Razvijanje matematičnih znanj z reševanjem problemov

dr. Samo Repolusk
Škofijska gimnazija Antona Martina Slomška Maribor

»Pomagaj mi, da naredim sam.«
(pedagoško načelo pedagogike Montessori)

Izvleček

Uspešnost učencev pri matematiki je tesno povezana z njihovim odnosom in predstavami o matematiki: eden od hudomušnih rekov, ki lahko razkriva tudi učiteljevo bolj ali manj (ne)zavedno dojemanje matematike in posledično določa njegov način poučevanja, pravi: »Matematika ni računanje, ampak umetnost o tem, kako se izogniti računanju«. Sistematično razvijanje problemskih znanj pri pouku in prikazi uporabe različnih strategij za reševanje matematičnih problemov so v praksi eden težje uresničljivih ciljev pri pouku matematike. V članku so najprej definirani nekateri osnovni pojmi teorije reševanja problemov, v nadaljevanju pa je predstavljen eden od možnih naborov strategij reševanja problemov (povzet po ameriškem združenju NCTM) z zgledi uporabe strategij in primeri preiskovalnih nalog.

Ključne besede: matematični problemi, strategije reševanja problemov, matematična znanja, problemska znanja, matematična preiskovanja, pouk matematike

Developing Mathematical Knowledge through Problem Solving

Abstract

Students' performance in mathematics is closely related to their attitude towards and notions of mathematics. A witty saying, which also reveals the teacher's more or less (sub)conscious perception of mathematics and consequently determines the teacher's teaching style, goes: »Mathematics isn't arithmetic but the art of how to avoid arithmetic.« Systematic development of problem-solving knowledge in class and demonstrating the application of various strategies in solving mathematical problems is one mathematics objective that is harder to achieve in practice. The article begins by defining some of the basic concepts of the theory of problem-solving and continues with a presentation of possible problem-solving strategies (taken from the American association NCTM), providing examples of strategy use and of investigative tasks.

Keywords: mathematical problems, problem-solving strategies, mathematical knowledge, problem-solving knowledge, mathematical investigations, mathematics lesson

Uvod

Ukvarjanje z matematiko je v svoji osnovi ustvarjalen proces. Poleg uporabne vrednosti, ki jo matematika predstavlja s svojim abstraktnim in eksaktnim jezikom (orodjem) opisovanja družbenih in naravnih pojavov s pomočjo modelov, lahko nudi reševalcu tudi posebno notranje zadovoljstvo – človeku odstira nova obzorja in čutenja, podobno kot glasba, slikarstvo in druge umetnosti. Tako kot vsakdanje človeško znanje in modrost, se tudi matematično znanje v osnovi razvija po dveh poteh: na eni strani s ponavljanjem preizkušenih vzorcev in načinov razmišljanja, ki človeku omogočajo stabilno dojemanje strukture sveta (pri matematiki npr. razvoj proceduralnih znanj), po drugi strani pa s soočanjem z novimi situacijami, kjer je človek v luči »preživetja« ali »novega spoznanja« prisiljen mobilizirati svojo ustvarjalnost in povezati obstoječe znanje v nekaj kakovostno novega. Slednje pri matematiki predstavljajo problemska znanja (Magajna, 2003).

Matematični problemi in problemska znanja

V nadaljevanju nas bo zanimala druga pot razvoja matematičnih znanj: osredotočili se bomo na opazovanje **razvoja matematičnih znanj skozi reševanje problemov**. Motivacijo za spodbujanje reševanja problemov pri pouku matematike pa si oglejmo ob naslednjih dveh vprašanjih:

1. Kateri od spodaj naštetih možnosti A ali B sta bližji mojemu dojemanju sveta?

Zgled 1:

A. 15-letna hčerka: »Mama, lačna sem.« Mama: »Že hitim, že hitim!« In hčerka na kavču počaka in gleda mamo, kako kuha odlično kosilo. Ko je končano, mama pripravi krožnike in pribor ter hčerko povabi k mizi. Prinaša hrano, odnaša umazano posodo in na koncu še vpraša: »Ali ti lahko ponudim še kakšno sladico?« Po kosilu pa mama pospravi mizo in opere vso posodo. Hčerka je vesela, ker ima tako ljubečo mamo, ki naredi vse.

B. 15-letna hčerka: »Mama, lačna sem.« Mama: »Pridi v kuhinjo. Danes boš kosilo naredila ti. Jaz bom s teboj in ti pomagala, če boš potrebovala mojo pomoč.« Hčerka naredi kosilo – ne še sicer tako okusno kot mama, a zadovoljni sta obe. Posodo umijeta skupaj.

Zgled 2:

A. Pridem v galerijo. K meni takoj pristopi kustos in me vodi od slike do slike ter razlaga pomen in zgodovino vsake od njih. Celo abstraktne motive mi vse tako lepo razloži, da si mi ni treba razbijati glave z iskanjem pomena.

B. Pridem v galerijo. K meni pristopi kustos in reče: »Vzemite si eno uro in uživajte ob slikah, nato pa bova šla skupaj k vsaki sliki in povedala nekaj o njeni zgodovini, vi pa o vaših občutkih ob njej.« In tako storiva.

2. Vprašanje učitelja: »Kaj je matematika?« Odgovor učenca: »Matematika je računanje.« Ali je to res največji intelektualni domet, ki bi ga kot učitelji matematike želeli videti pri svojih učencih za njihovo popotnico v širni svet?

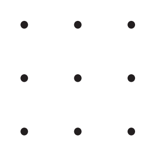
Odgovori na zgornja vprašanja opredeljujejo naš temeljni pogled na vlogo matematike kot šolskega predmeta v življenju otroka in mladostnika. Ker bomo v nadaljevanju predstavili nekatere spodbude za razvoj čim širšega spektra matematičnih znanj, že v uvodu navedimo **dva izmed različnih možnih načinov razvijanja matematičnih znanj**, ki sta dokaj preprosta in učinkovita, a v praksi morda ne dovolj izkoriščena:

- **Reševanje nalog s prikazom uporabe različnih strategij reševanja problemov:** poleg rutinskega obvladovanja temeljnih matematičnih pojmov in procedur na izbrani način lahko nekatere naloge rešimo na dva ali celo več različnih načinov z uporabo različnih strategij.
- **Odkrivanje novih matematičnih konceptov s preiskovanjem (raziskovanjem):** metoda reševanja problemov, med katere sodi matematično preiskovanje, je lahko alternativa metodi razlage in deduktivnemu vpeljevanju novih pojmov.

Po teh uvodnih premislekih si poglejmo pomen nekaterih temeljnih pojmov, o katerih bomo govorili; pri tem bodo predstavljena teorija in primeri povzeti večinoma po avtorjih Magajna (2003) in Posamentier s sodelavci (1998, 2006) oz. virih, navedenih na koncu članka.

Reševanje problemov je že od nekdaj eden izmed **ciljev pouka matematike**, v zadnjih letih pa tudi vedno pogostejša in pričakovana **metoda poučevanja matematike v šolah** – »poučevanje matematike preko reševanja problemov«. Kaj si lahko predstavljamo pod pojmom »matematični problem«? Oglejmo si naslednja dva zgleda:

Zgled 3: Danih 9 točk povežite s samo štirimi ravnimi črtami, pri čemer med risanjem ne smete odmakniti pisala z lista.



Zgled 4: Poiščite vse pare praštevil, katerih vsota je 999.

Razmislimo, kaj je bil skupni imenovalec občutkov, ki smo jih doživeli ob prebiranju besedila obeh nalog. Ko si pri sebi odgovorimo, lahko pogledamo še nekoliko formalnejšo opredelitev temeljnih pojmov (Magajna, 2003):

- **problem** v najširšem smislu je notranji občutek nelagodja, ki v človeku vzbudi željo po tem, da problem reši;
- **problemska situacija** so objektivne okoliščine, ki v človeku povzročijo občutek nelagodja in željo po reševanju, sam problem pa je človekovo subjektivno doživljanje situacije;
- če poskušamo situacijo preseči tako, da uporabimo tudi ali predvsem **matematična orodja**, govorimo o **matematičnem problemu**.

Pomembno se je zavedati, da lahko dano situacijo neka oseba doživi kot matematični problem, druga kot nematematični problem, za tretjo pa je lahko situacija povsem neproblematična!

Rešiti matematični problem pomeni poiskati pot v skladu s pravili gibanja med stanji, ki povezujejo izhodiščno in ciljno stanje. Množico vseh stanj, kjer se bomo med reševanjem gibali, imenujemo **problemski prostor**. O **problemu** govorimo takrat, kadar **ne vidimo takoj poti do rešitve** (Magajna, 2003).

Zgled 5: Vzemimo primer naloge »Reši linearno enačbo $3x + 1 = x - 7$«. Če je učenec pravkar spoznal pravila za tvorbo ekvivalentnih enačb in želi s tem znanjem rešiti linearno enačbo, lahko to doživi kot matematični problem. Izhodiščno stanje je enačba $3x + 1 = x - 7$, ciljno stanje pa zapis $x = -4$. Problemski prostor je množica linearnih enačb in med stanji problemskega prostora se lahko gibamo le po pravilih za tvorbo ekvivalentnih enačb.

Matematične probleme lahko **razdelimo** po različnih kriterijih (Magajna, 2003):

- **Rutinski** in **nerutinski problemi**: pri rutinskih je reševalcu pot reševanja vnaprej jasna (in gre torej prej za vaje kot prave probleme). Stopnja »rutinskosti« je seveda odvisna od znanja in izkušenj reševalca.
- **Zaprti** in **odprti problemi**: kadar je cilj natančno določen, govorimo o zaprtem problemu, kadar pa je cilj zastavljen le okvirno, govorimo o odprtem problemu. Pri preiskovanju odprtega problema si reševalec sam zastavi cilje in jih skuša doseči.
- **Glede na določenost izhodiščnega stanja**: v izhodišču so lahko podani natanko tisti podatki, ki so za rešitev naloge potrebni in zadostni, lahko pa nastopajo tudi odvečni ali pa nepopolni podatki.
- **Vodeni** in **nevodeni problemi**: pri vodenih problemih je reševalec s podvprašanji ali pa učiteljevo pomočjo usmerjan od izhodišča k cilju, pri nevodenih problemih pa takšne pomoči ni.

Zgled 6:

»Razišči pravokotnike s ploščino 56 cm^2« je primer nerutinskega odprtega problema, ki ga lahko rešujemo vodeno ali nevodeno.

Zgled 7:

»Kdaj je polinom $p(x) = (b - 1)^2x^{2021} - bx^{110} + 3$, kjer je b realno število, deljiv s polinomom $q(x) = x + 1$?« je primer zaprtega nerutinskega problema.

Problemska znanja so znanja, ki presegajo zgolj poznavanje in razumevanje matematičnih dejstev ter tekoče izvajanje postopkov, ampak omogočajo reševanje nerutinskih problemov in uporabo matematičnega znanja v novih situacijah. Mednje sodijo (Magajna, 2003):

- **Miselne veščine in procesna znanja:** obvladovanje organizacijskih in dokumentacijskih procesov (beleženje, razvrščanje …), komunikacijskih procesov (poslušanje, branje, usklajevanje pogledov), višjih miselnih procesov (analogno mišljenje, indukcija, dedukcija, vizualizacija, kritično mišljenje). Organizacijske, dokumentacijske in komunikacijske procese je mogoče poučevati, težje pa je poučevanje in učenje višjih miselnih procesov.
- **Metakognitivna znanja:** metakognicija je sposobnost in navada predvidevanja, načrtovanja reševanja, nadzorovanja, ocenjevanja poteka reševanja in kognitivnega nadzora. Pri pouku matematike je možno doseči izboljšanje metakognitivnih znanj tudi na naslednje načine: učiteljevo glasno razmišljanje med demonstracijo reševanja problema, zastavljanje vprašanj o metakognitivni ravni reševanja (Kaj počneš sedaj?, Zakaj to počneš?, Kako ti bo to pomagalo pri končni rešitvi?, ipd.), pisanje eseja …
- **Strategije in hevristike:** strategije so splošni scenariji poteka razmišljanja v celotnem postopku reševanja, hevristike pa tehnike odločanja, ko pri reševanju naletimo na določno oviro.

Med naštetimi problemskimi znanji si nekoliko podrobneje oglejmo strategije in hevristike – za učinkovito reševanje problemov naj bi namreč učitelj seznanil učence tudi z njimi, še prej pa jih mora seveda dovolj dobro poznati in uporabljati tudi sam.

Strategije in hevristike reševanja problemov

Pri reševanju problemov običajno ne uporabljamo ene same strategije, ampak **kombinacijo različnih strategij**. Enega prvih algoritmov reševanja problemov predstavlja pet korakov reševanja problemov po Deweyju, ki jih je predstavil v knjigi *How We Think* leta 1910:

1. Zavedanje, da problem obstaja – zavedanje težavnosti, občutka frustracije, čudenja ali dvoma.
2. Identifikacija problema – razčiščevanje in definiranje problema in cilja, ki ga določa dani problem.
3. Uporaba predhodnih izkušenj, relevantnih informacij, prejšnjih rešitev ali idej za oblikovanje hipoteze in načrta reševanja problema.
4. Sistematično preizkušanje hipotez ali možnih rešitev. Če je potrebno, tudi preoblikovanje problema.
5. Evalvacija rešitve in zapis zaključkov na podlagi dejstev. To vključuje tudi usvojitev uspešne rešitve ali strategije in njeno uporabo v drugih podobnih problemih.

Kasneje je podobno sistematičen nabor tehnik odločanja (**hevristik**) predstavil Polya v knjigi *How to Solve it* leta 1945:

1. Poskusi razumeti problem. Katere so neznanke? Kateri so podatki? Kakšni so pogoji? Nariši skico, vpelji ustrezne oznake. Razlikuj različne dele pogojev.
2. Izdelaj si načrt. Poišči zveze med podatki in neznankami. Ali si podoben problem srečal že kdaj prej? Ali poznaš soroden problem?
3. Izvedi načrt. Vsak korak preveri. Ali lahko vidiš, da je vsak korak pravilen? Ali lahko dokažeš, da je vsak korak pravilen?

4. Poglej nazaj. Razišči dobljeno rešitev. Ali lahko preveriš rezultat? Ali lahko preveriš argumente? Ali lahko dobiš rezultat še na drug način? Ali lahko uporabiš rezultat ali metodo pri katerem drugem problemu?

V novejšem času se lahko ozremo po seznamu **strategij reševanja problemov**, ki so povzete po dokumentu NCTM *Principles and Standards for School Mathematics* (Posamentier in drugi, 2006):

1. Delo nazaj
2. Opazovanje vzorca in iskanje pravila
3. Pogled z drugega zornega kota
4. Reševanje enostavnejšega analognega problema (brez izgube za splošnost)
5. Preučevanje ekstremnih primerov
6. Risanje slike (vizualna reprezentacija)
7. Pametno ugibanje in preizkušanje (vključno s približnim ocenjevanjem)
8. Obravnava vseh možnosti
9. Urejanje podatkov
10. Logično sklepanje

V nadaljevanju si bomo pogledali konkretne primere reševanja matematičnih problemov z uporabo pravkar naštetih strategij, pred tem pa si poglejmo še en pogled na možno razvijanje kompleksnejših matematičnih znanj. Benson (2005) predstavi nekatere koristne **načine variiranja primerov** v procesu reševanja matematičnega problema:

- **Preučevanje posebnih primerov.** Včasih lahko dobimo idejo za splošen pristop k reševanju problema tako, da se pri preiskovanju omejimo na posebne primere, ki so lažje obvladljivi (tj. na podmnožice preučevanih objektov), npr. namesto trikotnikov v splošnem obravnavamo le pravokotne trikotnike, namesto realnih števil se najprej omejimo na racionalna ali celo le na naravna števila, namesto poljubnih zaporedij najprej obravnavamo le aritmetična (t. i. vertikalno preiskovanje od zgoraj navzdol).
- **Posploševanje.** Nove poglede na zastavljen problem lahko odkrijemo z »rahljanjem« pogojev in predpostavk, npr. če smo neko lastnost odkrili pri pravokotnih trikotnikih, nas lahko zanima obstoj te lastnosti pri poljubnih trikotnikih ali celo pri večkotnikih (t. i. vertikalno preiskovanje od spodaj navzgor).
- **Variiranje parametrov.** Vhodnim podatkom pri predpostavkah variiramo vrednosti in s tem modificiramo domeno problema, kar nas lahko pripelje do novih uvidov in pomaga pri preverjanju območja veljavnosti (domene) zastavljene hipoteze o rešitvi problema. Npr. če se problem nanaša na pravokotne trikotnike, preverimo tudi stanje pri ostrokotnih trikotnikih, če velja lastnost za soda števila, preverimo tudi veljavnost za liha, če velja lastnost za pokončne stožce, jo preverimo tudi za poševne (t. i. horizontalno preiskovanje na istih ravneh).
- **Preverjanje enoličnosti.** Če nas problem sprašuje le o tem, ali lahko nekaj naredimo, se je smiselno vprašati, ali oziroma kdaj lahko to naredimo na en sam, oziroma več različnih načinov.

Ob sklepu predstavitve nekaterih temeljnih pojmov reševanja matematičnih problemov se ustavimo še ob nekaterih kritičnih premislekih.

Nekatere dileme pri razvijanju problemskih znanj

Zgolj učenje strategij in hevristik ne zadošča za bistveno izboljšanje zmožnosti reševanja problemov iz vsaj treh razlogov (Magajna, 2003):

1. Mnoge hevristike so miselno prezahtevne za osnovnošolce in večino srednješolcev.
2. Miselne strategije se pogosto razume kot recepte in navodila za delo namesto kot napotke za razmišljanje; pri njih ne gre za korake, ki jim je treba pri reševanju slediti v danem zaporedju, ampak za premisleke, ki jih med reševanjem spreminjamo, dodelujemo in se k njim večkrat vračamo.
3. **Strategije predpostavljajo dobro poznavanje obravnavane problematike** (ustrezna vsebinska znanja) in izkušnje.

Velik pomen baze znanja (tj. vsebinska znanja in izkušnje) pri reševanju problemov med ekspertom in povprečnim reševalcem lahko ponazorimo na naslednjem zgledu:

Zgled 8: Izraz $\binom{n}{2}$ pomeni povprečnemu reševalcu formulo $\frac{n(n-1)}{2}$, uspešnejši reševalec pa v tem binomskem simbolu »vidi« tudi: število vseh parov v množici z n elementi, število daljic med n točkami, vsoto $1 + 2 + \ldots + (n-1)$, povezal ga bo s številom povezav v n-kotniku in še s čim. Boljši reševalec ima več vsebinskih znanj, več izkušenj in predvsem dobro shematizirane in povezane matematičen pojme, ki so povezani glede na pomembne lastnosti – temu rečemo globinsko znanje. **Zato je dilema, ali naj se v šoli bolj poudarjajo vsebinski ali pa procesni cilji, v resnici zavajajoča, saj je potrebno oboje.**

Od problemskega pristopa pri pouku matematike ne smemo pričakovati preveč, saj od reševalcev zahteva globinsko znanje. Namen take obravnave ni samostojno odkrivanje matematičnih znanj, temveč kvalitetnejša izgradnja matematičnega znanja preko intenzivne interakcije med učenci samimi in učiteljem (Magajna, 2003).

Stališča, **predsodki** in **čustva** (nekognitivni vzgibi) so prav tako močan dejavnik uspešnega reševanja problemov, česar se učitelji morda premalo zavedamo. Mnogo predsodkov izvira iz otrokovih izkušenj pri pouku matematike in iz vsakdanjega življenja (odnos družbe do znanja). **Učiteljeva naloga** je torej tudi zagotavljanje takšnega učnega okolja, v katerem se pri **učencih razvija pozitiven odnos do matematičnega znanja** in v katerem v sebi vidijo **uspešnega reševalca problemov** (Magajna, 2003).

Navedimo še nekatere najpogosteje izražene **pomisleke učiteljev ob reševanju problemov** pri pouku matematike, ki jih skupaj s svojimi odgovori nanje predstavi Burnsova (2000):

- »Reševanje problemov je časovno zahtevno. Učenci ne obvladajo niti osnovnih aritmetičnih operacij, hkrati pa učni načrti učiteljem nalagajo vedno nove zahteve.« Protiargument: Tudi zgolj osnovne aritmetične zmožnosti učencev ne pripravijo na reševanje problemov in kompleksnih realnih situacij, ki jih bodo srečevali v življenju in pri študiju.
- »S pisnimi preizkusi lahko najbolj objektivno preverjamo predvsem osnovna in proceduralna znanja, hkrati pa smo učitelji pod nenehnim pritiskom okolja, da naj učence dobro naučimo in potem ocenjujemo predvsem osnovna znanja brez zapravljanja časa za kompleksnejše in zahtevnejše vsebine.« Protiargument: S pisnimi preizkusi bi morali preverjati doseženost ciljev po učnem načrtu, zato morajo biti testi podrejeni temu in ne da tipi nalog v testih diktirajo način in vsebine poučevanja.
- »Starši pričakujejo od učiteljev matematike, da njihove otroke naučijo predvsem aritmetičnih veščin, ker so se tudi sami učili predvsem te vsebine, ne pa da učitelji ‹eksperimentirajo› z ‹neotipljivim› reševanjem problemov.« Protiargument: Cilji pouka v šolah niso nekaj statičnega: potrebe današnje družbe so drugačne, kot so bile pred 40 leti. O tem je treba poučiti tudi starše. Svet postaja kompleksnejši in bolj povezan, tehnološki napredek pa je skokovitejši kot kadarkoli v preteklosti, zato izolirana in zgolj elementarna znanja ne zadoščajo za učinkovito spoprijemanje z izzivi današnjega sveta.
- »Reševanje problemov je lahko zelo težko za učence z manjšimi matematičnimi zmožnostmi in šibkejšim predznanjem – pri njih je čas koristneje porabiti za utrjevanje temeljnih konceptov.« Protiargument: Namesto nenehnega dodajanja ur učne pomoči matematično šibkejšim učencem je treba premisliti, kaj ti v resnici potrebujejo – aritmetične zmožnosti so orodja. Vrednost orodja je uporabnost. Zmožnost zgolj računanja 's papirjem in svinčnikom' učencem ne bo prav nič pomagala brez razvite zmožnosti interpretiranja problemov, analize, kaj je treba storiti in vrednotenja rešitev. Če problem zahteva aritmetične operacije, je lahko za učno šibkejše učence tudi računalo smiselno orodje. Vedno znova je koristen premislek o tem, kaj so temeljni cilji pouka matematike.
- »Nekateri učitelji niso zelo domači v posameznih matematičnih vsebinah in se počutijo neprijetno pri poučevanju tistega, kar slabše razumejo. Posledica tega je strah ali celo sovraštvo do predlogov novih pristopov. Vsi učitelji znajo aritmetiko, niso pa vsi domači na nekaterih drugih področjih (kot je reševanje problemov, logika, medpredmetno povezovanje, matematika v kontekstu, besedilne naloge …), zato ni pošteno od učiteljev pričakovati, da učijo tisto, česar ne razumejo.« Protiargument: Vsi učitelji, ki so odgovorni za poučevanje matematike, se dnevno soočajo z izzivom razumljive vpeljave pomembnih matematičnih konceptov in motiviranja učencev za pozitivno doživljanje in uživanje ob matematiki. To je del vseživljenjskega izpopolnjevanja v vseh poklicih, zato tudi pedagoška zmožnost poučevanja matematike ni nekaj, kar enkrat ‚usvojiš', potem pa ne rabiš več napredovati in se nič novega naučiti – takih poklicev pri odgovornem in pomembnem delu z ljudmi preprosto ni. Učitelji, ki se ne čutijo dovolj močne na kakšnem področju, imajo možnost in dolžnost profesionalno napredovati s pomočjo matematičnih tečajev, seminarjev, konferenc, delavnic itd.

Zgledi uporabe strategij pri reševanju problemov

V nadaljevanju si bomo na konkretnih primerih matematičnih problemov ogledali možnosti uporabe različnih strategij in s tem različnih poti k rešitvi istega problema (prim. Posamentier in drugi, 1998).

Zgled 9: V sobi z 10 osebami se vsaka oseba rokuje z drugo osebo natanko enkrat. Koliko je vseh rokovanj?

- Uporabimo **risanje slike** in **obravnavo vseh možnosti** z 10-kotnikom in povezavami iz vsake točke: iz prve 9 povezav, iz druge še 8 povezav, itd., na koncu dobimo $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ povezav.
- Uporabimo **logično sklepanje**: vsaka izmed 10 oseb se rokuje s preostalimi 9, torej je vseh rokovanj $10 \cdot 9 = 90$, vendar smo pri tem rokovanje med osebama A in B šteli dvakrat, zato je vseh različnih rokovanj v resnici $\frac{90}{2} = 45$.
- Uporabimo **pogled z drugega zornega kota** in nalogo rešimo v jeziku moči množic z binomskim simbolom: koliko podmnožic moči 2 ima množica z 10 elementi? $\binom{10}{2} = 45$

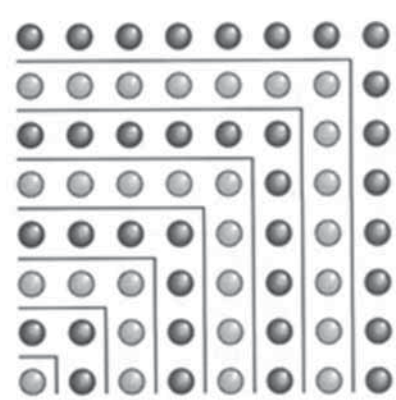
Zgled 10: Vsota dveh števil je 12, produkt pa 4. Poiščite vsoto obratnih vrednosti obeh števil.

- Nalogo lahko rešimo z nastavitvijo sistema enačb $x + y = 12$, $xy = 4$, pri čemer dobimo rešitvi $x = 6 \pm 4\sqrt{2}$ in $y = 6 \mp 4\sqrt{2}$. Ta postopek je dolg in neatraktiven, a ga je prvič smiselno izvesti, sicer učenci ne začutijo prednosti uporabe smiselne strategije.
- Nalogo lahko rešimo elegantneje in hitreje z **delom nazaj**: iščemo vsoto obratnih vrednosti števil, kar lahko zapišemo tudi drugače: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ (izhajamo torej iz oblike rešitve, kot jo želimo dobiti na koncu). Ob tem pa opazimo, da imamo vse podatke za izračun vrednosti zadnjega izraza že podane: $\frac{12}{4} = 3$. Pri tem nas vrednosti x in y sploh nista zanimali.

Opomba: Strategijo **delo nazaj** pogosto uporabljamo pri geometrijskih konstrukcijah in pri nalogah z uporabo Vietovih formul.

Zgled 11: Poiščite vsoto prvih n lihih števil.

- Nalogo rešimo z **opazovanjem vzorca** in **iskanjem pravila** (kot mnoge podobne naloge pri vsotah vrst): za prvo liho število je vsota 1, za prvi dve lihi števili je vsota 4, za prve tri je 9 itd., za prvih n lihih števil je vsota n^2.
- Nalogo lahko rešimo tudi z **risanjem slike**:



Zgled 12: Dve koncentrični krožnici sta medsebojno oddaljeni 10 enot. Kolikšna je razlika med obsegoma obeh pripadajočih krogov?

- Pri običajnem reševanju bi polmer manjšega kroga označili z r, polmer večjega z $r + 10$ in razlika obsegov je potem $2\pi(r + 10) - 2\pi r = 20\pi$ enot.
- S strategijo **preučevanja ekstremnih primerov** pa si lahko predstavljamo notranji (manjši) krog kot izrojen primer, strnjen v točki ($r = 0$) in ta je središče zunanjega (večjega) kroga, pri čemer je sedaj razlika obsegov obeh krogov enaka ravno obsegu večjega kroga, in sicer $2\pi(r + 10) = 20\pi$ enot.

Zgled 13: Poiščite največji možni produkt dveh naravnih števil, katerih vsota je 41.

- Ob izpustitvi pogoja, da sta števili naravni, je to tipični ekstremalni problem, ki ga lahko rešimo z odvodom ali iskanjem temena ustrezne parabole (po formuli ali grafično).
- V našem primeru rešimo problem z uporabo strategije **urejanja podatkov**: v tabeli zapišemo vse možne pare dveh števil z vsoto 41 in vzporedno pripadajoče produkte; iz tabele bomo razbrali, da je največji produkt pri številih 20 in 21.

Zgled 14: V trikotniku ABC velja: $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma > 0$. Kakšne vrste je trikotnik ABC?

- Nalogo lahko najelegantneje rešimo s strategijo **obravnave vseh možnosti**: če je trikotnik ABC pravokotni trikotnik, bo eden od kotov enak 90° in potem bo cos 90° = 0, torej celoten produkt enak 0. Če je trikotnik ABC topokotni trikotnik, bo natanko eden izmed kotov večji od 90°, ostala dva pa bosta ostra; tedaj bo kosinus tega kota negativen, kar pomeni, da bo produkt negativen. Če je trikotnik ABC ostrokotni trikotnik, so vsi trije koti ostri in njihovi kosinusi pozitivni, zato je produkt pozitiven.

Zgled 15: Poiščite dve naravni števili, ki se razlikujeta za 5, prav tako pa je vsota njunih kvadratnih korenov enaka 5.

- Nalogo lahko rešimo z reševanjem sistema enačb $x - y = 5$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ s substitucijo in z uporabo pravil za reševanje iracionalnih enačb.
- S strategijo **pametnega ugibanja** in **preizkušanja vseh možnosti** pa lahko razmišljamo takole: ker je vsota kvadratnih korenov enaka 5, sta lahko posamezna korena 4 in 1 ali pa 3 in 2. Števili sta torej 16 in 1 ali pa 9 in 4. A razliko 5 imamo samo v drugem primeru, zato sta iskani števili 9 in 4.

Dodatek: primeri matematičnih preiskovanj v srednješolski matematiki

V nadaljevanju je predstavljenih še nekaj zgledov možnih matematičnih preiskovanj v srednji šoli, predvsem v vlogi prvega vtisa in nevsiljive spodbude učitelju k samostojnemu iskanju nadaljnjih primerov matematični problemov.

Zgled 16: Primer odkrivanja in posplošitve Pitagorovega izreka – preiskovanje z GeoGebro.

(a) S pomočjo ustreznega apleta v GeoGebri učenci preiskujejo morebitno zvezo med vsotama ploščin kvadratov nad dvema stranicama in ploščino kvadrata nad tretjo stranico za ostrokotni/ pravokotni/topokotni trikotnik.

(b) S pomočjo ustreznega apleta v GeoGebri učenci preiskujejo morebitno posplošitev Pitagorovega izreka tako, da nad stranicami ne tvorimo kvadratov, ampak druge like (pravokotnike, pravilne večkotnike, druge like poljubnih oblik). Kakšna mora biti zveza med temi liki, da bo v jeziku ploščin veljala enaka zveza, kot velja pri Pitagorovem izreku? Dokaz.

(c) S pomočjo podatkov v tabeli učenci preiskujejo posplošitev Pitagorovega izreka do kosinusnega izreka (Benson, 2005):

i. Za ostrokotne, pravokotne in topokotne trikotnike ugotavljamo predznak izraza $(a^2 + b^2) - c^2$ pri danih a, b in c. Utemeljitev.

γ	$(a^2 + b^2) - c^2$
ostrokotni	
pravokotni	
topokotni	

ii. Pri fiksnih a in b variiramo kot γ (in s tem c) med 0° in 180°. Primerjamo spreminjanje izraza $(a^2 + b^2) - c^2$ ob spreminjanju kota γ: ali naraščajo, padajo ali oscilirajo? Ali se spomnimo katere trigonometrične funkcije, ki se obnaša podobno kot vrednosti izraza $(a^2 + b^2) - c^2$?

iii. Narišimo tabelo, kjer pri izbranem kotu $\gamma = 60°$ iščemo zvezo med $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ter različnimi danimi vrednostmi za a, b, c ter izračunanimi $(a^2 + b^2) - c^2$. Učenci oblikujejo hipotezo, za pomoč pa dodamo še nekaj primerov za kota $\gamma = 30°$ in 45°. ($\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$) Na koncu sledi še eden od dokazov kosinusnega izreka.

γ	$\cos\gamma$	a	b	c	$(a^2 + b^2) - c^2$
60°	$\frac{1}{2}$	3	3	3	
60°	$\frac{1}{2}$	3	8	7	
60°	$\frac{1}{2}$	5	8	7	
60°	$\frac{1}{2}$	7	15	13	
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3	5	$\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$	
60°	$\frac{1}{2}$	3	5	$\sqrt{19}$	
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	4	7	$\sqrt{65 - 28\sqrt{2}}$	

Zgled 17: Vlakci – preiskovanje (Usiskin, 2003).

(a) Narišemo kvadrat iz 4 črtic (zobotrebcev) in mu rečemo vagon. Sestavljenim vagonom rečemo vlakec. Poiščimo zvezo med številom vagonov v in številom zanje potrebnih zobotrebcev Z kot funkcijo $Z = Z(v)$.

(b) Razmislimo o posplošitvi za obliko vagona, ki je n-kotnik. Poiščimo predpis za funkcijo dveh spremenljivk $Z = Z(n,v)$.

(c) Za izbrane konkretne vrednosti n narišemo grafe funkcij $Z = Z(n,v)$.

(d) Razmislimo o posplošitvi oblike vagona v 3-D prostoru: naj bo vagon kocka. Spet poiščimo zvezo $Z = Z(v)$.

Zgled 18: »Matemagične« naloge – preiskovanje (Sobel in Maletsky, 1999):

(a) V mislih si izberi poljubno število. / Pomnoži število z 2. / Prištej 7. / Odštej 1./ Deli z 2. / Odštej število, s katerim si začel. / Rezultat: A si dobil število 3? Utemeljite postopek, nato pa si še sami izmislite kak primer.

(b) V mislih vzemi svojo starost v letih. / Pomnoži starost z 2. / Prištej 10. / Pomnoži s 5. / Prištej število vseh oseb v vaši družini. / Odštej 50. / Povej mi dobljeno število. Npr. 154. Rezultat: Star si 15 let, v družini pa ste 4. Utemeljite postopek. Ali ima postopek kakšno omejitev glede splošne veljavnosti?

Zgled 19: Navedite:

(a) čim več različnih načinov računanja ploščine trikotnika, ki jih spoznamo v srednji šoli;

(b) čim več različnih primerov uporabe koncepta absolutne vrednosti v srednješolski matematiki;

(c) temeljne geometrijske izreke pri razreševanju trikotnikov;

(d) primere sodih/lihih, injektivnih/surjektivnih/bijektivnih funkcij z izbranimi dodatnimi lastnostmi;

(e) pomen konstant in ter načine, kako ju lahko vpeljemo/odkrijemo/izračunamo približke zanju;

(f) zakaj je za računanje absolutne vrednosti realnega števila primernejša običajna srednješolska definicija, kot pa npr. $|a| = \sqrt{a^2}$, ki je sicer bolj naravna zaradi analogije z ostalimi primeri $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Zgled 20: Koliko je vseh kvadratov različnih velikosti na standardni šahovnici? Namig: Najprej preverite vse možnosti na šahovnicah dimenzij 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3 in 4 × 4 ter na podlagi opazovanja vzorcev v tabeli poskusite oblikovati hipotezo za šahovnico 8 × 8 (Sobel in Maletsky, 1999).

Zgled 21: S pomočjo preiskovanj lahko vpeljemo nove matematične koncepte tudi pri vseh tistih vsebinah iz analize, kjer učenci odkrivajo pomen posameznih parametrov v predpisih funkcij. Nobene od teh vsebin ni treba učencem »prinesti na pladnju«, ampak so jih učenci zmožni odkriti sami vodeno ali samostojno s pomočjo matematičnih programov ali primernih apletov (že narejenih na spletu ali avtorskih v GeoGebri).

Zgled 22: Znamenite točke trikotnika in Eulerjeva premica – preiskovanje z GeoGebro.

Zgled 23: Opazujmo polinomske funkcije tretje stopnje.

(a) Koliko realnih ekstremov lahko nastopa kot maksimum in koliko kot minimum? Odgovor preveri.

(b) Ali je možen polinom tretje stopnje z enim samim ekstremom? Premisli in dokaži.

(c) Podaj primer za vsak tip prejšnjih polinomov in preveri ugotovljeno.

Zaključek

Na kratko smo predstavili nekatere temeljne pojme razvijanja matematičnih znanj z reševanjem problemov in nakazali možnosti vpogleda v ukvarjanje z matematiko ob uporabi različnih strategij reševanja matematičnih problemov.

Za nadaljnje poglabljanje v razvijanje matematičnih znanj skozi reševanje problemov poleg širokega nabora spletnih virov predlagamo tudi nekaj izbranih tiskanih virov, ki so navedeni v nadaljevanju. Naj bo raziskovanje novih matematičnih izzivov v veselje tako učiteljem kot našim učencem!

Viri in nekatera možna literatura s področja razvijanja problemskih znanj

Benson, S. idr. (2005). *Ways to Think About Mathematics. Activities and Investigations for Grade 6–12 Teachers.* Corwin Press.

Burns, M. (2000). *About Teaching Mathematics. A K-8 Resource. 2nd Edition.* Math Solutions Publications.

Hauptman, H. A., Posamentier, A. S. (2001). *101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers*. Corwin Press.

Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, 10(2003), str. 129–138.

Polya, G. (1989). *Kako rešujemo matematične probleme*. DMFA.

Posamentier, A. S. idr. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Corwin Press.

Posamentier, A. S. idr. (2006). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units. 7th Edition*. Pearson Prentice Hall.

Sobel, M. A., Maletsky, E. M. (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities and Strategies, 3rd Edition.* Allyn & Bacon.

Usiskin, Z. idr. (2003). *Mathematics for High School Teachers. An Advanced Perspective.* Pearson Education.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, Fifth Edition.* Allyn & Bacon.