Glasbena lestvica

Marija Vencelj

Ste že kdaj pogledali v klavir pod tisti veliki pokrov, ki ga na koncertih dvignejo? Koliko strun skriva v sebi, posebno če ga primerjamo s kitaro ali violino! ln vendar je teh strun v nekem smislu malo, kot bomo videli.

Da se bomo laže razumeli, si za začetek oglejmo nekaj fizikalnih in glasbenih pojmov. Pri tem se bomo omejili le na najnujnejše, kar potrebujemo za ta sestavek.

Vsako *nihajoče telo* je izvir prostorskega longitudinalnega valovanja, ki se širi na vse strani in po vseh snoveh. Ena od bistvenih značilnosti nihanja telesa in z njim vzbujenega valovanja je njuna *frekvenca*, to je število nihajev v eni sekundi. Merska enota za frekvenco je $1\ \mathrm{s}^{-1}$, za katero pogosto uporabljamo tudi oznako 1 Hz (Hertz). Človeško uho je sposobno zaznati valovanje zraka v širokem frekvenčnem območju od 16 do 20 000 Hz in ga pretvoriti v slušni dražljaj. Prostorsko longitudinalno valovanje v tem frekvenčnem območju imenujemo *zvok*. Zvok je torej vse, kar *lahko slišimo*. Nihajoče telo, ki je izvir zvoka, bomo imenovali *zvočilo*.

Pomudimo se še malo ob zvoku. Zvočne pojave lahko razdelimo na *tone*, *zvene* in *šume*. Če obidemo strogo fizikalno definicijo, lahko rečemo, da je *šum* neurejena mešanica valovanj vseh mogočih frekvenc, ki jih s sluhom ne ločimo med seboj. Glede zvenov in tonov se glasbena in fizikalna definicija nekoliko razlikujeta. *Ton* je s fizikalnega stališča zvok z neko natanko določeno frekvenco. Mi bomo takemu zvoku rekli *čisti* ali *sinusni ton*, za razliko od *glasbenega tona*. Ustvarimo ga lahko le umetno s tonskimi generatorji. *Glasbeni ton* pa je posebna kombinacija čistih tonov. Poleg osnovnega, to je tona, ki ima v tej kombinaciji najmanjšo frekvenco, recimo f, nastopajo v njej še tako imenovani *delni* ali *alikvotni* toni, to so sinusni toni, katerih frekvence so večkratniki frekvence osnovnega tona: $2f, 3f, \ldots$. V našem ušesu zveni taka kombinacija *sozvočno*. Dejansko posameznih delnih tonov s sluhom niti ne razločimo, zaznavamo eno samo tonsko višino – *višino glasbenega tona*. Ta je določena s frekvenco f osnovnega tona. Čim večja je ta frekvenca, tem višji se nam zdi ton. Od števila in medsebojnega razmerja jakosti posameznih delnih tonov pa je odvisna tako imenovana *barva glasbenega tona*. Več jih je, bogateje in polneje nam ton zveni. Na vprašanje, zakaj je tako, je odgovor preprost: tako smo pač narejeni. Glasbeni ton je poseben primer tistega, kar v fiziki imenujemo *zven*. Ta je sestavljen iz večjega števila čistih, ne nujno alikvotnih tonov. Razen za glasbene tone se pojma fizikalnega in glasbenega zvena ujemata. Za primer navedimo, da je zven npr. zvok zvona, gonga, činel.

ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
frekvenca	260	294	330	349	392	440	494	523

TABELA 1.

Vsi zvoki lahko postanejo glasbeno gradivo. Sodobne skladbe vsebujejo tudi šume, evropska glasba zadnjih stoletij pa je uporabljala predvsem glasbene tone in zvene. Najosnovnejši zidaki so glasbeni toni. Kako neizmerno je to zvočno gradivo, povesta dva podatka. Da sega naše slušno območje od 16 Hz do 20 000 Hz, že vemo. Drugi podatek pa pravi, da smo v bolj občutljivem delu tega območja tja do 4000 Hz sposobni med seboj ločiti tona, ki se razlikujeta za vsega 1 Hz. Zato ni čudno, da si je človek že od nekdaj prizadeval v glasbo vnesti določeno enotnost in red. Nastali so razni *tonski sestavi* s svojimi *glasbenimi lestvicami*, ki so določale množico tonov, iz katere je dani tonski sistem črpal svoje tone. Poznamo veliko lestvic, ki so bile v različnih zgodovinskih obdobjih različno pomembne. Prav gotovo vsi poznate C-durovo lestvico, ki je del *zahodnoevropskega tonskega sestava*, v katerem oblikujejo skladbe že več kot tristo let. Poglejmo tabelo približnih frekvenc za tone prve oktave:

Že iz tabele 1 lahko sklepamo, da v glasbi uporabljamo le majhno število tonov. V tem sestavku bomo pogledali, na osnovi kakšnih principov so izbrani toni evropskega tonskega sestava in do kakšne mere so ta načela realizirana.

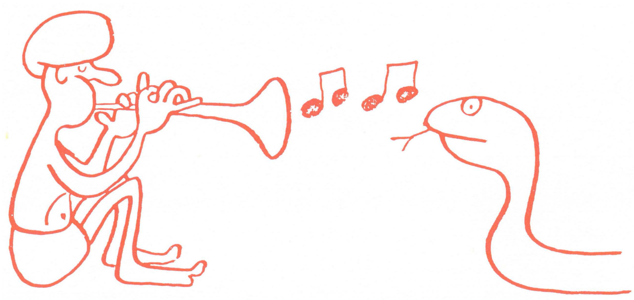
Prej pa smo dolžni še neko pojasnilo. Zgoraj smo rekli, da so tonski sestavi nastali iz človekove želje po urejenosti v glasbi, ne nazadnje zaradi možnosti njenega zapisa. Mogoče pa se to vprašanje sploh ne bi pojavilo, ali vsaj ne s tako nujnostjo, če bi na vsakem glasbilu lahko dobili ton poljubne višine – glede na frekvenco zvezen zvok brez presledkov. Na številnih glasbilih – na kitari, violini, violončelu ... – res lahko zaigramo poljuben ton (v mejah obsega glasbila). Obstajajo po tudi instrumenti, katerih zgradba dopušča le razmeroma majhno število možnih tonov, denimo orgle, klavir, harfa. Če bi povečali število dopustnih tonov v tonskem sistemu, bi to izredno povečalo nekatere instrumente in zapletlo njihovo konstrukcijo. Vidimo torej, da je tudi iz tehničnih razlogov potrebno, da vsebuje glasbena skala razmeroma malo tonov.

Pozoren bralec je lahko opazil, da smo že dvakrat primerjali klavir z godali. Ugotovili smo, da ima klavir precej strun, pa zmore razmeroma malo tonov, violina pa ima strun malo, tonov pa lahko iz nje izvabimo zelo veliko. Kako razložiti to navidezno nasprotje, še večje, ker je v obeh glasbilih osnovno zvočilo struna? Za to je potrebno vedeti, kako niha struna, in pozorno opazovati igri violinista in pianista.

Nihanje strune je mogoče teoretično obravnavati s sredstvi višje matematike. Pojav je zelo zanimiv za fiziko, pa tudi z glasbenimi instrumenti se da napraviti nekatere poskuse, ki nam dajo določene informacije o frekvencah, s katerimi struna niha. Mi se bomo tu seznanili le z rezultati. Najprej povejmo, da struna nikdar ne niha z eno samo frekvenco. Poleg najmanjše frekvence, s katero niha, to je osnovne lastne frekvence f, niha še z vsemi frekvencami, ki so večkratniki te osnovne frekvence. *Struna* torej ne oddaja čistega tona, ampak *glasbeni ton*. Osnovna frekvenca f oziroma višina tona je odvisna od karakteristik strune. To so *dožlina* in *presek strune*, *gostota materiala*, iz katerega je narejena, ter *velikost sile*, s katero je struna napeta. Pri dani struni sta njen presek in gostota materiala določeni, nespremenljivi količini. Pač pa lahko npr. spremenimo silo, s katero je struna napeta. Vsi smo že kdaj videli violinista pri uglaševanju violine. Dejansko pri tem s sukanjem ključev na vratu violine uravnava velikost sil, ki napenjajo strune. Podobno je pri klavirju. Od časa do časa vijaki, s katerimi so napete strune, popustijo in poklicati je treba uglaševalca. – Pa denimo, da sta sedaj violina in klavir vsak po svoje dobro uglašena. Torej o višini tona odloča le še dolžina strune. No, tu pa je bistvena razlika med klavirjem in violino. Klavirske strune določenih dolžin so pritrjene lepo na varnem v resonančni omari instrumenta. Pianist povzroči, da struna zaniha, tako da udari tipko klaviature, udarec pa se nato preko kladivca prenese na struno. Po vsem, kar smo povedali, je očitno, da lahko iz klavirja izvabimo kvečjemu toliko glasbenih tonov, kot je v njem strun. Drugače je z violino. Violinist povzroči nihanje strune tako, da potegne po njej z lokom. Istočasno s prsti proste roke pritiska strune ob podlago in pri tem mesto pritiska nepretano menjava. S tem spreminja dolžino nihajočega dela strune in z njo tonsko višino. Očitno torej res lahko na violino zaigramo poljuben ton v mejah njenega obsega.

Povrnimo se sedaj k našemu problemu. Radi bi odgovorili na vprašanje, zakaj so ravno nekateri toni vključeni v glasbeno skalo.

Konstrukcija glasbene skale ni tako preprosta kot na primer zgradba temperaturne skale. Tam je inter-



SLIKA 1.

val med zmrziščem in vreliščem vode razdeljen na sto enakih delov. Pri glasbeni skali pa je treba upoštevati določena načela, ki slede iz narave zvočil in iz občutkov, ki jih v nas ustvarjajo razne kombinacije tonov. Po prvem načelu je treba skalo izbrati tako, da bodo uporabljeni toni najbolj sozvočni. Povedali smo že, da so toni dvojne, trojne, ... frekvence povsem sozvočni s tonom osnovne frekvence. Torej moramo zahtevati, naj glasbena skala hkrati s tonom frekvence f vsebuje vsaj ton frekvence $2f$. Če bomo govorili tudi o frekvencah, manjših od f, bomo najprej postavili zahtevo po tonu frekvence $f/2$. Interval med danim tonom in tonom dvojne frekvence imenujemo oktava. Je kar precej širok in za glasbo so samo oktavni intervali premalo. Pri izbiri nadaljnjih tonov, ki naj zapolnijo oktavne intervale, moramo izpolniti še en pogoj. Vsi vemo, da lahko isto pesem pojemo više ali niže, pač glede na glas. Če zanemarimo ritem, torej o melodiji ne odloča zaporedje tonov določenih višin, saj bi se ob prenosu na višje ali nižje sicer skazila. Tudi razlike med frekvencami zaporednih tonov niso odločilne za melodijo, kot bi kdo lahko prehitro napak pomislil. Isto melodijo slišimo, če je razmerje frekvenc tonov, ki jo sestavljajo, obakrat isto. Spet bomo rekli, da smo tako narejeni. Prenesti melodijo više torej pomeni izvesti jo z drugimi, primerno višjimi toni, toda z natančno ohranitvijo razmerij frekvenc tonov, ki jo sestavljajo. Naša druga zahteva, ki jo bomo postavili pri konstrukciji glasbene skale, bo sposobnost poljubnega prenosa katerekoli melodije više ali niže.

Predpostavimo, da smo uspeli konstruirati tako skalo, to je skalo, ki izpolnjuje naslednja pogoja:

a) hkrati s tonom frekvence f vsebuje tudi tona frekvence $2f$ in $f/2$,

b) dopušča naj prenos vsake melodije brez skaženosti.
Denimo, da so v tej skali v mejah ene oktave toni naslednjih frekvenc:

- $f = f_0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_{m-1} < f_m = 2f$

Že zaporedje teh tonov pomeni preprosto melodijo. Prenesimo jo navzgor neskvarjeno tako, da bo najnižji ton f_0 prešel v f_1. Nova melodija bo začela s tonom f_1 in se končala z nekim tonom f_{m+1}, ki mora biti oktavni dvakratnik tona f_1, ker je $f_m = 2f_0$. Poleg tega mora biti razmerje med prvim in zadnjim tonom melodije obakrat isto. Ton f_{m+1} je že višji od zadnjega tona f_m v oktavi, je pa prvi za njim. Res. Če bi naša skala vsebovala neki ton f' med f_m in $f_{m+1} = 2f_1$, potem bi bil zaradi zahteve a) v njej tudi ton $f'/2$, za katerega bi iz $2f_0 = f_m < f' < f_{m+1} = 2f_1$ sledilo:

- $f_0 < f'/2 < f_1$.

To pa je protislovje, ker med f_0 in f_1 po predpostavki ni nobenega tona v skali.

Naša začetna melodija sestoji iz $(m+1)$ različnih tonov. Navzgor prenešena jih ima seveda prav toliko, začenja pa s tonom f_1 in končuje s tonom f_{m+1}. Torej mora porabiti ravno vse tone od f_1 do f_{m+1} in je takale

- $f_1 < f_2 < \ldots < f_m < f_{m+1}$.

Ker mora biti zaradi zahteve b) neskvarjena, sledi od tod enakost razmerij:

- $\dfrac{f_1}{f_0} = \dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{f_3}{f_2} = \ldots = \dfrac{f_{m+1}}{f_m}$.

Zahtevama a) in b) torej lahko ustrezajo le tako imenovane enakorazmerne skale. Matematično se lepše sliši, če rečemo, da morajo frekvence $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ tvoriti geometrijsko zaporedje. Začetni člen je f_0, poiščimo še količnik. Če ga označimo s q, imamo

- $f_m = q^m f_0 = 2f_0$,

torej

- $q^m = 2$.

Skala bo natančno določena, če bo znano število m, to je število stopnick med f_0 in $2f_0$.

Geometrijsko zaporedje navadno podamo z začetnim členom, količnikom in številom členov. Pri glasbeni lestvici je naravneje podati namesto začetnega člena kakšen ton iz dobro slišnega območja, takšen, ki ga lahko zaigramo na večino inštrumentov in ki ga lahko zapoje večina ljudi. Po mednarodnih standardih je to ton a_1, ki ima frekvenco 440 Hz. Legenda pripoveduje, da je v starem veku vsako jutro ob zori oddajal ta ton ogromen Memnonov steber v bližini egipčanskih Teb, tako da so po njem glasbeniki lahko uglaševali svoje inštrumente. Steber naj bi prenehal zveneti ob začetku našega štetja. Dandanašnji pa ta ton oddajajo običajno glasbene vilice, ki jih uporabljajo uglaševalci.

Od tona a_1 navzdol in navzgor je nato zgrajeno geometrijsko zaporedje teoretično smiselno do mej našega slušnega območja.

Ugotovili smo že, da ustreza količnik tega zaporedja enačbi

$$q^m = 2 \tag{1}$$

kjer je m naravno število, ki pove, na koliko delov je razdeljen oktavni interval. Število m ne sme biti preveliko, ker bi bila potem tudi nekatera glasbila prevelika; prav tako ne more biti enako ena, ker bi bila glasba s samimi oktavnimi intervali revna. Število m pa je sicer lahko še poljubno, kar nam omogoča, da za glasbeno skalo postavimo še kakšno dodatno zahtevo. Lahko bi npr. v glasbeno lestvico na intervalu $(f, 2f)$ uvedli kakšen tak ton, ki bi bil lepoti glasbe posebej v prid. Sama od sebe pa se ponuja tudi misel, naj bi bil v skali razen $2f$ denimo še alikvotni ton $3f$ (ton frekvence $4f$ je kot dvakratnik $2f$ že vključen). Videli bomo, da si želji pravzaprav ne nasprotujeta. Poleg pogojev a) in b), ki smo ju postavili v prvem delu, postavimo torej še pogoj

c) hkrati s tonom frekvence f naj vsebuje skala tudi ton frekvence $3f$.

Ker mora zaradi pogoja a) skala z vsakim tonom vsebovati tudi ton polovične frekvence, to pomeni prisotnost tona $\frac{3}{2}f$ v skali. Ta ton pa leži med f in $2f$. Interval $\left(f, \frac{3}{2}f\right)$ se imenuje *čista kvinta*, harmoničen (sočasen) zveni posebej lepo. Dejstvo, da človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Zdi se, kot da smo pri koncu naše naloge. S pomočjo pogoja c) bomo določili še eksponent m iz enačbe (1) in delo bo opravljeno!

Pa temu ni tako! Vse skupaj se šele sedaj prav zaplete: *čiste kvinte v enakorazmerni razdelitvi oktavnega intervala ni mogoče realizirati.*

Nobeno geometrijsko zaporedje namreč ne more hkrati vsebovati členov f, $\frac{3}{2}f$ in $2f$. Res! Za vsako geometrijsko zaporedje s količnikom q, katerega člena sta f in $2f$, velja enačba (1) za neki $m \in \mathbb{N}$. Če bi tako zaporedje vsebovalo še člen $\frac{3}{2}f$, bi to pomenilo, da obstaja tako naravno število k, za katerega je

$$fq^k = \frac{3}{2}f, \tag{2}$$

torej

$$q^k = \frac{3}{2}$$

za neki $k \in \mathbb{N}$. S potenciranjem dobimo iz enačbe (1)

$$q^{km} = 2^k$$

in iz enačbe (2)

$$q^{km} = \left(\frac{3}{2}\right)^m.$$

To da

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m \tag{3}$$

oziroma

$$2^{k+m} = 3^m. \tag{4}$$

Enačba (4) pa je za $k, m \in \mathbb{N}$ protislovna, saj imamo na levi sodo, na desni pa liho število. Čiste kvinte torej v enakorazmerni skali ni!

Kaj sedaj? Treba se bo nečemu odpovedati. Enakorazmerni skali bi se zaradi prenosa melodij težko, laže se odpovemo čisti kvinti. Natančneje povedano, odpovemo se njeni čistosti, kvinti sami pa pravzaprav ne. To naredimo z izbiro takega m v enačbi (1), da bo v enakorazmerni skali nastopal tudi ton, ki bo dober približek za $\frac{3}{2}f$. Dober približek pomeni to, da naše uho ne bo zaznalo razlike, torej se bo moral ta približek v slušno najbolj občutljivem območju razlikovati od $\frac{3}{2}f$ za manj kot 1 Hz. Videli bomo, da se to res da doseči in to pri relativno majhnem m. Poglejmo!

Potrebovali bomo nekaj več matematičnega znanja kot doslej. Nadomestimo obe strani enačbe (3) z njunima logaritmoma z osnovo 2. Če nato še delimo z m, dobimo

$$\frac{k}{m} = \log_2 \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Ker ni takih naravnih števil k in m, ki bi ustrezali enačbi (3), sledi, da ni takega ulomka $\frac{k}{m}$, da bi bila izpolnjena enačba (5). Lepše povedano: $\log_2 \frac{3}{2}$ ni racionalno število. So pa racionalna števila povsod gosta v množici realnih števil. To pomeni, da lahko k vsakemu realnemu številu najdemo tak racionalen približek, da bo razlika med njima poljubno majhna. Torej obstaja tudi tak ulomek $\frac{k}{m}$, ki bo za naše potrebe dovolj blizu števila $\log_2 \frac{3}{2}$.

Za konstrukcijo racionalnih približkov iracionalnih števil so zelo dobro sredstvo tako imenovani *verižni ulomki*, to so izrazi oblike

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \dots$ naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0. Vsako pozitivno realno število lahko na en sam način razvijemo v verižni ulomek – neskončen, če je število iracionalno. Najnujnejše informacije o verižnih ulomkih, kakor tudi to, kako pridemo do razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ v verižni ulomek, boste našli v dodatku ob koncu tega sestavka. Zapišimo nekaj prvih členov tega razvoja:

$$\log_2 \frac{3}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}} \tag{6}$$

Vrednosti zaporednih delnih ulomkov

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{5},$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{7}{12},$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41}, \quad \text{itd.}$$

so čedalje boljši racionalni približki števila $\log_2 \frac{3}{2}$. Povejmo še to, da so približki, ki jih dajejo delni ulomki verižnega ulomka, v nekem smislu najpreprostejši racionalni približki danega števila. Velja namreč, da ima vsak ulomek, ki dano število aproksimira bolje kot neki delni ulomek temu številu prirejenega verižnega ulomka, imenovalec večji od imenovalca tega delnega ulomka. Za nas je ta vidik še kako pomemben. Imenovalec ulomka $\frac{k}{m}$, ki ga bomo vzeli za približek števila $\log_2 \frac{3}{2}$ bo, kot vemo, pomenil število tonov v eni oktavi. Torej bomo dobili z verižnimi ulomki optimalno aproksimacijo kvinte glede na število tonov v eni oktavi.

Poglejmo zaporedne približke! Prva dva: 1 in 1/2 sta pregroba že na prvi pogled. Izračunajmo, kako natančen približek čiste kvinte v prvi oktavi dajejo naslednji ulomki. Prva oktava začenja s tonom c_1, ki ima frekvenco 262 Hz. Torej nas zanima aproksimacija tona s frekvenco $\frac{3}{2} \cdot 262\text{Hz} = 393\,\text{Hz}$. Če vzamemo tretji približek, torej $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{3}{5}$, je $\frac{3}{2} \approx 2^{3/5}$. Hitro lahko izračunamo, da je $2^{3/5} \cdot 262\,\text{Hz} = 397\,\text{Hz}$. To pa je preslab približek za 393 Hz, saj je razlike kar za 4 Hz. Po teoriji mora biti naslednji približek boljši. Res dobimo za $\frac{k}{m} = \frac{7}{12}$ vrednost $2^{7/12} \cdot 262\,\text{Hz} = 392{,}5\,\text{Hz}$, kar pomeni aproksimacijo čiste kvinte na 0,5 Hz natančno. Zato se bomo odločili za približek $\frac{7}{12}$. To sicer pomeni, da bo napaka čiste kvinte v drugi oktavi, kjer so vse frekvence pomnožene z dva, že enaka 1 Hz. Toda raje se bomo sprijaznili s tem, kot da bi vzeli naslednji približek, ki nam ponuja kar 41 stopenj v eni oktavi.

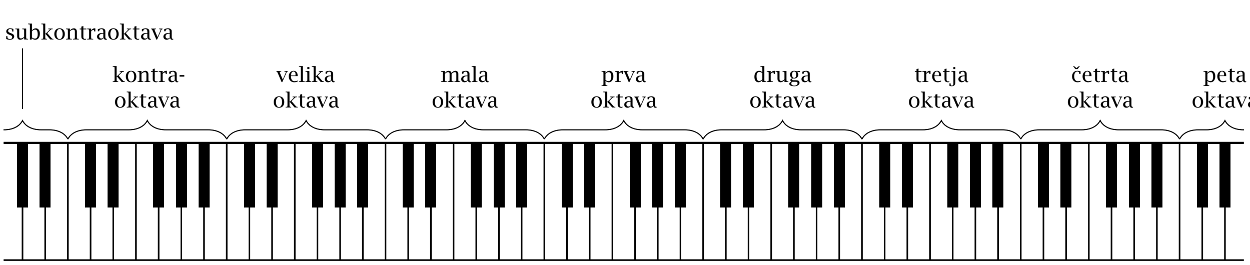
Vidimo torej, da tako imenovana *dvanajststopenjska enakorazmerna lestvica* uspešno reši naš problem. Omeniti pa moramo še nekaj. Iz analize narodne in umetne glasbe sledi, pa tudi teoretično lahko spoznamo, da so poleg oktave in kvinte v glasbi pomembni še nekateri intervali, npr.: velika sekunda $\left(f, \frac{9}{8}f\right)$, mala terca $\left(f, \frac{6}{5}f\right)$, velika terca $\left(f, \frac{5}{4}f\right)$, kvarta $\left(f, \frac{4}{3}f\right)$, mala seksta $\left(f, \frac{8}{5}f\right)$, velika seksta $\left(f, \frac{5}{3}f\right)$, velika septima $\left(f, \frac{15}{8}f\right)$. Tudi ti intervali so v dvanajststopenjski lestvici dokaj dobro aproksimirani, čeprav ne tako zelo dobro kot kvinta. Še najbolj moti slaba velika terca, pomemben interval, aproksimiran v prvi oktavi le z natančnostjo 2,5 Hz.

Tako smo matematični del naloge opravili. Glasbena lestvica je torej zaporedje tonov, katerih frekvence tvorijo geometrijsko zaporedje s členom a_1, ki ima frekvenco 440 Hz, in količnikom $q = \sqrt[12]{2}$, kar za $m = 12$ izračunamo iz (1) . Glasbeniki tako izbiro osnovnih zidakov glasbe imenujejo tudi *dvanajststopenjske temperirana uglasitev*.

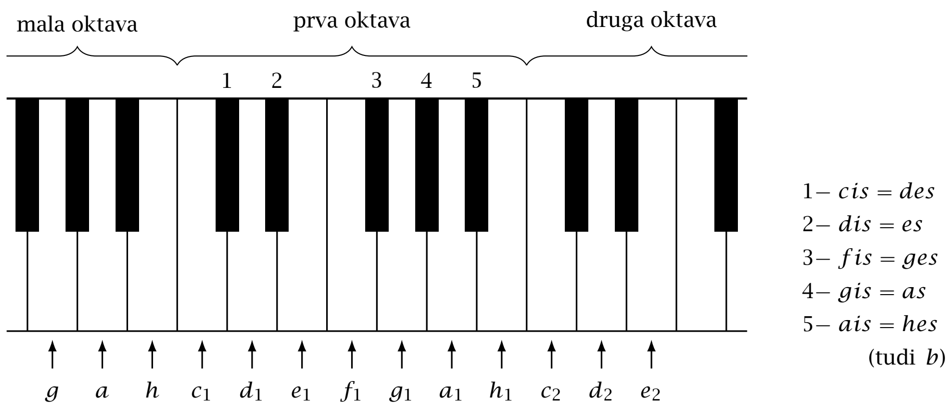
Frekvenci dveh sosednjih tonov v skali se torej razlikujeta za faktor $\sqrt[12]{2}$. Ta najmanjši možni zvočni interval imenujemo *polton*. Interval, ki sestoji iz dveh sosednjih poltonov, se imenuje *cel ton*.

Poleg tona a_1 imajo imena tudi drugi toni glasbene lestvice. Vsa skala je razdeljena na oktave, istoležni toni v posameznih oktavah imajo isto ime. Iz katere oktave so, ločimo z indeksi ali velikostjo črke, npr. A, a, a_1, a_2, ... Razdelitev na oktave je prikazana na sliki 2.

Poimenujmo sedaj tone prve oktave. V njej leži tudi ton a_1, in sicer devet poltonskih stopenj za začetnim tonom. Začetni ton se imenuje c_1. Najprej poimenujemo osnovne tone, to so toni, ki so v naši lestvici približki za veliko sekundo, veliko terco, kvarto, kvinto, veliko seksto in veliko septimo. V razdalji celega tona od c_1 je ton d_1, še cel ton dalje je e_1 in še pol tona više f_1. Ti štirje osnovni toni tvorijo tako imenovani *tetrakord*. V drugem delu oktave imamo drugi tetrakord, kot melodija identičen s prvim. Začenja z g_1, ki tvori s c_1 kvinto, čez cel ton imamo a_1, še čez cel ton h_1 in nato še polton do c_2. To pa je že oktavni dvakratnik c_1 in smo ga zato spet imenovali c. To so toni, za katere smo navedli frekvence v tabeli 1 na začetku sestavka. Zaigramo jih lahko z belimi tipkami na klavirju. Ostalo nam je še pet tonov. Tem damo imena po sosednjih osnovnih tonih z dodajanjem besedice *is* ali *es*, kar pomeni za polton više ali za polton niže od ustreznega osnov-



SLIKA 2.



SLIKA 3.

nega tona. Na klavirju jih predstavljajo črne tipke (slika 3).

»Melodija« iz osnovnih tonov c, d, e, f, g, a, h, c se imenuje *C-durova lestvica*. Če to melodijo prenesemo nespremenjeno navzgor, z začetki na različnih mestih v oktavi, dobimo še 11 durovih lestvic. Vsaka nosi ime po svojem začetnem tonu. Obstaja pa še 12 tako imenovanih molovih lestvic. Tako ima c-molova lestvica melodijo: c, d, es, f, g, as, b, c. Ostale dobimo z ustreznim prenosom. Medtem ko je intervalni sestav durovih lestvic: cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton, cel ton, polton, imamo za molove lestvice: cel ton, polton, cel ton, cel ton, polton, cel ton, cel ton. Praviloma so skladbe pisane v nekem izbranem duru ali molu, pri čemer – razen morda na redkih posamičnih mestih – uporabljajo le tone ustrezne lestvice. Drugače izbrani osnovni toni molskih tonalitet vnašajo v melodije neko prikrito disonanco, zato imajo v molu pisane skladbe značilen mehko otožen značaj.

Za zaključek omenimo še nekaj, česar glasbena teorija doslej še ni povsem razjasnila. Naša zgornja premišljanja nas silijo k zaključku, da vseh 12 durovih tonalitet identično zveni, podobno vseh 12 molovih. Vendar glasbeniki ugotavljajo, da imajo posamezne tonalitete individualne lastnosti. Tako npr. *C-dur* ustvarja sončne, jasne, spokojne občutke (Bethovnova »Aurora«), *E-dur* strastno napeto pričakovanje (številna Lizstova dela, Čajkovskega »Bo prevladal dan«) in *Fis-dur* romantično veselje (Griegova »Pomlad«). Možato žalost oznanja *c-mol* (»Posmrtna koračnica« iz Bethovnove simfonije »Eroica«), globoko tragiko *es-mol* (arija Pauline iz Čajkovskega opere »Pikova dama«). Ni povsem jasno, ali gre pri tem za ustaljeno tradicijo ali za kako objektivno zakonitost.

Dodatek

Verižni ulomki

Verižni ulomki so bili in so še predmet številnih matematičnih raziskav. Obstajajo cele knjige, ki obravnavajo le verižne ulomke.

Če zapišemo neko pozitivno realno število a v obliki

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}} \tag{7}$$

kjer so členi a_1, a_2, a_3, … naravna števila, a_1 pa je lahko tudi 0, pravimo, da smo število a razvili v *verižni ulomek*. Tako je npr.

$$\frac{7}{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} \quad \text{in} \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

kjer se člen 2 ponavlja v nedogled. Verižni ulomek je torej lahko končen ali neskončen. Ni pa nujno, da je periodičen, kot je naš drugi zgled. Končne verižne ulomke imajo racionalna števila, neskončne vsa ostala.

Verižne ulomke a_1, $a_1 + \frac{1}{a_1}$, $a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}$, ... imenujemo *delni ulomki* verižnega ulomka (7). Njihove vrednosti so očitno racionalna števila. Te vrednosti konvergirajo k številu a, vsaka naslednja je bliže a od vseh prejšnjih. Kot zanimivost povejmo še, da so izmenično ena manjša, druga večja od a.

Kako po iščemo nekaj začetnih členov verižnega ulomka, če je število a iracionalno, ilustrirajmo na primeru $a = \log_2 \frac{3}{2}$. Po definiciji logaritma je

$$2^a = \frac{3}{2}. \tag{8}$$

Ker je $a < 1$, je $a_1 = 0$. Člen a_2 bomo dobili kot celi del števila $x = \frac{1}{a}$. Iz (8) dobimo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2. \tag{9}$$

Ker je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

leži x med 1 in 2, torej je $a_2 = 1$. Zapišimo sedaj $x = 1 + \frac{1}{y}$. Izračunajmo a_3, ki mora biti celi del števila y. V ta namen preoblikujmo enačbo (9) v

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/y} = 2,$$

od koder dobimo $\left(\frac{4}{3}\right)^y = \frac{3}{2}$. Spet ugotovimo, da je $\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, kar pomeni, da je $a_3 = 1$. Če tako nadaljujemo, dobimo še $a_4 = a_5 = 2$ in $a_6 = 3$, tako, da je začetek razvoja števila $\log_2 \frac{3}{2}$ tak, kot ga kaže formula (6).

Literatura

[1] G. E. Šilov, *Prostaja gama – Ustrojstvo muzykal'noj škaly*, Moskva, 1980.

[2] Leksikon CZ, *Glasba*, Ljubljana 1980

[3] H. Davenport, *The higher aritmetic*, New York, 1960.

[4] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA SRS, Ljubljana, Knjižnica Sigma **38**, 1984.

× × ×

Skrita računa na vazi

Marija Vencelj

→ Matematiku so prijatelji za rojstni dan poklonili šopek vrtnic z vazo, na katero so napisali dva skrita računa seštevanja, enega v angleškem in drugega v francoskem jeziku.[1]

[1] Računa so prijatelji priredili iz ene od angleških knjig rekreativne matematike.