate brez težav iz ravnine posplošimo v prostor $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ [4].

## 5. Numerična primera



**Slika 4.** Kubični $G^1$ interpolant (polna črta) z ustreznimi enotskimi tangentami (levo). Na desni je primerjava iste krivulje s $C^2$ zveznim kubičnim zlepkom (črtkana črta). Približni prožnostni energiji sta 112,0 in 55,74.

Sklenimo članek s primeroma. Kubični $G^1$ interpolant, dobljen z algoritmom 1, se dobro prilega $C^2$ kubičnemu interpolacijskemu zlepku s centripetalno parametrizacijo (slika 4 desno). Na levi sliki so prikazane optimalne smeri tangent. Za lažjo primerjavo sta izračunani tudi približni prožnostni energiji (5) za krivulji na slikah. Pričakovano je energija $C^2$ zlepka manjša, saj minimizira funkcional (5). Naj omenimo, da je bilo pri konstrukciji $C^2$ kubičnega zlepka treba rešiti globalni matrični sistem linearnih enačb, medtem ko je bil $G^1$ kubični zlepek konstruiran lokalno z algoritmom 1.



**Slika 5.** Primer geometrijskega interpolanta na realnih podatkih

Na sliki 5 je primer kubičnega $G^1$ zlepka na realnih podatkih.

## LITERATURA


[1] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] M. S. Floater, *On the deviation of a parametric cubic spline interpolant from its data polygon*, Comput. Aided Geom. Design **25** (2008) 3, str. 148–156.

[3] G. Jaklič in E. Žagar, *Planar cubic Hermite $G^1$ splines with small strain energy*, poslano v objavo.

[4] G. Jaklič in E. Žagar, *Shape preserving interpolation by spatial cubic $G^1$ splines*, Annali dell'Universita di Ferrara **54** (2008) 2, str. 259–267.

[5] J. Kozak in M. Krajnc, *Geometric interpolation by planar cubic polynomial curves*, Comput. Aided Geom. Design **24** (2007) 2, str. 67–78.

[6] E. T. Y. Lee, *Choosing nodes in parametric curve interpolation*, Comput. Aided Design **21** (1989) 6, str. 363–370.

[7] J. Wallner, *Note on curve and surface energies*, Comput. Aided Geom. Design **24** (2007) 8–9, str. 494–498.

[8] J.-H. Yong in F. Cheng, *Geometric Hermite curves with minimum strain energy*, Comput. Aided Geom. Design **21** (2004) 3, str. 281–301.