21 aritmetičnih vprašanj o številu 2021

Boštjan Kuzman

Matematika je kraljica znanosti,
teorija števil pa kraljica matematike.
(Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)

Pa začnimo leto 2021 po kraljevsko, z ugankami iz teorije števil oziroma aritmetike, vede, ki je od antike dalje vznemirjala veleume, kot so bili Pitagora, Arhimed, Evklid, Eratosten, Diofant, Fibonacci, Fermat, Euler, Gauss, Legendre, Lagrange in številni drugi veliki matematiki.

21 vprašanj o številu 2021 na spodnjem seznamu je izbranih tako, da bi bila zanimiva in razumljiva čim širšemu krogu bralcev. Večine vprašanj se lahko lotimo povsem naivno s preiskovanjem in tabeliranjem, vsaj dve tretjini vprašanj pa je elegantno rešljivih s srednješolsko matematiko (in nekaj vztrajnosti). Velik del vprašanj je sicer povezan s klasičnimi izreki teorije števil, zato bodo teoretično dobro podkovani bralci na nekatera vprašanja odgovorili skoraj brez razmišljanja, drugi pa si bodo morali malo pomagati z literaturo in brskanjem po spletu. Bralci z osnovnim znanjem programiranja bi sicer večino nalog zlahka rešili s pomočjo računalnika, toda preverjanje lastnosti števila 2021 z grobo silo je podobno nabiranju travniških cvetlic z buldožerjem, čisto vseh odgovorov pa s pomočjo računalnika niti ni mogoče dobiti.

Vabljeni, da sprejmete izziv in preizkusite svoje znanje, ali pa se še kaj novega naučite. In če se vam slučajno kje zatakne, najdete rešitve na naslednjih straneh. Tam vas čaka tudi dodatna, nagradna uganka.

1. Ali je 2021 praštevilo?
2. Ali je 2021 popolno število?
3. Ali je 2021 Fibonaccijevo število?
4. Ali je 2021 trikotniško število?
5. Ali je 2021 k-kotniško število za kakšen $k < 2021$?
6. Ali je 2021 vsota dveh praštevil?
7. Ali je 2021 vsota treh praštevil?
8. Ali je 2021 vsota treh trikotniških števil?
9. Ali je 2021 vsota vsaj treh zaporednih naravnih števil?
10. Ali je 2021 razlika dveh kvadratov?
11. Ali je 2021 vsota dveh kvadratov?
12. Ali je 2021 vsota štirih kvadratov?
13. Katero je najmanjše število, ki ima natanko 2021 deliteljev?
14. Koliko manjših naravnih števil je tujih številu 2021?
15. Ali obstaja 2021 zaporednih sestavljenih števil?
16. Ali obstaja število z vsoto deliteljev 2021?
17. Ali obstaja celoštevilski pravokotni trikotnik s stranico dolžine 2021?
18. Ali obstaja praštevilo med številoma 2^{2020} in 2^{2021}?
19. Koliko je $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{2021}]$, kjer je $[x]$ celi del števila x?
20. S koliko ničlami se konča število 2021! v običajnem desetiškem zapisu?
21. Ali velja $x^{2021}+y^{2021}=z^{2021}$ za kakšno trojico naravnih števil x, y, z?

Odgovori

1. Če 2021 ni praštevilo, mora biti deljivo z nekim praštevilom, ki je manjše od $\sqrt{2021} < 45$. Že na daleč vidimo, da število 2021 ni deljivo z $2, 3$ ali 5. Po zaporednih deljenjih s praštevili $7, 11, 13, \ldots, 43$ prav v zadnjem, štirinajstem koraku ugotovimo, da velja $2021 = 43 \cdot 47$, torej je število 2021 sestavljeno. Primer lepo pokaže, kako računsko zahteven je lahko problem faktorizacije števila z dvema velikima prafaktorjema, če uporabimo najbolj preprosto metodo z zaporednim deljenjem. Faktorizacijo bi v tem primeru našli precej hitreje, če bi opazili, da je $2021 = 45^2 - 2^2 = (45-2)(45+2)$.

2. Ne, saj je vsota pravih deliteljev števila 2021 enaka $1 + 43 + 47 = 91$. Marsikateri bralec bi verjetno znal iz glave našteti štiri najmanjša popolna števila 6, 28, 496 in 8128, ki jih je poznal že Evklid. Ker je 2021 liho število, pa lahko omenimo še, da je vseh 51 doslej znanih popolnih števil sodih. Vprašanje obstoja lihega popolnega števila je še vedno odprto.

3. Ne. Zaporedje Fibonaccijevih števil $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ lahko opišemo z rekurzivno zvezo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geqslant 2$ in začetnima pogojema $F_0 = 0, F_1 = 1$. Ker števila naraščajo zelo hitro, bomo tudi brez računalnika hitro ugotovili, da je $F_{17} = 1597$ in $F_{18} = 2584$, torej število 2021 ni Fibonaccijevo. Lahko pa bi uporabili tudi kriterij Ire Gessla (1971), ki je dokazal, da je število N Fibonaccijevo natanko tedaj, ko je vsaj eno od števil $5N^2 \pm 4$ popoln kvadrat.

4. Ne. Trikotniška števila, katerih lastnosti so preučevali že Pitagora in njegovi učenci, predstavljajo vsoto prvih n naravnih števil: $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kvadratna enačba $\frac{n(n+1)}{2} = 2021$ pa nima rešitev v naravnih številih.

5. Ne. Že antični matematik Nikomah je v knjigi Uvod v aritmetiko iz 2. stoletja našega štetja ugotovil, da zvezo med večkotniškimi in trikotniškimi števili dobimo s pomočjo razreza k-kotnika na trikotnike. Od tod sledi, da lahko n-to k-kotniško število opišemo z izrazom $P_n(k) = \frac{n}{2}(2 + (k-2)(n-1))$ in hitro se prepričamo, da enačba $P_n(k) = 2021$ nima rešitev v naravnih številih za $k < 2021$.

6. Ne. Ker je 2021 liho število, bi iz $p + q = 2021$ sledilo, da je eno od praštevil p, q sodo, torej 2, toda potem bi bil drugi seštevanec 2019, to pa ni praštevilo, ker je deljivo s 3.

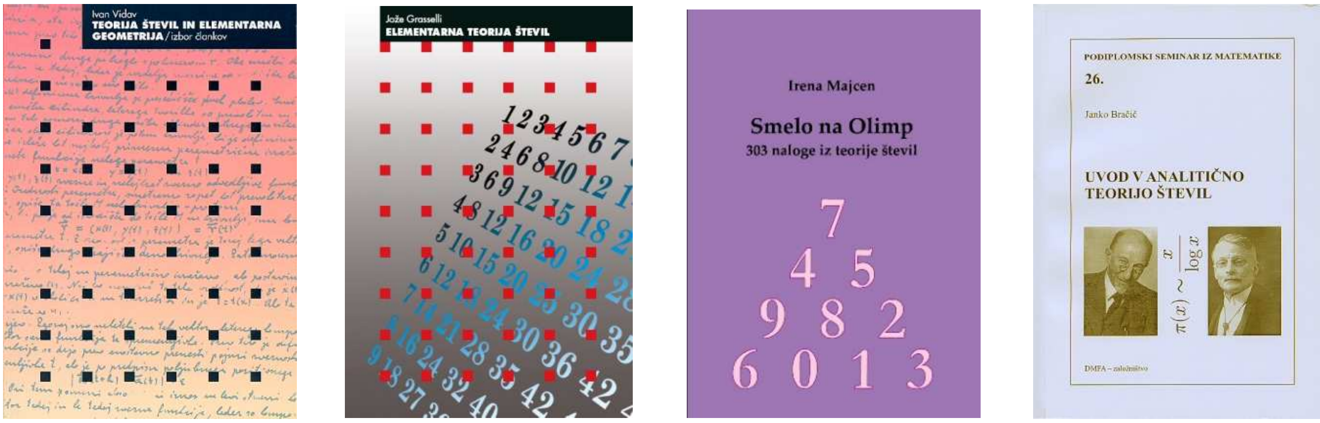
7. Da. Lahko se skličemo kar na Šibko Goldbachovo domnevo, ki jo je dokazal Harald Helfgott leta 2013: vsako liho število, večje od 5, lahko zapišemo kot vsoto treh praštevil. Z nekaj ugibanja hitro najdemo kakšno od možnosti, denimo 2003+13+5, iskanja vseh 3392 možnosti pa se raje lotimo z računalnikom. Kot zanimivost pa omenimo še, da je še vedno nedokazana izvirna Goldbachova domneva iz pisma Eulerju leta 1742. Ta pravi, da lahko vsako sodo število, večje od 2, zapišemo kot vsoto dveh praštevil.

8. Da. Domnevo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto največ treh trikotniških števil, je zapisal že Fermat leta 1636, leta 1796 pa jo je prvi dokazal takrat 19-letni Carl Friedrich Gauss. Število 2021 lahko sicer zapišemo na 9 načinov, eden je $T_{61} + T_{15} + T_4 = 1891 + 120 + 10$. Pri iskanju takega zapisa je ugodno začeti s čim večjim prvim členom in s tem zmanjšati število možnosti za druga dva člena.

9. Da. Enačba $(a+1) + \ldots + (a+k) = ka + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2}(2a + k + 1) = 2021$ ima za $k \geqslant 3$ dve rešitvi v naravnih številih: $(a = 19, k = 47)$ in $(a = 25, k = 43)$. Števila, ki jih lahko zapišemo kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil, pa sicer imenujemo tudi trapezna števila, saj predstavljajo razliko dveh trikotniških števil. Znano je, da so taka vsa naravna števila razen potenc števila 2.

10. Da. Znano je, da lahko vsako liho naravno število vsaj na en način zapišemo kot razliko dveh kvadratov: $2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$. Ta način je edini, kadar gre za praštevilo, v našem primeru pa z obravnavo enačbe $2021 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ dobimo dve rešitvi: $2021 = 45^2 - 2^2 = 1011^2 - 1010^2$.

11. Ne. Iz Fermatovega izreka o vsoti dveh kvadratov sledi, da lahko dano naravno število zapi-



SLIKA 1.
Nekaj knjig o teoriji števil slovenskih avtorjev iz ponudbe DMFA – založništva.

šemo kot vsoto dveh kvadratov natanko tedaj, ko v njegovem razcepu na prafaktorje vsi prafaktorji tipa $p = 3 \pmod 4$ nastopajo s sodo potenco. To seveda ne velja v primeru števila $2021 = 43^1 \cdot 47^1$.

12. Da. Lagrangejev izrek o štirih kvadratih zagotavlja, da lahko vsako naravno število na vsaj en način zapišemo kot vsoto (največ) štirih kvadratov. Verjetno je to slutil že antični matematik Diofant v svoji knjigi Aritmetika. Število 2021 lahko sicer tako zapišemo na 57 načinov, eden je $44^2 + 9^2 + 2^2 + 0^2$. Brez računalnika je zapis najugodneje iskati tako, da začnemo s čim večjim členom, v našem primeru 44, in poskusimo ustrezno izbrati ostale tri.

13. Ker je $2021 = 43 \cdot 47$, iz osnovnega izreka aritmetike sledi, da so naravna števila z natanko 2021 delitelji bodisi oblike p^{2020} bodisi $p^{42}q^{46}$, kjer sta p in q različni praštevili. Najmanjše tako število pa je $2^{46} \cdot 3^{42}$.

14. Med vključno 1 in $2020 = 43 \cdot 47 - 1$ je natanko 46 večkratnikov števila 43 in natanko 42 večkratnikov števila 47. Ker ni skupnih večkratnikov, je preostalih $2020 - 46 - 42 = 1932$ števil tujih 2021. Bolj elegantno lahko problem rešimo z Eulerjevo funkcijo $\varphi(n)$, ki označuje število vseh števil od 1 do $n-1$, ki so tuja številu n. Potem za praštevilo p velja $\varphi(p) = p-1$, saj so številu p tuja vsa manjša števila. Zdaj lahko vsak sam poskusi dokazati, da za različni praštevili p, q velja $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Posledično je $\varphi(2021) = \varphi(43)\varphi(47) = 42 \cdot 46 = 1932$.

15. Da. Števila $2022!+2, 2022!+3, \ldots, 2022!+2022$ so očitno zaporedna in sestavljena. Z istim trikom lahko ugotovimo, da za vsako naravno število n obstaja n zaporednih sestavljenih števil.

16. Ne. Lahko bi seveda pregledali vsote deliteljev vseh števil do 2020, nekoliko bolj elegantna, a kljub temu precej zavita pot pa je naslednja. Naj bo $\sigma(n)$ vsota vseh pozitivnih deliteljev števila n. Znano je, da je funkcija σ *multiplikativna*, torej je $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, če sta a in b tuji števili. Če velja $n = p^k \cdot m$, kjer je p praštevilo, ki je tuje m, potem sledi

$$\sigma(n) = \sigma(p^k)\sigma(m) = (1 + p + \ldots + p^k)\sigma(m).$$

Da bi bil ta izraz liho število, mora biti $p = 2$ ali k sodo število, za primer $\sigma(n) = 2021 = 43 \cdot 47$ pa lahko sklepamo še, da ima n največ dva prafaktorja, torej je $n = p^k$ ali $n = p^k q^l$. Zato bi moralo število $\sigma(p^k)$ deliti 2021 oziroma zavzeti vrednost 43, 47 ali 2021 za neki p. Za $p = 2$ je zaporedje vrednosti $\sigma(2^k)$ enako 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, …, zato 2^k ne deli n. Podobno izločimo še potenco 3^k

za sode $k \leqslant 6$, potenco 5^k za sode $k \leqslant 4$ in nazadnje še potence p^2 za praštevila med 7 in 43. Tako smo preverili, da vsota deliteljev 2021 ni možna.

17. Da. Število 2021 mora biti element pitagorejske trojice (a, b, c) z lastnostjo $a^2 + b^2 = c^2$. Po Evklidovih formulah lahko vse take pitagorejske trojice zapišemo kot $a = t(m^2 - n^2)$, $b = t(2mn)$ in $c = t(m^2 + n^2)$, kjer so m, n, t naravna števila, $m > n$, števili m in n pa sta tuji in različne parnosti. Iz zapisa 2021 z razliko kvadratov $2021 = 45^2 - 2^2$ takoj razberemo eno rešitev $t = 1, m = 45, n = 2$, ki da pitagorejski trikotnik s stranicami $(2021, 180, 2029)$, možne pa so še tri druge rešitve, katerih iskanje bomo prepustili kar bralcu.

18. Da. Najlažje je to utemeljiti s sklicevanjem na Bertrandov postulat, ki pove, da za vsako naravno število $n \geqslant 2$ obstaja praštevilo med n in $2n$. To Bertrandovo ugotovitev je sicer prvi uspel dokazati Pafnutij Čebišev leta 1852.

19. Opazimo lahko, da se v vsoti zapored pojavljajo enaki členi: $1+1+1+2+2+2+2+2+3+\ldots$. Natančneje, $2n+1$ členov med vključno $[\sqrt{n^2}]$ in $[\sqrt{n^2+2n}]$ ima vrednost n. Za zgornjo mejo n^2+2n lahko zato z uporabo znanih formul za vsoto kvadratov izračunamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2+2n}[\sqrt{k}] &= \sum_{k=1}^{n}(2k+1)k \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{k(k+1)(4k+5)}{6}.\end{aligned}$$

Po tej formuli zdaj hitro izračunamo iskano vrednost za zgornjo mejo $2024 = 44^2 + 2 \cdot 44$ in nato odštejemo $3 \cdot 44$, da dobimo iskano vrednost 59598.

20. Število ničel na koncu zapisa števila $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdots$ je enako potenci c, s katero nastopa praštevilo 5 v razcepu števila $n!$ na prafaktorje, saj vsaka ničla na koncu števila nastane z množenjem para prafaktorjev 2 in 5. To potenco pa lahko presenetljivo hitro izračunamo z uporabo De Polignacove formule $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$ za najvišji eksponent praštevila v $n!$. Za $n = 2021$ dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2021}{5^k}\right] &= \left[\frac{2021}{5}\right] + \left[\frac{2021}{25}\right] + \left[\frac{2021}{125}\right] + \left[\frac{2021}{625}\right] \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 = 503.\end{aligned}$$

21. Ne. To pove znameniti veliki Fermatov izrek, ki ga je dokazal Sir Andrew Wiles leta 1994. Podrobnosti dokaza prepuščamo nadebudnim bralcem, saj na teh straneh zanje ni dovolj prostora.

SLIKA 2.

Nagradna uganka

Za katera naravna števila n se število $n!$ v običajnem desetiškem zapisu konča z natanko 2021 ničlami?

Rešitev z razlago pošljite na e-naslov `info@dmfa-zaloznistvo.si` s pripisom Nagradna uganka 2021. Med pravilnimi rešitvami bomo na Mednarodni dan matematike 14. 3. 2021 izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli knjigo o teoriji števil iz ponudbe DMFA – založništvo. Tudi letos pa bo pri DMFA potekalo še nekaj aktivnosti ob Mednarodnem dnevu matematike. Obvestila o tem bodo objavljena na spletni strani `www.dmfa.si`.

× × ×