MATEMATIČNO MIŠLJENJE V TISOČLETNEM ZRCALU KULTURNEGA RAZVOJA

Mogoče je eno najzanimivejših protislovij v razvoju kulture v tem, da se že v prvih začetkih zgodovine družijo najmračnejši misticizem in blodnje človekove domišljije z jasno matematično mislijo. Danes vemo, da se ni nobena stara kultura razvila brez matematike, ki je spočetka seveda še vseskozi praktična in služi le človekovim vsakdanjim skromnim potrebam.

O zgodnjih pojavih matematičnih spoznanj še ni mogoče govoriti povsem zanesljivo. Mnogo do danes še ni raziskanega, kakor na primer Asurbanipalova klinopisna knjižnica iz Mezopotamije, ki hrani vso babilonsko in asirsko kulturno dediščino, ali pa so pisane priče za vselej izgubljene in uničene, kakor se je zgodilo pri ameriških rdečekožcih.

Indijanski Azteki in rod Maja, pa tudi Inki v južnoameriških Andih so bili veliki mojstri računanja. Posebno rdečekoži Grki, pleme Maja, je razvilo čudovito kulturo. Njihova arhitektura, v kateri je — podobno kot v indijski — sicer več neukrotljive fantazije kot razuma, je zahtevala znanje nekega elementarnega računstva in geometrije. To, po vsej svoji miselnosti eksotično kulturo, ki sega vsaj v prvo tisočletje pred našim štetjem, danes žal le malo poznamo. Španski konkvistadorji, ki so prinašali v zameno za azteško zlato krščanskega boga in brezobzirno iztrebljanje, so jo temeljito obglavili. Misijonarji, ki so prihajali z osvajalci, so na grmadah uničili indijansko literaturo, »hudičevo delo«, kot je dejal yukatanski škof Diego de Landa. Ohranili so se vsega komaj trije rokopisi izpred konkvistadorskih časov. Srečna usoda pa je rešila pozabe hieroglifna znamenja za mesece, dneve in števila — ključ za poznejša raziskavanja.

Za izražanje številk so imeli stari Indijanci dvajset znamenj, umetniško oblikovane glave, ki spominjajo na maske grških igralcev. Človek, ki jih je izoblikoval in uporabljal, je okusu žrtvoval mnogo časa. Prvo med temi fantastičnimi znamenji je glava, ki jo roka stiska za vrat; to je simbol za število nič, ki dokazuje, da so bili Indijanci globoki misleci. Saj se do spoznanja, da je tudi nič število, zahodnoevropski človek nikoli ne dokoplje sam, ampak mu to spoznanje prineso sorazmerno pozno Arabci iz Orienta.

Tragična usoda visoke indijanske kulture ni presenetljiva. Bila je last le tanke vrhnje družbene plasti, neznatnega družbenega razreda plemstva in duhovščine, medtem ko so milijoni nevednih pridelovali koruzo brez pluga in gnoja, brez vprežne in tovorne živali, brez voza, ki ga Orient pozna vsaj že šest tisoč let. V kulturnem mraku so odrajtovali dve tretjini pridelka gospodi in duhovščini, v času med žetvijo in setvijo pa brez kovinastega orodja z okusom obdelovali kamen in gradili čudovita mesta.

Tako kulturo, brez korenin v navadnem človeku, je bilo lahko »obglaviti«. Ovenela je kot izpodkošena roža. Pragozd je gosto prerastel onemela mesta, da je moral risar Cathrwood tri sto let pozneje v zeleni strehi izbiti široka okna, da se je lahko razgledal po čudovitem »potopljenem« svetu. Nevedni rdečekožec ni več razumel znamenj, ki jih je sam vklesal v kamen.

Šele po stoletjih za španskimi osvajalci so Indijance znova odkrili arheologi. S ključem znamenj za mesece, dni in števila so razvozlali skrivnost, da »je bila vsaka zgradba rodu Maja okamenel koledar. Nobena ureditev ni bila naključna, estetika se je pokoravala matematiki... Koledar rodu Maja je bil najboljši na svetu«, natančnejši od julijanskega in tudi gregorijanskega. »To ljudstvo je znalo povezovati najnatančnejše opazovanje neba z najzamotanejšimi matematičnimi umetnijami,« pravi o rodu Maja C. W. Ceram v svoji znameniti knjigi »Götter, Gräber und Gelehrte«.[1]

Izvori indijanske kulture in z njo tudi njene astronomije in matematike se zgubljajo v megli predzgodovine: kulturi Toltekov, ki so že pred začetkom našega štetja gradili mogočne piramide, pa preko 10 000 let starega Folsomskega človeka v prakulturi neznanega človeškega bitja, čigar sledovi segajo v tretjo medledeno dobo pred več kot 100 000 leti in čigar matematika še ni mogla segati kaj prida čez število prstov na roki.

Kultura »novega sveta« je eksotična, pa tudi osamljena kot otok sredi oceana. Stari svet ni ničesar dedoval po njej. Duhovne korenine zahodnoevropskega sveta so v Egiptu in Mezopotamiji, ki je na drugi strani nejasno povezana tudi z Daljnim Vzhodom in Indijo.

Svoje kulturno praognjišče mora Evropa iskati pri Sumercih, ki so bivali okoli starodavnega Ura ob dolnjem toku Eufrata in Tigrisa, v davni preteklosti, ko sta se ti reki še ločeni izlivali v morje. Od tam je tudi Abraham prinesel judovskemu ljudstvu mit o prvem človeku in o desetih rodovih pred vesoljnim potopom (Sumerci in Babilonci govore o desetih predpotopnih kraljih); iz Ura imajo Judje prvo veliko stvaritev svetovne literature, ep o »sijajno strašnem« Gilgamešu, dve tretjini bogu in eno tretjino človeku, in njegovo zgodbo o Ut-Napištiju, ki se je v vesoljnem potopu rešil pred jezo bogov »s svojo družino in vsemi sorodniki, poljskimi živalmi, živino s paše in z rokodelci,« ki jih je vzel na ladjo.

Črnoglavi Sumerci (kako so se sami imenovali, ne vemo) so kmalu utonili v barbarskih semitskih rodovih, Akadijcih in Babiloncih, ki pa so — kot dva tisoč let pozneje Ahajci od premaganih Mikencev ali Rimljani od podjarmljenih Grkov — prevzeli njihovo kulturo in ohranili celo »mrtvo« sumerščino v pravu in verskem obredu.

Dediči po Babiloncih so bili Asirci, ki so razvili staro kulturo do bleščečega sijaja in antične sumerske hieroglife izpodrinili s praktičnejšimi črkovnimi klinopisi. Njihove Ninive, »v katerih so bili trgovci številnejši od zvezd na nebu,« »so se vtisnile človeštvu v spomin z umori, ropanjem, zatiranjem, poniževanjem slabotnih, z vojno in grozo vsake vrste, s krvavo vrsto kraljev, ki so vladali le z nasiljem in redkokdaj utegnili umreti naravne smrti, da jih je zamenjal še slabši vladar«.[2] Asirski dvor pa je bil tudi podoben renesančni vladarski hiši, v kateri sta se nravstvena dekadenca in bogastvo često družila z ljubeznijo do znanosti in z umetniškim okusom. Iz Asurbanipalove dobe so umetnine, ki so med prvimi mojstrovinami kiparskega dleta vseh časov (umirajoči lev) in mogočna knjižnica, v kateri je sredi sedmega stoletja pred našim štetjem ta »renesančni« vladar zbral 30 000 lončenih »zvezkov«. Njegovi odposlanci so po vsem kraljestvu in sosednjem

---

[1] C. W. Ceram, »Götter, Gräber und Gelehrte,« Roman der Archeologie, Rowohlt Verl., Hamburg 1952, str. 394. Slovenski prevod (DZS, 1956), str. 368-9.

[2] C. W. Ceram, n. n. m., str. 282. Slovenski prevod, str. 267.

Babilonu zbirali in prepisovali dragocene tablice in nam tako ohranili tudi bogato duhovno žetev sumersko-akadijskega praveka, antično znanje, prekvašeno z magijo, mračnim praznoverjem, vedeževalstvom in čarovništvom.

Asurbanipalovo knjižnico z medicinskimi, filozofskimi, leposlovnimi, verskimi, filološkimi, astronomskimi in matematičnimi deli, s šolskimi »knjigami«, slovarji in celo leksikonom v stari sumerščini, so našli arheologi v prizidanih prostorih nekoliko starejše Sanheribove palače na griču Kujundžiku pri Ninivah. Iz te knjižnice, ki bo še dolgo neizčrpen vir odkrivanja starih mezopotamskih kultur, vemo, da so asirski matematiki že v Asurbanipalovih časih uporabljali tablice z izračunanimi kvadrati in kubi, kvadratnimi in kubičnimi koreni, recipročnimi vrednostmi in ulomki; vemo, da so bili Asirci spretni računarji, da so reševali že nekatere oblike kubičnih enačb in poznali eksponencialne funkcije za izračunavanje obrestnih obresti. Poznali so celo matematične postopice in računali tudi z milijardami. Pozneje se je človeku kraljestvo števil za dolgo zopet močno zožilo.

Najbrž ni naključje, da imajo prav teorijo matematičnih postopic že zelo zgodaj, vsaj tisoč let pred Asurbanipalom, tudi egipčanski matematiki. Vsaj tako staro mora biti to poglavje matematike tudi v Mezopotamiji. Tudi to kaže na duhovne vezi med obema svetovoma, mezopotamskim in faraonskim.

V babilonskih in asirskih palačah, templjih in mogočnih trdnjavah (Ninive je obdajalo obzidje, debelo 10 in visoko 24 metrov, in tudi na babilonskem bi se lahko srečali dve štirivpregi) tiči mnogo geometrije in računstva. Babilonski inženirji so zgradili svetovno čudo starega veka, Semiramidine »viseče vrtove« na zidanih obokih iz opeke in rezanega kamna. Postavili so tudi 90 metrov visoki »babilonski stolp«. Na vrhu tega antičnega babilonskega »Vatikana« je stal tempelj boga Marduka, ki je kronal babilonske kralje. Stregli so mu duhovniki, navaden človek pa njegovega pogleda ne bi prenesel in zato ni nikoli stopil v najsvetejše. S tako teologijo, ki jo prevzemajo tudi Judje, so duhovniki posvečali prepad med spodnjimi in zgornjimi družbenimi razredi. Vrhnja družbena plast pa ni bila le posrednik med ljudmi in bogovi, ampak tudi ljubosumen čuvar vsega znanja, ki so ga nakopičila tisočletja.

Stari viri pravijo, da so se graditelji orjaškega babilonskega stolpa lotili dela zato, »da bi si ustvarili ime«; danes pa vemo, da je babilonski stolp Etemenanki le najmogočnejši od stolpov »cigurah«, ki so jih gradili že tri ali štiri tisoč let prej Sumerci za zvezdne opazovalnice. Cigurah so bile stopničaste piramide, kakršne so v najstarejši dobi gradili tudi Egipčani, le da so pri njih služile drugačnim namenom — za grobove kraljev.

Pri Egipčanih raste geometrija iz potreb zemljemerstva, pri Sumercih, Akadijcih in Babiloncih pa iz prizadevanja njihovih astronomov, ki so z neznanimi sredstvi in načini že tako bistroumno opazovali dogajanje na nebu, da so izračunali gibanje Merkurja natančneje od mnogo mlajšega največjega astronoma starega veka, Grka Hiparha, in natančneje tudi od velikega aleksandrijskega zvezdoslovca Ptolemeja. Obkrožno dobo meseca so Babilonci poznali do 0,4 sekunde tako natančno, kot mi danes. Tri svetopisemske mage z Jutrovega »je vodila« zvezda.

Seveda je bila ta praastronomija pravzaprav še praastrologija, zmes zvezdoslovja, kulta nebesnih teles in vedeževanja iz nebesnih pojavov. Saj so sumerska zvezdna božanstva prešla pozneje tudi v babilonska in asirska verstva in po njih, dostikrat le malo spremenjena in pod drugimi imeni, na grški Olimp in med rimske bogove.

Sumerska podoba vesoljstva je še naivno subjektivistična ali antropocentrična, sferična, kakor jo vidi človeško oko. V nebesno sfero človeštvo štiri in pol tisočletja po Sumercih ni podvomilo. Preko Judov in zgodnjega krščanstva se je ohranila še najbolj nedotaknjena pri sekti egipčanskih Koptov. Babilonci so nebesno sfero potrojili, Ptolemej pa je dodal še štiri nove nebesne lupine. Šele bistroumni pridigar in potepuški klatež, revolucionar Giordano Bruno, ki je svoje moderne ideje plačal s smrtjo na grmadi v Rimu, je preroško klical znanosti: »Uniči nadzemeljske moči, o katerih pravijo, da gibljejo svet! Uniči sfere tako imenovanih nebesnih krogel! Odpri nam vrata, skozi katera bomo mogli gledati v neizmerni, enotni, brez razlik sestavljeni zvezdni svet!« — In vendar še niti Kepler ni razumel preroškega Giordana Bruna in se ni upal zavreči trdožive sumerske dediščine.

Pri sferi je osnovna geometrijska prvina krog in ne v neskončnost segajoča Evklidova premica. Krog je zato še posebej zanimal sumersko-akadijske matematike, ki so prvi odkrili konstrukcijo pravilnega šesterokotnika v krogu ter razdelili krog na 360 delov. Mogoče je pri nastanku te številke vplivalo tudi število dni v letu, ki je zelo podobno. Ker pa je $360 = 6 \times 60$, je Sumercem začelo služiti število 60 tako, kakor danes nam desetica, in tudi enote so delili na 60 delov, kakor jih mi danes na 10. Tako so prišli do svojega šestdesetičnega ali seksagezimalnega številčnega sistema, torej do drugačnega načina štetja, kot je naš dekadni.

Najstarejši znani sumerski zakonodajalec, Ur-Nammu (okoli 2050 pred n. š.), ki se je proglasil za pooblaščenca in namestnika boginje Meseca, Nanne, pravi v uvodu v svoj kodeks, da je uredil sistem poštenih tež in mer; utežna enota, talent, je imela 60 min in 3600 šeklov; 60 je seksagezimalna »desetica«, $3600 = 60 \times 60$ pa seksagezimalna »stotica«, torej popoln šestdesetični sestav. Pozneje so talent, mina in šekel tudi denarne enote, ker so zlato in srebro, s katerim so plačevali, tehtali.

Semitski Babilonci in Asirci so uporabljali dekadni sestav, ki pa je še delil enote po sumerskem seksagezimalnem načinu na 60 delov. Tak sestav, ki je bil dejansko križanec dveh različnih številčnih sistemov — navzgor dekaden, navzdol seksagezimalen —, so od Babiloncev in Asircev prevzeli tudi Indijci in Grki, po katerih je prišel v Evropo. Še do 15. stoletja so matematiki na Zahodu delili enote vselej le po sumerskem načinu, pri kotnih enotah in merjenju časa pa se je ohranila ta pet tisoč letna sumerska dediščina še do danes. Najbrž je v Evropi še več ostankov sumerskega načina štetja; naj spomnim le na prvotno delitev goldinarja na 60 krajcarjev.

Babilonci so uporabljali posebna računala, da so preračunavali sumerska seksagezimalna števila v svoja dekadna. Spočetka so morale biti hude zmešnjave. Tako si vsaj deloma razlagamo, zakaj so po starih babilonskih virih vladali posamezni kralji pred potopom in tudi po potopu tja do prve dinastije iz Ura — ob prelomu 4. in 3. tisočletja pred našim štetjem — stoletja in celo tisočletja, neki kralj pred potopom kar 43 200 let. Gre pa seveda, zlasti v najstarejši dobi, tudi za mitološko pretiravanje. Iz te zmede številk v sumersko-akadijskem Uru je tudi Abraham prinesel Metuzalema in druge stoletne očake, ki so jih Judje nekritično sprejeli v svojo literaturo.[3]

Babilonci so poznali tudi že konstrukcijo pravokotnega trikotnika s pomočjo pitagorejske trojice števil 3, 4 in 5, za katere velja Pitagorov izrek: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pripomoček za določevanje pravega kota so potrebovali gradbeni mojstri vedno že od najstarejših časov. Babilonci so poznali preprost način: na vrvici, ki so jo sklenili v krog, so razvrstili v enakih razdaljah 12 vozlov; če tako zanko pri prvem, četrtem in osmem vozlu napnemo v trikotnik, dobimo pri četrtem vozlu pravi kot.

Pravijo, da ni krog z dvanajstimi vozli nič drugega kot simbolična podoba babilonskega živalskega kroga na nebu. Tako je to spoznanje pitagorejske geometrijske zakonitosti padlo babilonskim ali morda že sumerskim matematikom tako rekoč »z neba«, kakor nekje duhovito označuje izvor sumersko-akadijske in babilonske geometrije Gerhard Kowalewski.

Babilonsko konstrukcijo pravega kota so dobili tudi Egipčani, medtem ko odkrijejo Indijci drugo pitagorejsko trojico števil, 5, 12 in 13. Pozneje bomo imeli priložnost, še bolje spoznati ustvarjalno silo indijskega abstraktnega mišljenja v matematiki.

Od kod so Sumerci prišli v Mezopotamijo, ni znano. Da so našli v dolini Inda sumerskim čisto podobne pečatnike; da še danes živi sumerski rasni tip po Afganistanu in Beludžistanu; da je sumerščina podobna staroturščini; da je v sumerski tradiciji ohranjen spomin na gore, pa tudi legenda o ljudstvu, ki je prišlo po morju, vse to daje hrane raznim domnevam. Trdno je le, da so Sumerci prinesli že s seboj med barbarske Semite dokaj visoko kulturo, pisavo in zakone. Njihovi zakoniki, Hamurabijev, Lipit-Ištarjev in zadnji čas odkriti najstarejši Ur-Nammujev,[4] kažejo za naše nazore celo višjo pravno moralo — za nasilje nad človekom zahtevajo denarne kazni —, kot poznejši judovski, ki terjajo zob za zob in oko za oko. Od Ur-Nammuja in Hamurabija gredo niti nepretrganega razvoja prav do najmodernejših evropskih pravnih kodeksov. — Okoli 5500 let stara sumerska »mozaična zastava« kaže že podoben bojni voz, kot ga vidimo pozneje na asirskih slikah. Sumercem se moramo zahvaliti torej tudi za iznajdbo kolesa, ki je bilo pomembna prvina v zgodovini kulturnega razvoja človeštva; saj je začel človek obenem s kolesom, oziroma vozom, graditi tudi prve ceste, ki so odprle široki svet menjalnemu gospodarstvu in s tem naglejšemu razvoju. — V najsta-

---

[3] Zdi se mi, da govore razne okoliščine za domnevo, da prvotni sumerski sistem ni bil šestdesetični, temveč šestični: a) krog so Sumerci razdelili s konstrukcijo šesterokotnika na šest delov; b) če razstavimo število 360 na faktorja 6×60 in vzamemo, da je 60 seksagezimalna »desetica«, ne vemo s faktorjem 6 kaj početi; logičnejša bi bila razstava $360 = 6 \times 6 \times 10$, pri čemer je $6 \times 6 = 36$ »stotica« šestičnega sistema; faktor deset potem prav lahko razložimo s poznejšim vplivom semitskega načina štetja; c) na šestični številčni sistem pri Sumercih bi kazala tudi mistična svetost šestice kot »popolnega števila«, s katerim se po Judih ukvarja »za rešitev duš« rada tudi krščanska srednjeveška teologija; d) človeku, ki računa in misli v desetičnem sistemu, se bodo zdela, kot je znano, števila iz šestičnega sistema prevelika, ne pa iz šestdesetičnega. Prvotni šestični sistem bi se po tej domnevi razvil šele pozneje v šestdesetičnega ob stiku s semitskimi Akadijci. Tretja faza razvoja bi bil potem babilonsko-asirski mešani decimalno-seksagezimalni sestav z desetico navzgor in šestdesetico navzdol.

[4] Samuel N. Kramer, »The Oldest Laws«, Scient. American, jan. 1953.

rejših grobovih sumerskih kraljev so našli oboke, katerih konstrukcijo je prinesel iz Mezopotamije v Evropo šele Aleksander Veliki. Čudno pa je, da sumerski obok ne najde poti tudi v indijsko arhitekturo. — Pred 5000 leti Sumerci že z izbranim okusom in izvrstno tehniko obdelujejo zlato, baker in kamen (zlati nakit kraljice Šub-Ad in tempelj kralja A-anipade pri Uru) in uporabljajo že dobro razvito klinopisno pisavo. — Pri Sumercih so tudi začetki naše matematike in načina merjenja časa.

Prastari sumerski svet je s stoterimi nevidnimi nitmi razvoja povezan s sodobno Evropo na eni strani preko Babiloncev, Asircev, Perzijcev in Grkov, na drugi pa preko Judov in Arabcev, ki so nam posredovali tudi mnogo mračnjaštva, vražarstva in prazne vere.

Pionirji moderne kulture, Sumerci, imajo že razmeroma visoko razvito kulturo in tudi matematiko. Danes pa že nekoliko slutimo, kako se je le-ta tudi rodila. Če pogledamo v Mezopotamiji samo tri ali štiri tisočletja pred Sumerce, vidimo, kako človek šele komaj zapušča svoje jamsko in primitivno lovsko življenje ter s prvimi začetki poljedelstva (pôzna neolitska kultura Karim Shira s kamnitim mlinom in žitno shrambo, pa še brez lončarstva), živinoreje in vaškega življenja (kultura Jarmo) revolucionira način svojega življenja, kakor ga je le malokdaj v zgodovini. V to ekonomsko revolucijo je spravila človeka divja pšenica, ko jo je človek začel sejati in žeti. Ta začetek poljedelstva je prisilil človeka, da si je pred 6700 leti postavil v Mezopotamiji prva stalna bivališča, med njimi vas Jarmo, v kateri so arheologi našli prvo pšenico. Paul C. Mangelsdorf je tedaj zapisal: »Sejanje pšenice je bilo vedno povezano z ustaljenim načinom življenja. Pšenica pa je ljudi tudi prisilila, da so se bolj zanimali za letne čase in za gibanje Sonca, Meseca in zvezd. V starem in novem svetu so sejalci žita začeli gojiti zvezdoslovje, z zvezdoslovjem pa tudi iznašli koledar in sistem aritmetike. Žitno poljedelstvo je oskrbelo stalno zalogo hrane in s tem ustvarilo brezdelje; brezdelje pa je zopet pospeševalo umetnost, obrtništvo in znanost.«[5] Sprememba ekonomike spreminja tudi duhovno kulturo.

Ko je bil sumerski Ur že v zarji zavidljivega kulturnega napredka, je tičala Evropa še globoko v mraku kamene dobe. Slovani, Germani, Romani, Kelti, Grki in neki indijski in iranski narodi so bili še eno samo ljudstvo v prostoru med Renom in Vislo. Govorilo je še en sam skupen jezik, indoevropski, kakor mu pravimo danes. Jezikoslovski arheologi so nam ta izumrli jezik izpred tisočletij že precej obnovili in nam v njegovem zrcalu pokazali tudi kulturo indoevropskih poljedelcev, pastirjev in živinorejcev. Prvotno je to ljudstvo štelo po štiri in štiri in sestavljalo štirice v višje grupe. Palec so uporabljali pač pri nizanju ostalih prstov na roki. Pozneje se v indoevropščini pojavi decimalni sestav,[6] ki se še pozneje v starih germanskih plemenih meša z dvanajstičnim ali duodecimalnim: ti prav tako izumrli jeziki poznajo namreč malo stotico 100 in veliko stotico 120. Kdo pa je iznašel vso to prvo matematiko, ki ji zadostuje še prirodno računalo prstov na rokah, in kdo jo je dobil od drugih, zginja brez sledov v sivi megli davnine.

[5] Paul C. Mangelsdorf, »Wheat«, Scient. Am., jul. 1953.

[6] Indoevropska beseda »deset«, dekmt-, je sorodna »stotici«, kmtom, ki se je razvila iz še starejše oblike dkmtom, v pomenu »skupina desetic«.

Pri tretji veliki antični kulturi, pri Egipčanih, nam ni treba toliko ugibati kot pri Majih ali v Mezopotamiji, čeprav tudi faraonski svet ni brez svoje velike uganke.

Iz starega Egipta se nam je o matematiki ohranil tako imenovani Moskovski papirus, zlasti pa Rhindov papirus, ki je priročnik vsega egipčanskega matematičnega znanja, iz katerega spoznamo, kako so Egipčani v antiki šteli, računali in merili, pa tudi, kako so matematično mislili. To delo je napisal Ah-mosè *ali* Ahmes v hieratski pisavi okoli leta 1700 pred našim štetjem, na prelomu tako imenovanega Srednjega in Novega kraljestva, pod nekim kraljem tujih Hiksov. Ta »uvod v spoznanje vseh skrivnosti« je Ahmes, kakor pravi sam, prepisal »iz ljubezni do starih spisov« iz nekega starejšega dela. O njem sodijo, da sega v čas Amenemheta III. (1849—1801 pred n. š.), ki je bil šesti vladar dvanajste dinastije. In tudi za ta neznani Ahmesov izvirnik menijo, da je nastal iz še starejših del. Tudi izvori egipčanske matematike se nam tako izgubljajo v megli legendarnega praveka.

Osemnajst čevljev dolgi in trinajst palcev široki Ahmesov papirus je zbirka 85 nalog o rabi ulomkov, reševanju preprostih enačb in povsem modernih matematičnih postopic, o računanju ploščine pravokotnika, trikotnika, kroga in trapeza, površine polkrogle, količine žita v cilindrični žitnici in volumna prisekane piramide. Pri računanju krogove ploščine so za π jemali vrednost $(16/9)^2 = 3{,}16$. Začel se je štiritisočletni dramatični boj za osvajanje tega pomembnega matematičnega števila, ki mu je W. Shanks v 19. stoletju žrtvoval petnajst let, da je izračunal 707 decimalk, v naših dneh pa je računski robot Eniac s svojimi elektronskimi možgani v pičlih 24 urah izračunal 2040 mest.

Egipčanom je bila njihova dežela »dar Nila«. S svojimi velikimi poplavami je ta reka vsako leto na debelo gnojila deželo z blatom, v katerem so leto za letom zginjali stari mejniki in mejaši. Vsako leto je bilo treba na novo razmeriti polja. Zato so bili Egipčani prvi zemljemerci. Potrebe praktičnega zemljemerstva pa so jih silile k proučevanju geometrije. Spomin na to je še danes v samem imenu »geometrija«, ki je grški prevod egiptovske besede za »zemljemerstvo« in ki pomeni danes seveda mnogo več kot le »zemljemerstvo«.

K razvijanju računstva in elementov sferične geometrije, to je k merjenju kotov in k drugim nalogam astronomije, je Egipčane silila tudi skrb za napovedovanje začetka Nilovih poplav. Egipčani so bolj kot drugi narodi potrebovali dober koledar. Tudi v Egiptu raste tako »duhovna nadgradnja« matematične vede iz ekonomsko-materialnih pogojev družbe.

Da so nekaj geometrije poznali že v egipčanskem Starem kraljestvu, nam pričajo mogočne piramide iz časa četrte dinastije (Keops, Kefren, Mikerinos), v katerih pa so romantični egiptologi videli včasih vsekakor več računske in geometrijske mistike, kot je res tiči v teh davnih kiklopskih kamnitih spomenikih.

Pozen odmev tehničnih in matematičnih problemov starih Egipčanov nam daje zgodovina obeliska na Trgu sv. Petra v Vatikanu. Ta monolit je pripeljal iz Egipta še Julij Cezar v Kleopatrinih časih. Leta 1586 je bilo vprašanje, kako ga premakniti 275 vatlov daleč in ga postaviti sredi trga. Sestalo se je pet sto najboljših renesančnih inženirjev, ahitektov in matematikov iz vse Italije, Grčije in celo daljnega Rodosa in se nazadnje odločilo za načrte Domenica Fontane. Ves dan pred začetkom tveganega podjetja so bile javne molitve, spoved in obhajilo delavcev in trobentači so oznanili trenutek, ko je 900 delavcev in 74 konj napelo vrvi, vzvode in škripčevje vsake vrste na pomožnih lesenih stolpih in odrih. Leto dni je veljalo Fontano, da je končal delo, o čemer je leta 1590 napisal posebno knjigo »Della trasportatione dell'obelisco Vaticano«, ki je »klasično delo inženirske literature«. Egipčani so opravili s tem kamnitim orjakom mnogo težje in odgovornejše delo.

Elementi matematične vede so prišli v Egipt tudi od drugod. Z idejo in obliko prvih piramid, ki so posnemale sumerske in akadijske zvezdarne cigurah, so Egipčani dobili iz Mezopotamije najbrž tudi matematične, zlasti geometrične pripomočke. Saj smo že čuli, da so tudi Egipčani dobili babilonsko konstrukcijo pravega kota s pomočjo pitagorejskega trikotnika, katerega stranice merijo 3, 4 in 5 dolžinskih enot.

Egipčanski matematiki so vseskozi praktiki, ki se za dokazovanje in abstraktne teorije ne menijo. Ta duh veje tudi iz Ahmesovega papirusa. Ahmes zapiše nalogo, na primer: 9 hlebov kruha je treba razdeliti med 10 ljudi, in poda takoj rešitev: vsak dobi 2/3, 1/5, 1/30 hleba. Danes bi pisali med te ulomke znamenje za plus, ki ga Egipčani še nimajo; seštevanje samo nakazujejo s podobo noge, obrnjene naprej, oziroma nazaj za odštevanje.

Ahmes nič ne črhne o tem, kako je prišel do rezultatov. Namesto tega dodaja vsaki nalogi le še preizkus, v našem primeru tako, da rezultat 2/3, 1/5, 1/30 na svoj egipčanski način množi z 10. Zapiše:

1	(kratni rezultat)	2/3, 1/5, 1/30
2	(kratni rezultat)	1 2/3, 1/10, 1/30
4	(kratni rezultat)	3 1/2, 1/10,
8	(kratni rezultat)	7 1/5

Da dobi desetkratno vrednost, sešteje sedaj drugo in četrto vrsto in najde res devet hlebov.

Tu spoznamo najprej način egipčanskega množenja. Logično je množenje okrajšan način seštevanja; Ahmesov papirus pa nam dokazuje, da se je množenje zgodovinsko res razvilo iz seštevanja.

Antični matematiki v dolini Nila so znali množiti le z 2 in seštevati. Če je bilo treba, vzemimo, množiti število x z 19, so z zaporednim podvojevanjem našli najprej: x, 2 x, 4 x, 8 x, 16 x in nato sešteli prvo, drugo in zadnje število: $x + 2x + 16x = 19x$. Za množenje z 22 bi sešteli $2x + 4x + 16x$ itd. Tako množenje, zlasti kadar je šlo za velika števila, je že zelo skrajševalo seštevanje, vendar je bilo za naše pojme še vedno zelo zamudno.

Ahmesova naloga o delitvi devetih hlebov nam pojasnjuje tudi rabo ulomkov v faraonskem Egiptu. V naših dneh bi šolar, ki je prodrl v prve skrivnosti ulomkov, brez posebnega računanja zapisal rezultat 9/10, ki pove: razdeliti je vsakega od devetih hlebov na deset enakih delov in dati vsakemu po devet takih kosov. Če primerjamo to preprosto razvidno rešitev z nejasno egipčansko: daj vsakemu po 2/3 in 1/5 in 1/30 hleba, se moramo čuditi kompliciranosti egipčanskega matematičnega mišljenja.

Nerazumljiva posebnost Ahmesove matematike je namreč to, da pozna le ulomke s števcem 1 in da vsakega drugega po neznani metodi nemudoma razstavi le na take, s števcem 1. Namesto 31/51 piše Ahmes 1/2, 1/17, 1/34, 1/51, pri čemer misli zopet vsoto teh ulomkov. Edina izjema je ulomek 2/3, ki ga piše s posebnim znakom.

Egipčanski način rabe ulomkov, ki zahteva veliko spretnost v računanju, je v navadi še pri Grkih, zadnje vplive pa so našli pri Rusih celo v 17. stoletju. V svoji okorni matematični simboliki Egipčani kompliciranih ulomkov sploh ne bi znali zapisati. Ulomke s števcem 1 so pisali tako, da so nad imenovalec postavljali nekakšno ležeče vretenasto znamenje, torej $\overset{\circ}{3} = 1/3$. Drugačnih ulomkov niso znali izražati. Okorno je tudi pisanje števil samih: začrtujejo toliko enakih znamenj, kolikor enot hočejo izraziti, za enice navpične črtice, za desetice kljukice itd. Ta metoda je izvirala iz najstarejše pisave, ki je besedi »pet ljudi« izrazila še s petimi podobami človeka.

Zdi se, da je že poznominojska kultura na Kreti, ko so stali homerski junaki pred Trojo, poznala ta način pisanja števil z navpičnimi in vodoravnimi črticami.

Neokretna matematična pisava je Egipčane ovirala, da niso poenostavljali računskih metod in z metodo tudi svojega matematičnega mišljenja. Prav tako tudi pozneje pri nepreglednih rimskih številkah ni bilo mogoče pričakovati pomembnejšega razvoja računskih operacij, ki bi človeku olajševale in skrajševale delo.

Vprašanje matematične simbolike je zanimivo in obsežno poglavje o tem, kako se je matematično mišljenje v tisočletjih postopoma ekonomiziralo, poenostavljalo in šabloniziralo in prav s tem postajalo sposobno, lotevati se vse težjih in težjih problemov. Leibniz je s svojo novo srečno infinitezimalno simboliko igraje reševal naloge, s katerimi se je genialni Arhimed v starem veku mučil s skoraj ničevim uspehom. Matematik s primitivno pisavo je podoben težaku, ki vse naporno delo opravlja še z golimi rokami, razvita simbolika pa poenostavlja metodo, ki kakor stroj rešuje človeka naporov in ga usposablja za težje in težje naloge. O Descartesu je nekdo dejal, da je matematiko »industrializiral«.

Vsaka nova veja, ki se je zgodovinsko razvila v matematiki, pomeni specializacijo, ki bi s staro pisavo zabredla že ob rojstvu v usodno nepreglednost. Zato so si trigonometrija, vektorska analiza, diferencialna geometrija, tensorski račun, teorija množic itd. ustvarile vsaka svoj lasten način pismenega izražanja. Od egipčanskega Ahmesa do Riemanna in Cantorja v naših dneh je šla matematična pisava skozi silen razvoj, v katerem se odraža razvoj človekove matematične misli same.

Uganka je, zakaj egipčanski matematiki ne povedo, kako so našli rezultate svojih nalog. Danes zgodovinarji splošno menijo, da pravzaprav niso imeli kaj povedati; njihova metoda da je bila eksperimentalna — poskušanje z različnimi rezultati toliko časa, dokler ni preizkus potrdil pravilnosti.

Če se spomnimo zamotanosti egipčanskega matematičnega mišljenja, se mi ne zdi verjetno, da Ahmes res ne bi poznal nobenih posplošenih metod ali formul za reševanje nalog. Morda pa Ahmes le ni hotel vsega povedati, saj mu je matematika »skrivnost«, njegov papirus pa le »uvod v vse skrivnosti«. Tudi za Babilonce vemo, da so vedeli več, kot so zapisali. Tudi Pitagora, ki se je izšolal v Egiptu, kjer je po nekih virih postal celo svečenik, je pozneje v svoji šoli javno predaval le del svoje matematike, medtem ko je njene globlje skrivnosti pod grožnjo kazni, in to celo smrtne, zaupal le svojim najožjim učencem, od katerih so nekoga tudi res ubili, ko je izdal odkritje dodekaedra. Sledove tega cehovskega skrivanja znanja je opaziti tudi pozneje pri Geronimu Cardanu, ki je v svoji knjigi »Ars magna de rebus algebraicis«

poln opravičevanja, ker je izdal zaupano mu skrivnost reševanja kubične enačbe $x^3 + ax + b = 0$. Descartes *odkrito pravi* v nekem svojem delu, da noče pisati vsem razumljivo, ampak tako, da ga bodo razumeli le tisti, ki mu lahko aktivno slede.

(Konec prihodnjič)

Ivo Pirkovič

MED KNJIGAMI

OB SLOVENSKEM IZBORU PESMI S. S. KRANJČEVIĆA

V oktobru 1958 so v Zagrebu proslavili lepše kot kdaj koli prej spomin pesnika Silvija Strahimira Kranjčevića, ki je umrl pred petdesetimi leti. Že v letu njegove smrti (1908) je bil natisnjen v Sarajevu »Spomen — spis S. S. Kranjčeviću prigodom 25-godišnjice njegovog pjesnikovanja«, ob smrti je izšla vrsta spisov in spominov nanj (najpomembnejša je poljska študija Tad. Stan. Grabowskega, Lwów, 1908), njegovo ime in delo je bilo teh petdeset let stalen memento na križišču vseh domačih struj in njihovih sporov. Filozofijo njegove lirike sta med drugimi skušala prikazati Br. Vizner-Livadić in Vlad. Dvorniković. Prelomnico v vrednotenju idejne in posebej še družbene vsebine Kranjčevićeve poezije tvori znani esej Miroslava Krleže; ta poudarja ne samo estetske, marveč tudi idejnonapredne elemente v delu tega pesnika, ki je veljal dotlej za najizrazitejšega hrvatskega pesimista s posebnim »favstovskim in hamletskim problemom«, kakor je napisal Prohaska. Novejša, družboslovno podprta proučevanja Kranjčevićeve poezije so dokončno potrdila to, kar je že leta 1908 pokazalo glasilo bosensko-hercegovskega delavstva »Radnička obrana«, ko je ponatisnilo njegovo pesem »Delavcu«, enega *najmočnejših izrazov solidarnosti* z delavstvom, kar jih sploh najdemo v hrvatski poeziji, in se poklonilo »velikemu pesniku svobode, enakosti in bratstva«. Morda je bil pesnik »Delavcu« več kot samo glasnik duha meščanske revolucije; nekatere njegove pesmi so segale dalje in globlje, čeprav je ostajal, kakor v prozi Emile Zola ali pozneje Romain Rolland, na liniji meščanskega humanizma. Nova proučevanja, posebej še tista, katerih izsledke je priobčil dr. Emil Štampar, so pomaknila v ospredje dotlej dokaj zanemarjene elemente Kranjčevićevega dela: njegovo bolj ali manj zakrito nasprotovanje vladajočemu sistemu v *Bosni in Hercegovini*, njegovo z upornostjo prežeto demokratičnost, njegovo socialno kritiko, njegovo ironijo nasproti odločilnim silam tistega časa, tuji državi in Cerkvi, njegovo vizionarno zagledanost v prihajajočo *zgodovinsko epoho*, ki je *pesnik sam ni doživel*. Nova, z gledišča dialektičnega materializma opravljena analiza družbenih, političnih, verskih in filozofskih sestavin Kranjčevićeve poezije je pojasnila dobršen del njegovega pesimizma, ki se je pokazal predvsem kot odsev družbene stvarnosti, kot izraz pesnikove reakcije na to stvarnost, kot posebna, v simbole, metafore in

RAZGLEDI

MATEMATIČNO MIŠLJENJE V TISOČLETNEM ZRCALU KULTURNEGA RAZVOJA

(Nadaljevanje)

Moderna znanstvena misel se je rodila v Grčiji. Koliko sta k temu prispevali stara minojska in mikenska kultura, danes še ni mogoče reči. Dva tisoč glinastih ploščic, ki jih je Arthur Ewans našel popisane v neznanih pisavah A in B v Minosovi palači na Kreti, so sicer že razvozlali, vsebina pa nam še ni znana.

Že v najstarejši grški preteklosti, v 10., 9. in 8. stoletju pred našim štetjem, obvladuje grško umetnost »geometrični slog«. Ohranil se nam je na tako imenovanih dipilonskih vazah, ki dosežejo velikost do dveh metrov in ki so služile tudi za nagrobne spomenike. Te amfore so namreč Grki krasili izključno z geometrijskimi liki, ravnimi črtami, krogi, trikotniki, meandri, skratka s samimi elementi, ki so jih konstruirali z ravnilom in šestilom. Geometrijska estetika očitno obvladuje tisti čas tudi bronasto plastiko in označuje sploh grško miselnost, ki nikoli ne najde poti iz tega zaprtega sveta idej.

Grki so iskali v geometriji estetiko in v estetiki geometrijo in težili za sintezo obojega. V tako imenovani »geometrični sredini« so odkrili prvi zakon lepote, zlati rez. Tudi harmonijo človeškega telesa so izrazili z geometričnimi razmerji, h katerim se vrača pozneje renesančni umetnik. Pitagora je verjel, da je v zakonih števil in geometričnih odnosov bistvo vesoljne harmonije. Sam jo je odkril v matematičnih zakonih zvočne ubranosti. Antični Grk je pitagorejski človek, ki je v pravilnem geometričnem gibanju nebesnih teles prisluškoval »muziki nebesnih sfer«. Pozni potomec tega rodu je še Kepler, ki s šestilom in ravnilom trdovratno išče harmonijo planetnih poti in jih poskuša ukleniti v geometrično obliko pitagorejskih »kozmičnih teles«.

Pisavo so Grki dobili iz Male Azije. Alef (vol), bet (hiša), gimel (vrata), dalet (kamela) ... so feničanska črkovna abeceda, ki se je razvila iz starejših hieroglifnih podob. Veliki alef A na primer je podoba glave goveda z rogovi, obrnjenimi navzdol. Grki so feničanski pisavi dodali pozneje le še vokale, ki jih Semiti še ne pišejo, in jo tako razvili do sodobne popolnosti.

Od 5. stoletja pred našim štetjem uporabljajo Grki svoje črke tudi za števila: $\alpha' = 1, \beta' = 2, \ldots \iota' = 10, \varkappa' = 20, \ldots \tau' = 300$ itd. Število 321 zapišejo seštevalno $\tau\varkappa\alpha$, število 301 pa $\tau\alpha$. Grška števila torej še ne poznajo tega, kar imenujemo danes mestno vrednost. Grki zato ničle ne potrebujejo in je tudi ves duh njihovega matematičnega mišljenja tak, da števila nič nikoli ne odkrijejo. Grški matematik namreč niti v aritmetiki nikoli ne premaga meja pomožne nazorne geometrične podobe, ki ne potrebuje števila nič. Aritmetika mu ni šla nikoli dlje od geometrije, od tega, kar je lahko videl s človeškim očesom.

Feničani so bili Grkom most v babilonski in asirski kulturni svet v Mezopotamiji, na drugi strani pa so ti »Britanci starega veka« kot pomorski trgovci poznali dobro tudi Egipt. Tales iz Mileta, o katerem trdi Herodot, da je bil Feničan, in nekoliko mlajši Pitagora, za katerega ni dvoma, da je bil feničanske krvi, sta se v Egiptu učila matematike. Talesu (639—548) pa so se egipčanski matematiki sami čudili, ko jim je iz dolžine sence spretno izračunal višino piramide. Izmeril je le, kolikokrat je neka poljubna navpična palica daljša od svoje sence, in je vedel, da je prav tolikokrat višja tudi piramida od svoje sence. V Egiptu se je Tales, o katerem pravijo, da je izračunal celo že sončni mrk, tako zavzel za čisto vedo matematike, da je v domovini nato opustil trgovino in politiko in ustanovil znamenito j o n s k o š o l o. V njej je egipčanska *izkustvena in vseskozi praktična geometrija zorela v strogo* znanost. Talesov je izrek o skladnosti trikotnikov z enako stranico in enakima kotoma ob tej stranici. S tem principom je na obali računal oddaljenost ladij na morju. Tales je vedel, da merijo koti v trikotniku polovico polnega kota. Iz spoznanja, da sta kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika enaka, je Tales dokazal, da je v krogu obodni kot nad premerom pravi.

Iz Talesove jonske šole je izšel veliki antični mislec in matematik Pitagora (569—496), Feničan s Samosa, ki je bil najbrž učenec Talesovega učenca Anaksimandra. Tudi Pitagora je, kakor smo že čuli, študiral arhaično kulturo v Egiptu, prišel baje v babilonsko ujetništvo in obiskal celo daljno Indijo. Domov se je vrnil oprtan s tovorom praktičnih računskih načinov in metod. Iz tega neurejenega kaosa in iz starih spoznanj jonske šole se je rodila čista znanost geometrije v modernem duhu, ki prvič v zgodovini človeške misli išče *svojim spoznanjem tudi dokaza. Prvič v kulturni zgodovini se človek ne zadovolji več samo s tem, da mu matematika zvesto služi v zemljemerstvu, gradbeništvu in praktičnih potrebah koledarja, ampak začuti potrebo tudi po čistem spoznanju zavoljo spoznanja samega.* Prvič v zgodovini išče človek znanstveno resnico in dokaz zanjo, kar je Egmont Colerus imenoval »grški čudež« in »rojstvo zahodnega sveta«.

Pitagora je zapustil svoj rodni otok in v cvetoči dorski koloniji v južnoitalijanskem Krotonu ustanovil svojo šolo. Učenci so se morali odreči vsaki osebni lastnini in se zaobljubiti v pokorščini, zmernosti, hladnokrvnosti in nravstveni čistosti. Pitagora jih je posebej posvečal v matematične skrivnosti, ki jih v svoji javni šoli ni predaval. Za simbol so si privzeli besedo »hygieia« na peterorogelni zvezdi, katere kraki dele drug drugega po osnovnem zakonu lepega, po zlatem rezu. To je pitagorejska sinteza matematične estetike in nravstvene ideje.

Pitagorejci so v južni Italiji ustanavljali nove šole, ljudstvo pa jih je sovražilo in jih v pogromih uničevalo.

Pitagori je bilo bistvo vseh stvari število in tudi vesoljstvo samo mu je bilo harmoničen sistem števil in njih razmerij, kakor nam poroča Aristotel v svoji »Metafiziki«. Hegel Pitagori zamerja, da je odrekel svetu materialnost. Hegel je šel z očitkom morda predaleč.

Pitagora je proučeval zakone pojočih strun in našel, da je harmonija njihovih akordov utemeljena v geometriji strun samih, v številih in razmerjih števil. Tedaj je zaslutil, da obvladujejo vso prirodo zakoni, ki se dajo izraziti s števili in njihovimi razmerji, ali v modernem jeziku, z matematičnimi funkcijami, ki res ne izražajo ničesar drugega kot odnose števil. Od te ideje lepote akordov pa do misli, da so materialne strune same matematična števila, pa se mi zdi le preveč samovoljen korak, da bi mogli odgovornost zanj naprtiti Pitagori.

Pitagorova slutnja vesoljne matematične zakonitosti vsega dogajanja v prirodi je prehitela evropskega človeka za tisoč let. Njen veliki pomen je v tem, da prvič oporeka idealističnemu animizmu, ki veruje, da vlada prirodo samovolja bogov, ki tiče povsod za prirodnimi pojavi. Pitagora je zaslutil tisto *deterministično vzročnost v svetu, ki jo utemelji šele Newtonova mehanika.*

Čuli smo že, kako je Pitagora z ostroumno analizo zadel na iracionalne količine, pa jih ni spoznal za novo vrsto števil. Pitagorova je — zopet za tisoč let prezgodnja — tudi kopernikanska misel, da Zemlja kroži okoli neznanega centralnega ognja.

Pitagora je babilonsko »pitagorejsko trojico« števil, 3, 4, 5, ki služijo za konstrukcijo pravokotnega trikotnika, našel že v Egiptu. Spoznal in dokazal pa je, da gre le za poseben primer neke splošne zakonitosti, ki velja vobče za pravokotne trikotnike. Matematiki je dal svoj znameniti »Pitagorov stavek«, ki je v našem času še enkrat posplošil svojo veljavnost in v moderni »diferencialni geometriji« postal osnovno orodje proučevanja »lokalne geometrije« neevklidičnih prostorov. Kakor da bi se zavedal ogromne pomembnosti svojega odkritja, je Pitagora iz neugnane radosti nad zmago svojega duha žrtvoval bogovom sto volov in je vse ljudstvo z njim slavilo veliko pridobitev v geometriji.

Zdi se, da je postala geometrija res stvar vsega grškega naroda. Delfijsko proročišče je Delijcem sporočilo, da bodo potolažili jezo bogov le tedaj, če bodo v templju na Delosu podvojili oltar, ki je imel obliko kocke. Naloga je bila: koliko naj meri rob nove kocke, da bo njena prostornina dvakrat večja od volumena prvotne kocke. Naloga je bila s sredstvi grškega geometra, oboroženega le s šestilom in ravnilom, nerešljiva — aritmetično Grki nalog še niso reševali —, ker je problem kubične narave. Šele ko je Arhitas, ki je sto let po Pitagori vodil pitagorejsko šolo, iznašel »šestila« tudi za višje vrste krivulj, je rešil tudi delfijsko nalogo.

Tako rekoč vsegrški je postal tudi geometrijski problem delitve kota na tri enake dele in vprašanje kvadrature kroga, h kateremu se vrača matematik skozi vsa stoletja do naših dni.

Presenetljivo: jezo bogov bodo potolažili Grki z rešitvijo težke geometrične naloge. Pitagora ni potemtakem zmetal za prazen nič telesne in moralne čistosti z matematiko v isto vrečo. Spoznanje je božanska kopel, v kateri se pitagorejski človek moralno očiščuje. Zato danes le še težko razumemo nezaslišano otroško veselje grškega človeka, grških množic, nad spoznanjem »čiste resnice«, vredne stotih volov in domala malikovanja v kultu pitagorejskih misterijev. Znanost sama moralno dviga pitagorejskega spoznavalca do asketskega samoodpovedovanja. Toda velika je razlika med grškim in kakšnim poznejšim sholastičnim iskalcem resnice: Grk jo hoče videti s svojimi očmi in otipati s prsti: Grk je nazoren geometer in ne abstrakten aritmetik, kot je orientalec s svojo meditacijo. Zato tudi ni potreboval pitagorejski človek religije, v kateri bi mu duhovnik posredoval dogme božjega razodetja. Grški Olimp, stvaritev čiste poezije, ni imel z vero in moralo nobenega opravka.

Platon, ki je tudi potoval v Egipt, je napisal nad vrata svoje slovite atenske Akademije, da je njegova šola zaprta vsem, ki ne poznajo geometrije. Ta veda se je od Ahmesove praktične veščine v Egiptu pa do časov atenske Akademije že tako sprevrgla v čisto vedo, da je po Plutarhovem zatrjevanju Platon matematikoma Arhitasu in Eudoksosu ogorčeno očital, da sta oskrunila dostojanstvo matematike, ko sta jo uporabila v mehaniki in jo tako ponižala od netelesnega in intelektualnega na telesno. Saj so Grki že navadno računanje šteli za nečastno telesno delo, ki se pravemu matematiku-filozofu ne spodobi in ki ga zato prepušča posebnim računskim mojstrom, tako imenovanim »logistikom«.

Ni dvoma, da je nauk o čistih idejah zrastel Platonu v veliki meri prav iz geometrije; saj ni nikjer tolikega nasprotja med idealnim in materialnim kot prav v odnosu geometrijskih abstrakcij do grobega, snovnega sveta.

Grški duhovi so se že zgodaj cepili v protislovne tokove. Sredi 6. stoletja pred našim štetjem je v južnoitalijanskem mestu Elea ustanovil Ksenofanes tako imenovano eleatsko šolo. Ta se je za Zenona znova vračala k starim vprašanjem antilogike matematične neskončnosti, ki se odpira tudi v vprašanju neskončne deljivosti in v antinomijah mirovanja in gibanja. V nasprotju s Heraklitovim dialektično-dinamičnim pojmovanjem sveta je eleatska podoba vesoljstva statična: za spremenljivim zunanjim videzom ji tiči nepremakljiva večna resnica, ki jo moramo iskati z razumom, ne z očmi. To so sholastiki starega veka, če niso obupanci in zasmehovalci človeškega razuma. Ta eleatska misel je močno navdihovala Platonov idealizem, na drugi strani pa je čutiti njen vpliv tudi pri velikem antičnem geometru iz tako imenovane prve aleksandrinske šole (ca 300—170 pr. n. š.), Platonovem učencu Evklidu. Temu »očetu geometrije« so geometrijski liki sestavi mirujočih točk, ne morda tvorbe gibajočih se geometrijskih elementov, točk in premic-tvornic. Evklid je v svojih 13 knjigah »Elementov«, ki so jim pozneje drugi dodali še dve, položil geometriji solidne temelje, katerim ni vedel človek dve tisočletji kaj oporekati ali jim kaj bistveno novega dodati. Evklidovo delo je doživelo nad 1500 izdaj, kar nima primere v zgodovini literature. K Evklidu se bomo morali vedno znova vračati. Moderne »neevklidične« geometrije mu niso in mu ne bodo nikoli zatemnile velikega imena.

Iz prve aleksandrinske šole je tudi največji mehanik starega veka. Arhimed, ki je s svojimi bistroumnimi tehničnimi vojnimi stroji dve leti branil Sirakuze pred napadajočimi Rimljani in jim potopil brodovje, ki ga mislijo arheologi sedaj dvigniti z morskega dna. Ta antiplatonični in v bistvu skoraj antigrški človek pa je bil tudi mojster »limitnega računa«, ki najde svojo popolno rešitev šele v Newtonovi in Leibnizovi metodi integriranja. Posebej je vreden besede njegov matematični aksiom, ki je dobil po njem ime in ki pravi, da je poljubno razdajo AB vselej mogoče prekositi, če le poljubno manjšo razdaljo CD pomnožimo z dovolj velikim številom, ali manj učeno: nobena razdalja ni za človeka, ki jo meri, največja. Arhimedov aksiom ruši vse meje vesoljstva, oporeka tudi arhaični sumersko-babilonski predstavi omejenega kroglastega vsemirja. Neskončnost prostora pa je po svoje utemeljila pravzaprav že Evklidova geometrija, ki je bila, po Einsteinovih besedah, tedaj še prirodoslovje, to je, nauk o resničnem in ne le o nekem možnem, namišljenem matematičnem prostoru. Svet pa še ni bil zrel za to veliko idejo in je zato Ptolemej iz druge aleksandrinske šole lahko utrdil babilonsko nebesno sfero za dolga stoletja še z novimi kristalnimi lupinami. Le-te očitno niso iz nobenega antičnega elementa — zemlje, vode, zraka ali ognja — in morajo biti tedaj iz neke neznane, nepokvarljive pete prvine, kvintesence, na katere mogočni obok je postavil srednjeveški človek svoja nebesa z vso njihovo baročno pozlato.

Grški matematiki so gojili samo geometrijo. Aritmetičnih problemov so se lotevali le, če so iznašli zanje geometrično ponazoritev. Tudi enačbe prve in druge stopnje so reševali geometrično. V tem se odraža grška miselnost, ki je povsem drugačna od, postavim, indijske ali moderne. Grk hoče videti resnico v nazorni geometrični podobi; indijski matematik se poglablja tudi v nenazorno logiko abstraktnega računanja. Zato prodre Grk do dna samo v bistvo realnega prostora, nikoli pa ne odkrije ničesar, kar sega čez meje nazorne geometrične podobe. Zato ostaja pri Grkih tudi pojem števila nujno sila reven in nerazvit, saj se ne dokoplje niti do niča, kaj še do negativnih in imaginarnih števil, recimo, do imaginarnega prostora, v katerem se nam šele docela pojasnijo lastnosti tudi realnega prostora.

Zdi se, da so Grki verjeli, da ima vse, kar biva, nekje meje človeške razumnosti, čez katere naj človek ne sili. Tistega predrzneža, ki je odkril iracionalne matematične količine, so po nekem zapisu na robu Evklidovih »Elementov« iz aleksandrinske dobe, bogovi kaznovali s smrtjo v brodolomu. Neizrekljivo in neupodobljivo naj ostane za vselej skrito. Odkrivanje iracionalnih števil bi bila prometejska tatvina olimpijskih skrivnosti, za kar zasluži predrzni tat, da mu ujede vse življenje kljujejo iz telesa drobovje ali da plača z življenjem. Morda nam bo to pojasnilo obotavljanje Pitagore, ko je prišel na sled iracionalnim količinam, da se ni upal jasno izreči resnice, ki jo je držal že tako rekoč v rokah.

Druga aleksandrinska šola (2.—4. stoletje) je konec tretjega stoletja dala matematika Diofanta, ki rešuje enačbe, linearne, kvadratične in eno obliko kubičnih, že na moderen aritmetičen način in nič več geometrično. Diofantos piše prvi med Grki znamenje za neznanko — kar pa so pri reševanju svojih enačb prve stopnje poznali že Egipčani; z zamotanimi simboli izraža konstante, recipročne vrednosti in potence neznanke. Odštevanje in enačaj naznačuje s črkami, medtem ko znamenja za seštevanje še nima. Pred Diofantom algebra še ni poznala nobenih simboličnih znamenj in okrajšav; vse je pisala z navadnimi, polno izpisanimi besedami. Diofantos je iznašel prvo, čeprav še močno okorno simboliko in uporabljal grške številke. To je bil prvi plah korak k pravi algebri. Diofantos si je po pravici zaslužil ime »edinega pravega algebraika starega veka«.

Z aleksandrinsko kulturo je šel stari antični svet v zaton. Nestrpno goreči duh vstajajočega Pavlovega krščanstva je videl v antiki le pogansko zmoto, vredno uničenja. V 5. ali 6. stoletju se je začela žaloigra velike aleksandrinske šole in njene knjižnice, ki je v 600.000 zvezkih zbrala vse, kar je dotlej ustvaril človeški duh. Uničevanje je dovršil mohamedanski fanatizem. Leta 641 je Omarjev osvajalec Amru ben Abas razdelil silne tovore starih papirusov baje štirim tisočem javnih kopališč, ki so z neprecenljivimi zakladi kurila pol leta svoje kotle. Drama, ki jo je ponovil poznejše krščanski misijonar z indijansko kulturo.

Po propadu druge aleksandrinske šole so se njeni zadnji učenci razbežali in deloma zatekli v Bizanc. Vzhodni Rim je postal jalov čuvar antične kulturne tradicije in to tradicijo skozi osem stoletij ohranil, ne da bi ji dodal kaj iz svojega. V tej slepi ulici razvoja je tičala v Bizancu in se pridila tudi grška matematika vse do vdora Turkov pod konec srednjega veka. Tedaj so bizantinski matematiki bežali zopet na Zahod in prinesli s seboj Evropi tudi svojo ničvredno, v mračni misticizem izrojeno matematiko čarodejnih amuletov in magičnih kvadratov, ki jih je za neke bolezni predpisoval še Paracelsus.

Mistika števil je prijala duhu srednjeveškega gotskega krščanstva. Omenim naj kult »popolnih števil«, od katerih so jih poznali do prvega stoletja štiri, namreč 6, 28, 496 in 8128; prav zadnji čas pa jih je izračunal v Los Angelesu računski robot SWAC s svojimi elektronskimi možgani, poleg 12 že znanih, še 5 nadaljnjih novih, ki jih človeški možgani sami praktično ne bi nikoli zmogli izračunati; saj so spričo njih — zadnje je 2^{2280} $(2^{2281}-1)$ — celo astronomska števila mikroskopsko majhna.[8]

Kult popolnega števila 6 izvira morda še iz sumersko akadijskega praveka. Hebrejci so menili, da je bog ustvaril svet rajši v šestih dneh kot morda v enem, prav zavoljo tega, ker je šest popolnejše število od ene. Rimljani so število 6 pripisovali Veneri, ker je produkt lihega »moškega« števila 3 in sodega »ženskega« števila 2. Krščanska teologija je učila, da je drugi izvor človeka, po vesoljnem potopu, manj popoln kot prvi, iz Adama in Eve, ker je število Noetovih rešencev 8 manj popolno. V 12. stoletju so bogoslovci priporočali študij matematike popolnih števil »za rešitev duš«. To so bili divji, izrojeni poganjki aritmetike, ki jih je požgal šele plamen prosvetljenstva. Rodni les na drevesu matematike se je ohranil čisto drugje.

Med Rimljani, ki so bili le »oboroženi juristi«, grške duhovne vrednote niso našle nobenega pravega razumevanja. Če včasih pravimo, da so Babilonci in Grki ustvarjali, Asirci in Rimljani pa ohranjali njihovo tradicijo, ne moremo tega trditi pri Rimljanih tudi za matematiko. Nekaj praktičnega zemljemerstva je bilo pri njih vse. O matematični znanosti ni več sledu. Že same rimske številke skoraj niso manj okorne od starih egipčanskih. Da bi se iz njih utegnila razviti kaka matematika, ni bilo upanja.

Razvoj pa je kakor neukrotljiva reka: če se zagati v eni smeri, si utarejo tokovi pot drugje. Na južnem obzorju Sredozemlja je vstajalo novo ljudstvo z novim kulturnim poslanstvom.

Že sto let po Mohamedovi smrti so Arabci na razvalinah staroveškega sveta ustvarili svoj mogočni imperij od kitajskih meja do obrežij Atlantika. Tedaj je to mlado ljudstvo nenadoma začutilo opoj grško-aleksandrinske antike in začelo strastno zbirati stare raztepene duhovne zaklade, kakor v davnini asirski Asurbanipal, ko so ga zamikale akadijsko-babilonske starine. Arabski prepisovalci starih papirusov so potovali v Bizanc in daljno Indijo. Iz Indije so prinesli na Zahod tudi znamenja za števila. Knjižničar kalifa Almamuna, Mohamed Ibn Musa, z drugim imenom Alhvarizmi, je v prvi polovici 9. stoletja proučil indijsko matematično znanje in ga zlil s starim grškim v pomembno matematično delo »Al džabr«, ki je v nekoliko spremenjeni obliki *algebra* dalo ime novi matematični veji. Alhvarizmi je z novimi indijskimi

---

[8] »Popolna števila« imenujemo števila, ki so enaka vsoti vseh svojih divizorjev, razen samega sebe. Tako so divizorji števila 6, števila 1, 2 in 3, ki dajo za vsoto res $1 + 2 + 3 = 6$; ali drugo popolno število $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. — Že Evklid je domneval, da so popolna števila tista, ki jih je mogoče razstaviti na produkt 2^{n-1} $(2^n - 1)$, če je pri tem $(2^n - 1)$ prafaktor. Formula je čisto empirična in je treba njeno veljavnost za vsak primer posebej dokazati. Pred kakimi 20 leti je D. H. Lehner računal leto dni po dve uri na dan samo število $(2^{257} - 1)$ — do tega števila je prišel pri iskanju popolnih števil pred Lehnerjem že Mersenne —, da je dokazal, da ni prafaktor, kar je 30. januarja 1952 elektronski robot SWAC v Los Angelesu ponovil v 48 sekundah in potrdil Lehnerjev rezultat. Potem je SWAC z računanjem takoj nadaljeval in v nekaj urah preračunal 42 števil, od katerih je imelo najmanjše več kot 80 številk. Tedaj je zadel na novo popolno število, trinajsto, in čez dve uri že na štirinajsto. Junija je SWAC odkril petnajsto popolno število in oktobra sedemnajsto, čigar prafaktor je že $(2^{2281} - 1)$. (Primerjaj: Constance Reid, »Perfect Numbers«, Scient. Am., marec 1953.)

številkami, ki so prvič povsem prilagojene dekadičnemu sistemu, utrl novo pot računskim načinom. Miniti pa je moralo še dve sto let, da so nove, »arabske« številke izbojevale v Evropi trd boj s starimi, okostenelimi rimskimi. Umetnosti navadnega računanja, zlasti množenja in deljenja, ki so ju prej predavali le na visokih šolah, se lahko uči odslej tudi otrok.

Tudi ime Alhvarizmi živi še danes v imenu *algoritem*, ki je nastalo iz starejšega alhorizem.

Vrsta prevodov iz arabščine v 12. stoletju pomeni zgodnjo renesanso pozabljene grške matematične vede, zlasti geometrije. Velikim odkritjem in iznajdbam, ki konec srednjega in v začetku novega veka revolucionirajo človekovo ekonomiko, sledi tudi mogočen napredek duhovnih ved, novo odkritje prirode (Galileo Galilei, novopitagorejec Johannes Keppler, Isaac Newton) in povratek k antični življenjski radosti, ki je bila sholastičnemu človeku le vir greha. Renesansa je bila velika duhovna osvoboditev mračnjaškega človeka, ki ga v njegovem elementarnem zagonu sedaj ne ustavi več ne duhovno strahovanje, ne ječe ne grmade (Nikolaj Kopernik, Tommaso Campanella, Giordano Bruno). Albrecht Dührer išče bistvo telesne lepote po antičnih vzorih zopet v harmoniji geometričnih odnosov in odkrije tudi geometrijo umetnosti, perspektivo ali projektivno geometrijo, kot jo navadno imenujemo v matematiki. Leonardo da Vinci je že mojster v perspektivi in njegovi osnutki kažejo tudi študij geometrije estetskih proporcev.

Diofantovo delo, ki je nekoč osvobodilo algebro stare grške tlake geometriji, je v 16. stoletju dokončal Vieta. Ta »genialni aritmetik in algebraik« je uvedel končno povsem moderno simboliko, ki je za razvoj matematike prav tolikega pomena kot nova dognanja. S pisanjem črk za števila je Vieta prvi začel uporabljati *splošna števila*, ki so zopet olajšala algebraiku delo, mu takorekoč znova sprostila eno roko za še težje naloge.

Sedaj je bil čas zrel za Descartesa, ki je s svojo »Geometrijo« leta 1637 uvedel tako imenovani *Kartezijev* koordinatni sistem. Z njim je ustvaril nov način geometričnega upodabljanja matematičnih funkcij. Descartes je matematiko zopet geometriziral. Pobud je našel pri starem Apoloniusu iz prve aleksandrinske šole in pri Nikoli v. Oresme. To pa ni bil morda le korak od Diofanta zopet nazaj v grške čase, ki so menili, da je geometrija vse, algebra pa le njena ponižna dekla. Razvoj se ne vrti v krogu, kvečjemu po spirali.

Descartes je spoznal, da sta algebra in aritmetika primarni, važnejši in obsežnejši od geometrije. Aritmetika in geometrija sta svoji antični vlogi iz Platonovih in Evklidovih časov v Descartesovi dobi zamenjali. Od tedaj prodira spoznanje, da proučuje geometrija s šestilom in ravnilom le del obsežnega področja kompleksnega prostora. Šestilo in ravnilo sta primerno orožje navadne, čutne nazornosti. Na mejah realnega prostora, kjer nas ta nazornost izda, pa se oborožimo z novo, logično nazornostjo in z zaupanjem v varni kažipot moderne simbolike.

Za Descartesovo analitiko je prišlo v matematiki hitro še eno mogočno odkritje, *infinitezimalni račun*. Le-ta je okorno analitiko v novem času prerodil v tako imenovano *diferencialno geometrijo*, ki nam pomeni prav tako teleskop v silne kozmične razsežnosti kot tudi mikroskop za proučevanje drobne, »lokalne« geometrične strukture prostora. Diferencialna geometrija nam je prinesla popolno rešitev vprašanja matematičnega prostora.

(Konec prihodnjič) Ivo Pirkovič

internacionalizacijo pristanišča. Kakor po prvi svetovni vojni so se italijanski uradni krogi sklicevali tudi zdaj, in to je bil eden izmed njihovih osrednjih argumentov, na nevarnost levičarskega oziroma desničarskega ekstremizma, ki bi nastala v primeru, da njihovi razmejitveni predlogi ne bi bili sprejeti. Parri, ki je še konec leta 1944, kakor piše Tarchiani (op. cit., str. 52), »menil, da bo Italija srečna, če dobi mejo na Soči,« je na tiskovni konferenci (18. avgusta 1945) kot predsednik vlade izjavil, »da bi sleherna ozemeljska amputacija onemogočila italijanski notranji prerod«. Povezovanje odprtih mednarodnih vprašanj, zlasti tržaškega, z notranjimi razmerami je bilo v vsem obdobju reševanja tržaškega vprašanja zelo pogostokrat uporabljena metoda italijanske diplomacije.

(Se nadaljuje)

Janko Jeri

RAZGLEDI

MATEMATIČNO MIŠLJENJE V TISOČLETNEM ZRCALU KULTURNEGA RAZVOJA

(Konec)

Rad bi sedaj pokazal globoke idejne korenine, iz katerih je zrastel naš atomski vek. V sebi skrivajo nekaj antilogičnega, nekaj, česar se je zdrav razum s svojo aristotelsko logiko več kot dvajset stoletij strašil in proti čemur se je od grških eleatov pa preko sholastičnih mistikov do Newtona, Leibniza, Eulerja, Lagrangea in antirelativistov v našem stoletju obupno boril. Ali je zares mogoče, da ima krogla kdaj tudi več središč? Ali je mogoče, da kdaj med dvema razmaknjenima točkama ni nobene razdalje? Ali je mogoče, da bi bil kdaj del enak celoti? In vendar sloni na prav taki presenetljivi logiki tudi eksplozija atomske in vodikove bombe — strahoten kriterij resnice. Pot, ki jo hočem ubrati, pa bo pojem števila, njegova rast od najskromnejšega njegovega prirodnega zarodka pa do globokoumnih pojmov sodobne »teorije množic«.

Študij nastanka in razvoja človeške govorice dokazuje, da so *naravna števila 1, 2, 3 . . .* najstarejše človekove besede. Ne vemo, do koliko je znal šteti australopithecus, ki je prvi netil ogenj in prvi spoznal, da je kamen v pesti močnejše orožje od gole roke; ne poznamo jamske matematike krapinskega človeka, vendar ni dvoma, da so že najpreprostejši družbeni odnosi zahtevali,

---

ne verjamejo v trdnost svoje države. In to,« je zagotavljal Sforza, »nas bo utrjevalo v nalogi, ki si jo lahko jutri odkrito zadamo: da vas razbijemo. Ali veste, koliko milijonov je naš vrhovni štab porabil na Hrvatskem proti vaši enotnosti? Toliko in toliko. Toda mi v vladi smo preprečili, da bi to nadaljeval. Zdaj pa bomo mi v vladi povzeli vse niti tega dela in bomo v to svrho uporabili milijone, kolikor bo pač treba. In v šestih mesecih boste videli, kaj bomo umeli storiti. Šele takrat vas bodo izžvižgali. Trumbić je imel vse solzne oči in se kasno ponoči vdal.«

da je človek razlikoval in določal količine nabranih plodov in pozneje, v mlajši kameni dobi, tudi čred in pridelkov.

Matematik ima navado pokazati logično rast števila, tu pa bi se odločil rajši za zanimivejšo zgodovinsko. Le-ta je povsem drugačna, saj kaže obenem rast človekovega duha in mišljenja skozi stoletja.

Egipčani so poleg naravnih števil iznašli samo še najpreprostejše *ulomke*. To označuje skromne praktične potrebe tega prastarega ljudstva, ki za čisto teorijo, za znanstveno misel ni imelo še nobenega razumevanja.

Vprašanje, katero število naj pomnožimo samo s seboj, da dobimo, recimo, 2 ali 3, je vodilo do odkritja tako imenovanih *iracionalnih števil* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$..., ki so jih poznali že Babilonci. Arheologi so našli v razvalinah starih mest v Mezopotamiji žgane glinaste ploščice s klinopisnimi tabelami izračunanih kvadratnih in kubičnih korenov.

Znova je iracionalnim številom prišel na sled grški filozof Pitagora, ko je razmišljal o odnosu stranice in diagonale v kvadratu. Če predstavlja stranica neko celo število ali ulomek, je Pitagora dokazal, da ne izraža diagonale nobeno celo niti ulomljeno število. Spričo tega odkritja je antični genij ostrmel, ni pa imel poguma, da bi priznal odkrito količino za novo vrsto števil. To je bilo zanj usodno; saj je učil, da je vse, kar biva, število in odnos števil, diagonala pa je stvar, ki očitno ni število. Mogoče si je veliki mislec in učitelj prihranil to uganko za skrivna predavanja svojim najožjim učencem, o čemer pa ne vemo nič.

Šele učen Arabec Alkarhi v 10. stoletju spozna korene za novo vrsto števil, Indijec Bhaskara pa jih v 12. stoletju že spretno izračunava.

Naravna števila se začno z eno. Da je tudi nič število, so odkrili Indijci in z njim računali kot s pravim številom že v 3. ali 4. stoletju n. š. Imenovali so ga »sunga«, to je »prazno« (moderna teorija množic se vrača k pojmu »prazne množice«), kar so Arabci prevedli z »as sifr«, od koder izvira francoski »zero« in nemški »Ziffer«. Tudi znamenje za število nič, ničlo, so dobili od Indijcev na eni strani Kitajci, na drugi pa Arabci in po njih Evropa.

Zahod sprejme število nič šele v 12. stoletju od Arabcev. V nemških računicah se pojavi prvič celo komaj štiri stoletja pozneje. Ta odpor je antična dediščina, odpor do vsake abstrakcije. Grk je vseskozi priroden človek, ki mu pomeni število vedno nekaj, nič pa je zanikanje vsake količine. Vrhu tega je nič enfant terrible med števili, čudak, ki se ne pokorava vedno navadnim pravilom računanja, tako da so morali matematiki pred njim vedno svariti. Lietzmann je leta 1930 napisal posebno študijo »Pozor pred ničem!«

Tudi *negativna števila* so najbrž stvaritev indijskega kontemplativnega duha. Grški človek, ki je vedno mislil geometrično nazorno, jim prav zato nikoli ni prišel na sled. Zahodni človek je to vrsto števil odkril znova šele pred renesanso, ko je že znal števila posploševati s črkami in s takimi *splošnimi števili* tudi računati. Do odkritja negativnih števil ga je vodilo reševanje enačb, ki so od antike pa do novega veka vselej živo zanimale človeka.

Kakor svoj čas Pitagora pred iracionalnimi števili, je tudi Evropa pred prikaznijo negativnih osupla ostrmela in se dolgo ni mogla sprijazniti z mislijo, da ima opraviti s pravimi števili. Eden prvih logaritmikov, Michael Stifel iz Lutrove družbe, jih je imenoval »absurdna števila«. Bistroumni

Gerolamo Cardano, ki je v renesansi napisal 131 knjig in zapustil 111 rokopisov — pero so mu izpulili iz rok šele, ko se je znašel v ječi protireformacijske inkvizicije — je pri reševanju kubičnih enačb prvič dopustil tudi negativne rezultate. Imenoval jih je »neprava« ali »nepristna števila«. Matematiki so se vse do konca 18. stoletja trudili, da bi vtihotapljeno strašilo negativnih števil iz matematike izrinili in jo naredili zopet »razumno«.

Račun, ki ni dal nobenega rezultata iz vrst znanih števil, so stari imenovali »casus irreducibilis«. Šele polagoma in s težavo se je uveljavilo mišljenje, da mora vsak račun dati svoj rezultat. Vsak casus irreducibilis je napovedoval torej odkritje nove vrste števil. Tak primer je bila tudi naloga: katero število, pomnoženo samo s seboj, da za rezultat negativno število, recimo — 1 ali — 4? To je bila lahko zopet le neka čisto nova vrsta števil, katerih enoto $\sqrt{-1}$ so pisali s črko i. Imenovali so jih *imaginarna števila*. Na primer 15 i pomeni 15 imaginarnih enot.

Številu $\sqrt{-1}$ so se matematiki ves srednji vek previdno izogibali in ga imeli za prazen simbol brez vsakega smisla. Šele sodobnik našega Trubarja, že omenjeni milanski fizik, matematik, astrolog in filozof Cardano, ki ga je kockarska strast privedla tudi k pionirskemu proučevanju matematike kockanja, k teoriji matematične verjetnosti (Liber de Ludu Aleae), je leta 1545 v svojem znamenitem delu »Ars magna de rebus algebraicis« prvič z $\sqrt{-1}$ računal kot s smiselno matematično količino. Nova števila je imenoval »quantitates sophisticae«. Cardano je bil pionir, ki je daleč prekosil svoj čas.

Nezaupljivi matematiki so nova Cardanova števila označevali za »nemogoča« in »himerična«. Veliki baročni mislec Leibniz je še leta 1702 o njih zatrjeval, da so »nežna in čudovita umetnija božanskega duha, kakor dvoživke med bitjem in nebitjem«. V imenu »imaginaren« se je ohranilo staro prepričanje, da ne gre za prave količine, ampak le za nekakšne prikazni resničnih števil, za nekaj, kar je po Leibnizu med bitjem in nebitjem.

Globok pomen imaginarnih števil bomo spoznali šele, ko bo beseda o moderni matematiki in prirodoslovju. Saj nam šele ona pokažejo pot k odkrivanju pravega bistva prostora v najširšem pomenu in tudi k razumevanju kozmosa, v katerega je usoda uklenila naše bitje.

Z imaginarnimi količinami naš sestav števil še ni zaključen. Zadenemo še vedno na casus irreducibilis, ki ne daje za rezultat nobenega že znanih nam števil. Mislim predvsem deljenje z nič, postavim $5 : 0 = ?$ Še večja uganka je bilo človeku skozi stoletja deljenje niča z ničem, $0 : 0 = ?$ So mar to prazna znamenja brez vsakega pomena?

V svoji znameniti *teoriji množic*, ki je po dr. E Kamkeju »ena najgenialnejših stvaritev človeškega duha«, je Georg Cantor (1845—1918 pojem števila nadomestil s splošnejšim pojmom *množice*. Govorimo o množici prebivalcev mesta, o množici lihih števil, o množici geometrijskih točk na dani črti... Prebivalce, liha števila, točke imenujemo v tem primeru elemente množic.

Drug Cantorjev pojem je *ekvivalentnost* množic. Dve množici imenujemo ekvivalentni, če lahko elemente prve množice tako sparimo z elementi druge množice, da ne ostane noben element ne tu ne tam brez para. V preprostih primerih je ekvivalentnost navadna matematična enakost, v bolj zamotanih primerih pa dobi širši pomen.

Ekvivalentnim množicam pripisuje Cantor isto *kardinalno število*. Na prvi pogled lahko rečemo, da so Cantorjeva kardinalna isto, kar naša naravna števila 1, 2, 3... Šele pozneje se nam bo sestav kardinalnih števil razširil.

Med raznimi množicami imamo tudi množico, recimo, *vseh* naravnih števil. Da ta množica eksistira, ni dvoma. Katero kardinalno število ji pripisujemo? Ali drugače: koliko je vseh naravnih števil? Lahko bi rekli, da jih je *neskončno veliko*. Cantor je imenoval to kardinalno število *alef 0*.

Z uvedbo matematične neskončnosti smo uzakonili protislovje. Med naravnimi števili 1, 2, 3... vemo, da ni nikjer največjega, to je števila, ki ga ne bi mogli še poljubno povečati; z matematično neskončnostjo, Cantorjevim alefom 0, pa se pojavi število, ki je večje od vseh naravnih, v tem smislu torej največje število. Tajiti ga ne moremo, ker ne moremo zanikati množice vseh naravnih števil.

Iz teh spoznanj slede zaključki, ki so za aristotelsko logiko navadne »zdrave« pameti uničujoči. Če je matematična neskončnost največje število, tega števila pač ne moremo še povečati. Prištejmo neskončnosti ali odštejmo od nje pet enot, pa bo še vedno prav tolikšna, kot je bila prej. Alef 0 je tedaj število, ki je neobčutno za prištevanje in odštevanje. Klasični razum se temu upira, zato je aritmetiko matematične neskončnosti imenoval Egmont Colerus po pravici *metalogiko*.

Množenje je le krajši način seštevanja. Cantor je dokazal, da je matematična neskončnost neobčutna tudi za množenje in deljenje. Trikratna neskončnost *je zopet samo enkratna in obratno: tretjina* kardinalnega števila alef 0 je zopet celo kardinalno število alef 0. V jeziku Cantorjeve teorije bi dejali: neskončno velika množica je ekvivalentna svojemu delu. Dedekind je prav v tej lastnosti spoznal bistvo matematične neskončnosti.

Klasična logika je priznavala še samo nujnost, da je del vedno manjši od celote, in je videla v tem zakonu mišljenja absolutno resnico, ki ni trpela nobenega ugovora.

V prirodi so se utelesile lastnosti matematične neskončnosti v svetlobi, ki je zares neobčutna za dodajanje nove hitrosti ali odvzemanje njenega dela.

K matematični neskončnosti nas vede tudi razmišljanje o deljenju z nič. Upravičenosti tega računa neposredno ne razvidimo, saj je logično povsem nejasno, kaj naj bi pomenilo deliti količino na nič delov, ampak pridemo do pojma po ovinku. Če določeno število delimo zaporedoma z vse manjšimi in manjšimi divizorji in gremo z njimi proti nič, postaja količnik vse večji in večji in gre čez vse meje proti neskončnosti. Meja ali *limita* divizorja je nič, količnika pa matematična neskončnost. Ta postopek imenujemo *limitiranje*.

Z rešitvijo deljenja z nič smo izločili iz matematike še en casus irreducibilis. Sistem števil smo zopet razširili, toda za težko žrtev klasične logike, ki zgubi značaj absolutne resnice.

To človeku ni bilo vselej jasno in je bilo zato vir mnogih nesporazumov. Tisti matematiki, ki nočejo dvojne logike, morajo ograjevati matematično neskončnost in njenega bližnjega sorodnika, nič, s svarilom, naj se jima aristotelski človek ne bliža. Žrtvovati morajo torej rešljivost nekaterih računov, to se pravi, obupati nad zaključenostjo in popolnostjo matematične zgradbe, ki je sicer vzor vsem drugim znanostim. Če pa zahtevamo popolnost sistema brez tabujev, brez omejitev in prepovedi, lahko dosežemo to le z žrtvijo absolutne klasične logike, ob kateri moramo pustiti enakopraven prostorček na soncu spoznanja tudi antilogiki, ki jo lahko imenujemo sedaj *dialektiko.*

Kaj naj žrtvujemo, popolnost ali »zdrav razum«? Incidit in Scilam... Kaj je resnica? Kje je kriterij resnice? Mar v razvidnosti, kot nas učijo še danes naši sholastiki? Potem bi reševali pač »zdrav razum«. Praksa atomskega veka pa bi se nam hudobno porogala, opirajoč se, kot bomo videli, na protilogiko Cantorjevega alefa 0. Kot edini razsodnik resnice nam preostane v naših spoznavnih blodnjah praksa človeka, ki z orožjem, zgrajenim s protilogiko, ruši mesta in ubija življenje.

Zdi se, da se Egipčani, Babilonci in Asirci še niso dokopali do pojma matematične neskončnosti; pa saj je bilo tudi njihovo vesoljstvo končno, kroglasto.

Pri Grkih je prvi razmišljal o neskončno velikem Anaksimander iz Mileta v 6. stoletju pred n. š. Arhimed je imel o neskončnosti zanimivo polemiko s sirakuškim tiranom Gelonom, medtem ko Evklid svojim premicam ni sledil v neizmerne razdalje.

Sholastiki so poznali matematično neskončnost, o njej pa so razmišljali z vsakdanjimi možgani in zato nakopičili v svoji filozofiji mnoge zmote. Tomaž Akvinski, ki poštevanke matematične neskončnosti ne pozna, dokazuje, da vesoljstvo ne more biti neskončno veliko, ker ne more bivati neskončno veliko kolo, ki bi se sukalo (po Ptolemeju je Tomažu Akvinskemu nesporno, da se nebesne sfere sučejo). Obod takega kolesa bi bil namreč tudi neskončno velik, točke njegovega oboda torej neskončno med seboj razmaknjene. Posamezna točka na obodu ne bi mogla zato v gibanju nikoli doseči lege drugih obodnih točk; torej, sklepa učitelj sholastike, je vrtenje neskončno velikega kolesa nemogoče, zato nemogoče tudi neskončno veliko vesoljstvo. — Sklepanje je seveda napačno. Pri neskončnem polmeru je neskončna vendar tudi obodna hitrost (ki je produkt iz kotne hitrosti in polmera), le-ta pa premaga tudi v končnem času neskončne poti.

Sholastika dokazuje, da je tudi neskončno trajanje vesoljstva nemogoče, ker govori zoper tako misel pamet. Tudi naš dr. Aleš Ušeničnik, ki hodi v Akvinčevih škornjih, meni: Če bi svet bival večno, bi štel neskončno let, pa tudi neskončno dni; torej bi bilo leto enako dnevu. To pa je Ušeničniku proti razumu in zato neskončnost časa nemogoča. — Tudi profesor filozofije dr. Aleš Ušeničnik ne upošteva izsledkov matematične teorije množic, ki pravi: V neskončnosti časa sta množica let in množica dni med seboj ekvivalentni; predstavljata zato isto kardinalno število alef 0, ne da bi morala biti po dr. Ušeničniku zato leto in dan enaka.

Veliki matematik Leonhard Euler (1707—1783) taji matematično neskončnost prav zato, ker meni, da je vsako količino mogoče povečati. Pač še ni slutil upravičenosti metalogike. Euler vidi težave tudi v vprašanju časa. Neskončno mu je, kar zraste neskončno veliko. Ker pa naraščanja, postavim, štetja naravnih števil, ni nikoli konca, tudi rezultata, to je neskončnosti same, po Eulerju ne more biti. Znameniti matematik ni pomislil, da je neskončna množica naravnih števil ali, recimo, točk na premici tu, če jih štejemo ali ne.

Pojdimo še korak naprej v vprašanju matematične neskončnosti! Množici celih in ulomljenih števil sta med seboj ekvivalentni, izražata isto kardinalno število alef 0. Če pridružimo tema množicama še vse korene, to je iracionalna števila, dobimo nov tip množice, novo vrsto matematične neskončnosti, ki ji je Cantor pripisal novo kardinalno število alef 1. Razliko bom poskusil označiti poljudno.

Vzemimo ulomka ⅓ in ½! V vrzel med njima vtaknimo vse ulomke, katerih vrednosti leže med ⅓ in ½, vendar vrzeli ne bomo zvezno, kontinuirno napolnili, ampak le tako, da bi morali skakati od ulomka do ulomka preko majhnih vrzeli, če bi hoteli priti od vrednosti ⅓ k vrednosti ½. Če pa bi vložili med meji ⅓ in ½ še vsa iracionalna števila, vse korene, bi se nam pot od ⅓ do ½ zvezno napolnila, homogeno zalila in ugladila, da ne bi bila nikjer več pretrgana, da ne bi nikjer več zijala vrzel. Zato je imenoval Cantor množico vseh celih, ulomljenih in iracionalnih števil, ki smo jih označili skupaj kot realna števila, z imenom alef 1 ali *kontinuum*.

Kontinuum, ki seveda ni Cantorjeva iznajdba, skriva v sebi nove napade na »zdrav« človekov razum. Protislovja kontinuuma so vznemirjala človeka od eleatske šole v grškem starem veku do naših dni. Vprašanje zveznosti je že v 5. stoletju pred n. š. prvi načel izgnani atenski modrec Anaksagora. Kontinuirnost je opredelil globokoumno in kratko: V majhnem ni najmanjšega, ampak je vedno še manjše... Toda tudi v velikem je vedno še nekaj, kar je še večje. V tem je prva plaha slutnja sorodnosti med obema neskončnostima, ničem in neskončno velikim.

Najbrž ni naključje, da se je pojem kontinuuma s svojo naravo neskončne deljivosti rodil nekako v istem času kot Levkipova atomistična ideja, ki trdi, da eksistira v prirodi najmanjše, materialni atomi. Kontinuum in atomi sta antitezi. Grška atomistika ne izvira iz nikakšnega izkustva, ampak je le miselna potreba, poizkus, uteči protilogiki neskončne deljivosti, protirazumnosti matematičnega kontinuuma.

Antitezi zveznega in atomskega se od Anaksagore in Levkipa skozi vso zgodovino človeške misli spopadata in zopet spravljata, dokler se ne izkristalizirata v naših dneh kot atributa polja in materije. V moderni valovni mehaniki se končno pomirita v sintezi »kentavrske« podobe atoma, ki je v eni luči kontinuirno valovanje, lahko bi rekli, »zvenenje prostora«, v drugi pa znan Bohrov mikrokozmični planetni sestav sončeca z družinico krožečih planetkov.

V protilogično bistvo neskončno deljivega je prvi prodrl Zenon iz Parmenidove eleatske šole. V svojih zgledih paradoksne Ahilove tekme z želvo in puščice, ki se, izstreljena, ne giblje, se je veliki Grk le zgubljal v labirintu notranjih protislovij kontinuuma, zaman hrepeneč po Ariadnini niti, ki bi ga privedla iz blodnjaka teme k svetlobi razumnega spoznanja. Grški človek še ni dozorel za protilogiko neskončne deljivosti.

V sholastičnem 14. veku je oživil antično vprašanje zveznosti canterburyski nadškof Bradwardinus v delu Tractatus de continuo. Leta 1676 se je veliki mislec Leibniz vso dolgo pot z Angleškega na Holandsko mučil z nedoumno naravo zveznosti in o tem že na poti napisal dialog, v katerem pa seveda ni mogel najti razumne rešitve. Jasno je videl le, da ni mostu od točke do razsežnosti, od niča do količine in da ga zato tudi ni od mirovanja do gibanja, ki sta kakor točka in razsežnost. Pred znamenitim učenjakom 18. stoletja je brezupno zazevalo brezdno protirazumnosti. Leibnizu se je, kot nekoč Zenonu, zazdelo gibanje nemogoče. Gibanje mora biti čudež, celo čudež, ki se nenehno ponavlja. Namesto da bi odprl oči resnici, da je to, kar je logično nemogoče, v kontinuumu uresničeno, se je zmedeni mislec zatekel iz logike, ki ga je pustila na cedilu, v fantastično metafiziko: bog telesa v točkah njihovega mirovanja uničuje in jih v novih točkah neprestano zopet ustvarja. To zbuja našim očem videz gibanja, ki pa je v resnici nenehno uničevanje in »transkreacija« teles. Le mirovanje je razumna fizika, gibanje je metafizika.

Pri nas je poskušal dr. Milan Vidmar uteči nerazumni zveznosti prostora z idejo, da je tudi prostor sestavljen iz atomov.

O problemu deljenja niča z ničem bom poročal samo kratko. Pred nas prihaja v tako imenovanem infinitezimalnem računu, ki ga bom poskusil pojasniti z nekim praktičnim primerom.

Voznik, ki je premagal v treh urah 180 kilometrov poti, je vozil s povprečno hitrostjo 60 kilometrov na uro. Hitrost je očitno kvocient iz poti in pripadajočega ji časa. Računamo pa lahko tudi hitrost v določenem trenutku ali v določeni točki poti. V tem primeru vzamemo zelo majhen košček poti pri zaželeni točki — ta delček poti označimo z dy — in k tej poti pripadajoči čas gibanja dt. Pot dy in čas dt imenujemo diferenciala. Hitrost na delčku poti dy je, kajpada, zopet kvocient obeh diferencialov $\frac{dy}{dt}$. Če pa nam gre za hitrost v eni sami točki, bomo delček poti dy in pripadajoči čas dt postopoma skrajševali in vprašali: kolikšen je diferencialni kvocient $\frac{dy}{dt}$ v trenutku, ko postaneta količini dy in dt enaka nič?

ker ne vemo, koliko je $\frac{0}{0}$, ampak zopet z limitiranjem, pri katerem opazujemo.

Hitrosti gibanja v eni sami točki si torej zopet ne izračunamo naravnost, ker ne vemo, koliko je $\frac{0}{0}$, ampak zopet z limitiranjem, pri katerem opazujemo, proti kateri vrednosti se giblje diferencialni kvocient $\frac{dy}{dt}$, če gresta diferenciala dy in dt hkrati proti nič.

Infinitezimalni račun nam skoro že 300 let koristno služi vsak dan v znanosti in praksi. Odkrila sta ga istočasno Isaac Newton kot problem gibanja, Gottfried W. Leibniz pa kot vprašanje statične matematične funkcije, ker je doživel, kot smo slišali, v »viharju« gibanja brodolom svojega razuma. Tri sto let pa straši po knjigah že tudi razlaga, da gre v infinitezimalnem računu za kvocient dveh »neskončno majhnih« količin. Ta idejni nestvor izvira zopet od Leibniza samega, ki je svoje sicer pionirsko delo Calculus tangentium differentialis končal leta 1676. V nekem pismu fiziku in matematiku Varignonu pojasnjuje svoj novi račun in pravi, da so v prirodi črte, ki so v primeri z našimi navadnimi v vsej strogosti neskončno majhne, kakor so tudi take, ki so neskončnokrat večje od navadnih črt. »V vsej strogosti neskončno majhno« je Leibnizu nekaj, kar ni niti nerazsežno niti razsežno, niti nič niti količina. Očiten nesmisel, s katerim se je poskušal rešiti iz nerazumnosti svoje lastne stvaritve.

Newton je menil, da je diferencialni kvocient »ultima ratio evanescentium incrementorum«, skrajni količnik izginjajočih prirastkov. (Prirastki ali tudi fluksioni so mu to, kar Liebnizu diferenciali). Toda tudi Newton je zaman begal po idejnem labirintu svojega temnega računa, polnega nerazumnih protislovij. Že s pojmom »hitrosti v točki« se zdrav razum ne more brez protestov sprijazniti, saj je hitrost nekaj razsežnega, točka pa je nerazsežna; kako naj biva torej razsežno v nerazsežnem? In vendar nam praksa vsak dan potrjuje teorijo. Zadnji kriterij resnice je edino praksa, nezmoten inštrument, ko razum obupuje nad logično razvidnostjo.

Učenik idealistične filozofije, škof Georg Berkeley, se je blodnjam razuma v novem računu hudobno rogal. Zapisal je, da matematiki, ki mirno in brez kritike sprejemajo logična protislovja Newtonovega računa, nimajo pravice kritizirati vere. Nadarjenega Maclaurina je izzival: »Povejte mi vendar, bistroumni gospod, ali je Newtonov moment (diferencial, op. I. P.) končna ali neskončno majhna količina ali le meja!« Na vse, kar bi mu Maclaurin odgovoril, je imel irski škof pripravljen ciničen odgovor, »verba ipsissima« Newtona samega.

Z Leibnizovim računom se ni mogel sprijazniti niti že omenjeni Leonhard Euler, nemiren duh, s katerim se je kruta usoda pretresljivo poigrala; oslepel je na eno oko, nato še na drugo, nazadnje mu je ogenj uničil dom in dragocene rokopise. Slep je nekemu krojaču iz spomina narekoval uničena in nova dela in petrograjski univerzi obljubil, da ji bo napisal toliko, da bo imela dvajset let po njegovi smrti dovolj objavljati, in besedo tudi držal.

Euler zavrača Leibnizove »neskončno majhne« črte, ki naj bi bile manjše od vsake končne količine, saj je to lahko le goli nič, česar nemški baron ni razumel. Povsem upravičena kritika pa je Eulerja zapeljala predaleč, da je nazadnje zavrgel tudi limitni proces in menil, da računamo v diferencialnem količniku neposredno z ničem samim. Tudi Euler pač še ni slutil, da zahtevata matematika neskončnosti in njene recipročne vrednosti, niča, pač svojo antilogiko, svojo posebno pamet, ki je ni mogoče prevesti v navaden človekov govor.

Hrup okoli škandala infinitezimalnega računa je postajal vse glasnejši in vse bolj pohujšljiv. Celo Joseph Louis Lagrange, ki je poleg Eulerja največji matematik 18. stoletja, ugotavlja, da mrgoli v matematiki od iznajdbe infinitezimalnega računa protislovij, in če je kljub temu matematika še vedno porabna, se moramo po njegovem mnenju zahvaliti le neskončni milosti božji, ki ravna tako, da se zmote v matematiki med seboj izravnavajo. Zato je Lagrange poizkusil infinitezimalni račun kratko in malo obiti in priti do njegovih koristnih sadov po drugačni poti. Tako je nastala njegova »Teorija analitičnih funkcij, ki vsebuje načela diferencialnega računa brez slehernega upoštevanja neskončno majhnih in izginjajočih količin, limit in fluksionov in ki se omejuje na algebrajsko analizo končnih količin«, kakor pravi Lagrange sam v naslovu dela, ki ga je leta 1797 objavil v Parizu.

Tudi drugi, kot na primer Gaussov učitelj Johann F. Pfaff, so iskali, kako bi z neprizadeto logiko in neužaljenim razumom objadrali nepremagljive miselne čeri, ki zapirajo pot k praktično neoporečnim rezultatom infinitezimalnega računa. Leibnizov račun je še v prejšnjem stoletju veljal za mistično operacijo, dokler mu niso Dedekind, Weierstrass in Cantor strgali s pravega obraza njegove mistične krinke.

Prostor, v katerem živimo, je trirazsežen. Vsaka njegova dimenzija zase predstavlja kontinuum, ki je, kot že vemo, geometrična ponazoritev vseh realnih števil. Zato govorimo kar tudi *o realnem prostoru,* ki je po svoji naravi trirazsežen kontinuum.

Če pa napolnjujejo realna števila vesoljstvo povsod brez vrzeli, kje naj iščemo potem prirodno mesto imaginarnim količinam? Človek dolgo tega ni vedel. Šele eden največjih umov vseh časov, »knez matematikov« Karl F. Gauss, je jasno doumel: imaginarne razsežnosti mole iz našega realnega prostora; vsaki od treh realnih dimenzij našega izkustvenega prostora moramo dodati še po eno imaginarno, ki se razteza v izkustveno nam neznano smer. Prostor se nam tako podvoji; postal je šestdimenzionalen, realna polovica s tremi realnimi in imaginarna s tremi imaginarnimi razsežnostmi. Realni in imaginarni del sestavljata šele celoten prostor, ki ga imenujemo *kompleksen*.

Ne sme nas vznemirjati, da izkustveno ne vemo nič o kakih imaginarnih dimenzijah izven našega prostora. Matematik si jih je ustvaril v svoji domišljiji iz gole logične potrebe. Ne znamo si predstavljati štiri-, pet- ali šestdimenzionalnega prostora, praktični računar pa nima z njim nobenih težav. Matematik si ustvarja še druge namišljene prostore najbolj čudnih geometričnih lastnosti, ne da bi vprašal, ali njegovim miselnim stvaritvam vselej tudi odgovarja neka objektivna resničnost. Koliko stvarnosti tiči za hipotezami, dokaže lahko vselej samo praksa, ne logična potreba ali miselna razvidnost, kakor nam trdijo še danes naši zapozneli sholastiki. Da si znamo ustvarjati tudi matematične svetove — poznamo jih že mnogo različnih — ki jim ne odgovarja nikaka objektivna stvarnost, dokazuje le stvarjalno silo našega razuma, ki je premagal celo meje našega vesoljstva.

Užalil bi vas, če bi vas vprašal, kaj je krog. Vendar povejmo: krog je krivulja, ki je v vsaki svoji točki enako oddaljena od svojega središča. Presenetil pa bi vas, če bi vas vprašal, kaj je krog s polmerom nič dolžinskih enot. Obod se je pri takem pač stisnil v središče samo; krog s polmerom nič je potemtakem čisto navadna točka. In vendar ni tako.

Kar si začrtamo s šestilom na papir, je dejansko samo del kroga, samo njegova realna sestavina v našem realnem prostoru. Preprost račun pa pokaže, da poganja velik del realnih krivulj svoje veje, ki jih grški in srednjeveški človek še nista slutila, tudi v imaginarni del prostora; tako tudi krog. Njegovega realnega oboda, začrtanega s šestilom, se na desni in levi dotika imaginarna hiperbola, ki se razteza v neskončnost imaginarnega prostora. Toda ta imaginarna krogova veja je samo za naše oči hiperbola, matematično je krog. Račun nam namreč trdovratno kaže, da kroži v isti razdalji okoli krogovega središča kakor realni obod, zarisan s šestilom. Tu nastaja spor med našo čutno in logično nazornostjo: za oči hiperbola, za razum krog.

Naj se v našem kompleksnem krogu, sestavljenem iz realnega in imaginarnega dela, skrči polmer sedaj na nič dolžinskih enot. Realni obod se oži in zgine, kot smo rekli, v točkasto središče; imaginarna hiperbola pa pri tem degenerira v dve imaginarni premici, ki se v obliki Andrejevega križa ali matematičnega krata $\times$ sekata v realnem središču.[1]

Tudi imaginarni Andrejev križ je pravi krog s polmerom nič: obe imaginarni premici se zopet samo za oko oddaljujeta od središča, medtem ko računi zopet dokazujejo, da »krožita« v razdalji nič okoli središča, to se pravi, da se od središča sploh ne odmikata. Slede presenetljivi zaključki: od središča pa do poljubne točke na naših imaginarnih premicah je razdalja vedno nič; seveda velja potem tudi za vsak poljuben »lok« tega čudnega »oboda«, da

[1] Krog $x^2 + y^2 = r^2$ preide za $r = 0$ v obliko $x^2 + y^2 = 0$. Le-ta pa razpade v produkt $(x + iy)\,(x - iy) = 0$, ki mu lahko vsak faktor zase izenačimo z nič: $x + iy = 0$, $x - iy = 0$. Obe enačbi predstavljata dve imaginarni premici, ki se sekata pod kotom 90^0 in sta proti abscisni osi nagnjeni za 45^0, oziroma -45^0.

ne izkazuje nobene dolžine. Med pari njegovih točk ne zijajo nikjer nobene vrzeli.

Čudaški krog s polmerom nič smo si zgradili matematično neoporečno. Sedaj pa nas preseneti fizik z izjavo: vaš krog s polmerom nič je po Einsteinovi posebni teoriji relativnosti vendar posoda našega fizikalnega vesoljstva; obe imaginarni premici sta s svojimi nepojmljivimi lastnostmi podobi svetlobnega žarka v času in prostoru. V jeziku relativnostne teorije ju imenujemo »svetovni črti« svetlobnega žarka.

Einsteinova teorija je zares odkrila, da bi vsak predmet, ki bi se gibal s hitrostjo svetlobe, meril v smeri svojega gibanja nič dolžinskih enot. To je po novi mehaniki, ki je v našem stoletju zamenjala klasično, meja in neprebojen zid vsakemu gibanju. Svetlobna hitrost je zato za materialna telesa nedosežna, kakor je bila v klasični mehaniki nedosežna matematična neskončnost. Naše vesoljstvo je uklenjeno v neprebojen obod kompleksnega kroga s polmerom nič.[2]

Svetlobna hitrost je utelesila v svoji naravi vse antilogične lastnosti Cantorjeve neskončnosti. Stara Newtonova podoba sveta je slonela še vsa na klasičnih aristotelskih zakonih mišljenja in Kantovih apriornih formah prostora in časa, ki so se zdele nepreklicne in večne; nova, Einsteinova, je zavrgla oboje. Od tod petdesetletno idejno nezaupanje do nje, čeprav je že od vsega začetka dajala obilnih in zdravih praktičnih sadov.

Einstein je leta 1906 zgradil svojo teorijo, ki je danes temelj vsemu modernemu prirodoslovju, na zakonu o neobčutnosti svetlobne hitrosti za prištevanje in odštevanje. Ta aksiom je bil za takratne možgane sicer protisloven, toda zelo natančna Michelsonova merjenja so ga vsilila. Teorija je napovedala mnogo novih stvari: da je svetloba — kot vsaka druga oblika energije — težka; da tiče v atomih strahotne množine energije; da poteka čas gibajočim se predmetom hitreje kot mirujočim ...

Zaradi cantorske antilogike so mnogi znanstveniki, fiziki in filozofi, Einsteinovo teorijo odklonili, ruski v celoti prav do zadnjega časa. Teoriji ni prav nič pomagala nobena razvidnost; pot k priznanju si je morala utirati samo v praksi. Pol stoletja je trajal njen trdi boj; pol stoletja je zbirala zase dokaze iz prakse, med njimi tudi strahotno razdejanje v Hirošimi. Zadnjega, da je zares tudi čas uklenjen v zakone relativnostne mehanike, šele pred dvema letoma, ko so opazovali, da poteka življenje radioaktivnim atomom občutno hitreje, če se naglo gibljejo.

Ivo Pirkovič

[2] Kar smo povedali, velja za enodimenzionalen svetloben žarek v času. Za svetlobo, ki bi se širila v ploskvi kot val na vodi, bi morali računati že s kompleksno kroglo, za širjenje svetlobe v prostoru pa vzeti kompleksno štiridimenzionalno kroglo ali hipersfero.