

# On extremal (almost) edge-girth-regular graphs

Gabriela Araujo-Pardo\* 

*Instituto de Matemáticas-Campus Juriquilla, Universidad Nacional Autónoma de México,  
C.P. 076230, Boulevard Juriquilla # 3001, Juriquilla, Qro., México*

György Kiss† 

*Department of Geometry and HUN-REN-ELTE Geometric and Algebraic Combinatorics  
Research Group, Eötvös Loránd University, 1117 Budapest, Pázmány s. 1/c, Hungary; and  
Faculty of Mathematics, Natural Sciences and Information Technologies, University of  
Primorska, Glagoljaška 8, 6000 Koper, Slovenia*

István Porupsánszki‡

*Institute of Mathematics and HUN-REN-ELTE Geometric and Algebraic Combinatorics  
Research Group, Eötvös Loránd University, 1117 Budapest, Pázmány s. 1/c, Hungary*

Received 30 November 2023, accepted 18 July 2024, published online 26 May 2025

---

## Abstract

A  $k$ -regular graph of girth  $g$  is called an edge-girth-regular graph, or an egr-graph for short, if each of its edges is contained in exactly  $\lambda$  distinct  $g$ -cycles. An egr-graph is called extremal for the triple  $(k, g, \lambda)$  if it has the smallest possible order. We prove that some graphs arising from incidence graphs of finite planes are extremal egr-graphs. We also prove new lower bounds on the order of egr-graphs.

*Keywords:* Edge-girth-regular graph, cage problem, finite bi-affine planes.

*Math. Subj. Class.:* 05C035, 51E20

---

\*Research supported in part by UNAM-DGAPA-PAPIIT IN101821, Proyecto de Intercambio Académico de la Coordinación de la Investigación Científica "Bipartite biregular cages, block designs and generalized quadrangles" and CONAHCyT: CBF 2023-2024-552.

†Corresponding author. This research was supported in part by the Hungarian National Research, Development and Innovation Office OTKA grant no. K 124950.

‡This research was supported in part by the Hungarian National Research, Development and Innovation Office OTKA grant no. SNN 132625.

*E-mail addresses:* [garaujo@im.unam.mx](mailto:garaujo@im.unam.mx) (Gabriela Araujo-Pardo), [gyorgy.kiss@tk.elte.hu](mailto:gyorgy.kiss@tk.elte.hu) (György Kiss), [rupsansz@gmail.com](mailto:rupsansz@gmail.com) (István Porupsánszki)



# Ekstremni (skoraj) povezavno in ožinsko regularni grafi

Gabriela Araujo-Pardo\* 

*Instituto de Matemáticas-Campus Juriquilla, Universidad Nacional Autónoma de México,  
C.P. 076230, Boulevard Juriquilla # 3001, Juriquilla, Qro., Mehika*

György Kiss† 

*Oddelek za geometrijo in raziskovalna skupina HUN-REN-ELTE za geometrijsko in  
algebraično kombinatoriko, Eötvös Loránd University, 1117 Budimpešta, Pázmány s. 1/c,  
Madžarska;*

*in Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije,  
Univerza na Primorskem, Glagoljaška 8, 6000 Koper, Slovenija;*

István Porupsánszki‡

*Institut za matematiko in raziskovalna skupina HUN-REN-ELTE za geometrijsko in  
algebraično kombinatoriko, Eötvös Loránd University, 1117 Budimpešta, Pázmány s. 1/c,  
Madžarska*

Prejeto 30. novembra 2023, sprejeto 18. julija 2024, objavljeno na spletu 26. maja 2025

---

## Povzetek

$k$ -regularen graf ožine  $g$  se imenuje *povezavno in ožinsko regularen graf*, če je vsaka od njegovih povezav vsebovana v natanko  $\lambda$  različnih  $g$ -ciklih. Povezavno in ožinsko regularen graf se imenuje *ekstremen za trojico*  $(k, g, \lambda)$ , če ima najmanjši možni red. Dokažemo, da so nekateri grafi, ki jih lahko dobimo iz incidenčnih grafov končnih ravnin, ekstremni povezavno in ožinsko regularni grafi. Izpeljemo tudi nove spodnje meje za red povezavno in ožinsko regularnih grafov.

*Ključne besede: Povezavno in ožinsko regularen graf, problem kletk, končne biafine ravnine.*

*Math. Subj. Class.: 05C035, 51E20*

---

\*Raziskava delno podprta s strani UNAM-DGAPA-PAPIIT IN101821, projekta akademske izmenjave Koordinacije znanstvenih raziskav "Dvodelne biregularne kletke, blokovski dizajni in posplošeni štirikotniki" ter s strani CONAHCyT: CBF 2023-2024-552.

†Kontaktni avtor. To raziskavo je delno podprl madžarski nacionalni urad za raziskave, razvoj in inovacije OTKA z donacijo št. K 124950.

‡To raziskavo je delno podprl madžarski nacionalni urad za raziskave, razvoj in inovacije OTKA z donacijo št. SNN 132625.

*E-poštni naslovi:* garaujo@im.unam.mx (Gabriela Araujo-Pardo), gyorgy.kiss@ttk.elte.hu (György Kiss), rupsansz@gmail.com (István Porupsánszki)