NELINEARNA DINAMIČNA ANALIZA LINIJSKIH KONSTRUKCIJ POD VPLIVOM PREMIKAJOČE SE MASE

NON-LINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF BEAM-LIKE STRUCTURES UNDER THE INFLUENCE OF A MOVING MASS

doc. dr. Eva Zupan, prof. mat.
eva.zupan@zag.si
Zavod za gradbeništvo Slovenije, Dimičeva 12, 1000 Ljubljana
prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.
igor.planinc@fgg.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova 2, 1000 Ljubljana

Znanstveni članek
UDK 531:624.04

Povzetek | Obravnavamo problem vpliva gibajočega se telesa na linijsko konstrukcijo. Telo modeliramo kot masni delec, konstrukcijo pa kot geometrijsko nelinearen prostorski nosilec. Numerična primerjava kaže na podcenjen odziv konstrukcije v primeru nepovezanega reševanja in/ali uporabe preprostih modelov konstrukcije. Posebej je obravnavan vpliv začetne deformirane lege nosilca. S prostorskimi primeri pokažemo zmogljivost predstavljenega algoritma. Metoda je primerna za dinamično analizo prostorskih linijskih konstrukcij, ki so obtežene s premikajočimi se telesi manjših razsežnosti in pri katerih z ravninskimi modeli ne moremo zajeti bistvenih odzivov. Priporočamo jo za vse dinamične analize linijskih konstrukcij s premičnimi (potujočimi) telesi in obtežbami, kjer preprostejše dinamične analize, nepovezano reševanje in/ali (kvazi)statične analize ne zagotavljajo ustreznih kvalitativnih in kvantitativnih rezultatov.

Ključne besede: linijske konstrukcije, dinamična analiza, premična masa

Summary | We analyse the response of beam-like structures subjected to a moving body. The body is modelled as a mass particle and the structure as a geometrically non-linear spatial beam. Numerical simulations and comparisons with other authors show considerable underestimation of the beam response when simplified models for the structure are used or the non-coupled analysis of the problem is performed. The influence of the initially deformed structure is studied. The spatial examples demonstrate the ability of the presented approach. The method is suitable for the spatial beam-like structures under a small-size moving body, which cannot be satisfactory analysed by the in-plane analysis. Such methods should be used for the cases where the dynamic response strongly exceeds the response of the structure obtained by static or quasi-static analyses or with simplified dynamic models.

Keywords: beam-like structures, dynamic analysis, moving mass

1 • UVOD

Pri matematičnem modeliranju različnih inženirskih problemov želimo z zadostno natančnostjo opisati bistvene lastnosti pojavov. Zaradi praktičnih razlogov pa tudi zaradi računske učinkovitosti lahko dejavnike, ki imajo manjši vpliv, zanemarimo. Pri modeliranju vpliva gibajočega se telesa po različnih premostitvenih objektih in tudi drugih gradbenih konstrukcijah pogosto ne smemo zanemariti fizikalno povezanega medsebojnega dinamičnega vpliva. Pri obravnavi takega povezanega problema je treba ločeno izbrati primeren model konstrukcije in primeren model gibajočega se telesa, z izbiro teh modelov in z izbiro predpostavke o načinu gibanja telesa pa vnaprej določimo, ali bo problem dejansko obravnavan povezano (prepletenost enačb) ali pa bo razpadel na več nepovezanih delov (separirani sistem enačb). Znanstvene objave v zadnjih dveh desetletjih kažejo na precejšnje zanimanje raziskovalcev za to problematiko. Večina obstoječih modelov temelji na Euler-Bernoullijevem ali Timošenkovem ravninskem modelu nosilca in na nepovezanem reševanju problema gibanja telesa in odziva konstrukcije, saj delcu vnaprej predpišejo hitrost ali pospešek za celotno časovno območje analize. Potujoče telo v literaturi najpogosteje modelirajo z gibajočo silo (kot modeliramo na primer prometno obtežbo) in z enakomerno ali pospešeno gibajočo se točkovno maso (delcem), najdemo pa tudi primer delno porazdeljene mase. Nosilec je v večini primerov zgolj prostoležeče podprt, razen kadar model nosilca dodatno poenostavijo (sistem togih palic in vzmeti). V novejših virih raziskovalci obstoječe preproste modele večinoma uporabijo za analizo konkretnih problemov, na primer (Nikkhoo, 2007) predstavljajo algoritem kontrole vibracij, (De Salve, 2010) analizirajo vplive potovanja več zaporednih mas po linijski konstrukciji z več podporami itd. Ameriški raziskovalci Wu, Whittaker in Cartmell so že leta 2000 opozarjali na pomanjkanje prostorskih analiz konstrukcij, ki so obremenjene z gibajočo se maso, saj mnogih problemov, kot na primer gibanje tovora po žerjavu, gibanje vozil po dvojno ukrivljenem mostu in podobnih primerov, ne moremo ustrezno opisati z ravninskimi modeli. Vseeno do danes nismo zasledili vidnejšega razvoja na tem področju. Prav zato so ((Wu, 2000), (Wu, 2002)) predstavili možnost vgraditve poenostavljenega vpliva gibajoče sile/mase na nosilec v komercialne programe za dinamično analizo prostorskih nosilcev.

Poleg problema ustreznosti ravninskega modela nosilca se spoprijemamo tudi s problematiko ustreznosti nepovezanega reševanja. Ugotoviti moramo, ali nepovezano reševanje sicer povezanih enačb problema dovolj natančno opiše odziv konstrukcije. V tem delu uporabimo natančnejši model linijske konstrukcije, saj uporabimo Reissner-Simovo geometrijsko točno teorijo prostorskih nosilcev. Potujoče telo modeliramo z delcem, ki mu predpišemo maso in začetno hitrost, enačbe delca in konstrukcije pa povežemo v enoten, medsebojno prepleten sistem enačb, ki ga rešujemo sočasno in z upoštevanjem medsebojnih vplivov. Rezultate ravninskega numeričnega primera primerjamo z analitičnimi rezultati in z rezultati drugega avtorja, prostorska primera pa prikažeta zmogljivost razvitega algoritma in računalniškega programa.

2 • MODEL NOSILCA

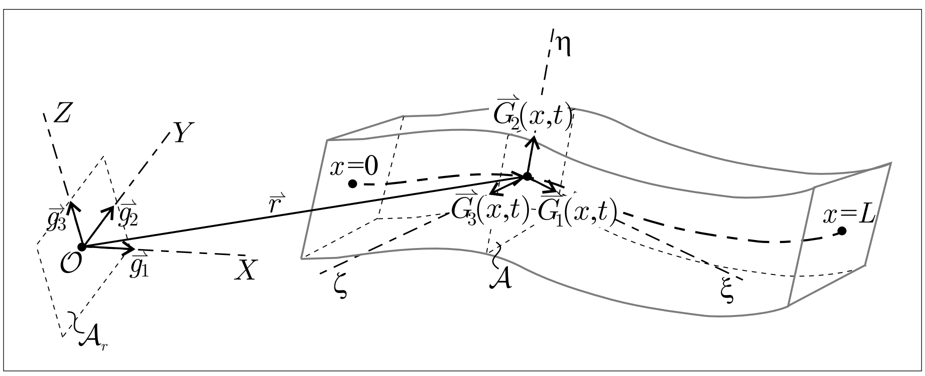
Z modelom nosilca opisujemo take gradbene elemente, ki imajo eno dimenzijo bistveno večjo od preostalih dveh. Tako telo lahko opišemo (i) s težiščno osjo nosilca, ki je v splošnem prostorska krivulja, in (ii) z družino prečnih prerezov vzdolž osi nosilca. V tem delu za matematičen opis deformiranja nosilca uporabimo znano Bernoullijevo hipotezo, ki predpostavlja, da so prerezi togi ravninski objekti, ki tudi po deformaciji nosilca ne spremenijo velikosti in oblike, dopuščamo pa, da so prečni prerezi poljubno nagnjeni glede na težiščno os nosilca. Težiščna os nosilca je pri vsakem času t podana z množico krajevnih vektorjev

$$\vec{r}(x,t), \tag{1}$$

kjer je $x \in (0,L)$ parameter težiščne osi in L dolžina nosilca v začetni legi. V začetni legi pri času $t = 0$ je x naravni parameter, medtem ko v poljubni deformirani legi pri času $t > 0$ x ni več naravni parameter, ampak predstavlja koordinato točke težiščne osi glede na začetno lego. Predpostavimo še, da ima nosilec konstanten prečni prerez, zato lahko družino prečnih prerezov predpišemo z referenčnim prerezom A_r in družino rotacij $R(x,t)$, ki preslikajo referenčni prerez v deformirano lego v izbrani točki nosilca, $R(x,t)$: $A_r \to A(x,t)$.

Za zapis enačb nosilca običajno vpeljemo dva koordinatna sistema. *Fiksni (prostorski) koordinatni sistem* določa ortonormirana baza $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, ki jo postavimo v težišče referenčnega prereza A_r tako, da drugi in tretji bazni vektor ležita v smereh glavnih vztrajnostnih osi A_r. *Pomični (materialni) koordinatni sistem* določa ortonormirana baza $\{\vec{G}_1(x,t), \vec{G}_2(x,t), \vec{G}_3(x,t)\}$ z izhodiščem v težišču prereza $A(x,t)$; drugi in tretji bazni vektor ležita v smereh glavnih vztrajnostnih osi $A(x,t)$. Tako izbrani bazi povezuje rotacija $R(x,t)$: $g_i \to G_i\,(x,t)$. Izbire koordinatnih sistemov in oznak so predstavljene na sliki 1.

V tem delu izhajamo iz geometrijsko točne teorije prostorskih nosilcev, katere začetnika sta Reissner (Reissner, 1981) in Simo (Simo, 1985). V numeričnem pristopu izhajamo



Slika 1 • **Model prostorskega nosilca in izbira koordinatnih sistemov** iz modela s kvaternionsko parametrizacijo rotacij, kot je predstavljena v delih ((Zupan, 2010), (Zupan, 2013)). Za osnovne interpolirane spremenljivke izberemo pomike in rotacijske kvaternione. Končni element za prostorski nosilec temelji na šibkih konsistentnih enačbah, ki jih diskretiziramo po kraju v skladu s kolokacijsko metodo. Časovno integracijo in diskretizacijo izvedemo po Newmarkovem pravilu; za rotacijske količine v skladu z njihovo neaditivno naravo uporabimo metodo, ki je prestavljena v delu (Simo, 1988) in je še dodatno prirejena za kvaternionsko parametrizacijo rotacij (Zupan, 2013).

3 • ENAČBE PROBLEMA

Predstavili bomo gibalne enačbe delca in dopolnili enačbe nosilca. Predpostavimo, da delec z nespremenljivo maso m drsi po težiščni osi nosilca in je pri tem v stalnem stiku s težiščno osjo. Lego delca določa koordinata poti, $s(t)$, ki opredeljuje lego na težiščni osi nosilca glede na začetno stanje nosilca. Delec na poti opiše krivuljo $\vec{r}_m(s(t)) := \vec{r}(x,t)$, za $x = s(t)$, kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor težiščne osi iz enačbe (1). S spodnjim indeksom m označujemo količine, ki pripadajo potujočemu masnemu delcu. Točki, v kateri je ob času t masni delec, dodelimo oznako T_m.

3.1 Krivočrtni koordinatni sistem

Ker se masni delec v vsakem trenutku giblje v smeri tangente glede na trenutno težiščno os v točki T_m, koordinatna sistema, ki sta bila izbrana za opis enačb nosilca (slika 1), nista primerna za opis gibanja delca. Zato v vsaki točki krivulje $\vec{r}_m(s)$, ki jo opiše masni delec, začasno uvedemo standardni krivočrtni Frenetov koordinatni sistem, ki ga sestavljajo *tangentni, normalni* in *binormalni bazni vektor* (Vidav, 1989):

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{r}_m{}'}{\|\vec{r}_m{}'\|}, \tag{2}$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{r}_m{}'' - \left(\vec{r}_m{}'' \cdot \vec{e}_t\right)\vec{e}_t}{\left\|\vec{r}_m{}'' - \left(\vec{r}_m{}'' \cdot \vec{e}_t\right)\vec{e}_t\right\|} = \frac{\vec{r}_m{}' \times \left(\vec{r}_m{}'' \times \vec{r}_m{}'\right)}{\left\|\vec{r}_m{}' \times \left(\vec{r}_m{}'' \times \vec{r}_m{}'\right)\right\|}, \tag{3}$$

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n = \frac{\left\|\vec{r}_m{}'\right\|}{\left\|\vec{r}_m{}' \times \left(\vec{r}_m{}'' \times \vec{r}_m{}'\right)\right\|} \vec{r}_m{}' \times \vec{r}_m{}''. \tag{4}$$

Črtice v zgornjih izrazih pomenijo odvod po parametru s. Vse tri vektorje Frenetovega koordinatnega sistema smo zapisali z odvodi krajevnega vektorja težiščne osi nosilca, zato poznamo tudi njihov zapis v fiksni bazi. Pripravimo prvi odvod tangentnega baznega vektorja, ki ga potrebujemo v nadaljevanju:

$$\vec{e}_t{}' = \frac{\left\|\vec{r}_m{}' \times \left(\vec{r}_m{}'' \times \vec{r}_m{}'\right)\right\|}{\left\|\vec{r}_m{}'\right\|^3} \vec{e}_n.$$

Odvod $\vec{e}_t{}'$ in normalni bazni vektor $\vec{e}_n$ sta torej kolinearna, njun skalarni produkt pa določa *ukrivljenost* κ_m krivulje $\vec{r}_m(s)$ v točki T_m:

$$\kappa_m = \frac{\vec{e}_t{}' \cdot \vec{e}_n}{\left\|\vec{r}_m{}'\right\|} = \frac{\left\|\vec{r}_m{}' \times \left(\vec{r}_m{}'' \times \vec{r}_m{}'\right)\right\|}{\left\|\vec{r}_m{}'\right\|^4}. \tag{5}$$

Recipročna količina ukrivljenosti je polmer ukrivljenosti, $\rho_m = 1/\kappa_m$.

3.2 Hitrost in pospešek delca

Začetna hitrost delca $\vec{v}_m^{(0)}$ je podatek problema. Pri poljubnem času $t > 0$ pa hitrost delca določa naslednja enačba:

$$\vec{v}_m = \frac{d\vec{r}_m}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{r}_m{}'\dot{s} = \dot{s}\|\vec{r}_m{}'\|\vec{e}_t. \tag{6}$$

Hitrost ima smer tangente, njen predznak pa določa odvod parametra s po času. Kadar želimo poudariti, da ima lahko hitrost tudi nasprotno smer kot tangentni bazni vektor, pišemo $\vec{v}_m = \mathrm{sign}(\dot{s})|\dot{s}|\,\|\vec{r}_m{}'\|\vec{e}_t$. Drugi odvod krajevnega vektorja krivulje poti delca določa pospešek delca:

$$\vec{a}_m = \frac{d\vec{v}_m}{dt} = \left(\ddot{s}\left\|\vec{r}_m{}'\right\|\right.$$

$$\left.\dot{s}^2\left(\vec{r}_m{}'' \cdot \vec{e}_t\right)\right)\vec{e}_t + \dot{s}^2\left\|\vec{r}_m{}'\right\|^2 \frac{1}{\rho_m} \tag{7}$$

Pospešek pri času $t = 0$ ni podatek, temveč mora zadoščati gibalni enačbi delca. Iz enačbe (7) je razvidno, da imamo poleg pospeška v tangentni smeri tudi komponento pospeška v normalni smeri. V primeru, ko normalna komponenta pospeška ni zanemarljiva, nastane bistveno razhajanje rezultatov med poenostavljenimi metodami in predlaganim modelom, saj normalna komponenta pospeška pri pristopih drugih avtorjev, na primer (Lee, 1996), (Mofid, 1996), (Yavari, 2002), zaradi izbire poenostavljenega modela nosilca in predpostavke o enakomernem gibanju delca ni zajeta.

3.3 Gibalne enačbe delca

Poleg kontaktnih sil med delcem in nosilcem upoštevamo še lastno težo delca. Rezultanto kontaktnih sil $\vec{R}_m$ izrazimo v krivočrtnem koordinatnem sistemu:

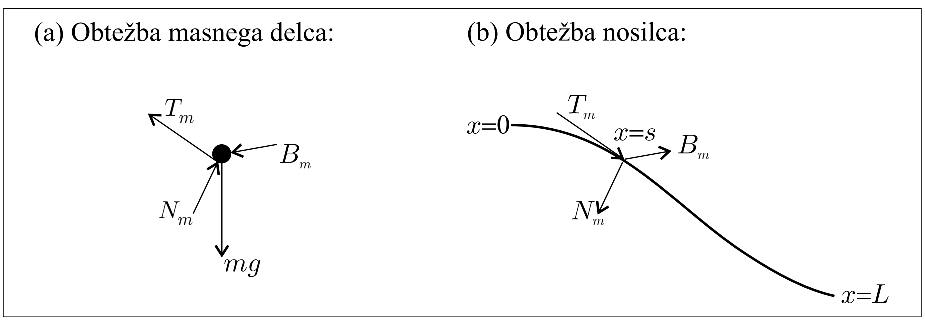
$$\vec{R}_m = T_m\vec{e}_t + N_m\vec{e}_n + B_m\vec{e}_b$$

$$= \vec{T}_m + \vec{N}_m + \vec{B}_m. \tag{8}$$

T_m označuje silo trenja, N_m in B_m sta normalna in binormalna komponenta kontaktne sile; grafičen prikaz sil, ki delujejo na masni delec, kaže slika 2(a). Trenje predpišemo v skladu s Coulombovim zakonom:

$$\vec{T}_m = -\mathrm{sign}(\dot{s})\mu\left\|\vec{N}_m + \vec{B}_m\right\|\vec{e}_t. \tag{9}$$

μ je *koeficient trenja* med delcem in nosilcem. Koeficient trenja je odvisen od podlage, hitrosti podrsavanja in velikosti stične površine teles



Slika 2 • **Obtežbe masnega delca in nosilca** ter se določa eksperimentalno. Gravitacijska sila $\vec{F}_m = mg\vec{e}$ deluje v smeri $\vec{e}$. Razstavimo jo glede na krivočrtne bazne vektorje

$$\vec{F}_m = mg\left(\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_t\right)\vec{e}_t + \left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_n\right)\vec{e}_n + \left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_b\right)\vec{e}_b\right).$$

Gibalna enačba delca določa, da je vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na masni delec, enaka produktu mase in pospeška. Komponentni zapis vektorske gibalne enačbe delca ima naslednjo obliko:

$$f_{d1}: T_m + mg\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_t\right) = m\dot{s}\left\|\vec{r}_m'\right\| + m\dot{s}^2\left(\vec{r}_m'' \cdot \vec{e}_t\right), \tag{10}$$

$$f_{d2}: N_m + mg\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_n\right) = m\dot{s}^2\|\vec{r}_m'\|^2\frac{1}{\rho_m}, \tag{11}$$

$$f_{d3}: B_m + mg\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_b\right) = 0. \tag{12}$$

Skupaj s Coulombovim zakonom (9) zgornje tri skalarne enačbe (10)–(12) sestavljajo sistem štirih enačb za štiri neznane funkcije: tri komponente rezultantne kontaktne sile, T_m, N_m, B_m, in parameter poti, s. Ta sistem enačb v nekaj korakih združimo v eno samo enačbo. Neznanko B_m izrazimo iz enačbe (12) in jo uporabimo v Coulombovem zakonu, da izrazimo T_m z N_m. Izraz za T_m uporabimo v enačbi (10), s katero iz (11) izločimo še N_m, in dobimo eno samo skalarno enačbo

$$-\operatorname{sign}(\dot{s})\mu\left\|\dot{s}^2\frac{\left\|\vec{r}_m' \times \left(\vec{r}_m'' \times \vec{r}_m'\right)\right\|}{\left\|\vec{r}_m'\right\|^2}\vec{e}_n - g\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_n\right)\vec{e}_n - g\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_b\right)\vec{e}_b\right\| + g\left(\vec{e}_g \cdot \vec{e}_t\right) - \ddot{s}\left\|\vec{r}_m'\right\| - \dot{s}^2\left(\vec{r}_m'' \cdot \vec{e}_t\right) = 0. \tag{13}$$

Enačbo (13) dodamo sistemu enačb prostorskega nosilca (Zupan, 2013, enačbe (43)–(48)), neznanko $s(t)$ pa priključimo množici osnovnih neznank gibanja nosilca, torej pomikom težiščne osi in zasukom (rotacijskim kvaternionom) prečnih prerezov.

3.4 Vpliv delca na nosilec

Kot je razvidno s slike 2(b), masni delec prek kontaktnih sil vpliva na konstrukcijo. Zaradi specifičnosti končnega elementa, predstavljenega v delu (Zupan, 2013), razvitega posebej za reševanje povezanega problema gibajočega se delca po nosilcu, se vpliv delca na nosilec odraža le v robnih enačbah nosilca. Da zajamemo ta vpliv, moramo torej pri izpeljavi robnih enačb upoštevati skok notranje sile $\vec{T}_m + \vec{N}_m + \vec{B}_m$ pri $x = s(t)$. Robni enačbi ponovno izpeljemo iz enačbe lokalnega ravnotežja sil (Zupan, 2013, enačba (28))

$$\vec{N}' + \vec{n} - \rho A_r\ddot{\vec{r}} = \vec{0} \tag{14}$$

z integracijo po parametru x. Pomen oznak, uporabljenih v enačbi (14): $\vec{N}(x,t)$, je ravnotežna rezultantna sila v prečnem prerezu nosilca, $\vec{n}$ je zunanja zvezna linijska obtežba na enoto dolžine osi nosilca glede na začetno lego, ρ je začetna gostota materiala. Za izpeljavo enačbe na levem robu izvedemo integracijo enačbe (14) po območju $(0,\frac{L}{2})$ in podobno pri izpeljavi enačbe za desni rob elementa integriramo po območju $(\frac{L}{2},L)$. V primeru, ko je masni delec na prvi polovici nekega elementa, moramo levo robno enačbo tistega elementa v sistemu enačb nadomestiti z naslednjo enačbo:

$$\vec{S}^0 + \vec{T}_m + \vec{N}_m + \vec{B}_m + \vec{N}^{L/2} + \int_0^{L/2}\left(\vec{n} - \rho A_r\ddot{\vec{r}}\right)dx = \vec{0}, \tag{15}$$

kjer je $\vec{S}^0(t)$ zunanja točkovna obtežba konstrukcije na levem robu elementa. Originalno robno enačbo desnega roba elementa pa nadomestimo z enačbo

$$\vec{S}^L + \vec{T}_m + \vec{N}_m + \vec{B}_m - \vec{N}^{L/2} + \int_{L/2}^{L}\left(\vec{n} - \rho A_r\ddot{\vec{r}}\right)dx = \vec{0}, \tag{16}$$

kadar je masni delec na drugi polovici tistega elementa konstrukcije. Oznaka $\vec{S}^L(t)$ pomeni točkovno obtežbo konstrukcije v točki desnega roba elementa. Kontaktne sile v izrazih (15)–(16) izračunamo iz enačb (10)–(12).

4 • NUMERIČNA IMPLEMENTACIJA

Enačbe povezanega problema vpliva masnega delca na gibanje prostorskega nosilca modeliramo v programskem okolju Matlab (The Math Works, 1999), kjer smo razvili lastno programsko kodo.

Predstavljeno numerično metodo verificiramo z analitično rešljivim ravninskim problemom. S primerjavo rezultatov numeričnih analiz drugega avtorja dodatno analiziramo natančnost predstavljenega numeričnega modela. Zmogljivost predlaganega algoritma prikažemo na geometrijsko zahtevnejših primerih – poenostavljenem modelu dela žerjava in cevnem vodnem toboganu.

Obravnavamo le primere jeklenih konstrukcij in pa konstrukcijo iz polimernega materiala. Pri vseh primerih predpostavimo, da je konstrukcija zgrajena iz linearnoelastičnega materiala. Utemeljitev izbire takega materialnega modela za polimerni material pojasnimo v nadaljevanju. Ker so deformacije v predstavljenih primerih relativno majhne in se ne približajo deformacijam na meji elastičnosti, je taka izbira materialnega modela smiselna.

Pri izbiri stopnje končnega elementa (stopnja je za ena večja od števila notranjih točk elementa) moramo upoštevati, da pri linearizaciji enačbe (13) nastopa tretji odvod interpolacijske funkcije, glej (Zupan, 2010 (opomba 18 na strani 124)). Da v celoti zajamemo vplive med nosilcem in delcem, moramo izbrati take interpolacijske funkcije, ki imajo tretji odvod netrivialen; torej je treba za interpolacijske funkcije izbrati polinome vsaj stopnje tri. Pri vsakem obravnavanem primeru izberemo tako število končnih elementov, da dobimo smiselne rezultate ob zagotovljeni konvergenci Newton-Raphsonove iteracijske sheme.

4.1 Delec na prostoležečem nosilcu

Z odzivom prostoležečega ravninskega nosilca pri enakomernem prehodu delca preko nosilca so se ukvarjali številni avtorji, glej na primer ((Mofid, 1996), (Lee, 1996), (Xu, 1997), (Yavari, 2002)). Za poenostavljeni problem enakomernega prehoda sile preko geometrijsko linearnega prostoležečega nosilca poznamo analitično rešitev (Muršič, 1972). Prečni pomik nosilca lahko izrazimo v zaključeni obliki z neskončno vsoto:

$$u_Y(x,t)=\frac{2F_m}{A_r\rho L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^2-\Omega_n^2}\left(\sin\Omega_n t\right.$$

$$\left.-\frac{\Omega_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad (17)$$

za $\Omega_n=\frac{n\pi v}{L}$, $\omega_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$; A_r je ploščina prečnega prereza nosilca, E je elastični modul materiala, J je upogibni vztrajnostni moment prečnega prereza, ρ je gostota materiala, L je dolžina nosilca, v je konstantna hitrost masnega delca in F_m njegova teža. Podatki o nosilcu so izbrani iz (Lee, 1996):

$$E=207\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2},$$

$$G=77{,}6\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2},$$

$$L=1\ \mathrm{m},\qquad \rho=7700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},$$

kjer je G strižni modul materiala. Lee analizira obsežnejši nabor prostoležeče podprtih nosilcev, obteženih z enakomerno gibajočima se masnim delcem in silo; izmed njih izberemo primer nosilca okroglega prečnega prereza s ploščino $A_r = 0{,}00179$ m², z upogibnima vztrajnostnima momentoma $J_2 = J_3 = 2{,}55115 \cdot 10^{-7}$ m⁴ in torzijskim vztrajnostnim momentom $J_t = J_2 + J_3$. Začetna geometrija in obtežba sta predstavljeni na sliki 3, levo. Delec ima maso $m = 0{,}2 \cdot \rho \cdot A_r \cdot L$. Predpostavimo tri različne začetne hitrosti (primeri (A), (B) in (C)):

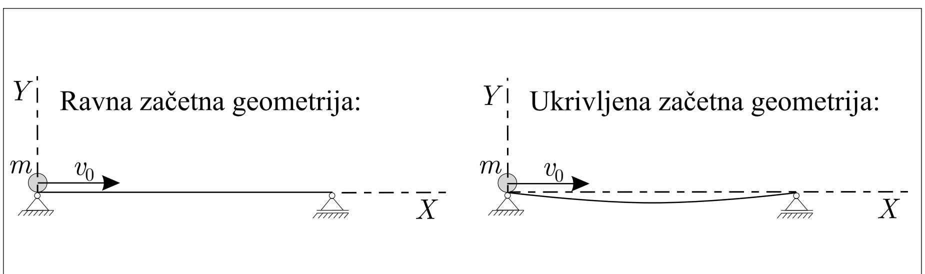
$$v_A=21{,}3876\ \mathrm{m/s^2},$$

$$v_B=97{,}217\ \mathrm{m/s^2},$$

$$v_C=213{,}877\ \mathrm{m/s^2}.$$

V primeru poenostavljenega modeliranja mase s točkovno silo se podane začetne hitrosti med računom ne spreminjajo, torej obravnavamo problem enakomernega prehoda sile preko nosilca. Kadar pa rešujemo problem prehoda delca preko nosilca povezano, se začetna hitrost delca s časom spreminja v skladu z gibalno enačbo delca. Vendar je pri vseh treh obravnavanih primerih prehoda delca preko prostoležeče podprtega nosilca spreminjanje hitrosti tako minimalno (reda velikosti 10^{-4}), da sprememba ne vpliva na grafično natančnost rezultatov in je primerjava numeričnih rezultatov z analitično rešitvijo poenostavljenega problema smiselna. Majhne spremembe hitrosti so posledica relativno majhnih prečnih pomikov, ki jih dosegamo v vseh primerih, povzetih po (Lee, 1996).

Nosilec modeliramo v primeru (A) z 32 končnimi elementi in v primerih (B) in (C) s 16 končnimi elementi; v vseh treh primerih za interpolacijske funkcije izberemo polinome stopnje šest, numerično integracijo izvedemo s sedmimi integracijskimi točkami. Izberemo časovni korak velikosti $\Delta t = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ s in pogoj za ustavitev Newtonove iteracije $\varepsilon_{New} = 10^{-8}$. Izbira mreže končnih elementov ni bistveno odvisna od deformiranja nosilca (za to bi zadoščalo manj elementov), ampak predvsem od števila leg, ki jih glede na časovni korak zavzame delec na nosilcu, kar je neposredno odvisno od hitrosti delca. Zato v primeru (A), kjer je hitrost bistveno nižja od preostalih dveh, izberemo gostejšo mrežo. Rezultate analiz primerov (A), (B) in (C) prikazujemo za različno velike časovne intervale, saj nas zanima odziv le v časovnem območju, ko je masni delec na nosilcu.



Slika 3 • **Geometrija in obtežba prostoležečega nosilca, levo z ravno začetno geometrijo in desno z ukrivljeno začetno geometrijo zaradi vpliva lastne teže nosilc**

Za vse tri primere izračunamo in na sliki 4 primerjamo normirane prečne pomike $\overline{u}=\frac{u_Y(L/2,t)}{u_{Ys}(L/2)}$, kjer je normalizacijski pomik $u_{Ys}(L/2)=\frac{mgL^3}{48EJ}$ enak statičnemu pomiku po linearni teoriji. Pomiki u_Y so izračunani na več različnih načinov: (i) po predstavljeni teoriji z začetno ravno lego nosilca, kot je prikazana na sliki 3, levo (vijoličasta kombinirana črta ·–·–); (ii) po predstavljeni teoriji z začetno ukrivljeno lego nosilca zaradi vpliva lastne teže (glej sliko 3, desno), ki jo izračunamo s predhodno statično analizo konstrukcije z metodo končnih elementov, predstavljeno v (Zupan, 2009) (zelena črtkana črta – – –); (iii) za prehod sile ustrezne velikosti, kjer rezultate izračunamo s poenostavljeno teorijo, v kateri zanemarimo vpliv vztrajnosti mase delca in predpostavimo konstantno hitrost (rešujemo nepovezan problem) (modra pikčasta črta ···); (iv) po analitični rešitvi (17) za prehod sile (polna rdeča črta –). Pomiki težiščne osi $u_Y(L/2,t)$ so v primeru začetno ukrivljene lege nosilca zaradi vpliva lastne teže izračunani kot rezultatni pomiki dveh analiz: (i) statične analize, ki določi deformiranje nosilca zaradi vpliva lastne teže, in (ii) dinamične analize, kjer je upoštevana obtežba s premikajočim se masnim delcem. Poleg primerjave s poenostavljeno analitično rešitvijo na sliki prikažemo še vrednosti iz vira (Lee, 1996) (krogec **o** označuje posamično vrednost pri prehodu sile in križec **+** posamično vrednost pri prehodu delca). S slike 4 lahko razberemo, da se naši numerični rezultati pri prehodu sile povsem ujemajo z analitično rešitvijo, medtem ko rezultati, povzeti po literaturi, za vse tri primere precej opazno odstopajo od analitičnih rezultatov. Pri nižji hitrosti prehoda delca (A) pomiki nosilca, računani po načinih (i) do (iv), skoraj sovpadejo. Po pričakovanju se z večanjem hitrosti delca veča tudi dinamični vpliv na konstrukcijo. Predlagani postopek te vplive zajame, kar razberemo kot intenzivnejši odziv nosilca v primerih (B) in (C), kadar v račun zajamemo vplive vztrajnosti mase. Zanimiva je tudi ugotovitev, da se z večanjem hitrosti delca poveča vpliv začetne deformirane lege. Začetno deformirano lego smo izračunali s statično analizo nosilca ob upoštevanju enakomerno porazdeljene lastne teže nosilca. V vseh treh primerih je začetna deformirana lega enaka, pa kljub temu v primeru A, kjer je začetna hitrost delca manjša, skoraj nima vpliva na odziv konstrukcije. Pri večjih hitrostih (B)-(C) pa začetna deformirana lega bistveno vpliva na končen odziv konstrukcije.

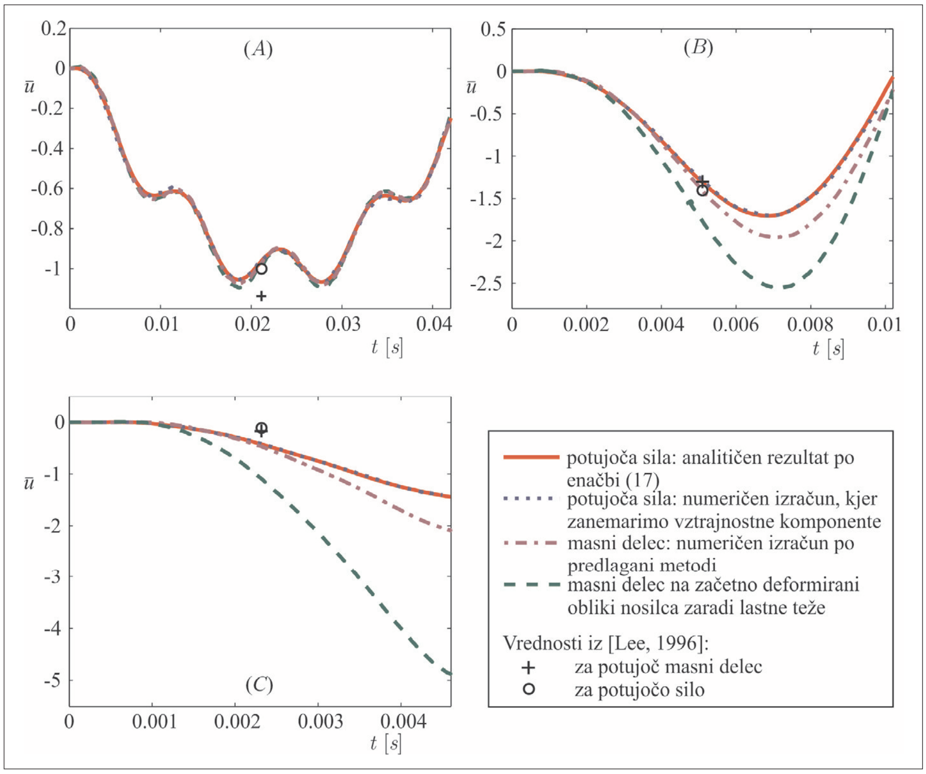
Na osnovi primerjav lahko zaključimo, da lahko pri nekaterih hitrostih delca dosežemo zadovoljive kvalitativne rezultate tudi z nepovezanim reševanjem problema in smemo celo potujoči masni delec nadomestiti s preprostejšim modelom – s potujočo silo. Pokazali smo, da pri obravnavanem primeru z večanjem hitrosti delca zelo poenostavljeni modeli nosilca in modeliranje potujočega delca s potujočo silo ne dajo več ustreznih rezultatov, saj so izračunani pomiki podcenjeni. Še več, pri večjih hitrostih delca je treba upoštevati tudi začetno deformirano lego konstrukcije. Za natančnejšo opredelitev meje območja veljavnosti preprostejših modelov je potrebna obširnejša študija vpliva spreminjanja drugih relevantnih količin na odziv konstrukcije, na primer razmerje med maso delca in maso konstrukcije.

4.2 Analiza preprostega žerjava

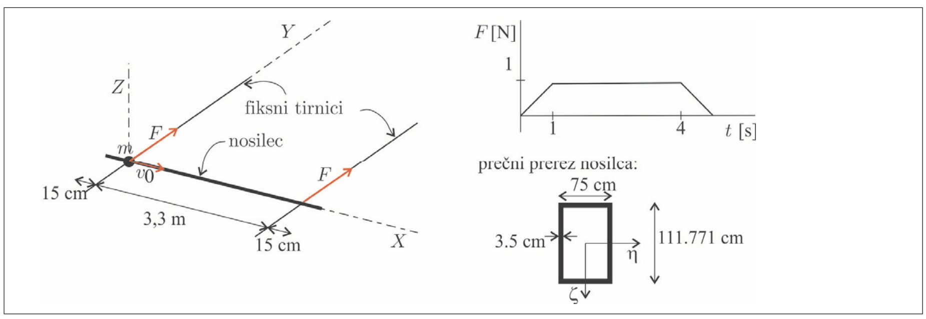
Že pri preprostih žerjavih lahko ustrezne analize potekajo zgolj z orodji, ki omogočajo prostorsko analizo konstrukcij. Na to so opozorili Wu in sodelavci že leta 2000, ko so predstavili prvi poenostavljen način upoštevanja premikajoče sile v komercialnem programu. Ker v člankih ((Wu, 2000),(Wu, 2002)) ne navajajo konkretnih podatkov o žerjavu, ki ga analizirajo, smo primorani poiskati realne podatke drugje. Francosko podjetje *Verlinde*, ki izdeluje dvigalne sisteme in žerjave, na svoji spletni strani (Verlinde, 2014) objavlja celotno tehnično dokumentacijo svojih izdelkov. Z razvitim algoritmom analiziramo žerjavni sistem ESMA, kjer se tovor premika vzdolž enojnega nosilca, nosilec pa dodatno drsi pravokotno glede na smer gibanja tovora, kot kaže slika 5.

Kjer podatki niso enolični, izberemo kar maksimalne vrednosti, na primer največji dopusten razpon in previsa nosilca, največjo dopustno maso premikajočega se tovora in njegovo najvišjo dopustno hitrost. Za prerez nosilca vzamemo škatlast pravokotni prerez, ki ima enako glavno vztrajnost $J_1 = 221$ cm^4 kot dejansko uporabljeni UKA20-profil. Žerjav je v celoti izdelan iz jekla z elastičnim modulom $E = 21\,000$ kN/cm^2. Lastno težo nosilca zanemarimo, delcu pa predpišemo maso 320 kg.

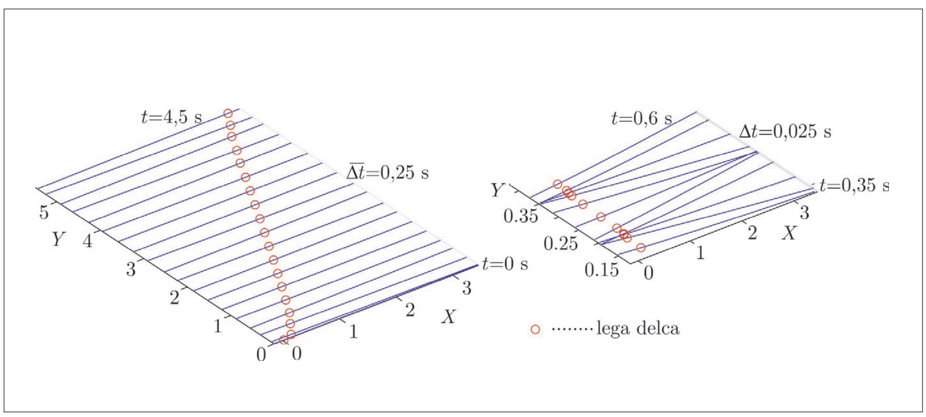
Nosilec dolžine 3,6 m v začetni legi leži vzdolž globalne osi X; podpremo ga na razdalji 15 cm od robov nosilca tako, da sta preprečena pomika v smereh X in Z, preprečen je še zasuk okoli osi X (torzijski zasuk). V teh dveh točkah delujeta tudi motorja, ki premikata nosilec po drsnikih. To modeliramo z dvema točkovnima



Slika 4 • **Normirani prečni pomiki sredine prostoležečega nosilca pri prehodu delca za primere (*A*), (*B*) in (*C*)**



Slika 5 • **Geometrija in obtežba žerjava**



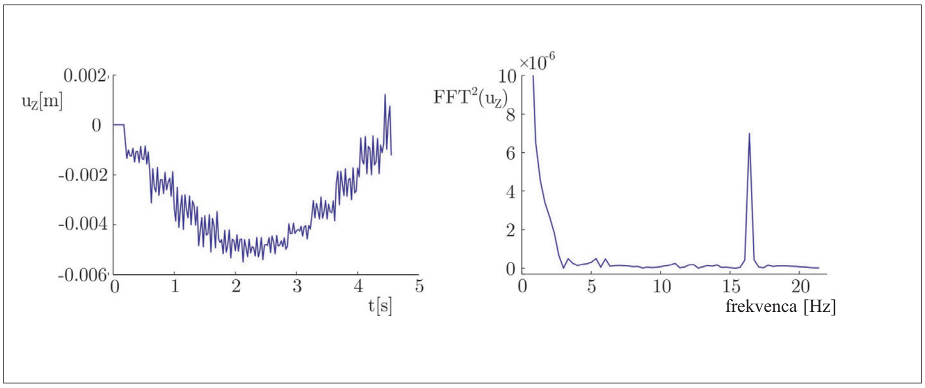
Slika 6 • **Časovno zaporedje leg nosilca in delca; levo za vsak deseti rezultat na celotnem časovnem intervalu in desno na manjšem časovnem intervalu z desetkratno povečavo pomikov** silama F s prijemališčema na mestu podpor, ki delujeta v smeri osi Y; točkovni sili sprva linearno naraščata do časa $t = 1$ s od vrednosti 0 do 1 N, nato sta konstantni do časa $t = 4$ s, na koncu pa ponovno linearno padata do vrednosti 0 N pri $t = 5$ s. Predpostavimo, da sta drsni gredi popolnoma togi.

V trenutku, ko se začne masni delec gibati po težiščni osi nosilca od leve podpore proti desni, začne potovati tudi nosilec v smeri osi Y. Po 4,5 s, ko masni delec (tovor) doseže desno podporo, račun ustavimo. Delcu predpišemo začetno hitrost $v_0 = 0{,}6667$ m/s^2, kar je enako največji hitrosti, ki je dopustna za tovrstne žerjave. Za numerični izračun izberemo mrežo 14 končnih elementov šeste stopnje, pri čemer razpon med podporama modeliramo z dvanajstimi enako dolgimi elementi, preostala dva elementa pa določata previsa. Numerično integracijo opravimo s sedmimi integracijskimi točkami. Izberemo časovni korak velikosti $\Delta t = 0{,}025$ s; celoten izračun tako zahteva 180 časovnih korakov.

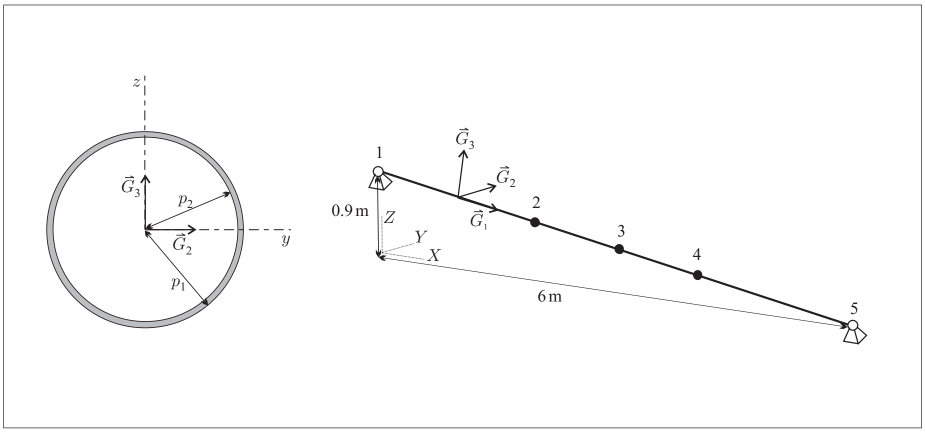
Zaporedje deformiranih leg, ki je na sliki 6 (levo) narisano za korak 0,25 s, prikazuje potek gibanja nosilca in delca skozi čas. Zanimiv je podrobnejši pogled zaporednih deformiranih leg na manjšem časovnem odseku z desetkratno povečavo pomikov, ki razkrije nihanje celotnega nosilca v smeri njegovega gibanja. Tudi pri prečnem pomiku lahko opazimo izrazite oscilacije (slika 7). Podobne frekvence delovanja pogonskega mehanizma in lastnega nihanja konstrukcije bi lahko povzročile nezaželen pojav resonance. Temu se lahko izognemo, če poznamo pomembne frekvence konstrukcije; najvplivnejšo frekvenco določimo s hitro Fourierovo analizo (Fast Fourier Transform, s kratico FFT, je vgrajena funkcija v programskem okolju Matlab (The Math Works, 1999)). Ker metoda deluje le pri številu časovnih korakov, ki so potence števila 2, to analizo izvedemo le pri rezultatih prečnega pomika srednje točke težiščne osi na časovnem območju od 0,5 s do 3,245 s (kar predstavlja $128 = 2^7$ časovnih korakov). Druga dominantna frekvenca znaša približno 16,6 Hz. Največji prečni pomik je dosežen na sredini razpona nosilca pri času $t = 2{,}125$ s in meri 0,0055 m, kar po pričakovanjih ne dosega 0,3 % razpona nosilca.

4.3 Vodni tobogan

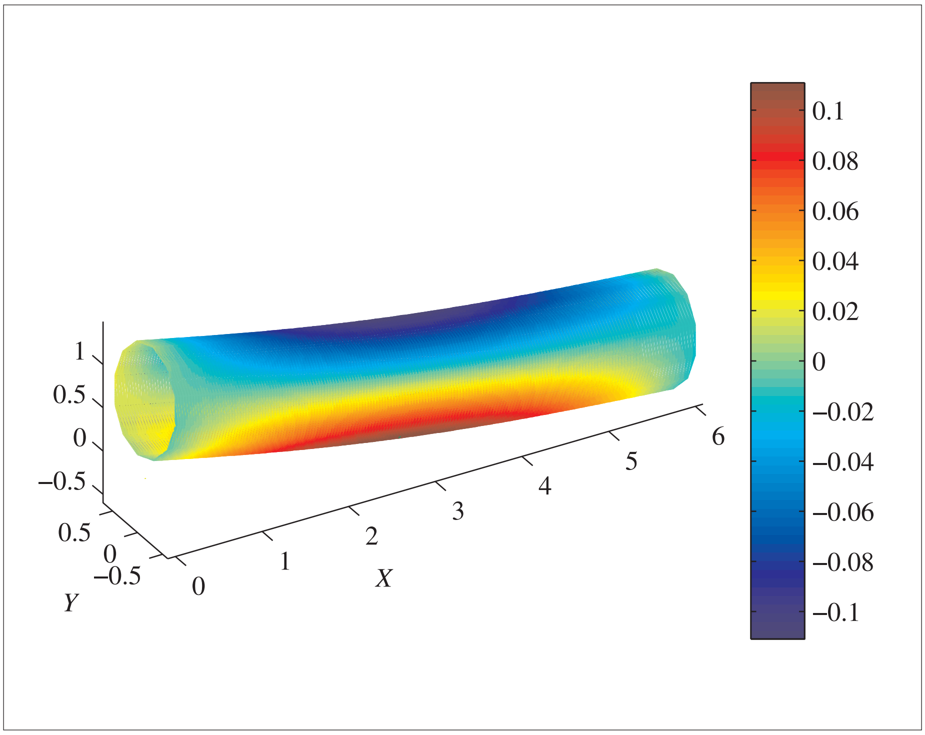
Podatke za vodni tobogan v celoti povzamemo iz internega poročila o statični analizi vodnih toboganov (Zupan, 2005). Tobogan je zgrajen iz polimernega materiala, ki ga v svoji proizvodnji uporablja podjetje Veplas,



Slika 7 • **Prečni pomiki sredine razpona nosilca (levo) in njihov frekvenčni spekter (desno)**



Slika 8 • **Geometrija vodnega tobogana; levo prečni prerez, desno težiščna os**



Slika 9 • **Ovojnica poteka deformacij na obodu prereza za primer dinamične analize vodnega tobogana. Barvna skala prikazuje deformacije v odstotkih** velenjska plastika, d. d. ((Vedenik, 2005), (Zupan, 2005)), za katerega so ugotovili, da je deformacija na meji elastičnosti skoraj enaka mejni deformaciji (krhek lom). Osna deformacija na meji elastičnosti je $\varepsilon_{mejni} = 0{,}023$. Za majhne deformacije je odvisnost med deformacijami in napetostmi linearna; za račun izberemo enega manj ugodnih vrednosti za elastični modul

Upoštevan je strižno tog material, zato za numeričen račun predpostavimo $G = 10E$. Prerez tobogana je kolobar, ki ga določata kroga s polmeroma $p_1 = 0{,}605$ m in $p_2 = 0{,}6$ m (slika 8, levo). Raven tobogan z naklonom 15° glede na vodoravno ravnino je obojestransko nepomično členkasto podprt, preprečena sta tudi torzijska zasuka. Sestavljajo ga trije enako dolgi ravni segmenti, ki so med seboj togo povezani. Poleg lastne teže ($\rho = 2692{,}74$ kg/m^3), ki deluje v smeri $-g_3$, in točkovnih obtežb velikosti F = –800 N, ki delujejo na mestu spojev prav tako v smeri globalne vertikalne smeri, upoštevamo še druge obtežbe, povzete po poročilu (Zupan, 2005):

1. *voda v toboganu:* porazdeljena obtežba v smeri gravitacije z velikostjo 200 N/m po vsej dolžini;
2. *obtežba z vetrom:* porazdeljeni obtežbi v smeri lokalnih osi, določeni z vektorjema $\vec{G}_2$ in $\vec{G}_3$, obe velikosti 6000 N/m vzdolž celotne težiščne osi tobogana;
3. *obtežba (teža) uporabnikov tobogana:* originalno je predpostavljena porazdeljena obtežba v smeri gravitacije velikosti 1500 N/m po vsej dolžini; vpliv uporabnikov namesto s porazdeljeno obtežbo modeliramo s pomičnim delcem z maso 1500/g kg ($g = 9.81$ m/s^2) in začetno hitrostjo $v^{(0)} = 10$ m/s.
4. *obtežba s snegom:* porazdeljena obtežba v smeri gravitacije z velikostjo 2200 N/m po vsej dolžini.

Za določitev deformacijskega stanja v prečnem prerezu predpostavimo v skladu s predpostavkami teorije nosilcev linearen potek deformacij.

Najprej opravimo statično analizo po metodi končnih elementov, kot je predstavljena v delu (Zupan, 2009), pri čemer upoštevamo enake obtežbe kot v (Zupan, 2005) in enako mrežo končnih elementov: krajna dva segmenta modeliramo s po enim elementom stopnje šest, srednji segment pa z dvema elementoma stopnje šest, kot kaže slika 8. Za dinamično analizo, kjer porazdeljeno obtežbo zaradi kopalcev nadomestimo z masnim delcem, pa uporabimo mrežo petnajstih enako dolgih končnih elementov stopnje šest. Za zaključek Newtonove iteracije v obeh primerih postavimo zahtevo $\varepsilon_{New} = 10^{-8}$. Začetno obliko tobogana za dinamično analizo določimo s statično analizo kot posledico obremenitve s statičnimi obtežbami (lastna teža, teža vode v toboganu, obtežba z vetrom in obtežba s snegom). Bočna obtežba z vetrom in obtežbe v smeri gravitacije povzročijo rahlo prostorsko ukrivljeno začetno lego nosilca. Nato tobogan dinamično obremenimo še s pomičnim delcem. Dinamično analizo opravimo s konstantnim časovnim korakom $\Delta t = 0{,}04$ s. Na sliki 9 prikazujemo ovojnico poteka deformacij na deformirani obliki tobogana po dinamični analizi v skladu s teorijo, predstavljeno v tem članku. V preglednici 1 so zbrani doseženi maksimalne deformacije in pomiki, izračunani po statični analizi iz vira (Zupan, 2005), po statični analizi z uporabo končnih elementov iz (Zupan, 2009) in po dinamični analizi. Pri računu relativnih razlik med dinamično in statično analizo za referenčne rezultate izberemo rezultate po statični analizi (Zupan, 2009), zaradi dobrega ujemanja s starejšimi rezultati drugega avtorja (Zupan, 2005). Ker je pri statični analizi obtežba uporabnikov upoštevana zelo konservativno – po predpisih bi zadoščalo upoštevanje porazdeljene obtežbe na dolžini 1 *m* na najmanj ugodni legi –, so, v skladu z pričakovanji, maksimalni deformacije in pomiki po statični analizi večji kot po dinamični analizi. Pri nižji začetni hitrosti nastajajo večja razhajanja. Pomembna ugotovitev je, da so rezultati po statični analizi konservativni.

	deformacije (%)	pomik (cm)
statika	0,115	0,664
dinamika	0,106	0,568
(Zupan, 2005)	0,11	0,66
relativna razlika (%)	7,83	14,4

Preglednica 1 • **Maksimalne vrednosti deformacij in pomikov ter relativna razlika rezultatov dinamične analize glede na rezultate statične analize za primer vodnega tobogana**

5 • SKLEP

V članku smo predstavili algoritem za prostorsko analizo konstrukcij pod vplivom premikajočega se telesa po metodi končnih elementov. Konstrukcijo smo modelirali z geometrijsko nelinearnimi linijskimi končnimi elementi, telo pa z masnim delcem. Problem medsebojnega vpliva delca in nosilca smo rešili povezano. Pokazali smo, da upoštevanje nelinearnosti in povezanosti vodi v izrazitejši odziv konstrukcije v primerjavi s poenostavljenimi modeli, še posebno za večje hitrosti ob nespremenjeni masi delca in konstrukcije. S primeroma preprostega žerjava in vodnega tobogana smo pokazali, da je predstavljeni numerični model za dinamično analizo prostorskih konstrukcij pod vplivom premikajoče se mase zelo učinkovit in primeren za analizo tovrstnih konstrukcij.

6 • ZAHVALA

Zahvaljujemo se Agenciji Republike Slovenije za raziskovalno dejavnost za delno financiranje teh raziskav prek raziskovalnega projekta Z2-4158.