LOGISTIČNI POLINOMI

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta v Ljubljani
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11B68, 11B73, 11B83.

V prispevku pokažemo, kako normalizirana logistična funkcija generira zaporedje polinomov. Obravnavamo nekatere njihove lastnosti in povezave z Bernoullijevimi in Stirlingovimi števili.

LOGISTIC POLYNOMIALS

It is shown how the normalized logistic function generates a sequence of polynomials. Some properties of these polynomials are discussed and some relations with Bernoulli and Stirling numbers are given.

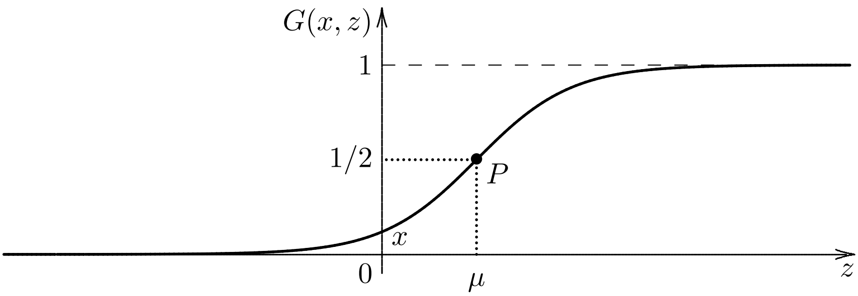
Uvod

V matematiki se pogosto dogaja, da pri reševanju nekega problema opazimo kakšno drobno zanimivost, ki je nismo pričakovali. Če se vanjo malo poglobimo, pa nam morda uspe najti še kakšno presenečenje. Tak primer je preprosta logistična funkcija $t \mapsto y(t)$, s katero opišemo rast populacije pri določenih pogojih. Običajno jo obravnavamo že čisto na začetku pri navadnih diferencialnih enačbah prvega reda (na primer v [5]) kot rešitev logistične diferencialne enačbe $y' = Ky(a - y)$. Navadno iščemo tako rešitev, ki zadošča nekemu začetnemu pogoju $y(0) = y_0 \in (0, a)$. Pri tem sta K in a pozitivni konstanti (nekaj več o tem v [5, 6]). Graf logistične funkcije imenujemo *logistična krivulja*. Rešitev se seveda spreminja, če spreminjamo začetni pogoj. V prispevku bomo spoznali, da je pri obravnavi logistične funkcije smiselno vpeljati zaporedje polinomov, ki jih imenujemo *logistični polinomi* in jih po svoje porodi ali generira ravno logistična funkcija.

V teoriji diferencialnih enačb drugega reda poznamo veliko primerov polinomskih zaporedij. Spomnimo se samo na klasične ortogonalne polinome, na primer na Legendrove, Hermitove in Laguerrove, ki imajo rodovne funkcije in tričlene linearne rekurzije. Logistični polinomi pa imajo bolj zapleteno rekurzijo, kar še posebej pritegne našo pozornost. Pojavijo se tudi pri logistični verjetnostni porazdelitvi (glej [2]).

S preprosto linearno zamenjavo spremenljivk $t \to z = \alpha t$ in $y \to Y = \beta y$ lahko logistično diferencialno enačbo zaradi udobnejše obravnave normaliziramo tako, da dobi obliko $Y' = Y(1-Y)$, začetni pogoj pa $Y(0) = x \in (0,1)$. Očitno ima enačba ločljivi spremenljivki in jo lahko rešimo z ločevanjem spremenljivk in integracijo. Še elegantneje jo lahko rešimo z uvedbo nove funkcije $U = 1/Y$, ki zadošča enostavnejši diferencialni enačbi $U' = 1 - U$ s splošno rešitvijo $U(z) = 1 + C\exp(-z)$. Iz začetnega pogoja $U(0) = 1/x$ hitro dobimo $C = (1-x)/x$ in

$$U(z) = \frac{x + (1-x)\exp(-z)}{x}, \quad Y(z) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(-z)}, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$



Slika 1. Normalizirana logistična krivulja in njen prevoj.

Ker bomo na funkcijo Y gledali tudi kot na funkcijo začetne vrednosti x, bomo pisali $Y(z) = G(x,z)$ in funkcijo G obravnavali kot funkcijo spremenljivk $x \in (0,1)$ in $z \in \mathbb{R}$. Na pasu $(0,1) \times \mathbb{R}$ je G očitno zvezna funkcija in ima tam zvezne vse parcialne odvode poljubnega reda.

Spremljajoči polinomi

V nadaljevanju bomo obravnavali normalizirano logistično funkcijo G kot funkcijo spremenljivk x in z, torej

$$(x,z) \mapsto G(x,z) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(-z)}\,.$$

Očitno je $G(x,0) = x$, $\lim_{z\to-\infty} G(x,z) = 0$ in $\lim_{z\to\infty} G(x,z) = 1$ za vsak $x \in (0,1)$. Normalizirane logistične funkcije $z \mapsto G(x,z)$ pri različnih

$x \in (0,1)$ so zvezne in naraščajoče ter se razlikujejo za vzporedni premik vzdolž abscise. Ustrezne normalizirane logistične krivulje so med seboj skladne. Vse te funkcije zadoščajo normalizirani logistični diferencialni enačbi z začetnim pogojem

$$\frac{\partial G}{\partial z} = G(1-G),\ G(x,0) = x\,. \tag{1}$$

Neposredno iz (1) dobimo z odvajanjem

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = (1-2G)\frac{\partial G}{\partial z} = G(1-G)(1-2G)\,,$$

iz česar takoj ugotovimo, da ima normalizirana logistična krivulja pri fiksnem x svoj edini prevoj v točki $P(\mu, 1/2)$, pri čemer je $\mu = \mu(x) = \log((1-x)/x)$. Za $x = 1/2$ je $\mu = 0$, za $0 < x < 1/2$ je $\mu > 0$, za $1/2 < x < 1$ pa $\mu < 0$.

Izrek 1. *Funkcija G ima v okolici točke $z = 0$ razvoj v potenčno vrsto oblike*

$$G(x,z) = \frac{x}{x + (1-x)\exp(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!}\, z^n\,, \tag{2}$$

pri čemer so p_n polinomi, ki imajo nelinearno rekurzijo

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(x), \quad p_0(x) = x\,. \tag{3}$$

Stopnja polinoma p_n je $n+1$, vsi njegovi koeficienti pa so cela števila. Za vsak $n \geq 1$ je $p_n(0) = p_n(1) = 0$.

Dokaz. Uporabimo splošno obliko členov Taylorjeve vrste in zapišemo enakost

$$p_n(x) = \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(x,0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^n na obeh straneh nelinearne enačbe (1), kateri funkcija G zadošča, dobimo rekurzijo (3). Ker je $p_0(x) = x$, lahko induktivno z uporabo rekurzije sklepamo, da ima polinom p_n stopnjo $n+1$ in so vsi njegovi koeficienti cela števila. Iz rekurzije prav tako dobimo, da sta 0 in 1 ničli polinomov p_n za vsak $n \geq 1$. ∎

Polinom p_n na intervalu $(0,1)$ zato opisuje obnašanje normalizirane logistične krivulje v presečišču z ordinatno osjo. Polinomom p_n lahko seveda definicijsko območje razširimo z intervala $(0,1)$ na $\mathbb{R}$.

Primer 1. Z rekurzijo (3) hitro najdemo nekaj začetnih polinomov p_n:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x(1-x),\\
p_2(x) &= x(1-x)(1-2x),\\
p_3(x) &= x(1-x)(1-6x+6x^2),\\
p_4(x) &= x(1-x)(1-14x+36x^2-24x^3),\\
p_5(x) &= x(1-x)(1-30x+150x^2-240x^3+120x^4).
\end{aligned}$$

Kasneje nam bodo pomagali najti prvih nekaj logističnih polinomov.

V naslednjem izreku nastopajo Bernoullijeva števila B_n, ki jih navadno definiramo z rodovno funkcijo

$$\frac{z}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Več o Bernoullijevih številih lahko preberemo na primer v [1, 3, 4, 6].

Izrek 2. *Za vsako celo število $k \geq 1$ velja*

$$p_{2k}(1/2) = 0, \quad p_{2k-1}(1/2) = \frac{B_{2k}}{2k}(2^{2k}-1)\,, \tag{4}$$

posebej pa je $p_0(1/2) = 1/2$.

Dokaz. Najprej $G(x,z)$ izrazimo s pomočjo parametra $\mu = \log((1-x)/x)$, torej

$$G(x,z) = \frac{1}{1+\exp(\mu - z)} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{z-\mu}{2}\right). \tag{5}$$

Ker je za $x = 1/2$ parameter $\mu = 0$, dobimo po eni strani iz (5)

$$G(1/2, z) = \frac{1}{1+\exp(-z)} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th}(z/2)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(1/2)}{n!} z^n\,. \tag{6}$$

Po drugi strani pa velja znani razvoj funkcije th (hiperbolični tangens) v potenčno vrsto (glej na primer [1]), in sicer

$$\frac{1}{2}\operatorname{th}(z/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2^{2n}-1)z^{2n-1}, \quad |z| < \pi\,, \tag{7}$$

tako da s primerjavo koeficientov pri potenci z^n v (6) in (7) takoj dobimo za $k \geq 1$ relaciji (4). ∎

Radi pa bi našli enostavnejši zapis koeficientov polinomov p_n. Pri tem uporabimo nekaj preprostih zamenjav spremenljivk in nekaj znanih razvojev funkcij v potenčne vrste. Videli bomo, da koeficiente polinomov p_n lahko izrazimo s Stirlingovimi števili druge vrste $S(n,k)$. Pomagala nam bodo tudi Stirlingova števila prve vrste $s(n,k)$. Več o Stirlingovih številih obeh vrst najdemo v ustrezni matematični literaturi, denimo v [1, 4].

Izrek 3. *Za vsako nenegativno celo število n velja enakost*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! S(n+1, k+1) x^{k+1} \,. \tag{8}$$

Dokaz. Najprej naredimo zamenjavo $z \mapsto \log(1+z)$ v (2) in s tem dobimo

$$\frac{x(1+z)}{1+xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} \log^n(1+z) \,. \tag{9}$$

Ker pa obstaja za vse dovolj majhne z znani razvoj

$$\frac{1}{n!} \log^n(1+z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{s(k,n)}{k!} z^k$$

ter znamo razviti, prav tako za dovolj majhne z, funkcijo $z \mapsto 1/(1+xz)$ v geometrijsko vrsto, dobimo po zamenjavi vrstnega reda seštevanja iz (9)

$$\frac{x(1+z)}{1+xz} = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{k+1} - x^k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=0}^{k} s(k,n) p_n(x) \,.$$

S tem smo za razlike sosednjih potenc našli razvoj

$$x^{k+1} - x^k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{k} s(k,n) p_n(x), \quad k \geq 1 \,.$$

Ker za Stirlingova števila velja enakost

$$\sum_{k=m}^{n} S(n,k) s(k,m) = \sum_{k=m}^{n} s(n,k) S(k,m) = \delta_{m\,n} \,,$$

dobimo še razvoj v obratni smeri, namreč

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k! S(n,k) (x^{k+1} - x^k), \quad n \geq 1 \,.$$

Pri tem je $\delta_{m\,n}$ Kroneckerjev simbol. Z osnovno rekurzijo Stirlingovih števil druge vrste, to je $S(n+1,k+1) = S(n,k) + (k+1)S(n,k+1)$ (glej na primer [1]), najdemo polinome p_n eksplicitno v obliki (8). ∎

S tem smo našli za polinome p_n tako obliko, iz katere so razvidni njihovi koeficienti. Iz (8) ponovno razberemo, da je p_n polinom stopnje $n+1$, njegov odvod p_n' pa stopnje n.

Logistični polinomi

Radi pa bi imeli lepše, pravo polinomsko zaporedje, in sicer táko, v katerem bi n-ti polinom imel stopnjo n za vsak $n \geq 0$, tako kot pri klasičnih ortogonalnih polinomih. Ponuja se kar samo od sebe.

Izrek 4. *Za vsako nenegativno celo število n je $P_n = p_n'$ polinom stopnje n. Zaporedje $P_0, P_1, P_2, \ldots$ je pravo polinomsko zaporedje, ki ima rodovno funkcijo*

$$H(x,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,z) = \frac{\exp(-z)}{(x+(1-x)\exp(-z))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!}\, z^n\,, \qquad (10)$$

veljata pa tudi zapisa $P_n(x) = p_{n+1}(x)/p_1(x)$ in

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)! S(n+1,k+1) x^k\,.$$

Za vsak indeks n veljata enakosti $P_n(0) = 1$ in $P_n(1) = (-1)^n$.

Dokaz. Ker je

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x,z) = \frac{x(1-x)\exp(-z)}{(x+(1-x)\exp(-z))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}(x)}{n!}\, z^n$$

in

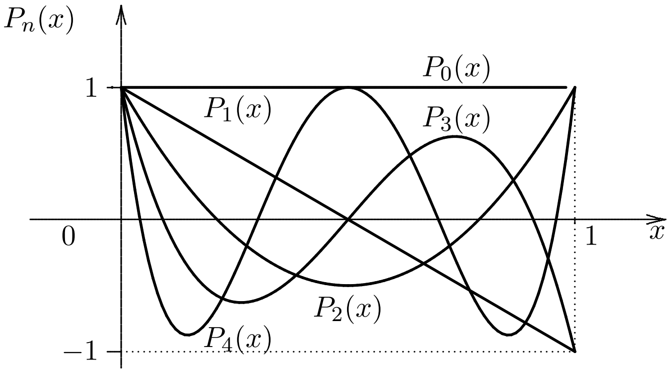
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,z) = \frac{\exp(-z)}{(x+(1-x)\exp(-z))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{p'}_n(x)}{n!}\, z^n\,,$$

velja enakost

$$\frac{\partial G}{\partial z} = p_1 \frac{\partial G}{\partial x}\,,$$

iz katere dobimo

$$p_{n+1} = p_1 p_n' = p_1 P_n, \quad n \geq 0\,. \qquad (11)$$



Slika 2. Grafi logističnih polinomov $P_n(x)$ za $0 \leq n \leq 4$ na intervalu $[0, 1]$.

Zapis polinoma P_n s Stirlingovimi števili $S(n, k)$ dobimo iz (8). Nazadnje vstavimo $x = 0$ in $x = 1$ v (10) in dobimo $P_n(0) = 1$ in $P_n(1) = (-1)^n$ za vsak $n \geq 0$. ■

Primer 2. Zaporedje logističnih polinomov P_n se prične tako:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= 1 - 2x, \\ P_2(x) &= 1 - 6x + 6x^2, \\ P_3(x) &= 1 - 14x + 36x^2 - 24x^3, \\ P_4(x) &= 1 - 30x + 150x^2 - 240x^3 + 120x^4. \end{aligned}$$

Opazimo, da so njihovi koeficienti cela števila in da je vodilni koeficient polinoma P_n enak $(-1)^n(n+1)!$, kar se da dokazati z metodo popolne indukcije.

Avtorja v [2] pravita polinomom P_n *logistični polinomi*. Očitno polinomi $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sestavljajo bazo prostora polinomov, katerih stopnje ne presegajo n.

Izrek 5. *Za vsako nenegativno celo število n velja rekurzija*

$$P_{n+1} = (p_1 P_n)',$$

za vsako pozitivno celo število n pa rekurzija

$$(-1)^n P_n(x) = 1 - (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} P_k(x)\,. \tag{12}$$

Dokaz. Ker je po (11) $p_{n+2} = p_1 p'_{n+1}$ za $n \geq 0$, takoj dobimo prvo rekurzijo po izreku 4. Velja namreč

$$P_{n+1} = \frac{p_{n+2}}{p_1} = p'_{n+1} = (p_1 P_n)'.$$

Z drugo pa je nekoliko več dela. Začnimo z razvojem (2), ki nam da enakost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!}\, z^n \left[x + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n \right] = x\,.$$

Po pravilu za množenje potenčnih vrst in s primerjavo koeficientov pri potenci z^n na obeh straneh enačbe za vsak $n \geq 1$ ugotovimo, da imajo polinomi p_n rekurzijo

$$x p_n(x) = (x-1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} p_k(x), \quad n \geq 1\,. \tag{13}$$

Zvišajmo indeks n za 1 in pišimo

$$\begin{aligned} x p_{n+1}(x) &= (x-1) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} p_k(x) = \\ &= (-1)^n (1-x) \left(p_0(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{-(k-1)} \binom{n+1}{k} p_k(x) \right) = \\ &= (-1)^n \left(p_1(x) - (1-x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} p_{k+1}(x) \right). \end{aligned}$$

Ker je $P_k(x) = p_{k+1}(x)/p_1(x)$ za $k \geq 0$, dobimo od tod enakost

$$(-1)^n x P_n(x) = 1 - (1-x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} P_k(x)\,,$$

iz katere po preureditvi sledi (12). ∎

Sedaj dokažimo simetrijsko lastnost polinomov p_n in P_n glede na točko $x = 1/2$. Iz opazovanj grafov polinomov na sliki 2 domnevamo, da so polinomi $x \mapsto P_n(x - 1/2)$ za sode n sode, za lihe n pa lihe funkcije. To res drži, kot trdi naslednji izrek:

Izrek 6. *Za vsako pozitivno celo število n velja enakost*

$$p_n(1-x) = (-1)^{n+1} p_n(x)\,,$$

za vsako nenegativno celo število n pa enakost

$$P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)\,.$$

Za $n \geq 1$ ležijo ničle polinomov p_n in P_n simetrično glede na točko $x = 1/2$.

Dokaz. Pričnemo z zamenjavo $x \to 1-x$ in $z \to -z$ v izrazu (2) in dobimo

$$xG(1-x,-z) = \frac{x(1-x)}{1-x+x\exp(z)} = (1-x)\exp(-z)G(x,z)\,,$$

nato pa z znanim razvojem (2) še

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{p_n(1-x)}{n!}\, z^n = (1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)}{n!}\, z^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\, z^n\right].$$

Po množenju potenčnih vrst in primerjavi koeficientov pri potenci z^n imamo za $n \geq 1$ z upoštevanjem enakosti (13)

$$(-1)^n x p_n(1-x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} p_k(x) = -x p_n(x)\,.$$

Iz tega sledi prva enakost v izreku. Drugo pa dobimo z upoštevanjem zveze $P_n(x) = p_{n+1}(x)/p_1(x)$. ∎

Končajmo z izrekom, ki pove, kako so še logistični polinomi povezani z logistično funkcijo.

Izrek 7. *Za vsako pozitivno celo število n velja formula*

$$\frac{\partial^n G}{\partial z^n} = p_n \circ G = G(1-G)(P_{n-1}\circ G)\,, \tag{14}$$

pri čemer pomeni $\circ$ znak običajnega sestavljanja funkcij. Vse odvode $\partial^n G/\partial z^n$ lahko torej izrazimo kot sestavljenko polinoma in funkcije G.

Dokaz. Dokazujemo s principom popolne indukcije. Očitno je formula (14) pravilna za $n = 1$. Zaradi (1) je namreč

$$\frac{\partial G}{\partial z} = p_1 \circ G = G(1-G)(P_0 \circ G)\,.$$

Predpostavimo, da je (14) pravilna za naravno število n. Ker velja enačba (11), imamo

$$\frac{\partial^{n+1} G}{\partial z^{n+1}} = (p_n' \circ G)\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{p_{n+1} \circ G}{p_1 \circ G} \cdot (p_1 \circ G) =$$

$$= p_{n+1} \circ G = (p_1 \circ G)(P_n \circ G) = G(1-G)(P_n \circ G)\,.$$

Zatorej je relacija (14) pravilna za vsako nenegativno celo število n. ∎

Sklep

Videli smo, kako prek logistične diferencialne enačbe pridemo do polinomskega zaporedja in kakšne so povezave z Bernoullijevimi in Stirlingovimi števili. Za $n = 1, 2, 3$ ima polinom P_n ravno n enostavnih ničel na intervalu $(0, 1)$. Predvidevamo, da ima vsak polinom P_n za $n \geq 1$ tam natanko n enostavnih ničel. Najbrž se te domneve ne da dokazati tako kot za klasične ortogonalne polinome. Lahko pa bi bila predmet nove raziskave.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, New York, 1972.

[2] E. O. George in C. C. Rousseau, *On the logistic midrange*, Ann. Inst. Statist. Math. **39** (1987), Part A, 627–635.

[3] I. S. Gradsteyn in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, ur. A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[4] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[5] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

[6] M. Razpet, *Logistična porazdelitev*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), št. 3, 81–96