Približna konstrukcija kota 1 radian

Jens Carstensen in Alija Muminagić

Spomnimo: radian (oznaka rad) je merska enota za kot. Velikost središčnega kota (α) v radianih je enaka kvocientu dolžine krožnega loka (l) nad tem kotom in polmerom kroga (r) $\alpha = \frac{l}{r}$ (glej sliko 1).

Po definiciji je radianska mera polkroga, ki v stopinjah meri 180°, enaka kvocientu dolžine polkroga in polmera:

- $\dfrac{r\pi}{r} = \pi.$

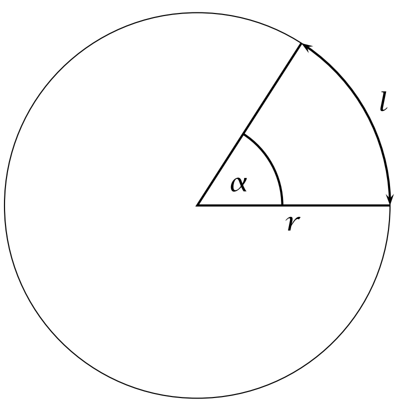
Velja torej $180^\circ = \pi$ rad in od tu sledi

- $1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}29578^\circ = 57^\circ 17' 44{,}8''$

in

- $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \approx 0{,}01745 \text{ rad}.$

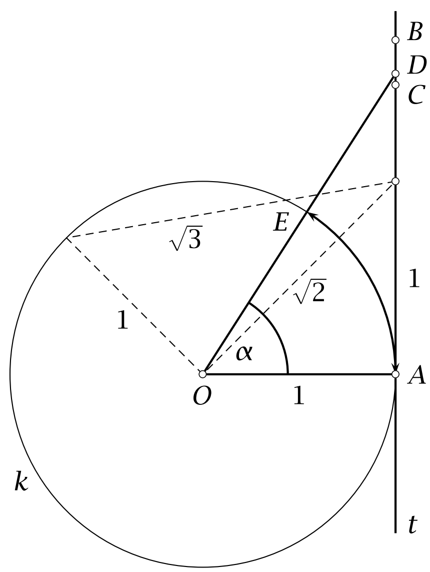
Obstaja dokaz, da točna konstrukcija kota 1 rad ni možna. A obstaja mnogo (zelo duhovitih) približnih konstrukcij, od katerih bomo v tem prispevku predstavili tri.



SLIKA 1.

1. konstrukcija

Narišimo krožnico k s polmerom 1. V točki A narišemo tangento t in na isti strani točke A izberemo točki B in C, tako da je $AC = \frac{3}{2}$ in $AB = \sqrt{3}$. Konstrukcijo daljice $\sqrt{3}$ kaže slika 2. Na koncu poiščemo na tangenti t točko D tako, da je $CD = \frac{1}{4}BC$. Premica skozi točki O in D seka krožnico v točki E. Trdimo, da je dolžina loka AE približno enaka 1 rad. Poglejmo: $AD = AC + CD = AC + \frac{1}{4}BC = AC + \frac{1}{4}(AB - AC) = \frac{3}{4}AC + \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}558012702$, pri čemer je $\tan 1 = 1{,}557407725$. Bralci sami ocenite napako.



SLIKA 2.

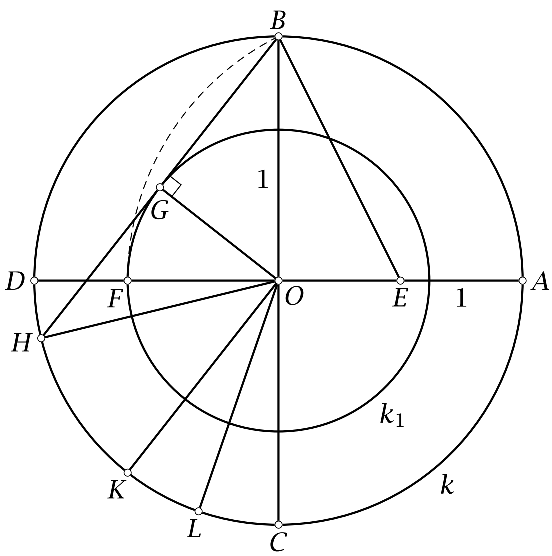
2. konstrukcija

Krožnici k s polmerom 1 vrišimo medsebojno pravokotna premera $AD \perp BC$ (glej sliko 3). Točka E razpolavlja daljico OA, točka F pa naj leži na daljici AD tako, da je $EF = EB$. Konstruiramo krožnico k_1 s središčem v O in polmerom OF ter tangento iz točke B na to krožnico. Ta tangenta se dotika krožnice k_1 v točki G in seka krožnico k v točki H, kakor kaže slika 3. Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OEB$ pove:

- $$BE^2 = OE^2 + OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}.$$

Od tod sledi $BE = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Naprej velja $GO = FO = EF - EO = BE - EO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. V trikotniku $\triangle OBG$ je $\sin\angle OBG = \frac{GO}{OB} = \frac{GO}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, kar pomeni $\angle OBG = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0{,}666239$ rad ali $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx \frac{2}{3}$ rad.

Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\angle HOC = 2 \cdot \angle HBC = 2 \cdot \angle OBG \approx 2 \cdot \frac{2}{3}$ rad $= \frac{4}{3}$ rad. Premica skozi točko O, vzporedna daljici BH, seka krožnico k v točki K. Velja $\angle HOK = \frac{2}{3}$ rad $(= \angle KOC)$. Simetrala kota $\angle KOC$ seka krožnico k v točki L in s slike 3 vidimo, da je $\angle HOL = \angle HOK + \angle KOL \approx \frac{2}{3}$ rad $+ \frac{1}{3}$ rad $= 1$ rad.



SLIKA 3.

V tem primeru je približna vrednost za 1 rad dana s $\frac{3}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}999359$ rad.

Spotoma dobimo za nagrado še oceno krožne konstante π: Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OBG$ da:

- $$BG^2 = OB^2 - OG^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BG = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0{,}786151$$

To število je skoraj enako $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398$. Torej štirikratnik daljice BG je približno enak krožni konstanti π, ki ima približno vrednost 3,141592:

- $$4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{8(\sqrt{5}-1)} \approx 3{,}144605.$$

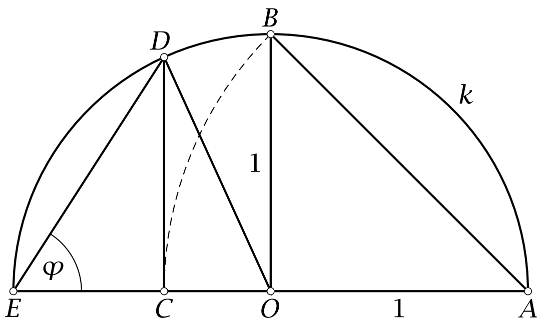
Ob izpeljavi spomnimo še na zlati rez. Zlati rez daljico d razdeli na dva neenaka dela x in $d-x$. Razmerje dolžine večjega dela in dolžine daljice je enako razmerju dolžin manjšega in večjega dela $\frac{x}{d} = \frac{d-x}{x}$. Od tod sledi $x^2 + dx - d^2 = 0$. Če je $d = 1$ je rešitev kvadratne enačbe $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Točka F razdeli daljico DO v razmerju zlatega reza. Iz $\frac{FO}{DO} = \frac{DF}{FO} \Rightarrow FO = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, kot smo zgoraj pokazali.

3. konstrukcija

EA je premer polkroga k s polmerom 1, $OB \perp EA$ in točka C leži na EA tako, da je $AC = AB$. Jasno je, da je $AC = \sqrt{2}$ (glej sliko 4). Pravokotnica narisana v točki C seka krožni lok k v točki D. Tako je $OD = 1$ in $OC = AC - AO = \sqrt{2} - 1$. Pitagorov izrek za trikotnik $\triangle OCD$ pove $CD^2 = OD^2 - OC^2 = 1^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Nadalje velja $CE = AE - AC = 2 - \sqrt{2}$. V trikotniku $\triangle DEC$ po Pitagori $DE^2 = CD^2 + CE^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right) - \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ in končno v trikotniku $\triangle DEC$ velja $\sin^2\varphi = \frac{CD^2}{DE^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Od tu sledi $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}9989$ rad.

Ta konstrukcija je elegantna in ima majhno napako (poiščite jo sami).



SLIKA 4.

Literatura

[1] J. Dickson in N. Lord, *Approximate constructions of 1 radian*, The mathematical gazette, **98**, 542, 2014.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *Konstruktion of 1 radian*, Matematik Magasinet **25**, 649.

[3] J. Carstensen in A. Muminagić, *Konstruktion of 1 radian, 2*, Matematik Magasinet **78**, 2868.

× × ×

Naloga iz Bakhšalijskega rokopisa

Marko Razpet

Bakhšalijski rokopis

Leta 1881 je kmet pri vasi Bakhšali med kamni razvalin našel večje število popisanih listov iz brezovega lubja. Precej jih je že uničil ali poškodoval zob časa, malo pa še nespretni najditelj, ki pa je bil vsaj toliko priseben, da je vse skupaj predal oblastem. Bakhšali je dandanes v Pakistanu, večje bližnje mesto je Pešavar. V času najdbe je bil Pakistan del Indije, ki je bila pod angleško kolonialno upravo. Listi so prišli v roke učenjakov, ki so hitro ugotovili, da imajo opravka z matematično vsebino. Jezikoslovci in matematiki so liste uredili, fotografirali, prebrali in prepisali ter jih začeli proučevati. Vseh kolikor toliko celih listov je 70; poimenovali so jih *Bakhšalijski rokopis*. Posamezni listi so velikosti približno 14,5 × 9 cm, hranijo jih v knjižnici v angleškem Oxfordu. Bakhšalijski rokopis matematiki in jezikoslovci še vedno proučujejo, o čemer pričajo objavljeni članki in knjige.

Bakhšalijski rokopis je napisan v starem indijskem jeziku *sanskrtu*, ki ni popolnoma klasičen, ker se v njem čuti nekaj lokalnih posebnosti. Pisava pa tudi ni *devanagari*, ki se običajno uporablja za pisanje v sanskrtu in v nekaterih današnjih indijskih jezikih. V Bakhšalijskem rokopisu je uporabljena pisava *šarada*, ki je nastala v severozahodnem delu Indije v 8. ali v 9. stoletju in se je še dolgo potem uporabljala. Števke v rokopisu niso take kot naše, jih pa je 10, vključno z ničlo. Kar se matematike tiče, rokopis uporablja malo simbolov, poleg števk le še vodoravne in navpične črte ter nekaj kratic.

Glede časa nastanka Bakhšalijskega rokopisa si znanstveniki niso enotni. Nekateri ga postavljajo v 7. ali v 8. stoletje, nekateri še v kasnejša stoletja, nekateri, zlasti Indijci, pa kar v 4. stoletje. Tudi ni jasno, ali je rokopis originalen ali pa je morda prepis še starejšega rokopisa. Kakorkoli že je, rokopis je eden najstarejših ohranjenih, ki so ga našli na indijski podcelini. Tudi o avtorstvu ni veliko znanega; vemo pa, da je bil pisec brahman, predstavnik vodilne hindujske kaste, ki je skrbela za ohranitev in širitev hindujske kulturne tradicije. Brahman se je na enem od listov predstavil kot *princ računarjev, sin Čhadžaka*.

Za nas je bolj zanimiva sama vsebina Bakhšalijskega rokopisa. Z nam znanimi pojmi bi vsebino rokopisa lahko razdelili na linearne probleme, diofantske enačbe, aritmetična zaporedja, kvadratne enačbe, ploščine in prostornine ter probleme v zvezi z zlatom in denarjem.

Naloga

Bakhšalijski rokopis navaja zanimive naloge, ki vodijo do linearnih enačb. Te imajo eno samo ali pa tudi več rešitev. Oglejmo si primer. Uporabljali bomo besedo *dinar*, v sanskrtu *dīnāra*, ki je bila znana tudi Indijcem kot denarna enota ali določena količina zlata.

Oseba A ima sedem žrebcev, oseba B devet kobil, oseba C pa deset kamel. Vsak da po eno žival ostalima dvema, tako da so potem vsi enako bogati. Najdi vrednost vsake živali posebej in vrednosti vseh živali skupaj za vsakega lastnika posebej.

Rešitev

Vsak žrebec naj stane x_1, vsaka kobila x_2 in vsaka kamela x_3 dinarjev. Pri tem so x_1, x_2 in x_3 naravna števila. Po predaji živali je oseba A imela pet žrebcev, eno kobilo in eno kamelo, vse skupaj v vrednosti $5x_1 + x_2 + x_3$ dinarjev. Oseba B je imela sedem kobil, enega žrebca in eno kamelo, kar je bilo vredno $x_1 + 7x_2 + x_3$ dinarjev, oseba C pa je na koncu imela osem kamel, enega žrebca in eno kobilo v skupni vrednosti $x_1 + x_2 + 8x_3$ dinarjev.

Ker vemo, da so bili potem vsi enako bogati, denimo, da je bilo premoženje v teh živalih za vsako omenjeno osebo vredno c dinarjev, velja sistem diofantskih enačb:

- $$5x_1 + x_2 + x_3 = c,$$
  $$x_1 + 7x_2 + x_3 = c,$$
  $$x_1 + x_2 + 8x_3 = c.$$

Z odštevanjem prve in druge, prve in tretje ter druge in tretje enačbe tega sistema, krajšanjem in preurejanjem dobimo nove enačbe:

- $$2x_1 = 3x_2,\ 4x_2 = 7x_3,\ 6x_2 = 7x_3.$$

Leva stran nove prve enačbe je deljiva s številom 2, ki je tuje 3, zato mora x_2 biti deljivo z 2. To pomeni, da lahko zapišemo $x_2 = 2\ell$, kjer je ℓ celo število. Zato je $x_1 = 3\ell$. Nato dobimo iz nove druge enačbe $7x_3 = 12\ell$, kar pa pomeni, da je ℓ deljiv s 7 in ga lahko zapišemo kot $\ell = 7m$, kjer je m naravno število. Tako imamo $x_1 = 21m$, $x_2 = 14m$ in $x_3 = 12m$. Ker je $6x_2 - 7x_3 = 6 \cdot 14m - 7 \cdot 12m = 0$, je izpolnjena tudi nova tretja enačba. Vsaka oseba ima torej živalsko premoženje v vrednosti $c = 131m$ dinarjev. Žrebci so po $21m$ dinarjev, kobile po $14m$ dinarjev in kamele po $12m$ dinarjev. Pri tem je m naravno število. Rešitev je torej nešteto. Rokopis navaja samo eno: $x_1 = 42$, $x_2 = 28$, $x_3 = 24$, $c = 262$. Dobimo jo iz našega rezultata za $m = 2$.

Opomba

Podobne naloge so, kar je presenetljivo, sestavni del z Nobelovo nagrado nagrajene Nashove teorije o vrednosti izdelkov v zaprti ekonomiji. John Forbes Nash mlajši (1928–2015) je bil ameriški matematik in ekonomist. Poleg Nobelove nagrade za ekonomijo leta 1994 (skupaj z Reinhardom Seltenom in Johnom Harsanyijem) je leta 2015 Nash prejel tudi Abelovo nagrado (skupaj z Louisom Nirenbergom), ki se od leta 2003 podeljuje za pomembne rezultate v matematiki.

Literatura

[1] August Frederich Rudolf Hoernle, *On the Bakhshali Manuscript*, Bibliolife, Charleston; faksimile knjižice, ki je izšla na Dunaju 1887 pri založbi Alfred Hölder.

[2] Svami Satya Prakash Sarasvati, Dr. Usha Jyotishmati (ur.), *The Bakhshali Manuscript, an Ancient Treatise of Indian Arithmetic*, Dr. Ratna Kumari Svadhyaya Sansthana (izd.), Allahabad, 1979.

× × ×