Zanimive naloge in lepi uspehi na mednarodnih matematičnih tekmovanjih

↓↓↓
JAKOB JURIJ SNOJ, LUKA HORJAK, ANA META DOLINAR

→ **V zadnjem obdobju so se slovenski dijaki in dijakinje udeležili treh mednarodnih matematičnih tekmovanj.**

15. Srednjeevropska matematična olimpijada je potekala od 23. do 29. avgusta 2021 v Zagrebu na Hrvaškem. Po mnogih tekmovanjih, odpovedanih zaradi pandemije ali organiziranih na daljavo, je bilo to prvo mednarodno matematično tekmovanje za srednješolce, na katerem sodeluje Slovenija, ki je bilo spet organizirano v živo. Tekmovanje je sestavljeno iz individualnega in ekipnega dela, slednji je posebnost med mednarodnimi matematičnimi tekmovanji. Na individualnem tekmovanju tekmovalci rešujejo štiri naloge, razdeljene po temah in ne po težavnosti, ki okvirno pokrivajo področja algebre, kombinatorike, geometrije in teorije števil. Na ekipnem tekmovanju je nalog osem, prav tako pa so razdeljene na enaka štiri področja – praviloma je prva naloga iz vsakega področja nekoliko lažja od druge. Tekmovalci iste ekipe se lahko na ekipnem tekmovanju posvetujejo med seboj ter sodelujejo pri iskanju rešitev. Slovenijo so zastopali Lenart Dolinar in Vid Kavčič (Gimnazija Bežigrad), Katarina Grilj (Srednja šola Slovenska Bistrica), Rok Hladin in Tilen Šket (I. gimnazija v Celju) ter Matija Skrt (Gimnazija Nova Gorica). Najbolje se je odrezala Katarina Grilj, ki je za svoj uspeh prejela bronasto medaljo, Matija Skrt pa je prejel pohvalo. Ekipo sta spremljala David Opalič in Tevž Lotrič

SLIKA 1.
Slovenska ekipa na SMO 2021

13. tekmovanje Romanian Master of Mathematics je potekalo od 10. do 16. oktobra 2021. Tekmovanje, ki sicer običajno poteka februarja ali marca v Bukarešti v Romuniji, je tokrat zaradi pandemije potekalo na daljavo, naši tekmovalci pa so med tekmovanjem bivali v Plemljevi vili na Bledu. Tekmovalci so se v dveh tekmovalnih dneh pomerili v reševanju šestih nalog različnih težavnosti, ki so okvirno pokrivale področja algebre, kombinatorike, geometrije in teorije števil. Format tekmovanja je enak kot na Mednarodni matematični olimpijadi, naloge pa so praviloma običajno nekoliko težje. Na tekmovanje je tradicionalno povabljenih 20 najboljših držav po rezultatih Mednarodne matematične olimpijade preteklega leta. Slovensko ekipo so sestavljali Simon Bukovšek (Gimnazija Kranj), Lovro Drofenik in Jaka Vrhovnik (I. gimnazija v Celju), Juš Kocutar (II. gimnazija Maribor), Jan Pantner (Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija) in Lana Prijon (Gimnazija Bežigrad). Lovro Drofenik je z 21-imi točkami osvojil bronasto medaljo, Jaka Vrhovnik in Lana Prijon pa sta za v celoti pravilno rešeno nalogo prejela pohvalo. Vodji ekipe sta bila Jakob Jurij Snoj in Luka Horjak.

SLIKA 2.
Udeleženci tekmovanja RMM med reševanjem nalog v Plemljevi vili

11. Evropska dekliška matematična olimpijada pa je potekala med 6. in 12. aprilom 2022 v Egerju na Madžarskem. Na njej je sodelovalo 213 tekmovalk iz 54 držav. Tekmovanje je bilo organizirano hibridno, slovenska ekipa pa se ga je udeležila v živo. Slovenijo so na olimpijadi zastopale Neca Camlek (Gimnazija Bežigrad), Nives Gošnjak (Šolski center Velenje, Gimnazija), Katarina Grilj (Srednja šola Slovenska Bistrica, Gimnazija) in Kaja Rajter (II. gimnazija Maribor). Katarina Grilj je osvojila bronasto medaljo, Kaja Rajter in Nives Gošnjak pa pohvali. Ekipno so po seštevku točk naše tekmovalke dosegle tretji najboljši uspeh za Slovenijo, od kar sodelujemo na EDMO. Spremljevalca slovenske ekipe sta bila Ana Meta Dolinar in Luka Horjak, kot opazovalke pa so se letošnje olimpijade udeležile predstavnice organizacijskega odbora EDMO 2023 Lucijana Kračun Berc, Tanja Labus in Doris Keršič, saj bo naslednja olimpijada potekala v Sloveniji.

Vsem tekmovalkam in tekmovalcem ter njihovim mentorjem in spremljevalcem čestitamo za dosežen uspeh! Za vedoželjne bralke in bralce pa v nadaljevanju dodajamo besedilo in rešitve nekaj izbranih nalog iz tekmovanj. Ostale naloge najdete na spletnih straneh tekmovanj.

SMO 2021, naloga 1

Poišči vsa taka realna števila A, da ima vsako zaporedje neničelnih realnih števil $x_1, x_2, \ldots$, za katerega velja

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

SLIKA 3.
Slovenska ekipa na EDMO 2022

za vsak $n \in \mathbb{N}$, končno mnogo negativnih členov.

Rešitev. Z nekaj poskušanja moramo najprej priti do domneve, da zahtevi ustrezajo natanko vsa realna števila $A \geq 2$. Šele potem se lahko lotimo dokaza te domneve. Najprej dokažimo, da so vsa števila $A \geq 2$ ustrezna. Denimo, da je $x_n < 0$ neki negativen člen. Potem očitno velja $x_{n+1} > A > 0$. Z indukcijo pa bomo dokazali, da v tem primeru za vsako naravno število k velja $x_{n+k} \geq 1$, torej so vsi nadaljni členi pozitivni. Veljavnost trditve za $k = 1$ smo že dokazali. Denimo, da velja za neko naravno število k. Uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$x_{n+k+1} = A - \frac{1}{x_{n+k}} \geq A - 1 \geq 1,$$

torej je trditev dokazana. Zato ima za $A \geq 2$ vsako ustrezno zaporedje največ en negativen člen.

Dokaz, da za realno število $A < 2$ trditev ne velja, je nekoliko zahtevnejši. V njem bomo uporabili dejstvo, da velja $x + \frac{1}{x} \geq 2$ za vsako pozitivno realno število x. Ta izraz namreč lahko preoblikujemo v $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$, ki očitno velja, saj je kvadrat realnega števila vedno nenegativen. Dokazali bomo, da za vsako realno število $A < 2$ velja, da ima vsako zaporedje neničelnih realnih števil, ki ustreza pogoju $x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$, neskončno negativnih členov. Zvezo v nalogi lahko preoblikujemo v $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} = A$. Če seštejemo prvih n takih enakosti, dobimo

$$\left(x_2+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_3+\frac{1}{x_2}\right)+\ldots+\left(x_{n+1}+\frac{1}{x_n}\right)=nA,$$

kar lahko preoblikujemo in ocenimo navzdol

$$nA=\frac{1}{x_1}+x_{n+1}+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+\left(x_3+\frac{1}{x_3}\right)+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geq\frac{1}{x_1}+x_{n+1}+2(n-1).$$

Velja torej

$$x_{n+1}\leq 2-n(2-A)-\frac{1}{x_1}.$$

Ker je $A<2$, je izraz na desni negativen za vse dovolj velike n, zato so negativni tudi vsi nadaljnji členi zaporedja.

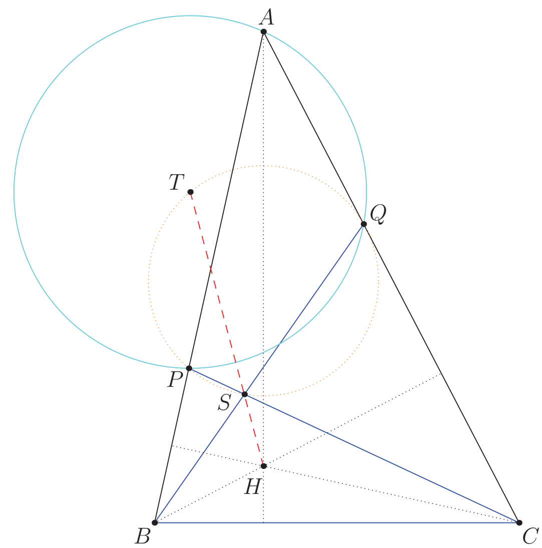
EDMO 2022, naloga 1

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, za katerega velja $BC<AB$ in $BC<CA$. Naj točka P leži na daljici AB in točka Q leži na daljici AC, tako da $P\neq B$, $Q\neq C$ in $BQ=BC=CP$. Naj bo T središče očrtane krožnice trikotnika APQ, H višinska točka trikotnika ABC in S presečišče premic BQ in CP. Dokaži, da so T, H in S kolinearne.

Rešitev. Kot pri vsaki geometrijski nalogi si najprej narišimo čim natančnejšo skico.

Opazimo, da je trikotnik BCQ enakokrak z vrhom pri B, BH pa je višina v tem trikotniku. V enakokrakem trikotniku višina sovpada s simetralo kota, zato je BH simetrala kota $\angle CBS$. Podobno opazimo, da je trikotnik CBP enakokrak z vrhom pri C, zato je CH simetrala kota $\angle SCB$. Točka H tako leži na dveh simetralah kotov v trikotniku BCS, zato je to kar središče včrtane krožnice trikotnika. Sledi, da je SH simetrala kota $\angle BSC$. Dovolj bi tako bilo pokazati, da tudi točka T leži na tej simetrali oziroma na simetrali kota $\angle QSP$.

O točki T že vemo to, da leži na simetrali stranice PQ, saj je središče trikoniku APQ očrtane krožnice. To nas spomni na znano geometrijsko konfiguracijo – simetrala stranice in nasprotnega kota se sekata na razpolovišču pripadajočega loka očrtane krožnice. Dovolj bi tako bilo dokazati, da so točke P, S, Q in T konciklične.



SLIKA 4.
Dokazujemo kolinearnost točk T, H in S.

Po izreku o obodnem in središčnem kotu je

$$\angle PTQ=2\angle PAQ.$$

Oglejmo si še kot $\angle QSP$. Opazimo, da velja

$$\angle QSP=\angle BSC=180^\circ-\angle SCB-\angle CBS,$$

saj je vsota kotov v trikotniku SBH enaka 180°. Ker pa je BH simetrala kota pri B, velja

$$\begin{aligned}\angle CBS&=2\angle CBH=2\cdot(90^\circ-\angle ACB)\\&=180^\circ-2\angle ACB.\end{aligned}$$

Podobno dobimo, da je $\angle SCB=180^\circ-2\angle CBA$, zato je

$$\begin{aligned}\angle QSP&=180^\circ-180^\circ+2\angle ACB-180^\circ+2\angle CBA\\&=2(\angle ACB+\angle CBA)-180^\circ.\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}\angle PTQ+\angle QSP&=2\angle BAC+2(\angle ACB+\angle CBA)\\&\quad-180^\circ=180^\circ,\end{aligned}$$

saj je $\angle BAC+\angle ACB+\angle CBA=180^\circ$. Ker je vsota nasprotnih kotov v štirikotniku $PSQT$ enaka 180°, je ta tetiven.

Sedaj opazimo, da je $TP=TQ$, zato sta enaka tudi pripadajoča obodna kota $\angle QST$ in $\angle TSP$, torej T res leži na simetrali kota.

EDMO 2022, naloga 5

Za vsa naravna števila n, k naj bo $f(n, 2k)$ število možnosti, da tabelo velikosti $n \times 2k$ popolnoma pokrijemo z nk dominami velikosti 2×1 (npr., $f(2,2) = 2$ in $f(3,2) = 3$).

Poišči vsa naravna števila n, pri katerih je za vsak $k \in \mathbb{N}$ število $f(n, 2k)$ liho.

Rešitev. Dokazali bomo, da pogoju zadoščajo natanko vsa števila oblike $2^k - 1$. Najprej dokažimo dve pomožni trditvi.

Trditev 1. $f(2m+1, n) \equiv f(m, n) \pmod 2$ za vse m in vse sode n.

Oglejmo si, kaj se zgodi, če tlakovanje tabele velikosti $(2m+1) \times n$ prezrcalimo čez sredinski stolpec. Tako dobimo a parov tlakovanj (ki se zrcalijo drug v drugega) in b posamičnih tlakovanj (ki se zrcalijo sama vase). Ker je število tlakovanj v parih očitno sodo, bo $f(2m+1, n) \equiv b \pmod 2$.

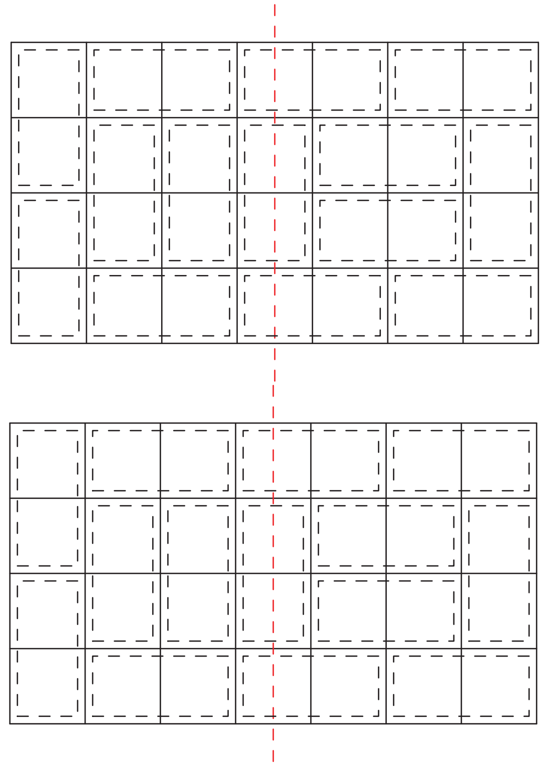
Določimo sedaj število b. Če se tlakovanje prezrcali samo vase, mora veljati, da ima vsaka domina, ki ima vsaj eno polje na sredinskem stolpcu, na sredinskem stolpcu obe svoji polji. To pomeni, da je sredinski stolpec pri teh tlakovanjih pokrit z $\frac{n}{2}$ vertikalnimi dominami, kar ploščo razdeli na dva dela velikosti $m \times n$. Sredinski stolpec je fiksiran. Prav tako tlakovanje enega dela velikosti $m \times n$ fiksira drugega, da velja simetričnost, zato je $b = f(m, n)$.

Trditev 2. $f(n, n) \equiv 0 \pmod 2$ za vse sode $n \geq 2$.

Prezrcalimo tlakovanja tabele velikosti $n \times n$ čez diagonalo. Nobeno tlakovanje se ne zrcali samo vase (domina v zgornjem levem kotu, bo npr. iz vertikalne prezrcaljena v horizontalno, ali obratno). Torej lahko tlakovanja razdelimo v pare, zato bo $f(n, n)$ sodo.

Sedaj lahko zaključimo dokaz. Vemo že naslednje:

- Če je n lih, iz prve trditve sledi, da n zadošča pogoju naloge natanko tedaj, ko pogoju zadošča $\frac{1}{2}(n-1)$.
- Če je $n \geq 2$ sod, iz druge trditve sledi, da n pogoju ne more zadoščati.



SLIKA 5.
Primer zrcaljenja domin

- Če je $n = 1 = 2^1 - 1$, potem n zadošča pogoju, saj je $f(1, 2k) = 1$ za vsak k.

Zapišimo n v binarnem sistemu. Če je n sod, ne zadošča pogoju naloge, če je lih, pa si oglejmo število, ki ga dobimo, če mu izbrišemo zadnjo števko. To je ravno $\frac{1}{2}(n-1)$. Če ima n v binarnem zapisu kakšno števko enako 0, bomo z brisanjem zadnje števke na neki točki prišli do sodega števila, ki pa ne zadošča pogoju. Sledi, da imajo iskana števila v binarnem zapisu same enke, to pa so ravno števila oblike $2^k - 1$.

× × ×