

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 5

Strani 258-262

Ivan Vidav:

REŠITEV ENAČBE $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika, reševanje enačb, desetiški sestav, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/17/1001-Vidav.pdf>

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

REŠITVE ENAČBE $x^3 + y^3 + 1 = xyz$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Zastavimo si tole vprašanje: Za katere pare naravnih števil x in y je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy ? Če zaznamujemo kvocient med vsoto in produktom z , zadoščajo x, y, z enačbi

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz \quad (1)$$

Poiščimo vse njene rešitve v naravnih številih!

Ali obstaja rešitev, pri kateri sta x in y enaka? Če je $x = y$, se enačba (1) glasi $2x^2 + 1 = x^2z$. Od tod je $x^2(z - 2) = 1$. Produkt naravnih števil pa je enak 1 le, če so vsi faktorji enaki 1. Torej je $x = 1$ in $z - 2 = 1$. Tako dobimo rešitev $x = y = 1, z = 3$, ki ji bomo rekli **trivialna rešitev enačbe (1)**. V vsaki nevtralni rešitvi pa je $x \neq y$.

Naj bodo x, y, z naravna števila, ki zadoščajo enačbi (1). Če prenesemo člen x^2 z leve na desno in nato delimo z x , dobimo

$$\frac{y^2 + 1}{x} = yz - x \quad (2)$$

Vidimo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ celo število $yz - x$. Prav tako ugotovimo, da je kvocient $(x^2 + 1)/y$ celo število, in sicer enako $xz - y$.

Postavimo

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^2 + 1}{x}, \quad z' = z \quad (3)$$

x', y', z' so naravna števila. Izračunajmo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = \frac{y^2 + 1}{x^2} (x^2 + y^2 + 1)$$

Upoštevajmo, da x, y, z zadoščajo enačbi (1), pa dobimo

$$x'^2 + y'^2 + 1 = x'y'z'$$

Torej je tudi trojka x', y', z' rešitev enačbe (1) v naravnih številih.

Če izhajamo iz trivialne rešitve $x = y = 1, z = 3$, dobimo po formulah (3) rešitev $x = 1, y = 2, z = 3$, iz te rešitev $x = 2, y = 5, z = 3$ itd.

Enačba (1) se ne spremeni, če v njej zamenjamo x in y . Zato je tudi trojka

$$x' = \frac{x^2 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = z \quad (4)$$

rešitev v naravnih številih, če je x, y, z taka rešitev. Trojko (4) smo namreč dobili tako, da smo v formulah (3) zamenjali x in y, x' pa z y' .

Denimo, da je x manjši kakor y , tedaj $y - x > 0$. Potem velja za rešitev (3)

$$y' - x' = \frac{y^2 + 1}{x} - y = \frac{y(y - x) + 1}{x} > 0$$

Torej je tudi $x' < y'$. Ker je $x < y = x'$, je x' večji od x , y' pa večji od y .

Kako je pri rešitvi (4)? Tu imamo

$$y' - x' = x - \frac{x^2 + 1}{y} = \frac{x(y - x) - 1}{y}$$

Produkt $x(y - x)$ naravnih števil x in $y - x$ je najmanj 1, enak 1 pa je le v primeru, ko je $x = 1$ in $y - x = 1$, tedaj $y = 2$. Iz rešitve $x = 1$, $y = 2$ dobimo trivialno rešitev $x' = 1$, $y' = 1$. V vseh drugih primerih pa je $x' < y'$. To namreč pove zgornja enakost. Ker je $y' = x < y$, je nova rešitev manjša od prejšnje.

Imejmo rešitev, pri kateri je $x < y$. Formule (3) ji priredijo večjo rešitev x' , y' , tej pa še večjo x'' , y'' . Če tako nadaljujemo, dobimo neskončno zaporedje rešitev, v katerem je vsaka naslednja večja od prejšnje. Če pa računamo po formulah (4), se zaporedne rešitve nekaj časa manjšajo. Ker so naravna števila, se mora manjšanje po nekaj korakih končati. V prejšnjem odstavku smo videli, da se konča tedaj, ko pridemo do trivialne rešitve. Od tam naprej se rešitve spet večajo.

Če je $x > y$, dajo naraščajoče zaporedje rešitev formule (4), rešitve dobljene s formulami (3) pa se manjšajo toliko časa, dokler ne pridemo do trivialne rešitve.

Vse rešitve, ki jih dobimo iz začetne rešitve po formulah (3) ali po formulah (4), imajo isti z . Pri trivialni rešitvi pa je $z = 3$. Ker nas formule (4) po nekaj korakih vselej privedejo do trivialne rešitve, kadar je $x < y$, formule (3) pa, kadar je $x > y$, je torej $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Tako smo dokazali trditev:

Če sta x in y taki naravni števili, da je vsota $x^2 + y^2 + 1$ deljiva s produktom xy , je kvocient enak 3.

Ker je vselej $z = 3$, je dovolj, če v rešitvi enačbe (1) v naravnih številih navedemo le x in y .

Formule (3) priredijo rešitvi x , y rešitev x' , y' . Poiščimo zdaj rešitev x'' , y'' , ki pripada rešitvi x' , y' po formulah (4). Dobimo

$$x'' = \frac{x'^2 + 1}{y'} = (y^2 + 1) \cdot \frac{x}{y^2 + 1} = x, \quad y'' = x' = y$$

Torej nas formule (4) privedejo nazaj na prvotno rešitev x , y . Prav tako dobimo prvotno rešitev, če poiščemo najprej novo rešitev po formulah (4), tej pa potem rešitev po formulah (3).

Naj bo dana poljubna rešitev x , y enačbe (1), kjer je $x < y$. Videli smo,

da pridemo z uporabo formul (4) po nekaj korakih do trivialne rešitve $x = 1$, $y = 1$. V prejšnjem odstavku smo ugotovili, da delujejo formule (3) v nasprotni smeri kakor (4). Zato nas po istem številu korakov privedejo od trivialne rešitve nazaj na dano rešitev x, y . Kadar pa je $x > y$, pridemo do trivialne rešitve s formulami (3), od trivialne rešitve do dane rešitve pa nas privedejo formule (4). Tako smo ugotovili, da dobimo iz trivialne rešitve katerokoli rešitev enačbe (1) z uporabo formul (3) ali pa (4).

Izračunali smo, da je kvocient $(y^2 + 1)/x$ enak $yz - x$. Ker je $z = 3$ v vsaki rešitvi enačbe (1) v naravnih številih, lahko zapišemo formule (3) tudi takole

$$x' = y, \quad y' = 3y - x, \quad z' = z \quad (3\star)$$

Novi x' je enak prejšnjemu y . Zato se dajo dobiti vse rešitve enačbe (1) iz enega samega zaporedja števil. Oglejmo si namreč zaporedje

$$u_0, u_1, u_2, \dots \quad (5)$$

pri katerem sta prva člena

$$u_0 = 1 \quad \text{in} \quad u_1 = 1$$

trije poljubni zaporedni členi u_{n-1}, u_n, u_{n+1} pa so med seboj povezani z enačbo

$$u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \quad (6)$$

S tem je zaporedje (5) določeno. Tako je po formuli (6)

$$u_2 = 3u_1 - u_0 = 2, \quad u_3 = 3u_2 - u_1 = 5, \text{ itd.}$$

Očitno so vsi členi u_n naravna števila.

Velja tale trditev: Poljubna sosedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ zaporedja (5) dasta rešitev enačbe (1) v naravnih številih. Res, začetna člena $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$ določata trivialno rešitev. Denimo, da za neki indeks n velja naša trditev, da je torej $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev. Po formulah (3 \star) dobimo iz nje rešitev $x' = y = u_n$ in $y' = 3y - x = 3u_n - u_{n-1}$. Ker velja zveza (6), je $y' = u_{n+1}$. Zato tudi naslednji par zaporednih členov $u_n = x'$ in $u_{n+1} = y'$ zadošča enačbi. Po indukciji sklepamo, da je vsak par sosednih členov rešitev enačbe (1). Ker določata začetna člena trivialno rešitev in dobimo iz rešitve $x = u_{n-1}$, $y = u_n$ rešitev $x' = u_n$, $y' = u_{n+1}$ po formulah (3 \star), te formule pa nas privedejo do vsake rešitve, pri kateri je $x < y$, so v zaporedju (5) zajete vse take rešitve.

Iz (6) dobimo

$$u_{n-1} = 3u_n - u_{n+1} \quad (6\star)$$

Ta formula omogoča računanje členov zaporedja (5) z desne proti levi. Z njo

lahko opredelimo tudi člene u_n z negativnimi indeksi n . Tako je

$$u_{-1} = 3u_0 - u_1 = 2, \quad u_{-2} = 3u_{-1} - u_0 = 5 \text{ itd.}$$

Členi so ista števila kakor pri pozitivnih indeksih, sledijo pa si v nasprotnem vrstnem redu.

Zaporedje u_n se zdaj razteza v obe smeri v neskončnost. Glasi se

$$\dots, 89, 34, 13, 5, 2, 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots \quad (7)$$

V sredi sta člena $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, ki določata trivialno rešitev. Zaporedna člena $u_{n-1} = x$ in $u_n = y$ na desni strani dasta rešitev, pri kateri je $x < y$, na levi strani pa rešitev, kjer je $x > y$. V zaporedju (7) so tako zajete prav vse rešitve enačbe (1) v naravnih številih. Nadaljnje člene na desni računamo po formuli (6), na levi pa po formuli (6★).

Na koncu si oglejmo še podobno enačbo

$$x^3 + y^3 + 1 = xyz \quad (8)$$

Tudi tu nas zanimajo rešitve v naravnih številih x, y, z . Trivialna rešitev je spet $x = y = 1, z = 3$. Iz dane rešitve x, y, z pridemo do novih rešitev s podobnimi formulami, kakor so (3) in (4). Če prenesemo člen x^3 z leve na desno in nato delimo enačbo z x , ugotovimo, da je kvocient $(y^3 + 1)/x$ enak celemu številu $yz - x^2$. Zato so

$$x' = y, \quad y' = \frac{y^3 + 1}{x}, \quad z' = yz^2 - xy^2 - x^2z \quad (9)$$

cela števila. Nekoliko dolgovezen račun pokaže, da zadoščajo enačbi (8), torej dajo novo rešitev v naravnih številih. Prav tako dobimo novo rešitev, če v (9) zamenjamo x in y , torej postavimo

$$x' = \frac{x^3 + 1}{y}, \quad y' = x, \quad z' = xz^2 - x^2y - y^2z \quad (9★)$$

Iz trivialne rešitve pridemo po formulah (9) najprej do rešitve $x = 1, y = 2, z = 5$, nato do rešitve $x = 2, y = 9, z = 41$ itd. Formule (9★) pa dajo iz trivialne rešitve enake rešitve kakor (9), le da sta v njih zamenjana x in y .

Ker je tudi tu novi x enak prejšnjemu y , lahko sestavimo zaporedje

$$\dots, 365, 9, 2, 1, 1, 2, 9, 365, \dots \quad (10)$$

Dva poljubna sosedna člena $x = u_{n-1}$ in $y = u_n$ dasta rešitev enačbe (8) v naravnih številih. S pikami označene člene na desni računamo po formulah (9), na levi po formulah (9★). Zato velja med tremi zaporednimi členi zveza

$$u_{n-1} u_{n+1} = u_n^3 + 1 \quad (11)$$

Ker izhajamo iz trivialne rešitve, postavimo $u_0 = 1$ in $u_1 = 1$. S tem je zaporedje (10) v obe smeri natanko določeno.

V zaporedju (10) pa niso zajete vse rešitve. Na primer rešitve $x = 2, y = 3, z = 6$ v njem ni. Iz te rešitve dobimo po formulah (9) in (9*) zaporedje

$$\dots, 915, 14, 3, 2, 3, 14, 915, \dots \quad (12)$$

Tu vzamemo začetna člena $u_0 = 2, u_1 = 3$, nadaljnje člene pa sept računamo po formuli (11).

Še vedno nismo dobili vseh rešitev enačbe (8). Rešitve $x = 5, y = 9, z = 19$ ni ne v zaporedju (10) ne v (12). Iz te rešitve dobimo, podobno kakor prej, verigo

$$\dots, 549, 14, 5, 9, 146, \dots \quad (13)$$

Bravec, ki ima računalnik, naj izračuna še nekaj nadaljnjih členov zaporedij (10), (12) in (13) in poskuša najti kakšno rešitev, ki je ni v nobenem od teh zaporedij.

Ivan Vidav