

Marjan Divjak

# Ustvarjanje znanosti



Drugi del

[www.diameter.si](http://www.diameter.si)



Marjan Divjak

# **Ustvarjanje znanosti**

*Genetični uvod v matematiko,  
fiziko in tehniko*

Drugi del

[www.diameter.si](http://www.diameter.si)

*Avtor* Marjan Divjak

*Naslov* Ustvarjanje znanosti II

*Podnaslov* Genetični uvod v matematiko, fiziko in tehniko

*Oblikovanje* Avtor

*Prelom* Avtor

*Naslovnica* Mornarski astrolab iz 1602. Replika. National Museum of American History.

*Založba* Samozaložba

*Izdaja* Prva izdaja, Ljubljana, 2019

<http://www.diameter.si/sciquest/SCIQUEST2.pdf>

© Marjan Divjak, CC BY-NC-ND. Dovoljeno je kopiranje, razpošiljanje in objavlanje posameznih poglavij ali celote, če se pri tem navede avtorja, če ne gre za komercialno uporabo in če se ne spreminja vsebine in oblike.

*Cena* Brezplačna

Katalogni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v  
Narodni in univerzitetni knjižnici, Ljubljana  
COBISS.SI-ID=299144448  
ISBN 978-961-290-117-2 (pdf)



# Vsebina

|                    |                                    |     |
|--------------------|------------------------------------|-----|
|                    | <b>Predgovor</b>                   | 5   |
|                    | <b>Vodila</b>                      | 7   |
|                    | <b>Učna pot</b>                    | 9   |
|                    | <b>II. del</b>                     |     |
| <i>Visoka šola</i> | <b>28 Kompleksna števila</b>       | 11  |
|                    | <b>29 Vektorji in matrike</b>      | 21  |
|                    | <b>30 Večkratne funkcije</b>       | 33  |
|                    | <b>31 Krivulje in ploskve</b>      | 43  |
|                    | <b>32 Prostorska polja</b>         | 61  |
|                    | <b>33 Statistika</b>               | 73  |
|                    | <b>34 Dinamika</b>                 | 93  |
|                    | <b>35 Relativnost</b>              | 117 |
|                    | <b>36 Termokinetika</b>            | 137 |
|                    | <b>37 Statična E &amp; M polja</b> | 161 |
|                    | <b>38 Elektromagnetni valovi</b>   | 187 |
|                    | <b>39 Elektroni in ioni</b>        | 211 |
|                    | <b>40 Elektronika</b>              | 231 |
|                    | <b>41 Kvantni delci</b>            | 261 |
|                    | <b>42 Valovna mehanika</b>         | 289 |
|                    | <b>43 Kvantna statistika</b>       | 313 |
|                    | <b>44 Atomska jedra</b>            | 331 |
|                    | <b>45 Zvezde in vesolje</b>        | 357 |
|                    | <b>Pot naprej</b>                  | 383 |
|                    | <b>Glavni viri</b>                 | 397 |
|                    | <b>Viri slik</b>                   | 399 |
|                    | <b>Kazalo</b>                      | 403 |



# Predgovor

Dragi bralec, pred teboj je postopni vhod v matematiko, fiziko in tehniko kot soodvisne dosežke človeškega rodu od davnine do danes.

Knjigo sem napisal za svoje lastne potrebe in v svoje lastno zadovoljstvo. Hotel sem si ustvariti gladko pot iz ravnine naravoslovnega neznanja najprej na griče, odtod na hribe, in končno na gore spoznanja. Pri tem sem želel na vsakem koraku čutiti, kot da si pot utiram sam, in sicer zgolj na podlagi dotlej pridobljenega znanja in orodij. Na takšni poti ne bi smelo biti neutemeljenih definicij in postulatov, vzetih iz zraka, še zlasti pa ne nedokazanih trditev in sklicevanj na prihodnost. Do vsega sem želel priti razvidno in "sam".

Za voditeljico sem izbral zgodovino: kakor se je učil človeški rod, tako se naj uči človeški posameznik. Znanje, ki ga je do sedaj pridobilo človeštvo, namreč ni bilo brez razloga doseženo po poti, kakor jo kaže zgodovina. Razvoj znanja je mogoč le na podlagi obstoječega znanja in le v družbenem okolju, ki tovrsten razvoj podpira in po njem povprašuje. Takšna pot se mi zato zdi najbolj naraven, zanimiv in učinkovit vhod v znanost. Seveda pa je pri tem smotrno izpustiti številne zgodovinske zablode in stranpoti.

Količino znanja sem strogo omejil. Vključil sem le najpomembnejše. Znanje sem oblikoval v zaokrožena poglavja, navznoter čimbolj homogena in med seboj šibko sklopljena. Poglavja sem razvrstil po višinskih stopnjah: najprej griče, nato hribe in končno gore. Vsaka naslednja stopnja je zgodovinsko mlajša in gradi na prejšnji. Višja poglavja vsebujejo nižja kot posebne primere. Na poti skozi poglavja se noben korak ne sklicuje na prihodnje korake. Definicije, postulati in domneve so uvedeni: razvidno je, kaj nas navaja oziroma sili do njih. Izreki so izpeljani. Meritve so opisane. Če na dani stopnji ni možno dokazati izrekov in izvesti meritev, na to stopnjo ne spadajo. Vsako novo spoznanje je čimprej uporabljeno.

Razvoj znanja z zgodovino kot voditeljico nikakor ni brez težav. Stari avtorji so uporabljali drugačno besedišče in drugačno matematično pisavo kot danes. Zlasti velja to za simbolično stenografijo, ki se je pojavila šele dokaj pozno. Posamična odkritja praviloma tudi niso bila plod dela enega samega raziskovalca, marveč je bilo pri njih udeleženih več avtorjev. Težko je ugotoviti in pravično oceniti, kakšen delež pripada komu. In pot do odkritij je bila dostikrat hudo zavita.

Navedene težave sem poskušal odpraviti takole. Od vsega začetka sta uporabljena sodobno besedišče in sodobna matematična pisava. Da zgodovina ne bi zasenčila vsebine, sem v besedilu omenil le najvažnejše raziskovalce. Kolikor le mogoče

sem se izognil poimenovanju pojavov, poskusov, konstant, zakonov in izrekov po osebah; namesto tega sem uporabil čim bolj nevtrarno poimenovanje. Končno sem si vzel še pravico, da do nekaterih spoznanj pristopim drugače in v drugem vrstnem redu, kot so se zares zgodila. Bralce prosim, da to sprejmejo z razumevanjem.

V knjigi (prvem in drugem delu) je domala 500 slik. Kakšnih 30 % je mojih. Okrog 20 % jih je v javni lasti, ker so bile objavljene pred letom 1923 oziroma je minilo več kot 70 let od smrti njihovih avtorjev. Približno 40 % je takih, ki posebnega dovoljenja za objavo ne potrebujejo, ker so tako odločili njihovi avtorji ali ker prvi avtorji niso znani. Za preostalih 10 % slik pa ocenjujem, da njihova objava zadošča zahtevam "fair use" - med drugim je nekomercialna in izobraževalna ter ne škoduje tržnim aktivnostim lastnikov licenc - in je zato dovoljena. Lastnikom licenc se vnaprej zahvaljujem za razumevanje in dobrohotnost.

Ko izročam knjigo javnosti, imam v mislih naslednjo ciljno skupino bralcev: to so odrasli ljubiteljski in poklicni naravoslovci, ki jih zanimajo osnove, razvoj in poučevanje znanosti ter si želijo potešiti prav tisto, kar je navedlo mene do pisanja. Še posebej si želim, da bi knjiga našla pot do študentov pedagoške fizike in do učiteljev fizike na vseh šolskih stopnjah. Prvi še plezajo na svoje vrhove znanja, drugi pa so jih večinoma že osvojili, a so morda v dvomih, katera znanja naj posredujejo in po kateri poti naj vodijo, da bo izid najboljši. Zadovoljen bom, če jim bo knjiga pri tem pomagala.

— MARJAN DIVJAK

# Vodila

- Merjenje Če lahko to, o čemer govorite, izmerite in izrazite s števili, potem nekaj veste o tem; če pa ne znate tega meriti, če ne znate tega izraziti s števili, je vaše znanje borne in nezadostne vrste.  
— W. THOMSON
- Teorija in poskus Znanost hodi po dveh nogah, teoriji in poskusu. Zdaj postavi naprej eno nogo, zdaj drugo. Nenehen napredek je mogoč samo z uporabo obeh – s teoretičnim razmišljanjem in potem s preizkušanjem, ali z odkrivanjem novih zvez pri poskusih in potem s tem, da pristavimo teoretično nogo in jo porinemo naprej in tako dalje izmenoma. — R. MILLIKAN
- Teorije in resničnost Pri naporih, da bi dojali resničnost, ravnamo kot človek, ki poskuša doumeti mehanizem zaprte žepne ure. Vidi številčnico in pomikanje kazalcev ter sliši celo tiktakanje, vendar nikakor ne more odpreti ohišja. Če je bister, si zamisli mehanizem, ki mu more pripisovati vse to, kar vidi in sliši. Vendar se nikakor ne more zanesti na to, da je edino njegova zamisel taka, da se morejo z njo pojasniti opazovanja. Svojih zamisli ne more nikdar preizkusiti ob resničnem mehanizmu. — A. EINSTEIN
- Pomen matematike Matematika je jezik za količinsko opisovanje sveta ... Napredovala je, kadar je bilo za matematike kaj resničnega dela, in je zastajala, kadarkoli je postala igrača v rokah skupine ljudi, odtujene od vsakdanjega življenja človeštva ... Sedaj je postalo modno reči, da je matematika samo igra. Seveda nam to ne pove prav ničesar o njej. Nekaj nam pove le o kulturnih omejitvah nekaterih matematikov. Ko človek reče, da je matematika igra, se osebno izjavlja. Nekaj nam pove o sebi, o svojem lastnem odnosu do nje. Nič nam ne pove o javnem pomenu matematičnega jezika.  
— L. HOGBEN
- Poučevanje znanosti Dvignil sem učbenik fizike, ki so ga uporabljali ... Začel sem brati: "Triboluminiscenca. Triboluminiscenca je svetloba, ki jo oddajajo kristali pri drobljenju ..." Rekel sem: "Torej, je to znanost? Ne! Povedali ste samo, kaj neka beseda pomeni z drugimi besedami. Ničesar niste povedali o naravi – kateri kristali sevajo svetlobo pri drobljenju, *zakaj* sevajo ... Če pa bi namesto tega zapisali 'Ko vzameš kocko sladkorja in jo zdrobiš s kleščami v temi, zagledaš modrikast blisk. Tudi nekateri drugi kristali se tako obnašajo. Nihče ne ve, *zakaj*. Pojav imenujemo triboluminiscenca,' potem je to izkušnja narave." — R. FEYNMAN
- Genetična pot V svoji predstavitvi bom praviloma sledil genetični metodi. Bistvena zamisel te metode je, da je vrstni red, v katerem je človeštvo pridobilo znanje, tudi dober vrstni red za njegovo pridobivanje pri posamezniku ... Vendar to ne pomeni, da moramo pri poučevanju znanosti ponoviti tisoč in eno napako iz preteklosti. — G. POLYA



# Učna pot

Kakor se je učil človeški rod, tako se naj uči človeški posameznik. To je genetično načelo učenja znanosti. Po njem želimo vstopiti v svet matematike, fizike in tehnike.

Učenje znanosti po genetičnem načelu zahteva, da definiramo ustrezne *šolske stopnje* in jih povežemo z zgodovinskimi dobami. Storimo to! *Predšola* naj pokrije prazgodovino (pred 5000 let pr. n. št.), *osnovna šola* stari in srednji vek (do 1500 let n. št.), *srednja šola* novi vek (do 1900 let n. št.) in *visoka šola* sodobnost. Seveda bomo meje po potrebi tudi prestopali. Napredovati torej hočemo po naslednjih šolskih / družbenih razvojnih stopnjah.

Predšola *Nabiralništvo in lov*. Kakšnih 100 000 let pr. n. št. se v Afriki pojavi sodobni človek in se do 10 000 let pr. n. št. razširi po vseh kontinentih. Je nabiralec in lovec. Pozna kamnito orodje, ogenj in obleko iz kož. Takratno podnebje je hladno in spremenljivo.

Nižja osnovna šola *Poljedelstvo in živinoreja*. Okrog 10 000 let pr. n. št. se podnebje nenadoma otopli in umiri. Ljudje takoj izkoristijo nove pogoje. V evrazijskih stepah se pojavi nomadska živinoreja. V rodovitnih predelih Bližnjega vzhoda, Jangcekjanga, Mezoamerike in Andov pa se razvije poljedelstvo ter se razširi v okolico. Ljudje se ustale v vaseh. Poznajo lončarstvo, tkalstvo in kovine.

*Kmetijske države in gradbeništvo*. Poljedelsko prebivalstvo se počasi namnoži in se organizira v države. Razvijejo se mezopotamska (3500 let pr. n. št.), egipčanska (3000 let pr. n. št.), kitajska (2000 let pr. n. št.), majevska (300 let n. št.), azteška (1200 let n. št.) in inkovska (1200 let n. št.) civilizacija. Ljudje orjejo, namakajo in zidajo stavbe ter templje. Ponekod prevažajo tovore z vozmi in veslačami. Uvedejo pisavo, številke, koledar, kataster in zakonik.

Višja osnovna šola *Urbanizacija in rokodelstvo*. Ob Sredozemskem morju, na robu Mezopotamije in Egipta, se okrog leta 1000 pr. n. št. razvijejo primorske mestne države, najprej feničanske in grške. Trgujejo in kujejo denar. Rimska država okrog leta 0 n. št. imperializira Sredozemlje in prinese državnost v njegove province. Z velikostjo pa rastejo tudi težave na mejah. Pastirski nomadi iz srednje Evrazije okrog leta 500 n. št. razrušijo zahodni del imperija. Na njegovem ozemlju se pojavijo nove države. Nato si nomadi iz Arabije do leta 1000 n. št. podvržejo južni in vzhodni del. Znanja iz vzhodne Evrazije prinesejo na njen zahod.

Srednja šola *Pomorstvo in trgovina*. Prebujene zahodnoevropske države okrog leta 1500 n. št. razvijejo tisk, smodniško orožje in oceanske jadrnice. Kolonizirajo Afriko, Ameriko, Avstralijo in Oceanijo. Trgovina močno poraste.

*Industrija in elektrifikacija.* Svetovni trg zahteva svoje. Razvije se tovarniška proizvodnja snovi in izdelkov, ki jo okrog leta 1800 n. št. začno poganjati parni stroji. Sledi odkritje elektromagnetizma, kar spremeni svet. Države se elektrificirajo: gradijo elektrarne ter preko daljnovodov napajajo elektromotorje, grelce in razsvetljavo v industriji, mestih in gospodinjstvih. Namnožijo se motorni avtomobili, vlaki, ladje, podmornice in letala.

Visoka šola *Komunikacije in informatika.* Človeštvo po letu 1900 n. št. iznajde brezžične električne komunikacije, digitalno zajemanje in zapis informacij, računalnike in jedrski reaktor. V vesolje pošlje satelite, sonde in ljudi. Na obzorju se pokaže nesluten razvoj robotike in medicine.

V vsaki izmed naštetih dob so se rojevali posamezniki, znani in neznani, ki so doprinašali k razvoju takratne znanosti. Seveda so njihovi doprinosi vplivali nazaj na družbeno okolje in ga po svoje preoblikovali. Privzemimo vlogo teh posameznikov in se podajmo na čudovito pot spoznavanja in mojstritve narave od pradavnine do današnjih dni!



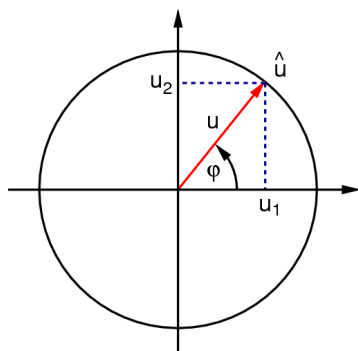
## 28 Kompleksna števila

Skalarji in fazorji – Računske operacije – Imaginarna enota – Potenca in eksponencial – Kompleksne funkcije – Harmonične vrste – Primer spektralne analize – Kompleksne harmonične vrste – Harmonični integrali

### 28.1 Skalarji in fazorji

Zasuk nihala Na vrvici obešena kroglica – težno nihalo – lahko niha sem in tja v navpični ravnini. Trenutni odmik kroglice iz njene ravnovesne lege opišemo z ustreznim relativnim številom, skalarjem: odmik v desno, na primer, je pozitiven in odmik v levo je negativen. Odmik nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še predznak.

Kroglica pa lahko tudi kroži v vodoravni ravnini; pri tem se njena projekcija na poljubni premer kroga spreminja. Trenutni zasuk nihala opišemo potem na dva načina: z dvema projekcijama – odmikoma  $u_1$  in  $u_2$  – na dva medsebojno pravokotna premera ali z velikostjo  $u$  in fazo  $\varphi$ . Zasuk nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še fazo. Odmik nihala je poseben primer zasuka za fazo 0 ali  $180^\circ$ .



**Slika 28.1** Zasuk kot kompleksno število oziroma fazor.

Kompleksna števila ali fazorji

Na odmika  $u_1$  in  $u_2$ , ki opisujeta zasuk, pogledamo kot na celoto in proglasimo: vsakršna dvojica relativnih števil  $(u_1, u_2)$  je *kompleksno število*  $\hat{u}$  z *realno* komponento  $u_1$  in *imaginarno* komponento  $u_2$ . Obenem definiramo še *absolutno vrednost*  $|\hat{u}|$  in *fazo*  $\text{Arg}(\hat{u})$ :

$$\hat{u} = (u_1, u_2) = (u \cos \varphi, u \sin \varphi) \quad (28.1)$$

$$\text{Re}(\hat{u}) = u_1$$

$$\text{Im}(\hat{u}) = u_2$$

$$|\hat{u}|^2 = u^2 = u_1^2 + u_2^2$$

$$\text{Arg}(\hat{u}) = \varphi = \text{atan} \frac{u_2}{u_1}.$$

Ker ima kompleksno število poleg velikosti še fazo, mu bomo rekli tudi *fazor*. Poljuben fazor bomo označili s črkami  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  in  $\hat{w}$ .

## 28.2 Računske operacije

Kompleksna števila (fazorji) so razširitev relativnih števil (skalarjev). Slednja vključujejo kot pare, katerih imaginarna komponenta je enaka nič. Računanje s fazorji hočemo zato definirati tako, da bo pomen računskih operacij nad skalarji ohranjen. Razviti hočemo kompleksni račun (BOMBELLI, EULER, GAUSS).

Množenje fazorja s skalarjem

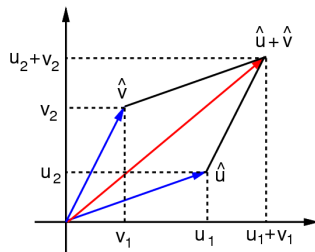
Naj ima fazor imaginarno komponento enako nič. Tedaj je "enakopraven" navadnemu realnemu odmiku. Množenje takega odmika s pozitivnim ulomkom pomeni njegov razteg ali skrčitev, z negativnim pa hkrati še obrat njegove usmeritve. Zato definiramo tako tudi za kompleksni zasuk:

$$c\hat{u} = (cu_1, cu_2). \quad (28.2)$$

Seštevanje in odštevanje fazorjev

Seštevanje dveh realnih odmikov pomeni, da na konec prvega natakemo začetek drugega in oba nadomestimo s premikom, ki sega od začetka prvega do konca drugega. Zato definiramo tako tudi za kompleksne zasuke:

$$\hat{u} + \hat{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2). \quad (28.3)$$



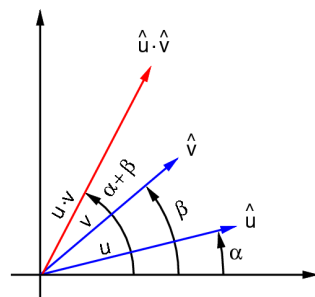
**Slika 28.2** Seštevanje fazorjev po paralelogramskem pravilu.

To je že znano paralelogramsko pravilo za seštevanje premikov (9.7). Odštevanje je obratna operacija k seštevanju in ga tako tudi definiramo: znake za seštevanje (+) nadomestimo z znaki za odštevanje (-).

Množenje in deljenje fazorjev

Fazor  $u$  ( $\cos \varphi, \sin \varphi$ ) opisuje razteg realnega enotnega premika za faktor  $u$  in zasuk za kot  $\varphi$ . To nas sili, da množenje fazorja  $\hat{u} = u (\cos \alpha, \sin \alpha)$  s fazorjem  $\hat{v} = v (\cos \beta, \sin \beta)$  definiramo kot zasuk prvega za argument drugega in hkratni ustreznosti razteg:

$$\hat{u} \hat{v} = uv (\cos (\alpha + \beta), \sin (\alpha + \beta)). \quad (28.4)$$



**Slika 28.3** Množenje fazorjev po sučnem pravilu. Prvi fazor zasučemo za fazo drugega fazorja in ga pomnožimo z njegovo velikostjo.

Deljenje je obratna operacija od množenja, zato smo prisiljeni definirati

$$\hat{u}/\hat{v} = (u/v) (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)). \quad (28.5)$$

Množenje in deljenje smo definirali z absolutnimi velikostmi in argumenti operandov. Ugodno bi bilo vedeti, kako se to zapiše s komponentami. Neposredni račun pokaže:

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{v} &= (u_1v_1 - u_2v_2, u_1v_2 + u_2v_1) \\ \hat{u}/\hat{v} &= (u_1v_1 + u_2v_2, u_2v_1 - u_1v_2). \end{aligned} \quad (28.6)$$

Z vpeljanimi definicijami ostanejo v veljavi vsa računska pravila, ki veljajo za skalarje (in še prej za naravna števila) (2.1): vsota in produkt dveh fazorjev sta komutativna in asociativna, produkt pa je distributiven glede na vsoto.

### 28.3 Imaginarna enota

Enotni fazorji Definiciji za vsoto in produkt omogočata, da poljuben fazor zapišemo v obliki

$$\hat{u} = u_1 \cdot (1, 0) + u_2 \cdot (0, 1). \quad (28.7)$$

Številski para  $(1, 0)$  in  $(0, 1)$  poimenujemo *realna enota* in *imaginarna enota*. Njuni velikosti sta, sledeč definiciji, enaki 1. Krajše zapišemo

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_1 + iu_2 \\ i &= (0, 1). \end{aligned} \quad (28.8)$$

Imaginarna enota kot navidezni skalar

Realno enoto  $(1, 0)$  torej zapišemo kar kot skalar 1, imaginarno enoto  $(0, 1)$  pa kot "skalar"  $i$ . Ta zapis ima izjemno praktično vrednost. Če se delamo, da je imaginarna enota  $i$  kar navaden skalar, lahko vsako kompleksno število obravnavamo kot skalarni binom. Te pa igranje seštevamo, odštevamo, množimo in delimo! Če med računom pridelamo kvadrat ali kakšno višjo potenco imaginarne enote, upoštevamo, da velja, sledeč definiciji množenja,  $i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ , torej

$$i^2 = -1. \quad (28.9)$$

Rezultat, ki ga dobimo, je prav tak, kot če bi mukoma računali s pari števil po osnovnih definicijah. Zgled pove to najboljše.

Namesto takole:  $(3, 5) \cdot (2, 4) = (3 \cdot 2 - 5 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2) = (-14, 22)$  računamo raje takole:  $(3 + 5i)(2 + 4i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5i + 4i \cdot 3 + 4i \cdot 5i = 6 + 22i + 20i^2 = -14 + 22i$ . Razlika je očitna.

Množenje skalarja z imaginarno enoto nazorno pomeni, da skalar zavrtimo za kot  $90^\circ$  v nasprotni smeri urinega kazalca. Dvakratno množenje z imaginarno enoto torej zavrti skalar za  $180^\circ$ , to je, spremeni mu predznak. To velja tudi za množenje kateregakoli fazorja z imaginarno enoto.

Konjugirana kompleksna števila

Velikost kompleksnega števila  $\hat{u}$  je podana, kot vemo, takole:  $|\hat{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2$ . To je enako produktu  $(u_1 + iu_2)(u_1 - iu_2)$ . Drugi

faktor je očitno enak prvemu, le predznak imaginarne enote ima nasproten. Rečemo, da je prvemu *konjugiran*, in zapišemo

$$\begin{aligned}\hat{u}^* &= u_1 - iu_2 \\ |\hat{u}|^2 &= \hat{u}\hat{u}^*.\end{aligned}\tag{28.10}$$

Konjugirano vrednost fazorja si nazorno predstavljamo kot njegovo preslikavo preko realne osi.

### 28.4 Potenca in eksponencial

Fazor kot baza  
potence

Naravno potenco fazorja definiramo enako kot naravno potenco skalarja:

$$\hat{u}^n = \hat{u} \cdot \hat{u} \dots \hat{u}.\tag{28.11}$$

To zaradi (28.4) ne pomeni nič drugega kot

$$\hat{u}^n = u^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).\tag{28.12}$$

Namesto naravnega eksponenta  $n$  si v zapisanem obrazcu mislimo recipročni naravni eksponent (koren)  $1/n$ , ulomni eksponent  $p = n/m$  ali relativni eksponent  $\pm p$ . Ali obrazec za takšne skalarne eksponente še vedno velja, je nesmiselno vprašati, saj potenciranja fazorja z "nenaravnim" eksponentom  $s$  še nismo definirali. Pa proglašimo prav ta obrazec za definicijo! Torej:

$$\hat{u}^s = u^s (\cos s\varphi + i \sin s\varphi).\tag{28.13}$$

Paziti moramo le na naslednje. Ker sta sinus in kosinus periodični funkciji, je treba namesto izraza  $\varphi/n$  računati izraze  $(\varphi + k2\pi)/n$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots n-1$ . "Nenaravne" potence fazorja so torej večlične.

Kvadratni koren iz negativnih skalarjev doslej ni bil določen, to je, ne obstajajo skalarji - ne pozitivni ne negativni -, katerih kvadrat bi bil negativni skalar. Če pa na skalar  $-p$  pogledamo kot na ekvivalentni fazor  $(-p, 0)$ , potem je kvadratni koren iz njega prav lahko najti:  $(-p, 0)^{1/2} = p^{1/2} (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = ip^{1/2}$ . Kvadratni koreni negativnih skalarjev so (imaginarna) kompleksna števila.

Fazor kot eksponent  
potence

Kako pa bi razširili eksponencial (potenco z bazo  $e$ ) od skalarnega argumenta na kompleksnega? Stisnimo zobe in razvijmo funkcijo  $e^{i\varphi}$  - za katero ne vemo, kaj pomeni! - v potenčno vrsto, kakor da bi bil argument  $i\varphi$  skalar! Pri tem upoštevajmo pravilo  $i^2 = -1$ , s čimer v vrsti ostanejo samo gole vrednosti  $i$ . Naredimo še en greh in zberimo skupaj vse tiste člene, ki ne vsebujejo  $i$ , ter skupaj one, ki  $i$  vsebujejo. Iz slednjih izpostavimo  $i$  in dobimo vsoto dveh vrst. Vzhičeno ugotovimo, da sta to potenčni vrsti za kosinus in sinus, torej

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.\tag{28.14}$$

Če naj si eksponentna funkcija zasluži svoje ime, bi moralo veljati še

$$e^{\hat{u}} = e^{u_1 + iu_2} = e^{u_1} e^{iu_2} = e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2). \quad (28.15)$$

Pri  $u_2 = 0$  se pridelani kompleksni eksponencial zares reducira v skalarnega. No, pa proglasimo ta rezultat, do katerega smo prišli s stisnjenimi zobmi, za definicijo kompleksnega eksponenciala! To gotovo lahko naredimo, kajti s tem nič ne vplivamo na dosedanja dejstva o skalarnem eksponencialu. Pravo vprašanje pa je seveda tole: ali iz sprejete definicije sledijo takšna pravila za računanje s kompleksnimi eksponentiali, ki so enaka računskim pravilom za skalarne eksponentiale? Kratki računi res pokažejo, da veljajo osnovna pravila  $\exp \hat{u} \cdot \exp \hat{v} = \exp (\hat{u} + \hat{v})$ ;  $\exp \hat{u} / \exp \hat{v} = \exp (\hat{u} - \hat{v})$ ; in  $\exp \hat{u}^{\hat{v}} = \exp (\hat{u} \cdot \hat{v})$ . Sprejeta definicija je torej dobra.

Najlepša enačba

Če za argument v eksponencialu izberemo  $i\pi$ , dobimo presenetljivo enačbo  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . V njej je medsebojno povezanih pet najpomembnejših števil: 0, 1,  $\pi$ ,  $e$  in  $i$ , povezujejo jih pa tri osnovne operacije: seštevanje, množenje in potenciranje. Za povrh je vključen še znak enakosti. Mnogi imajo to enačbo za najlepšo od vseh v matematiki.

### 28.5 Kompleksne funkcije

Kompleksni zapis  
kotnih funkcij

Enačba  $\exp i\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$  kaže, kako je eksponentna funkcija (imaginarnega argumenta) izražena s kotnimi funkcijami. Ali je možno tudi obratno, torej izraziti kakšno kotno funkcijo z eksponentnimi funkcijami? Za  $\varphi \rightarrow -\varphi$  se enačba glasi  $\exp (-i\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$ . Obe enačbi seštejemo in dobimo

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \quad (28.16)$$

Če enačbi odštejemo, pa pridelamo

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (28.17)$$

Uspeli smo. Za izračunavanje numeričnih vrednosti kotnih funkcij, recimo za izračun  $\cos 3$  ali  $\sin 3$ , izpeljani enačbi sicer nista uporabni, saj se reducirata v identiteto. Na primer:  $\cos 3 = [\exp i3 + \exp (-i3)]/2 = [(\cos 3 + i \sin 3) + (\cos 3 - i \sin 3)]/2 = \cos 3$ . Sta pa zelo uporabni pri dokazovanju trigonometričnih identitet, recimo znamenite identitete  $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$ . Računanje z eksponentnimi funkcijami je namreč mnogo lažje od računanja s kotnimi funkcijami.

Kotne funkcije  
kompleksnega  
argumenta

Nič nam ne brani, da razširimo definicijo kotnih funkcij tudi na kompleksne argumente:

$$\begin{aligned} \cos \hat{u} &= \frac{e^{i\hat{u}} + e^{-i\hat{u}}}{2} \\ \sin \hat{u} &= \frac{e^{i\hat{u}} - e^{-i\hat{u}}}{2i}. \end{aligned} \quad (28.18)$$

S tem postaneta funkciji sinus in kosinus kompleksni, to je, njuna zaloga vrednosti so kompleksna števila. Na primer:  $\cos(4i + 3) = [\exp(-4 + 3i) + \exp(4 - 3i)]/2 = [\exp(-4) \exp 3i]/2 + [\exp 4 \exp(-3i)]/2 = [\exp(-4)/2](\cos 3 + i \sin 3) + [\exp(+4)/2](\cos 3 - i \sin 3) = [\exp(-4) + \exp 4] \cos 3/2 + i[\exp(-4) - \exp 4] \sin 3/2$ , kar je kompleksno število.

Kompleksne funkcije  
skalarja

Na izraz  $\hat{u} = u(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  lahko pogledamo kot na kompleksno funkcijo  $\hat{u}$  skalarne argumenta  $\varphi$ : vsaki vrednosti  $\varphi$  pripada natanko določena vrednost  $\hat{u}$ . Splošno funkcijo te vrste lahko definiramo kot

$$\hat{u}(t) = u_1(t) + iu_2(t), \quad (28.19)$$

recimo  $\hat{u} = at + ibt^2$ . Pojavi se vprašanje, ali in kako lahko takšne funkcije odvajamo in integriramo. Pravzaprav ni kaj dosti premišljovati. Odvod definiramo kot

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{du_1}{dt} + i \frac{du_2}{dt} \quad (28.20)$$

in integral kot

$$\int \hat{u} dt = \int u_1 dt + i \int u_2 dt. \quad (28.21)$$

Ko členoma odvajamo  $(d/d\varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , dobimo  $-\sin \varphi + i \cos \varphi$ , kar je enako  $i(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Zapisano z eksponentialom to pomeni  $(d/d\varphi)e^{i\varphi} = ie^{i\varphi}$ . Vidimo, da kompleksni eksponential odvajamo natanko tako kot skalarne, pri čemer obravnavamo enoto  $i$  kot navaden skalar. Podobno velja za integriranje.

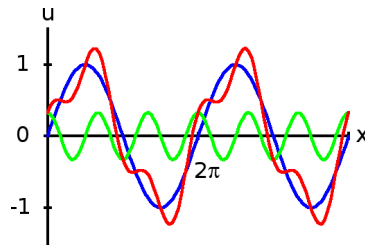
Kompleksne funkcije  
fazorja

Na izraze  $\hat{w} = c\hat{u}$ ,  $\hat{w} = \hat{u}^2$ ,  $\hat{w} = e^{\hat{u}}$ ,  $\hat{w} = \cos \hat{u}$  ali  $\hat{w} = \sin \hat{u}$  lahko pogledamo kot na kompleksne funkcije fazorskega argumenta. Vsaki vrednosti  $\hat{u}$  pripada natanko določena vrednost  $\hat{w}$ . Splošno funkcijo te vrste zapišemo kot  $\hat{w} = f(\hat{u})$ . Očitno je, da je to preslikava točk (in s tem krivulj) iz ene ravnine v drugo ravnino. Podrobnejše obravnavanje takih funkcij, vključno z njihovim odvajanjem, integriranjem in razvojem v potenčne vrste, pa prepustimo drugim, ki to potrebujejo ali jih zanima.

## 28.6 Harmonične vrste

Superpozicija  
harmonikov

Struna lahko niha harmonično s (krožnimi) frekvencami  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  itd. Osnovno nihanje se ponavlja po vsaki periodi  $T = 2\pi/\omega$ , naslednje po periodi  $T_2 = 2\pi/2\omega$ , pa tudi po periodi  $T = 2T_2$ , itd. Aktualno periodično nihanje strune je sestavljeno iz vsote izbranih harmoničnih nihanj. S primerno izbiro harmoničnih komponent je možno pridelati zelo različne periodične funkcije.



**Slika 28.4** Vsota dveh sinusoid. Modra je  $\sin x$ , zelena je  $(1/3) \cos 3x$ , rdeča je vsota. Prikazan je interval med 0 in  $4\pi$ . Če sta frekvenci v celoštevilčnem razmerju, je rezultat periodična funkcija.

To nas navaja na misel, da se da vsaka (ne preveč divja) periodična funkcija s periodo  $T$  zapisati v obliki *harmonične vrste* (FOURIER)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (28.22)$$

Pri tem je  $\omega = 2\pi/T$ . Za nekatere funkcije je morda dovolj le nekaj členov, za druge pa je potrebnih neskončno mnogo.

Razvoj funkcije v harmonično vrsto

Če poznamo amplitude  $a_n$  in  $b_n$ , lahko funkcijo  $f(t)$  zlahka izračunamo. Kaj pa obratno? Če poznamo funkcijo, ali lahko izračunamo amplitude?

Razmišljamo takole. Preko periode  $T$  ima vsak sinus enako mnogo hribov kot dolin; njegov integral je zato nič. Podobno velja za kosinuse. Integral vseh členov, razen konstantnega, je zato nič, in integral funkcije mora zato biti enak integralu konstantnega člena:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (28.23)$$

Če pomnožimo harmonično vrsto (28.22) na levi in desni strani s členom  $\cos k\omega t$ , pridelamo na desni strani vsoto "istoimenskih" produktov  $\cos n\omega t \cdot \cos k\omega t$  in "raznoimenskih" produktov  $\sin n\omega t \cdot \cos k\omega t$ . Potem integriramo vsako stran preko periode  $T$ . "Raznoimenski" integrali so vsi enaki nič. "Istoimenski" integrali pa so tudi enaki nič, če  $n \neq k$ ; le v enem samem primeru, ko  $n = k$ , znaša integral  $T/2$ . Velja torej

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (28.24)$$

Na podoben način ugotovimo še

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (28.25)$$

Integriranje poteka preko periode  $T$ . Ta je seveda lahko poljubno zamaknjena. Namesto spodnje meje 0 lahko zato izberemo poljubno mejo  $t_0$  in integriramo med  $t_0$  in  $t_0 + T$ .

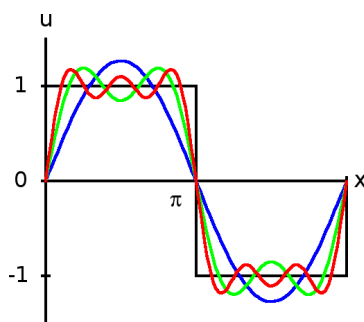
Vsota amplitud Energija harmoničnega nihanja nihala je sorazmerna s kvadratom amplitude (21.19). To nas navede na izračun integrala  $f^2$  preko periode  $T$ . Morda bomo odkrili kaj zanimivega? Trigonometrično vsoto kvadriramo in pridelamo množico mešanih produktov med sinusi in kosinusi. Vsi produkti razen kvadratov sinusov in kosinusov so enaki nič in velja:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (28.26)$$

Povprečna vrednost kvadrata funkcije je torej enaka vsoti kvadratov posamičnih amplitud.

### 28.7 Primer spektralne analize

Škatlasta funkcija Za zgled razvijmo v harmonično vrsto, to je *spektralno analizirajmo*, "škatlasto" periodično funkcijo, ki je na prvi polovici periode enaka  $f(t) = 1$  in na drugi polovici enaka  $f(t) = -1$ . Upamo, da funkcija zaradi nezveznih skokov ni predivja za legitimni razvoj.



**Slika 28.5** Škatlasta funkcija in njeni harmoniki. Prvi harmonik je moder, vsota prvih dveh je zelena in vsota prvih treh je rdeča.

Integrale  $f(t) \cos n\omega t$  in  $f(t) \sin n\omega t$  preko cele periode razdelimo na dva dela: preko prve polovice in preko druge polovice, jih zlahka integriramo in dobimo  $f(t) = (4/\pi) [(1/1) \sin \omega t + (1/3) \sin 3\omega t + (1/5) \sin 5\omega t + \dots]$ . Funkcija je liha in je zato sestavljena iz samih sinusov.

Pri  $t = T/4$  znaša  $f(t) = 1$  in  $\omega t = (2\pi/T)(T/4) = \pi/2$ , zato se vrsta zapiše kot  $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots$ . To je že znana vrsta (17.10). Povprečje kvadrata funkcije je 1 in je enako vsoti kvadratov spektralnih koeficientov, iz česar sledi

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (28.27)$$

Obe številski vrsti lahko izračunamo in ugotovimo, da res držita. To je pokazatelj (če že ne dokaz), preko posledic, da je spektralna analiza "skokovitih" funkcij veljavna. Na podoben način lahko pridelamo mnoge zanimive številske vrste.



## 28.8 Kompleksne harmonične vrste

Kompleksna vrsta

Če trigonometrične funkcije zapišemo v obliki  $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$  in  $\sin \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ , se razvoj v harmonično vrsto zapiše prav na kratko:

$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_n e^{in\omega t} \quad (28.28)$$

$$\hat{A}_0 = a_0$$

$$\hat{A}_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

$$\hat{A}_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n)$$

iz česar sledi tudi

$$\hat{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (28.29)$$

in še

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{A}_n|^2. \quad (28.30)$$

To je kompleksni zapis harmonične vrste. Tak zapis je ugoden zato, ker je integriranje eksponentnih funkcij, čeravno kompleksnih, praviloma lažje od integriranja trigonometričnih funkcij.

## 28.9 Harmonični integrali

Zvezni spekter

Kaj pa, če funkcija ni periodična, to je, če je njena perioda neskončna? Naj bo perioda  $T$  zelo dolga: pomislimo na enkratni brenk na struno, ki se ponovi le vsako uro. Tedaj je osnovna frekvenca  $\omega_0 = 2\pi/T$  zelo majhna. Posamezne frekvence  $\omega = n\omega_0$  so zato razporejene zelo na gosto. Pričakujemo, da se amplitude  $\hat{A}_n$  potem z naraščanjem  $n$  le počasi spreminjajo. Število spektralnih črt  $dn$  na intervalu  $d\omega$  znaša  $dn = d\omega/\omega_0$ . Vsota amplitud na tem intervalu je  $\hat{A}_n dn = (\hat{A}_n/\omega_0) d\omega$ . Definiramo *gostoto spektra* kot  $\hat{A}_n/\omega_0 = \hat{A}(\omega)$ , pa lahko vsoto zapišemo z integralom:

$$f(t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (28.31)$$

Izračun spektra

Gostoto zveznega spektra razberemo iz enačbe za diskretne spektralne koeficiente. Periodo  $T$  zapišemo kot  $2\pi/\omega_0$ , delimo obe strani z  $\omega_0$  in pridemo

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (28.32)$$

Podobno dobimo še povezavo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{A}(\omega)|^2 d\omega. \quad (28.33)$$

Simetrična transformacija

Realna funkcija  $f(t)$  in kompleksna funkcija  $\hat{A}(\omega)$  sta torej medsebojno povezani. Rečemo, da je ena harmonična transformacija druge. Tistim, ki radi posplošujejo in imajo radi simetrijo, se ob tem porodi naslednja misel: zakaj ne bi bili obe funkciji kompleksni in zakaj ne bi bil predintegralski faktor pri obeh transformacijskih enačbah isti, najbolje kar enak ena? Če stisnemo zobe in proglasimo  $f(t)$  za kompleksno funkcijo  $\hat{f}(t)$ ; če namesto  $\omega$  pišemo  $2\pi\nu$ , torej  $d\omega = 2\pi d\nu$ ; in če zapišemo še  $2\pi\hat{A}(\omega) = \hat{B}(\nu)$ , s tem pridelamo par

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ \hat{B}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \end{aligned} \quad (28.34)$$

ter povezavo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{B}(\nu)|^2 d\nu. \quad (28.35)$$

To je iskana transformacija v "unitarni" obliki. Zapisano gotovo velja, če  $\hat{f}(t) = (f(t), 0)$ . Da pa velja širše, nas prepričuje simetrija. Pustimo se ji prepričati.  $\square$

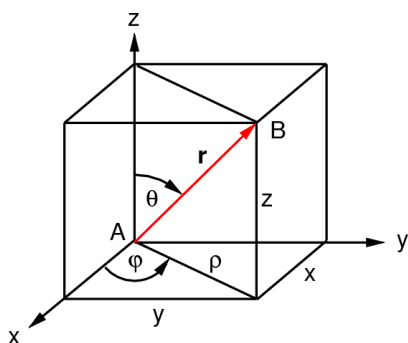
## 29 Vektorji in matrice

Premiki – Vektorji – Razteg in vsota – Enotni vektorji – Skalarni produkt – Vektorski produkt – Dvojni produkti – Matrice – Posebne matrice – Računske operacije – Sistem linearnih enačb – Inverzna matrika – Lastni vektorji – Diagonalizacija

### 29.1 Premiki

Premik kot puščica Človek se iz kraja A lahko premakne v različne sosednje kraje B, C, D itd. Vsak tak premik si predstavljamo kot ravno puščico iz začetne točke v končno točko. Zamišljena puščica ima dolžino in smer. Puščico iz točke A v točko B, na primer, bomo označili z  $\mathbf{r}_{AB}$ .

Komponente premika Kako bi premik  $\mathbf{r}_{AB}$  opisali kvantitativno? V začetni točki A si zamislimo primeren koordinatni križ, recimo takega z vzhodno (x), severno (y) in navpično (z) osjo, in pogledamo, kakšne so projekcije premika na te osi.



**Slika 29.1** Premik in njegove komponente.

Projekcije premika na koordinatne osi znašajo  $x$ ,  $y$  in  $z$ . Rečemo, da so to *komponente* premika v postavljenem koordinatnem sistemu. Z njimi sta popolnoma določeni dolžina in smer premika. Za trojico komponent zato rečemo, da *reprezentirajo* premik v izbranem koordinatnem sistemu in zapišemo na kratko (če izpustimo oznako začetne in končne točke)

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (29.1)$$

Dolžina in usmerjenost premika

Dolžino premika označimo z  $r$ . Hipotenuzni izrek (8.4) in definicije kotnih funkcij (15.13) povedo, da veljajo naslednje povezave med komponentami ter velikostjo in usmeritvijo premika:

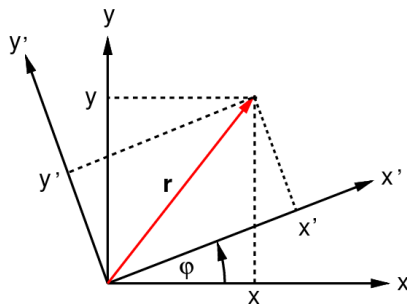
$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (29.2)$$

Poljubna točka prostora je torej enolično določena s *kartezičnimi* koordinatami  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; s *cilindričnimi* koordinatami  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $z$ ; ali s *sferičnimi* koordinatami  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $r$ .

## 29.2 Vektorji

Zasuk koordinatnega sistema

Koordinatni sistem smo usmerili po straneh neba. Kaj če sistem zasučemo, recimo okrog navpične osi za kot  $\varphi$  v nasprotni smeri urinega kazalca?



**Slika 29.2** Zasuk koordinatnega sistema. Prikazan je zasuk okrog osi  $z$ . V zavrnem sistemu so komponente vektorja spremenjene, vektor sam, kot premik v prostoru, pa ostaja nespremenjen.

V zasukanem koordinatnem sistemu ima premik  $\mathbf{r}$  komponente  $x'$ ,  $y'$  in  $z'$ . Iz risbe razberemo, da velja med obojimi komponentami naslednja povezava:

$$\begin{aligned}x' &= +x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\z' &= z.\end{aligned}\tag{29.3}$$

Sistem lahko zasučemo tudi okrog kake druge osi – vzhodne, severne ali poljubno nagnjene. Povezave med starimi in novimi projekcijami so tedaj drugačne.

Invarianca dolžine

Čeprav so komponente preučevanega premika v različnih sistemih lahko različne, pa vendarle opisujejo isti premik. Izhodiščna in ciljna točka ležita namreč relativno glede na ves snovni svet enako, ne glede na to, na kateri del sveta ju relativiziramo.

Dolžina premika mora biti v vseh koordinatnih sistemih enaka. Pri zasukanem sistemu (recimo tistem okrog navpične osi) se v to prepričamo s kvadriranjem in seštevanjem leve in desne polovice transformacij (29.3). Dobiti moramo in tudi dobimo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.\tag{29.4}$$

Vektorji

Velikosti in smeri v prostoru nimajo samo premiki, ampak tudi druge preko njih definirane količine, na primer hitrost ali pospešek ali sila. Rekli bomo, da so to *vektorji*. Vektorji so torej količine, ki imajo poleg velikosti še smer v prostoru. Premik je njihov prototipni predstavnik. Vektorje bomo označevali s poudarjenimi črkami, na primer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ . V komponentni obliki pa bomo namesto oznak  $x$ ,  $y$ ,  $z$  raje pisali oznake 1, 2 in 3, na primer  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Takšne splošne vektorje si bomo predstavljali kar kot premike. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo vektorski račun (GIBBS).

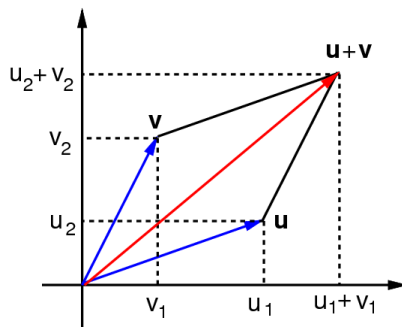
### 29.3 Razteg in vsota

Razteg vektorja Sani, ki drsijo po ledu premo in enakomerno, opravijo v enotnem času, recimo v 1 sekundi, nek premik. V daljšem času pa opravljeni premik "podaljšajo". To nas navede, da definiramo "razteg" vektorja kot množenje vektorja s skalarjem:

$$\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3). \quad (29.5)$$

Kadar je skalar negativen, se smer nastalega vektorja obrne. Očitno velja  $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{u} \lambda$  in  $\lambda(\mu \mathbf{u}) = \mu(\lambda \mathbf{u}) = (\lambda \mu) \mathbf{u}$ .

Vsota vektorjev Ladja na morju opravi premik iz točke A v točko B in nato še premik iz točke B v točko C. S tem definira rezultantni premik iz A v C. To nas navede, da definiramo vsoto dveh vektorjev takole: na konec prvega vektorja natakneмо začetek drugega, sestavljeni vektor pa sega od začetka prvega do konca drugega vektorja. Alternativno lahko začetek drugega vektorja premakneмо v izhodišče prvega vektorja, sestavljeni vektor pa je enak diagonali ustvarjenega paralelograma. To je že znano paralelogramsko pravilo (9.7)



**Slika 29.3** Vsota dveh vektorjev. Prototip je seštevanje dveh premikov ali dveh sil po paralelogramskem pravilu.

Risba pokaže:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \quad (29.6)$$

Vsota je očitno komutativna in asociativna. Glede na produkt s skalarjem pa je distributivna.

Linearna kombinacija vektorjev Množenje vektorja s skalarjem in seštevanje vektorjev lahko združimo v izraz  $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}$ . To je *linearna kombinacija* treh vektorjev. Njen rezultat je seveda vektor. Če trije vektorji med seboj niso paroma vzporedni, lahko s primerno izbiro treh skalarjev poustvarimo kakršenkoli vektor.

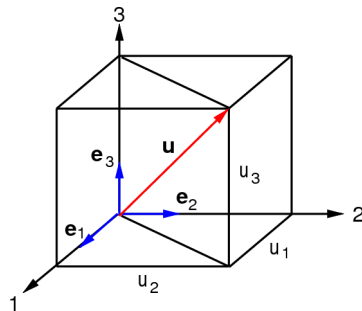
### 29.4 Enotni vektorji

Enotni vektorji Pa opremimo izhodišče koordinatnega sistema s tremi vektorji, ki rastejo vzdolž vsake osi! Naj imajo ti vektorji dolžine 1. To so *enotni vektorji*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (29.7)$$

Z njimi lahko poustvarimo kakršenkoli vektor. Potrebni skalarni koeficienti so kar enaki komponentam vektorja:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum u_i\mathbf{e}_i. \quad (29.8)$$



Slika 29.4 Enotni vektorji.

Računanje z njimi

Z uporabo enotnih vektorjev zapišemo razteg vektorja kot  $\lambda\mathbf{u} = \lambda\sum u_i\mathbf{e}_i = \sum \lambda u_i\mathbf{e}_i$  in vsoto dveh vektorjev kot  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \sum u_i\mathbf{e}_i + \sum v_i\mathbf{e}_i = \sum (u_i + v_i)\mathbf{e}_i$ . Dosedanje računanje z vektorji lahko torej formalno prevedemo na računanje z relativnimi števili in tremi enotnimi vektorji, pri čemer se delamo, kot da so ti navadni skalarji.

### 29.5 Skalarni produkt

Sila  $F$ , ki deluje na telo pod kotom  $\varphi$  glede na njegov premik  $s$ , opravlja delo  $Fs \cos \varphi$ . To nas navede, da definiramo *skalarni produkt* dveh vektorjev:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \varphi. \quad (29.9)$$

Specialno za enotne vektorje velja, na primer  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ ,  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$  itd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot  $0^\circ$ ) je enak 1. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot  $90^\circ$ ) pa je enak 0.

Zapis s komponentami

Kako bi skalarni produkt zapisali s komponentami? Vsak vektor zapišemo z enotnimi vektorji in navzkrižno pomnožimo vse člene. Potem upoštevamo, kaj pomenijo nastali produkti enotnih vektorjev (nič ali ena), in dobimo v komponentnem zapisu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \quad (29.10)$$

Poseben primer nastane, če množimo vektor s samim seboj. Potem dobimo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2. \quad (29.11)$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je skalar. Skalar je enak v vsakem koordinatnem sistemu. To pomeni, da je skalarni produkt invarianten glede na spremembo koordinatnega sistema.

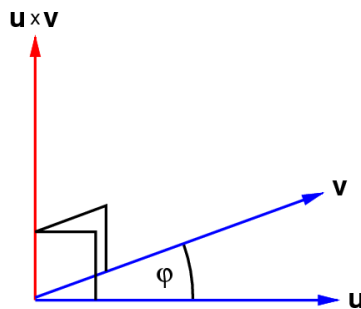
Z računi se prepričamo, da je skalarni produkt komutativen, ni asociativen in je distributiven nad vsoto.

## 29.6 Vektorski produkt

Sila  $F$ , ki deluje na drog pri razdalji  $r$  od njegove vrtilne točke, in sicer pod kotom  $\varphi$ , izvaja navor  $Fr \sin \varphi$ . To nas navede, da definiramo *vektorski produkt* dveh vektorjev:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = uv \sin \varphi \cdot \mathbf{n}, \quad (29.12)$$

pri čemer je  $\mathbf{n}$  enotni vektor, pravokoten na ravnino obeh vektorjev in usmerjen v smeri gibanja desnega vijaka, ko prvi vektor zavrtimo proti drugemu.



Slika 29.5 Vektorski produkt. Prototip je navor, ki ga ustvarjata sila in ročica.

Specialno za enotne vektorje velja, na primer  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0$ ,  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$  ipd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot  $0^\circ$ ) je enak 0. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot  $90^\circ$ ) pa je enak tretjemu vektorju s pozitivnim ali negativnim predznakom, kakor pač že pove pravilo vijaka.

Zapis s  
komponentami

Tudi vektorski produkt hočemo zapisati s komponentami. Ravnamo tako kot pri skalarnem produktu in dobimo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \quad (29.13)$$

Vektorski produkt dveh vektorjev je vektor. Z računi se prepričamo, da je antikomutativen  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ , ni asociativen in je distributiven nad vsoto.

## 29.7 Dvojni produkti

Ker je vektorski produkt vektor, se pojavi vprašanje, kaj se zgodi, če ga pomnožimo še z enim vektorjem, bodisi skalarno ali vektorsko.

Skalarno vektorski  
produkt

Produkt  $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  poimenujemo *skalarno vektorski produkt*. Je skalar. Izraz v oklepaju je številsko enak ploščini paralelograma s stranicama  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  in ima smer njegove normale. Skalarno pomnožen s prvim faktorjem pa postane enak prostornini paralelepipeda s stranicami  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{w}$ . Prostornina je neodvisna od tega, kateri dve stranici določata bazo in katera določa višino. Zato lahko pišemo tudi

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (29.14)$$

Znaka za skalarni in vektorski produkt lahko torej zamenjamo, če le obdržimo vrstni red faktorjev.

Vektorsko vektorski produkt

Produkt  $\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  poimenujemo *vektorsko vektorski* produkt. Je vektor. Pravokoten je na smer tako prvega kot drugega (oklepajnega) faktorja. To pomeni, da je koplanaren z vektorjema v oklepaju. Račun s koordinatami pokaže:

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}). \quad (29.15)$$

Rezultat je razlika koplanarnih vektorjev, pri čemer je vsak skalarno pomnožen s skalarnim produktom preostalih dveh vektorjev.

## 29.8 Matrike

Preslikava vektorjev

Ko pomnožimo vektor  $\mathbf{x}$  s skalarjem  $\lambda$ , ga raztegnemo v vektor  $\mathbf{u}$ . Vsaka komponenta vektorja se pri tem raztegne enako:  $u_i = \lambda x_i$ . Kaj pa, če vsako komponento pomnožimo z drugačnim skalarjem:  $u_i = \lambda_i x_i$ ? Potem je nastali vektor ne samo raztegnjen, ampak tudi zavrt. Z izbiro trojice  $\lambda_i$  je popolnoma določeno, kakšen vektor nastane iz poljubnega vhodnega vektorja: komponente novega vektorja so sorazmerne istoležnim komponentam vhodnega vektorja. Najsplošnejšo sorazmernost pa zapišemo kot

$$\begin{aligned} u_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ u_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ u_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3. \end{aligned} \quad (29.16)$$

S koeficienti  $A_{ij}$  je preslikava vhodnih vektorjev v izhodne popolnoma določena.

Sorazmernostna matrika

Zapisani sistem enačb ima na levi strani izhodni vektor in na desni strani tablico koeficientov, "pomešano" z vhodnim vektorjem. Morda lahko to zmešnjavo nekako razcepimo na dva ločena dela? S srečno roko zapišemo takole

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (29.17)$$

in deklariramo, da sta oba zapisa ekvivalentna. S tem smo na mah vpeljali: zapis vektorja kot stolpca; kvadratno tablico števil, *matriko*; in množenje matrike z vektorjem. Komponento  $i$  izhodnega vektorja dobimo, ko skalarno pomnožimo  $i$ -to vrstico matrike z vhodnim stolpcem:

$$u_i = \sum_j A_{ij}x_j. \quad (29.18)$$

Na kratko bomo vse skupaj zapisali kar

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \quad (29.19)$$

Matrika je torej *operator*, ki preslika en vektor v drugega; kakšna natančno je preslikava, je pa seveda odvisno od konkretnih elementov matrike. Poljubne matrike bomo označili s črkami  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  in podobno. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo matrični račun (CAYLEY).



## 29.9 Posebne matrice

Enotna matrika Kakšna je matrika, ki katerikoli vhodni vektor preslika v enak izhodni vektor?

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (29.20)$$

Diagonalna matrika Pa tista, ki katerikoli vhodni vektor raztegne vzdolž treh osi za faktorje  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  in  $\lambda_3$ ?

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \quad (29.21)$$

Seveda so lahko vsi trije faktorji med seboj enaki. Tedaj se vektor zgolj raztegne in nič ne zavrti.

Rotacijske matrice Kaj pa matrika, ki katerikoli vhodni vektor zavrti okrog osi 3 za kot  $\varphi$  v nasprotni smeri urinega kazalca? Očitno je taka matrika opisana z zasukom koordinatnega sistema okrog osi 3 v smeri urinega kazalca:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (29.22)$$

Matriki, ki vrtita vektorje okrog drugih dveh osi, sta podobni. Rotacijska matrika  $\mathbf{R}_i$  ima  $R_{ii} = 1$ , vse ostale elemente v  $i$ -ti vrstici in  $i$ -tem stolpcu enake 0, štirje preostali elementi pa vsebujejo že zapisano četverico sinusov in kosinusov s primernimi predznaki.

## 29.10 Računske operacije

Produkt s skalarjem Produkt matrice s skalarjem definiramo tako, da raztegne (seveda tudi skrči ali obrne) siceršnje izhodne vektorje:  $(\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$ . Da to drži, moramo vpeljati predpis

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{B} \iff B_{ij} = \lambda A_{ij}. \quad (29.23)$$

Vsota Vsoto dveh matrik definiramo tako, da proizvede vsoto siceršnjih posamičnih izhodnih vektorjev:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ . To je res, če vpeljemo pravilo

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (29.24)$$

Produkt Produkt dveh matrik pa definiramo z zaporednim delovanjem posamičnih matrik:  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x})$ . Da bi bilo to res, moramo vpeljati določilo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}. \quad (29.25)$$

V produktni matriki je  $ij$ -ti element enak skalarnemu produktu  $i$ -te vrstice prvega faktorja in  $j$ -tega stolpca drugega faktorja.

Lastnosti operacij Pri računanju veljajo - z eno izjemo - enaki zakoni kot med skalarji. Vsota je komutativna in asociativna. Produkt ni

komutativen, a je asociativen. Produkt je distributiven nad vsoto. Množenje s skalarjem je distributivno nad vsoto in asociativno s katerikoli faktorjem produkta.

### 29.11 Sistem linearnih enačb

Če imamo podano sorazmernost  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}$ , lahko za vsak vhodni vektor  $\mathbf{x}$  izračunamo izhodni vektor  $\mathbf{u}$ . Kaj pa, če je podan izhodni vektor, kako potem izračunamo vhodnega? Očitno moramo rešiti sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami.

Dovoljene pretvorbe

Sistem enačb se ne spremeni, če zamenjamo dve vrstici; če množimo vsak člen v vrstici z istim skalarjem; ali če k vrstici prištejemo ali odštejemo drugo vrstico. Da bo manj pisanja, zapišemo sistem kar s koeficienti:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & u_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & u_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & u_3 \end{vmatrix} \quad (29.26)$$

To je "razširjena" matrika, zlepek "prave" matrike in izhodnega vektorja. Z naštetimi manipulacijami nad celotnimi vrsticami poskušamo pravo matriko preoblikovati v enotno matriko, pri čemer se desni stolpec preoblikuje v iskano rešitev:

$$[\mathbf{A} | \mathbf{u}] \rightarrow [\mathbf{I} | \mathbf{x}]. \quad (29.27)$$

Postopek reševanja

Preoblikovanje organiziramo takole

1. Na vrh postavimo vrstico, ki ima (absolutno) največji prvi koeficient.
2. Vsako naslednjo vrstico delimo z njenim prvim členom (da dobimo vodilno 1) ter pomnožimo z vodilnim členom prve vrstice, nakar od nje odštejemo prvo vrstico. Tako dobimo vodilno 0.
3. Pokrijemo prvo vrstico in prvi stolpec in nadaljujemo, dokler ne pridelamo matrike, ki ima pod diagonalo same 0.
4. Postopek ponovimo od spodaj navzgor, da dobimo diagonalno matriko.

Vsako vrstico delimo z diagonalnim členom, da nastane enotna matrika.

Ker na vrh prenašamo vrstice z največjim vodilnimi členi, se izogibamo deljenju z majhnimi števili in s tem minimiziramo zaokrožitvene napake.

### 29.12 Inverzna matrika

Matrična enačba  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}$  je po obliki enaka kot skalarna enačba  $Ax = u$ . Kako pa rešimo slednjo? Tako, da jo na obeh straneh množimo z  $1/A$ , to je s takim številom, da postane koeficient pred neznanko enak ena. Pa storimo tako tudi z matrično enačbo!

Sistem  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}$  pomnožimo na obeh straneh s tako, še neznano matriko  $\mathbf{A}^{-1}$ , da velja

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}. \quad (29.28)$$

Postopek reševanja

S tem je sistem formalno rešen. Kako pa bi določili to *inverzno matriko*? Ker velja  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ , zapišimo razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 1 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (29.29)$$

Na enak način kot pri reševanju sistema enačb pretvorimo levo matriko v enotno matriko, pri čemer na desni nastane inverzna matrika

$$[\mathbf{A} | \mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1}]. \quad (29.30)$$

Ko z njo pomnožimo izhodni vektor, dobimo iskano rešitev.

Sistem enačb lahko torej rešimo neposredno ali po ovinku, z inverzno matriko. Hitrejša je prva pot. Kadar pa je treba rešiti več sistemov enačb, ki se med seboj ločijo le po izhodnem stolpcu, je hitrejša druga pot.

Inverzija posebnih matrik

Za posebne matrike dobimo naslednje inverzne matrike. Enotna matrika se invertira v enotno matriko. Diagonalna matrika se invertira v diagonalno matriko, katere elementi so enaki recipročnim vrednostim originalnih elementov. Katerakoli rotacijska matrika pa se invertira v takšno matriko, katere stolpci so enaki originalnim vrsticam; rečemo, da je to transponirana matrika  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ .

### 29.13 Lastni vektorji

Matrika je operator, ki požira vhodne vektorje in iz njih izdeluje izhodne vektorje. Slednji so v splošnem zavrteni in raztegnjeni. Pojavi se vprašanje, ali kateri od njih morda niso zavrteni, ampak samo raztegnjeni. Take vektorje bomo poimenovali *lastne vektorje* matrike. Faktorje, za katere so ti vektorji raztegnjeni, pa bomo imenovali *lastne vrednosti* matrike.

Lastni vektorji posebnih matrik

Identična matrika  $\mathbf{I}$  spremeni vhodni vektor  $(u_1, u_2, u_3)$  v izhodni vektor  $(u_1, u_2, u_3)$ . Vektor ni ne zasukan ne raztegnjen, ampak popolnoma enak vhodnemu. Matrika ima torej neskončno mnogo lastnih vektorjev. Vse pripadajoče lastne vrednosti so enake 1.

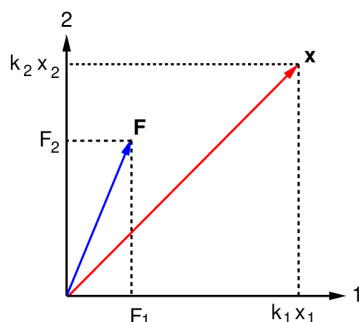
Diagonalna matrika  $\mathbf{D}$  spremeni vhodni vektor  $(u_1, u_2, u_3)$  v izhodnega  $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3)$ . Izhodni vektor je torej raztegnjen in zasukan. Vektor  $(u_1, 0, 0)$  se spremeni v  $(\lambda_1 u_1, 0, 0)$ ; ta vektor je zgolj raztegnjen in ni nič zasukan. Podobno velja za vektorja  $(0, u_2, 0)$  in  $(0, 0, u_3)$ . Vektor  $(u_1, 0, 0)$  ima lahko poljubno vrednost komponente  $u_1$ , pa je še zmeraj lastni vektor. Da se izognemo takšni mnogoličnosti, ga normiramo, da znaša njegova dolžina 1, torej:  $(1, 0, 0)$ . (To naredimo tako, da vsako komponento delimo z

absolutno vrednostjo vektorja.) Podobno naredimo z ostalima dvema lastnima vektorjema. Normiranje vektorjev ne spremeni njihovih lastnih vrednosti, ki znašajo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  in  $\lambda_3$ .

Rotacijska matrika  $\mathbf{R}_3$  zavrti vsak vektor razen tistega, ki kaže vzdolž osi 3. To je - v normirani obliki - vektor  $(0, 0, 1)$ . Njegova lastna vrednost je 1. Podobno velja tudi za drugi dve rotacijski matriki.

Zasuk matrike

Povezava med dvema vektorjema v naravi poteka dostikrat v kosu snovi. Dober primer je atom v kristalu, ki je na okolišnje atome privezan s tremi "vzmetmi" v treh pravokotnih smereh. Če deluje na atom zunanja sila  $\mathbf{F}$  vzdolž kakšne vzmeti, se atom premakne v smeri sile za premik  $\mathbf{x}$ . Za majhne sile velja  $\mathbf{F} = k\mathbf{x}$ . Če pa deluje sila poševno in vzmeti niso enako močne, nastali premik ni več vzporeden s silo. Za majhne sile velja  $\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . Vektor sile torej ustvarja na atomu vektor premika. Lahko tudi rečemo, da atom preslikuje vhodni vektor (silo) v izhodni vektor (premik). V nekaterih snoveh je izhodni vektor zmeraj vzporeden z vhodnim vektorjem, ne glede na to, kako je slednji usmerjen. V drugih snoveh pa je bolj ali manj poševen. Le vzdolž nekaterih smeri je usmerjen kolinearno. Atom in njegove vezi s sosedi v snovi torej določajo, kje potekajo te osi. To so *glavne osi* preslikave. Če kos snovi obračamo, se z njim obračajo tudi glavne osi.



**Slika 29.6** Sorazmernost vektorjev. Prototip je premik atoma ( $\mathbf{x}$ ), vezanega v kristalu, ki ga povzroči sila ( $\mathbf{F}$ ) nanj. Osi so usmerjene vzdolž atomskih vezi z okolico.

Kosu snovi je prav vseeno, v kakšnem opazovalnem sistemu opisujemo njegovo aktivnost, torej lokalno preslikovanje vektorjev. Če je opazovalni sistem tak, da njegove osi sovpadajo z glavnimi osmi, je preslikava vektorjev opisana posebno preprosto - z diagonalno matriko. Lastni vektorji pa imajo po eno samo neničelno komponento. Kadar pa je opazovalni sistem zasukan kako drugače, se v njem tako vektorji kot matrika zapišejo v "zasukani" obliki. Diagonalna matrika dobi nediagonalne elemente, lastni vektorji pa dobijo več neničelnih komponent.

Simetrične matrike

Kako zapišemo enačbo  $\mathbf{u} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$  v koordinatnem sistemu, zasukanem okrog ene izmed glavnih osi? Na enačbo delujmo z ustrežno rotacijsko matriko  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}$ . Enotno matriko zapišemo kot  $\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ , pa dobimo  $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x})$ . Sorazmernostna matrika  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{A}$  je

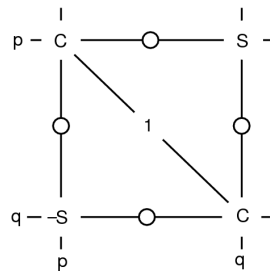
simetrična, to je,  $A_{ij} = A_{ji}$ . Lastni vektorji "zasukane" simetrične matrike so očitno enaki "zasukanim" lastnim vektorjem prvotne diagonalne matrike. Lastne vrednosti obeh so pa enake.

### 29.14 Diagonalizacija

Iz povedanega sklepamo, da lahko vsako simetrično matriko preoblikujemo nazaj v diagonalno matriko in s tem najdemo njene lastne vektorje in lastne vrednosti. Matriko je treba "le" obdelati s primernimi rotacijskimi matrikami.

Izničenje elementa

Rotacijsko matriko, ki ima diagonalna elementa  $R_{pp} = R_{qq} = \cos \varphi = c$  ter izvendiagonalna elementa  $R_{pq} = -R_{qp} = \sin \varphi = s$ , označimo kot  $\mathbf{R}_{pq}$ . Transformacija  $\mathbf{R}_{pq} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_{pq}^T$  izdela matriko  $\mathbf{A}'$ , ki je enaka izvorni matriki s spremenjenima vrsticama  $p$  in  $q$  ter stolpcema  $p$  in  $q$ . Izbrati želimo takšno rotacijsko matriko, torej takšni vrednosti  $c$  in  $s$ , da bo element  $A_{pq}$  postavljen na nič.



Slika 29.7 Diagonalizacija matrike s primernim vrtenjem.

Transformacijski izraz množimo po komponentah in upoštevamo simetrijo, pa dobimo eksplicitne enačbe za  $A'_{pp}$ ,  $A'_{qq}$ ,  $A'_{rp}$  ( $r \neq p$ ),  $A'_{rq}$  ( $r \neq q$ ) in  $A'_{pq}$ , vse kot funkcije brezčrtastih elementov in (še neznanih) vrednosti  $c$  in  $s$ . Postavimo  $A'_{pq} = 0$ , iz česar sledi  $\tan 2\varphi = 2A_{pq}/(A_{qq} - A_{pp})$ . S tem sta torej določeni obe vrednosti  $c$  in  $s$ , z njima rotacijska matrika  $\mathbf{R}_{pq}$  in z njo transformirana matrika  $\mathbf{A}'$ , ki ima element  $A'_{pq}$  postavljen na nič.

Postopek računanja

Diagonalizacija poteka takole. V izvorni matriki  $\mathbf{A}$  poiščemo največji element  $A_{pq}$  nad diagonalno, z njim določimo rotacijsko matriko  $\mathbf{R}_{pq}$  ter z njeno pomočjo izračunamo novo matriko  $\mathbf{A}'$ , ki ima ustrezen element postavljen na nič. Pri tem se nekateri preostali elementi spremenijo. Postopek ponavljamo na novi matriki, dokler ta ne postane diagonalna. Tako dobimo lastne vrednosti. Lastne vektorje pa potem določimo iz definicijske enačbe  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , ki jo zapišemo v obliki  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$ . Sistem rešimo za vsak  $\lambda$  na že znani način.

Tako. Uspeli smo diagonalizirati simetrično matriko, ki opisuje linearno odvisnost dveh vektorjev v naravi. Diagonalizacijo drugih tipov matrik in probleme, povezane s tem, pa prepustimo drugim.  $\square$



## 30 Večkratne funkcije

Vektorske funkcije skalarja - Vektorski diferencial in integral -  
Skalarne funkcije več spremenljivk - Parcialni odvodi - Totalni  
diferencial - Verižno odvajanje - Razvoj v potenčno vrsto -  
Maksimum in minimum - Vezani ekstremi - Ploščinski integrali -  
Prostorninski integrali - Večkratni integrali

### 30.1 Vektorske funkcije skalarja

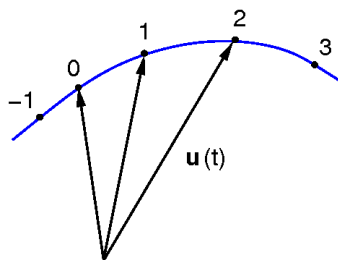
Vektorji so stalni ali se s časom spreminjajo. Takšen je, na primer, vektor iz središča Zemlje do izbrane točke na njenem površju: vrti se glede na zvezde. V koordinatnem sistemu, ki ima os  $z$  usmerjeno vzdolž zemeljske vrtilne osi in os  $x$  usmerjeno proti točki Gama na nebesnem ekvatorju, velja

$\mathbf{r} = (R \sin \theta \cos \omega t, R \sin \theta \sin \omega t, R \sin \theta)$ . S tem smo dobili prototip za splošno vektorsko funkcijo skalarnega argumenta:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]. \quad (30.1)$$

Hodograf vektorja

Vektorsko funkcijo si nazorno predstavimo kot krivuljo, ki jo zariše konica vektorja, ko se s "časom" obrača in razteguje oziroma krči. Seveda morajo biti na krivuljo naneseane ustrezne časovne oznake. Tako sliko imenujemo *hodograf* vektorja.



Slika 30.1 Hodograf vektorja.

Pojavi se vprašanje, ali lahko vektorsko funkcijo odvajamo in integriramo, oziroma kakšen pomen, če sploh, imata ti dve operaciji za vektorje.

### 30.2 Vektorski diferencial in integral

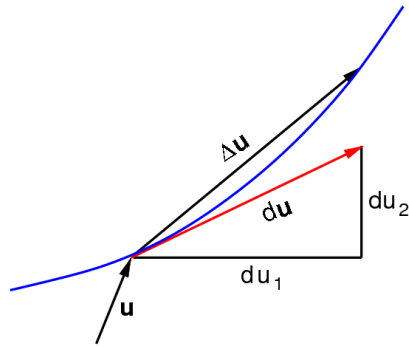
Odvod in diferencial

Odvod in diferencial definiramo po vzoru skalarnih funkcij kot

$$\mathbf{u}' = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + dt) - \mathbf{u}(t)}{dt} \quad (30.2)$$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot dt.$$

Diferencial  $d\mathbf{u}$  je tangenti prirastek na hodografu vektorja. Pri majhni spremembi argumenta je približno enak pravi spremembi vektorja. Tako definiran odvod je tudi vektorska funkcija in jo lahko nadalje odvajamo. Drugi odvod označimo  $d^2\mathbf{u}/dt^2 = \mathbf{u}''$ .



**Slika 30.2** Sprememba in diferencial (tangenta sprememba) vektorja.

Iz definicij trivialno sledijo zapisi v komponentah:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= (u_1', u_2', u_3') \\ d\mathbf{u} &= (du_1, du_2, du_3). \end{aligned} \quad (30.3)$$

Za vektorske funkcije veljajo ista pravila odvajanja kot za skalarno funkcijo. Tako odvajamo vsoto, vse vrste produktov (s skalarno konstanto, s skalarno funkcijo, skalarni produkt in vektorski produkt) ter posredno skalarno funkcijo.

Razvoj v potenčno vrsto

Razvoj v potenčno vrsto izvedemo tako kot pri skalarni funkciji. Velja:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) + \frac{\mathbf{u}'(0)}{1!} t + \frac{\mathbf{u}''(0)}{2!} t^2 + \dots \quad (30.4)$$

oziroma

$$\mathbf{u}(t_0 + h) = \mathbf{u}(t_0) + \frac{\mathbf{u}'(t_0)}{1!} h + \frac{\mathbf{u}''(t_0)}{2!} h^2 + \dots \quad (30.5)$$

Oba razvoja seveda lahko zapišemo tudi v koordinatah. Vsaka vektorska enačba pri tem razpade na tri skalarne enačbe.

Integral

Celotna sprememba vektorja je enaka limitni vsoti njegovih diferencialnih sprememb; vektor iz konice začetnega vektorja v konico končnega vektorja znaša

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{u}' dt = \left( \int u_1' dt, \int u_2' dt, \int u_3' dt \right). \quad (30.6)$$

Če je končni vektor enak začetnemu, je očitno integral enak nič. Ker so pravila odvajanja "standardna", so takšna tudi pravila za integriranje.

### 30.3 Skalarnе funkcije več spremenljivk

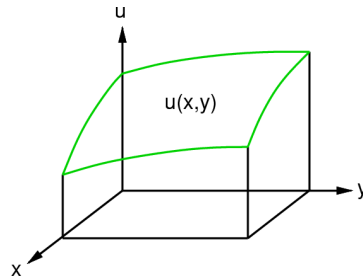
Skalarnе funkcije so lahko odvisne od več spremenljivk, ne le od ene. Zgled je recimo prostornina valja, ki je odvisna od njegovega radija in višine:  $V = \pi r^2 h$ . Ali pa prostornina zraka v valju z batom, ki je pod pritiskom in potopljen v toplotno kopel:  $V = RT/p$ . In, seveda, najbolj nazorna odvisnost od vseh: višina kakšne ploskve nad ravnino, na primer polkrožne kupole nad tlemi:  $h^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$ .



Ploskovni graf Vse tovrstne funkcijo dveh argumentov zapišemo v skupni obliki  $u = f(x, y)$  ali kar

$$u = u(x, y). \quad (30.7)$$

Njihov graf si lahko nazorno predstavljamo kot ploskev nad ravnino. Funkcije treh in več spremenljivk zapišemo podobno, ne moremo pa si jih več predstavljati kot ploskve.



Slika 30.3 Ploskovni graf.

### 30.4 Parcialni odvodi

Delne spremembe Poglejmo funkcijo  $u$  v izbrani točki  $(x, y)$ ! Tam ima funkcija neko vrednost, namreč  $u = u(x, y)$ . Če se sedaj premaknemo v kakšno sosednjo točko, se vrednost funkcije spremeni. Posebej sta odlikovana dva premika: pri prvem se premaknemo v točko  $(x + dx, y)$  in pri drugem v točko  $(x, y + dy)$ . Kakšna je sprememba funkcije pri prvem "vzdolžnem" premiku, povemo s *parcialnim odvodom*

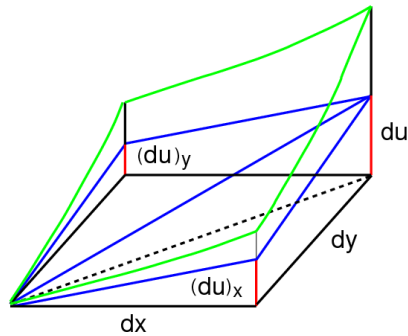
$$u_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx, y) - u(x, y)}{dx}. \quad (30.8)$$

Ravnano torej natanko tako, kot pri funkciji enega samega argumenta, ko smo definirali njen navadni odvod. Za razliko od prej pa ne označimo odvoda kot  $u'$ , marveč kot  $u_x$ . Ker ima funkcija dva argumenta, je pač treba nekako povedati, za katerega velja odvajanje. Ustrezní odvod po drugem argumentu pa zapišemo kot  $u_y$ .

Računanje odvodov Parcialne odvode izračunavamo prav tako kot navadne. Saj je funkcija več spremenljivk, ki jo odvajamo po eni sami spremenljivki, pri čemer držimo vse druge konstantne, v tem pogledu nerazločljiva od funkcije ene same spremenljivke. Veljajo vsa pravila odvajanja. Izračunani odvod je spet funkcija in jo lahko znova odvajamo, bodisi po prvem, bodisi po drugem argumentu. Tako pridelamo odvode  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $u_{xy}$  in  $u_{yx}$ . Zadnja dva sta med seboj enaka.

### 30.5 Totalni diferencial

Celotne spremembe Parcialni odvodi povedo, koliko se funkcija spremeni, če spremenimo kakega od njenih argumentov, pri čemer druge držimo konstantne. Koliko pa se funkcija spremeni, če spremenimo vse argumente?



**Slika 30.4** Totalni diferencial funkcije. Višinski prirastek tangentne ravnine je enak vsoti robnih prirastkov. Funkcija je zelena, tangentna ravnina modra in diferenciali rdeči.

Risba pokaže, da velja

$$du = (du)_x + (du)_y = u_x dx + u_y dy. \quad (30.9)$$

Rečemo, da je  $du$  *totalni diferencial* funkcije. Z njim zapišemo parcialne odvode na naslednji način:

$$\frac{(du)_x}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x. \quad (30.10)$$

Diferencialni količniki

Oznaki  $\partial x$  in  $\partial y$  torej pomenita isto kot  $dx$  in  $dy$ , namreč diferencial neodvisne spremenljivke. Oznaka  $\partial u$  pa pomeni diferencial funkcije, kadar se spreminja zgolj ena izmed neodvisnih spremenljivk. Oznaka ne pove, katera spremenljivka je to. Velja dogovor, da je to tista, nad katere diferencialom je zapisan. Pri rokovanju z diferenciali bomo morali na to paziti. V izrazu  $du = (\partial u/\partial x)dx + (\partial u/\partial y)dy$ , na primer, ne smemo krajšati diferencialov  $\partial x$  in  $dx$  ter  $\partial y$  in  $dy$ , ker s tem pridemo do izraz  $du = \partial u + \partial u$ , v katerem je izgubljena informacija o merodajnih spremenljivkah. Zato oba diferenciala  $\partial u$  nista med seboj enaka (česar sta enako zapisana) in ju ne smemo sešteti v  $2\partial u$ .

### 30.6 Verižno odvajanje

Verižno pravilo

V funkciji  $u = u(x, y)$  je vsaka neodvisna spremenljivka lahko funkcija tretje spremenljivke  $t$ , torej  $x = x(t)$  in  $y = y(t)$ . Zgled je plin pod zunanjim tlakom in temperaturo, ki se spreminjata s časom. Pojavi se vprašanje, kako izračunati odvod  $du/dt$ . Diferencial  $du$  delimo z  $dt$  in dobimo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (30.11)$$

To je *verižno pravilo* odvajanja.

Kaj pa, če je vsaka neodvisna spremenljivka funkcija dveh, ne ene, spremenljivke:  $x = x(t, s)$  in  $y = y(t, s)$ ? Ravnamo tako kot prej:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (30.12)$$

in podobno za  $\partial u/\partial s$ . Sedaj vidimo, kakšna moč se skriva v pametni notaciji!

Implicitno odvajanje Funkcija dveh spremenljivk je lahko podana tudi v implicitni obliki  $F(x, y, u(x, y)) = 0$ . Če gre, iz nje izrazimo  $u = u(x, y)$  in izračunamo njene parcialne odvode. Lahko pa ravnamo drugače. Izraz  $F$  razumemo kot funkcijo treh spremenljivk, od katerih sta dve med seboj neodvisni, tretja pa je odvisna od njiju. Enačbo na obeh straneh odvajamo po verižnem pravilu na  $x$ , pri čemer upoštevamo  $\partial x/\partial x = 1$  in  $\partial y/\partial x = 0$ :

$$F(x, y, u) = 0 \implies F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (30.13)$$

Sledi  $\partial u/\partial x = -F_x/F_u$ . Podobno izračunamo tudi odvod  $\partial u/\partial y$ .

### 30.7 Razvoj v potenčno vrsto

Posredni razvoj Tudi funkcijo dveh spremenljivk hočemo razviti v potenčno vrsto okrog točke  $(0, 0)$ . Funkcijo zapišemo kot  $u(x, y) = u(x(t), y(t)) = u(t)$  in postavimo  $x(t) = \alpha t$  in  $y(t) = \beta t$ . Seveda velja razvoj v vrsto  $u(t) = u(0) + u'(t) + 1/2 \cdot u''(t)^2 + \dots$  Nato izračunamo odvod  $u' = du/dt$  po verižnem pravilu, pri čemer upoštevamo  $dx/dt = \alpha$  in  $dy/dt = \beta$ . Podobno izračunamo drugi odvod  $u'' = d^2u/dt^2$ . Dobljena odvoda vstavimo v vrsto in pridemo

$$u(x, y) = u(0, 0) + xu_x + yu_y + \frac{1}{2} (x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy}) + \dots \quad (30.14)$$

Operatorski zapis Odvodi so vsi računani v točki  $(0, 0)$ . Seveda lahko funkcijo razvijemo tudi okrog kake druge točke  $(a, b)$ . Tedaj velja, v polepšanem zapisu,

$$u(a+x, b+y) = u(a, b) + \frac{1}{1!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})u + \frac{1}{2!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})^2u + \dots \quad (30.15)$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih parcialnih odvodov v točki  $(a, b)$ . Višje parcialne odvode smo zapisali na kratko kot "potence". Izraz  $(\partial/\partial x)^2$ , na primer, pomeni  $\partial^2/\partial x^2$ , to je drugi odvod.

### 30.8 Maksimum in minimum

Prvi odvod Hribi imajo svoje vrhove in globeli. To so njihovi *lokalni ekstremi*. Ekstremi so lahko samo v točkah, kjer sta oba parcialna odvoda  $u_x$  in  $u_y$  enaka nič. Ugotoviti je treba še, ali gre v takih *stacionarnih točkah* za maksimum ali minimum ali morda za sedlo.

Drugi odvod Naj bo stacionarna točka  $(a, b)$ . Navpični presek  $u(x, b)$  skozi točko je funkcija zgolj ene spremenljivke. Kot vemo, ima taka funkcija maksimum, ako je njen drugi odvod negativen, in minimum, ako je drugi odvod pozitiven. Podobno velja za funkcijo  $u(a, y)$ . Tako

lahko že rečemo: v maksimumu morata biti oba odvoda  $u_{xx}$  in  $u_{yy}$  negativna in v minimumu pozitivna. Toda to še ni dovolj. Drugi odvod v katerikoli smeri, ne zgolj v smeri koordinatnih osi, mora biti negativen (v maksimu) oziroma pozitiven (v minimumu).

Kriterij za ekstrem

Okrog stacionarne točke razvijemo funkcijo v potenčno vrsto do kvadratnih členov, pri čemer postavimo oba prva odvoda na nič. Dobimo, da je  $u(a+h, b+k)$  enako  $u(a, b) + 1/2 \cdot (u_{xx}h^2 + 2u_{xy}hk + u_{yy}k^2)$ . Da bo v točki maksimum, mora biti drugi člen negativen za vsak  $h$  in  $k$ . Za minimum pa mora biti ta člen pozitiven. Da bo to res, mora četverica drugih odvodov zadoščati določenemu kriteriju. Kakšen je ta kriterij?

Drugi člen (brez faktorja  $1/2$ ) zapišemo v taki obliki, da se znebimo člena z mešanim faktorjem  $hk$ :

$Q = A[(h + Bk/A)^2 + (CA - B^2)k^2/A^2]$ . Pri tem smo druge odvode zaradi kratkosti označili s črkami  $A, B$  in  $C$ . Pri pozitivnem  $A$  je količina  $Q$  za vsak  $h$  in  $k$  pozitivna, če je le  $CA - B^2 > 0$ . Pri negativnem  $A$  pa je količina  $Q$  vseskozi negativna pri istem pogoju. Iskani pogoj za ekstrem je torej

$$u = \max \Leftrightarrow u_{xx} < 0, u_{yy} < 0 \text{ in } u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 > 0 \quad (30.16)$$

$$u = \min \Leftrightarrow u_{xx} > 0, u_{yy} > 0 \text{ in } u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 > 0. \quad (30.17)$$

Rečemo, da je to diskriminanta drugih odvodov.

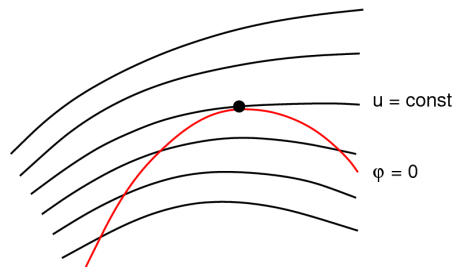
### 30.9 Vezani ekstremi

Presek ploskve

Hribovje v mislih prerežemo z navpično ravnino v smeri sever-jug pri koordinati  $x = a$ , ali pa v smeri vzhod-zahod pri koordinati  $y = b$ . Nastaneta ravninski krivulji  $u = u(a, y)$  ali  $u = u(x, b)$ . Kje ima taka krivulja ekstreme, že znamo določiti. Kaj pa, če se po hribovih vije cesta, katere talne koordinate so opisane z enačbo, bodisi eksplicitno ali implicitno? Kje na cesti so njeni ekstremi? Za splošno funkcijo  $u = u(x, y)$  želimo torej najti ekstreme, ki zadoščajo dodatnemu pogoju

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (30.18)$$

Rečemo, da so to *vezani ekstremi*.



**Slika 30.5** Vezani ekstrem. Ploskev je podana z izohipsami. V ekstremni točki je tangenta na krivuljo tudi tangenta na lokalno izohipso.

Sovpad tangent

Slika kaže naslednje. Ko se premikamo po krivulji  $\varphi = 0$ , doživljamo različne vrednosti  $u$ . Tam, kjer naletimo na ekstrem, sta tangenti na  $\varphi$  in  $u$  enaki:  $u_x/u_y = \varphi_x/\varphi_y$ . Drugače povedano:

$$\begin{aligned} u_x + \lambda \varphi_x &= 0 \\ u_y + \lambda \varphi_y &= 0, \end{aligned} \quad (30.19)$$

pri čemer je  $\lambda$  (še neznan) sorazmernostni faktor med odvodi. Zapisani enačbi in pogoj  $\varphi = 0$  tvorijo sistem treh enačb s tremi neznankami  $x$ ,  $y$  in  $\lambda$ . Njegova rešitev nam da stacionarne točke. Ali so to maksimumi ali minimumi, pa pove diskriminanta drugih odvodov na že znani način.

### 30.10 Ploščinski integrali

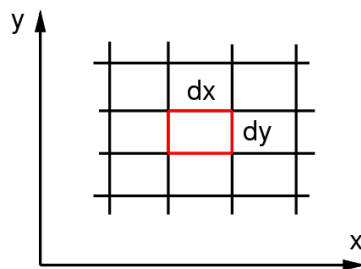
Ploskovna gostota

Funkcija  $u = u(x, y)$  lahko opisuje tudi porazdelitev mase ali električnega naboja po ravnini:  $u = dm/dS$  ali  $u = de/dS$ . Masa (ali naboj), ki je naložena na dveh ločenih ploskovnih elementih  $dS$ , se sešteva. Rečemo, da je *ekstenzivna količina*. Za temperaturo, na primer, pa to ne velja. Pravimo, da je *intenzivna količina*. Naj bo torej  $U$  ekstenzivna količina in  $u = dU/dS$  njena *ploskovna gostota*. Nad izbranim ravninskim območjem je potem nakopičena tolikšna limitna vsota:

$$U = \int u \, dS. \quad (30.20)$$

Razcep integrala

Kako naj izračunamo zapisani integral? Naj bo ravninsko področje pravokotnik  $[a, b] \times [c, d]$ . Vzdolžno in prečno ga razrežemo v ozke trakove. Tako dobimo ploščinske elemente  $dS = dx \, dy$ .



**Slika 30.6** Ploščinski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka najprej po vrsticah in nato po stolpcih oziroma obratno.

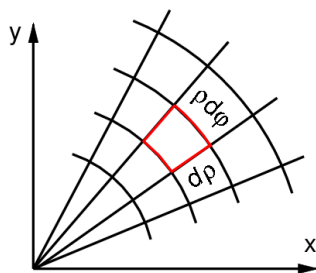
Potem integriramo po vsakem pasu vzdolž smeri  $x$ , pri čemer obravnavamo  $y$  kot parameter; dobimo delne vsote  $\Delta U(y) = \int u(x, y) \, dx$ . Nato integriramo dobljene vsote vzdolž smeri  $y$ :  $U = \int \Delta U(y) \, dy$ . Seveda lahko integriramo tudi obrnjeno: najprej vzdolž osi  $y$  in nato vzdolž osi  $x$ . Velja torej

$$U = \iint u \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_a^b u \, dx = \int_a^b dx \int_c^d u \, dy. \quad (30.21)$$

Kadar definicijsko območje funkcije ni pravokotnik, ampak je krivočrtni lik, računamo z ustreznim spremenljivim intervalom  $[a(y), b(y)]$  ali  $[c(x), d(x)]$ .

Polarni razcep

Posebno lep krivočrten tloris je tak, ki ima obliko kroga okoli izhodišča. V tem primeru ga je smiselno razrezati v ploskovne elemente z radialnimi premicami  $\varphi = \text{const}$  in s koncentričnimi krogi  $\rho = \text{const}$ .



**Slika 30.7** Ploščinski elementi v polarnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto  $u(\rho, \varphi)$ .

Elementi, ki jih tako pridelamo, imajo ploščine  $dS = d\rho \cdot \rho d\varphi$ . Ploskovna gostota na teh elementih mora biti podana kot  $u(\rho, \varphi)$ . Skupna ekstenzivna količina tedaj znaša

$$U = \iint u \rho d\rho d\varphi. \quad (30.22)$$

Integriramo po ustreznem "pravokotnem" področju, recimo  $[0, R] \times [0, 2\pi]$ .

Uporaba v geometriji

Posebej odlikovana ekstenzivna količina, ki jo lahko naložimo na ploskovni element  $dS$ , je prostornina prizme  $dV$  nad njim. Ploskovna gostota je v tem primeru kar višina ploskve  $h$ . Integral  $U = \int u dS$  potem pomeni  $V = \int h dS$ . Tako računamo prostornine teles, ki jih zamejujejo krovne ploskve. Če ima "krovna" ploskev negativno višino, torej če leži pod koordinatno ravnino, je izračunana prostornina negativna.

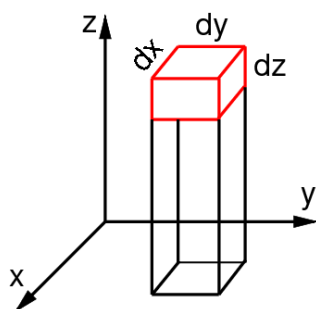
### 30.11 Prostorninski integrali

Ekstenzivna količina je lahko porazdeljene tudi po prostoru. Tedaj jo pač integriramo tam in sicer natanko tako, kot po ravnini:

$$U = \int u dV. \quad (30.23)$$

Razcep integrala

Če ima preučevani prostor obliko kvadra, ga razkosamo na drobne kocke  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  in integriramo.



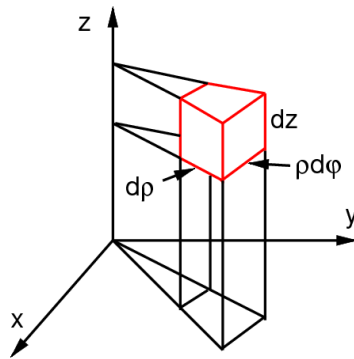
**Slika 30.8** Prostorninski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka po širini, globini in višini v tem ali kakem drugem vrstnem redu.

Integriramo po ustreznem kvadru, recimo po  $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ :

$$U = \iiint u dx dy dz. \quad (30.24)$$

Cilindrični razcep

Cilindrični prostor je bolje razkosati na prostorninske elemente  $dV = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz$ .



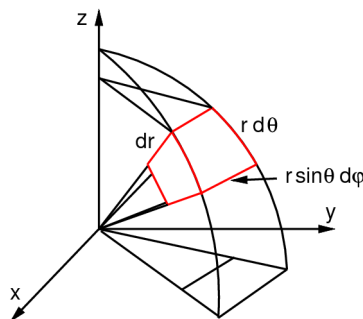
**Slika 30.9** Prostorninski elementi v cilindričnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto  $u(\rho, \varphi, z)$ .

Integriramo po potrebnem "kvadru", recimo  $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H]$ :

$$U = \iiint u \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \quad (30.25)$$

Krogelni razcep

Krogelni prostor pa je naravno razkosati na elemente  $dV = dr \cdot r \sin \theta \, d\varphi \cdot r \, d\theta$ .



**Slika 30.10** Prostorninski elementi v krogelnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto  $u(r, \varphi, \theta)$ .

Integriramo po "kvadru", recimo  $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ :

$$U = \iiint u r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \quad (30.26)$$

### 30.12 Večkratni integrali

Poleg ekstenzivnih količin, ki so porazdeljene po ravnini ali prostoru, poznamo tudi take, ki so porazdeljene po prostorskem kotu, na primer svetilnost  $I = dP/d\Omega$ . V tem primeru ne integriramo po ravnini, ampak po kotu  $d\Omega = d\varphi d\theta$ .

Konfiguracijski prostor

Nasploh velja, da lahko integriramo kakršnokoli ekstenzivno skalarno funkcijo, ki je porazdeljena po eno-, dvo- ali večdimenzionalnem *konfiguracijskem prostoru*. Če integriramo po enodimenzionalnem prostoru, imamo opravka z navadnim integralom, če po večdimenzionalnem, pa z večkratnim integralom.  $\square$





# 31 Krivulje in ploskve

Krivulje in ploskve - Premica - Krožnica - Elipsa - Parabola - Vektorski opis krivulj - Ločna dolžina - Lokalne lastnosti krivulj - Osnovne ploskve - Vektorski opis ploskev - Krivulje na ploskvi - Lokalne lastnosti ploskev - Zemljemerstvo na krogli - Zemljepisne projekcije - Polarna stereografska - Ekvatorska valjna konformna - Stožčna konformna - Druge projekcije

## 31.1 Krivulje in ploskve

Večkrat smo omenili, da enačba  $y = y(x)$  opisuje ravninsko *krivuljo*, če sta spremenljivki  $x$  in  $y$  dolžinski koordinati. Enačba  $z = z(x, y)$  pa na podoben način opisuje *ploskev* v prostoru. Čas je, da se opisa krivulj in ploskev lotimo sistematično (DESCARTES, GAUSS).

Koordinate Osnova za opis krivulj in ploskev z enačbami je "poimenovanje" vsake prostorske točke z njenimi koordinatami  $(x, y, z)$  v poljubno izbranem koordinatnem sistemu, katerega osi so med seboj pravokotne in umerjene v enakih dolžinskih enotah. Rečemo, da so to *kartezične koordinate*. Razdalja med dvema točkama potem znaša, po hipotenuznem izreku,

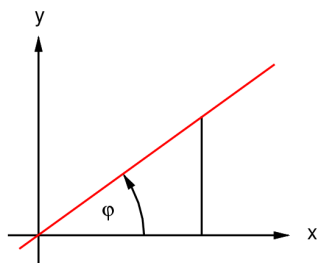
$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (31.1)$$

Pametno je sistem izbrati tako, da bo enačba krivulje ali ploskve v njem čim bolj preprosta.

## 31.2 Premica

Enačba premice Najpreprostejša "krivulja" je *premica*. Uteleša jo, na primer, brazda ladje, ki pluje po morju v stalni smeri  $\varphi$  glede na sever. Pot ne sme biti predolga, da se ne pokaže zakrivljenost morja. Koordinatni sistem postavimo v začetno pristanišče, ordinatno os  $y$  usmerimo proti severu in abscisno os  $x$  proti vzhodu. Enačba brazde-premice se potem glasi

$$\begin{aligned} y &= kx \\ k &= \tan \varphi. \end{aligned} \quad (31.2)$$



**Slika 31.1** Premica. Najkrajša pot med dvema točkama v prostoru.

*Smerni koeficient*  $k$  ima nazoren pomen: to je prirast ordinatne razdalje na prirast abscisne razdalje. Če je koeficient pozitiven, premica narašča, sicer upada.

Premico, ki ne gre skozi izhodišče, ampak seka ordinatno os v  $y_0$ , opišemo kot  $(y - y_0) = kx$ . Če seka abscisno os v točki  $x_0$ , velja  $y = k(x - x_0)$ . Ako pa gre skozi točko  $(x_0, y_0)$ , se enačba premice glasi  $(y - y_0) = k(x - x_0)$ .

Parametrični zapis

Pri ladji, ki pluje z enakomerno hitrostjo, sta njeni koordinati enolično določeni s pretečenim časom  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt. \end{aligned} \tag{31.3}$$

Ladja zariše isto premico ne glede na to, kako hitro pluje oziroma kako hitro teče čas (to je ura, ki jo imamo). Zato bomo opustili časovne enote in uporabljali kar brezdimenzijska števila. Takšen "čas", ki zavzema vrednosti na intervalu  $(-\infty, +\infty)$ , bomo poimenovali *parameterski čas* oziroma *parameter* in ga označevali kar s  $t$ . Vsaki vrednosti parametra ustreza natanko ena vrednost koordinat. Primerjava parametričnega in eksplicitnega zapisa pove  $k = B/A$ .

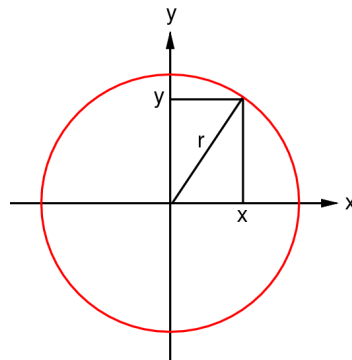
### 31.3 Krožnica

Enačba krožnice

Iz sive davnine je poznana *krožnica*: krivulja, katere vsaka točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča. Že stara ljudstva so jo risala s količkom in vrstico pri gradnji kolib in obzornih krogov. Mi bomo postavili koordinatni sistem v središče kroga. Potem pove hipotenuzni izrek

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{31.4}$$

V translatorno zamaknjenem koordinatnem sistemu pa ima središče kroga koordinati  $(x_0, y_0)$ . Tedaj očitno velja  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .



**Slika 31.2** Krožnica. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča.

Parametrični zapis

Tudi krožnico lahko opišemo parametrično. Spomnimo se enakomernega kroženja nihala (18.14), pa takoj uvidimo

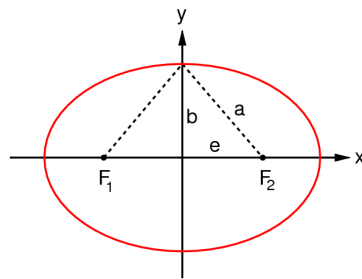
$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \tag{31.5}$$

pri čemer leži parameter  $t$  na intervalu  $[0, 2\pi]$ .

### 31.4 Elipsa

Prečno presekan bambusovo steblo ima rob v obliki krožnice. Če ga presekamo poševno, pa je rob "raztegnjena" krožnica, *elipsa*. Kako bi tako elipso narisali na tleh? Prej ali slej – morda kot kakšen kraljevi vrtnar – odkrijemo postopek: središče kroga "raztegnemo" v dve središči, nanju privežemo vrv, jo nategnemo z risalnim količkom in začrtamo željeno krivuljo. Elipsa je s tem definirana kot množica točk, pri katerih je vsota razdalj do dveh izbranih točk, *gorišč*, konstantna.

Točko na polovici zveznice med obema goriščema poimenujemo središče elipse. Skozi središče potekata dva odlikovana premera: dolga os  $2a$  in kratka os  $2b$ . Razdaljo med središčem in (katerimkoli) goriščem poimenujemo *ekscentričnost*  $e$ . Ko je risalni količek v temenu velike osi, vidimo, da velja  $r_1 + r_2 = 2a$ . Ko je v temenu male osi, pa hipotenuzni izrek pove  $b^2 + e^2 = a^2$ .



**Slika 31.3** Elipsa. Vsota razdalj iz dveh izbranih točk, gorišč, je do vsake njene točke enaka.

Enačba elipse

Koordinatni križ postavimo v središče elipse in ga zavrtimo tako, da njegove osi sovpadajo z veliko in malo osjo. Levo gorišče ima potem koordinato  $(-e, 0)$  in desno  $(+e, 0)$ . Razdalji od gorišč do izbrane točke na elipsi znašata  $r_1^2 = (x + e)^2 + y^2$  in  $r_2^2 = (x - e)^2 + y^2$ . Njuna vsota mora biti  $r_1 + r_2 = 2a$  in iz tega pogoja sledi, z nekaj računanja, enačba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (31.6)$$

Elipso v premaknjenem koordinatnem sistemu (oziroma premaknjeno elipso v obstoječem sistemu) pa opišemo z zamenjavo  $x \rightarrow x - x_0$  in  $y \rightarrow y - y_0$ .

Parametrični zapis

Pri  $a = b$  preide elipsa v krog, kakor je tudi prav. Parametrični opis zato kar uganemo:

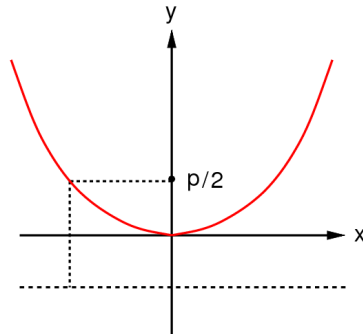
$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Parameter  $t$  leži na intervalu  $[0, 2\pi]$ . Da je to res pravi opis, preverimo z vstavitvijo v implicitno enačbo.

### 31.5 Parabola

Krogelno zrcalo (katerega presek je krožni lok) zbira vzporeden snop žarkov v goriščno točko, vendar samo tedaj, kadar je snop

ozek. Bolj oddaljeni žarki se po odboju sekajo v gorišču, ki je bliže temenu. Morda obstaja kakšna krivulja, ki bi vse vzporedne žarke združevala v isti točki? Drugače povedano: tako krivuljo – *parabolo* – bi morale sestavljati točke, ki so enako oddaljene od premice in goriščne točke.



**Slika 31.4** Parabola. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, gorišča, in od vodilne premice.

Enačba parabole

Postavimo koordinatni sistem tako, da bo premica "vodilja" vodoravna pri koordinati  $(0, -p/2)$ . Gorišče je potem v točki  $(0, +p/2)$ . Razdalja poljubne točke na iskani krivulji od gorišča je  $r_1^2 = (y - p/2)^2 + x^2$  in razdalja te točke od premice je  $r_2 = |y + p/2|$ . Iz pogoja  $r_1 = r_2$  sledi, z nekaj računanja,

$$2py = x^2. \quad (31.8)$$

Parametrični zapis

Enačba ima obliko  $y \propto x^2$ . Spomnimo se, da prav takšna enačba opisuje tir kamna pri vodoravnem metu [18.6]. Tam narašča vodoravna koordinata s časom in navpična s kvadratom časa, kar nas navede na naslednji parametrično zapis parabole z navpično simetrijsko osjo:

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt^2. \end{aligned} \quad (31.9)$$

Vstavitev polarnih enačb v implicitno enačbo pove  $2p = A^2/B$ .

### 31.6 Vektorski opis krivulj

Hodograf vektorja

Namesto s koordinatami lahko delamo z ustreznimi *vektorji lege*:  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Razdaljo med dvema točkama potem zapišemo kot absolutno vrednost razlike dveh vektorjev:  $s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ .

Parametrski zapis krivulje pove, kako se vsaka koordinata spreminja s časom:  $x = x(t)$  in  $y = y(t)$ . To zapišemo v vektorski obliki kot

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)). \quad (31.10)$$

S časom se vektor spreminja – obrača, daljša in krajša – in s svojo konico zarisuje *hodograf* – krivuljo. Naraščajoči parameter  $t$  definira pozitivno smer gibanja po krivulji.

Odvodi po parametru

Kako se odvod ene koordinate po drugi izraža z odvodoma koordinat po parametru? Verižno pravilo pove  $dy/dt = (dy/dx) \cdot (dx/dt)$ , torej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}. \quad (31.11)$$

Odvod po parametru smo označili s črtico. Drugi odvod pa računamo takole. Posredno odvajamo  $(d/dx)(dy/dx) = (d/dt)(dy/dx) \cdot dt/dx$ . Ker  $dy/dx = y'/x'$  in  $dt/dx = 1/x'$ , velja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}. \quad (31.12)$$

Kako parametrizirati

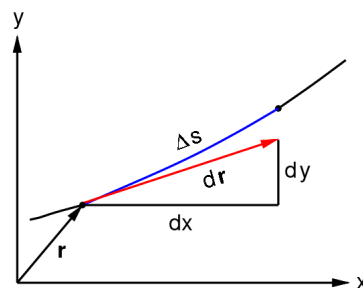
Kako za funkcijo  $y = y(x)$  določiti parametrično obliko? Izberemo (skoraj) poljubno funkcijo  $x = x(t)$  in nato izračunamo  $y = y(x(t))$ . Očitno je možnosti za izbiro neskončno. Poiščemo takšno, da je rezultat najbolj preprost. Posebno zanimiva izbira je kar  $x = t$ . Tedaj velja  $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$ . Parabolo, na primer, zapišemo kot  $\mathbf{r}(t) = (At, Bt^2)$  ali kot  $\mathbf{r}(x) = (x, x^2/2p)$ . Očitno je parametrični zapis krivulje zelo nazoren in vsestranski.

Kako pa iz parametrične oblike  $x = x(t), y = y(t)$  določiti eksplicitno oziroma implicitno obliko funkcije? Iz prve in druge enačbe izrazimo  $t$ , ju izenačimo in dobimo iskano enačbo, ki jo po potrebi še preoblikujemo v lepšo obliko.

### 31.7 Ločna dolžina

Ločni element

Prirast parametra za  $dt$  se odraža kot sprememba vektorja  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  oziroma kot kratek kos krivulje, *ločni element*  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .



**Slika 31.5** Ločni element krivulje. Njegova dolžina je limitno enaka spremembi vektorja lege.

Velja  $ds = |d\mathbf{r}|$ . Enačbo delimo na obeh straneh z  $dt$ , pa dobimo

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| dt = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (31.13)$$

Dolžina krivulje

Dolžina poti, ki jo zariše vektor med začetno in končno lego, znaša

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (31.14)$$

Če je parameter koordinata  $t = x$ , pomeni odvajanje na parameter kar odvajanje na koordinato:  $x' = dx/dx = 1$  in  $y' = dy/dx$ , torej  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ .

Naravna parameterizacija

Dolžina krivulje od izbrane začetne točke naprej in nazaj je odličen parameter za opis krivulje. Krivulja je tedaj kot cesta, na kateri so v enakih dolžinskih presledkih postavljeni mejniki. Vsak tak mejnik ima svoje koordinate in krivuljo opišemo kot

$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ . Parameter je sedaj vezan zgolj na krivuljo in nič na okolico. Pri takšni parametrizaciji seveda velja  $x'^2 + y'^2 = 1$  (črtica označuje odvod po parametru  $s$ ).

Kako dolžinsko parametrizirati krivuljo, ki je podana s splošnim parametrom  $t$ ? — Izračunamo dolžino vzdolž krivulje kot funkcijo časa  $s(t)$ . — Izračunamo obratno funkcijo  $t(s)$ . — Vstavimo jo v prvotno enačbo  $\mathbf{r}(t(s))$ . Za krog, na primer, dobimo  $x = r \cos(s/r)$  in  $y = r \sin(s/r)$ .

### 31.8 Lokalne lastnosti krivulj

Tangenta Smer krivulje v izbrani točki je podana z normaliziranim premikom

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (31.15)$$

Števec in imenovalc ulomka delimo z  $dt$  in dobimo enotni tangenti vektor  $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ , to je

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{(x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (31.16)$$

Tangenta, na kateri leži enotni tangenti vektor, ima smerni koeficient  $k = y'/x'$ . Če se dve krivulji sekata, je kot med njunima tangentskima vektorja določen s skalarnim produktom

$$\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = \cos \varphi.$$

Normala S tangentskim vektorjem je definiran *normalni vektor*, ki stoji nanj pravokotno:

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}, \quad (31.17)$$

pri čemer je  $\mathbf{k}$  enotni vektor v smeri osi  $z$ . Normalni vektor dobimo s križnim množenjem vektorskega produkta (ali z množenjem z rotacijsko matriko za  $90^\circ$ ):

$$\mathbf{n} = \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (31.18)$$

Normala, na kateri leži normalni vektor, ima smerni koeficient  $k = -x'/y'$ . To je negativna recipročna vrednost smernega koeficienta tangente.

Ukrivljenost Koliko se zasuče enotni vektor preko dolžinskega elementa, je mera za lokalno *ukrivljenost* krivulje

$$K = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|. \quad (31.19)$$

Izračunamo jo takole. — Vektor  $\mathbf{r}(t)$  odvajamo po času posredno:  $\mathbf{r}' = (d\mathbf{r}/ds) \cdot (ds/dt)$  in dobimo  $\boldsymbol{\tau}v$ . — Vektor  $\mathbf{r}'$  odvajamo po času posredno:  $\mathbf{r}'' = (d/ds)(\boldsymbol{\tau}v) \cdot (ds/dt)$ , upoštevamo pravilo za odvod produkta in  $d\boldsymbol{\tau}/ds = K\mathbf{n}$  ter dobimo  $Kv^2\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}dv/dt$ . — Izračunamo

produkt  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = Kv^3 \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ . — Iz slednjega izrazimo  $K$ , pri čemer upoštevamo  $\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \mathbf{k}$ , in dobimo  $K = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{k}/v^3$ , torej:

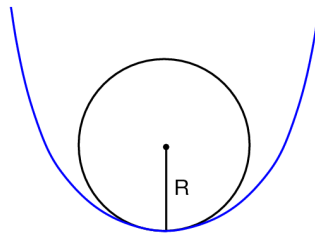
$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (31.20)$$

Enačbe za tangento, normalo in ukrivljenost se ustrezno poeneostavijo, če vzamemo  $t = x$  ali  $t = s$ . Ukrivljenost se, na primer, izrazi kot  $K = y''/(1 + y'^2)^{3/2}$  oziroma kot  $K = \sqrt{(x''^2 + y''^2)}$ .

Krivinski radij Ko izračunamo ukrivljenost krožnice z radijem  $R$ , dobimo v vsaki točki vrednost

$$K = \frac{1}{R}. \quad (31.21)$$

Če je ukrivljenost krivulje  $K$ , zato rečemo, da je njen lokalni *krivinski radij*  $R = 1/K$ . Krivulja je lokalno "nerazločljiva" od takega "pritisnjene" kroga. Pritisnjeni krog je lokalno enak krivulji v tem smislu, da imata enak "ničti", prvi in drugi odvod.



**Slika 31.6** Krivinski radij krivulje. To je radij kroga, ki se najtesneje prilega krivulji.

Invariante krivulj Nekatero značilnosti krivulje so odvisne od njene lege v izbranem koordinatnem sistemu. Primer so nagibi tangent ali normal glede na abscisno ali ordinatno os. Pri vrtenju koordinatnega sistema se takšni nagibi ne ohranjajo. Po drugi strani pa je ukrivljenost v izbrani točki krivulje neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Rečemo, da je to invariantna lastnost krivulje oziroma njena *invarianta*. Invariante se ne izražajo s koordinatami, marveč le z njihovimi diferenciali.

### 31.9 Osnovne ploskve

Ravnina *Ravnina*, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema, zareže v ravnini  $xz$  enotni vektor  $\mathbf{r}_1 = (\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1)$ . V ravnini  $yz$  zareže vektor  $\mathbf{r}_2 = (0, \cos \theta_2, \sin \theta_2)$ . Poljubna linearna kombinacija teh dveh vektorjev  $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_1 + B\mathbf{r}_2$  je krajevni vektor do ustrežajoče točke na preučevani ravnini. Zapišimo to kombinacijo v komponentah. Iz prve enačbe  $x = A \cos \theta_1$  izrazimo  $A$ , iz druge  $y = B \cos \theta_2$  izrazimo  $B$  in oboje vstavimo v tretjo enačbo  $z = A \sin \theta_1 + B \sin \theta_2$ . Tako dobimo eksplicitno enačbo ravnine

$$z = k_1x + k_2y, \quad (31.22)$$

pri čemer sta  $k_1$  in  $k_2$  smerna koeficienta, torej tangensa obeh naklonskih kotov  $\theta_1$  in  $\theta_2$ .

- Valj Vodoravno krožnico  $x^2 + y^2 = r^2$  premikamo v navpični smeri. Pri tem zariše plašč *valja*. Enačba zanj je kar enaka enačbi krožnice:
- $$x^2 + y^2 = r^2. \quad (31.23)$$
- Stožec Premico  $z = kx$  zavrtimo okrog navpične osi  $z$ . Nobeni točki se pri tem koordinata  $z$  ne spreminja, njena koordinata  $x$  pa prehaja v koordinate  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Enačbo  $z = k\rho$  kvadriramo in dobimo enačbo *stožca*
- $$\frac{z^2}{k^2} = x^2 + y^2. \quad (31.24)$$
- Krogla Krožnico  $x^2 + z^2 = r^2$  zavrtimo okoli navpične osi  $z$ . Transformacija  $x^2 \rightarrow x^2 + y^2$  da enačbo *krogle*
- $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (31.25)$$
- Rotacijski elipsoid Elipso  $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$  zavrtimo okrog navpične osi  $z$ . Dobimo rotacijski *elipsoid*
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (31.26)$$
- Rotacijski paraboloid Parabolo  $2pz = x^2$  zavrtimo okrog navpične osi  $z$ . Nastane rotacijski *paraboloid*
- $$2pz = x^2 + y^2. \quad (31.27)$$

Vse zapisane enačbe veljajo v posebno skrbno izbranih sistemih. Tako so tudi enačbe preproste. Seveda pa lahko koordinatni sistem translatorsno premaknemo, kar je isto, kot da premaknemo ploskev v nasprotni smeri. Premik vzdolž osi  $z$ , na primer, je ekvivalenten transformaciji spremenljivke  $z \rightarrow z - z_0$ . Enačba se temu ustrezno "pogrša". Še hujše lepotne spremembe dosežemo z rotacijo.

### 31.10 Vektorski opis ploskev

Izbrane ploskve smo zapisali implicitno ali eksplicitno. Pojavi se vprašanje, ali (in kako) jih lahko zapišemo parametrično oziroma vektorsko. Poskusimo z najpomembnejšo ploskvijo, kroglo.

Točka na krogli radija  $R$  je enolično določena z vektorjem lege  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Komponente vektorja izrazimo, kot že znamo, z azimutnim kotom  $\varphi$  in s polarnim kotom  $\theta$  (29.2):

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta. \end{aligned} \quad (31.28)$$

- Parametrski ravnina Vsaki dvojici kotov torej pripada ustrezna trojica koordinat. Na podoben način se lotimo tudi drugih ploskev. Valj in stožec, na primer, parametriziramo z azimutnim kotom in višino. Ne predivje ploskve nasploh opišemo z dvema parametroma:

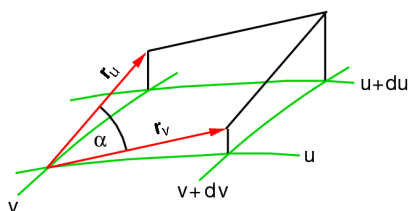
$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (31.29)$$



Parametra sta lahko karkoli. V posebnem primeru izberemo kar dve koordinati:  $\mathbf{r} = (x, y, z(x, y))$ . Tedaj preide parametrični opis v eksplicitnega. Hkrati nam ponudi še naslednjo nazorno sliko: dva splošna parametra tvorita posebno "parametrično" ravnino. Točke te ravnine se preslikajo v točke na aktualni ploskvi.

### 31.11 Krivulje na ploskvi

Krivulja  $(u(t), v(t))$  v parametrični ravnini se preslika v ustrezno krivuljo na ploskvi. Poseben primer je preslikava, ko je eden izmed parametrov konstanten, recimo  $v = \text{const}$ . Tedaj se na ploskvi zariše ena izmed izo-parametričnih krivulj. Pri različnih vrednostih konstante se nariše množica takih krivulj - krivočrtnih koordinat na ploskvi. Tako se na krogli, na primer, zarišejo poldnevnik  $\varphi = \text{const}$  in vzporedniki  $\theta = \text{const}$ .



**Slika 31.7** Parcialna premika na ploskvi. To sta prirastka vektorja lege vzdolž krivočrtnih koordinat na ploskvi.

Parametrski kot Vektorja  $\mathbf{r}_u$  in  $\mathbf{r}_v$  ležita v lokalni tangentni ravnini vzdolž obeh krivočrtnih koordinat. Kakšen je sekalni kot teh koordinat,  $\alpha$ , pove skalarni produkt:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u| |\mathbf{r}_v|} . \quad (31.30)$$

Pri lepo izbranih parametrizacijah je kot v vsaki točki (morda s kakšno izjemo) enak  $90^\circ$ . Tedaj so krivočrtne koordinate med seboj pravokotne. Takšni so poldnevnik in vzporedniki na krogli.

Dolžinski element V tangentni ravnini leži tudi totalni diferencial - "poševni" premik  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ . S kvadratom tega premika je določena njegova dolžina  $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ , torej:

$$ds^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v du dv + \mathbf{r}_v^2 dv^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2 . \quad (31.31)$$

V komponentah zapišemo

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ g_{12} &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ g_{22} &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 . \end{aligned} \quad (31.32)$$

Koeficienti  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  in  $g_{22}$  so realna števila. Vsaka točka na ploskvi ima svojo trojico teh števil. Rečemo, da so to *metrični koeficienti* ploskve. Njihov pomen je, da diferenciale parametrov "povežejo" z diferenciali dolžin. Če izberemo drugačno parametrizacijo ploskve, se metrični koeficienti seveda spremenijo. V pravokotni koordinatni mreži je koeficient  $g_{12} = 0$ . Za kroglo v standardni

parametrizaciji izračunamo  $g_{11} = r^2 \sin^2 \theta$  in  $g_{22} = r^2$ . Za valj pa  $g_{11} = 1$  in  $g_{22} = r^2$ .

Dolžina krivulje na ploskvi je limitna vsota vseh dolžinskih diferencialov, torej (če označimo odvod po času s črtico)

$$s = \int \sqrt{g_{11}u'^2 + 2g_{12}u'v' + g_{22}v'^2} dt. \quad (31.33)$$

**Geodetke** Med dvema oddaljenim točkama A in B na ploskvi poteka neskončno mnogo krivulj. Ena od njih je najkrajša. Rečemo, da je to *geodetka*. Na krogli je geodetka glavni krog, to je tak, ki ima središče v središču Zemlje. Nazorno si geodetko predstavljamo kot elastično nit, napeto med obema točkama: elastičnost jo skrči na najkrajšo dolžino.

**Ploščinski element** Dolžinska elementa vzdolž krivočrtnih koordinat, pravokotnih ali ne, sta  $(ds)_u = \sqrt{g_{11}}du$  in  $(ds)_v = \sqrt{g_{22}}dv$ . Ploščina paralelograma, ki ga zamejujeta, pa znaša

$$dS = (ds)_u (ds)_v \sin \alpha = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \quad (31.34)$$

Ploščina ploskve je limitna vsota ploščinskih elementov, torej dvojni integral

$$S = \iint \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \quad (31.35)$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba poenostvi v obliko

$$S = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (31.36)$$

### 31.12 Lokalne lastnosti ploskev

**Normala** Tangentna vektorja ležita v tangentni ravnini. Njun vektorski produkt je pravokoten nanjo. Če ga normiramo, dobimo *normalo*

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}. \quad (31.37)$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba zapiše v obliki

$$\mathbf{n} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}. \quad (31.38)$$

**Odmik tangentne ravnine** Vektor iz opazovane točke v bližnjo okolišnjo točko na ploskvi, torej vektor  $\mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)$ , aproksimiramo s potenčno vrsto z linearnim členom ( $\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ ) in s kvadratnim členom  $1/2 \cdot (\mathbf{r}_{uu} du^2 + 2\mathbf{r}_{uv} dudv + \mathbf{r}_{vv} dv^2)$ . Prvi člen je pomik po tangentni ravnini. Drugi člen je pomik do pritisnjenega kroga v smeri pravokotno na krog. Če ga pomnožimo z normalo, dobimo pravokotno razdaljo od tangentne ravnine:

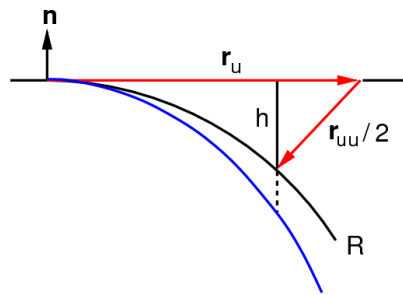
$$2dh = L_{11}du^2 + 2L_{12}dudv + L_{22}dv^2 \quad (31.39)$$

$$L_{11} = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$L_{12} = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

$$L_{22} = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}.$$

Za kroglo v standardni parametrizaciji izračunamo  $L_{11} = r \sin^2 \theta$  in  $L_{22} = r$ . Za valj pa velja  $L_{11} = 0$  in  $L_{22} = r$ .



**Slika 31.8** Odmik ploskve od tangentne ravnine. Limitno je enak odmiku pritisnjene paraboloidne ploskve.

Ukrivljenost *Ukrivljenost ploskve je enaka ukrivljenosti pritisnjene kroga:*  
 $dh = ds^2/2R$ , torej  $1/R = 2dh/ds^2$ , zato:

$$K = \frac{L_{11}du^2 + 2L_{12}dudv + L_{22}dv^2}{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2} \quad (31.40)$$

To je ukrivljenost ploskve v smeri, ki jo določata  $du$  in  $dv$ . Skozi izbrano točko potekajoče krivulje imajo večjo ali manjšo ukrivljenost. Izmed njih ima ena maksimalno ukrivljenost  $K_{\max} = 1/R_{\min}$  in druga minimalno  $K_{\min} = 1/R_{\max}$ . Najdemo ju kot ekstremalne vrednosti po vseh smereh. V to se ne bomo spuščali. Ko takšni vrednosti najdemo, se lahko igramo z njunima vrednostima: tvorimo, na primer, "povprečno" ukrivljenost  $K = (K_{\max} + K_{\min})/2$  ali "metrično" ukrivljenost  $K = K_{\max} \cdot K_{\min}$  ter poskušamo najti, kako se izražata s koeficienti  $g_{11} \dots L_{22}$ . Tudi to zahtevno zabavo prepustimo drugim, ki jih to zanima.

Poglejmo še nekaj zgledov. Ravnina ima v vsaki točki vse ukrivljenosti nič. Zato ji tudi rečemo ravnina. Na krogli so poldnevniški krivinski radiji večji od vzporedniških. Vsi glavni krogi skozi vsako točko pa imajo enak radij, ki je enak poldnevniškemu. Najmanjši krivinski radij na valju je enak polmeru valja in največji je neskončen. Podobno je pri stožcu. Vidimo, da se da marsikaj dognati tudi brez računanja.

### 31.13 Zemljemerstvo na krogli

Na majhnih razdaljah je zemeljska površina ravna in koti, premice in trikotniki na njej se pokoravajo že spoznanim pravilom, recimo pravilu o vsoti notranjih kotov v trikotniku ali hipotenuznemu pravilu o razdalji med dvema točkama. Na večjih razdaljah pa je treba upoštevati zemljino zakrivljenost. "Ravne" premice na njej postanejo glavni krogi. Vsota notranjih kotov trikotnika postane večja od  $180^\circ$ , kar se lepo vidi na primeru trikotnika z bazo na ekvatorju in vrhom na polu. Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek za trikotnike pa bo treba na novo premisliti.

Dolžina geodetke *Za lažje preučevanje bomo vse dolžine na krogli merili z radijem kot enoto. S tem postane radij brezdimenzijska količina z*

velikostjo 1, dolžinski odsek vsakega glavnega kroga pa številsko enak središčnemu kotu, v radianih, na katerega je napet. Prvo vprašanje, ki si ga zastavimo, je: kolikšna je dolžina glavnega kroga med dvema točkama?

Na točki naj kažeta vektorja  $\mathbf{r}_1(\theta_1, \varphi_1)$  in  $\mathbf{r}_2(\theta_2, \varphi_2)$  iz središča krogle. Njuna velikost je enaka ena. Kot med njima, torej brezdimenzijska dolžina glavnega kroga, je določen s skalarnim produktom  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos \alpha$ . Zmnožimo komponente, upoštevamo kosinus razlike in dobimo

$$\cos \alpha = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \theta_2. \quad (31.41)$$

Razdalja, v dolžinskih enotah, je potem  $d = R \alpha$ . Poseben primer  $\varphi_1 = \varphi_2$  pove dolžino poldnevnika:  $\alpha = |\theta_2 - \theta_1|$ , kakor tudi mora biti.

Hipotenuzni izrek

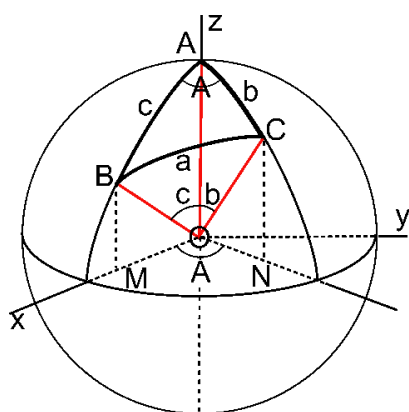
Pravokotni trikotnik na krogli določajo trije enotni vektorji iz njenega izhodišča do trikotnikovih oglišč. Vseeno je, kako je koordinatni sistem postavljen. Izberemo ga tako, da kaže vektor  $\mathbf{r}_1$  vzdolž osi  $x$ , vektor  $\mathbf{r}_2$  leži v ekvatorski ravnini  $xy$  pod dolžinskim kotom  $a$  in vektor  $\mathbf{r}_3$  leži v poldnevniški ravnini pod širinskim kotom  $h$ . Vektorji so torej naslednji:  $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (\cos a, \sin a, 0)$  in  $\mathbf{r}_3 = (\cos a \cos h, \sin a \sin h, \sin h)$ . Kot  $d$  med  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_3$  je hipotenuza trikotnika in je določen s skalarnim produktom  $\cos d = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3$ . Pomnožimo komponente in dobimo *hipotenuzni izrek*

$$\cos d = \cos a \cos h. \quad (31.42)$$

Pri kratkih stranicah aproksimiramo  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ , zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega.

Kosinusni izrek

Podobno se lotimo poševnega trikotnika na krogli. Omejimo se na "prave" trikotnike, katerih koti so manjši od  $\pi$  in katerih stranice so tudi manjše od  $\pi$ .



**Slika 31.9** Poševni trikotnik na krogli. (Mercator, 2013)

Na tri oglišča trikotnika kažejo vektorji  $OA$ ,  $OB$  in  $OC$ . Koordinatni sistem usmerimo, kot kaže slika. V njem velja  $OA = (0, 0, 1)$  in  $OB = (\sin c, 0, \cos c)$ . Vektor  $OC$  se projicira v  $ON$

pod kotom  $A$ , torej  $OC = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$ . Skalarni produkt  $OB \cdot OC = \cos a$ . Zmnožimo komponente in dobimo:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (31.43)$$

Stranica  $a$  je podana z drugima dvema stranicama in kotom med njima. To je iskani *kosinusni izrek*. Velja seveda za vsakršno permutacijo zapisanih količin. Opazimo tudi, da je kosinusni izrek povsem enak izrazu za dolžino geodetke (31.41). To pa ni nič čudnega, saj je slednji le poseben primer prvega: za glavne kroge uporablja poldnevniko in ekvator.

Pri majhnih razdaljah aproksimiramo  $\sin x \approx x$  in  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ , zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega. V posebnem primeru, ko  $A = 90^\circ$ , je trikotnik pravokoten in izrek se reducira v hipotenuzni izrek.

Sinusni izrek Ideniteta  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$  nas navede na misel, da vanjo vstavimo  $\cos A$  iz kosinusnega izreka in upamo, da se bo izcimil sinusni izrek. Res pridelamo izraz  $\sin A / \sin a = f(a, b, c)$ . Desna stran izraza je invariantna glede na ciklično permutacijo stranic, kar pomeni, da mora veljati

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (31.44)$$

To je *sinusni izrek*. Pri majhnih razdaljah preide v že znano ravninsko obliko.

Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek nam pomagajo pri računanju kotov in stranic na krogli točno na tak način, kot to počnemo v ravnini. Ko delamo s kroglo polmera  $R$  namesto 1, moramo vse stranice trikotnika, podane v dolžinskih enotah, deliti z  $R$ . Drugače rečeno: namesto brezdimenzijske stranice  $a$  moramo povsod pisati  $a/R$  in podobno za druge stranice.

### 31.14 Zemljepisne projekcije

Projekcija krogle Točke na zemeljski površini so enolično določene s svojimi zemljepisnimi koordinatami: širino  $\delta$  (oziroma polarnim kotom  $\theta = \pi/2 - \delta$ ) in dolžino  $\varphi$ . Zemljo verodostojno predstavimo s pomanjšanim krogelnim modelom. Takšen *globus* pa je, žal, neprimeren za prenašanje in tudi ni dovolj velik za podroben prikaz manjših območij. Naravno je torej pomisliti, kako bi ga preslikali - v celoti ali deloma - na ravno ploskev, *zemljevid*. Iščemo torej primerne preslikave

$$(x, y) \leftarrow (\theta, \varphi). \quad (31.45)$$

Rečemo jim *zemljepisne projekcije*.

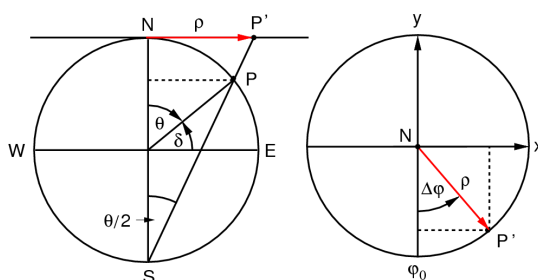


**Slika 31.10** Preslikava krogle na ravnino s svetlobnimi žarki. Oblika sence je zanimiva tudi za slikarje. (Rubens, 1613)

**Napake projekcij** Vsaka preslikava, ki jo vpeljemo, preslika Zemljine poldnevnik in vzporednike v dve družini ravninskih krivulj. Dva bližnja vzporednika in poldnevnik na Zemlji oblikujeta ploščinski element, približni pravokotnik. Ko se takšen pravokotnik preslika, pričakujemo naslednje nevšečnosti: kot med stičnima stranicama se spremeni; razmerje med tema stranicama se spremeni; enaki pravokotniki na različnih lokacijah se preslikajo neenako, bodisi po dolžini, širini ali ploščini. Seveda hočemo najti take preslikave, ki bodo obremenjene s čim manj nevšečnostmi. Posebej pomembno je, da se ohranjajo lokalni koti, to je lokalna razmerja stranic. Tedaj se oblika in orientacija drobnih likov pri preslikavi ohranja. Drobni krogi se, na primer, preslikajo kot krogi. Takim preslikavam rečemo *konformne*.

### 31.15 Polarna stereografska

**Preslikava z žarki** Preslikajmo severno poloblo na tangentno ravnino na severnem polu! Preslikujemo lahko z žarki, ki izhajajo is središča krogle, iz njenega južnega pola ali iz južne neskončnosti. V vsakem primeru se Zemljini poldnevnik preslikajo v radialne premice, vzporedniki pa v koncentrične kroge. Razdalja med krogi je odvisna od izbire žarkov. Središčni žarki "preveč" raztegnejo ekvatorske predele, neskončni pa jih "preveč" stisnejo. Osredotočimo se torej na južni pol kot izvor žarkov. To je *polarna stereografska projekcija*.



**Slika 31.11** Polarna stereografska projekcija. Projekcija je primerna za prikaz polarnih dežel, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

**Polarni izvor žarkov** Slika pokaže, da se točka  $P(\theta)$  preslika v točko  $P'(\rho)$ . Ker je obodni kot enak polovici središčnega, razberemo iz pravokotnega trikotnika  $SNP'$  povezavo

$$\rho = 2R \tan \frac{\theta}{2}. \quad (31.46)$$

Za radij Zemlje izberemo primerno pomanjšano vrednost:  $R = M \cdot R_E$ , na primer  $M = 1:10^7$ . Namesto polarnega kota  $\theta$  lahko uporabimo tudi zemljepisni kot  $\delta = 90^\circ - \theta$ . V tangentski ravnini vpeljemo koordinatni sistem z izhodiščem v polu; os  $y$  kaže vzdolž poljubnega poldnevnika  $\varphi_0$ . Potem velja

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi - \varphi_0) \\ y &= -\rho \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (31.47)$$

S tem je preslikava zaključena. Seveda ni treba projicirati celotne hemisfere, ampak le kakšen njen del. Tedaj na tangentski ravnini vpeljemo lokalni koordinatni sistem, ki je glede na polarnega ustrezno translatorsno zamaknjen.

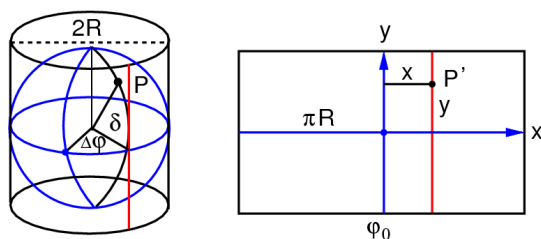
Konformnost Je projekcija morda konformna? Ploščinski element na krogli je približno pravokotnik z vzporedniško stranico  $R \sin \theta d\varphi$  in s poldnevniško stranico  $R d\theta$ . Ustrezajoči ploščinski element v tangentski ravnini je tudi približno pravokotnik s stranicama  $\rho d\varphi$  in  $d\rho$ . Z razmerjem istoležnih stranic sta podana *raztezna faktorja*  $H = \rho d\varphi / R \sin \theta d\varphi$  in  $K = d\rho / R d\theta$ . Če je preslikava konformna, mora veljati  $H = K$ . Izračunamo odvod  $d\rho/d\theta$  in ga vstavimo v enačbo. Pokaže se, da je kvocient raztezni faktorjev enak 1. Preslikava je povsod konformna.

Polarna stereografska projekcija je primerna za prikaz dežel v visokih zemljepisnih širinah, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

### 31.16 Ekvatorska valjna konformna

Morska navigacija Ko mora ladja pluti iz kraja A v oddaljeni kraj B, ima na voljo neomejeno mnogo poti. Če odmislimo tokove, vetrove in neurja, je najboljša pot tista, ki je najkrajša, torej geodetka, to je glavni krog na krogli. Takšna geodetka je na polarni stereografski projekciji v splošnem krivulja, ki seka poldnevniko pod različnimi koti. Določiti in zarisati jo brez obsežnega računanja ni možno. Pa tudi sledenje taki črti bi zahtevalo, da krmar stalno spreminja magnetni kurz ladje.

Druga možnost je krivulja, ki seka vse poldnevniko pod istim kotom - *loksodroma*. Je sicer daljša od geodetke, vendar je za krmarjenje mnogo bolj primerna. Seveda je tudi loksodroma kriva črta na polarni stereografski projekciji (razen če pluje ladja po poldnevniku). Kaj ne bi bilo čudovito, če bi imel navigator na mizi zemljepisno projekcijo, na kateri bi bila loksodroma povsod ravna črta? Med krajema A in B bi potegnil ravno črto in s tem določil kurz ladje. Bolj preprosto ne gre. Poizkusimo, kot navigatorji, najti tako projekcijo!



**Slika 31.12** Ekvatorska valjna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz ekvatorskih dežel in za pomorsko navigacijo.

Valjna projekcija Da bo loksodroma ravna, morajo očitno biti poldnevnik ekvidistantne premice, vzporedniki pa nanje pravokotne premice v takšnih medsebojnih razmakih, da je mreža povsod lokalno konformna. To pomeni, da moramo projicirati kroglo na valj, ovit okoli njenega ekvatorja. Valj se seveda da razviti v ravnino. Na valju postavimo koordinatni sistem z osjo  $x$  vzdolž ekvatorja in  $y$  vzdolž poljubnega poldnevnik  $\varphi_0$ . Točke s poldnevnik  $\varphi$  se vse preslikajo v

$$x = R(\varphi - \varphi_0). \quad (31.48)$$

Vpeljava konformnosti Pri tem se točke iz različnih širin  $\theta$  preslikajo v ustrezne  $y$ , kakor določa zahteva po konformnosti. Ravnamo tako kot pri polarni stereografski projekciji. Izenačimo raztezna faktorja  $H = dx/R \sin \theta d\varphi$  in  $K = dy/R d\theta$ . V dobljeni enačbi sta vsebovana dva odvoda. Prvega  $dx/d\varphi$  zlahka izračunamo in s tem je določen drugi:  $dy/d\theta = R/\cos \theta$ . Ločitev spremenljivk in integracija pove

$$y = R \ln \tan \frac{\theta}{2}. \quad (31.49)$$

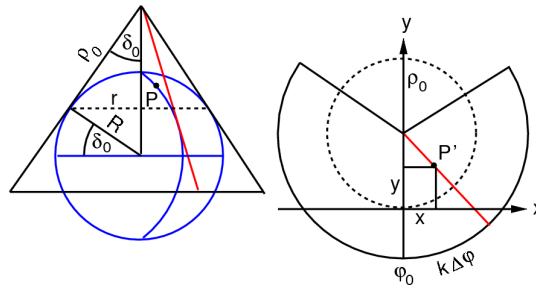
Razmiki med vzporedniki torej naraščajo z oddaljenostjo od ekvatorja. To je tudi pričakovati, saj projekcija na silo širi in paralelizira krogelne poldnevnik. Seveda ni treba projicirati celotne krogle, ampak le kakšen njen del. Tam postavimo lokalni koordinatni sistem, ki je ustrezno translatorno premaknjen.

Ekvatorska valjna konformna projekcija je odlična za pomorsko navigacijo in primerna za prikaz dežel v nizkih zemljepisnih širinah.

### 31.17 Stožčna konformna

Razrast industrializacije, širjenje železniškega in cestnega omrežja ter nenehna vojskovanja zahtevajo natančne zemljevide velikih držav. Pokaže se potreba po ustrezni projekciji za srednje zemljepisne širine. Smer raziskave je hitro pri roki: zemeljsko kroglo je treba projicirati na plašč stožca, ki se je dotika v izbranem vzporedniku. Poldnevnik so tedaj radialne premice, vzporednik - koncentrične kroge - pa želimo razmestiti tako, da bo projekcija konformna. Tako kot valj lahko tudi stožec nato razvijemo v ravnino.





**Slika 31.13** Stožčna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz dežel v zmernem pasu.

Razvoj stožca v ravnino

Naj se stožec dotika vzporednika  $\delta_0 = \pi/2 - \theta_0$ , ki je za  $\rho_0$  oddaljen od vrha stožca. Vrhni polkot stožca je potem tudi enak  $\delta_0$ . Obseg stožca po tem vzporedniku znaša  $L_1 = 2\pi\rho_0 \sin \delta_0$ . Ko plašč stožca razvijemo v ravnino, nastane izsekan krog, katerega celotni obseg je  $L_2 = 2\pi\rho_0$ . Razmerje teh dveh obsegov  $L_1/L_2 = k = \sin \delta_0$ . (Spomnimo se na stožčaste šotore, tipije, prerijskih severnoameriških domorodcev! Plašč tipija je točno polovica kroga:  $k = 1/2$ . To pomeni, da ima vrhni polkot  $\delta_0 = 30^\circ$ .)

V izsekani krog vpeljimo ravninski koordinatni sistem z vrhom v presečišču tangentnega vzporednika in poljubnega poldnevnik  $\varphi_0$ . Os  $x$  je usmerjena vzdolž vzporednika in os  $y$  vzdolž poldnevnik. Krogelni poldnevnik  $\varphi$  postane na razvitem plašču stolpca poldnevnik  $k\varphi$ .

Vpeljava konformnosti

Ploskovni element na razvitem plašču stožca ima vzporedniško stranico  $\rho k d\varphi$  in poldnevniško stranico  $d\rho$ , s čimer sta določena raztezna faktorja glede na ploskovni element na krogli. Izenačitev raztezni faktorjev vodi do enačbe  $d\rho/\rho = kd\theta/\sin \theta$ . Integriranje obeh strani da rešitev

$$\rho = C \tan^k \frac{\theta}{2} \quad (31.50)$$

$$k = \sin(\pi/2 - \theta_0).$$

Konstanto  $C$  določimo iz raztezne pogoja:  $\rho(\theta_0) = R \tan \theta_0$ . S tem sta določeni tudi koordinati

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos k(\varphi - \varphi_0) \\ y &= \rho_0 - \rho \sin k(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (31.51)$$

Vzdolž tangentnega vzporednika so razdalje točne. Če za tangentni vzporednik izberemo pol, preide stožec v tangentno ravnino in projekcija v polarno stereografsko. Če za tangentni vzporednik izberemo ekvator, pa preide stožec v valj in projekcija v ekvatorsko valjno konformno.

Stožčna konformna projekcija je dobra za prikaz dežel na srednjih zemljepisnih širinah.

### 31.18 Druge projekcije

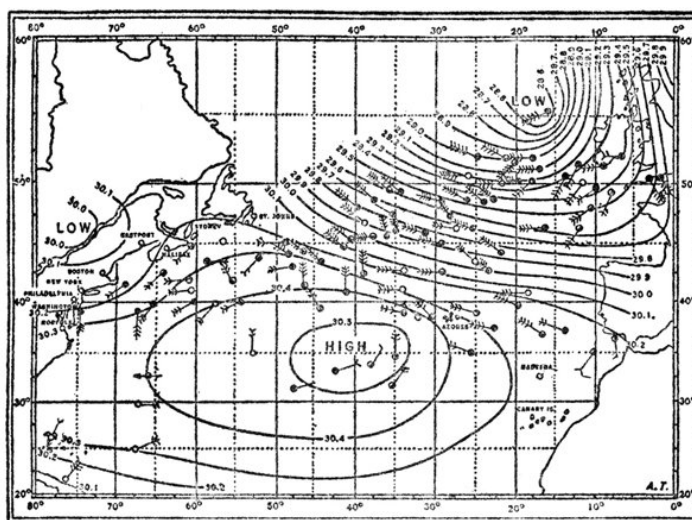
- Različice projekcij Vsaka izmed obravnavanih tipov projekcij - ravninska, valjna in stožčna - ima več različic. Če, na primer, razvrstimo vzporednike na enake medsebojne razdalje, dobimo *ekvidistantne* projekcije. Razdalje vzdolž poldnevnikov so tedaj pravilne. Spet drugače izbrana razvrstitev poldnevnikov pa zagotovi, da so pravilne ploščine. To so *ekvivalentne* projekcije. Jasno je, da spremenjene projekcije niso več konformne.
- Zemlja kot rotacijski elipsoid Zemlja je krogla le v prvem, čeravno zelo dobrem približku. Tisti, ki želijo večjo natančnost, jo aproksimirajo z rotacijskim elipsoidom s kratko polosjo med poloma. Projekcijske enačbe se močno zapletejo in vprašanje je, kdaj jih je sploh smiselno uporabljati. Sploščenost Zemlje je namreč zelo majhna:  $(a - b) / a \approx 1 / 300$ .
- Globalne projekcije Nobena izmed naštetih projekcij ni primerna za prikaz celotne zemeljske oble. Obliko velikih in "oddaljenih" kontinentov namreč močno popačijo. So pa ljudje iznašli mnogo kar sprejemljivih globalnih projekcij. Žal to, da je teh projekcij mnogo, pove, da nobena ni povsem zadovoljujoča. Ena izmed boljših je *eliptična projekcija* z naslednjimi značilnostmi. Slika sveta je elipsa z razmerjem polos 1:2. Ekvator in vzporedniki so vzporedne daljice z enakomernim presledkom. Centralni poldnevnik je daljica. Vsi drugi so polelipse, simetrične glede na ekvator in na centralni poldnevnik. Polelipsi skozi  $\pm 90^\circ$  tvorita krog. Projekcijski obrazci so ustrezno zamotani in jih ne bomo izpeljevali. □

## 32 Prostorska polja

Skalarna in vektorska polja - Gradient in smerni odvod - Pretok in divergenca - Cirkulacija in rotor - Operacije drugega reda - Krivočrtne koordinate - Cilindrične koordinate - Krogelne koordinate

### 32.1 Skalarna in vektorska polja

Primeri polj Količine, ki so "porazdeljene" po točkah prostora in so torej odvisne od treh prostorskih koordinat, imenujemo prostorska polja. Dobri primeri so naslednji: temperatura, pritisk in hitrosti v ozračju ter gravitacijske, električne in magnetne sile v prostoru. Našteta polja so bodisi *skalarna* ali *vektorska*. Ker primerov za kompleksna polja (še ) nimamo, se z njimi ne bomo ukvarjali.



**Slika 32.1** Prizemno polje zračnega pritiska in vetrov nad Atlantikom. Izmerile so ga ladje, ki so prikazane s krožci. Pritisk je podan z izobarami (v palcih živega srebra) in veter z zastavicami. Veter piha približno vzporedno z izobarami. (US Weather Bureau)

Splošno skalarno polje, neodvisno od časa, bomo označili kot

$$U = U(x, y, z) \quad (32.1)$$

in splošno vektorsko polje kot

$$\mathbf{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)). \quad (32.2)$$

Raziščimo, kaj lahko povemo o njih!

### 32.2 Gradient in smerni odvod

Gradient polja Začnimo s skalarnim poljem. Ko se premaknemo iz izbrane točke polja v kako sosednjo točko, se polje v splošnem spremeni. Sprememba na enoto dolžine  $dU/ds$  je odvisna od tega, v katero smer se premaknemo. Izmed vseh smeri je ena - označimo jo z enotnim vektorjem  $\mathbf{n}$  - posebej odlikovana: to je tista, vzdolž

katere je sprememba polja največja. Velikost in smer te spremembe opišemo z vektorjem, *gradientom* polja:

$$\text{grad } U = \mathbf{n} \cdot \frac{dU}{ds}. \quad (32.3)$$

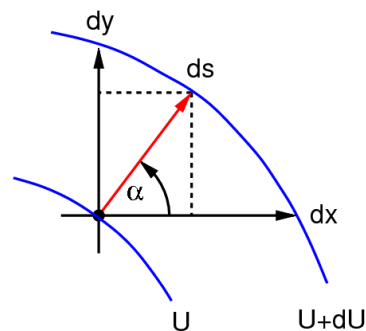
Gradient skalarnega polja je torej vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, v kateri smeri se skalarno polje najbolj spreminja in kako velike so te spremembe. Definicija gradienta ni odvisna od izbire koordinatnega sistema. Je invarianta polja.

Koordinatni zapis

Kako bi gradient izrazili s koordinatami? Vpeljimo poljubni koordinatni sistem. Gradientni premik  $ds$  ima v smeri osi  $x$  komponento  $dx = ds/\cos \alpha$ , pri čemer je  $\alpha$  kot med gradientno in abscisno smerjo. To pomeni, da  $dU/dx = (dU/ds) \cos \alpha$ . Podobno velja za preostali dve komponenti. Vse tri enačbe združimo v vektorsko obliko. V desni strani prepoznamo  $(dU/ds) \mathbf{n}$ , torej velja

$$\text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (32.4)$$

Velikost gradienta je seveda  $|\text{grad } U|$  in njegova smer je  $\mathbf{n} = \text{grad } U / |\text{grad } U|$ .



**Slika 32.2** Gradient skalarnega polja. Definiran je kot odvod v smeri največjega naraščanja polja.

Operator nabla

Tudi na komponentni izraz za gradient lahko pogledamo kot na produkt:  $(\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) U$ . S tem vpeljemo vektorski operator *nabla* in velja

$$\text{grad } U = \nabla U \quad (32.5)$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Nabla je diferencialni operator in simbolični vektor. Ima lastnosti tako odvoda kot vektorja. Pričakujemo, da bodo zanj veljala podobna pravila odvajanja kot za navaden odvod. Kratki računi (v komponentah in z enotnimi vektorji  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{k}$ ) res pokažejo, da veljajo standardna pravila  $\nabla(cU) = c\nabla U$ ,  $\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$  in  $\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U$ .

Smerni diferencial

Kako pa se skalarno polje iz točke  $\mathbf{r}$  spreminja v izbrano smer  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ ? To povemo s *smernim diferencialom*  $dU = U_x dx + U_y dy + U_z dz$ . (Indeksi ne pomenijo komponent, saj jih skalar pač nima, ampak parcialna odvajanja.) Desno stran

zapišemo kot skalarni produkt dveh vektorjev, gradienta in premika, ter dobimo

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)U. \quad (32.6)$$

Kar je zapisano v oklepaju, razumemo kot operator smernega diferenciranja. Skalarni produkt gradienta in nanj pravokotnega premika je enak nič, torej je diferencial v tej smeri enak nič, kakor tudi mora biti.

Zaporedne smerne diferenciale lahko seštejemo in dobimo spremembo polja med dvema oddaljenima točkama, izraženo preko gradienta tega polja

$$U_2 - U_1 = \int \nabla U ds. \quad (32.7)$$

Vrednost polja v točki 2, relativna na vrednost v točki 1, je neodvisna od tega, po kateri poti jo določamo. To je *izrek o integralu gradienta*. Pravzaprav ni nič drugega kot posplošitev osnovnega izreka integralnega računa (17.2), namreč da je "navadni" integral funkcije ene spremenljivke enak limitni vsoti njenih diferencialov. V posebnem primeru, ko je pot sklenjena, torej zanka, je krivuljni integral gradienta enak nič.

### 32.3 Pretok in divergenca

**Pretok** Poglejmo sedaj vektorska polja. Kakor teče reka po strugi, tako "teče" splošno vektorsko polje skozi prostor; nazorno si ga predstavljamo kar s tokovnicami. Pretok reke skozi izbrani presek struge nam da zamisel, da prav tako definiramo *pretok* vektorskega polja skozi izbrano ploskev:

$$\Phi = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (32.8)$$

Ploskev je lahko ravna ali zvita. K pretoku skozi vsak njen ploskovni element prispeva le pravokotna komponenta polja, to je projekcija poljskega vektorja na smer ploskovne normale. V komponentah zapišemo  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = (dy dz, dz dx, dx dy)$ , torej

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint v_x dy dz + \iint v_y dz dx + \iint v_z dx dy. \quad (32.9)$$

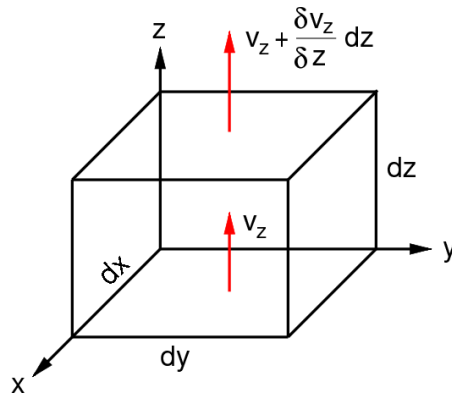
Vsak presek struge ima svoj pretok. Če med dvema zaporednima presekomoma ni *izvorov* in *ponorov*, sta oba pretoka enaka. To nas napelje na misel, da uvedemo pretok skozi sklenjeno ploskev, sestojeko iz dveh zaporednih presekov in iz zamejitvenih sten struge. Ali še bolje: skozi sklenjeno ploskev kakršnekoli oblike, potopljeno v reko, to je v vektorsko polje. Kadar je pretok polja skozi sklenjeno ploskev različen od nič, bomo rekli, da so znotraj ploskve *neto izvori* polja: pozitivni ali negativni. Kadar pa je pretok nič, v notranjosti bodisi ni izvorov/ponorov ali pa se medsebojno izničujejo.

**Divergenca** Za podrobnejšo raziskavo notranjih izvorov (ponore bomo zanaprej obravnavali kot negativne izvore), naredimo sklenjene

ploskve znotraj vektorskega polja poljubno majhne. S tem definiramo prostorninsko *gostoto izvorov* kot

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (32.10)$$

Rečemo, da je to *divergenca* polja. Divergenca vektorskega polja je skalarno polje. Definirana je neodvisno od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



**Slika 32.3** Divergenca vektorskega polja. Definirana je kot neto pretok vektorskega polja skozi majhno zaprto ploskev.

Kako naj divergenco izrazimo s koordinatami? Vpeljemo poljuben koordinatni sistem. Sklenjeni ploskvi damo obliko kvadra. Slika pokaže naslednje. Neto pretok v smeri  $z$  znaša  $(dv_z/dz)dz \cdot dx dy$ . Podobno velja za neto pretoka v smeri  $x$  in  $y$ . Vse tri pretoke seštejemo, delimo s prostornino  $dx dy dz$  in dobimo

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (32.11)$$

Prostorninski integral  
divergence

Prostornino znotraj poljubne sklenjene ploskve si mislimo zapolnjeno s samimi drobnimi kvadri. Pretok skozi kvader znaša  $\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \nabla \cdot \mathbf{v} dV$ . Seštejemo pretoke po vseh kvadrh. Prispevki po stičnih ploskvah se medsebojno izničijo in preostane pretok skozi oklepajočo ploskev:

$$\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (32.12)$$

Pretok polja skozi sklenjeno ploskev je torej enak integralu divergence tega polja po zaobjeti prostornini. Ta skoraj samoumevni *divergenčni izrek* omogoča, da namesto integriranja po površini (kar je ponavadi težko) raje integriramo po prostornini.

Divergenca je skalarni diferencialni operator. Z malo računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo standardna pravila odvajanja:  $\nabla \cdot (c\mathbf{v}) = c \nabla \cdot \mathbf{v}$ ,  
 $\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$  in  $\nabla \cdot (U\mathbf{v}) = U \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot U$ .

### 32.4 Cirkulacija in rotor

Cirkulacija Reka teče ponekod gladko, drugod se vrtinči. Na zamišljeni krožni poti po obrobju takega vrtinca so vsi hitrostni vektorji bolj ali manj usmerjeni vzdolž poti. Na podobni poti kje drugje, izven vrtincev, pa so hitrostni vektorji na kakšnem odseku usmerjeni vzdolž poti, na preostalem odseku pa v nasprotno smer. Kaže torej, da je integral vektorskega polja po sklenjeni poti, to je zanki, pomembna količina. Zato definiramo *cirkulacijo* splošnega vektorskega polja po poljubni zanki kot

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad (32.13)$$

V komponentah se integral glasi

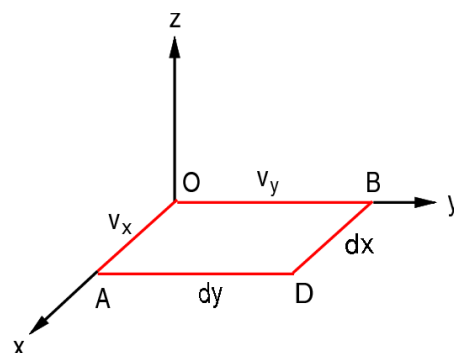
$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint v_x dx + \oint v_y dy + \oint v_z dz. \quad (32.14)$$

Kadar je cirkulacija po zanki različna od nič, rečemo, da so na (vsaj eni) ploskvi, napeti na zanko, prisotni *neto vrtinci* polja. Če je preučevana cirkulacija enaka nič, pa bodisi vmes ni vrtincev oziroma se ti medsebojno izničujejo.

Rotor Za bolj natančno obravnavanje notranjih vrtincev naredimo zanke v vektorskem polju ravninske, poljubno majhne in jih tudi orientiramo v različne smeri. Zanka definira komponento *rotorja* polja v smeri svoje normale. Primerno zasukana zanka pokaže, v kateri smeri  $\mathbf{n}$  je komponenta rotorja največja in s tem enaka celotnemu rotorju:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}. \quad (32.15)$$

Rotor vektorskega polja je tudi vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, kje so vrtinci polja, kako so močni in kako so usmerjeni. Definicija rotorja je neodvisna od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



**Slika 32.4** Rotor vektorskega polja. Definiran je kot cirkulacija vektorskega polja vzdolž majhne zanke.

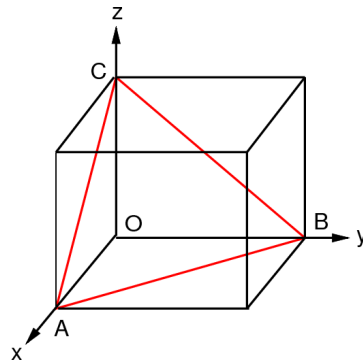
Komponentni zapis Kakšen je rotor v koordinatnem zapisu? Določiti moramo njegove tri pravokotne komponente, to je, preučiti tri ustrezno usmerjene zanke. Slika pove naslednje.

Produkt  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  znaša na odseku OA:  $v_x dx$ ; na odseku AD:  $(v_y + (\partial v_y / \partial x) dx) dy$ ; na odseku DB:  $-(v_x + (\partial v_x / \partial y) dy) dx$ ; in na

odseku BO:  $-v_y dy$ . Vse seštejemo, delimo s ploščino  $dx dy$  in dobimo izraz za komponento rotorja vzdolž osi z. Podobno napravimo še za drugi dve osi in dobimo vse tri komponente rotorja

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (32.16)$$

Tako kot gradient in divergenca se tudi rotor lepo izraža z operatorjem nabra.



Slika 32.5 Rotor in njegove komponente.

Komponente in projekcije

Prepričali bi se še radi, da se tri pravokotne komponente rotorja, izračunane iz treh kvadratnih zank, res sestavljajo v vektor. Slika pove naslednje. Naj trikotnik ABC določa ravnino, katere normala  $\mathbf{n}$  kaže v smer rotorja. Normala oklepa s koordinatnimi osmi kote  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ . Ploščina trikotnika je  $S_n$  in cirkulacija  $\Gamma_n$  poteka vzdolž stranic AB, BC in CA. Ta cirkulacija je enaka vsoti treh cirkulacij  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  in  $\Gamma_z$  po treh stranskih trikotnikih OBC, OCA in OAB, saj se prispevki vzdolž skupnih stranic izničijo. Ploščina stranskega trikotnika  $S_x = S_n \cos \alpha$  in podobno za druga dva. Naštete cirkulacije zapišemo kot produkte ustreznih rotorjev in ploščin ter dobimo (po deljenju z  $S_n$ )  $\text{rot}_n \mathbf{v} = \cos \alpha \text{rot}_x \mathbf{v} + \cos \beta \text{rot}_y \mathbf{v} + \cos \gamma \text{rot}_z \mathbf{v}$ . Iz tega razberemo  $\text{rot}_n \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\text{rot}_x \mathbf{v}, \text{rot}_y \mathbf{v}, \text{rot}_z \mathbf{v})$ . To je dokaz, da se rotor res projicira v pravilne komponente oziroma da komponente res opisujejo pravi vektor.

Majhna okrogla ploščica z narisano puščico, ki plava po gladini vode in se pri tem vrti, kaže, kakšen je lokalni rotor v navpični smeri. Integral obodne hitrosti po obsegu ploščice znaša  $2\pi r v$ , ploščina je  $\pi r^2$ , njun količnik pa pove  $\text{rot}_z \mathbf{v} = 2v/r = 2\omega$ . Rotor je torej enak dvakratni kotni hitrosti vrtenja. V notranjosti tekočine pa si moramo misliti prozorno kroglico s tremi vrisanimi puščicami.

Ploskovni integral rotorja

Ploščino poljubne ploskve, napete na veliko zanko, si mislimo razkosano na drobne kvadrate. Cirkulacija po kvadratu znaša  $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$ . Seštejemo cirkulacije po vseh kvadratih. Prispevki po stičnih robovih se medsebojno izničijo in preostane cirkulacija po zunanji oklepajoči zanki:

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (32.17)$$



Cirkulacija polja po sklenjeni zanki je torej enaka integralu rotorja tega polja po katerikoli zaobjeti ploskvi. Ta *rotorski izrek* omogoča, da namesto integriranja po zanki raje integriramo po ploskvi in obratno, kakor je pač računsko lažje.

Rotor je vektorski diferencialni operator. Z nekaj računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo naslednja pravila odvajanja:  $\nabla \times (c\mathbf{v}) = c \nabla \times \mathbf{v}$ ,  
 $\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$  in  $\nabla \times (U\mathbf{v}) = U(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla U)$ .

### 32.5 Operacije drugega reda

Divergenca in rotor  
gradienta

Gradient skalarja je vektor. Nad tem vektorjem lahko izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Kaj dobimo? Računanje s komponentami pokaže:

$$\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (32.18)$$

$$\nabla \times (\nabla U) = 0.$$

Simbolično lahko torej računamo tako, kot da bi bil nabla pravi vektor in skalarno polje navaden skalar:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} c) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) c = \mathbf{a}^2 c$ . In  $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} c) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) c = 0$ .

Kakšen pomen ima izraz  $\nabla^2 U$ ? Okrog preučevane točke si zamislimo kocko z robovi  $dl$ . V središčni točki aproksimirajmo  $\partial^2 U / \partial x^2 \approx [(U_{i+1} - U_i) / dl - (U_i - U_{i-1}) / dl] / dl$  in podobno za druga dva odvoda. Dobimo  $\nabla^2 U = (\bar{U} - U_0) / S$ , pri čemer je  $U_0$  polje v preučevani točki (v sredini kocke),  $\bar{U}$  povprečna vrednost polja na šestih ploskvah kocke in  $S$  površina kocke. Če je torej izraz  $\nabla^2 U$  v preučevani točki enak nič, je vrednost polja v tej točki enaka povprečni vrednosti na "ekvidistantni" ploskvi okrog nje. Če ni nič, pa meri odmik od tega povprečja. V pomanjkanju boljšega imena mu bomo rekli *delta* polja in ga označili  $\Delta U$ . Delta polja torej pove, koliko se polje v izbrani točki razlikuje od povprečja v neposredni okolici.

Zanimiva je tudi ugotovitev, da gradient poljubnega skalarnega polja nima vrtincev. To je pričakovano, saj je le z drugimi besedami povedano, da je integral gradienta po sklenjeni zanki enak nič.

Divergenca in rotor  
rotorja

Rotor vektorja je vektor. Tudi nad njim lahko legitimno izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Računanje v komponentah, v zadnjem primeru precej dolgovezno, pove:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (32.19)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

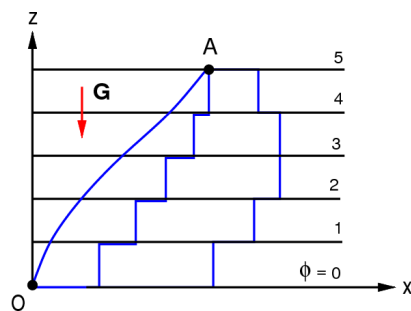
Spet smemo računati kot s pravimi vektorji. V produktu  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  je faktor  $\mathbf{v}$  oklepaju vektor, pravokoten na  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ , torej je njegov skalarni produkt z  $\mathbf{a}$  enak nič. Druga enačba pa je tudi taka, kot

pravi dvojni vektorski produkt. Spet dobimo zanimiv rezultat, namreč da rotor poljubnega vektorskega polja nima izvorov.

Preostala operacija drugega reda – gradient divergence – je že zaobjeta v identiteti za rotor rotorja.

Konservativna polja

Naj bo vektorsko polje tako, da je njegova cirkulacija (oziroma rotor) povsod enaka nič:  $\nabla \times \mathbf{G} = 0$ . Rečemo, da je takšno polje *konservativno*. Dober primer je homogeno gravitacijsko polje v bližini Zemlje. Ker vemo, da je rotor enak nič tudi za gradient poljubnega skalarne polja, sledi, da se da konservativno vektorsko polje izraziti kot gradient ustreznega skalarne polja:  $\mathbf{G} = -\nabla \phi$ . To skalarno polje poimenujemo *potencial*. Negativni predznak vključimo zato, ker želimo, da se potencial večja vzdolž smeri polja.



**Slika 32.6** Potencial konservativnega polja. Prikazano je homogeno gravitacijsko polje  $\mathbf{G}$ . Vrednost potenciala  $\phi$  v izbrani točki je določena z integralom polja vzdolž poljubne krivulje iz referentne točke.

Kako izračunamo potencial? Izberemo referentno točko v polju in ji dodelimo poljubno vrednost potenciala. Potem izračunamo krivuljni integral vzdolž poljubne poti do vsake točke polja in s tem določimo tamkajšnji potencial:  $\phi - \phi_0 = \int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$ . Pot izberemo tako, da je računanje najlažje. Očitno je tovrstna izbira potenciala nedoločena za izhodiščno konstanto. Drugače rečeno: če je  $\phi$  potencial konservativnega polja, potem je tak tudi  $\phi + \text{const}$ . Za gravitacijsko polje  $\mathbf{G} = (0, 0, -g)$  tako izračunamo  $\phi = gz_0 + gz$ .

### 32.6 Krivočrtne koordinate

Skalirni faktorji

Kadar ima polje cilindrično ali krogelno simetrijo, ga je priročno obravnavati v temu prilagojenih koordinatah. Cilindrične koordinate so, kot vemo:  $\rho$ ,  $\varphi$  in  $z$ , krogelne pa:  $r$ ,  $\theta$  in  $\varphi$ . Poljubne pravokotne *krivočrtne koordinate* označimo s  $q_1$ ,  $q_2$  in  $q_3$ . Prostor je prepleten z njihovimi koordinatnimi krivuljami. Skozi vsako točko gredo tri med seboj pravokotne krivulje. Vzdolž krivulje 1 je usmerjen dolžinski element

$$ds_1 = h_1 dq_1 \quad (32.20)$$

in podobno vzdolž drugih dveh. Trije *skalirni faktorji*  $h_i$  so pravzaprav koreni že spoznanih metričnih koeficientov:  $h_i = \sqrt{g_{ii}}$  (31.31). Za cilindrične koordinate znašajo, kot znano: 1,  $\rho$  in 1 ter za krogelne: 1,  $r$  in  $r \sin \theta$ .

Ploščinski element z normalo vzdolž krivulje 1 je

$$dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (32.21)$$

in podobno za ostali dve. Prostorninski element pa znaša

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (32.22)$$

Gradient, divergenca  
in rotor

Zapisani elementi omogočajo, da izračunamo gradient, divergenco in rotor v krivočrtnih koordinatah, izhajajoč iz brezkoordinatnih definicij teh količin. Ravnamo prav tako kot pri kartezičnih koordinatah, le računanja je več:

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \\ \text{div } \mathbf{v} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial v_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2 h_3 h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \right] \\ \text{rot}_1 \mathbf{v} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_3} \right) \\ \text{rot}_2 \mathbf{v} &= \frac{1}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_1} \right) \\ \text{rot}_3 \mathbf{v} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \quad (32.23)$$

Delta Iz enačb za gradient in divergenco sledi enačba za divergenco gradienta, torej za delto polja v krivočrtnih koordinatah:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (32.24)$$

### 32.7 Cilindrične koordinate

Vstavitev cilindričnih skalirnih faktorjev v dobljene enačbe pove:

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \left( \frac{\partial U}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \text{div } \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \text{rot}_\rho \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial z} \right) \\ \text{rot}_\varphi \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) \\ \text{rot}_z \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta U &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (32.25)$$

Osnosimetrična polja

Enačbe so videti kar zamotane, vendar se močno poenostavijo, če ima polje *osno simetrijo*. Temperatura v steni cevi, po kateri teče vroča voda, ima na primer osno simetrični profil  $T = T(\rho)$ . Njegova gradient in delta zato znašata

$$\text{grad}_\rho T = \frac{dT}{d\rho}. \quad (32.26)$$

$$\Delta T = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dT}{d\rho} \right).$$

Lep vodni vrtinec ima profil hitrosti  $v_\varphi = v_\varphi(\rho)$ . Njegova divergenca in rotor zato znašata

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0 \\ \text{rot}_z \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho v_\varphi}{d\rho}. \end{aligned} \quad (32.27)$$

Togo vrtenje, ko  $v_\varphi = \omega\rho$ , zadevo še bolj poenostavi v  $\text{rot}_z \mathbf{v} = 2\omega$ , kakor tudi mora biti. Če pa se voda v vrtincu giblje tako, da  $v_\varphi\rho = \text{const}$ , je rotor povsod enak nič. "Vrtinec" je zato brezvrtinčen!

### 32.8 Krogelne koordinate

Ko v splošne enačbe vstavimo krogelne skalirne faktorje, pa dobimo:

$$\text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \quad (32.28)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot}_r \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial r \sin \theta v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial r v_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial r \sin \theta v_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Radialno simetrična polja

Te enačbe so še bolj zapletene kot cilindrične. Se pa lepo poenostavijo za polja, ki imajo *radialno simetrijo*. Primer je temperaturni profil v notranjosti Zemlje,  $T = T(r)$ . Njegova gradient in delta znašata

$$\text{grad}_r T = \frac{dT}{dr}. \quad (32.29)$$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right).$$

Tudi težno polje v Zemlji in izven nje ima radialno simetričen profil  $g_r = g_r(r)$ . Njegova divergenca in rotor znašata

$$\text{div } \mathbf{g} = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 g_r}{dr} \quad (32.30)$$

$$\text{rot } \mathbf{g} = 0.$$

Zunaj Zemlje, kjer  $g_r = g_0 r_0^2 / r^2$ , postane tudi divergenca enaka nič. Tako tudi mora biti, saj tam ni izvorov polja.  $\square$



## 33 Statistika

Preštevanje – Poskusi in izidi – Verjetnosti izidov – Verjetnost sestavljenih izidov – Binomska porazdelitev – Vsota slučajnih izidov – Normalna porazdelitev – Povprečje in varianca – Večdimenzijske porazdelitve – Soodvisnost spremenljivk – Vzorčenje in statistika – Merjenje in merske napake – Intervalno ocenjevanje – Preizkušanje domnev – Regresijska analiza – Statistično zavajanje

### 33.1 Preštevanje

Izbiranja Nekatere stvari v življenju lahko naredimo na več načinov. Dober primer je kosilo v restavraciji. Na jedilniku je zapisano: 2 predjedi, 3 glavne jedi in 2 poobedka. Izberemo lahko po eno jed iz vsake skupine. Koliko različnih kosil si lahko privoščimo? Očitno  $N = 2 \cdot 3 \cdot 2$ . Nasploh velja: če lahko najprej naredimo  $N_1$  izbir; nato – neodvisno od tega, kaj smo izbrali – novih  $N_2$  izbir; in tako naprej, je različnih izbirnih nizov  $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_n$ . Kaže, da sta izbiranje in preštevanje izbir pomembni opravili. Poskusimo torej raziskati kaj več o tem.

Permutacije Imejmo niz petih različnih črk (a, b, c, d, e). Ta niz lahko premešamo; ena izmed premešav je, na primer, (b, a, c, e, d). Rečemo, da je to *permutacija* osnovnega niza. Koliko pa je takih različnih permutacij? Na prvo mesto permutacije lahko postavimo eno izmed 5 črk. Ostanjejo še štiri. Na drugo mesto postavimo eno izmed preostalih 4 črk. Tako nadaljujemo in dobimo  $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$  različnih nizov črk. Na splošno lahko torej iz  $n$ -terice različnih elementov naredimo  $P_n$  njenih permutacij:

$$P_n = n! . \quad (33.1)$$

Če vseh  $n$  elementov ni različnih, ampak je med njimi  $r$  enakih, je različnih permutacij  $r!$ -krat manj:  $P_n^r = n!/r!$ .

Variacije Iz niza petih črk (a, b, c, d, e) potegnimo poljubne tri črke. Trojke iz istih črk, a z različnim vrstnim redom, obravnavamo kot različne: (a, b, c) je torej različna od (b, a, c). Rečemo, da so to *variacije* dolžine 3 iz osnovnega niza. Koliko različnih variacij pa lahko naredimo? Na prvo mesto v trojki lahko postavimo eno izmed 5 črk. Preostanejo štiri. Na drugo mesto postavimo eno izmed preostalih 4 črk. Tako nadaljujemo in dobimo  $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/(5 - 3)!$  različnih trojk. Na splošno iz  $n$ -terice različnih elementov lahko naredimo  $V_n^r$  različnih variacij dolžine  $r$ :

$$V_n^r = \frac{n!}{(n - r)!} . \quad (33.2)$$

Kombinacije Koliko je pa različnih trojk, pri čemer obravnavamo trojke iz istih črk, a z različnim vrstnim redom, kot enake: (a, b, c) je enaka

(b, a, c)? Rečemo, da so to *kombinacije* dolžine 3 iz osnovnega niza. Očitno je število kombinacij manjše kot število variacij in sicer za tolikokrat, kolikor je permutacij niza z dolžino 3, torej  $N = 5!/(5 - 3)!3!$ . Na splošno lahko torej iz  $n$ -terice različnih elementov naredimo  $C_n^r$  različnih kombinacij dolžine  $r$ :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (33.3)$$

### 33.2 Poskusi in izidi

Igralna kocka Ljudje, ki nimajo kaj boljšega početi, radi mečejo kocke. Takšna *igralna kocka* ima na svojih ploskvah narisane pike. Vsaka ploskev ima svoje število pik: od ena do šest. Ko kocko vržemo na mizo, se zakotali, ustavi in njena zgornja ploskev pokaže določeno število pik. Vnaprej nikoli ne vemo, koliko jih bo padlo. Ljudje stavijo denar, kaj se bo pri metu zgodilo, in tisti, ki ugame, pobere stave. Te so lahko raznovrstne: padla bo trojka; ne bo padla trojka; padlo bo sodo število; v dveh zaporednih metih bo padla vsaj ena šestica; pri hkratnem metu dveh kock bo padlo skupaj deset pik; in še mnogo drugega.



**Slika 33.1** Igralni kocki. Izid meta ene ali več kock je slučajna spremenljivka. (Anon)

Poskus in izid Na met kocke lahko pogledamo kot na *poskus*, ki ima šest možnih *elementarnih izidov*: število pik od ena do šest. Vnaprej ne vemo, kakšen bo izid predstoječega poskusa, zato rečemo, da je tak izid *slučajna spremenljivka*, ki lahko zavzame celoštevilčne vrednosti med ena in šest. Pričakujemo pa, da se bo v velikem številu poskusov (torej metov), pojavil vsak izmed šestih izidov v približno enakem deležu in sicer v eni šestini primerov, če je le kocka "poštena". Pravzaprav je res obratno: če se vsak izid pojavlja enako pogosto, rečemo, da je kocka poštena.

### 33.3 Verjetnosti izidov

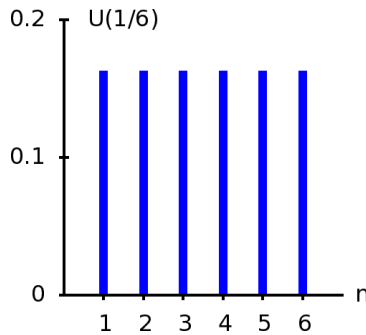
Pogostost izida Pa izmerimo, kako pogosto se pojavljajo posamični izidi za dotično kocko! Kar naprej jo mečimo in beležimo vsakokratne izide, to je vrednosti slučajne spremenljivke  $x$ . Ta spremenljivka lahko zavzame vrednosti  $x_1 = 1, x_2 = 2 \dots x_6 = 6$ . Ko vržemo kocko 10-krat, se izid  $x_3$ , na primer, pojavi 2-krat, torej v 2/10 poskusov. Pri  $N$  poskusih se nasploh izid  $x_k$  pojavi  $N_k$ -krat. Razmerje  $N_k/N$  se z vsakim nadaljnjim metom spremeni. V začetku se od meta do meta močno spreminja, kasneje pa se čedalje bolj zgošča okrog



neke limitne vrednosti. Vsak izid se zgošča okrog svoje limite. S tem je definirana njegova *relativna frekvenca* oziroma *pogostost*

$$P_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_k}{N}. \quad (33.4)$$

Pri pošteni kocki, na primer, izmerimo v 1000 metih  $P_3 = 0,17 \approx 1/6$  in enako za ostale izide. Pogostosti elementarnih izidov prikažemo s tabelo ali grafom – *frekvenčno porazdelitvijo* izidov.



**Slika 33.2** Frekvenčna porazdelitev izidov pri metu poštene kocke. Vsak izid  $n$  se pojavlja z enako pogostostjo: porazdelitev je enakomerna.

Iz definicije je jasno, da mora za vsakršno frekvenčno porazdelitev veljati

$$\sum P_k = 1. \quad (33.5)$$

Rečemo, da so porazdelitve *normirane*.

Verjetnost izida

Čim večja je pogostost kakega izida v množici poskusov, tem bolj "verjetno" se nam zdi, da bo predstoječi posamični poskus pokazal ravno ta izid. Povedano izkoristimo za kvantitativno definicijo verjetnosti: *verjetnost* kakega izida pri posamičnem poskusu, to naj bo njegova relativna frekvenca v množici poskusov pri enakih "delovnih" pogojih. Pogostost se torej nanaša na množico poskusov, verjetnost pa na posamičen poskus. Izraz "verjetnost", kakor smo ga definirali in kakor ga hočemo uporabljati, ni nič drugega kot sinonim za izraz "pogostost". Verjetnosti so decimalna števila med 0 in 1.

### 33.4 Verjetnost sestavljenih izidov

Unija izidov

Kakšna je verjetnost, da pri metu kocke pade  $x_3$  ali  $x_5$ ? Da bomo bolj splošni, recimo: kakšna je verjetnost, da se v enem poskusu pokaže elementarni izid A ali elementarni izid B, torej vsaj eden izmed obeh? To je seveda tudi svojevrsten izid poskusa.

Poimenujemo ga *unija* dveh elementarnih izidov ter ga označimo kot izid  $(A \cup B)$ . Iz definicije verjetnosti neposredno sledi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (33.6)$$

Verjetnost, da se pri enem poskusu pokaže eden ali drugi od možnih elementarnih izidov, je enaka vsoti verjetnosti obeh posamičnih izidov. Da poštena kocka pokaže  $x_3$  ali  $x_5$ , se zato zgodi z verjetnostjo  $1/6 + 1/6 = 2/6$ .

Pravilo o seštevanju verjetnosti ne velja le za dva elementarna izida, ampak tudi za več njih. Prav tako ne velja le za elementarne izide, temveč za kakršnekoli izide, ki se medsebojno izključujejo, to je, če se pokaže eden, se ne more hkrati pokazati še drugi. Dva takšna izključujoča se izida pri metu kocke sta, na primer: pade sodo število pik ( $x_2$  ali  $x_4$  ali  $x_6$ ) in pade trojka ( $x_3$ ). Verjetnost prvega izida je  $1/2$ , verjetnost drugega je  $1/6$ , in verjetnost njune unije, torej enega ali drugega, je  $1/2 + 1/6 = 4/6$ .

Presek izidov Kakšna je verjetnost, da pri metu kocke pade  $x_3$  in pri naslednjem metu  $x_5$ ? Da bomo bolj splošni, recimo: kakšna je verjetnost, da se v prvem poskusu pokaže elementarni izid A in pri drugem poskusu elementarni izid B? To je tudi svojevrsten izid (dvojnega) poskusa. Poimenujemo ga *presek* obeh izidov ter ga označimo kot izid  $(A \cap B)$ . Iz definicije verjetnosti neposredno sledi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (33.7)$$

Verjetnost, da se pri prvem poskusu pokaže izid A in pri drugem izid B, je enaka produktu verjetnosti obeh posamičnih izidov. Seveda velja vse povedano tudi za več poskusov in za izide, ki niso elementarni. V vsakem primeru pa morajo biti poskusi medsebojno neodvisni, to je, izid drugega poskusa ne sme biti odvisen od izida prvega poskusa. Da poštena kocka pokaže prvič  $x_3$  in druga  $x_5$ , se zato zgodi z verjetnostjo  $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ .

### 33.5 Binomska porazdelitev

Verjetnost, da pri metu kocke pade šestica, torej  $x_6$ , naj bo  $1/6$ . Verjetnost, da ne pade šestica, pa je zato  $1 - 1/6 = 5/6$ . Zanima nas, kolikšne so verjetnosti, da v 5 metih pade šestica natanko 0-krat, 1-krat ... 5-krat. Poskusi so sedaj petorke metov, opazovani izid pa število šestic,  $n$ , v vsaki petorki. Mečemo petorke v nedogled. Sproti štejemo, kolikokrat vsebujejo 0 šestic, 1 šestico in tako naprej. S tem so čedalje natančneje določene relativne frekvence  $P_n$ . Hočemo jih izračunati.

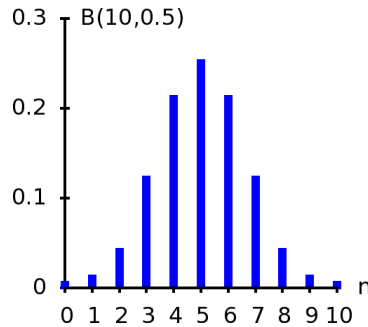
Število uspehov v vrsti poskusov

Bolj splošno lahko nalogo postavimo takole. Delamo take poskuse, ki imajo le dva izida, "uspeh" T in "neuspeh" F. Verjetnost za uspeh naj bo  $p$  in za neuspeh  $1 - p = q$ . Kakšna je verjetnost, da je v  $N$  poskusih natanko  $n$  uspešnih?

En način, na katerega se lahko pojavi  $n = 2$  uspehov v  $N = 5$  poskusih, je TFFFF. Verjetnost tega izida znaša  $p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2 q^{5-2}$ . Vendar obstajajo še drugi načini, na primer FFFTT in TFFFT in še mnogi. Vsak izmed njih je enako verjeten, ker so zaporedni poskusi med seboj neodvisni. Verjetnosti vseh moramo sešteti. Koliko različnih  $N$ -teric pa pravzaprav lahko sestavimo iz  $n$  črk T in iz  $(N - n)$  črk F? Toliko, kolikor je permutacij  $N$  elementov, od katerih je  $n$  enakih in  $(N - n)$  tudi enakih:  $N!/n!(N - n)!$ . Iskana verjetnost je torej:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = B_{N,p}(n). \quad (33.8)$$

To je *binomska porazdelitev* (J. BERNOULLI). Pove nam, kakšna je verjetnost, da v  $N$  poskusih zadenemo natanko  $n$  uspešnih izidov, če je verjetnost takega izida pri posamičnem poskusu enaka  $p$ . Da v petih metih kocke pade natanko ena šestica, se torej zgodi z verjetnostjo 0,16.



**Slika 33.3** Binomska porazdelitev. Prikazana je verjetnost, da v deseterici metov poštenega kovanca pade glava 0, 1, 2 ... 10-krat.

Vsota verjetnosti vseh možnih izidov pri enem poskusu ( $N$ -terici metov) mora biti enaka ena, to je, porazdelitev verjetnosti mora biti normirana. Malo nas skrbi, ali to za izpeljano binomsko porazdelitev res drži. Eksplicitno zapisana vsota  $\sum B_{N,p}(n)$  znaša  $C_N^0 q^n + C_N^1 p q^{n-1} + \dots + C_N^N p^n$ . To pa ni nič drugega kot razviti binom  $(q+p)^n$ , torej  $((1-p)+p)^n$ , torej  $1^n = 1$ . Skrb je odveč, porazdelitev je normirana.

Slepo reševanje  
testov

Lep primer "uspešnega" poskusa je slepo reševanje šolskih testov. Učenec dobi 5 vprašanj. Ob vsakem so navedeni 3 odgovori in samo eden izmed njih je pravilen. Vsi odgovori se zdijo učencu enako verjetni, zato na slepo izbere enega. Verjetnost, da je prav uganil, je zato  $1/3$ . Število uspehov, ki jih tako doseže, znaša od 0 do 5. Verjetnost, da doseže 4 ali 5 uspehov, je  $B_{5,1/3}(4) + B_{5,1/3}(5) \approx 0,045$ . Kaj takega se torej zgodi enkrat v  $1/0,045 \approx 20$  testih.

Namesto da en učenec slepo opravi neskončno testov, si lahko mislimo neskončno učencev, ki na slepo opravijo en test. Frekvenčni porazdelitvi po rezultatih sta v obeh primerih enaki. Če je torej potrebnih  $\sim 20$  testov, da en učenec slučajno doseže štiri ali pet točk, to slučajno uspe enemu izmed množice  $\sim 20$  učencev.

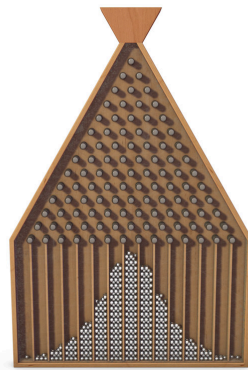
Še beseda o slepem izbiranju. Izbira enega izmed množice elementov, recimo enega izmed treh odgovorov, je slepa, če ima vsak element enako verjetnost, da je izbran. Dober način za to je naslednji: vse elemente oštevilčimo, številke zapišemo na listke in jih zapremo v čim bolj enake kroglice, vržemo kroglice v vrteč se boben ter čez nekaj časa z zavezanimi očmi potegnemo iz njega eno kroglico. Za prvo silo, če je elementov malo, zadostujejo kar prepognjeni listki in navaden klobuk. Da opisana načina res

zagotavljata enako verjetnost izbire, pa se na koncu koncev ne moremo prepričati nič drugače, kot da ju dejansko preizkusimo s štejetjem izidov.

### 33.6 Vsota slučajnih izidov

Ožebljena deska

Na met in kotaljenje kocke učinkuje okolje z množico vplivov, ki jih ne poznamo in na katere je izid silno občutljiv. Majhna sprememba v začetnih in vmesnih pogojih, pa je rezultat že čisto drugačen. To nas navede na misel, da bi vpliv okolja na gibanje telesa lahko preučevali tudi tako, da bi po klancu spuščali kroglico, nanjo vplivali z gozdom zabitih žebličkov, in gledali, kje na dnu bo pristala. Najpreprostejša je deska z  $N$  vrsticami žebličkov, ki so med sabo razmaknjeni za premer kroglice, pri čemer je vsaka druga vrsta zamaknjena vstran za polovčno razdaljo med žeblički. To je ožebljena deska.



**Slika 33.4** Ožebljena deska. Ilustracija deske, ki jo je uporabljal F. Galton. Spuščene kroglice se razvrstijo po binomski porazdelitvi. (Eterea Estudios)

Porazdelitev odmikov

Kroglico spustimo z vrha. Na prvi vrstici se odbije levo ali desno, na drugi prav tako in s cikcakanjem nadaljuje vse do dna. Verjetnost za odboj v desno naj bo vsakokrat  $p$  in za odboj v levo  $q = 1 - p$ . Ti dve verjetnosti sta ponavadi enaki. V  $N$  trkih opravi kroglica  $n$  korakov v desno in  $N - n$  korakov v levo. Gibanje kroglice lahko torej opišemo kot  $N$ -kratni met kocke in štetje "ugodnih" izidov. Ugodni izid pri spuščanju kroglice je pač korak v (recimo) desno. Kolikokrat se bo kroglica premaknila v desno v  $N$  trkih, je torej opisano z binomsko porazdelitvijo  $B_{N,p}(n)$ .

Neto premik v desno,  $m$ , je enak razliki premikov v desno in levo:  $m = n - (N - n)$ . Izrazimo  $n$  z  $m$  in ga vstavimo v binomsko porazdelitev, pri čemer izberemo še  $p = q = 1/2$ , pa dobimo:

$$B_{N,1/2}(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]! [(N-m)/2]!} \left(\frac{1}{2}\right)^N. \quad (33.9)$$

To je verjetnostna porazdelitev leg, ki jih doseže kroglica na dnu, oziroma delež kroglic, ki pristanejo v teh legah. Kadar izraza  $N + m$  ali  $N - m$  nista soda, bi morali računati faktorielo ulomnega števila. Kaj to pomeni, ne vemo in bo morda treba še primerno definirati. Zaenkrat bomo pri konkretnem računanju aproksimirali  $(n + 0,5)! \sim n!(n + 1)/2$ .

Dolga ožebljena deska

Če je ožebljena deska dolga, postane porazdelitev simetrično zvonasta. Kakšna je ta porazdelitev, ko raste  $N$  čez vse meje, pri čemer se omejimo še na področje  $m \ll N$ ?

Faktoriele velikih števil so neznansko velike, zato porazdelitev najprej logaritmiramo. Nastane vsota logaritmov. Vsak člen oblike  $\ln n!$  aproksimiramo z integralom:  $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \approx \int_1^n \ln x dx$ . Tak integral znaša  $(x \ln x - x) \Big|_1^n$ , torej - ko zanemarimo še 1 v primeri z  $n - \ln n! \approx n \ln n - n$ . Nato pridobljene izraze  $\ln(1 + m/N)$  aproksimiramo s kratko potenčno vrsto:  $m/n - m^2/2N^2$ . Dobimo  $\ln B \approx -m^2/2N$ , torej

$$B_{N,1/2}(m) \approx A \cdot e^{-m^2/2N}. \quad (33.10)$$

Konstanto  $A$  smo pritaknili, ker sumimo, da smo zaradi številnih aproksimacij zapravili normiranost izhodiščne porazdelitve. To pomeni, da moramo to konstanto zdaj naknadno določiti iz pogoja normiranosti, torej  $A = 1 / \int \exp(-m^2/2N) dm$ . S tem bo *normalna aproksimacija* k binomski porazdelitvi popolnoma določena.

Normalni integral

Kako izračunati *normalni integral*  $I = \int \exp(-x^2) dx$  med  $-\infty$  in  $+\infty$ ? Takole:  $I^2 = \int \exp(-x^2) dx \cdot \int \exp(-y^2) dy = \iint \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy$ . To je ploskovni integral v kartezičnih koordinatah. Zapišemo ga v polarnih koordinatah  $x^2 + y^2 = r^2$  in  $dx dy = r dr d\varphi$ , preoblikujemo  $r dr = 1/2 d(r^2)$  in dobimo integral z navadno eksponentno funkcijo  $I^2 = 1/2 \iint \exp(-t) dt d\varphi$ . Za meji med 0 in  $\infty$  ter med 0 in  $2\pi$  ga zlahka izračunamo in znaša  $\pi$ . Koren iz tega je torej iskani normalni integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (33.11)$$

S tem je normalizacijska konstanta določena:  $A = 1/\sqrt{2\pi N}$ .

### 33.7 Normalna porazdelitev

Gostota verjetnosti

Ko z astrolabom določamo višino zvezde ob kulminaciji, se izmerki med seboj bolj ali manj razlikujejo. Če odmislimo *sistematične napake* - ko uporabimo nenatančen kotomer ali ko narobe odčitamo številko z njega ali ko celo merimo napačno zvezdo - preostane še množica *slučajnih napak* - zaradi nihanje astrolaba, migotanja ozračja in še kaj. Podobno se dogaja pri merjenju drugih količin. Izmerke takšne zvezne količine  $x$  razvrstimo v primerno široke razrede  $x \pm dx/2$  in preštejemo, koliko izmerkov  $dN(x \pm dx/2)$  pade v vsakega. S tem je določena njihova frekvenčna porazdelitev

$$\frac{dP}{dx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dN(x \pm dx/2)}{N} = p(x), \quad (33.12)$$

ki je seveda normirana:

$$\int dP = \int p(x) dx = 1. \quad (33.13)$$

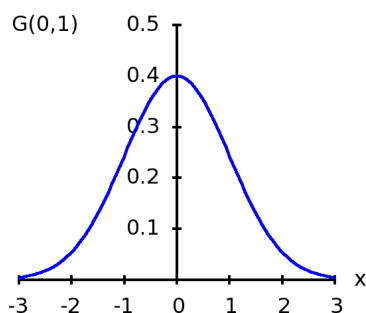
Pogledano z drugimi očmi: izmerek količine je slučajna spremenljivka in (limitna) frekvenčna porazdelitev izmerkov je njena gostota verjetnosti.

Normalna porazdelitev

Ko narišemo gostoto verjetnosti za izmerjene kulminacije ali kako drugo tovrstno količino, opazimo, da ima lepo zvonasto obliko, ki je na moč podobna normalni binomski aproksimaciji, le da je zvezna (33.10). Zato definiramo *normalno porazdelitev* kot (GAUSS)

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = G_{\mu,\sigma}(x). \quad (33.14)$$

Parameter  $\mu$  pove, kje leži vrh porazdelitve in parameter  $\sigma$  določa širino vrha. Kot kvadrat ga pišemo zato, da ima enake dimenzije kot slučajna spremenljivka. Sorazmernostna konstanta poskrbi za normiranost.



**Slika 33.5** Normalna porazdelitev. Prikazana je porazdelitev s povprečjem 0 in deviacijo 1.

Dejstvo, da so kakšni izmerki porazdeljeni normalno, nam sporoča, da nanje vpliva - kakor na gibanje kroglice po žebeljasti deski - množica med seboj neodvisnih in nasprotujočih si drobnih vplivov. Pravzaprav je normalna porazdelitev celo neke vrste zagotovilo, da izmerki niso obremenjeni s sistematičnimi, ampak zgolj s slučajnimi napakami.

Standardna porazdelitev

S porazdelitvijo verjetnosti po spremenljivki  $x$  je določena tudi porazdelitev po vsaki drugi, z njo povezani spremenljivki  $z(x)$ :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dz}. \quad (33.15)$$

Če so izmerki  $x$  porazdeljeni kot  $dP/dx = G_{\mu,\sigma}(x)$ , potem so ustrezajoči *normalizirani izmerki*

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (33.16)$$

porazdeljeni kot  $dP/dz = (dG/dx)(dx/dz)$ , torej takole:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} = G_{0,1}(z). \quad (33.17)$$

To je normalna porazdelitev z vrhom pri  $\mu = 0$  in s širino  $\sigma = 1$ . Poimenujemo jo *standardna porazdelitev*. Verjetnost, da bo slučajni izmerek  $x$  ležal na intervalu med  $x_1$  in  $x_2$ , je zato enaka

verjetnosti, da bo normalizirani izmerek  $z$  ležal na intervalu med  $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$  in  $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$ . Ta verjetnost je enaka integralu  $G_{0,1}(z)$  med navedenima mejama. Za konkretno računanje potrebujemo še tabelirane vrednosti  $G_{0,1}(z)$  in njenega integrala

$$\int_0^z G_{0,1}(z) dz = \text{erf}(z). \quad (33.18)$$

Slednjega izračunamo z razvojem podintegralne funkcije  $\exp t$ ,  $t = -z^2/2$  v potenčno vrsto  $1 + t + t^2/2! + \dots$  in jo členoma integriramo:

$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (33.19)$$

Tako pridelamo tabelo

**Tabela 33.1.** Standardna porazdelitev in ploščina pod njo.

| $z$ | $G_{0,1}(z)$ | $\text{erf}(z)$ |
|-----|--------------|-----------------|
| 0.0 | 0,40         | 0,00            |
| 0.5 | 0,35         | 0,19            |
| 1.0 | 0,24         | 0,34            |
| 1.5 | 0,13         | 0,43            |
| 2.0 | 0,05         | 0,48            |
| 2.5 | 0,02         | 0,49            |
| 3.0 | 0,00         | 0,50            |

Verjetnost, da leži izmerek  $x$  znotraj intervala  $\mu \pm \sigma$ , je torej  $2 \cdot 0,34 = 0,68$ . Na intervalu  $\pm 2\sigma$  leži z verjetnostjo  $2 \cdot 0,48 = 0,95$ . In na intervalu  $\pm 3\sigma$  ga najdemo (skoraj) z gotovostjo  $2 \cdot 0,50 = 1$ .

### 33.8 Povprečje in varianca

Povprečje Ko zaporedno zložimo  $N$  palic z dolžinami  $l_1, l_2 \dots l_N$ , dobimo palico dolžine  $L$ . Enako dolgo sestavljeno palico dobimo tudi z  $N$  enakimi palicami dolžine  $\bar{l}$ , torej  $N \cdot \bar{l} = \sum l_n$ . S tem je definirana povprečna dolžina uporabljenih  $N$  palic:  $\bar{l} = (1/N) \sum l_n$ . Če je palic veliko in so nekatere med seboj enake, raje računamo takole:  $\bar{l} = (1/N) \sum N_k l_k = \sum (N_k/N) l_k = \sum f_k l_k$ . Keficienti  $f_k$  so relativne frekvence palic enake dolžine. Kar velja za palice in njihove dolžine, posplošimo za poljubno slučajno spremenljivko  $x$ : njeno *povprečno vrednost* v limitni množici poskusov, ko  $f_k \rightarrow P_k$ , definiramo kot  $\langle x \rangle = \sum x_k P_k = \text{Ave}(x)$ . Če je spremenljivka zvezna, pa velja

$$\langle x \rangle = \int x p(x) dx. \quad (33.20)$$

Vsota uteženih odklikov od povprečja je enaka nič:  $\int (x - \langle x \rangle) dP = \int x dP - \langle x \rangle \int dP = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$ .

Varianca in deviacija Palice, iz katerih določamo povprečje, se med seboj bolj ali manj razlikujejo. Kolikšno je to razlikovanje, povemo s povprečnim

kvadratnim odmikom od povprečja:  $s_l^2 = (1/N)\sum (l_n - \bar{l})^2$  oziroma  $s_l^2 = \sum f_k (l_k - \bar{l})^2$ . Kar velja za dolžino palic, posplošimo na poljubno slučajno spremenljivko: njeno *varianco* definiramo kot  $\sigma_x^2 = \sum (x_k - \langle x \rangle)^2 P_k = \text{Var}(x)$ . Koren iz variance,  $\sigma_x$ , pa poimenujemo *deviacija*. Za zvezno spremenljivko velja:

$$\sigma_x^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx. \quad (33.21)$$

Integral lahko preoblikujemo: kvadriramo podintegralski binom, integriramo dobljene člene in pridelamo izraz

$$\sigma_x^2 = \int x^2 p(x) dx - (\int x p(x) dx)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (33.22)$$

Izračun povprečij in varianc

Če so porazdelitve podane s tabelo, računamo njihova povprečja in variance s konkretnimi števili vrednostmi. Če so podane z enačbo, pa lahko računamo s simboli. Izračunajmo povprečja in variance tistih porazdelitev, ki smo jih že spoznali!

Za enakomerno diskretno porazdelitev (pošteno kocko) velja  $\langle x \rangle = \sum n \cdot (1/6) = 3,5$  in  $\sigma_x^2 = \sum n^2 \cdot (1/6) - (3,5)^2 = (1,7)^2$ . Na interval  $\langle x \rangle \pm \sigma_x$  padejo vrednosti 2, 3, 4 in 5, to je, 2/3 vseh vrednosti.

Za binomsko porazdelitev že poznamo njeno vsoto:  $\sum C_N^n p^n q^{N-n} = (p+q)^N$ . Če bi bil vsak člen vsote pomnožen s faktorjem  $n$ , bi nastala vsota opisovala povprečje. Kako pridelati faktorje  $n$ ? Levo in desno stran odvajamo na  $p$  in nato množimo s  $p$ . Na levi nastane povprečje  $\langle x \rangle = \sum n C_N^n p^n q^{N-n}$  in na desni izraz  $np(p+q)^{N-1}$ . Ko v njem upoševamo  $q = 1 - p$ , najdemo  $\langle x \rangle = Np$ . Podobno izračunamo varianco - izhodiščno enačbo dvakrat odvajamo na  $p$  in nato pomnožimo s  $p^2$ . Tako dobimo  $\sigma_x^2 = Npq$ .

Pri računanju povprečja in variance normalne porazdelitve moramo izračunati integrala oblike  $\int x \exp(-x^2) dx$  in  $\int x^2 \exp(-x^2) dx$ . Prvega izračunamo tako, da spravimo  $x$  pod diferencial, s čimer prevedemo integral v lahko rešljivo obliko  $\int \exp(-t) dt$ . Drugega pa se lotimo po delih:  $u = x$ ,  $dv = x \exp(-x^2) dx$  in ga s tem prevedemo ne integral za povprečje. Dobimo  $\langle x \rangle = \mu$  in  $\sigma_x^2 = \sigma^2$ .

Katerokoli porazdelitev, ki ima povprečje  $\langle x \rangle$  in varianco  $\sigma_x^2$ , lahko aproksimiramo z normalno porazdelitvijo, ki ima isto povprečje in varianco. Ujemanje je bolj ali manj dobro. Normalna aproksimacija enakomerne porazdelitve je prav slaba, binomske pa naravnost odlična, če je le njen parameter  $N$  dovolj velik. Nekaj konkretnih grafov pokaže, da je ujemanje precej dobro že pri  $N = 10$ .

### 33.9 Večdimenzijske porazdelitve

Pri nadaljnji raziskavi bo očitno nerodno uporabljati dve različni pisavi, eno za diskretne primere in drugo za zvezna primere. Odločimo se, da bomo uporabljali le pisavo za zvezno



spremenljivko, ki pa jo v bomo primeru diskretnosti razumeli takole:  $p(x)dx \rightarrow P_k$  in  $\int p(x)dx \rightarrow \sum P_k$ .

Dve spremenljivki

Pri streljanju s puško v tarčo je lega zadetka slučajna spremenljivka.



**Slika 33.6** Tarča. Lega zadetka je slučajna spremenljivka. (Anon)

Vsak zadetek ima svoj vodoravni odmik  $x$  in navpični odmik  $y$  od središča tarče. Gostoto verjetnosti za zadetek okrog točke  $(x,y)$ , to je na intervalu  $(x \pm dx/2, y \pm dy/2)$ , definiramo s številom strelav  $dN$  v ta interval, deljenim s številom vseh strelav  $N$ :

$$\frac{d^2P}{dx dy} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dN(x \pm dx/2, y \pm dy/2)}{N} = p(x, y). \quad (33.23)$$

Predstavljamo si jo kot ploskev oziroma kot hrib, ki je ponekod bolj, drugod manj visok. Višina hriba na nekem mestu pove, kakšna je tamkajšnja pogostost oziroma verjetnost zadetkov.

Robne verjetnosti

Verjetnost za vodoravni izid okrog  $x$ , neodvisno od tega, kakšen je navpični izid, je vsota

$$\frac{dP}{dx} = \int p(x, y) dy = u(x). \quad (33.24)$$

Predstavljamo si, da smo ves hrib stlačili na vodoravno os, vzdolž katere se je naredil kumulativni profil  $u(x)$ . Podobno velja tudi za tlačenje hriba na navpično os, ko nastane kumulativni profil  $v(y)$ .

Pogojne verjetnosti

Kolikšna pa je verjetnost za vodoravni izid okrog  $x$  pri pogoju, da je navpični izid okrog  $y$ ? Vzdolž ozkega vodoravnega pasu okrog  $y = \text{const}$  definiramo verjetnost

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dN(x \pm dx/2)}{N(y \pm dy/2)} = p(x | y). \quad (33.25)$$

Rekli bomo, da je to *pogojna verjetnost* za izid okrog  $x$  glede na izid okrog  $y$ . Predstavljamo si jo kot profil hriba vzdolž vodoravnega prereza. Seveda velja podobno tudi za pogojne verjetnosti vzdolž navpičnih pasov,  $p(y | x)$ . Iz definicij verjetnosti, robne verjetnosti in pogojne verjetnosti sledi

$$p(x, y) = u(x) v(y | x). \quad (33.26)$$

Res. Verjetnost za strel okrog  $(x, y)$  je enaka robni verjetnosti za strel okrog  $x$ , pomnoženi z ustrezno pogojno verjetnostjo za strel

okrog  $y$ . Kadar je slučajna spremenljivka  $y$  neodvisna od  $x$ , je njena pogojna verjetnost  $v(y|x)$  kar enaka "nepogojni" verjetnosti  $v(y)$  in velja že znano produktno pravilo (33.7)

$$p(x, y) = u(x) v(y). \quad (33.27)$$

Dober primer je streljanje v tarčo, če nastane gostota  $\exp(-r^2)$ , to je  $\exp(-x^2 - y^2)$ , torej  $\exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2)$ . Strelca zanaša v levo in desno enako, neodvisno od tega, kako ga zanaša gor in dol, in obratno.

### 33.10 Soodvisnost spremenljivk

Povprečje in varianca

Za vsako spremenljivko posebej lahko definiramo njeno povprečje in varianco. Za spremenljivko  $x$  tako velja:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \iint x p(x, y) dx dy \\ \sigma_x^2 &= \iint (x - \langle x \rangle)^2 p(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (33.28)$$

Očitno sta to povprečje in varianca robne verjetnosti:

$\langle x \rangle = \int x u(x) dx$  in  $\sigma_x^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2 u(x) dx$ . Podobno velja za spremenljivko  $y$ .

Kovarianca in korelacija

Sama se ponuja še mešana količina

$$\sigma_{xy} = \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) p(x, y) dx dy. \quad (33.29)$$

Poimenujemo jo *kovarianca*. Pričakujemo, da na nek način pove, kako močno sta spremenljivki med seboj odvisni. Preverimo to domnevo! Če sta spremenljivki neodvisni, torej če  $p(x) = u(x)v(y)$ , se kovariantni integral zapiše kot produkt dveh integralov, od katerih je vsak enak nič, torej je tudi kovarianca enaka nič. Če sta spremenljivki natanko sorazmerni, torej  $y = kx$ , so odmiki od povprečij maksimalni in kovariantni integral se reducira v  $k\sigma_x^2$  oziroma v  $(1/k)\sigma_y^2$ . Domneva je torej potrjena. Zato je smiselno definirati

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (33.30)$$

to je *korelacijski koeficient* dveh spremenljivk. Koeficient očitno leži med vrednostima  $-1$  in  $1$ . Čim večja je njegova absolutna vrednost, tem tesnejša je medsebojna odvisnost spremenljivk.

### 33.11 Vzorčenje in statistika

Populacija in vzorci

Povprečje in varianco smo definirali za neskončno veliko množico poskusov oziroma opazovanj oziroma meritev, to je na neskončni (ali zelo veliki) *populaciji*. Rekli bomo, da sta to *populacijska parametra*. Določimo ju pa seveda lahko le iz končnega *vzorca*; tedaj jima bomo rekli *vzorčni statistiki*.

Vzorčne statistike so seveda le približek k ustreznim populacijskim parametrom. Če je vzorec velik in slepo izbran, pričakujemo, da je ujemanje dobro. Pojavi se vprašanje, kako

točne so takšne ocene, to je, kolikšne napake pri tem zagrešimo. Poskusimo to narediti za povprečje!

Ko opravimo  $N$  poskusov in zabeležimo njihove izide, s tem iz neskončne populacije poskusov izberemo končni vzorec. Za ta vzorec izračunamo povprečje  $\bar{x}$ . Pri kakem drugem vzorcu bi dobili drugačno povprečje. Mislimo si, da vzorčenje kar naprej ponavljamo. Dobimo neskončno populacijo povprečij. Kakšna je njihova povprečna vrednost  $\langle \bar{x} \rangle$ ? In kakšna je njihova varianca  $\sigma_{\bar{x}}^2$ ?

Povprečje povprečij Na izmerjene vzorčne vrednosti  $x_1 \dots x_N$  lahko pogledamo kot na uresničitev  $N$  slučajnih, med seboj neodvisnih spremenljivk  $X_1 \dots X_N$  iz osnovne populacije. Vse so porazdeljene tako, kot osnovna spremenljivka  $X$ . Spremenljivka  $X_1$  je pri vzorčenju pač pokazala vrednost  $x_1$ , pri drugem vzorcu bi pa pokazala kaj drugega. Podobno velja za druge spremenljivke. Izmerjeno povprečje  $\bar{x}$  pa je potem uresničitev slučajne spremenljivke  $\bar{X} = (1/N) \sum X_n$ .

Kakšno je torej povprečje vzorčnih povprečij  $\langle \bar{X} \rangle = \text{Ave}(X_1 + \dots X_N)/N$ ? Izpostavimo faktor  $1/N$  izven povprečja; povprečje vsote je vsota povprečij; povprečje  $X_n$  je povprečje  $X$ ; in dobimo:

$$\langle \bar{X} \rangle = \langle X \rangle. \quad (33.31)$$

Povprečje vzorčnih povprečij je torej enako populacijskemu povprečju. To je dobro.

Varianca povprečij In kakšna je varianca vzorčnih povprečij  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}((X_1 + \dots X_N)/N)$ ? Izpostavimo faktor  $1/N$  izven variance, pri čemer postane  $(1/N)^2$ ; varianca vsote je vsota varianc; varianca  $X_n$  je varianca  $X$ ; in dobimo:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}. \quad (33.32)$$

Vzorčna povprečja se torej stiskajo okrog populacijskega povprečja z  $N$ -krat manjšo varianco, kot je varianca posamičnih spremenljivk. Tudi to je dobro.

Porazdelitev povprečij Vzorčno povprečje je (normirana) vsota  $N$  neodvisnih slučajnih spremenljivk z isto porazdelitvijo. To močno spominja na pot kroglice po ožlebljeni deski: ena pot, ki jo kroglica ubere, je en vzorec z  $N$  spremenljivkami, njihova vsota pa je končni odmik kroglice na dnu. Spremenljivke so "binomske", imajo samo dva izida. Vsote velikega števila binomskih spremenljivk se torej porazdelijo normalno. Morda velja to tudi za vsote velikega števila "nebinomskih" spremenljivk? Domnevamo torej

$$\frac{dP}{d\bar{X}} \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{X} - \langle \bar{X} \rangle}{\sigma_{\bar{X}}}\right)^2\right]. \quad (33.33)$$

Ni videti lahke poti, da bi z doslej pridobljenim znanjem domnevo dokazali. Pa nič hudega: saj jo lahko utrdimo eksperimentalno. Mečemo pošteno kocko. Na stranice v mislih napišemo 1, 2, 3, 3, 4, 5. Verjetnostna porazdelitev izidov je zato  $P(1) = 1/6$ ,  $P(2) = 1/6$ ,  $P(3) = 1/3$ ,  $P(4) = 1/6$  in  $P(5) = 1/6$ , torej ima  $\langle x \rangle = 3,0$  in  $\sigma_x = 1,7$ . Kocko vržemo 10-krat in dobimo prvi vzorec ter njegovo povprečje (nekje med 1,0 in 5,0). To ponovimo stokrat. Dobljenih sto povprečij porazdelimo po primerno širokih razredih. Porazdelitev se kar dobro prilega pričakovani normalni z  $\mu = 3,0$  in  $\sigma = 1,7/\sqrt{10} = 0,5$ . Daljši vzorci in številčnejše ponovitve pokažejo še boljše prileganje. Seveda lahko kockine stranice kakorkoli oštevilčimo. Bolj kot je osnovna porazdelitev različna od normalne, daljše vzorce potrebujemo, da je njihova povprečna vrednost zadovoljivo normalno porazdeljena.

### 33.12 Merjenje in merske napake

Natančnost meritev

Povedano uporabimo za oceno merskih napak. Večkratna meritev kakšne količine, recimo dolžine mize, je namreč slučajno vzorčenje. Merjena dolžina je slučajna spremenljivka. Izmerjeno povprečje in varianca pa sta dve statistiki, iz katerih sklepamo na "pravo" dolžino mize. Ocenimo  $\bar{x} \approx \langle x \rangle \pm \sigma_x / \sqrt{N}$ . Neznano populacijsko deviacijo  $\sigma_x$  aproksimiramo kar z znano vzorčno deviacijo  $s_x$ , pa z nekaj drznosti zapišemo

$$\langle x \rangle \approx \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{N}}. \quad (33.34)$$

Kadar je izmerkovo malo, se ni treba mučiti z izračunom  $s_x$ . Kar na oko ocenimo, kakšen je interval okrog povprečja, v katerega pade 2/3 izmerkovo, in zapišemo  $\langle x \rangle \approx \bar{x} \pm dx = \bar{x}(1 \pm dx/\bar{x})$ . Količino  $dx$  poimenujemo *absolutna napaka* in  $dx/\bar{x}$  *relativna napaka*.

Izboljšanje natančnosti

Čim več je meritev, tem manjša odstopanja njihovega povprečja od prave vrednosti pričakujemo. Večkratno merjenje je torej dober način, da izboljšamo natančnost izmerka. Žal pa se z naraščanjem  $N$  povečuje  $\sqrt{N}$  le počasi. Če hočemo natančnost povečati za faktor 10, moramo povečati število meritev za faktor 100. Pri tem pa niti ne zmanjšujemo sistematičnih napak.

Širjenje napak

Če je kakšna količina obremenjena z napako, in to je zmeraj, so tudi njene funkcije obremenjene z napakami. Rečemo, da se napake podedujejo oziroma se širijo. Kako to gre?

Na napako funkcije lahko pogledamo kot na njen diferencial. Pri funkciji ene spremenljivke je to navadni diferencial in pri funkciji več spremenljivk imamo opravka s totalnim diferencialom. Seveda pa moramo upoštevati, da so takšni diferenciali lahko pozitivni ali negativni. Tako z diferenciranjem dobimo naslednja pravila.

$$\begin{aligned}
u = cx &\implies du = |c| dx && (33.35) \\
u = x \pm y &\implies du = dx + dy \\
u = xy &\implies \frac{du}{|u|} = \frac{dx}{|x|} + \frac{dy}{|y|} \\
u = \frac{x}{y} &\implies \frac{du}{|u|} = \frac{dx}{|x|} - \frac{dy}{|y|} \\
u = x^n &\implies \frac{du}{|u|} = |n| \frac{dx}{|x|} \\
u = u(x) &\implies du = |u'| dx \\
u = u(x, y) &\implies du^2 = (u_x dx)^2 + (u_y dy)^2.
\end{aligned}$$

Napaka vsote ali razlike je vsota napak posameznih členov. Relativna napaka produkta ali kvocienta pa je vsota relativnih napak posameznih faktorjev. Zlasti je nevarno takrat, kadar naletimo na razliko dveh približno enakih členov. Tedaj je relativna napaka lahko ogromna. Računanje odvodov je včasih zoprno. V takem primeru lahko ocenimo kar  $du \approx u(x + dx) - u(x)$  oziroma  $du \approx u(x + dx, y + dy) - u(x, y)$  za primerno izbrane neodvisne diferenciale.

### 33.13 Intervalno ocenjevanje

Ko rečemo  $\bar{x} = \mu \pm \sigma/\sqrt{N}$ , pravzaprav pravimo, da leži  $\mu$  nekje na intervalu  $[\bar{x} - \sigma/\sqrt{N}, \bar{x} + \sigma/\sqrt{N}]$  z verjetnostjo 0,68 in izven tega intervala z verjetnostjo 0,32. Oceno za  $\mu$  pa lahko podamo bolj na splošno takole: leži na intervalu  $[\bar{x} - x_\alpha, \bar{x} + x_\alpha]$  z verjetnostjo  $\alpha$ , na primer 0.95. Kakšna je povezava med  $x_\alpha$  in  $\alpha$ ?

Verjetnostni interval Vemo tole. Če je  $\bar{X}$  porazdeljen normalno kot  $G_{\mu, \sigma/\sqrt{N}}$ , potem je  $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{N})$  porazdeljena normalno kot  $G_{0,1}$ . To pomeni, da je

$$\begin{aligned}
P(-z_\alpha \leq Z \leq +z_\alpha) &= P(\bar{X} - x_\alpha \leq \mu \leq \bar{X} + x_\alpha) = 2 \operatorname{erf}(z_\alpha) = \alpha && (33.36) \\
x_\alpha &= z_\alpha \sigma / \sqrt{N}.
\end{aligned}$$

Za vsako izbrano verjetnost  $\alpha$  lahko izračunamo pripadajočo vrednost  $x_\alpha$ . Verjetnosti 0,68, na primer, odgovarja  $z_\alpha = 1$ , torej  $x_\alpha = \sigma/\sqrt{N}$ , kakor tudi mora biti. Verjetnosti 0,95 pa odgovarja 2-krat tolikšen interval. Če hočemo v več primerih uloviti srednjo vrednost  $\mu$ , moramo pač razširiti lovilno past.

Ocena intervala Za izračun  $x_\alpha$  moramo poznati deviacijo populacije. Te ponavadi ne poznamo, zato jo aproksimiramo kar z deviacijo vzorca. Širino intervala, ki pri 95 % vzorcev vsebuje neznanu povprečje  $\mu$ , torej določimo takole. Potegnemo vzorec dolžine  $N$ , iz njega izračunamo  $\bar{x}$  in  $s_x$  ter izračunamo  $x_{0,95} = 2s_x/\sqrt{N}$ . S tem je interval izračunan. Če ga hočemo prepолоviti, potrebujemo štirikrat večji vzorec.

Verjetnost, da ocenjeni *interval zaupanja* dejansko pokrije neznanu pravo povprečje, znaša  $\alpha$ . Rečemo, da je to *stopnja zaupanja*. Seveda pa tvegamo, da povprečje leži izven intervala.

Verjetnost, da se to zgodi, znaša  $1 - \alpha$ . Rečemo, da je to *stopnja tveganja*.

### 33.14 Preizkušanje domnev

Domneva o povprečju Vojaški zdravnik trdi, da je povprečna višina v populaciji vojakov  $(x) = a$ . To domnevo hočemo preveriti. Če domneva drži, vemo, da je vzorčna statistika  $Z = (\bar{X} - a)/(\sigma_x/\sqrt{N})$  porazdeljena standardno kot  $G_{0,1}(Z)$ . Ker ne poznamo populacijske deviacije, jo aproksimiramo z vzorčno deviacijo in dobimo statistiko  $T = (\bar{X} - a)/(S_x/\sqrt{N})$ . Pričakujemo, da je tudi ona porazdeljena približno kot  $G_{0,1}(T)$ . To pomeni, da je na intervalu  $[-t_\alpha, +t_\alpha] = [-2, +2]$  pričakovati  $\alpha = 95\%$  uresničitvev te statistike. Da pade uresničitev izven intervala, pa pričakujemo le v 5% vzorcev. Iz populacije torej na slepo potegnemo vzorec  $N$  vojakov in izračunamo  $\bar{x}$ ,  $s_x$  ter iz obojega  $t$ . Če pade  $t$  znotraj postavljenega intervala, nimamo kaj reči. Če pa pade  $t$  izven tega intervala, lahko to razlagamo na dva načina: — domneva je sicer pravilna, a smo imeli tako nesrečno roko, da smo naleteli na enega izmed tistih 5% vzorcev; — domneva je vsekekor nepravilna. Katero izmed obeh razlag izbrati? Odločimo se, da je bolj verjetna druga razlaga in domnevo zavrnamo.

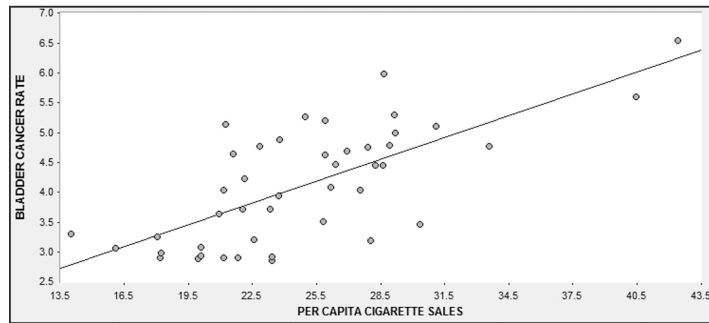
Dve vrsti napak S preizkušanjem domnev torej ne sprejemamo, ampak jih zgolj — bolj ali manj utemeljeno — zavračamo. Očitno lahko pri tem naredimo dve vrsti napak: domneve ne zavrnamo, čeravno je nepravilna, ali pa domnevo zavrnamo, čeravno je pravilna. Kadar ima zavračanje domneve hude posledice, hočemo biti nadvse gotovi, da jo zavračamo utemeljeno. Takrat gledamo interval  $[-3, +3]$  in ustrezno verjetnost 99,8%.

Ko zavračamo domnevo, moramo vsekekor povedati, pri kakšni stopnji tveganja  $1 - \alpha$  to počnemo. Tako rečemo, da smo domnevo zavrnilo pri stopnji tveganja 5%, oziroma da se vzorčni podatki statistično značilno razlikujejo od domneve pri tej stopnji tveganja. Stopnja tveganja pove, kolikšna je verjetnost, da smo domnevo zavrnilo, čeravno je pravilna.

Druge domneve Domnevamo, da lahko na podoben način zavračamo najrazličnejše domneve o populacijah, na primer: varianca porazdelitve je enaka neki vrednosti; povprečji dveh porazdelitev sta enaki; varianci dveh porazdelitev sta enaki; porazdelitvi sta enaki; in še kaj. Postopek je vedno enak: postaviti moramo ustrezno cenilko in zanjo določiti porazdelitev. Potem pogledamo, kako verjetna je dejanska uresničitev cenilke in se glede na to odločamo. Vse to je seveda lažje reči kot narediti. Podrobnejšo obravnavo zato prepustimo tistim, ki to potrebujejo (FISCHER).

### 33.15 Regresijska analiza

Soodvisnost dveh spremenljivk, tabeliranih v  $N$  parih  $(x_n, y_n)$  lahko aproksimiramo s premico, ki se jima "najbolj prilega". Najboljše prileganje definiramo takole: vsota kvadratov odklikov ene spremenljivke od premice naj bo minimalna. Minimizziramo lahko odklike  $y_n$  ali  $x_n$ ; v splošnem se dobljeni premici razlikujeta. Najbolje je minimizzirati odklike tiste spremenljivke, ki ima večjo deviacijo. Naj bo to spremenljivka  $y$ . Zaradi preprostosti še privzamemo, da so deviacije spremenljivke  $x$  enake nič.



**Slika 33.7** Povezava med kajenjem in rakom. Za 44 ameriških držav je bilo določeno, koliko cigaret na prebivalca je bilo prodanih v letu 1960 in koliko smrti na 100 tisoč prebivalcev zaradi raka na mehurju je bilo zabeleženih v istem letu. (Fraumeni, 1968)

Določitev koeficientov

Iščemo torej funkcijo

$$y^* = A + Bx \quad (33.37)$$

tako, da bo  $\sum (y_n^* - y_n)^2 = \sum (A + Bx_n - y_n)^2 = Q(A, B)$  minimalen. Postavimo  $\partial Q/\partial A = 0$  in  $\partial Q/\partial B = 0$ , s čimer pridemo do dve linearni enačbi z dvema neznankama  $A$  in  $B$ :  $AN + B\sum x_n = \sum y_n$  in  $A\sum x_n + B\sum x_n^2 = \sum x_n y_n$ . Iz enačb izračunamo obe neznanki in s tem je regresijska premica določena (GAUSS):

$$A = \frac{(\sum x_n^2)(\sum y_n) - (\sum x_n)(\sum x_n y_n)}{\Delta} \quad (33.38)$$

$$B = \frac{N(\sum x_n y_n) - (\sum x_n)(\sum y_n)}{\Delta}$$

$$\Delta = N(\sum x_n^2) - (\sum x_n)^2.$$

Ocena napak

Vzorčne vrednosti  $y_n$  imamo lahko za uresničitev slučajnih spremenljivk  $Y_n$ . Predpostavimo, da je vsaka izmed teh spremenljivk porazdeljena normalno okrog svoje srednje vrednosti  $A + Bx_n$  z isto "lokalno" deviacijo  $\sigma$ . Zato so vse spremenljivke  $Y_n - A - Bx_n$  porazdeljene normalno kot  $G_{0,\sigma}$ . Iz tega sklepamo, da je dobra ocena za lokalne deviacije kar enaka "globalni" deviaciji

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum (y_n - A - Bx_n)^2. \quad (33.39)$$

Parametra  $A$  in  $B$  sta čisti funkciji izmerkov  $y_1 \dots y_N$ . Zato sta njuni deviaciji oz. napaki  $s_A$  in  $s_B$  določeni kar z deviacijami oz. napakami  $s_y$  slednjih. V obrazec za širjenje napak  $s_A^2 = \sum (\partial A / \partial y_n \cdot s_y)^2$  vstavimo  $\partial A / \partial y_n = [(\sum x_n^2) - x_n(\sum x_n)] / \Delta$  in dobimo, po nekaj računanja,

$$\begin{aligned} s_A^2 &= s_y^2 \sum x_n^2 / \Delta \\ s_B^2 &= s_y^2 N / \Delta. \end{aligned} \quad (33.40)$$

Podobno obravnavamo tudi linearno regresijo več spremenljivk. Kogar to veseli, pa se lahko loti celo nelinearne regresije.

### 33.16 Statistično zavajanje

Pravijo, da obstajajo tri vrste laži: navadna laž, huda laž in statistika. Nedvomno je res, da je statistika močno orodje za raziskavo množice podatkov, če jo seveda prav uporabljamo. Je pa tudi res, da se jo da zlorabiti na najrazličnejše načine. Pogosto to počno politiki in prodajalci. Kakšni so njihovi glavni načini zavajanja?

- Majhen vzorec
Osnova statistike je vzorčenje. Vzorec mora biti dovolj velik, da iz njega lahko karkoli sklepamo. Beremo recimo, da se 33,3 % študentk na univerzi N. N. poroči s svojimi profesorji. Natančne številke in decimalna mesta nas prepričujejo, da raziskovalec ve, o čem govori. Surove številke pa govorijo drugače: v obdobju raziskave so bile na univerzi vpisane tri študentke, od katerih se je ena poročila s profesorjem.
- Neslučajan vzorec
Vzorec mora biti tudi slučajan. Ko anketiramo ljudi, mora imeti vsak človek enako verjetnost, da ga izberemo. Beremo recimo, da 73 % Slovencev nasprotuje smrtni kazni. Vprašamo se: katerih Slovencev? Pokaže se, da je raziskavo naredil levičarski časopis N. N. preko vprašalnikov, ki jih je kar priložil časopisu. Ta časopis kupujejo pretežno levičarji in ti imajo bolj odklonilen odnos do smrtne kazni kot desničarji. Sklepanje na celotno populacijo je povsem neutemeljeno.
- Golo povprečje
Povprečje nič ne pove o razpršenosti izmerkov okrog njega. Podjetje N. N. na primer objavi, da znaša povprečna mesečna plača njihovega delavca solidnih 3000 dolarjev. Lepo in prav, dokler ne odkrijemo, da je v podjetju zaposlenih 9 delavcev in en direktor. Direktor ima 21.000 dolarjev plače in delavci po mizernih 1000 dolarjev. Skoraj vsakdo je pod navedenim povprečjem!
- Korelacija kot vzrok
Korelacija ne pomeni vzročne odvisnosti. Študentje, ki kadijo, imajo nižje ocene. To je verodostojno statistično dokazano. Torej kajenje povzroča slabe ocene? Morda celo otopi možgane? Nič od tega: če gresta kajenje in slabe ocene skupaj, to še ne pomeni, da kajenje povzroča slabe ocene. Morda je ravno obratno: slabe ocene silijo študente h kajenju. Ali pa nobeno ne povzroča



drugega, marveč je oboje posledica kakega tretjega vzroka. Je morda tako, da družabni ljudje, ki ne jemljejo preveč resno knjig, hkrati tudi kadijo več?

- Obrezani grafi Kako cene rastejo, najlepše pokažemo z grafom. Recimo, da kakšna cena v desetih letih naraste od 100 na 110 dolarjev. Na grafu z višino 5 cm, ki ima navpično os oštevilčeno od 0 do 120, je rast cene zelo položna krivulja. Morda nam to ni všeč? Odrežimo spodnji in zgornji del grafa (z izgovorom, da sta itak prazna) ter prikažimo zgolj navpični interval med 100 in 110 dolarji, seveda raztegnjen na isto višino. Mnogo bolje! Graf je sedaj zelo strma krivulja, ki kar kriči, kakšen hud porast cen se je zgodil. Nič ni bilo ponarejenega – razen vtisa, ki ga graf zapusti. Podobno lahko polepšamo tudi druge vrste grafov.
- Obramba Kako si pomagamo, da nas takšne "statistike" in sklepi iz njih ne zavedejo? Tako, da odgovorimo na nekaj vprašanj. Kdo to pravi? Kako to ve? Kaj vse manjka (velikost vzorca, način vzorčenja, povprečje brez deviacije, testiranje domnev brez stopnje tveganja, korelacijski parametri brez ocenjenih napak, grafi brez meril)? Ali je vse skupaj smiselno? Nikoli pa tudi ne smemo pozabiti, da je statistika vredna zgolj toliko, kot so verodostojni podatki, na katerih sloni. □



## 34 Dinamika

Delci – Sistemi delcev – Gibalna količina – Vrtilna količina – Kinetična energija – Gibanje togega telesa – Vrtenje okoli stalne osi – Premikanje osi vrtenja – Nihanje togih teles – Splošno nihanje teles – Gravitacijska konstanta – Gravitacijsko polje – Gibanje planetov

### 34.1 Delci

Premiki teles v prostoru so bili izhodišče za vpeljavo vektorjev in vodilo pri razvoju računanja z njimi. Zdaj, ko je vektorski račun zgrajen, postane močno orodje za opisovanje vsakršnega gibanja. Kar smo o gibanju že dognali in zapisali, hočemo zato povzeti v vektorski obliki. Študirali pa smo *točkasta telesa*, to je taka, ki so majhna v primerjavi z opravljenimi premiki.

Opis gibanja Gibanje točkastega telesa – delca – v vsakem trenutku opišemo z vektorjem lege glede na poljuben koordinatni sistem:

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (34.1)$$

Ko se delec giblje, mu vektor lege vestno sledi. Je torej funkcija časa. Sprememba vektorja lege v kratki časovni enoti opisuje kratek premik:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = (dx, dy, dz). \quad (34.2)$$

Z vektorjem premika sta določena vektor hitrosti  $\mathbf{v}$  in vektor pospeška  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) \quad (34.3)$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (a_x, a_y, a_z).$$

Premik  $d\mathbf{s}$  je iz izbranega izhodišča (iz katerega raste enotni kazalec  $\mathbf{e}_r$ ) viden kot zasuk za kot

$$d\varphi = \mathbf{e}_r \times \frac{d\mathbf{s}}{r}. \quad (34.4)$$

Z vektorjem zasuka sta določena vektor kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$  in vektor kotnega pospeška  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (34.5)$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Dolžinske in kotne vektorske količine so med sabo povezane. Kratki računi pokažejo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\
\mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \\
\mathbf{a}_r &= -\omega^2 \mathbf{r} \\
\mathbf{a}^2 &= \mathbf{a}_t^2 + \mathbf{a}_r^2.
\end{aligned}
\tag{34.6}$$

Sile in gibanje Če okolica ne vpliva na delec, se ta giblje premo in enakomerno. Vpliv okolice - silo  $\mathbf{F}$  - postuliramo, kot znano (19.5), preko mase in pospeška delca :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$
(34.7)

Gibalni zakon množimo na obeh straneh s premikom  $d\mathbf{s}$ , upoštevamo  $d\mathbf{v}/dt \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}/dt = d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ , integriramo in dobimo, kot znano (19.13), izrek o kinetični energiji:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} = \Delta K.$$
(34.8)

Delo sile je enako spremembi kinetične energije. S tem smo povzeli vsa glavna dosedanja spoznanja o gibanju točkastih teles.

### 34.2 Sistemi delcev

Telesa okrog nas, gledana od blizu, pa niso točkasta, ampak so razsežna. Takšno razsežno telo si lahko predstavljamo kot *sistem delcev*, medsebojno povezanih s poljubnimi silami. Kamen, človeško telo, Zemlja in Osončje, vse to so sistemi delcev. Vsak delec v sistemu čuti sile od drugih notranjih delcev (*notranje sile*), pa tudi iz okolice (*zunanje sile*). Postuliramo, da sta sili med dvema delcema v sistemu nasprotno enaki in ležita na njuni zveznici. Tak sistem se pod vplivom zunanjih in notranjih sil ter pod vplivom zunanjih in notranjih navorov nekako giblje. Kaj lahko povemo o tem gibanju?

Met palice Ko vržemo palico v zrak, se sicer prekopicuje, vendar na nek način vendarle zarisuje parabolo, kakor to dela točkast kamen. Kaže, da se po paraboli giblje neka odlikovana točka palice, ki leži blizu njenega središča. Takoj pomislimo, da bi to lahko bilo težišče. Zaradi previdnosti pa tej točki recimo raje *masno središče*. Domnevamo, da mora za gibanje masnega središča palice veljati ista gibalna enačba, kot če bi bila vsa masa palice stisnjena vanj.



**Slika 34.1** Skok z motornim kolesom. Odlikovana točka vozila in voznika - njuno masno središče - se giblje po paraboli. (Anon)

Masno središče Namesto palice si mislimo poljuben sistem delcev. Ni treba, da je tog. Na  $i$ -ti delec sistema deluje sila  $\mathbf{F}_i = d^2(m_i \mathbf{r}_i) / dt^2$ . Povzročajo jo notranji delci in okolica. Vsota sil na vse delce je  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = \sum d^2(m_i \mathbf{r}_i) / dt^2 = d^2(\sum m_i \mathbf{r}_i) / dt^2$ . Ker se notranje sile med seboj paroma izničujejo, je to pravzaprav vsota vseh zunanjih sil. Enačbo lahko preoblikujemo v obliko

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2}, \quad (34.9)$$

pri čemer je  $m = \sum m_i$  celotna masa sistema in  $\mathbf{r}^*$  lega masnega središča, ako vpeljemo

$$\mathbf{r}^* = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i. \quad (34.10)$$

To je torej lega masnega središča. Popolnoma in enolično je določena z legami in masami vseh delcev sistema. Masno središče lahko leži "znotraj" ali "zunaj" sistema. Giblje se s hitrostjo

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt}, \quad (34.11)$$

kakor pač velevajo zunanje sile. Kadar je vsota zunanjih sil enaka nič, se masno središče sistema giblje premo in enakomerno.

Težišče Ali masno središče res sovпада s težiščem? Telo, podprto v težišču, se ne vrtil, ker je vsota navorov teže enaka nič. Za eno koordinato torej velja  $0 = \sum m_i g \cdot x_i = g \sum m_i x_i$ , pri čemer so  $x_i$  odmiki od težišča. Zato mora biti  $\sum m_i x_i = 0$ , torej  $m x^* = 0$ , torej  $x^* = 0$ . Masno središče je res tam, kjer je težišče. Če pa telo ni v homogenem težnem polju, tega ne moremo trditi. Zaradi kratkosti bomo v nadaljevanju govorili kar o težišču.

### 34.3 Gibalna količina

Gibalna količina Kadar je vsota zunanjih sil enaka nič, velja  $\mathbf{v}^* = \text{const}$ . Torej je tudi  $m\mathbf{v}^* = \text{const}$  oziroma  $\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$ . Posamični delci se sicer gibljejo na različne načine, vendar se njihovo gibanje pokorava zapisani omejitvi. Kaže, da je produkt med maso in hitrostjo pomembna količina. Poimenujemo jo *gibalna količina* in definiramo

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v}^* = \sum m_i \mathbf{v}_i. \quad (34.12)$$

Iz  $\mathbf{F} = d^2(\sum m_i \mathbf{r}_i) / dt^2 = d(\sum m_i \mathbf{v}_i) / dt$  očitno sledi

$$\int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{G}. \quad (34.13)$$

To je izrek o gibalni količini (EULER). Če je sistem izoliran, torej če ni zunanjih sil, se njegova gibalna količina ohranja, sicer pa je njena sprememba enaka sunku zunanjih sil. Poglejmo nekaj primerov.

Trk dveh teles Dva avtomobila vozita drug proti drugemu in se čelno zaletita ter sprimeta. Kako se giblje sprijeta zveržena pločevina?



**Slika 34.2** Trk dveh avtomobilov. Pri tem se ohranja gibalna količina. (Guardian)

Dvojica avtomobilov je sistem, na katerega ne delujejo zunanje sile (teža nima vpliva na vodoravno gibanje). Gibalna količina sistema se ohranja; po trku je enaka kot pred njim:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v. \quad (34.14)$$

Če sta avtomobila enako težka in se gibljeta z enakima hitrostima, po trčenju lepo obmirujeta. Sicer pa težje in/ali hitrejše vozilo potisne drugega nazaj. Dvakrat lažje vozilo mora imeti dvakrat večjo hitrost, da zaustavi nasprotnika.

Balistično nihalo Trk teles z znanimi masami ponuja dober način za merjenje njihovih hitrosti. Puškino ali revolversko kroglo mase  $m_1$  in neznane hitrosti  $v_1$  izstrelimo v mirujočo težko klado mase  $m_2$ , ki je obešena kot točkasto nihalo. Krogla obtiči v kladi. Gibalna količina se ohranja:  $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$ . Klada se odmakne in zaniha. Njena hitrost skozi ravnovesje je, kot vemo [18.7], odvisna od amplitude nihanja:  $v = x_0\sqrt{g/l}$ . Izmerimo odmik  $x_0$  in s tem je hitrost krogle enolično določena. Za tipične revolverje znaša okrog 300 m/s.

Potisna sila curka Z vodnim curkom iz gumijaste cevi zalivamo trato. Ko zadene curek na kakšno oviro, recimo na kamen, ga premakne. Očitno nanj deluje z neko silo. S kakšno silo deluje vodni curek na ravno oviro pri pravokotnem vpadu? V času  $dt$  vpade na oviro masa  $dm = \rho Sv dt = \Phi_m dt$  vode. To je naš sistem. Temu sistemu se spremeni hitrost od  $v$  na nič, torej gibalna količina za  $dG = -v dm$ . Sprememba gibalne količine na enoto časa pa je sila, s katero deluje ovira na curek, torej tudi sila, s katero deluje curek na oviro:

$$F = \Phi_m v. \quad (34.15)$$

Silo vodnega curka, kot inženirji, izkoristimo za pogon vodnih turbin, ki ženejo električne generatorje. Iz visoko ležečih jezer vodimo vodo po cevi v dolino. Lopatice turbine oblikujemo v obliki čaše, tako da vpadajoča voda ne spolzi na tla, ampak se odbije nazaj. Tako je sprememba gibalne količine dvakrat večja kot sicer in toliko je večja tudi sila na lopatice. Namesto vodnih curkov lahko uporabimo tudi curke vodne pare, ki jo pripravljamo v visokotlačnih kotlih. To so parne turbine.

Odriv dveh teles Ko iz puške izstrelimo kroglo, udari puška nazaj. Krogla in puška sta sistem dveh teles, ki pa sedaj ne trčita skupaj, ampak se odrineta narazen. Pri tem se ohranja gibalna količina. Ohranitvena enačba je prav takšna kot pri trku dveh avtomobilov:  $(m_1 + m_2) \cdot 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ . Kolikorkrat je puška težja od krogle, tolikokrat počasneje sune nazaj. Tipična krogla ima maso 10 g in odleti s hitrostjo 300 m/s. Tipična puška ima maso 3 kg, zato sune nazaj s hitrostjo 1 m/s. Očitno puška ne sme biti prelahka, sicer bi postala nevarna za strelca samega.

Reakcijska sila curka Namesto da streljamo kroglo iz puške, izpuščamo curek stisnjenega zraka iz napihnjene balona skozi njegovo ustje. Balon odleti v nasprotno stran kot curek. Kakšno silo čuti balon? Drugače rečeno: kakšna je reakcijska sila curka? Očitno je to nasprotni pojav kot pri vpadu curka na oviro, zato je tudi razmislek enak in celo rezultat je isti:  $F = \dot{m} v$ .



**Slika 34.3** Izstrelitev rakete. Prikazana je ena izmed raket, razvitih med drugo svetovno vojno. Končna hitrost rakete je odvisna od deleža pokurjenega goriva in hitrosti izpuha. (NASA History Office)

Ne da bi poznali reakcijsko silo curka, smo jo kot ribiči in mornarji že od nekdaj izkoriščali za pogon čolnov: z vesli smo odrivali vodo nazaj in reakcija je potiskala čoln naprej. Kot inženirji pa namesto vesel raje uporabimo vijake. Ladijski vijaki zajemajo iz okolice vodo in jo potiskajo nazaj. Isto počno letalski vijaki z zrakom. Oboji jemljejo potisno snov iz okolice. Lahko pa vozilo takšno snov tudi vozi s seboj: v rezervoarjih ima spravljen tekoči kisik in tekoči vodik ali kaj podobnega. Sproti ju sežiga in nastale vroče pline izpušča skozi zadnje šobe. To je raketa. Z raketami sežemo v zunanje plasti ozračja in merimo tamkajšnje pojave. Izmerke s padalom vrnemo na tla. Nobene tehnične ovire ni – razen krmiljenja –, da prej ali slej poletimo okoli Zemlje, na Luno in na Mars!

Raketna enačba Kako pa se giblje raketa, če ni zunanjih sil? V izbranem trenutku ima raketa skupaj z gorivom maso  $m$  in hitrost  $v$ . Ko izvrže maso  $dm$  goriva z relativno hitrostjo  $u$ , se ji poveča hitrost za  $dv$ . Gibalna količina se ohranja:  $m dv + u dm = 0$ . Izrazimo  $dv$  in integriramo, pa dobimo

$$v - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (34.16)$$

To je raketna enačba (CIOLKOVSKI). Hitrost, ki jo raketa doseže, je odvisna le od masnega deleža pokurjenega goriva in od hitrosti izpuha. Če si mislimo, da drsi raketa po gladki Zemljini površini brez trenja in zračnega upora ter da ima hitrost izpuha 4 km/s, bi za doseg orbitalne hitrosti 8 km/s potrošila preko 85 % svoje začetne mase. Seveda pa moramo raketo izstreliti poševno navzgor, pri čemer jo zaustavljata gravitacija in upor zraka. Oboje se izraža kot izguba dosežene hitrosti za  $gt \cos \theta$ ; ta izraz moramo odšteti na desni strani raketne enačbe. Ocenimo, kolikšen delež mase je potreben, da raketo spravimo do orbite! Naj se raketa dviguje s pospeškom  $a = 10 \text{ m/s}^2$ . Do višine  $h = 300 \text{ km}$  se povzpne v času  $t = \sqrt{2h/a} \sim 250 \text{ s}$ . V tem času izgubi  $gt \sim 2,5 \text{ km/s}$  pridobljene hitrosti. Raketa mora torej pokuriti toliko mase, da bi brez gravitacijskega zaviranja dosegla hitrost 10,5 km/s. Za to pa porabi okrog 95 % mase. Spraviti tonno težek satelit v orbito zahteva dvajsettonsko raketo. Da pokurimo čim manj dodatne mase, mora raketa doseči orbito čim prej, to je, dvigovati se mora s čim večjim pospeškom. Žal pa ljudje, ki jih morda raketa nosi, prevelikih pospeškov ne prenesejo.

### 34.4 Vrtilna količina

Vrtilna količina

Ko na  $i$ -ti delec deluje sila  $\mathbf{F}_i$ , deluje nanj hkrati tudi navor glede na poljubno izhodišče:  $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times d(m_i \mathbf{v}_i)/dt$ . Desno stran lahko zapišemo kot  $d(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)/dt$ . Ta izraz, ko ga diferenciramo, je namreč  $\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times d(m_i \mathbf{v}_i)/dt$ , pri čemer je prvi člen enak nič. Seštejemo navorne na vse delce, pri čemer se notranji navori medsebojno izničijo, in dobimo

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (34.17)$$

$$\int \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{L}.$$

Vpeljali smo *vrtilno količino*  $\mathbf{L}$ . Če je sistem izoliran, se vrtilna količina ohranja, sicer pa je njena sprememba enaka sunku zunanjih navorov. To je *izrek o vrtilni količini* glede na poljubno središče (EULER). Seveda velja tudi za težišče.

Vrtilna količina težišča

Vrtilna količina glede na poljubno izhodišče in vrtilna količina glede na težišče sta številčno različni. Pojavi se vprašanje, ali sta med seboj kako povezani. Če s črtico označimo vektorje v težiščnem sistemu, velja  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^* + \mathbf{r}'_i$  in  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'_i$ . Oboje vstavimo v definicijsko enačbo za vrtilno količino, križema pomnožimo in dobimo štiri člene:  $\mathbf{r}^* \times m \mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{r}^* \times \sum m_i \mathbf{v}'_i$  ( $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ )  $\times \mathbf{v}^*$  in  $\sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$ . Vsoti v drugem in tretjem členu sta enaki nič, zato preostane:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}^* \times m \mathbf{v}^* + \mathbf{L}^*. \quad (34.18)$$

Prvi člen je vrtilna količina težišča glede na aktualno izhodišče, drugi pa vrtilna količina glede na težišče.



Kroženje planeta Poglejmo nekaj primerov. Sonce in Zemlja tvorita sistem, ki je od zunaj le malo moten. Privzemimo, da je popolnoma izoliran. Ker je Sonce mnogo težje od Zemlje, privzemimo še, da je težišče sistema kar v središču Sonca. Sistemu se ohranja vrtilna količina glede na težišče; k temu prispeva zgolj Zemlja:  $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}$ , torej  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}$ . Kadar je Zemlja na svoji poti bliže Soncu, se zato giblje hitreje, in kadar je dalje proč, se giblje počasneje.

Pirueta drsalke Drsalka na ledu se zavrti okrog podporne noge s široko razprostrtima rokama in iztegnjeno nogo. Nato pritegne roki in nogo tesno k sebi in hitrost vrtenja se ji močno poveča. Med vrtenjem je drsalka približno izoliran sistem, ki se mu ohranja vrtilna količina. Ko pritegne zunanje dele telesa k sebi, zmanjša njihove razdalje  $r_i$  od vrtilne osi, zato se ustrezno povečajo njihove obodne hitrosti  $v_i$ , torej tudi kotna hitrost. Pritegnjeni zunanji deli nato povlečejo za sabo še osrednje dele telesa. To pa zato, ker čutijo – poleg centrifugalne sile – še odklonsko silo, ki jih pospešuje v tangentsni smeri vrtenja.



**Slika 34.4** Drsalka na ledu izvaja pirueto. Kako hitro se vrti, kažejo njeni lasje in krilo. Pri tem se ohranja vrtilna količina. (Anon)

Zvezdna pirueta Vrtenje drsalke na ledu je namig, kako si lahko razlagamo vrtenje Sonca okoli svoje osi in vrtenje planetov okoli Sonca (ter svojih osi). Predstavljamo si, da se je Sončni sistem rodil iz ogromnega, zelo počasi se vrtečega oblaka plinov. Notranja gravitacija je oblak čedalje bolj sežemala in začetno vrtenje se je zato povečevalo. Lokalne zgoščine snovi, ki so ponekod nastale, so se nadalje stiskale in povečevale vrtenje. Končno so se zgostile v stanje, kakršno je danes.

### 34.5 Kinetična energija

Kinetična energija Ko na  $i$ -ti delec vzdolž premika  $d\mathbf{s}_i$  deluje sila  $\mathbf{F}_i$ , je opravljeno delo  $dA_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i$  enako spremembi kinetične energije  $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ . Seštejemo delo sil na vse delce in dobimo

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (34.19)$$

$$A_{\text{ext}} + A_{\text{int}} = \Delta K.$$

Vsota dela vseh sil – zunanjih in notranjih – je enaka spremembi kinetične energije sistema. To je izrek o kinetični energiji.

Kinetična energija se ohranja le, kadar ni ne notranjega ne zunanjega dela. Notranjega dela ni tam, kjer ni notranjega trenja (kot pri nestisljivi in neviskozni tekočini) ali kjer ni notranjih relativnih premikov (kot pri togem telesu).

Kinetična energija težišča

Po zgledu vrtilne količine poskusimo razcepiti tudi kinetično energijo na dva dela: na kinetično energijo težišča in na kinetično energijo okrog težišča. Tako zapišemo  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_i'$  in vstavimo v definicijsko enačbo za kinetično energijo. Kvadiramo in pridemo tri člene:  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^{*2}$ ,  $\frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i'^2$  in  $\mathbf{v}^* \sum m_i \mathbf{v}_i'$ . Zadnji člen je enak nič, zato velja

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^{*2} + K^*. \quad (34.20)$$

Prvi člen je kinetična energija težišča, drugi pa kinetična energija glede na težišče. Rečemo jima tudi *translacijska* in *rotacijska* energija.

Spreminjanje energije

V izoliranem sistemu se gibalna količina in vrtilna količina vedno ohranjata, kinetična energija pa le, če ni notranjega dela. — Pri trku dveh avomobilov začetna kinetična energija "izgine". Porabila se je pač za notranje delo, torej za deformacijo in segrevanje nesrečne pločevine. — Pri strelu iz puške se kinetična energija "ustvari". Seveda je nastala na račun notranje energije smodnika. — Pri pirueti pa je zadeva naslednja. Začetno in končno vrtenje drsalke je togo in poteka okrog navpične osi. To pomeni, da za vsako točko velja  $v_i = r_i \omega$ . Vrtilno količino zato zapišemo kot  $L = \omega \sum m_i r_i^2$  in kinetično energijo kot  $K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$ . To pomeni, da  $K = L\omega/2$ . Vrtilna količina se pri tvorjenju piruete ohrani, kinetična energija pa naraste! Od kod je prišla? Od notranjega dela, to je od drsalkinih mišic, ki so potegnile roki in nogo navznoter in pri tem premagovale centrifugalno ter odklonsko silo.

### 34.6 Gibanje togega telesa

Posebno preprost sistem delcev je tak, ki ohranja obliko; rečemo, da je *tog*. Kamen, na primer, je tog sistem. V takem sistemu se razdalja med poljubnima točkama ne spreminja. Ker so togi sistemi poseben primer "splošnih" sistemov, velja zanje vse že povedano. Zaradi njihove posebnosti pa pričakujemo, da bomo lahko povedali še kaj dodatnega. Pri obravnavanju bomo privzeli, da so togi sistemi zvezni.

Določevanje težišča

Težišče togega telesa je, očitno, vedno na istem mestu glede na masne točke, ki ga sestavljajo. Določamo ga po definicijski enačbi (34.10), ki jo za zvezna telesa zapišemo kot  $m \mathbf{r}^* = \int \mathbf{r} dm = \int \mathbf{r} \rho dV$ . Homogena simetrična telesa imajo težišča v svojih prostorskih središčih; to velja za kvader, valj in kroglo. Kratki računi pokažejo, da je težišče stožca na  $1/4$  njegove višine in težišče

polkrogle na  $3/8$  njenega radija. Težišča drugih teles bomo računali takrat, ko/če bo potrebno. "Nepravilnim" telesom določamo težišča - kot že vemo [9.7] - tako, da jih obešamo na vrvice.

Če je telo sestavljeno iz dveh teles A in B, ki jima poznamo težišči, ju lahko nadomestimo s točkastima masama v njunih težiščih. Za eno koordinato velja namreč  $M \cdot x^* = \sum_{A,B} m_i x_i = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A x_{A^*} + M_B x_{B^*}$ . Težišče teh dveh točkastih mas pa leži na njuni zveznici in je zlahka določljivo.

Posebej zvito je računanje težišča homogenega telesa, recimo ravnila, v katerega je na enem koncu izvrtana luknja. V mislih jo zapolnimo s primernim čepom in izračunamo težišče polnega ravnila. Potem pa na nasprotno stran tega težišča prilepimo prav tak čep, določimo njegovo težišče in iz obeh težišč določimo skupno težišče.

Translacija in rotacija

Togo telo se lahko giblje na dva odlikovana načina: vse njegove točke se gibljejo vzporedno ali vse točke krožijo okoli poljubne osi. Prvo gibanje imenujemo *translacija*, drugo *rotacija*. Iz teh dveh osnovnih gibanj lahko sestavimo poljubno gibanje. To je zaporedje kratkih translacij težišča in majhnih rotacij okoli trenutnih osi iz težišča. Oboje določajo okolišnje sile in njihovi navori. Gibanje težišča opisuje izrek o gibalni količini in gibanje okoli njega opisuje izrek o vrtilni količini. Velja še izrek o kinetični energiji, pri čemer je notranje delo enako nič. V vseh izrekih so hitrosti delcev izražene kot  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ . Gibanje težišča je takšno kot gibanje točkastega telesa in z njim ne bomo izgubljali časa. Posvetimo se raznim oblikam vrtenja.

### 34.7 Vrtenje okoli stalne osi

Otroški vrtiljak

Osnovni primer vrtenja predstavlja otroški *vrtiljak* z navpično osjo. Pri praznem vrtiljaku gre ponavadi os skozi težišče, če pa nanj naložimo kakšen zaboj, se težišče premakne in os ne gre več skozenj. Privzeli bomo, da je os poljubna, to je, da gre bodisi skozi težišče ali izven njega.



**Slika 34.5** Vrtiljak. Vsi deli vrtiljaka se vrtijo okoli stalne navpične osi z enako kotno hitrostjo. Hitrost vrtenja je določena z zunanji navori, ki jih izvajajo igrajoče se dekllice. (Warnock, T.)

Podnožje osi vzamemo za izhodišče koordinatnega sistema. Delec  $i$  vrtiljaka je oddaljen od izhodišča za  $l_i$  in od navpične osi za  $r_i$  ter se giblje s tangентno hitrostjo  $v_i$ . Njegova vrtilna količina zato znaša  $L_i = m_i l_i v_i$ . Za navpično komponento velja  $L_{z,i} / L_i = r_i / l_i$ , torej  $L_{z,i} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$ . Seštejemo po vseh delcih in dobimo za

vrtilno količino v navpični smeri (indeks  $z$  bomo odslej kar izpuščali):

$$\begin{aligned} L &= J\omega \\ J &= \sum m_i r_i^2. \end{aligned} \quad (34.21)$$

Vztrajnostni moment Količino  $J$  poimenujemo *vztrajnostni moment* vrtiljaka glede na aktualno navpično os. Odvisen je od mase in njene razporeditve okoli osi. Opazimo, da je prav vseeno, kje na tej osi izberemo izhodišče. Vsakokratna vrtilna količina in vztrajnostni moment okrog navpične osi sta zmeraj enako velika.

Sprememba vrtilne količine je seveda enaka vsoti zunanjih navorov, kar pa v primeru togega telesa zdaj zapišemo v preprostejši obliki:

$$M = \frac{dJ\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (34.22)$$

Enačba ima popolnoma enako obliko kot gibalni zakon za premo gibanje. Zato takoj uvidimo: če navorov ni, je vrtenje enakomerno. Stalni navor pa povzroči enakomerno pospešeno vrtenje.

Določanje momentov V zvezni obliki zapišemo vztrajnostni moment (34.21) kot  $J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$ . Kratki računi pokažejo naslednje. Tanek cilindar polmera  $r$  ima vztrajnostni moment (okoli simetrijske osi)  $mr^2$ . Enako težek valj z enakim polmerom ima  $1/2$  tega, kroglja  $2/5$  tega in drog zgolj  $1/3$  tega. Vztrajnostni moment sestavljenega telesa, recimo tankega cilindra in na njem položenega prečnega trama, se seštevajo. Posebej zvito je spet računanje, kadar ima osnovno telo kakšno luknjo. Velja namreč  $J_{\text{full}} = J_{\text{drilled}} + J_{\text{plug}}$ .

Kinetična energija Podobno kot vrtilno količino poenostavimo tudi izraz za kinetično energijo. V njeni definicijski enačbi (34.19) nadomestimo tangentne hitrosti  $v_i$  z  $r_i\omega$  in dobimo

$$K = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (34.23)$$

Mimogrede še opazimo, da velja  $K = L\omega/2$ . Sprememba kinetične energije je seveda enaka delu zunanjih sil, saj je delo notranjih sil enako nič. K delu prispevajo le tangentne komponente sil, torej  $A = F_t r d\varphi = M d\varphi$ .

Kroženje težišča Vrtenje vrtiljakove ploščadi okrog aktualne navpične osi, ki ne gre skozi težišče, je sestavljeno iz kroženja težišča okrog te osi in iz hkratne rotacije okrog (vzporedne) težiščne osi. Kroženje in rotacija imata isto kotno hitrost. Domnevamo, da se sestavljeno gibanje izraža kot vsota obeh delnih gibanj, torej

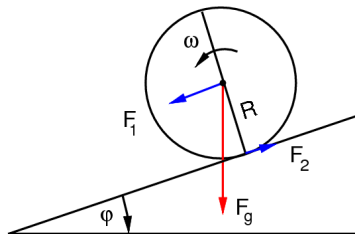
$$\begin{aligned}
 J &= J^* + mr^{*2} & (34.24) \\
 L &= L^* + mr^{*2}\omega \\
 K &= K^* + \frac{1}{2} mr^{*2}\omega^2.
 \end{aligned}$$

Zadnja dva izreka sta pravzaprav le specializacija izrekov o vrtilni količini in o kinetični energiji težišča v splošnem (netogem) sistemu, ki smo ju že spoznali. Prvi izrek pa takoj sledi iz drugega, če slednjega zapišemo kot  $J\omega = J^*\omega + mr^{*2}\omega$  in delimo z  $\omega$ .

### 34.8 Premikanje osi vrtenja

Kotaljenje po klancu

Pri vrtiljaku je os vrtenja stalna. Pri kolesu, ki ga *zakotalimo* po klancu, pa se os vrtenja premika, in sicer vzporedno sama s seboj.

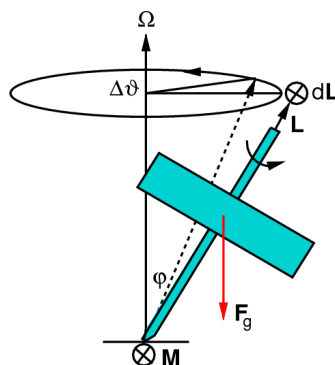


**Slika 34.6** Kotaljenje kolesa po klancu. Čim večji je vztrajnostni moment kolesa, tem manjši je pospešek njegovega težišča.

Na kolo delujeta dve sili: v težišču prejmlje in nizdol klanca vleče komponenta teže  $F_1 = mg \sin \varphi$ . V dotikališču pa prejmlje in navzgor po klancu deluje sila podlage  $F_2$ . Zadnja sila tudi izvaja navor  $F_2 r$  glede na os kolesa. Velja  $F_1 - F_2 = ma^*$  in  $F_2 r = J^* \alpha$ . Ker  $r\omega = v_t = v^*$ , je  $\alpha = a^*/r$ . Iz vsega skupaj sledi  $a^* = g \sin \varphi / (1 + J^*/mr^2)$ . Kolo se torej pospešuje manj kot drseče sani. Večji kot je vztrajnostni moment, manjši je pospešek. Pri krogli znaša le  $5/7$  drsnega pospeška in pri valju zgolj  $2/3$ . V vsakem trenutku je kinetična energija kolesa enaka vsoti translacijske in rotacijske. Vsota kinetične in potencialne energije se pa ohranja.

Precesija vrtavke

Otroci se od nekdaj radi igrajo z *vrtavkami*. Takšno vrtavko postavimo s spodnjim koncem osi na mizo, usmerimo os navpično navzgor in jo s prsti zavrtimo z veliko hitrostjo. Vrtavka se vrtil in njena os ostaja lepo navpična.



**Slika 34.7** Vrtavka. Če jo zavrtimo z nagnjeno osjo, se začne ta vrteti okoli navpične osi in pri tem zarisuje plašč stožca.

Če vrtavko zavrtimo s poševno nagnjeno osjo, se zgodi nekaj presenetljivega: vrtavka ne pade, ampak začne njena os krožiti okrog navpičnice. Pri tem zarisuje plašč stožca. Pojavu rečemo *precesija*. Kaj lahko povemo o njem?

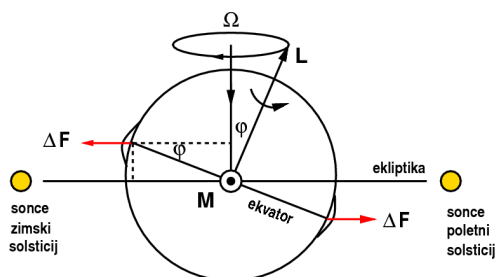
Vrtilna količina vrtavke  $L$  je usmerjena vzdolž njene osi. V časovni enoti  $dt$  se os zavrti za kot  $d\theta$  okrog navpičnice. Velikost vrtilne količine se pri tem ne spremeni po velikosti, ampak le po smeri. Velja  $dL = L_0 \sin \varphi d\theta$ . Sprememba vrtilne količine na časovno enoto znaša  $dL/dt = L \sin \varphi \Omega$ . Povzročiti jo je moral nek navor. Tega izvaja teža, ki prijemlje v težišču vrtavke, glede na dotikalnišče osi s tlemi. Navor  $M = mg \sin \varphi$  je vodoraven. Ko upoštevamo smeri vseh vektorjev, dobimo:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (34.25)$$

Vrtavkina os precedira s kotno hitrostjo  $\boldsymbol{\Omega}$  okoli navpičnice. Precesija je tem hitrejša, čim večji je navor, to je, čim bolj je vrtavka nagnjena. Pri danem nagibu pa je precesija tem počasnejša, čim hitreje se vrtavka vrti. Ko se zaradi trenja vrtavka počasi ustavlja, se njena hitrost precesije veča.

Zemlja kot vrtavka

Tudi Zemlja je vrtavka. Vrti se okoli polarne osi, ki je nagnjena glede na normalo ekliptike. Na Zemljo deluje Sonce s silo, ki pada z razdaljo (19.17). Masno središče in težišče krogle sta zato rahlo razmaknjena. Če bi bila Zemlja popolnoma okrogla, bi ležalo njeno težišče na zveznici med masnima središčema Sonca in Zemlje in slednja ne bi čutila nobenega navora. Ker pa je sploščena, ima okrog ekvatorja dodatni masni obroč. Sonce privlači bližnji del obroča močneje kot oddaljenega in s tem izvaja navor na Zemljo. Če se ta ne bi vrtela, bi jo sčasoma Sonce zasukalo tako, da bi bila njena polarna os pravokotna na ekliptiko. Ker pa se vrti, reagira kot vrtavka: vrtilna os precedira. Sončev navor je najmočnejši ob solsticijih in enak nič ob ekvinokcijih. Vendar deluje vedno istosučno. Enako kot Sonce deluje na Zemljo tudi Mesec. Oba navora se seštevata. Tako smo našli kvalitativno razlago za že dolgo znano precesijo točke gama po nebesnem ekvatorju [7.8].



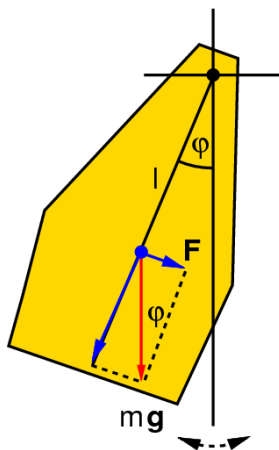
**Slika 34.8** Zemlja kot vrtavka. Polarna os zarisuje med zvezdami krog. Trenutno kaže v smer zvezde Severnice, ki je zato tudi dobila svoje ime.

Ocenimo velikost precesije  $\Omega = M/L \sin \varphi$ ! — Vrtilno količino Zemlje zapišemo kot  $L = \omega \cdot (2/5)mR^2$ . — Maksimalni navor na ekvatorski obroč ocenimo z  $M = 2 \cdot \Delta F R \sin \varphi$ . — Silo na masni polobroč  $dm/2$  ocenimo z gradientom gravitacijske sile,

$dF/dr = 2\kappa (dm/2) (M_S/r_S^3 + M_M/r_M^3)$ , pri čemer vzamemo  $dr = R \cos \varphi$ . — Masni obroč določimo iz razlike prostornin elipsoida z veliko polosjo  $a$  in krogle:  $dV = (4\pi/3)aR^2 - (4\pi/3)R^3$ , torej po množenju z gostoto  $dm = m(a/R - 1)$ . — Vse skupaj vtaknemo v izhodiščno enačbo. Časovno spremenljivost navora upoštevamo tako, da vzamemo kar 1/2 maksimalnega. Dobimo rezultat  $\Omega = (5/2)\kappa (M_S/r_S^3 + M_M/r_M^3) \cos \varphi (a/R - 1) / \omega$ . Vse količine na desni strani poznamo in izračunamo obhodni čas precesije  $\sim 16$  tisoč let. To je dobra velikostna ocena za dejansko vrednost 26 tisoč let. Zanimivo je, da je vpliv Sonca na precesijo manjši kot vpliv Meseca; razmerje njunih vplivov znaša okrog 1:2.

### 34.9 Nihanje togih teles

Težno nihalo Na steni obešena slika zaniha, ko jo odmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Nasploh vsako togo telo, ki je vrtljivo okoli vodoravne izven-težiščne osi, niha okrog ravnovesne lege. Rečemo, da je to *težno nihalo*.



**Slika 34.9** Nihanje togega telesa. Teža prijmlje v težišču in suče telo okrog ravnovesne lege zdaj sem, zdaj tja.

Na obešeno telo deluje teža  $mg$ . Prijemlje v težišču. Ko je telo odmaknjeno za majhen kot  $\varphi$ , ima teža komponento  $F = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi$  proti ravnovesni legi. Ta komponenta izvaja navor  $M = lF$  glede na obesišče. Velja  $M = J\varphi''$ . Ker  $J = J^* + ml^2$ , sledi  $\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0$ . To je znana enačba nihanja s frekvenco

$$\omega_0^2 = \frac{gl}{1 + J^*/ml^2}. \quad (34.26)$$

Če je vse telo stisnjeno v težišče, je  $J^* = 0$  in frekvenca nihanja postane  $\sqrt{g/l}$ , kakor tudi mora biti.

Torzijsko nihalo Pri obešenem telesu povzročata sučno nihanje navor teže. Lahko pa telo prebodemo skozi težišče in sučni navor povzročamo s spiralno vzmetjo:  $M = -k\varphi$ . Namesto spiralne vzmeti lahko telo obesimo kar na žico. Tako dobimo *torzijsko nihalo*.



**Slika 34.10** Na žici obešena krožna plošča sučno niha okoli ravnovesne lege. To je torzijsko nihalo. Čim tanjša je žica, tem počasnejše je nihanje. (Kenyon College)

Enak premislek kot prej vodi do enake enačbe gibanja s konstanto

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J^*}. \quad (34.27)$$

Torzijsko nihalo je nadvse primerno za merjenje vztrajnostnih momentov teles. Najprej za znani vztrajnostni moment, recimo za krožno ploščo, izmerimo frekvenco nihanja ter tako določimo konstanto vzmeti. Potem pa iz znane konstante vzmeti in iz izmerjene frekvence določimo neznan vztrajnostni moment, recimo za (todega) človeka okrog treh težiščnih osi.

### 34.10 Splošno nihanje teles

Prosto nihanje Skupne poteze obravnavanih nihanj lahko zajamemo z isto enačbo oblike

$$u'' + \omega_0^2 u = 0. \quad (34.28)$$

Rešitev enačbe je, kot vemo, harmonično nihanje s frekvenco  $\omega_0$ . Količina  $u$ , ki niha, je lahko razdalja, kot ali kaj drugega. Velja torej

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (34.29)$$

Konstanti  $c_1$  in  $c_2$  sta določeni z začetnimi pogoji. Če začnemo šteti čas v maksimalni amplitudi, na primer, postavimo  $c_2 = 0$ .

Zdaj, ko že poznamo kompleksna števila, pa opazimo še naslednje. Zapisana nihajna enačba je pravzaprav realni (ali imaginarni) del kompleksne enačbe s povsem enako obliko, le da je v njej količina  $\hat{u} = (x + iy)$  kompleksna:  $(x + iy)'' + \omega_0^2 (x + iy) = 0$  pomeni  $(x'' + \omega_0^2 x) + i(y'' + \omega_0^2 y) = 0$ , to je par "navadnih" enačb. Zato jo rešujemo kar s kompleksnim nastavkom  $\hat{u} = (u_0 \exp i\delta) \exp i\omega t$ . Ko ga vstavimo v nihajno enačbo, dobimo  $(i\omega)^2 + \omega_0^2 = 0$ , torej  $\omega = \omega_0$ . Tako realni kot imaginarni del kompleksnega nastavka sta iskani rešitvi:  $u = u_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$  ali  $u = u_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ . Konstanti  $u_0$  in  $\delta$  določimo iz začetnih pogojev. Če upoštevamo še obrazec za sinus ali kosinus vsote (15.15), pa dobimo rešitev v obliki  $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ . Novi konstanti se izražata s starima:  $u_0^2 = c_1^2 + c_2^2$  in  $\tan \delta = -c_2/c_1$ .



Vzbujeno nihanje

Kako se giblje nihalo, če nanj deluje dodatni zunanji harmonični vpliv s svojo frekvenco? Veter z zaporednimi sunki, na primer, poganja gugalnico. Nihajno enačbo zapišemo kot

$$u'' + \omega_0^2 u = A \cos(\omega t + \delta). \quad (34.30)$$

Zapisano enačbo razširimo v kompleksno obliko  $\hat{u}'' + \omega_0^2 \hat{u} = \hat{A} \exp i\omega t$ , pri čemer  $\hat{A} = A \exp i\delta$ . Za rešitev pričakujemo nihanje z isto frekvenco kot zunanji vpliv, zato izberemo nastavek  $\hat{u} = \hat{u}_0 \exp i\omega t$ , pri čemer  $\hat{u}_0 = u_0 \exp i\theta$ , in ga vtaknemo v nihajno enačbo. Dobimo  $(i\omega)^2 \hat{u}_0 + \omega_0^2 \hat{u}_0 = \hat{A}$ , torej  $\hat{u}_0 = \hat{A}/(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Količini  $\hat{u}_0$  in  $\hat{A}$  sta povezani z realnim sorazmernostnim faktorjem, zato sta njuni fazi enaki in velja

$$u = u_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (34.31)$$

$$u_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)}}.$$

Nihalo niha harmonično z isto frekvenco  $\omega$  kot vzbujevalec. Čim manjša je razlika med frekvenco vzbujevalca in lastno frekvenco  $\omega_0$  nihala, tem večja je amplituda  $u_0$  nihanja. Ko sta frekvenci enaki, je amplituda neskončna. Rečemo, da je nihalo v *resonanci* z vzbujevalcem. Seveda nastopa v naravi trenje, ki ga nismo upoštevali, in so zato vzbujene amplitude končne.



**Slika 34.11** Vzbujeno nihanje mostu v Tacomi. Šibek spremenljiv veter ravno pravšnje frekvence je most spravil v resonantno nihanje in ga povsem porušil. (New York Times)

Vzbujano nihanje z dušenjem

Pa raziščimo vzbujeno nihanje z dušenjem! Predpostavimo, da velja linearni zakon upora, in zapišimo nihajno enačbo

$$u'' + \gamma u' + \omega_0 u = A \cos(\omega t + \delta). \quad (34.32)$$

Postopamo enako kot pri nedušenem vzbujanju in prideltamo enačbo  $\hat{u}_0 = \hat{A}/(\omega_0 - \omega + i\gamma\omega) = \hat{R}\hat{A}$ . To enačbo zapišemo v obliki  $\hat{u}_0 = R \exp i\theta \cdot A \exp i\delta = RA \exp i(\theta + \delta)$ . Realni del leve strani je enak realnemu delu desne strani, zato

$$u = RA \cos(\omega t + \delta + \theta). \quad (34.33)$$

Nihanje je harmonično s frekvenco vzbujevalca, vendar je časovno zamaknjeno. Amplituda je določena z  $R$  in faza s  $\theta$ . Določimo ju!

Definicijski izraz za  $\hat{R}$  kvadriramo, to je, pomnožimo ga s konjugirano vrednostjo, in dobimo:

$$R = \frac{1}{\sqrt{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}} \quad (34.34)$$

Recipročni izraz za  $\hat{R}$  preoblikujemo takole:  $1/\hat{R} = 1/R \exp i\theta = (1/R) \exp(-i\theta) = (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ . Realni del dobljenega izraza je  $\cos \theta$  in imaginarni del je  $-\sin \theta$ . Njuno razmerje pove

$$\tan \theta = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (34.35)$$

Pri nizkih vzbujevalnih frekvencah nihalo kar sledi vzbujevalcu. Pri visokih stoji pri miru, saj nima časa, da bi mu sledilo. Trenje poskrbi, da je resonantno ojačanje končno. Nihanje vedno kasni za vzbujevanjem. Kasnenje narašča s frekvenco. V resonanci kasni natanko za četrt nihaja.

Dušeno nihanje Preostane še dušeno nihanje. Spet predpostavimo, da velja linearni zakon upora in zapišimo

$$u'' + \gamma u' + \omega_0^2 u = 0 \quad (34.36)$$

Na enačbo pogledamo, kot da je kompleksna. Pričakujemo nihanje z zmanjševanjem amplitude s časom in zato poskusimo z nastavkom  $\hat{u} = \exp i\hat{r}t$  s kompleksnim  $\hat{r}$ . Kompleksni eksponent namreč vsebuje realni in imaginarni del, ki poskrbita za oboje. Dobimo  $(-\hat{r}^2 + i\gamma\hat{r} + \omega_0^2) \exp i\hat{r}t = 0$ . Prvi faktor mora biti enak nič, to pa je pri  $\hat{r} = i\gamma/2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2/4)}$  oziroma okrajšano  $\hat{r} = i\gamma/2 \pm \omega$ . Privzemimo, da je dušenje tako majhno, da je podkorenski izraz pozitiven. Tedaj je frekvenca  $\omega$  realna. Potem dobimo rešitev  $\hat{u} = \exp(-\gamma t/2) [c_1 \exp(i\omega t) + c_2 \exp(-i\omega t)]$ . Da bomo kompleksno rešitev reducirali na realno, moramo postaviti  $c_2 = c_1^*$  oziroma obratno in dobimo

$$u = u_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta) \quad (34.37)$$

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}, \gamma < \omega_0.$$

Nihanje je harmonično z manjšo frekvenco kot pri prostem nihanju, amplitude pa so eksponentno dušene. Če je dušenje premočno, si zlahka predstavljamo, da do nihanja sploh ne pride, ampak preostane le eksponentno pojemanje. Računsko pa se tega ne bomo lotili.

### 34.11 Gravitacijska konstanta

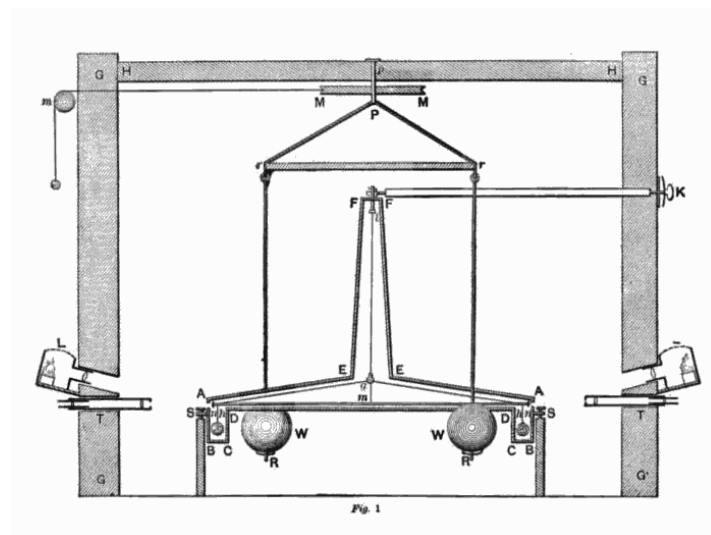
S sučnim nihalom na tanko žico smo dobili v roke zelo občutljiv merilnik sil. Vzbudi nam upanje, da bi lahko z njim izmerili gravitacijski privlak med dvema kroglama z znano maso in na znani razdalji ter tako določili *gravitacijsko konstanto* in preko nje maso Zemlje. Z veliko truda nam - kot zelo spretnemu eksperimentatorju - to tudi uspe (CAVENDISH).

Torzijska tehtnica Na tanko žičko obesimo lahek vodoraven vzvod dolžine  $2r$  z dvema svinčenima kroglama mase  $m$  na koncih. Celotni drog ima vztrajnostni moment  $J = 2mr^2$ . Ko ga zasučemo in spustimo,

izmerimo še nihajni čas  $T$  in iz tega izračunamo sučno konstanto  $k = J(2\pi/T)^2$ . Uporabimo tanko in dolgo nitko, da je konstanta čim manjša, to je, nihajni čas mora biti čim večji. Sedaj je vse pripravljeno. Umirimo vzvod in v neposredno bližino obeh malih krogel primaknemo dve veliki krogli z masama po  $M$ . Razdaljo med središčema male in velike krogle,  $l$ , izmerimo predhodno. Počakamo da se vzvod zasuče. Da meritve ne motimo, jo delamo v zaprti sobi in gledamo na sučno skalo z daljnogledom. Iz izmerjenega zasuka izračunamo navor, iz tega privlak med kroglama in končno še gravitacijsko konstanto. Dobimo

$$\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2. \quad (34.38)$$

Naša dosedanja ocena [19.9] torej ni bila prav nič slaba. Za uspešno meritev smo uporabili: dolžino droga 2 m, maso male krogle 0,5 kg, maso velike krogle 150 kg, razdaljo med središčema krogel 250 mm in nihajni čas  $\sim 20$  minut (!). Pri vsem tem izmerimo zasuk konca droga komaj za  $\sim 5$  mm.



**Slika 34.12** Merjenje težne konstante. Privlačna sila med veliko in majhno kroglo zasuče nihalo. Velikost zasuka pove silo med znanima masama pri znani oddaljenosti in s tem težno konstanto. (Cavendish, 1798)

Tehtanje Zemlje Pri merjenju smo predpostavljali, da se krogli privlačita tako, kot da bi bila vsa njuna masa zgoščena v njunih središčih.

Ko je gravitacijska konstanta izmerjena, jo uporabimo za določitev mase Zemlje iz težnega pospeška na njeni površini:  $g = \kappa M/r^2$ . Za maso dobimo  $6,0 \cdot 10^{24}$  kg. To pomeni, da znaša povprečna gostota  $5,5 \text{ kg/dm}^3$ . Ker je iz neposrednih meritev znano, da je gostota kamnin na površju Zemlje okrog  $2,5 \text{ kg/dm}^3$ , mora biti Zemlja v središču ustrezno gostejša. Naša dosedanja ocena gostote – kot sredine med maso apnenca in maso železa – je bila torej kar dobra.

### 34.12 Gravitacijsko polje

Tudi to, kar smo doslej že dognali o gravitacijskih poljih, hočemo sedaj povzeti v jeziku vektorskih polj. Pri tem pričakujemo, da bomo odkrili tudi kaj novega.

Jakost polja Jakost gravitacijskega polja  $\mathbf{g}$  v izbrani točki lahko določimo (19.1) z gravitacijsko silo  $\mathbf{F}_g$  na tamkajšnji testni delec z maso  $m$ :

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}. \quad (34.39)$$

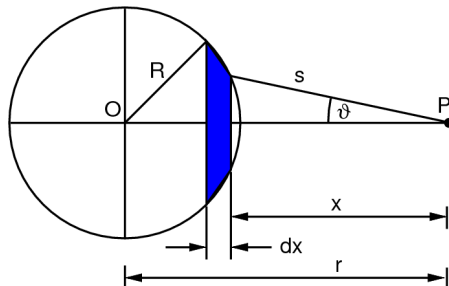
Gravitacijsko polje točkastega telesa z maso  $M$  pojema, kot znano (19.18), z oddaljenostjo  $\mathbf{r}$  od njega. Polje v točki P, povzročeno od masnega izvora v točki Q, znaša

$$\mathbf{g}_P = -\kappa \frac{m_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (34.40)$$

Enotni vektor  $\mathbf{n}_{QP}$  kaže od točke Q proti točki P. Sistem delcev pa ustvarja v točki P skupno polje

$$\mathbf{g}_P = - \sum_Q \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (34.41)$$

Polje krogle Polje krogle določimo tako, da najprej izračunamo polje krogelnega obroča, nato krogelne lupine in slednjič celotne krogle.



Slika 34.13 Polje krogelnega obroča.

Masa obroča znaša  $dm = 2\pi R\sigma dx$ , pri čemer je  $\sigma$  ploskovna masna gostota. V točki P povzroča ta obroč polje  $d\mathbf{g} = dm\kappa \cos\theta/s^2$ .

Določiti moramo še odvisnost  $\theta(s)$  in  $x(s)$ . — Ker

$R^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos\theta$ , velja  $\cos\theta = (r^2 - a^2 + s^2)/2rs$ . — Ker

$dx/ds = s/r$ , velja  $dx = sds/r$ . Oboje vstavimo v polje obroča in

dobimo  $d\mathbf{g} = (\pi R\kappa\sigma/r^2)(1 + (r^2 - R^2)/s^2)ds$ . Če je točka P zunaj

lupine, integriramo med  $r-R$  in  $r+R$  ter dobimo  $\mathbf{g} = \kappa m/r^2$ . To je točno toliko, kot da bi bila vsa masa lupine stisnjena v središče.

Če je P znotraj lupine, pa integriramo med  $R-r$  in  $R+r$  ter dobimo  $\mathbf{g} = 0$ . Seveda je polje znotraj lupine enako nič le tedaj, če ni

drugih mas zunaj lupine. Če obstajajo zunanje mase (kar seveda zmeraj), nas krogelna lupina ne ščiti pred njihovim poljem.

Polna krogla je sestavljena iz koncentričnih lupin. Vsaka lupina proizvaja takšno polje, kot da bi bila stisnjena v središču. Zunanje točke čutijo torej takšno polje, kot da bi bila vsa masa krogle

združena v njenem središču. Notranje točke pa čutijo takšno polje, kot da bi zunanje plasti ne bilo in bi bila vsa masa iz notranjih plasti združena v središču. Povedano velja za slojevito kroglo, to je tako, katere masa se spreminja z radijem. Če je krogla homogena, pa je notranja masa  $m_r$  sorazmerna z  $r^3$ , torej  $m_r/m = r^3/R^3$  in polje zato znaša  $g = \kappa m r/R^3$ . Polje linearno narašča od 0 v središču do  $\kappa m/R^2$  na površini.

Če bi skozi homogeno Zemljo izvrtali navpični jašek od pola do pola in vanj spustili kroglo, bi ta čutila silo  $F_g \propto -r$ , to je  $F_g/m = -g_0 r/R$ , in bi nihala sem in tja. Nihajni čas bi znašal  $T = 2\pi \sqrt{R/g_0}$ , torej 1,4 ure. To je natanko toliko, kot potrebuje izstrelek za obhod okoli Zemlje [18.9].

Potencial polja

Ko se testni delec premakne iz ene točke v drugo, opravi gravitacijsko polje na njem delo  $A = \int m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ . Če deluje sila v smeri premika, je delo pozitivno in delcu se poveča kinetična energija. In obratno. Delo je neodvisno od ubrane poti med obema točkama, saj bi sicer z gibanjem po zaključeni zanki dobili stroj za pridobivanje kinetične energije iz nič. Po definiciji je dovedeno delo enako spremembi potencialne energije. Hočemo, da pozitivno delo odgovarja zmanjšanju potencialne energije, zato definiramo:

$$W - W_0 = - \int m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}. \quad (34.42)$$

Referentno točko 0 izberemo kjerkoli in tamkajšnjo potencialno energijo postavimo na poljubno vrednost, najbolje na nič. Delo gravitacije na masno enoto poimenujemo *gravitacijski potencial*:

$$\phi - \phi_0 = - \int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}. \quad (34.43)$$

Očitno velja  $W = m\phi$ . Iz definicije potenciala tudi neposredno sledi  $\phi_{AB} = -\phi_{BA}$  ter  $\phi_{AB} = \phi_{0A} - \phi_{0B} = \phi_A - \phi_B$ . Za točkast delec pokaže integriranje, pri čemer postavimo potencial v neskončnosti na nič,

$$\phi_P = - \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}}. \quad (34.44)$$

Potencial sistema delcev je očitno vsota potencialov posameznih delcev:

$$\phi_P = - \sum_Q \kappa \frac{m_Q}{r_{QP}}. \quad (34.45)$$

Gravitacijsko polje sistema torej lahko izračunamo na dva načina: z vektorskim seštevanjem jakosti ali s skalarnim seštevanjem potencialov. Slednje je lažje. Iz potenciala pa, kot znano (32.7), sledi jakost polja takole:  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ .

### 34.13 Gibanje planetov

Lahek planet

Sonce in njegov planet, recimo Zemlja, sta približno izoliran sistem dveh teles. Če je planet lahek v primerjavi s Soncem, je težišče sistema kar v središču Sonca in relativno se giblje zgolj planet. Ohranja se vrtilna količina sistema, h kateri prispeva le planet, in se v polarnih koordinatah zapiše kot

$$L = mr^2\varphi'. \quad (34.46)$$

Zaradi te ohranitve je gibanje ravninsko. Ohranja se tudi vsota kinetične in potencialne energije:

$$E = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2\varphi'^2) - \frac{\alpha}{r}. \quad (34.47)$$

Črtice označujejo odvode po času. Zaradi kratkosti smo zapisali  $\alpha = kmM$ .

Izračunati hočemo tir, po katerem se giblje planet. Doslej smo bolj ali manj upravičeno privzemali, da je to krog, sedaj pa poskusimo tir izpeljati kot posledico gravitacijskega zakona. V energijski enačbi nadomestimo  $dr/dt$  z  $dr/d\varphi \cdot \varphi'$  in nato v njej nadomestimo vse  $\varphi'$  s tistim iz vrtilne enačbe. Izrazimo  $d\varphi$  in integriramo, pa dobimo:

$$\varphi = \int \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{[2m(E + \alpha/r) - L^2/r^2]}}. \quad (34.48)$$

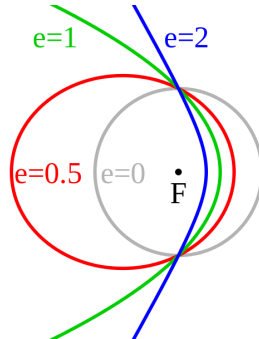
To je enačba tira  $r = r(\varphi)$  v inverzni obliki. Preoblikujemo faktor  $dr/r^2$  v  $d(1/r)$  in s tem, po nekaj truda, prevedemo integral v standardno obliko  $\varphi \propto \int du/\sqrt{(1-u^2)}$ , katere rešitev je arkus kosinus. Rezultat na koncu, spet z nekaj truda, polepšamo v obliko

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ p &= \frac{L^2}{m\alpha} \\ \varepsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}. \end{aligned} \quad (34.49)$$

Stožernice

Oblika krivulje, po kateri se giblje planet okoli Sonca, je odvisna od parametrov  $p$  in  $\varepsilon$ . Kakšne krivulje so to? Če  $\varepsilon = 0$ , je to očitno krožnica z radijem  $p$ . Ko  $\varphi = 90^\circ$ , imajo vse krivulje enako oddaljenost od gorišča, namreč  $p$ . Pa narišimo te krivulje za isto vrednost  $p$  in za različne vrednosti  $\varepsilon$ ! Slika pokaže, da so to: krog ( $\varepsilon = 0$ ); elipsa ( $\varepsilon < 1$  oziroma  $E < 0$ ); parabola ( $\varepsilon = 1$  oziroma  $E = 0$ ); in - nova krivulja! - hiperbola ( $\varepsilon > 1$  oziroma  $E > 0$ ). Vse te krivulje so očitno sorodne, to je, spadajo v isto skupino; recimo jim *stožernice*. Planet se torej lahko giblje okrog Sonca ne samo po krogu, ampak po katerikoli stožernici.

Naj bo planet v začetnem trenutku v legi  $\mathbf{r}_0$  in naj ima hitrost  $\mathbf{v}_0$ . Njegova energija znaša  $E = mv_0^2/2 - \alpha/r_0$ . Z energijo je oblika tira – krožnica, elipsa, parabola ali hiperbola – popolnoma določena. Presenetljivo je odvisna zgolj od velikosti hitrosti in nič od njene smeri.



**Slika 34.14** Stožernice. Planet se giblje okrog Sonca po krožnici, elipsi, paraboli ali hiperboli, odvisno od njegove začetne lege in hitrosti. (Scott, A.)

Kako se že spoznani parametri stožernic izražajo s parametroma  $p$  in  $\varepsilon$ ? Nekaj računanja in risb pove naslednje.

Polosi elipse sta  $a = p/(1 - \varepsilon^2) = \alpha/2|E|$  in  $b = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = L/\sqrt{2m|E|}$ . Velika polos je odvisna zgolj od energije, nič od vrtilne količine. Najmanjši in največji radij znašata  $r_{\min} = p/(1 + \varepsilon) = a(1 - \varepsilon)$  in  $r_{\max} = p/(1 - \varepsilon) = a(1 + \varepsilon)$ . Za parabolo velja  $r_{\min} = p/2$ . Tako se giblje planet, če v neskončnosti začne s hitrostjo nič. Za hiperbolo pa dobimo  $r_{\min} = p/(e + 1) = a(\varepsilon - 1)$ .

Obhodni čas Kakšen je *obhodni čas* po elipsi? Vrtilno enačbo zapišemo v obliki  $L = mr^2\dot{\varphi} = 2mS'$ , kjer je  $S$  ploščina, ki jo zarisuje radij vektor. Integriramo po času od 0 do  $T$ , ko je zarisana vsa ploščina:  $LT = 2mS$ . Ploščina elipse znaša  $S = \pi ab$  (kar uganemo po primerjavi s krogom kot posebnim primerom ali izračunamo integral  $S = 4 \int_0^a y dx = (4b/a) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ), zato

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}. \quad (34.50)$$

To je razširitev že spoznanega orbitalnega zakona za gibanje po krogu (19.19) na gibanje po elipsi. Obhodni čas je odvisen zgolj od velike osi. Vse elipse z enako veliko glavno osjo in s Soncem v gorišču imajo enak obhodni čas (in energijo), ne glede na to, kako so stisnjene. Namesto po krožnici premera  $2R$  s Soncem v središču bi se Zemlja lahko gibala po neskončno stisnjeni elipsi z glavno osjo  $2a = 2R$  in s Soncem v gorišču, torej na skrajnem koncu elipse. Obhodni čas bi bil obakrat enak. Če bi se torej Zemlja nenadoma zaustavila, bi se začela gibati okoli Sonca po neskončno ozki elipsi z osjo  $2a = R$ . Obhodni čas bi bil zato  $(1/2)^{3/2} = 0,35$ -krat "daljši" kot sedanji in do Sonca bi potrebovala  $1/2$  tega časa, torej 65 dni. Mesec pa bi padel na Zemljo v 5 dneh.

Težek planet Če je planet težek, postavimo izhodišče koordinatnega sistema v masno središče Sonca in planeta. Iz tega izhodišča raste vektor  $\mathbf{r}_1$  do Sonca in vektor  $\mathbf{r}_2$  do planeta. Vektorja ležita na zveznici obeh teles. Velja seveda  $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ . Vektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  kaže smer in razdaljo od telesa 1 (Sonca) do telesa 2 (planeta). Iz obeh enačb sledi

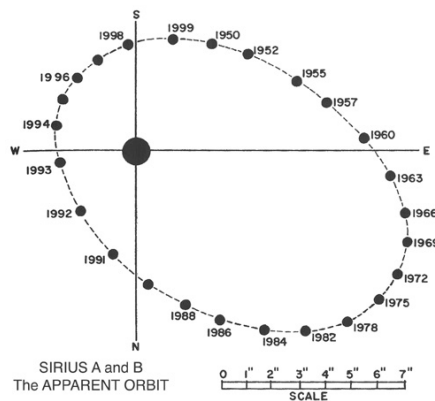
$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (34.51)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Vrtilna enačba sedaj vsebuje vsoto dveh členov in gibalna prav tako. Člene, ki vsebujejo  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$  izrazimo z  $\mathbf{r}$  in dobimo enačbi  $L = \mu r^2 \varphi'$  ter  $E = (\mu/2)(r'^2 + r_2 \varphi') - \alpha/r$ , pri čemer je  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . To sta popolnoma enaki enačbi, kot smo ju že spoznali, le da zdaj opisujeta gibanje fiktivne točke z *reducirano maso*  $\mu$  okrog masnega središča. Seveda so tudi vse rešitve teh enačb enake kot prej. Izračunani vektor  $\mathbf{r}(\varphi)$  torej kaže lego fiktivne mase glede na masni center. S tem sta določena tudi aktualna vektorja  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$ , eden v smeri  $\mathbf{r}$  in drugi v nasprotni smeri. Obhodni čas po elipsi z velikim polmerom  $a = a_1 + a_2$  tako znaša

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{k(m_1 + m_2)}. \quad (34.52)$$

Masa zvezd Pri mnogih zvezdah opazimo, da se gibljejo druga okrog druge in se preko daljšega časovnega obdobja, recimo stoletja, vrnejo v začetno lego. To so *dvojne zvezde*. Če merimo in rišemo relativno lego "druge" (temnejše) zvezde glede na "prvo" (svetlejšo), dobimo elipso, njen veliki kotni premer in njen obhodni čas.



**Slika 34.15** Relativno gibanje dvozvezdja. Prikazana je lega temne zvezde Sirij B glede na svetlo zvezdo Sirij A. Hodograf je elipsa. Svetla zvezda ni v gorišču elipse, kar je znak, da je ta nagnjena. (Sol Company)

Če predpostavimo, da leži ravnina elipse pravokotno na našo smer gledanja, postopamo takole. — S paralakso ali kako drugače izmerimo oddaljenost dvozvezdja in iz kotnega premera elipse izračunamo njen dolžinski premer. — Iz znanega obhodnega časa in velikega polmera izračunamo  $m_1 + m_2$ . — V elipsi določimo lego gorišča in s tem razmerje polmerov  $a_1/a_2$ , ki je enako



$m_2/m_1$ . — Iz znane vsote in razmerja mas izračunamo posamezni masi. Tako merimo maso zvezd.

Kako vemo, da je elipsa res pravokotna? Tako, da je primarna zvezda v njenem gorišču in da velja zakon o enakih ploščinah. Če to ne drži, je elipsa nagnjena. Vidimo samo njeno projekcijo na zvezdno ozadje. Domnevamo, da se da pravo elipso rekonstruirati iz njene projekcije, vendar pričakujemo težko delo in se ga ne bomo lotili. □



## 35 Relativnost

Svetloba in eter - Merjenje etrskega vetra - Postulati relativnosti - Inercialni opazovalni sistemi - Transformacija časa in prostora - Relativnost časa in prostora - Transformacija hitrosti - Frekvenčni zamik svetlobe - Merjenje hitrosti zvezd - Gibalna količina - Sile in gibanje - Polna in lastna energija - Transformacija G in E - Gibalna količina svetlobe - Merjenje svetlobnega tlaka - Je vse to res?

### 35.1 Svetloba in eter

Gibanje teles opazujemo z očmi, to je, informacijo o njih nam prinaša svetloba.

Gibanje svetlobe po etru

Svetloba je valovanje, zato predpostavimo, da potuje po nečem, po *etru*. Hitrost svetlobe smo že izmerili z zobatim kolesom in z odbojnim zrcalom [27.1] in znaša  $c = 3,00 \cdot 10^5$  km/s. Meritve ob različnih časih, krajih in smereh dajo enak rezultat v okviru merske natančnosti na nekaj odstotkov.

Domnevamo, da je gibanje svetlobe po etru podobno gibanju zvoka po zraku. Zvočni valovi se gibljejo s hitrostjo  $c = 330$  m/s glede na zrak, neodvisno od hitrosti izvora glede na zrak. Opazovalec, ki glede na zrak miruje, takšno hitrost tudi izmeri. Če pa se opazovalec giblje glede na zrak s hitrostjo  $u$ , izmeri hitrost zvoka glede nase  $c \pm u$ , odvisno od tega, ali se giblje proč (-) ali proti (+) valovanju. Isti odnos velja, če izvor in sprejemnik zvoka medsebojno mirujeta, a zrak se - kot veter - giblje med njima s hitrostjo  $u$ .

Gibanje opazovalca po etru

Predstavljamo si, da vesoljski eter "miruje", po njem križarijo svetlobni valovi in skozenj plujejo nebesna telesa z različnimi hitrostmi glede nanj. Eter mora biti tako fin, da telesa ne čutijo nobenega upora. Svetloba se glede na eter giblje vedno z enako hitrostjo. Opazovalec na Zemlji, ki se giblje skozi eter, pa bi moral zaznati povečano ali zmanjšano hitrost svetlobe, kakor se pač giblje. Pričakujemo spremembe, ki so vsekakor manjše od nekaj odstotkov. Zemlja se giblje glede na eter s hitrostjo vsaj 30 km/s (takšna je njena obhodna hitrost okrog Sonca). Pričakovane spremembe v hitrosti svetlobe so zato vsaj  $\pm 30/3 \cdot 10^5 = \pm 0,01$  %. Hočemo jih izmeriti. To pomeni, da moramo meriti z natančnostjo vsaj 0,001 %!

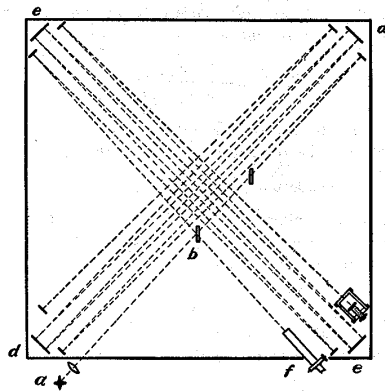
### 35.2 Merjenje etrskega vetra

Križni interferometer

Osnovna zamisel meritve je naslednja. Iz žarnice sevamo enobarven curek svetlobe in ga s polprepustnim zrcalom razcepimo na dva delna curka, ki sta medsebojno pravokotna. Ta dva curka spustimo preko dveh krakov in ju z zrcali spet združimo v smeri, kjer ju opazujemo z daljnogledom. To je *križni interferometer*. Število svetlobnih valov vzdolž obeh razdalj v

splošnem ni enako in je odvisno od razlike dolžin krakov ter od razlike hitrosti svetlobe v njih. Če bi bil izhodni curek popolnoma vzporeden, bi bilo vidno polje enakomerno osvetljeno ter bolj ali manj svetlo. Toda curek vsebuje tudi valovanje z nekoliko drugačnimi nagibi, zato se pojavijo v sredini vidnega polja interferenčni kolobarji.

Pri premikanju enega izmed zrcal opazimo, da v središču vidnega polja nastajajo ali izginevajo kolobarji, odvisno v katero smer premikamo. Nov kolobar nastane ali izgine, če premaknemo zrcalo za razdaljo  $d = \lambda/2$ , ker se pri tem spremeni število valov za 1. Nastanek novega kolobarja spremlja premik vsakega starega kolobarja za medkolobarsko razdaljo. Saj se izhodni curek pri skrajšanju oziroma podaljšanju delnega curka za eno valovno dolžino nič ne spremeni in zato se tudi interferenčna slika ne sme. Premik  $\delta r$  kolobarja kot deleža medkolobarske razdalje  $\Delta r$  je torej enak zamiku  $\delta \lambda$  delnih valov kot deležu valovne dolžine  $\lambda$ :  $\delta r / \Delta r = \delta \lambda / \lambda$ .



**Slika 35.1** Interferometer z dvema krakoma. Pot žarkov je podaljšana z večkratnimi odbojnimi zrcali. Interferometer služi za merjenje razlike med hitrostjo svetlobe vzdolž in prečno na smer gibanja Zemlje okoli Sonca. (Michelson, 1927)

Merjenje etrskega vetra

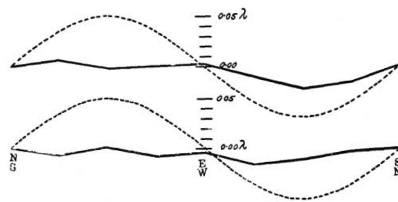
V interferometru postavimo oba kraka na enako dolžino  $L$ . Privzemimo, da se en krak (vzdolžni) giblje čelno proti etru, drugi (prečni) pa pravokotno nanj, oba s hitrostjo  $u$  relativno na eter. Preletni čas  $t_1$  svetlobe po vzdolžnem kraku, tja in nazaj, znaša  $t_1 = L/(c + u) + L/(c - u) = (2L/c)/(1 - u^2/c^2)$ . V preletnem času  $t_2$  po prečnem kraku pa se premakne polprepustno zrcalo za bazo  $ut_2$ , zato prepotuje svetloba dve stranici enakokrakega trikotnika nad to bazo; višina trikotnika je  $L$  in dolžina stranice  $ct_2$ . S pomočjo hipotenuznega izreka izračunamo  $t_2 = (2L/c)/(\sqrt{1 - u^2/c^2})$ . Preletna časa nista enaka. Vzdolžni je daljši. Njuna razlika znaša  $\delta t = (L/c)(u^2/c^2)$ . Pri računu smo aproksimirali koren z binomskim razvojem.

Razliko preletnih časov delimo z nihajnim časom, pri čemer upoštevamo  $ct_0 = c/v = \lambda$ , pa dobimo  $\delta t/t_0 = L \lambda u^2/c^2$ . Časovni zamik vala je sorazmeren z dolžinskim zamikom vala  $\delta t/t_0 = \delta \lambda/\lambda$ , ki pa je, kot smo že ugotovili, sorazmeren s premikom interferenčnih kolobarjev:  $\delta \lambda/\lambda = \delta r/\Delta r$ . S premikom  $\delta r$  je torej enolično določena hitrost  $u$ .

Žal ne vemo, v katero smer moramo usmeriti interferometer, da bo en krak kazal čelno proti etrskemu vetru. (Domnevamo, da proti vzhodu, če merimo opoldne.) Lahko ga pa vrtimo. Pri tem se razlika preletnih časov spreminja in z njo se spreminja zamik izbranega kolobarja glede na njegovo izhodiščno lego. Maksimum in minimum zamika kažeta smer hitrosti etra. Polovična razlika med njima,  $\delta r$ , pa določa velikost hitrosti. Morebitna razlika v dolžini krakov se pri vrtenju izniči.

Veliko truda za "nič"

Da bo meritev dovolj natančna, je potrebno še nekaj domiselnih prijemov. — Eno izmed zrcal nekoliko zasukamo, da se namesto kolobarjev v daljnogledu pojavijo interferenčne proge. Njim je lažje meriti premike kot kolobarjem. — Dolžino svetlobne poti povečamo z več odbojnimi zrcali. — Tresenje okolice omilimo tako, da interferometer postavimo na težek kamen, ki plava na živem srebru. — Namesto da vrtimo interferometer, raje to delo prepustimo kar rotaciji Zemlje. — Seveda se lahko zgodi, da v trenutku merjenja Zemlja res miruje glede na eter, s čimer rotacija interferometra ne bi nič pokazala. Temu odpomoremo tako, da meritev ponovimo čez pol leta. Dober interferometer in skrbne meritve bi morale tako zaznati 0,001 % spremembe v hitrosti svetlobe oziroma hitrosti etrskega vetra nad nekaj kilometri na sekundo.



**Slika 35.2** Pričakovane (prekinjena črta) in izmerjene (polna črta) spremembe hitrosti. Na navpični osi so premiki črt. Na vodoravni osi so dnevi meritev: opoldne (zgoraj) in zvečer (spodaj). Pričakovane vrednosti so narisane 8-krat pomanjšano. (Michelson, 1927)

Rezultati poskusa, tako skrbno zamišljenega in izvedenega (MICHELSON), nas osupnejo. Etrskega vetra, torej tudi etra, nikakor ne moremo zaznati!

### 35.3 Postulati relativnosti

Zakaj ni etrskega vetra? Razlaga, da morda Zemlja vleče eter s seboj, se zdi precej za lase privlečena in izumljena zgolj zato, da bi odpravila nepričakovano težavo. Razliko v preletnih časih bi lahko tudi izničili, tako da bi rekli, da se vzdolžni krak ustrezno skrajša pri gibanju skozi eter. Tudi ta razlaga je dvomljiva. Kako naj bi eter to dosegel, ko pa plujejo telesa skozenj brez upora, si je težko zamisliti.

Stalnost svetlobne hitrosti

Ponuja pa se naslednja nadvse presenetljiva možnost: etra pač ni. Svetloba potuje kar po praznem prostoru. Njena hitrost je neodvisna od gibanja izvora in opazovalca:

$$c' = c. \tag{35.1}$$

Kakor hitro že tečemo v smeri svetlobe, vedno se odmika z enako hitrostjo glede na nas. Kakor hitro že tečemo proti svetlobi, vedno se primika z enako hitrostjo glede na nas. Svetlobi iz približujoče se zvezde izmerimo enako hitrost kot svetlobi iz oddaljujoče se zvezde. To se upira celotni (doseđanji) človeški izkušnji, ampak naravi za to ni mar. Povzdignimo torej možnost o *stalnosti svetlobne hitrosti* v postulat in se namenimo ugotoviti posledice! Na pol za šalo lahko rečemo, da smo se problema znebili tako, da smo ga spremenili v postulat.

Enakopravnost  
inercialnih sistemov

Kje začeti? Stalnost svetlobne hitrosti se nikakor ne pokorava pravilu o sestavljanju hitrosti, ki v vsakdanjem življenju tako na široko velja. Omenjeno pravilo sledi iz znanih transformacijskih enačb za lego teles in za čas dogodkov v dveh inercialnih sistemih (19.7-8):  $x' = x - ut$  in  $t' = t$ . To pomeni, da te transformacije niso pravilne, ko imamo opravka z velikimi hitrostmi. Treba jim bo razširiti območje veljave. Za to pa bo potreben vnovičen premislek o merjenju časa in razdalj ter o sedlanju iz enega opazovalnega sistema v drugega. Kakšen je svet pri velikih hitrostih, bomo morali razbrati iz pridelanih enačb, saj neposrednih izkušenj s tem (še) nimamo.

Pri postavljanju transformacijskih enačb se bomo naslonili na inercialne sisteme, to je take, v katerih telesa ne doživljajo pospeškov, ki ne izhajajo iz okolišnjih teles. Dober primer je vlak na ravnem tiru. Dokler vozi "enakomerno", v njem ni pospeškov razen težnega, seveda. Ko pa zavija v ovinek ali se ustavlja na postaji, vozi "pospešeno". Vsak pospešek dobro čutimo. Telesa v inercialnem sistemu se torej gibljejo - glede na sistem - premo in enakomerno, razen če nanje delujejo dejanske sile. Če je en sistem inercialen, je inercialen tudi vsak drug sistem, ki se glede na prvega premo in enakomerno giblje. V vsakem inercialnem sistemu potekajo gibalni pojavi enako. V vlaku z zaprtimi okni nikakor ne moremo z metanjem kroglic reči, ali vlak miruje glede na tir ali se "enakomerno" giblje. To posplošimo v postulat: v vseh inercialnih sistemih imajo zakoni narave enako obliko.

### 35.4 Inercialni opazovalni sistemi

Merjenje časa

Sedim na železniški postaji in mimo pripelje vlak. Pogledam na stensko uro: urni kazalec vidim, recimo, na 7 h. Rečem, da je vlak pripeljal na postajo ob času 7 h po stenski uri. Prihod vlaka na postajo in prihod kazalca na številko 7 h sem videl istočasno. Zgodila pa sta se na istem mestu, namreč na železniški postaji. Rekel bom, da sta ta dva dogodka *čutno sočasna*.

Skozi daljnogled opazujem Jupiter. Nenadoma se na njem pojavi, recimo, nekakšna eksplozija. Pogledam na stensko uro: kazalec vidim, na primer, na 7 h. Rečem, da je eksplozija nastala ob 7 h po stenski uri. (Oddaljeno) eksplozijo in (lokalni) pomik kazalca na

številko 7 h sem videl istočasno. Zgodila sta se pa na različnih mestih. Tudi za ta dva dogodka bom rekel, da sta čutno sočasna.

Vem, da svetloba potuje od Jupitra do Zemlje slabo uro. Zato rečem, da se je eksplozija zgodila ob času  $7\text{ h} - 1\text{ h} = 6\text{ h}$  po stenski uri, čeravno je takrat na Jupitru seveda nisem videl.

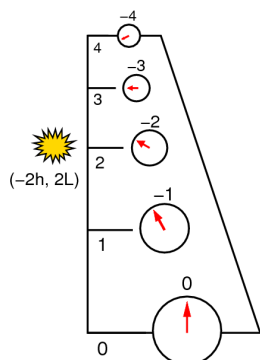
Če bi bila na Jupitru ura in če bi na njej - z namišljenim superdaljnogledom - videl 6 h ob eksploziji, bi lahko takoj rekel, da se je eksplozija zgodila ob 6 h po Jupitrovi uri. Ne bi mi bilo treba upoštevati niti stenske ure niti preletnega časa svetlobe. Seveda bi takrat, ko bi na oddaljenem Jupitru videl 6 h (in eksplozijo), na lokalni stenski uri videl 7 h.

Opazovalni sistem

Povedano lahko posplošimo. Na svet pogledamo kot na množico dogodkov. Vsak dogodek, recimo eksplozija na Jupitru, ima svojo lego in svoj čas. Oboje je določeno z ozirom na izbrani opazovalni sistem. *Opazovalni sistem*, to je namišljena toga kockasta rešetka iz palic. Razdalje med sosednjimi oglišči so enake in izmerjene s polaganjem metrske palice. V vsakem oglišču je tabla s tremi številkami, ki pomenijo razdalje od izbranega izhodiščnega oglišča. V vsakem oglišču je tudi ura, ki je sinhronizirana z izhodiščno uro na način, kakor smo ga opisali za Zemljo in Jupiter.

*Sinhronizacija ur* lahko izvedemo na več načinov. — Najbolj preprosto je, da v izhodišču zberemo in sinhroniziramo množico ur, nakar jih počasi razvozimo v vsa oglišča sistema. — Lahko tudi iz izhodišča pošljemo blisk svetlobe ob lokalnem času  $t_0$  v točko A. Tam se odbije ob lokalnem času  $t_A$  (ki ga moramo še določiti) in se vrne v izhodišče ob lokalnem času  $t_1$ . Definiramo  $t_A = (t_1 - t_0)/2$ . Ko se torej odbiti blisk vrne v izhodišče ob času  $t_1$ , "nosi s seboj" sliko oddaljene ure, ki kaže  $t_A$ . Če je, na primer,  $t_0 = 0\text{ h}$ ,  $t_1 = 2\text{ h}$ , potem  $t_A = 1\text{ h}$ . — Ali pa v vsako oglišče namestimo uro in njen kazalec postavimo na vrednost  $t_0 + r/c$ , pri čemer je  $t_0$  poljubna vrednost, recimo  $0\text{ h}$ , in  $r$  razdalja od izhodišča. Ure ne sprožimo. Ko razmestimo vse ure, se vrnemo v izhodišče, postavimo izhodiščno uro na  $t_0$ , jo sprožimo in istočasno pošljemo svetlobni signal v vse smeri. Ko signal doseže kako uro, jo sproži, recimo preko fotocelice.

Kakorkoli že, s tem so vse ure sinhronizirane. Opazovalec, ki sedi v kateremkoli oglišču rešetke, vidi okoli sebe množico ur. Čim bolj so oddaljene od njega, tem manjši čas vidi na njih. Ura, kjer opazovalec vidi za  $1\text{ h}$  manjši čas kot na lokalni uri, je od njega oddaljena za  $r = c \cdot 1\text{ h}$ . Nasploh je na uri, ki je oddaljena za  $r$ , viden čas  $t = t_0 - r/c$ , ko je na lokalni uri viden čas  $t_0$ .



**Slika 35.3** Pogled vzdolž (enodimenzionalnega) opazovalnega sistema. V enakomernih razdaljah so nameščene dolžinske table in sinhronizirane ure. Dogodek se zgodi ob neki tabli in uri. Z njima sta določeni časovna in prostorska koordinata dogodka.

Seveda opazovalnega sistema ne moremo zares postaviti v del sveta, ki ga preučujemo. Vendar pa hočemo, da bo naše nadaljnje razmišljanje o času in prostoru konsistentno s tem, da bi sistem v principu lahko bil prisoten.

Merjenja v sistemu

*Čas dogodka*, to je številka na njemu lokalni uri. Vsak opazovalec, v katerikoli točki opazovalnega sistema že sedi, vidi enak čas tega dogodka. Saj pride do njega svetloba od dogodka in od tamkajšnje ure vstric po isti poti.

*Lega dogodka*, to so tri številke na njemu lokalni tabli. Vsak opazovalec, v katerikoli točki opazovalnega sistema že sedi, vidi enako lego tega dogodka.

Lego in čas dogodka poimenujemo njegove *svetovne koordinate*. Tri od njih so krajevne in ena časovna.

V neki točki opazim eksplozijo A ob (tamkajšnjem) času  $t_A$ . Nekaj kasneje opazim v drugi točki še eno eksplozijo B, in sicer ob (tamkajšnjem) času  $t_B = t_A$ . Očitno se je druga eksplozija zgodila pri večji oddaljenosti. Oba dogodka, ki sta ločena v prostoru, a "razpošiljata" enak čas, poimenujem *sočasna dogodka*. Saj bi ju mirujoč opazovalec na sredi med njima videl kot čutno sočasna.

V neki točki na osi  $x$  nenadoma zagledamo vesoljsko ladjo. To je dogodek A. Na lokalni tabli in uri vidimo njegovo lego  $x_A$  in čas  $t_A$ . Nekaj kasneje vidimo ladjo v drugi točki na osi  $x$ . To je dogodek B. Na lokalni tabli vidimo njegovo lego  $x_B$  in čas  $t_B$ . Kakšna je *hitrost ladje*? Definiramo:

$$v = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \tag{35.2}$$

Vsak opazovalec, v katerikoli točki opazovalnega sistema že sedi, bi videl enake začetne in enake končne svetovne koordinate, zato bi izračunal enako hitrost ladje.

### 35.5 Transformacija časa in prostora

Dva opazovalna sistema

V "mirujočem" opazovalnem sistemu S se naj giblje "premični" opazovalni sistem S'. Koordinatne osi obeh sistemov naj bodo istosmerne in gibanje izhodišča S' naj poteka vzdolž osi  $x$  s hitrostjo  $u$ . Vsak sistem sestoji iz toge mreže in ur. Ko se izhodišči



obeh sistemov srečata, tamkajšnja opazovalca nastavita osrednji uri na 0 in nato sinhronizirata vsak svoje ure na že opisani način. Nenadoma se nekje v svetu pojavi eksplozija. Opazovalec v S jo vidi pri svojih koordinatah  $(t, x, y, z)$  in opazovalec v S' pri svojih koordinatah  $(t', x', y', z')$ . Kako so te koordinate med seboj povezane? Kakšna je torej *transformacija koordinat*?

Transformacije koordinat

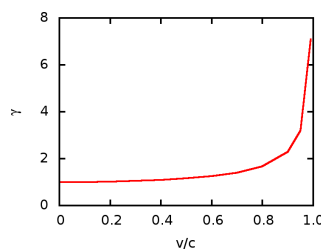
Predpostavimo, da ima iskana transformacija za koordinato  $x$  linearno obliko  $x' = \gamma(x - ut)$  z neznanim faktorjem  $\gamma$ . Izhodišče premičnega sistema ima koordinato  $x' = 0$ , kar pomeni, da se giblje kot  $x = ut$ , kakor tudi mora biti. Ker sta sistema enakopravna, mora imeti obratna transformacija enako obliko z nasprotnim predznakom hitrosti:  $x = \gamma(x' + ut')$ . Preostali dve koordinati sta na gibanje pravokotni, zato postavimo  $y' = y$  in  $z = z$ . Ko sta opazovalca vštric, eden izmed njiju izseva svetlobni signal v vse smeri. V vsakem sistemu ima signal obliko krogle:  $x = ct$  in  $x' = ct'$ . Vstavimo  $x$  v prvo transformacijsko enačbo in  $x'$  v drugo, pomnožimo leve in desne strani ter izvlčemo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (35.3)$$

Nato izrazimo  $x'$  iz prve transformacijske enačbe, ga vstavimo v drugo ter iz nje izrazimo  $t'$ . Tako dobimo *relativistično transformacijo* (EINSTEIN)

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - ux/c^2) \\ x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (35.4)$$

Obratne transformacijske enačbe dobimo, ko zamenjamo predznak pri  $u$  ter črtice pri koordinatah. Vpeljani faktor  $\gamma$  je odvisen od hitrosti. Pri majhnih hitrostih v primerjavi s svetlobo je enak 1, nato pa narašča. Pri majhnih hitrostih preidejo nove, relativistične transformacije v stare, klasične, kakor tudi mora biti.



**Slika 35.4** Odvisnost faktorja  $\gamma$  od hitrosti. Pri vsakdanjih hitrostih je faktor nerazločljiv od 1.

Transformacije intervalov

Dva dogodka A in B v sistemu S se v splošnem razlikujeta v času in kraju; njuno razlikovanje opišemo kot

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_B - t_A \\ \Delta x &= x_B - x_A. \end{aligned} \quad (35.5)$$

Transformacijske enačbe takoj povedo, kakšne so razlike v sistemu S':

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t).\end{aligned}\tag{35.6}$$

Očitno so časovne in prostorske razlike istih dveh dogodkov, kakor ju vidita opazovalca v S in S', različne. Kaj torej zapisane relativistične transformacije pravzaprav pomenijo? Kakšen je svet, ki ga opisujejo? Poglejmo nekaj posebnih primerov.

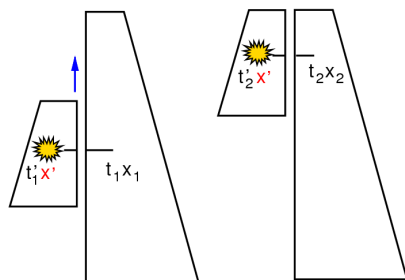
### 35.6 Relativnost časa in prostora

**Izguba sočasnosti** Recimo, da se v sistemu S zgodita dva dogodka istočasno, torej da imata enaki časovni koordinati  $t_B = t_A$ , to je, njuna razlika znaša  $\Delta t = 0$ . V sistemu S' zato velja  $\Delta t' = -\gamma u\Delta x/c^2$ , kar v splošnem ni nič. To pomeni, da dogodki, ki so sočasni v enem sistemu, niso nujno sočasni v drugem! To je *relativnost sočasnosti*.

**Podaljšanje časa** V sistemu S' naj se v točki  $x'_0$  nekaj dogaja, recimo prižge, gori in ugasne ogenj. Dogajanje se začne ob  $t'_1$  in konča ob  $t'_2$ , traja torej  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Ker  $\Delta x' = 0$ , velja  $\Delta t' = \gamma\Delta t$ . Označimo "mirujoče" trajanje z  $\Delta t_0$  in "gibajoče" trajanje z  $\Delta t$ , pa velja:

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0.\tag{35.7}$$

Gibajoče trajanje je daljše kot mirujoče! Namesto ognja si mislimo tiktakanje ure. Vsak tik-tak je podaljšan. Gibajoča se ura torej tiktaka počasneje od mirujoče ure. To je *podaljšanje časa* (EINSTEIN). Ker sta sistema enakovredna, vsak opazovalec vidi pri sosedu počasnejše ure kot pri sebi. Svoje ure pa vidi normalno.



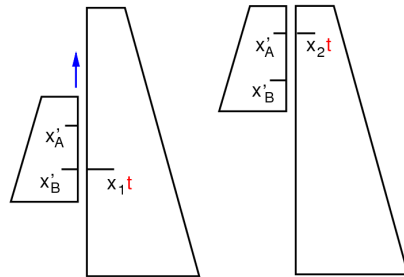
**Slika 35.5** Podaljšanje časa. Gibajoča se ura teče počasneje.

**Skrajšanje dolžin** V sistemu S' naj miruje palica. Njen zadnji konec je pri  $x_B'$  in sprednji pri  $x_A'$ . Njena dolžina je očitno  $\Delta x' = x_A' - x_B'$ . Opazovalec v S zazna dva dogodka. (1) Zadnji konec palice doseže točko  $x_B'$  ob času  $t$ . Sprednji konec palice je tedaj ob uri, ki kaže manj kot  $t$ . (2) Nekaj kasneje doseže prvi konec palice uro, ki kaže  $t$ ; ta ura leži pri  $x_A$ . Ker  $\Delta t = 0$ , velja  $\Delta x' = \gamma\Delta x$ . Označimo "mirujočo" palico z  $\Delta l_0$  in "gibajočo" z  $\Delta l$ , pa velja

$$\Delta l = \Delta l_0 / \gamma.\tag{35.8}$$

Gibajoča palica je krajša kot mirujoča! Namesto palice si mislimo kar razmik v koordinatni rešetki. Vsak razmik je skrajšan.

Gibajoči se sistem je torej stisnjen v smeri gibanja. To je *skrajšanje dolžin* (EINSTEIN). Ker sta sistema enakovredna, vsak opazovalec vidi pri sosedu bolj stisnjene rešetke kot pri sebi. Svoje rešetke pa vidi normalno.



**Slika 35.6** Skrajšanje dolžin. Gibajoča se telesa so skrajšana v smeri gibanja.

Je skrčenje palice "zaresno" ali "navidezno"? Skrčenje ni zaresno v smislu, da ga s palico vred gibajoči se opazovalec ne zazna. Je pa zaresno v smislu, da ga (v principu) zazna vsak drug opazovalec.

### 35.7 Transformacija hitrosti

Kakšne so hitrosti teles, opazovane iz različnih opazovalnih sistemov?

Količnik intervalov

Omejimo se najprej na dogodke vzdolž osi  $x$ . Delec naj se giblje med dvema dogodkoma. S krajevnim in časovnim intervalom v vsakem sistemu je podana tamkajšnja hitrost gibanja. Premik  $\Delta x' = \gamma(u)(\Delta x - u\Delta t)$  delimo s trajanjem  $\Delta t' = \gamma(u)(\Delta t - u\Delta x/c^2)$ , pokrajšamo  $\gamma$ , števec in imenovalc delimo z  $\Delta t$  ter upoštevamo  $\Delta x/\Delta t = v_x$  in  $\Delta x'/\Delta t' = v'_x$ . Tako dobimo

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}. \quad (35.9)$$

V treh razsežnostih, ko dogodki niso omejeni na os  $x$ , dobimo na podoben način še

$$v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - v_x u/c^2} \quad (35.10)$$

$$v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - v_x u/c^2}.$$

Zgornja meja hitrosti

To je *transformacija hitrosti* (EINSTEIN). Obratno transformacijo dobimo na že znani način - s spremembo predznaka hitrosti  $u$  ter s premeščanjem črtic. Pri majhnih hitrostih  $u \ll c$  preidejo enačbe v znano klasično obliko. Če postavimo  $v_x = c$ , dobimo  $v'_x = c$ , kakor tudi mora biti. Hitrost svetlobe je v vsakem sistemu stalna. Ni večje hitrosti od svetlobne.

### 35.8 Frekvenčni zamik svetlobe

V izhodišču S naj miruje svetilka, ki oddaja bliske s frekvenco  $\nu$ , recimo enega na uro. Kakšno frekvenco  $\nu'$  zaznava opazovalec v izhodišču S' po svoji lokalni uri?

Sprememba  
frekvence

Ko izhodišču obeh sistemov sovpadata, izseva svetilka prvi blisk. Tega vidita oba izhodiščna opazovalca, vsak na svoji lokalni uri, ob 0. Drugi blisk izseva svetilka, za opazovalca v izhodišču S po njegovi izhodiščni uri, ob  $t$ . Opazovalec v S' vidi ta blisk na uri, ki je sosednja izhodišču S, ob  $t' = \gamma t$ . Istočasno vidi na svoji lokalni uri  $t' + ut'/c$ . Za opazovalca v S je torej minil med dvema bliskoma čas  $t = 1/\nu$ , za opazovalca v S' pa  $t' + ut'/c = 1/\nu'$ . Velja torej:  $1/\nu' = \gamma t(1 + u/c)$ . Upoštevajoč  $\gamma = 1/\sqrt{(1-u/c)(1+u/c)}$  dobimo (EINSTEIN)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - u/c}}{\sqrt{1 + u/c}}. \quad (35.11)$$

Frekvenca bliskov, ki jo zazna oddaljujoči se opazovalec, je torej manjša. Če se opazovalec približuje, torej  $u \rightarrow -u$ , se pa frekvenca poveča. Vseeno je, ali se giblje izvor ali opazovalec, šteje le njuna medsebojna relativna hitrost. Kadar gibanje ne poteka po zveznici izvora in opazovalca, velja zapisano le za vzdolžno komponento hitrosti. Namesto bliskov svetlobe si mislimo kar svetlobo samo s svojimi hribi in dolinami. Potem velja zapisana enačba tudi za frekvenco svetlobe.

Sprememba valovne  
dolžine

Če upoštevamo  $c = \lambda\nu$ , velja tudi

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + u/c}}{\sqrt{1 - u/c}}. \quad (35.12)$$

Za majhne hitrosti velja približek  $\sqrt{1 \pm u/c} \approx 1 \pm u/2c$ . Števec in imenovalc pomnožimo s števcem, zanemarimo kvadratne člene in dobimo  $\lambda'/\lambda = 1 + u/c$  oziroma

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c}. \quad (35.13)$$

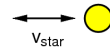
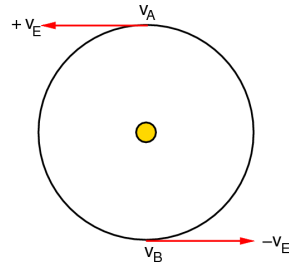
Valovno dolžino svetlobe, recimo diskretni spekter natrijeve pare, merimo s spektrometrom na mrežico. Črte gibajočega se izvora so premaknjene glede na črte mirujočega izvora. Govorimo o *rdečem premiku* ali *modrem premiku* črt. Ločljivost dobrega laboratorijskega spektrometra je okrog  $R = \lambda/\Delta\lambda \approx 6000$ , torej okrog  $1 \text{ \AA}$  pri vidni svetlobi. Tolikšen premik črte ustreza hitrosti izvora 50 km/s. Tako hitrih svetil v laboratoriju ne zmoremo ustvariti.

### 35.9 Merjenje hitrosti zvezd

Orbitiranje Zemlje

Pa saj se giblje Zemlja okrog Sonca z orbitalno hitrostjo  $v_E = 30 \text{ km/s}$ ! Spektri zvezd morajo biti zato ustrezno premaknjeni. Največji zamik pričakujemo od zvezd, ki ležijo na

ekliptiki v smeri ali v nasprotni smeri Zemljinega gibanja. Če zvezda miruje glede na Sonce, pričakujemo dvakrat letno njen spektralni zamik, ki ustreza Zemljini orbitalni hitrosti: enkrat rdečega in enkrat modrega. Če se zvezda giblje glede na Sonce, pa bo vsaj eden od odmikov še večji.



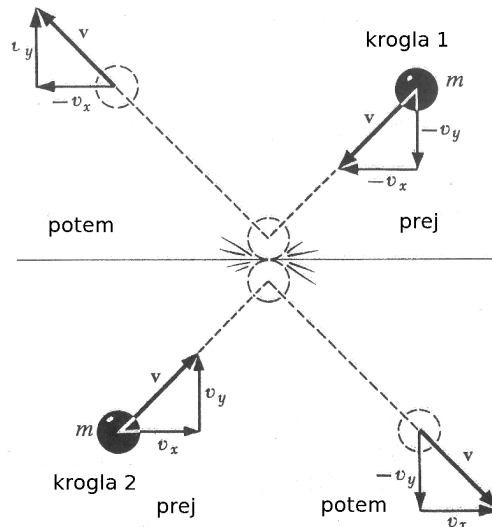
**Slika 35.7** Hitrost zvezde. Ko se Zemlja približuje zvezdi, zaznamo modri premik njenih spektralnih črt. Ko se odmika, zaznamo rdeči premik. Z obema premikoma sta določeni hitrost zvezde in hitrost Zemlje glede na Sonce.

- Merilna metoda** Slika pove naslednje. V točkah A in B, pol leta narazen, znaša hitrost Zemlje  $v_A = v_{\text{star}} + v_E$  in  $v_B = v_{\text{star}} - v_E$ . Enačbi medsebojno enkrat seštejemo in enkrat odštejemo, pa dobimo  $v_E = (v_A - v_B)/2$  in  $v_{\text{star}} = (v_A + v_B)/2$ . Hitrosti  $v_A$  in  $v_B$  sta določeni z izmerjenima frekvenčnima premikoma. S tem sta določeni tudi orbitalna hitrost  $v_E$  in (radialna) hitrost zvezde  $v_{\text{star}}$ .
- Vzorčni izmerki** Primerna zvezda za opazovanje je svetli Arktur, ki je po spektru zelo podoben Soncu. Arktur sicer ne leži točno na ekliptiki, vendar nam gre le za oceno in nagib zanemarimo. Opazovanje spektra okrog valovnih dolžin  $4300 \text{ \AA}$  z natančnostjo okrog  $0,1 \text{ \AA}$  pokaže spektralna zamika, ki ustrežata  $v_A = 40 \text{ km/s}$  in  $v_B = -30 \text{ km/s}$ , kar pomeni  $v_E = 35 \text{ km/s}$  in  $v_{\text{star}} = 5 \text{ km/s}$ . S spektroskopskim merjenjem smo torej določili orbitalno hitrost Zemlje na 20 % natančno. To nam daje zaupanje, da je tudi izmerjena (radialna) hitrost Arkturja pravilna v okviru navedene natančnosti. Meritve drugih svetlih zvezd v paralaktični oddaljenosti do nekaj deset svetlobnih let pokažejo podobne hitrosti. Največje hitrosti dosegajo  $100 \text{ km/s}$ .

### 35.10 Gibalna količina

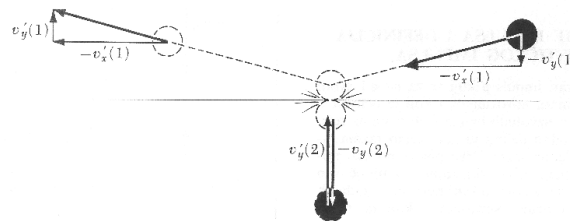
Gibalno količino delca smo definirali kot  $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ . Kadar ni zunanjih sil, se gibalna količina sistema delcev ohranja. Ker so se pa spremenile transformacijske enačbe za hitrost, se pojavi vprašanje, kaj je z ohranitvijo gibalne količine, opazovane v različnih sistemih.

- Elastični trk** Preučimo elastični trk dveh enakih delcev. Opazovalni sistem S postavimo tako, da se delca približujeta eden proti drugemu z nasprotno enakima hitrostima  $v$ . To je *težiščni sistem*. Delec 1 ima v njem pred trkom hitrost  $(-v_x, -v_y)$  in po trku  $(-v_x, +v_y)$ , delec 2 pa pred trkom  $(v_x, v_y)$  in po njem  $(v_x, -v_y)$ . Sprememba gibalne količine v vsaki koordinatni smeri je torej enaka nič.



**Slika 35.8** Trk delcev, opazovan v "mirujočem" težiščnem sistemu. (Berkeley Physics Course, hrvaški prevod)

Kako pa je videti trk v sistemu  $S'$ , ki se glede na  $S$  giblje s hitrostjo  $u = v_x$ ? V tem sistemu ima delec 1 pred trkom hitrost  $(-v_{1x}', -v_{1y}')$  in po njem  $(-v_{1x}', +v_{1y}')$ , delec 2 pa  $(0, v_{2y}')$  in  $(0, -v_{2y}')$ . Transformacijske enačbe za hitrosti povedo:  $-v_{1x}' = -2v_x/(1 + v_x^2/c^2)$ ;  $v_{1y}' = v_y/(1 + v_x^2/c^2)\gamma(v_x)$ ;  $v_{2x}' = 0$ ; in  $v_{2y}' = v_y\gamma(v_x)$ .



**Slika 35.9** Trk delcev, opazovan v v gibajočem se sistemu. Z njim sta definirana gibalna količina in gibalni zakon za hitra telesa. (Berkeley Physics Course, hrvaški prevod)

Očitno je, da  $y$ -komponente hitrosti v  $S'$  niso enake, čeravno so enake v  $S$ . To pa zato, ker v  $S$  niso enake  $x$ -komponente hitrosti, ampak imajo nasprotna predznaka. Vidimo torej, da klasična definicija gibalne količine ne zagotavlja njene ohranitve v vseh opazovalnih sistemih. Ohranitev gibalne količine pa je preveč pomembna, da bi se ji zlahka odrekli. Zato poskusimo spremeniti njeno definicijo tako, da bo pri nizkih hitrostih prešla v staro, in da bo pri vseh hitrostih ostal ohranitveni zakon v veljavi.

Nova gibalna količina

Nova definicija mora biti taka, da  $y$ -komponenta gibalne količine ni odvisna od  $x$ -komponente hitrosti opazovalnega sistema, v katerem opazujemo trk. Vemo, da se pri sedlanju iz enega sistema v drugega ne spreminja razmik  $\Delta y$ . Vendar pa je čas  $\Delta t$ , potreben za prelet  $\Delta y$ , odvisen od sistema, in zato je taka tudi

komponenta  $v_y = \Delta y / \Delta t$ . Namesto na laboratorijsko uro, ki meri  $\Delta t$ , pogledamo na uro, ki jo nosi delec sam. Ta ura meri lastni čas delca  $\Delta \tau$ . Vsi opazovalci se strinjajo o vrednosti tega časa, pa je zato  $\Delta y / \Delta \tau$  enak v vseh sistemih. Ker  $\Delta \tau = \Delta t / \gamma$ , velja  $\Delta y / \Delta \tau = \Delta y / \Delta t \cdot \Delta t / \Delta \tau = (\Delta y / \Delta t) \gamma$ . Torej bo  $y$ -komponenta od  $\gamma \mathbf{v}$  enaka v vseh sistemih. Zato definiramo

$$\mathbf{G} = m\gamma(v)\mathbf{v}. \quad (35.14)$$

To je razširjena definicija dosedanje gibalne količine (EINSTEIN). Če so hitrosti majhne, preide v staro definicijo.

### 35.11 Sile in gibanje

Nov gibalni zakon

Gibalni zakon za masni delec smo do sedaj pisali kot  $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$ . Ker je masa konstantna, velja tudi zapis  $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ . Nanj lahko pogledamo kot na definicijo sile preko spremembe (stare) gibalne količine. Slednja se, kot smo videli, ne ohranja. Zato ne premišljamo kaj dosti in raje definiramo silo, torej vpliv okolice na delec, preko spremembe nove gibalne količine:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (35.15)$$

To je relativistični gibalni zakon (EINSTEIN). Pri majhnih hitrostih preide v klasičnega.

Stalna sila

Če na delec ne deluje nobena sila (ali je vsota sil nanj enaka nič), se mu ohranja gibalna količina, to je, delec se giblje premo in enakomerno. Kako pa se delec giblje pod vplivom stalne sile? Gibalni zakon zapišemo v obliki  $\gamma(v)\mathbf{v} = Ft/m$  in izvlečemo hitrost:

$$v = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}. \quad (35.16)$$

Spočetka narašča hitrost sorazmerno s časom:  $v = (F/m)t$ , kakor tudi mora biti. Kasneje pa hitrost narašča čedalje počasneje in se bliža hitrosti svetlobe. Snovna telesa zato ne morejo doseči svetlobne hitrosti. Pot, ki jo opravi telo, dobimo iz integrala  $s = \int v dt$ :

$$s = \frac{c^2}{F/m} (\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1). \quad (35.17)$$

Razvoj v binomsko vrsto pove, da za začetne čase velja  $s = (F/m)t^2/2$ , kar je tudi prav.

Kako jo spoznamo

Kako pa vemo, da je kakšna sila konstantna? Tako, da se telo pod njenim vplivom giblje na pravkar izračunani način! In katera sila v naravi naj bi bila takšna? Gravitacija v bližini Zemlje ali Sonca je sicer homogena, a mnogo prešibka. Morda električna sila na lahko nabito telo v zaporedno zvezanih kondenzatorjih? Ali pa namišljena vesoljska ladja, katere izpuh je prilagojen tako, da med izgubljanjem mase velja  $F/m = \text{const}$ ? Kot vidimo, se da

računsko zatrditi marsikaj, česar v naravi morda sploh ni mogoče najti.

### 35.12 Polna in lastna energija

Kinetična energija

Sila  $F$  naj pospešuje delec vzdolž osi  $x$  od začetne hitrosti  $u = 0$  do končne hitrosti  $u = v$ . Hočemo, da je dovedeno delo enako spremembi kinetične energije:  $K = \int F \cdot dx$ . Silo izrazimo kot spremembo (relativistične) gibalne količine v času:  $\int F \cdot dx = \int dG/dt \cdot dx = \int_0^v u \, dG$ . Integral najprej preoblikujemo po delih v obliko  $G \cdot u - \int G \, du$ , vstavimo izraz za gibalno količino  $G = \gamma(u)mu$  in rešimo preostali integral s spremembo diferenciala  $u \cdot du \rightarrow d(1 - u^2/c^2)$ . Ta integral znamo izračunati in dobimo

$$K = (\gamma(v) - 1)mc^2. \quad (35.18)$$

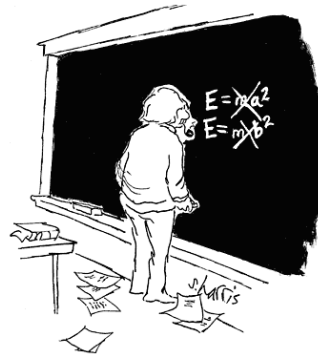
Če razvijemo  $\gamma$  po binomskem izreku, vidimo  $K = \frac{1}{2}mv^2 + \dots$ . Pri majhnih hitrostih je torej relativistična kinetična energija enaka klasični, sicer pa je večja. Lepo je videti, kako vse dobljene enačbe prehajajo v klasične.

Polna in lastna energija

Izraz za kinetično energijo lahko zapišemo takole:  $\gamma(v)mc^2 = K + mc^2$ . Prvi člen poimenujemo *polna energija* in je vsota kinetične energije in *mirovne energije* (EINSTEIN):

$$\begin{aligned} E &= K + mc^2 \\ E &= \gamma(v) mc^2 \end{aligned} \quad (35.18)$$

Če ni zunanjih sil, recimo pri izoliranem trku dveh teles, se (poleg gibalne količine) ohranja polna energija, to je vsota obeh omenjenih energij. Ni treba, da se ohranjata kinetična energija in mirovna energija vsaka zase.



**Slika 35.10** Odkritje slavne enačbe o ekvivalenci mase in energije. (Harris, S.)

Ekvivalenca mase in energije

Naj telo miruje v opazovalnem sistemu. Potem nima kinetične energije in velja  $E = mc^2$ . Če telo seva in s tem izgubi energijo  $\Delta E$ , se mu masa zmanjša za  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Pri tem ni bistveno, da odvzeta energija postane energija sevanja. Iz tega sklepamo, da masa telesa meri energijo, ki jo telo vsebuje. Drugemu telesu, ki svetlobo absorbira, pa se poveča energija in s tem masa. Svetloba takorekoč prenaša maso iz sevalcev na absorbente.

Kolikšna energija se skriva v 1 g snovi? Strahotnih  $10^5$  GJ; toliko v enem dnevu proizvede največja hidroelektrarna, kar smo jih



doslej zgradili. — Koliko mase izgublja Sonce s sevanjem? Nepredstavljenih  $10^{14}$  ton v enem letu, kar je približno masa kamnite kocke s stranico 200 km. Vendar je to zgolj nezaznavnih  $10^{-14}$  celotne mase. — Koliko mase pa pridobi kos železa, če ga segrejemo od 300 K na 500 K? Nezaznavnih  $10^{-12}$  začetne mase.

Energijska invarianta

Definicijsko enačbi za polno energijo in definicijsko enačbo za gibalno količino kvadriramo in drugo odštejemo od prve, pazеč na enote. Ugotovimo (EINSTEIN)

$$E^2 - (cG)^2 = (mc^2)^2. \quad (35.20)$$

Desna stran ni odvisna od izbire koordinatnega sistema, saj sta  $c$  in  $m$  konstanti. To pomeni, da je leva stran enačbe enaka v vsakem opazovalnem sistemu, da je *energijska invarianta*.

### 35.13 Transformacija G in E

Transformacija gibalne količine in energije

Definicijo gibalne količine  $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$  lahko zapišemo v obliki  $\mathbf{G} = m\mathbf{dr}/d\tau$ . To pomeni, da se gibalna količina transformira tako kot krajevni vektor, saj sta masa in lastni čas invarianti. Transformacijo  $x' = \gamma(x - ut)$  pomnožimo z maso in odvajamo na lastni čas, upoštevajoč  $mdt/d\tau = m\gamma = E/c^2$ , pa dobimo

$$G_x' = \gamma(G_x - uE/c^2). \quad (35.21)$$

Preostali dve transformaciji sta  $G_y' = G_y$  in  $G_z' = G_z$ . Podobno obdelamo transformacijo  $t' = \gamma(t - ux/c^2)$ . Množimo jo z  $m$ , odvajamo na  $\tau$  ter pridemo

$$E' = \gamma(E - uG_x). \quad (35.22)$$

To so *transformacije gibalne količine* (EINSTEIN).

Transformacijske enačbe smo izpeljali za posamičen delec, veljajo pa seveda tudi za celetno gibalno količino in energijo sistema delcev. Enake transformacijske enačbe kot za  $G$  in  $E$  veljajo tudi za spremembe  $\Delta G$  in  $\Delta E$ :

$$\begin{aligned} \Delta G_x' &= \gamma(\Delta G_x - u\Delta E/c^2) \\ \Delta E' &= \gamma(\Delta E - u\Delta G_x). \end{aligned} \quad (35.23)$$

Prepletenost gibalne količine in energije

Izolirani sistem delcev v  $S$  ima  $\Delta G = 0$ . Da bo tudi v  $S'$  veljalo  $\Delta G' = 0$ , mora veljati še  $\Delta E = 0$ . To je: ohranitev gibalne količine velja v obeh sistemih le v primeru, ko v prvem sistemu velja še ohranitev energije. Podobno je z ohranitvijo energije: če  $\Delta E = 0$ , potem bo  $\Delta E' = 0$  le v primeru, ko  $\Delta G = 0$ . Ohranitev energije velja v obeh sistemih le, če v prvem sistemu velja še ohranitev gibalne količine.

To je nekaj novega. Gibalna količina in energija sta medsebojno povezani količini. Ohranitvena zakona za gibalno količino in energijo torej nista več neodvisna, ampak imamo opravka z enim samim zakonom - ohranitvijo  $G$  in  $E$ . Saj se obe količini pri sedlanju iz enega inercialnega sistema v drugega "pretvarjata" druga v drugo.

Neelastični trk in masni presežek

Dober zgled je neelastični trk. Naj se dva enaka delca bližata drug drugemu z enakima hitrostima, trčita in obtičita skupaj. Pri tem naj v okolico ne oddata nič energije, recimo s svetlobo. Ohranitev gibalne količine pove  $m\gamma(v)v - m\gamma(v)v = M\gamma(V)V$ . Iz tega sklepamo, da  $V = 0$ . Ohranitev energije pa pravi  $mc^2\gamma(v) + mc^2\gamma(v) = Mc^2\gamma(V) = Mc^2$ . Tako ugotovimo  $M = 2m\gamma(v)$ . Masa skupka je večja od vsote izvornih mas. Izgubljena kinetična energija se pojavi kot mirovna energija (masa). Masa skupka torej zajema notranjo kinetično in potencialno energijo sestavin. Za mase teles pa ohranitveni zakon ne velja več.

### 35.14 Gibalna količina svetlobe

Če sta energija in gibalna količina delcev med seboj povezani količini, mar ne velja to tudi za svetlobo? Svetloba vendarle nosi s seboj energijo; ali morda nosi tudi gibalno količino?

Gibalna količina bliska

Predstavljajmo si zaprt vagon na kolesih. Njegova dolžina je  $L$  in masa  $M$ . Iz leve stene naj svetilka izseva blisk svetlobe proti desni steni, kjer se absorbira. Najprej je bilo nekaj energije  $E$  na levi steni, potem pa na desni. Energija se je premaknila za dolžino vagona. Vendar: energija ima maso  $E/c^2$ . Če bi bil pri premiku energije vagon pri miru, bi se premaknilo njegovo težišče. Ni nam všeč, da bi se težišče vagona premaknilo zgolj zaradi dogajanja v njegovi notranjosti. Zato zahtevamo, da težišče ostane pri miru, to je, da se vagon premakne za  $x$  v levo. Veljati mora torej (1)  $Mx = (E/c^2)L$ .

Kaj je premaknilo voz v levo? Ob izsevu svetlobe je moral nanj delovati odriv z gibalno količino  $G$ . Vagon je pri tem dobil odzivno hitrost (2)  $v = G/M$ . S to hitrostjo se je gibal kratek čas (3)  $t = L/c$ , dokler svetloba ni dosegla druge stene, nakar se je ustavil. Velja  $x = vt$ . Vstavimo  $v$  iz (2) in  $t$  iz (3) ter dobljeno vrednost  $x$  vstavimo v (1). Tako dobimo (EINSTEIN)

$$G = \frac{E}{c}. \quad (35.24)$$

Gostota gibalne količine

To je gibalna količina bliska svetlobe z energijo  $E$ . Gostota gibalne količine

$$g = \frac{G}{V} \quad (35.25)$$

je  $G/V = G/Sct = (E/St)/c^2$ , torej

$$g = \frac{j}{c^2}. \quad (35.26)$$

Svetlobni tlak

V snopu svetlobe s presekom  $S$  in dolžino  $ct$  je  $G = g \cdot Sct$  gibalne količine. Če se ta svetloba v celoti absorbira na izhodnem preseku, tam odda  $G/St = gc$  gibalne količine na časovno in ploskovno enoto, to je, izvaja tlak

$$p = gc. \quad (35.27)$$

Če se svetloba ne absorbira, ampak se odbije, je sprememba njene gibalne količine dvakrat tolikšna, to je, tlak je dvakrat večji. Nasploh je tlak odvisen od tega, kolikšen delež  $R$  svetlobe se odbije:

$$p = (1 + R) gc. \quad (35.28)$$

Sončna svetloba z gostoto toka  $1 \text{ kW/m}^2$  izvaja pritisk  $0,3$  miliponda na  $\text{m}^2$  črne površine. Celotna Zemlja čuti potisno silo, ki je  $\sim 10^{13}$ -krat manjša od gravitacijskega privlaka Sonca. Ni se nam treba bati, da nas bo odpihnilo v vesolje.

### 35.15 Merjenje svetlobnega tlaka

Svetlobni mlin

Morda lahko svetlobni tlak dokažemo? Naredimo drobno in lahko lopatičasto kolo, ki je vrtljivo okoli navpične osi, in ga pokrijemo s steklenim zvonom, iz katerega izsesamo večino zraka. Eno stran lopatic potemnimo, drugo pozrcalimo. Svetloba deluje z večjim tlakom na zrcalno površino, zato bi se moralo kolesce zavrteti s temno stranjo lopatic naprej. Čaka nas presenečenje: kolesce se res zavrti, a s svetlo stranjo lopatic naprej.



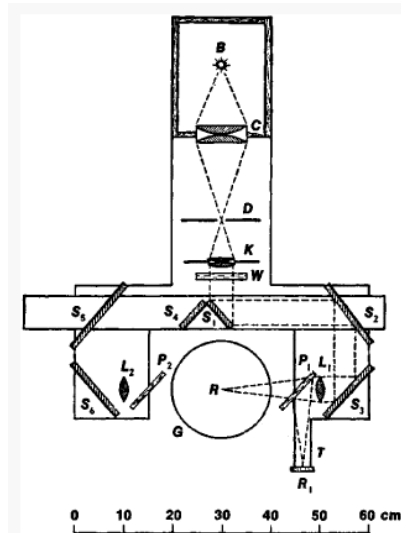
**Slika 35.11** Svetlobni mlin. Lopatičasto kolo je vrtljivo okrog navpične osi v izsesani posodi. Lopatice so na eni strani črne, na drugi zrcalne. Ko na kolo sije svetloba, se vrti. (Anon)

Kako je to mogoče? Sklepamo, da je kriv zrak pod zvonom. Temna stran lopatic se močneje segreje in od nje se segreje tudi dotična plast zraka. Segreti zrak povzroči okrog lopatic konvekcijske tokove in z njimi povezane tlačne podpritiske, ki delujejo na lopatice. Da se znebimo teh vplivov, moramo poskrbeti za čimboljši vakuum.

Torzijski svetlomer

Svetlobni tlak nam z mnogo truda uspe izmeriti (LEBEDEV), in sicer z lopatičasto prečko, obešeno na tanki nitki v stekleni posodi z visokim vakuumom. Poskus spominja na onega za določevanje gravitacijske konstante. Vir svetlobe je električna obločnica, ki ji s spremenljivim uporom lahko spreminjamo moč sevanja. Svetlobo iz obločnice vodimo z zrcali in lečami skozi izstopno diafragma na eno lopatico znanega preseka in ročice. Pred izhodno diafragma odcepimo del svetlobnega toka in ga vodimo na termočlen z galvanometrom. Odklon galvanometra

služi kot indikator, kako močno seva obločnica. Ko vključimo obločnico, vpade njena svetloba na lopatico in prečka se zasučje. Obenem se odkloni tudi galvanometer in pokaže moč obločnice. Zasuk prečke je sorazmeren z navorom nanjo; in navor je sorazmeren z gostoto vpadajočega energijskega toka.



**Slika 35.12** Merjenje svetlobnega tlaka. B = obločnica, W = vodni filter za blokado infrardeče svetlobe, T = termičen, R = prostor za vrtljivo prečko, G = steklena posoda, S1-S4 = krmilna zrcala za usmerjanje svetlobe na eno ali drugo stran prečke. (Lebedev, 1901)

Pred meritvijo je treba celotno pripravo kalibrirati. Sučni koeficient nitke določimo iz nihajnega časa umerilne prečke z znanim vztrajnostnim momentom. Energijski tok svetlobe, ki izstopa skozi diafragmo, pa določimo z majhnim kalorimetrom, in sicer pri različnih močeh obločnice. S tem kalibriramo tudi galvanometrsko skalo. Ko je priprava kalibrirana, prižgemo obločnico in ji nastavimo primerno jakost. Galvanometer pove, kakšen je svetlobni tok in odklon prečke pove, kakšen je svetlobni tlak. Rezultati potrdijo njuno pričakovano soodvisnost na 10–20 % natančno, tako za črno kot za zrcalno lopatico.

### 35.16 Je vse to res?

Končali smo z razvojem teorije relativnosti. Pod "teorijo" razumemo zaokrožen sistem postulatov in izrekov, ki iz njih sledijo, morda z nekaterimi dodatnimi privzetki. Izreki morajo biti, vsaj v principu, eksperimentalno preverljivi.

Eksperiment kot sodnik

Žal so presenetljivi pojavi, ki jih teorija relativnosti napoveduje, večinoma znatni šele pri dovolj hitrih telesih. Takih teles zaenkrat v laboratoriju ne najdemo oziroma jih ne zmoremo ustvariti. Kroglice iz pušk so prepočasne in tehtnice premalo natančne. Vendar pa smo le uspeli potrditi, s poskusom, dve napovedi teorije: frekvenčni zamik svetlobe (ki vodi do pravilne ocene Zemljine orbitalne hitrosti) in gibalno količino svetlobe (ki vodi do pravilne ocene za svetlobni tlak). Upamo, da bomo v nadaljevanju raziskav našli še več poti, kako teorijo eksperimentalno preveriti.

Po drugi strani je pa tudi res, da temelji teorija relativnosti na eksperimentalno dobro preverjenih postulatih in da so izreki iz njih, tako vsaj kaže, računsko pravilni. To nam daje pravico, da jih privzamemo za pravilne, dokler jih, morda, verodostojni eksperimenti ne ovržejo. □



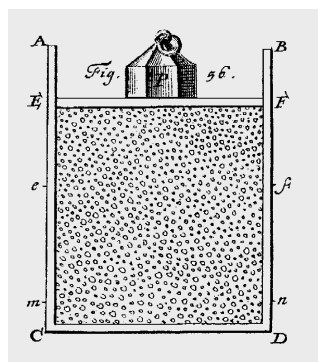
## 36 Termokinetika

Idealni plin – Tlak in temperatura – Porazdelitev po legi – Porazdelitev po hitrosti – Makrostanja in mikrostanja – Porazdelitev po energiji – Fazni prostor stanj – Ekviparticija energije – Specifične toplote – Ravnovesni pojavi – Transportni pojavi – Difuzija primesi – Prevajanje toplote – Termično gibanje

### 36.1 Idealni plin

Toplotni pojavi in toplotne lastnosti teles (pritisk plina, temperatura snovi, notranja energija, specifična toplota, toplotna prevodnost itd.) so bili do zdaj obravnavani fenomenološko. Nismo se preveč vpraševali, zakaj so takšni, kot so. Ker pa je snov sestavljena iz delcev – atomov in molekul, bi se morale makroskopske lastnosti teles izraziti preko mikroskopskih lastnosti teh delcev, to je z njihovimi masami, legami, hitrostmi in medsebojnimi silami. Te naloge se hočemo zdaj lotiti.

Model plina Najpreprostejša telesa so čisti plini. Tak plin si predstavljamo kot roj enakih molekul, ki se kaotično gibljejo v vse strani in pri tem trkajo med seboj in s stenami posode. Same molekule so lahko sestavljene iz enega ali iz več atomov. Kot vemo iz poskusa z oljnim madežem [23.6], imajo atomi velikost  $\sim 0,1$  nm. Do nadaljnjega privzamemo, da so molekule majhne v primerjavi s potjo med dvema zaporednima trkoma in da so trki popolnoma elastični, to je, da se pri njih ohranja kinetična energija. Razen ob trkih naj molekule ne vplivajo druga na drugo. Rečemo, da je to *idealni plin* oziroma njegov *kinetični model* (BERNOULLI, D.).



**Slika 36.1** Kinetični model plina. To je roj istovrstnih molekul, ki se nenehno gibljejo in elastično trkajo. (Bernoulli, D., 1738)

Maso posamične molekule označimo z  $m_1$  in hitrost njenega težišča z  $v$ . Število molekul  $N$  na prostorninsko enoto  $V$  poimenujmo *številska gostota*:

$$n = \frac{N}{V}. \quad (36.1)$$

Plinska enačba V znani plinski enačbi  $pV = (m/M)R^*T$  zapišimo maso plina kot  $m = m_1N$  in molarno maso kot  $M = m_1N_A$ . Tako dobi enačba obliko

$$p = nkT \quad (36.2)$$

$$k = \frac{R^*}{N_A}.$$

Sorazmernostni koeficient  $k$  poimenujemo *termična konstanta*. Ta je popolnoma določena s plinsko konstanto in s kilomolom. Žal za slednjega poznamo (zaenkrat) le red velikosti, namreč  $N_A \sim 10^{27}$ , kar vodi na oceno  $k \sim 10^{-23}$  J/K. Iz enačbe razberemo, da je tlak plina odvisen le od temperature plina in od številske gostote molekul. Očitno je, da imata dva plina, recimo kisik in vodik, zaprta vsak v svojo posodo z batom in izpostavljena enaki zunanji temperaturi in pritisku, enako število molekul na prostorninsko enoto. In koliko jih je? Pri  $p = 1$  atm in  $T = 300$  K izračunamo ogromnih  $n = p/kT \sim 10^{26}/\text{m}^3$ .

S številsko gostoto molekul je določena tudi njihova povprečna medsebojna razdalja:  $l^3 = V/N = 1/n$ . V zraku pri standardnih pogojih znaša  $l \sim 1$  nm, torej desetkrat toliko, kot so molekule velike.

### 36.2 Tlak in temperatura

Kinetični tlak

Ko plinska molekula s komponento hitrosti  $v_x$  zadene ob steno, se od nje odbije z nasprotno enako hitrostjo. Sprememba gibalne količine pri tem znaša  $2m_1v_x$ . V času  $t$  trčijo ob steno vse molekule, ki so oddaljene od nje za največ  $v_x t$ . Na ploskovno enoto  $S$  torej zadene  $nv_x t S$  molekul, kar pomeni spremembo gibalne količine za  $nv_x t S \cdot 2m_1v_x$ . Ta sprememba, deljena s časom in ploskvijo, je tlak na steno:  $p = 2nm_1v_x^2$ .

Upoštevati moramo še dvoje. Prvič, nimajo vse molekule enake hitrosti:  $v_x^2$  so različni. Zato moramo vzeti povprečje kvadratov hitrosti vzdolž smeri  $x$ . Ker pa pri tem povprečujemo kvadrate tako pozitivnih kot negativnih hitrosti, moramo od tega povprečja vzeti le polovico:  $p = nm_1\langle v_x^2 \rangle$ . Drugič, molekule se ne gibljejo le v smeri  $x$ , ampak tudi v smereh  $y$  in  $z$ . Povprečja kvadratov hitrosti v teh smereh so enaka. Zato velja  $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$ . Tako dobimo

$$p = \frac{1}{3} nm_1\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n\langle m_1v^2/2 \rangle. \quad (36.3)$$

Translacijska energija

Pritisk plina je torej sorazmeren s številsko gostoto molekul in z njihovo povprečno translacijsko energijo. Enačbo lahko zapišemo tudi v obliki  $p = \frac{1}{3}\rho\langle v^2 \rangle$ . Iz nje določimo *standardno hitrost*  $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  molekul pri znanem tlaku in gostoti. Kisik v posodi z batom pri standardnih pogojih ima gostoto  $\rho = 1,3$  kg/m<sup>3</sup>, zato imajo molekule  $v_{\text{rms}} \approx 500$  m/s. Vodikove molekule so 16-krat lažje od kisikovih, zato je njihova hitrost  $\sqrt{16} = 4$ -krat večja, torej okrog 2000 m/s. Mimogrede opazimo, da je izračunana hitrost molekul nekoliko večja od hitrosti zvoka v zraku. To je razumljivo, saj



razredčine in zgoščine ne morejo potovati hitreje, kot se v povprečju gibljejo molekule.

Njeno izenačevanje Kaj pa, če je plin mešanica iz dveh vrst molekul z maso  $m_1$  in  $m_2$ ? Tedaj se zdi očitno, in do morebitnega preklica privzamemo kot resnično, da medsebojni trki poskrbijo, da je povprečna translacijska energija vsake vrste molekul enaka:

$$\left\langle \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\rangle. \quad (36.4)$$

Seveda velja to tudi za več vrst molekul. In ne samo za molekule v plinu, med katerimi ni sil (razen ob trkih), ampak tudi za tiste, med katerimi vladajo sile, na primer v gosti tekočini ali trdnini. Prenos in izenačevanje kinetične energije med elastičnimi molekulami pač nista odvisna od sil, ki vladajo med njimi, ampak zgolj od njihovih mas in relativnih hitrosti. Po analogiji velja povedano tudi za atome v molekuli in za atome v kristalu. Vsak delec - atom ali molekula ali zrno snovi - ne glede na svojo maso in sestavo ima enako povprečno translacijsko energijo. Težji delci se gibljejo počasneje in lažji hitreje.

Temperatura snovi Primerjava plinske enačbe  $p = nkT$  in enačbe za kinetični pritisk plina  $p = (2/3)n(m_1 v^2/2)$  pove

$$\left\langle \frac{1}{2} m_1 v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (36.5)$$

Povprečna translacijska energija molekul (take ali drugačne vrste) v plinu je torej sorazmerna z njegovo temperaturo, kakor smo jo definirali s plinskim termometrom. Drugače rečeno: tisto, kar imenujemo temperatura, je (preimenovana) povprečna translacijska energija molekul.

Na zapisano povezavo med temperaturo in translacijsko energijo lahko pogledamo tudi kot na definicijo temperature preko termičnega gibanja. Potem iz nje in iz enačbe za kinetični pritisk takoj sledi plinski zakon:  $pV \propto T$ . S tem je ta eksperimentalno ugotovljeni zakon povzdignjen v izrek, ki sledi iz izreka o gibalni količini, ta pa seveda iz osnovne enačbe gibanja.

Notranja energija molekul Translacijska energija molekule ni njena celotna kinetična energija. Slednja je, po definiciji, enaka vsoti kinetičnih energij vseh njenih atomov. To vsoto lahko vedno zapišemo kot vsoto translacijske energije težišča molekule ter kinetične energije relativnih gibanj atomov glede na težišče. Zadnje pa lahko v posebnih primerih zapišemo kot vsoto rotacijske in nihajne energije molekule.

### 36.3 Porazdelitev po legi

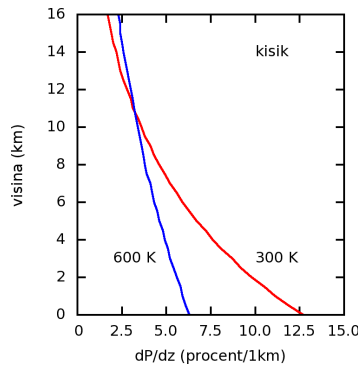
Zemeljsko ozračje Če na plin v posodi ne vpliva nobena zunanja sila ali je ta šibka in posoda majhna, so molekule porazdeljene po prostoru

enakomerno, to je, njihova številska gostota je povsod enaka. Tako je, na primer, z zrakom v sobi. Na molekule sicer deluje teža, vendar je termično gibanje dovolj močno, da preprečuje molekulam kopičenje pri tleh. Drugače je v zemeljskem ozračju. Privzemimo, da je ozračje izotermno, čeravno to ne drži povsem. Potem vemo (22.5), da pada pritisk z višino takole:

$p = p_0 \exp -Mgz/R^*T$ . Pritisk izrazimo kot  $p = nkT$  in kilomolsko maso kot  $M = m_1N_A$ , pa dobimo

$$n = n_0 e^{-m_1gz/kT}. \quad (36.6)$$

Številska gostota molekul se torej z višino zmanjšuje. Računali smo le za molekule ene vrste in za njihov delni tlak oziroma delno gostoto. Seveda velja enačba za katerokoli vrsto molekul v zračni mešanici. Lažje molekule (dušik) bi morale zato počasneje pojesti z višino kot težje (kisik). Zaradi konvektivnega mešanja zraka pa česa takega ne opazimo.



**Slika 36.2** Porazdelitev molekul kisika v težnem polju Zemlje. Izračunane so vrednosti za dve temperaturi.

Nad izbrano talno ploskvijo  $S$  ima ozračje obliko stolpca, v katerem je  $N$  molekul. V plasti  $dz$  je delež  $dN/N = dP$  molekul. Ker  $n = NdP/Sdz \propto dP/dz$ , lahko porazdelitev molekul po višini zapišemo tudi kot

$$\frac{dP}{dz} = A e^{-m_1gz/kT}. \quad (36.7)$$

Normirna konstanta  $A$  je določena s pogojem  $\int (dP/dz) dz = 1$ , torej

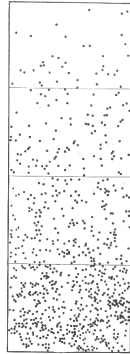
$$A = \frac{m_1g}{kT}. \quad (36.8)$$

Pri nizkih temperaturah ali močni težnosti je normirna konstanta velika: tedaj so prevladujoče zasedene spodnje plasti ozračja. Pri visokih temperaturah ali šibki težnosti pa postane konstanta majhna: tedaj je zasedenost približno enaka po vseh višinah.

Umetne molekule

Zapisana porazdelitev ne velja zgolj za molekule v ozračju, temveč tudi za drobne prašne delce v mirni sobi in za drobne kalne delce v stoječi vodi. Saj so ti delci nečistoč pravzaprav orjaške molekule in imajo enako povprečno translacijsko energijo kot okoliške prave molekule zraka ali vode.

To nas navede na naslednjo zamisel. Naredimo drobne kroglaste "molekule" znane velikosti in mase ter jih vrzimo v vodo. Potem preštejmo, z mikroskopom, njihovo številsko gostoto na dveh višinah. Iz razmerja teh dveh gostot nato izračunajmo termično konstanto, saj so vse ostale količine poznane oziroma merljive!



**Slika 36.3** Porazdelitev gumijastih kroglic v vodi po višini. Kroglice imajo premer  $0,6 \mu\text{m}$ . Navpični razmiki so zarisani na  $10 \mu\text{m}$ . Prikazana je risba na podlagi fotografskih slik. (Perrin, 1913 / predelava Pohl, 1969)

Zamisel je odlična, izvedba pa, kot ponavadi, težka. Kot spretnemu eksperimentatorju nam vendarle uspe (PERRIN). Iz gumijeve smole z znano gostoto izdelamo kroglice premera  $0,6 \mu\text{m}$ . (Gumo raztopimo v alkoholu. Raztopini primešamo vodo, da izpadejo drobne kroglice. Te so različnih velikosti. Ločimo jih s centrifugiranjem.) Z velikostjo kroglic je natančno določena tudi njihova masa (reda velikosti  $10^{-10} \text{mg}$ ). Kroglice spustimo v vodo znane temperature, kjer se jim teža ustrezno zmanjša zaradi vzgona. Mikroskop naravnamo na različne globine, fotografiramo vidna polja in na fotografijah preštejemo ostro vidne delce. Številska gostota kroglic se prepolovi približno preko razdalje  $10 \mu\text{m}$ . Tako uspemo določiti

$$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (36.9)$$

S tem so mnogo natančnejše kot do sedaj določeni tudi kilomol  $N_A = R^*/k$ , atomska masna enota  $u = 1 \text{ kg}/N_A$  in celo osnovni naboj  $e_0 = F/N_A$ :

$$\begin{aligned} N_A &= 6,0 \cdot 10^{26} \\ u &= 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ e_0 &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}. \end{aligned} \quad (36.10)$$

Tudi velikost plinskih molekul lahko na novo ocenimo iz njihove gostote v tekoči fazi:  $\rho_{\text{liq}} = m_1/(2r)^3$ . Za vodno molekulo, ki ima maso  $m_1 = 18 u$ , izračunamo premer  $0,3 \text{ nm}$ .

### 36.4 Porazdelitev po hitrosti

Molekule v plinu se torej nenehno gibljejo. Kakšna pa je pravzaprav njihova porazdelitev po hitrosti? Opazujmo prostornino, v kateri je številska gostota molekul povsod enaka, recimo sobo ob morju. Delež molekul  $dP$ , ki imajo hitrost na intervalu  $v_x \pm dv_x/2$ , označimo z  $f(v_x)dv_x$ . Hitrosti v treh smereh so med seboj neodvisne, zato je delež molekul na hitrostnem

intervalu  $v_x \pm dv_x/2$ ,  $v_y \pm dv_y/2$ ,  $v_z \pm dv_z/2$  enak produktu  $f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z$ .

Velikost hitrosti

Ker so vse smeri enakovredne, mora biti porazdelitev odvisna zgolj od celotne hitrosti molekule, nič od njenih komponent:  $f(v_x)f(v_y)f(v_z) = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ . Temu pogoju zadošča funkcija  $f(v_x) = A \exp(-Bv_x^2)$  in podobno za preostali dve komponenti. Konstanti  $A$  in  $B$  bo treba še določiti. Predznak minus smo pritaknili zato, ker mora biti pri čedalje večjih hitrostih čedalje manj molekul. Delež molekul na majhnem hitrostnem intervalu je torej enak  $A^3 \exp(-B(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) dv_x dv_y dv_z = A^3 \exp(-Bv^2) dv_x dv_y dv_z$ . Upoštevamo  $dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta dv d\theta d\phi$  in integriramo po obeh kotih, pa dobimo  $f(v)dv = A^3 \exp(-Bv^2) 4\pi v^2 dv$ .

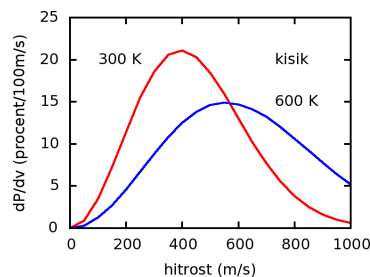
Konstanti  $A$  in  $B$  določimo iz dveh pogojev: normiranosti  $\int f(v_x)dv_x = 1$  in povprečne kinetične energije  $\int \frac{1}{2} m_1 v_x^2 f(v_x)dv_x = kT/2$ . Izračun integralov pove  $B = m_1/2kT$  in  $A = \sqrt{B/\pi}$ , torej (MAXWELL)

$$\frac{dP}{dv_x} = A e^{-m_1 v_x^2 / 2kT} \quad (36.11)$$

$$\frac{dP}{dv} = A^3 4\pi v^2 e^{-m_1 v^2 / 2kT}$$

$$A = \left( \frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{1/2}.$$

Porazdelitev plinskih molekul po hitrosti težišča ni nič odvisna od njihove številske gostote, ampak le od temperature. V sobi na vrhu izotermnega ozračja je zato prav taka kot v sobi na njenem dnu.



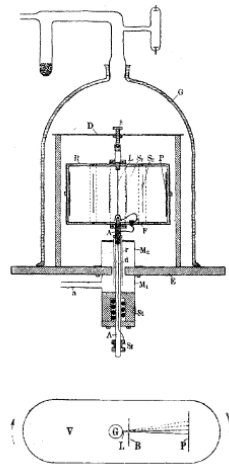
**Slika 36.4** Porazdelitev kisikovih molekul po hitrosti. Izračunane vrednosti za dve temperaturi.

Iz pogoja  $df/dv = 0$  določimo hitrost v maksimumu porazdelitve, to je, najverjetnejšo oziroma *modalno hitrost*:  $v_{\text{mod}} = \sqrt{2/3}v_{\text{rms}}$ . Iz porazdelitvene funkcije izračunamo *povprečno hitrost*  $v_{\text{ave}} = \int v f dv = \sqrt{8/3\pi}v_{\text{rms}}$ . Modalna in povprečna hitrost sta obe manjši od standardne, prva za 20 % in druga za 10 %. Pri takšni natančnosti je vseeno, katero izmed treh proglasimo za "povprečno" in jo označimo z  $\bar{v}$ .

Meritve hitrosti

Napovedane hitrosti molekul hočemo preveriti s poskusom. Platinasto žico, prevlečeno s srebrom, segrevamo s tokom. Iz nje izletajo atomi srebra. Žico namestimo v os navpičnega valja z

navpično režo v plašču. Iztekajoče srebrove atome ujamemo na zaslon. Ko valj miruje, se naredi na zaslonu tanka srebrna črta. Valj zavrtimo in črta na zaslonu se razširi. Debelina plasti srebra na izbranem mestu črte pove relativno število atomov, ki so tja prileteli. Z mikroskopom najdemo lego maksimalne debeline. Tja je priletelo največ atomov. Iz razsežnosti valja in hitrosti vrtenja (okrog 2000 obratov na minuto) določimo, kakšne so bile hitrosti teh atomov. S tem smo določili najverjetnejšo hitrost. Dobro se ujema z napovedano hitrostjo pri temperaturi žice.



**Slika 36.5** Meritev hitrosti molekul. Iz vroče žice izletavajo atomi srebra skozi režo vrtečega se valja in padajo na zaslon. Debelina srebra na zaslonu v odvisnosti od zasuka kaže hitrostno porazdelitev. (Stern, 1920)

Poskus lahko še izboljšamo. Nitko vzamemo iz valja in njene iztekajoče atome z zaporednimi zasloni z luknjicami oblikujemo v snop. Valj se vrti kot prej in srebro se nabira na njegovi notranji strani nasproti reže. Relativno debelino srebrnega sloja določimo z njegovo svetlobno prepustnostjo.

Pobeg plinov

Dovolj hitre molekule na vrhu ozračja lahko pobegnejo v vesolje. Za to morajo imeti ubežno hitrost preko 11 km/s [19.11]. Pri težnosti in temperaturah, kakršne vladajo na Zemlji, je delež takih molekul neznamen. Zemlja ne izgublja ozračja. Drugače je z Mesecem. Opazovanja zvezd ob njegovem robu kažejo, da nima ozračja. Morda ga je nekoč imel, vendar je njegova težnost premajhna, da bi ga bil obdržal. Okrog majhnih lun v Osončju nasploh ne pričakujemo ozračij, zlasti ne iz lahkih plinov.

### 36.5 Makrostanja in mikrostanja

Porazdelitev molekul ozračja po višini opisuje funkcija  $\exp(-m_1gz/kT)$ , porazdelitev po hitrosti pa, na primer, funkcija  $\exp(-m_1v_x^2/2kT)$ . Obe porazdelitvi imata obliko  $\exp(-\text{energija}/kT)$ . To nas navaja na misel, da se molekule plina pravzaprav razporejajo po njim dostopnih energijah, potencialnih in kinetičnih, na določen način, namreč eksponentno. Porazdelitev po legi in hitrosti pa je zgolj drugotna posledica. Kaj neki bi bil temu vzrok?

Energijska stanja Zamislimo si plin delcev (atomov ali molekul). Predpostavimo, da so vsakemu delcu na razpolago energijska stanja  $E_i$ . Zaradi lažjega razmišljanja naj bodo ta stanja diskretna. Predstavljajmo si jih kot navpično lestev s klini. Vsak klin označuje eno energijsko stanje. Delci se lahko porazdelijo po klinih na različne načine. Nekaj jih gre na prvega, nekaj na drugega itd. Odkriti hočemo vzrok, zakaj jih najdemo na vsakem klinu ravno toliko, kot je treba, in ne več ali manj.

Makrostanja Recimo, da imamo štiri delce A, B, C in D ter lestev s klini 0, 1, 2, 3 ... energijskih enot. Delce hočemo razporediti po klinih tako, da bo njihova skupna energija 3 energijske enote. To lahko naredimo takole: (1) 1 delec gre na klin 3, 3 delci na klin 0; ali (2) 1 na 2, 1 na 1 in 2 na 0; ali (3) 3 na 1 in 1 na 0. Rečemo, da so to tri *makrostanja* za predpisano energijo 3 enote.

**Tabela 36.1.** Porazdelitev štirih delcev A, B, C, D po energijskih nivojih 0, 1, 2 ... enot tako, da je energija vsake porazdelitve enaka 3 enote. Možna so tri makrostanja (1), (2) in (3) s pripadajočimi mikrostanji. Največ mikrostanj ima makrostanje (2), zato je najbolj verjetno. Z malo domišljije v njem že vidimo eksponentno ozračje.

|     |  |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|--|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| (1) | <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="padding-right: 10px;">*</td> <td style="padding-right: 10px;">A</td> <td style="padding-right: 10px;">B</td> <td style="padding-right: 10px;">C</td> <td style="padding-right: 10px;">D</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>***</td> <td>BCD</td> <td>ACD</td> <td>ABD</td> <td>ABC</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | 3   | *   | A   | B   | C  | D  |    |    |    |    |    |    |   |   | 2 | – | – | – | – | – |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 | –   | –   | –   | –   | –   |   |   |   |   |   |   |   |   | 0 | *** | BCD | ACD | ABD | ABC |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3   | *  | A   | B   | C   | D   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2   | –  | –   | –   | –   | –   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1   | –  | –   | –   | –   | –   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 0   | ***  | BCD | ACD | ABD | ABC |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| (2) | <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="padding-right: 10px;">–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>*</td> <td>A</td> <td>A</td> <td>A</td> <td>B</td> <td>B</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>C</td> <td>C</td> <td>D</td> <td>D</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>*</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> <td>A</td> <td>C</td> <td>D</td> <td>A</td> <td>B</td> <td>D</td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>**</td> <td>CD</td> <td>BD</td> <td>BC</td> <td>CD</td> <td>AD</td> <td>AC</td> <td>BD</td> <td>AD</td> <td>AB</td> <td>BC</td> <td>AC</td> <td>AB</td> </tr> </table>  | 3   | –   | –   | –   | –  | –  | –  | –  | –  | –  | –  | –  | – | – | 2 | * | A | A | A | B | B | B | C | C | C | D | D | D | 1 | *   | B   | C   | D   | A   | C | D | A | B | D | A | B | C | 0 | **  | CD  | BD  | BC  | CD  | AD | AC | BD | AD | AB | BC | AC | AB |
| 3   | –  | –   | –   | –   | –   | –  | –  | –  | –  | –  | –  | –  | –  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2   | *  | A   | A   | A   | B   | B  | B  | C  | C  | C  | D  | D  | D  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1   | *  | B   | C   | D   | A   | C  | D  | A  | B  | D  | A  | B  | C  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 0   | **   | CD  | BD  | BC  | CD  | AD | AC | BD | AD | AB | BC | AC | AB |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| (3) | <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">3</td> <td style="padding-right: 10px;">–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td>–</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>***</td> <td>BCD</td> <td>ACD</td> <td>ABD</td> <td>ABC</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>*</td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>   | 3   | –   | –   | –   | –  | –  |    |    |    |    |    |    |   |   | 2 | – | – | – | – | – |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 | *** | BCD | ACD | ABD | ABC |   |   |   |   |   |   |   |   | 0 | *   | A   | B   | C   | D   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3   | –  | –   | –   | –   | –   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2   | –  | –   | –   | –   | –   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1   | ***  | BCD | ACD | ABD | ABC |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 0   | *  | A   | B   | C   | D   |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |

Mikrostanja Makrostanje (1) je lahko doseženo tako, da gre na klin 3 bodisi delec A, B, C ali D, trije preostali pa na klin 0. Očitno so to 4 načini za tvorjenje tega makrostanja. Rečemo, da je makrostanje doseženo preko 4 *mikrostanj*.

Makrostanje (2) dosežemo takole: na 2 gre bodisi A, B, C ali D; vsakič gre na 1 eden izmed preostalih treh; in vsakič gresta preostala dva na 0. Očitno je to makrostanje doseženo preko  $4 \cdot 3 = 12$  mikrostanj.

Makrostanje (3) pa dosežemo takole: na 1 gredo trije izmed A, B, C, D, preostali osamelec pa na 0. To so 4 mikrostanja.

Verjetnost mikrostanj in makrostanj

Postulirajmo, da so vsa mikrostanja enako verjetna. To je, *izbrani delci* se v dovolj dolgem času enako mnogokrat znajde v vsakem od njih. Ne vidimo namreč razloga, da bi se v kakem mikrostanju znašel bolj pogosto kot v drugem. To pa pomeni, da se *sistem delcev* znajde v makrostanju (2) večkrat kot v drugih dveh makrostanjih. Naravno je postulirati: verjetnost, da se sistem znajde v nekem makrostanju, je enaka njegovemu deležu mikrostanj. Torej: verjetnost za makrostanje (1) je  $4/(4+12+4) = 4/20 = 0,2$ ; za makrostanje (2) je  $12/20 = 0,6$ ; in za makrostanje (3) je  $0,2$ .

Kakor stvari stojijo, bo v večini primerov, ko sistem pogledamo, ta v makrostanju (2), redkeje pa v preostalih dveh makrostanjih. Eno makrostanje, namreč (2), takorekoč štrli iz vseh makrostanj. Če je delcev več, je to štrljenje še mnogo bolj izrazito. Skoraj vedno potem najdemo sistem v tem makrostanju.

### 36.6 Porazdelitev po energiji

Število mikrostanj v makrostanju

Kar smo povedali za sistem štirih delcev, posplošimo na množico  $N$  enakih delcev, zaprtih v prostornini  $V$ . Vsakemu delcu so na voljo energije  $E_0, E_1, E_2 \dots$ . Koliko je načinov, da na teh energijskih nivojih  $E_0, E_1, E_2, \dots$  čepi  $N_0, N_1, N_2 \dots$  delcev, pri čemer  $\sum N_i = N$  in  $\sum N_i E_i = E$ ? Drugače rečeno: dano je makrostanje  $(N_0, N_1, N_2 \dots)$ ; preko koliko mikrostanj je lahko doseženo? Razmišljanje v primeru štirih delcev nas pouči:

$$B = \frac{N!}{N_0! N_1! N_2! \dots} \quad (36.12)$$

V omenjenem primeru res velja  $B(3,0,0,1) = 4!/3!0!0!1! = 4$ ,  $B(2,1,1) = (4!/2!1!1!) = 12$  in  $B(1,3) = 4!/1!3! = 4$ . Izmed njih je največji  $B(2,1,1)$ .

Makrostanje z največ mikrostanji

Izmed vseh možnih makrostanj hočemo zdaj najti tistega, ki ima največ mikrostanj, to je, najti hočemo takšen nabor  $(N_0, N_1, N_2 \dots)$ , da bo  $B(N_0, N_1, N_2 \dots)$  maksimalen, pri čemer smo omejeni z zahtevama  $\sum N_i = N$  in  $\sum E_i N_i = E$ .

Ker je  $N$  zelo velik, uporabimo znano aproksimacijo iz [33.6], namreč  $\ln N! = N \ln N - N$ , in sicer tako za  $N!$  kot za posamične  $N_i!$ , pa dobimo  $\ln B = N \ln N - \sum (N_i \ln N_i - N_i)$ .

Ker je  $\ln B$  naraščajoča funkcija  $B$ , je maksimiranje prve enako maksimiranju druge. V maksimumu mora veljati  $d \ln B = 0$ , torej (ker je  $N$  konstanten)  $\sum \ln N_i dN_i = 0$ . Pri variiranju  $dN_i$  mora za oba pogoja veljati  $dN = \sum dN_i = 0$  in  $dE = \sum E_i dN_i = 0$ .

Vsem trem enačbam hkrati zadostimo, kakor vemo iz vezanih ekstremov [30.9], če postavimo  $\sum (\ln N_i + \alpha + \beta E_i) dN_i = 0$  z neznanima parametroma  $\alpha$  in  $\beta$ . Spremembe  $dN_i$  so zdaj poljubne. Da bo zapisana enačba veljala za vse  $dN_i$ , mora biti

$\ln N_i + \alpha + \beta E_i = 0$  za vsak  $i$ . Torej je najbolj verjetna porazdelitev, tista z največ mikrostanji, naslednja:  $N_i = \exp(-\alpha) \exp(-\beta E_i)$ .

Da bo porazdelitev v skladu z že znanima porazdelitvama molekul po legi in hitrosti, moramo postaviti  $\beta = 1/kT$ . Drugo konstanto dobimo iz normirnega pogoja. Ker

$\sum N_i = \sum \exp(-\alpha) \exp(-E_i/kT) = N$ , imamo

$\exp(-\alpha) = N / \sum \exp(-E_i/kT)$ , torej ob upoštevanju  $N_i/N = P_i$ :

$$P_i = \frac{1}{Z} e^{-E_i/kT} \quad (36.13)$$

$$Z = \sum e^{-E_i/kT}.$$

Sorazmernostno konstanto smo zapisali kot  $1/Z$ . To je iskana najverjetnejša porazdelitev plinskih delcev (atomov, molekul) po svojih (privzeto) diskretnih nivojih energije. Porazdelitev pove, kolikšen procent delcev  $P_i$  ima energijo  $E_i$ . Poimenujemo jo *kanonična porazdelitev* (BOLTZMANN).

Zvezna energijska stanja

Za zvezna energijska stanja - in taka smo doslej spoznali pri težni in kinetični energiji - si predstavljamo, da so nivoji zelo gosti. Tedaj preide diskretna porazdelitev v zvezno in normalizacijska vsota v integral:

$$dP = \frac{1}{Z} e^{-E/kT} dE \quad (36.14)$$

$$Z = \int e^{-E/kT} dE.$$

Zasedenost delčnih energijskih stanj, diskretnih ali zveznih, pojema eksponentno z naraščajočo energijo. Ali drugače rečeno: procent delcev, ki zasedajo kakšno svoje energijsko stanje, pojema z naraščajočo energijo.

Povprečna energija

Povprečna energija znaša  $\langle E \rangle = \int E dP = (1/Z) \int E \exp(-\beta E) dE$ . Opazimo  $E \exp(-\beta E) = -d/d\beta \exp(-\beta E)$ . Odvod izpostavimo iz integrala in dobimo  $\langle E \rangle = -(1/Z) d/d\beta \int \exp(-\beta E) dE$ , torej

$$\langle E \rangle = - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}. \quad (36.15)$$

To je povprečna energija enega delca. Notranja energija pa je vsota povprečnih energij vseh delcev, torej  $E = N\langle E \rangle$ . Zapisna relacija velja seveda tudi za diskretna stanja.

### 36.7 Fazni prostor stanj

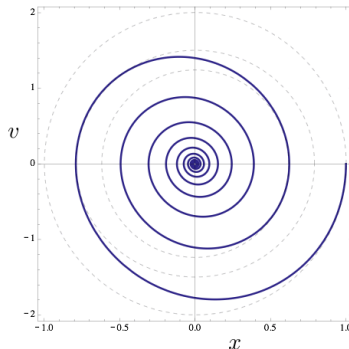
Energija vsakega delca - atoma ali molekule - je odvisna od njegove lege in gibanja težišča; če je delec sestavljen, pa še dodatno od relativne lege in relativnega gibanja njegovih sestavnih delov glede na težišče. V posebnih primerih je to gibanje možno opisati kot vrtenje ali nihanje.

Fazne koordinate

Poglejmo najpreprostejši primer, ko je stanje posamičnega delca opisano le z lego  $\mathbf{r}$  in s hitrostjo  $\mathbf{v}$  njegovega težišča. Šesterico



$(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  poimenujemo *fazne koordinate* delca. Stanje izbranega delca v nekem trenutku si potem predstavljamo kot točko v *faznem prostoru* s šestimi medsebojno "pravokotnimi" koordinatnimi osmi.



**Slika 36.6** Pot delca v dvodimenzionalnem faznem prostoru. Lega (abscisa) in hitrost (ordinata) sta izračunani za dušeno nihanje. (Gilchrist, A.)

Ko se delec giblje, njegova točka zarisuje krivuljo. V dolgem času obišče krivulja vse razpoložljive koticke faznega prostora. Tudi drugi delci imajo svoje točke, ki se gibljejo. Vse točke skupaj tvorijo nekakšen oblak. Gostota oblaka na mestu  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  pove, kakšen delež točk, torej delcev, je v *faznem intervalu*  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z = d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$ . V ravnovesnem stanju se gostota oblaka nikjer ne spreminja. Kolikor točk priteče v fazni element v povprečju, toliko jih tudi odteče. Majhne fluktuacije nas zaenkrat ne zanimajo. Primerjava sedimentne porazdelitve (36.7) in hitrostne porazdelitve (36.11) s kanonično porazdelitvijo (36.14) pove, da  $dE \propto d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$  oziroma

$$dP = \frac{1}{Z} e^{-E(\mathbf{r}, \mathbf{v})/kT} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} \quad (36.16)$$

$$Z = \int e^{-E(\mathbf{r}, \mathbf{v})/kT} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}.$$

To je zvezna porazdelitev delcev po energiji v obravnavanem šestdimenzionalnem faznem prostoru. Z njo opišemo atomarne pline, recimo helij ali živosrebrno paro, pa tudi atomarne kristale, recimo baker ali oglje.

Atomarni sistemi

V atomarnem plinu ima vsak atom zgolj kinetično energijo  $E = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_x^2 + \frac{1}{2} m_1 v_y^2 + \frac{1}{2} m_1 v_z^2$ . Ustrezajoča porazdelitev po faznem prostoru je že znana hitrostna porazdelitev, preračunana na prostorninsko enoto:  $dP/dV \propto \exp(-m_1 v^2/2kT) d^3\mathbf{v}$ .

V atomarnem kristalu niha vsak atom okoli svoje ravnovesne lege. Odmike v treh smereh označimo  $x$ ,  $y$  in  $z$ . Pri majhnih odmikih je sila sorazmerna z odmikom  $F_x = -\alpha x$  in enako za ostali dve smeri. Kristal naj bo torej izotropen. To pomeni, da ima atom v kristalu kinetično in potencialno energijo  $K + W = \frac{1}{2} m_1 v_x^2 + \frac{1}{2} m_1 v_y^2 + \frac{1}{2} m_1 v_z^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{2} \alpha y^2 + \frac{1}{2} \alpha z^2$ . Porazdelitev atomov po legi in hitrosti razpade na dva faktorja:  $dP \propto \exp(-m_1 v^2/2kT) d^3\mathbf{v} \times \exp(-\alpha r^2/2kT) d^3\mathbf{r}$ . Prvi faktor opisuje

hitrostno porazdelitev in je prav tak kot pri plinu. To pomeni, da je hitrostna porazdelitev atomov neodvisna od tega, kakšne sile jih vežejo na okolico. Enaka je v plinu, tekočini in kristalu. Drugi faktor opisuje prostorsko porazdelitev. Ta je identična porazdelitvi po hitrosti, če preimenujemo  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$  in  $\alpha \rightarrow m_1$ . To pomeni, da so identični tudi izrazi za standardni, modalni in povprečni odklik od ravnovesne lege, na primer  $\langle r^2 \rangle = 3kT/\alpha$ .

Molekularni sistemi

Niso vsi plini atomarni; večina jih je sestavljena iz molekul, to je iz skupkov atomov. Za opis stanja take molekule ni dovolj šest koordinat za lego in hitrost težišča. Potrebne so dodatne koordinate: za usmeritev glavnih osi; za vrtenje okoli njih; za medsebojne razdalje atomov; in za spremembe teh razdalj. Čim bolj zapletena je molekula, tem več dodatnih koordinat je potrebnih. Podobno je s kristali. Njihovi gradniki niso vedno atomi. Vodni led, na primer, je sestavljen iz molekul. Tudi stanje molekule v kristalu je zato treba opisati z dodatnimi koordinatami. Obravnava molekularnih sistemov je očitno mnogo bolj zapletena kot obravnava atomarnih sistemov.

### 36.8 Ekviparticija energije

Razčlenitev energije

Energijo enoatomne molekule v plinu brez zunanega polja zapišemo kot vsoto  $E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$ . Vprašamo se: koliko energije pripada, v povprečju, vsakemu členu? Povprečna energija

$$\langle E \rangle = \frac{\int E \exp(-E/kT) d^3\mathbf{v}}{\int \exp(-E/kT) d^3\mathbf{v}} \quad (36.17)$$

razpade v vsoto treh enakih integralov, od katerih se prvi - po krajšanju podintegralov  $dv_y$  in  $dv_z$  - glasi

$$\langle E_x \rangle = \frac{\int \frac{1}{2}mv_x^2 \exp(-\frac{1}{2}mv_x^2/kT) dv_x}{\int \exp(-\frac{1}{2}mv_x^2/kT) dv_x}. \quad (36.18)$$

S prilagoditvijo diferenciala predelamo enačbo v obliko  $\langle E_x \rangle = kT \int t^2 \exp(-t^2) dt / \int \exp(-t^2) dt$ . Spodnji integral že poznamo: to je normalni integral in znaša  $\sqrt{\pi}$ . Zgornji integral izračunamo takole:  $\int t^2 \exp(-\lambda t^2) dt = \int -\partial/\partial\lambda \exp(-\lambda t^2) dt = -\partial/\partial\lambda \int \exp(-\lambda t^2) dt$ . Prilagodimo diferencial v obliko  $d(t\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$  in dobimo normalni integral ter po odvajanju  $\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sqrt{\pi}$ . Za  $\lambda = 1$  je torej iskani integral enak  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Tako ugotovimo

$$\langle E_x \rangle = \frac{1}{2}kT. \quad (36.19)$$

Podobno velja za  $\langle E_y \rangle$  in  $\langle E_z \rangle$ . Na vsak kvadratni člen v kinetični energiji translacije torej pride  $\frac{1}{2}kT$  energije.

Enak rezultat velja tudi za energijo rotacije, ki vsebuje tri kvadratne člene oblike  $\frac{1}{2}J_i\omega_i^2$ , pri čemer integriramo po faznih intervalih  $d^3\boldsymbol{\omega}$ . In prav tako za energijo nihanja, ki vsebuje tri

člene za kinetično energijo  $\frac{1}{2}mv_i^2$  ter tri člene za potencialno energijo  $\frac{1}{2}ar_i^2$ , pri čemer integriramo po faznih intervalih  $d^3vd^3r$ . Morebitno zunanje polje na rezultat nič ne vpliva. Na vsak kvadratni člen v izrazu za energijo torej pride  $\frac{1}{2}kT$  energije. To je *ekviparticijski izrek*.

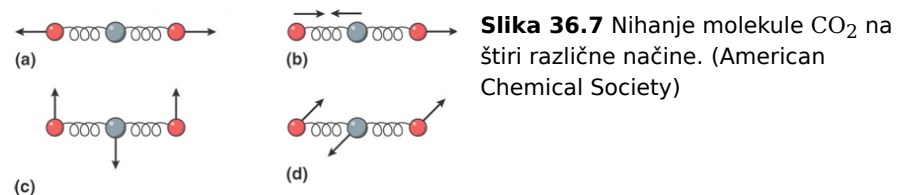
Molekule in kristali

Težišče vsakršne plinske molekule se lahko giblje v treh smereh. Rečemo, da ima tri prostostne stopnje. Translacijska energija za vsako prostostno stopnjo je podana s kvadratom ustrezne komponente hitrosti. Na vsako prostostno stopnjo torej pride  $\frac{1}{2}kT$  energije, skupaj  $\frac{3}{2}kT$ , kakor tudi mora biti. Za enoatomno molekulo je to tudi celotna energija, ki jo nosi.

Toga dvoatomna molekula se dodatno vrti okrog dveh pravokotnih osi. Ima še dve prostostni stopnji. Rotacijske energija za vsako os je opisana s kvadratom ustrezne kotne hitrosti. Molekula ima torej skupaj  $\frac{5}{2}kT$  energije.

Če dvoatomna molekula ni toga, ampak niha, ima še eno prostostno stopnjo več za kinetično energijo nihanja (sorazmerno s kvadratom hitrosti) in eno stopnjo za potencialno energijo nihanja (sorazmerno s kvadratom odmika). Skupaj torej nosi  $\frac{7}{2}kT$  energije.

Nelinearna triatomna molekula ima poleg treh translacijskih prostostnih stopenj še tri prostostne stopnje za vrtenje, tri za kinetično energijo nihanja in tri za potencialno energijo nihanja, torej skupaj  $\frac{9}{2}kT$ . Če je molekula linearna, pa odpadejo na translacijo tri, na rotacijo dve in na nihanje štiri stopnje, skupaj tudi  $\frac{9}{2}kT$ .



Nasploh ima molekula iz  $r$  atomov največ  $3r$  prostostnih stopenj (vsak atom tri) za kinetično energijo; od tega odpade na translacijo  $\frac{3}{2}kT$  in na notranje gibanje največ  $\frac{3}{2}(r-1)kT$  kinetične energije. Poleg tega ima še primerno število prostostnih stopenj za potencialne energije nihanj.

Atom v kristalu ima šest prostostnih stopenj: po tri za kinetično in potencialno energijo nihanja, skupaj torej  $\frac{6}{2}kT$ .

Vse te trditve o prostostnih stopnjah in o porazdelitvi energije po njih bi bilo seveda zanimivo preveriti z meritvami. Za to potrebujemo povezavo do ustreznih makroskopskih količin – notranje energije in specifičnih toplot.

### 36.9 Specifične toplote

Notranja energija Notranja energija plina je enaka vsoti energij posamičnih molekul: translacijskih, rotacijskih in nihajnih. Če imajo torej molekule  $f$  prostostnih stopenj, znaša notranja energija plina

$$U = N \frac{f}{2} kT. \quad (36.20)$$

Toplotna kapaciteta Toplotna kapaciteta plina pri stalni prostornini je sprememba njegove notranje energije na enoto temperature:  $C_V = (dU/dT)_V$ , zato

$$C_V = N \frac{f}{2} k. \quad (36.21)$$

Specifične toplote Specifična toplota plina pri stalni prostornini je toplotna kapaciteta na masno enoto:  $c_V = C_V/Nm_1$ , to je

$$c_V = \frac{f}{2} \frac{k}{m_1} = \frac{f}{2} \frac{R^*}{M}. \quad (36.22)$$

Specifična toplota plina pri konstantnem tlaku je  $c_p = c_V + R^*/M$ , torej

$$c_p = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) \frac{R^*}{M}. \quad (36.23)$$

In slednjič - razmerje specifičnih toplot

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f} \quad (36.24)$$

opisuje, kakšna je adiabatna stisljivost plina:  $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$

Kristalna snov Notranja energija kristala je enaka vsoti nihajnih energij (treh kinetičnih in treh potencialnih) posamičnih atomov. Notranja energija kristala in njegova specifična toplota sta zato

$$\begin{aligned} U &= 3NkT \\ c_V &= 3R^*/M. \end{aligned} \quad (36.25)$$

To je že znana, eksperimentalno ugotovljena povezava med specifično toploto in molarno maso kristalnih snovi (23.5). Zanimivo je, da notranja energija ni odvisna niti od mase atomov niti od jakosti medatomnih sil. Kristal je zato lahko sestavljen iz več vrst atomov in elastične sile med njimi so lahko v različnih smereh različne.

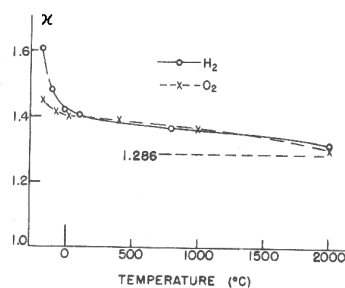
Težave na obzorju Razmerje specifičnih toplot plina znamo izmeriti (22.19). Za enoatomni helij, ki ima 3 prostostne stopnje za gibanje, bi moralo veljati  $\kappa = 5/3 = 1,67$ . Ujemanje s poskusom je odlično pri vseh temperaturah.

Dvoatomni vodik ima 7 prostostnih stopenj. Zanj bi moralo veljati  $\kappa = 9/7 = 1,28$ . Poskus pa pokaže pri sobnih temperaturah  $1,40 = 7/5$ . Zdi se torej, kot da bi imele molekule le 5 prostostnih

stopenj, to je, da bi ne nihale. To si lahko razlagamo takole. Molekula niha le pri dovolj visokih temperaturah; pri sobni temperaturi molekula ne niha, ampak se le togo vrtili okoli dveh osi; pri še nižjih temperaturah pa "zamrzne" tudi vrtenje in preostaja le translacija.

Triatomna vodna para ima pri sobni temperaturi razmerje toplot  $1,33 = 8/6$ , kar si razlagamo tako, da ima 6 prostostnih stopenj (tri za translacijo in tri za rotacijo). Iz tega sklepamo, da je molekula toga in ni linearna, saj bi takrat imela le 5 prostostnih stopenj oziroma razmerje toplot 1,40.

Druge dvoatomne in večatomne molekule se vedejo podobno. Vse prostostne stopnje pokažejo le pri visokih temperaturah. Z nižanjem temperature pa začnejo prostostne stopnje "izginjati", najprej nihajne in nato še vrtilne. Kaj bi bilo temu vzrok, zaenkrat niti ne slutimo.



**Slika 36.8** Odvisnost razmerja specifičnih toplot  $\kappa = c_p/c_v$  od temperature za dvoatomne molekule vodika in kisika. (Feynman, 1963)

Podobno je s specifično toploto kristalnih snovi. Ujemanje med napovedjo in meritvami je večinoma zelo dobro. Le pri nizkih temperaturah se začne toplotna kapaciteta nepričakovano manjšati. Zakaj, nam tudi ni jasno. Morda se vrtenja in nihanja v atomskem svetu le ne dogajajo tako preprosto, kakor pri velikih telesih.

### 36.10 Ravnoesni pojavi

Verjetnost, da najdemo delec v prostorninski enoti na različnih mestih, je določena s potencialno energijo delca na teh mestih. Ponuja se precej primerov.

Izhlapavanje tekočine

V zaprti posodi je voda in nad njo para. Povsod vlada ista temperatura. Molekule v pari so daleč narazen, tiste v vodi pa blizu skupaj. Koliko je molekul na prostorninsko enoto v pari v primerjavi s tistimi v vodi? Drugače rečeno: kako gosta je para pri dani temperaturi in kako je ta gostota odvisna od temperature?

Prostornina pare je  $V_2$  in vode  $V_1$ , ustrezni številski gostoti molekul pa  $n_2 = N_2/V_2$  in  $n_1 = N_1/V_1$ . Med molekulami v vodi vlada privlačna sila; drugače ne bi bile kondenzirane. Da molekula izleti iz vode, mora prejeti določeno delo. Molekula v pari ima zato za  $W$  večjo energijo od tiste v vodi. Razmerje številskih

gostot molekul v obeh fazah je  $(N_2/V_2)/(N_1/V_1) = \exp(-W/kT)$ . Ena molekula vode v prostornini  $V_1$  tekoče faze zavzema prostornino  $V_0 = V_1/N_1 = 1/n_1$ , zato (če pišemo  $n_v$  namesto  $n_2$ )

$$n_v = \frac{1}{V_0} e^{-W/kT}. \quad (36.26)$$

To je že znana enačba za parni tlak (22.23), ki smo jo svoj čas našli eksperimentalno. Sedaj smo jo dvignili na raven izreka. Sorazmernostni faktor ni povsem konstanten: voda se, na primer, praviloma razteza pri segrevanju. Prav tako je izstopno delo  $W$  rahlo odvisno od temperature, saj so privlačne sile med molekulami odvisne od prostornin, ki jih zasedajo. Vendar pa k temperaturni odvisnosti prevladujoče prispeva faktor  $1/T$  v eksponentu in spremembe preostalih faktorjev lahko ignoriramo.

Ionizacija plina

V zaprti posodi prostornine  $V$  je plin atomov, recimo živosrebrna para. Pri medsebojnih trkih nekateri atomi izgubijo elektron in postanejo ioni. Nekateri izbiti elektroni pa se spet združijo z razpoložljivimi ioni nazaj v nevtralne atome. Označimo številske gostote vseh treh vrst delcev  $n_a$ ,  $n_i$  in  $n_e$ . Vprašanje je: kakšno je ravnovesno razmerje med temi gostotami pri različnih temperaturah?

Ker se atomi spreminjajo v ione in ti nazaj v atome, mora veljati  $n_a + n_i = n$ . Ker se ohranja naboj, pa mora veljati še  $n_e = n_i$  (večkratne ionizacije ne upoštevamo). Privzamemo, da elektron potrebuje energijo  $W$ , da zapusti atom. Razmerje med prostimi elektroni (na prostorninsko enoto) "v pari" in vezanimi elektroni (na prostorninsko enoto) "v tekočini" podaja količnik  $(N_e/V)/(N_a/V_{\text{avail}}) = \exp(-W/kT)$ . Oznaka  $V_{\text{avail}}$  pomeni skupno prostornino, ki je na razpolago elektronom za vezanje. Elektroni se lahko vežejo na  $N_i$  ionov s prostorninami  $V_0$ , torej  $V_{\text{avail}} = N_i V_0$ . Količnik delimo v števcu in imenovalcu z  $V$  in dobimo

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_0} e^{-W/kT}. \quad (36.27)$$

S potrebnimi spremembami velja enačba tudi za višje stopnje ionizacije. Za ionizacijo iz stopnje  $i$  v stopnjo  $i+1$  zapišemo količnik  $n_e n_{i+1}/n_i$ , ionizacijsko energijo  $W_{i+1} - W_i$  in ionsko prostornino  $V_i$ .

Kemične reakcije

Termično ločevanje atomov na ione in elektrone ter njihova ponovna rekombinacija je natanko takšen proces kot ločevanje molekul na atome in njihovo ponovno združevanje. Ko se dva atoma A in B združita v molekulo AB, je A "elektron", B "ion" in AB "atom". Ravnovesno stanje zato kar prepišemo

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = K_0 e^{-W/kT} = K. \quad (36.28)$$

Sorazmernostna konstanta  $K_0$  je odvisna od tega, koliko prostornine je na voljo za združevanje atomov in od drugih podrobnosti. S tem smo razložili konstanto kemične reakcije  $K$  iz [23.12] in izpeljali njeno odvisnost od temperature.

### 36.11 Transportni pojavi

Prosta pot Ko se molekula giblje v plinu, ji ostale molekule s svojimi preseki postavljajo zapore. Naj bodo molekule enoatomne, torej okrogle. Taka molekula trči ob drugo, če sta njuni središči bližje, kot znaša premer  $2r$  posamične molekule. Med dvema zaporednima trkoma preleti molekula določeno pot  $l$ . Te poti so enkrat krajše in drugič daljše. *Povprečna prosta pot  $\bar{l}$*  je določena s prostornino valja  $\pi(2r)^2\bar{l}$ , na katero odpade v povprečju ena molekula, torej

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi(2r)^2 n}. \quad (36.29)$$

Čim večja je gostota molekul in čim večje so, tem krajša je njihova povprečna prosta pot. Če privzamemo  $2r \sim 0,1$  nm in  $n \sim 10^{26}/\text{m}^3$ , znaša  $\bar{l} \sim 10$  nm, torej stokrat toliko, kot premer molekule. Povprečna pot ni enaka povprečni razdalji med molekulami, saj je prva odvisna od velikosti molekul, slednja pač ne.

Če molekule niso okrogle, še vedno predstavljajo ovire. Namesto geometričnega preseka  $\pi(2r)^2$  vpeljemo trkalni presek dveh molekul  $\sigma$  kar z definicijo

$$\bar{l} = \frac{1}{\sigma n}. \quad (36.30)$$

S trkalnim presekom je potem definiran efektivni premer molekul:  $\sigma = \pi(2\bar{r})^2$ .

Gostota toka Vzdolž koordinatne osi  $x$  si mislimo kvadratno cev. Skozi njen presek  $S$  pri legi  $x$  letijo molekule z leve proti desni in z desne proti levi. Na vsaki strani tega preseka, pri  $x-\bar{l}$  in pri  $x+\bar{l}$ , si mislimo še dva preseka. Pri teh presekih so doživele molekule svoje zadnje trke. S tem sta določeni gostoti  $n$  in povprečni hitrosti  $\bar{v}$  v obeh prostorskih odsekih. V času  $dt$  prileti skozi osrednji presek z leve strani  $dN^+ = S dt (1/6) (n\bar{v})_{x-\bar{l}}$  molekul in z desne  $dN^- = S dt (1/6) (n\bar{v})_{x+\bar{l}}$  molekul. Faktor  $1/6$  upošteva, da se molekule gibljejo enakopravno v šest smeri. Neto tok molekul torej znaša  $dN/dt = (S/6) [(n\bar{v})_{x-\bar{l}} - (n\bar{v})_{x+\bar{l}}] = -(S/6) d(n\bar{v})/dx \cdot 2\bar{l}$ , kar zapišemo v lepši obliki

$$\frac{dN}{dt} = -S \frac{\bar{l}}{3} \frac{d(n\bar{v})}{dx}. \quad (36.31)$$

Neto toka ni, če je gradient produkta  $n\bar{v}$  enak nič. Če je na eni strani večja gostota molekul ali če imajo tam večje hitrosti (zaradi višje temperature), pa njihov tok prevlada.

Difuzija Naj bo na obeh straneh preseka enaka temperatura, kar pomeni, da je enaka tudi povprečna hitrost. Premaknemo jo ven iz diferenciala. Upoštevamo  $m_1 dN = dm$  in  $m_1 dn = d\rho$ , pa dobimo gostoto masnega toka

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx} \quad (36.32)$$

$$D = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{l}.$$

To je *difuzijski zakon* - enačba za difuzijo molekul snovi v smeri padajočega gradienta gostote.

Viskoznost Prečno na smer toka imajo molekule hitrostno komponento  $\bar{v}_\perp$  in zato komponento gibalne količine  $\bar{G}_\perp$ . Za tok prečne gibalne količine velja  $dG_\perp/dt = -S(\bar{l}/3)d(n\bar{v}m_1\bar{v}_\perp)/dx$ . Izpod diferenciala potegnemo  $m_1$ ,  $n$  in  $\bar{v}$ , to je, izključimo neto difuzijo molekul. Upoštevamo  $dG/dt = F$  in preimenujemo  $\bar{u}_\perp = u$ , pa dobimo

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{du}{dx} \quad (36.33)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{l} n m_1.$$

To je znana enačba za viskozno trenje tekočin (20.9). Dodatno vidimo, od česa je odvisna viskoznost  $\eta$ . Ker  $\bar{l} \propto 1/n$ , je viskoznost neodvisna od gostote plina. Faktor  $\bar{v}$  pa pravi, da je viskoznost sorazmerna s korenem iz temperature.

Toplotna prevodnost Vsaka molekula z  $f$  prostostnimi stopnjami prenaša v toku energijo  $fkT/2$ . Za energijski tok velja  $dQ/dt = -S(\bar{l}/3)d(nfkT/2)/dx$ . Izpod diferenciala potegnemo  $n$ ,  $f$ ,  $k$  in  $1/2$  ter dobimo

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (36.34)$$

$$\lambda = \frac{1}{6} \bar{v} \bar{l} n f k.$$

To je znana enačba za prevajanje toplote (22.30). Dodatno vidimo, od česa je odvisna toplotna prevodnost  $\lambda$  pri plinih. Ker  $\bar{l} \propto 1/n$ , je tudi toplotna prevodnost neodvisna od gostote plina. Pri enaki temperaturi prenese majhno število molekul ravno toliko energije kot veliko število. Svojo maloštevilčnost pač kompenzirajo z daljšo prosto potjo. Je pa prevodnost, prav kot viskoznost, sorazmerna s korenem iz temperature.

Transportni koeficienti Transportni koeficienti  $D$ ,  $\eta$  in  $\lambda$  so očitno med seboj povezani. Ob upoštevanju  $\rho = nm_1$  in  $c_V = fk/2m_1$  dobimo

$$\begin{aligned} \eta &= \rho D \\ \eta &= \lambda/c_V. \end{aligned} \quad (36.35)$$



Če torej izmerimo gostoto in specifično toploto plina ter enega izmed transportnih koeficientov, zlahka izračunamo preostala dva.

Koeficienti so odvisni od "mikroskopskih" količin  $m_1, f, n, \bar{v}$  in  $\bar{l}$ . Za dani plin pri danih pogojih znamo vse te količine izračunati in iz njih nato določiti koeficiente. Za kisik (ali zrak) pri standardnih pogojih tako dobimo  $D \sim 10 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\eta \sim 1 \cdot 10^{-6} \text{ kp s/m}^2$  in  $\lambda \sim 10 \cdot 10^{-3} \text{ W/Km}$ . To se v okvirju faktorja 3 ujema z neposrednimi meritvami.

### 36.12 Difuzija primesi

Difuzijska enačba Difuzijo oblaka primesi, recimo molekul vode v zraku, opišemo z masno gostoto oblaka  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . Zanj vemo dvoje. Prvič, gradient gostote povzroča tok:

$$\mathbf{j} = -D \nabla \rho. \quad (36.36)$$

Drugič, masa se pri pretakanju ohranja. Sprememba mase znotraj zaprte ploskve je zato enaka neto toku skozi to ploskev:  $dm/dt = I$  oziroma  $d/dt \int \rho dV = - \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$ . Na levi strani zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja, na desni strani pa izrazimo ploskovni integral s prostorninskim:  $\int \partial \rho / \partial t \cdot dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV$ . To mora veljati za vsako prostornino, zato

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (36.37)$$

Lokalna sprememba gostote je torej enaka divergenci masnega toka. Tok iz prve enačbe vstavimo v drugo enačbo in dobimo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho. \quad (36.38)$$

Privzeli smo, da je difuzivnost  $D$  povsod po prostoru enaka. To je *difuzijska enačba*, konkreten primer *parcialne diferencialne enačbe*. Opisuje, kako se zaradi difuzije spreminja gostota oblaka na vsakem mestu v prostoru. V eni dimenziji se enačba glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (36.39)$$

Normalna rešitev v neomejenem prostoru

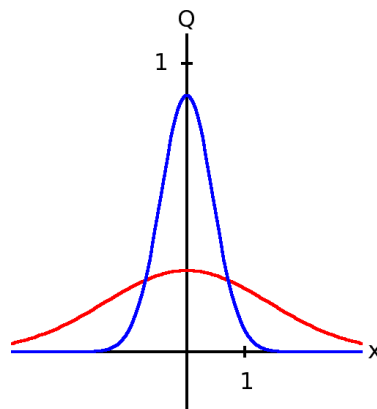
Naj bo prostor za difuzijo neomejen. Najpreprostejši začetni profil gostote je oster vrh pri  $x = 0$ . Gibanje delca primesi po ozadju molekul spominja na kotaljenje kroglice po ožlebljeni deski [33.6]. Porazdelitev kroglic po odmiku od središčne lege je normalna. Domnevamo, da je tako tudi pri difuziji delcev primesi: okrog začetne lege se bodo razpršili normalno in ta razpršitev se bo sčasoma širila in nižala. Zato izberemo nastavek  $\rho = 1/\sqrt{(2\pi a)} \cdot \exp(-x^2/2a)$ , pri čemer je  $a$  neznana funkcija časa. Vstavimo ga v difuzijsko enačbo in ugotovimo, da ji zadošča, ako  $a = 2Dt$ . To torej pomeni, da je rešitev

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2\sigma_x^2} \quad (36.40)$$

$$\sigma_x^2 = 2Dt.$$

O pravilnosti se prepričamo tako, da rešitev vstavimo v difuzijsko enačbo.

Normalna rešitev v dveh dimenzijah je produkt normalnih rešitev v posamičnih dimenzijah. Dobimo jo, če nadomestimo  $x^2 \rightarrow r^2$  (žal ne moremo pisati  $\rho$ , ker to oznako že uporabljamo za gostoto!) in  $\sigma_x^2 \rightarrow \sigma_r^2 = 4Dt$ . Podobno velja za tri dimenzije:  $x^2 \rightarrow r^2$  in  $\sigma_x^2 \rightarrow \sigma_r^2 = 6Dt$ .



**Slika 36.9** Difuzija točkastega izvora. Prikazana je enodimenzionalna difuzija za  $D = 1$  in ob časovnih enotah 0.01 (modra) ter 1 (rdeča).

Kaj pa, če začetni profil v neomejenem prostoru ni točkast, ampak je razmazan v oblak  $\rho(r,0)$ ? Potem je gotovo težko - če sploh - najti analitično rešitev  $\rho(r,t)$ . S tem se ne bomo ukvarjali.

Rešitve v omejenem prostoru

Prostor, v katerem poteka difuzija, je lahko tudi omejen s stenami take ali drugačne vrste. Poleg začetnega profila po vsem prostoru so potem merodajni tudi robni pogoji, ob vseh časih, na teh stenah. V eni dimenziji na intervalu  $[0,l]$ , na primer, sta lahko podana pogoja  $\rho(0,t) = A$  in  $\partial/\partial x \rho(l,t) = 0$ . V takih primerih je gotovo še težje karkoli izračunati, posebej še, če ima zamejeni prostor "čudno" obliko. Reševanje tovrstnih problemov zato raje prepustimo drugim.

### 36.13 Prevajanje toplote

Difuzijska enačba

Prevajanje toplote v snovi opišemo s temperaturnim poljem  $T(\mathbf{r},t)$ . Vemo tole. Prvič, gradient temperature povzroča toplotni tok:

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T. \quad (36.41)$$

Drugič, energija se pri pretakanju ohranja, to je, lokalna sprememba notranje energije na prostorninsko enoto je enaka divergenci toplotnega toka:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (36.42)$$

Tok iz prve enačbe vstavimo v drugo enačbo in dobimo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D^* \nabla^2 T \quad (36.43)$$

$$D^* = \frac{\lambda}{c_p \rho}.$$

Privzeli smo, da je prevodnost  $\lambda$  povsod po prostoru enaka in da se gostota lokalno ne spreminja. Dobljena enačba ima enako obliko kot že spoznana difuzijska enačba in jo bomo zato tako tudi imenovali. Opisuje, kako se zaradi prevajanja toplote spreminja temperatura na vsakem mestu v snovi. V eni dimenziji se enačba glasi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (36.44)$$

Stacionarne rešitve v omejenem prostoru

Ker imajo enake enačbe enake rešitve, velja vse, kar smo tozadavnega povedali za difuzijo snovi, tudi za prevajanje toplote. Formalno moramo samo upoštevati  $T \rightarrow \rho$  in  $D^* \rightarrow D$ . Ker pa ima prevajanje toplote velik praktičen pomen, poskusimo najti še kakšno dodatno družino rešitev. Ponuja se sama: to so stacionarna stanja, ko se polje temperature v zamejenem prostoru ne spreminja več. Tedaj  $\partial T / \partial t = 0$  in rešiti moramo enačbo  $\nabla^2 T = 0$ .

Najpreprostejši je zid  $[0, l]$  s konstantnima temperaturama  $T_1$  in  $T_2$  na vsaki stani. Difuzijska enačba se v tem primeru glasi  $d^2 T / dx^2 = 0$ . Ker je drugi odvod nič, mora biti prvi odvod konstanten:  $dT / dx = C$ . Ločimo spremenljivki, integriramo  $\int_{T_1}^T dT = C \int_0^x dx$  in dobimo  $T - T_1 = Cx$ . Konstanto  $C$  določimo iz pogoja  $T(x = l) = T_2$ , torej  $C = (T_2 - T_1) / l$ .

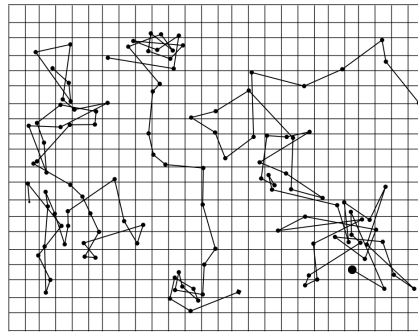
Stacionarni profil temperature v votlem valju  $[\rho_1, \rho_2]$  pri notranji in zunanji temperaturi  $T_1$  in  $T_2$  opisuje enačba  $(1/\rho) d/d(\rho dT/d\rho) = 0$ . Faktorja  $1/\rho$  se znebimo z množenjem z  $\rho$ . Ker je preostali odvod enak nič, mora biti  $\rho dT/d\rho = C$ . Ločimo spremenljivki in integriramo:  $\int_{T_1}^T dT = C \int_{\rho_1}^{\rho} d\rho / \rho$ . Dobimo  $T - T_1 = C \ln(\rho / \rho_1)$ . Konstanto  $C$  določimo iz pogoja  $T(\rho = \rho_2) = T_2$ , torej  $C = (T_2 - T_1) / \ln(\rho_2 / \rho_1)$ .

Podobno je z votlo kroglo. Merodajna difuzijska enačba se glasi  $(1/r^2) d/d(r^2 dT/dr) = 0$ . Na povsem enak način kot pri valju dobimo  $T - T_1 = -C(1/r - 1/r_1)$  in konstanto  $C = -(T_2 - T_1) / (1/r_2 - 1/r_1)$ .

### 36.14 Termično gibanje

Pijana hoja

Namesto da gledamo difuzijo oblaka delcev, lahko pogledamo gibanje posameznega delca. Najbolj osupljivo tovrstno gibanje kažejo drobna rastlinska semena v vodi. Opazujemo jih pod mikroskopom.



**Slika 36.10** Kaotično gibanje drobnih delcev v vodi. Gibanje povzročajo trki molekul. Delci so kroglice s premerom 1 mikrometra. Prikazane so lege treh delcev vsakih 30 sekund. Mrežni razmik znaša 3 mikrometre. (Perrin, 1909)

Ob času  $t = 0$  naj bo delec v neki točki, ki jo proglasimo za začetno. Nato cikcaka v vse smeri. Verjetnost, da se bo po času  $t$  znašel na mestu  $\mathbf{r} \pm d^3\mathbf{r}$  od začetne lokacije, je sorazmerna s tamkajšnjo gostoto "prirejenega" oblaka, ki se začne širiti iz iste začetne točke. Vemo, da je ta gostota normalna in ima (v treh dimenzijah) disperzijo  $\sigma^2 = 6Dt$ . Disperzija pa ni nič drugega kot povprečni kvadrat odmika od začetne točke. To pomeni, da tudi za delec velja

$$\langle r^2 \rangle = 6Dt. \quad (36.45)$$

Tavajoči delec se torej v povprečju odmika od začetne lege sorazmerno s  $\sqrt{t}$ .

Prisilna hitrost

Če na tavajoči delec deluje kakšna dodatna sila razen vplivov okolišnjih molekul, recimo teža, opazimo, da se na njegovo slepo gibanje doda *prisilna hitrost* v smeri sile. Kakšna je v povprečju ta hitrost? Je kar pospešek  $F/m_1$  krat povprečni čas  $\bar{\tau}$  med dvema trkoma:

$$v_{\text{drift}} = \frac{\bar{\tau}}{m_1} F = \mu F. \quad (36.46)$$

Prisilna hitrost je sorazmerna sili. Sorazmernostni koeficient  $\mu$  poimenujemo *giblјivost* delca. Giblјivost je tem večja, čim večji je čas med dvema trkoma (tedaj je manj trkov, ki pospeševanje ustavljajo) in čim lažji je delec (tedaj med dvema trkoma nabere več hitrosti).

Giblјivost in difuzivnost

Prisilno gibanje in difuzija delca morata biti povezana, saj sta obe vrsti gibanj posledica termičnega gibanja ozadnih molekul. V enačbo  $D = \bar{l}\bar{v}/3$  vstavimo  $\bar{l} = \bar{v}\bar{\tau}$  in  $\bar{\tau} = \mu m_1$ , upoštevamo ekvipartitcijo  $m_1\bar{v}^2/2 = 3kT/2$  in dobimo

$$D = \mu kT. \quad (36.47)$$

Hitrejša kot je difuzija delca (ali oblaka), večja bo tudi njegova prisilna hitrost, ko ga podvržemo zunanji sili. Enačba omogoča izračun enega koeficienta, če poznamo drugega.

Kroglice v vodi

Kakšna je mobilnost drobne kroglice v vodi? Zunanja sila je teža, zmanjšana za vzgon. Ko kroglica enakomerno pada, je ta sila

nasprotno enaka sili upora  $F = 6\pi\eta r v_{\text{drift}}$ . S tem je določena najprej mobilnost in preko nje difuzivnost:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}. \quad (36.48)$$

Difuzivnost  $D$  kroglic v vodi lahko določimo z merjenjem povprečnega kvadrata odmika v odvisnosti od časa. Za delce reda velikosti  $1 \mu\text{m}$ , plavajoče v vodi, znaša ta odmik  $\sim 10 \mu\text{m}$  v minuti. Enačba omogoča (vnovičen) izračun termične konstante, saj so vse ostale količine v njej znane. Meritve dajo podobne rezultate kot tiste s sedimentno porazdelitvijo kroglic.  $\square$



## 37 Statična E & M polja

Električno polje – Pretok in cirkulacija – Električni potencial – Električni dipol – Polarizacija snovi – Magnetno polje – Pretok in cirkulacija – Magnetni potencial – Magnetni dipol – Magnetizacija snovi – Relativnost polj – Transformacija polj – Gibanje skozi polja

### 37.1 Električno polje

Poleg gravitacijskega polja, ki ga okrog sebe ustvarjajo vsa telesa, smo doslej spoznali še dve polji: električno, ki ga ustvarjajo nabiti delci (elektroni in ioni), in magnetno, ki ga ustvarjajo tokovi teh delcev. Kar smo spoznali, hočemo sedaj povzeti in razširiti v vektorski obliki.

Jakost polja Jakost električnega polja  $\mathbf{E}$  v izbrani točki, recimo v bližini nabite krogle ali v notranjosti ploščatega kondenzatorja, smo definirali (25.1) preko električne sile  $\mathbf{F}_e$  na tamkajšnji testni delec z nabojem  $e$ :

$$\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}. \quad (37.1)$$

Smer polja je po dogovoru enaka smeri sile na pozitivni testni naboj. Poljsko jakost znamo izmeriti z vrtljivim influenčnim kondenzatorjem, priključenim na balistični galvanometer [25.3]. Lepo bi bilo, ko bi jo znali tudi izračunati, in sicer za vsakršno porazdelitev nabojev. Sledimo tej želji!

Polje točkastega naboja Najpreprostejše električno polje je tisto, ki ga okrog sebe ustvarja *točkast naboj*. Ne moremo si kaj, da ne bi pomislili na gravitacijsko polje, ki ga ustvarja masni delec (34.40). Morda je električno polje podobno, to je sorazmerno z nabojem in obratno sorazmerno s kvadratom oddaljenosti od njega? Torej:

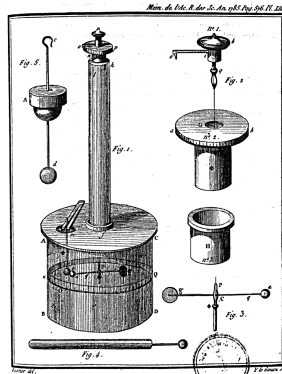
$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \frac{e_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.2)$$

Oznaka  $\mathbf{E}_P$  pomeni poljsko jakost v točki P. Ustvarja jo naboj  $e_Q$ , ki je v točki Q. Enotni vektor  $\mathbf{n}_{QP}$  kaže iz točke Q v točko P. Razdalja med obema točkama znaša  $r_{QP}$ . Konstante  $\kappa_e$  zaenkrat ne moremo določiti.

Sila med dvema nabojema Ali je domneva pravilna? Na srečo imamo že orodje, s katerim jo lahko preverimo: torzijsko tehtnico, ki se je tako dobro obnesla pri merjenju gravitacijskih sil. Z njo hočemo izmeriti silo na točkast delec v polju drugega točkastega delca, to je, privlak/odboj med dvema točkastima nabojema.

Poskus poteka takole (COULOMB). Na svileni nit obesimo prečko iz izolatorja. Na koncu prečke je pritrjena prevodna kroglica. Dotaknemo se jo z enako, a naelektreno kroglico. Naboj se porazdeli polovično na obe kroglici, ki se odbijeta. Izmerimo zasuk prečke in s tem silo pri različnih razdaljah med obema

kroglicama (sila je sorazmerna z zasukom). Tako potrdimo odvisnost  $F \propto 1/r^2$ . Potem se naelektrene kroglice na prečki dotaknemo z enako veliko, a nevtralno, in tako razpolovimo naboj na prvi. Ponovimo meritev sile in potrdimo odvisnost  $F \propto e$ . Domneva glede sile in s tem poljske jakosti je torej potrjena.



**Slika 37.1** Merjenje električne sile med dvema točkastima nabojema. Privlak ali odboj med dvema naelektrenima kroglicama zasuka prečko, obešeno na niti. Zasuk je sorazmeren s silo. Pokaže se, da je sila sorazmerna z nabojema in obratno sorazmerna z oddaljenostjo med njima. (Coulomb, 1785)

Superpozicija polj Električne sile - torej tudi polja - točkastih izvorov se vektorsko seštevajo:

$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.3)$$

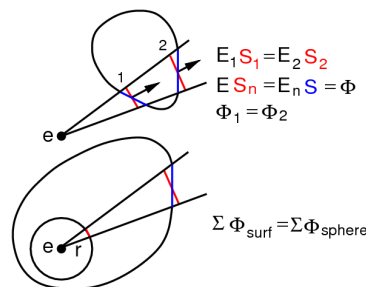
Če so naboji po prostoru porazdeljeni zvezno, jih opišemo z gostoto naboja  $\rho = de/dV$  in vsota preide v integral

$$\mathbf{E}_P = \kappa_e \int \frac{\rho_Q dV_Q}{r_{QP}^2} \mathbf{n}_{QP}. \quad (37.4)$$

Iz znane porazdelitve nabojev lahko torej vedno določimo, kakšno je polje. Izračunati moramo le ustrezno vsoto oziroma integral. Seveda moramo poznati konstanto  $\kappa_e$ ; to delo nas še čaka. Če je porazdelitev količkaj zamotana, pa hitro naletimo na računske težave.

### 37.2 Pretok in cirkulacija

Pretok polja V vsakem vektorskem polju lahko računamo pretoke skozi poljubne zamišljene ploskve. Kakšni so pretoki v električnem polju, to je električni pretoki?



**Slika 37.2** Pretok električnega polja skozi sklenjeno ploskev je sorazmeren zaobjemu neto naboju.

Zamislimo si ozek stožec z vrhom v točkastem nabojju. Skozi izbrani pravokotni presek  $dS_n$  na razdalji  $r$  od vrha stožca znaša



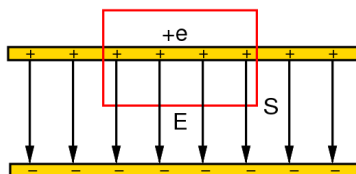
pretok polja  $d\Phi = E dS_n$ . Ker  $E \propto 1/r^2$  in  $dS_n \propto r^2$ , je pretok polja enak skozi vsak presek stožca, ne glede na to, kako je oddaljen od vrha. Pretok skozi zaključeno ploskev, sestavljeno iz obeh pravokotnih presekov in iz vmesnega plašča stožca, je torej enak nič. — Pretok skozi poševni presek je enak pretoku skozi pravokotni presek, saj  $E dS_n = E_n dS$ . — Poljubno sklenjeno ploskev lahko prebodemo z množico sovršnih stožcev. Pretok skozi vsak stožec je enak nič. Torej je tudi pretok skozi vsako zaključeno ploskev, ki ne vsebuje nobenih izvorov, enak nič. Kaj pa, če ploskev vsebuje izvore? Izvor zapremo v kroglo poljubno majhnega radija. Pretok skozi zunanjo ploskev je potem enak pretoku skozi notranjo kroglo:  $\Phi = E 4\pi r^2$ . Ker  $E = \kappa_e e/r^2$ , velja

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \kappa_e e. \quad (37.5)$$

Kaj pa, če sta prisotna dva izvora? Tedaj je pretok  $\oint (E_{1n} + E_{2n}) dS = \oint E_{1n} dS + \oint E_{2n} dS$ . Če je delec zunaj, nič ne prispeva k pretoku. Če je delec znotraj, pa ustrezno prispeva. Tako lahko izjavimo: pretok električnega polja skozi zaključeno ploskev je sorazmeren zaobjetemu neto naboju. To je *zakon o električnem pretoku* (GAUSS). Pravzaprav ni nič drugega kakor posplošeno zapisan zakon o električni sili (37.2). Velja zato, ker električna sila pojema natanko s kvadratom razdalje.

Pretok v kondenzatorju

Pa zaprimo eno ploščo ploščatega kondenzatorja v namišljen valj! Polje se pretaka pravokotno skozi notranjo ploskev  $S$  valja. Skozi zunanjo ploskev je pretok enak nič, ker je tam polje enako nič. Skozi plašč pa je pretok tudi nič, ker je tam polje vzporedno s ploskvijo. Zato dobimo  $E = 4\pi \kappa_e e/S$ .



**Slika 37.3** Pretok skozi zaprt valj, ki objema eno ploščo v ploščatem kondenzatorju. K celotnemu pretoku prispeva le pretok skozi spodnjo ploskev valja.

Vemo pa, da za kondenzator velja  $e/S = \epsilon_0 E$ , zato

$$\kappa_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}. \quad (37.6)$$

$S$  tem je konstanta  $\kappa_e$  določena preko električne konstante  $\epsilon_0$  in znaša  $9,00 \cdot 10^9 \text{Vs/Am}$ . Pretok polja lahko zato zapišemo v lepši obliki, ki ne vsebuje več motečega faktorja  $4\pi$ . Seveda pa pride ta faktor potem v nekatere druge enačbe. Velja torej

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\epsilon_0}. \quad (37.7)$$

Z besedami: pretok električnega polja skozi poljubno zaprto ploskev je sorazmeren z neto nabojem v njeni notranjosti. Slednji je lahko pozitiven ali negativen. V diferencialni obliki pa seveda zapišemo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (37.8)$$

Simetrična polja Zakon o električnem pretoku dobro služi za določanje električnih polj, kadar so ta lepo simetrična. — Enakomerno nabito neskončno ploščo zaobjamemo z valjem; polje teče pravokotno skozi obe osnovni ploskvi:  $E = e/2S\epsilon_0 \propto (e/S)$ . — Enakomerno nabito neskončno žico objamemo z valjem; polje teče pravokotno skozi plašč:  $E = e/2\pi r l \epsilon_0 \propto (e/l)/r$ . — Enakomerno nabito kroglo pa zaobjamemo s koncentrično kroglo;  $E = e/4\pi r^2 \epsilon_0 \propto e/r^2$ , kakor tudi mora biti. Vse te rezultate bi sicer lahko dobili z neposrednim superpozicijskim seštevanjem, vendar z mnogo več truda.

Cirkulacija polja Druga lastnost električnega polja, njegova cirkulacija, je enaka nič, saj nabiti delec, ki se giblje po sklenjeni krivulji, pri enem obhodu ne pridobi nobene energije. Če bi jo, bi bil to stroj za ustvarjanje energije iz nič. Torej:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (37.9)$$

Z besedami: cirkulacija po zaključeni zanki je enaka nič. To je zakon o električni cirkulaciji. V diferencialni obliki ga zapišemo

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (37.10)$$

Polje je torej brezvrtinčno. Enačbi za pretok (oziroma divergenco) polja in za cirkulacijo (oziroma rotor) polja sta osnova za študij statičnih električnih polj.

### 37.3 Električni potencial

Potencial polja Ker je polje  $\mathbf{E}$  brezvrtinčno, ga lahko opišemo z gradientom potenciala/napetosti  $U$  (32.18):

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (37.11)$$

Negativni predznak pritaknemo, ker hočemo, da potencial pada v smeri sile na pozitivni naboj. V integralni obliki pa pišemo

$$U_B - U_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (37.12)$$

Potencial polja med točkama A in B je torej delo na enoto pozitivnega naboja, ki ga opravimo, ko - nasprotujoč sili polja - počasi prenesemo ta naboj po katerikoli poti od A v B. Delo je pozitivno, ko potiskamo naboj proti polju, in negativno, ko ga moramo zadrževati nazaj. Očitno je potencial nedoločen do aditivne konstante, to je  $\nabla U = \nabla(U + \text{const})$ . Drugače rečeno: vrednost potenciala v izhodiščni točki A lahko poljubno izberemo.

Ko smo šele odkrivali električne pojave, smo najprej kvantitativno vpeljali napetost in preko nje določali jakost polja. Sedaj, ko vemo več, pa smo postavili jakost polja na prvo mesto in z njo definirali

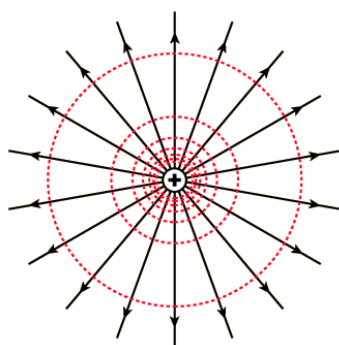
napetost. Seveda smo to naredili tako, da se novi postopek ujame s starim.

Potencial nabojev

Kakšen je potencial točkastega naboja, ki čepi v točki Q? Integriramo njegovo električno poljsko jakost (37.2) od neskončnosti do izbrane točke P in dobimo

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_Q}{r_{QP}}. \quad (37.13)$$

Potencial v neskončnosti postavimo na nič. To seveda lahko naredimo, saj s tem gradienta potenciala, ki določa električno polje, nič ne spremenimo. Ko se bližamo pozitivnemu naboju, narašča potencial proti  $+\infty$ . Ko se bližamo negativnemu naboju, pa potencial pada proti  $-\infty$ .



**Slika 37.4** Potencial (pozitivnega) točkastega naboja. Ekvipotencialne ploskve so rdeče, nanje pravokotne silnice so črne. Potencial v neskončnosti je nič, nato narašča z bližanjem proti pozitivnemu naboju oziroma upada z bližanjem proti negativnemu naboju. (HyperPhysics)

Potencial več nabojev je kar vsota potencialov posamičnih nabojev:

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}} \quad (37.14)$$

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q dV_Q}{r_{QP}}.$$

Če moramo izračunati jakost polja iz dane porazdelitve nabojev, najprej izračunamo njihov potencial in nato, preko gradienta tega potenciala, iskano jakost polja. To je ponavadi lažje kot neposredna pot, saj moramo izračunati skalarni integral namesto vektorskega.

Potencialna enačba

Statično električno polje je povsem opisano z enačbama za divergenco in rotor polja. Lahko ga pa opišemo tudi preko potenciala. Jakost polja iz definicijske enačbe za potencial (37.11) vstavimo v divergenčno enačbo (37.8) in dobimo

$$\nabla^2 U = - \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (37.15)$$

To je *potencialna enačba*. Njene rešitve, če je podana porazdelitev nabojev po vsem prostoru, že poznamo; to so  $U_P = \kappa_e \int \rho_Q dV_Q / r_{QP}$ . Kadar v preučevanem delu prostora ni

nabojev, ampak so zgolj na njegovih robovih oziroma zunaj ter jih ne poznamo, pa moramo rešiti *homogeno potencialno enačbo*

$$\nabla^2 U = 0. \quad (37.16)$$

Rešiti zapisano enačbo v omejenem prostoru pomeni najti takšno polje  $U$ , ki bo zadoščalo enačbi in hkrati robnim vrednostim potenciala. Takoj vidimo, da imamo opravka s povsem enako enačbo, kot je enačba za prevajanje toplote v stacionarnih razmerah [36.13],  $\nabla^2 T = 0$ . Za ploščati, valjasti in krogelni kondenzator, ki imajo na "notranji" plošči potencial  $U_1$  in med ploščama potencialno razliko  $\Delta U$ , zato rešitve kar prepisemo:  $U - U_1 \propto x$ ,  $U - U_1 \propto \ln(\rho/\rho_1)$  in  $U - U_1 \propto (1/r - 1/r_1)$ .

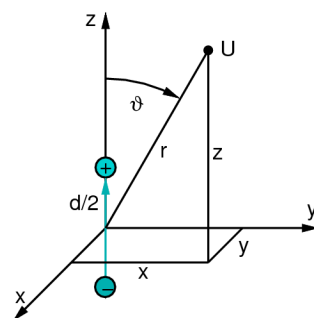
Sorazmernostne konstante smo izpustili. Gradienti potencialov povedo, kakšne so jakosti polj:  $E_x = dU/dx = \text{const}$ ,  $E_\rho = dU/d\rho \propto 1/\rho$  in  $E_r = dU/dr \propto 1/r^2$ , kakor tudi mora biti.

Potencial v prevodniku

Poseben primer predstavlja naelektren prevodnik. Vsi naboji so nakopičeni na njegovi površini, ker se pač medsebojno odbijajo. Potencial na površini je konstanten, saj bi sicer povzročal tokove. Ker v notranjosti ni nabojev, mora v katerikoli točki veljati  $\nabla^2 U = 0$ . Rešitev ne more imeti lokalnih ekstremov. Edina rešitev, ki ima stalno vrednost na robu in nima lokalnih ekstremov, je konstanta. Gradient konstantnega potenciala pa je nič. V notranjosti torej ni električnega polja.

### 37.4 Električni dipol

Atome si predstavljamo kot drobne kroglice, ki vsebujejo negativne in pozitivne naboje. Kakorkoli so ti že porazdeljeni, navzven je atom nevtralen. Ko pa atom zaide v zunanje električno polje, deluje na njegove pozitivne naboje sila v smeri polja, na negativne pa v nasprotni smeri. Težišči nabojev se zato razmakneta. Atom postane *električni dipol*. Podobno velja za molekule. Za nekatere izmed njih, recimo "nesimetrični" CO, moramo celo dopustiti, da so dipoli že brez vpliva zunanjega polja.



**Slika 37.5** Električni dipol. Sestavljata ga dva razmaknjena, nasprotno enaka naboja.

Električni dipol

Preden se lotimo atomskih in molekulskih dipolov, moramo preučiti idealizirani dipol: dvojico nasprotno enakih točkastih nabojev  $e$  na medsebojni razdalji  $d$ .

Dipol naj bo usmerjen vzdolž osi  $z$  in naboja naj bosta oddaljena od izhodišča za  $d/2$ . Potencial dipola je potem  $U = U_1 + U_2$ ,  $U_1 = \kappa_e e / \sqrt{[(z - d/2)^2 + x^2 + y^2]}$ ,  $U_2 = \kappa_e (-e) / \sqrt{[(z + d/2)^2 + x^2 + y^2]}$ . Glejmo polje daleč proč. Potem lahko aproksimiramo  $(z \pm d/2)^2 \approx z^2 \pm zd$ . Upoštevamo še  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  in  $z/r = \cos \theta$ , pa dobimo po krajšem računu

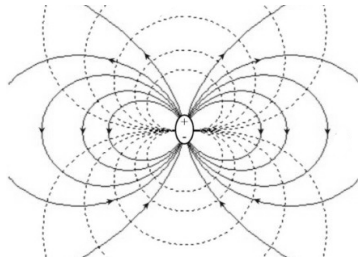
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ed \cos \theta}{r^2}. \quad (37.17)$$

Količina  $ed$  je očitno pomembna in zato jo poimenujemo *električni moment* dipola  $p_e = ed$ . Če definiramo  $\mathbf{d}$  kot usmerjeno razdaljo  $d$  od  $-e$  do  $+e$ , velja

$$\mathbf{p}_e = e\mathbf{d}. \quad (37.18)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Vektorska oblika je veljavna za kakršnokoli lego in orientacijo dipola, če pod  $r$  razumemo oddaljenost od njega.



**Slika 37.6** Polje električnega dipola. Ekvipotencialne ploskve so črtane in (nanje pravokotne) silnice so polne. (Anon)

Dipolni približek

Namesto dveh nasprotnoimenskih nabojev preučimo sedaj oblak nabojev, pozitivnih in negativnih, nakopičenih okrog koordinatnega izhodišča. Oblak naj vsebuje enako mnogo pozitivnih in negativnih nabojev. Zanima nas potencial v točki  $\mathbf{R}$  iz izhodišča; proti tej točki naj kaže enotni vektor  $\mathbf{e}_R$ . Označimo lokacijo  $i$ -tega naboja z  $\mathbf{d}_i$  in oddaljenost od njega do opazovane točke z  $r_i$ . Potem velja  $U = \kappa_e \sum e_i / r_i$ . Naj bo opazovana točka daleč proč. Potem velja  $r_i = R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R$ . Ob upoštevanju  $d_i \ll R$  sledi  $1/r_i = (1/R) \cdot (1 + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R / R)$ , to je,

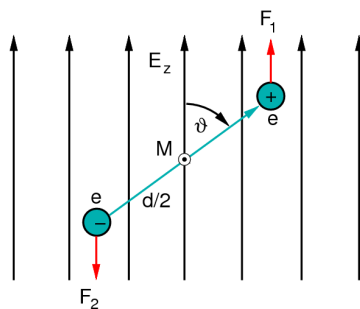
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} \quad (37.19)$$

$$\mathbf{p}_e = \sum e_i \mathbf{d}_i.$$

Vpeljali smo dipolni moment nevtralnega oblaka. Daleč proč od oblaka je polje (približno) dipolno.

Dipol v električnem polju

Če zaide dipol v električno polje, deluje na vsakega izmed njegovih dveh nabojev električna sila. V homogenem polju sta sili na posamičen naboj nasprotno enaki in celotna sila je zato nič. Vendar pa sili izvajata tudi navor in ta ni enak nič.

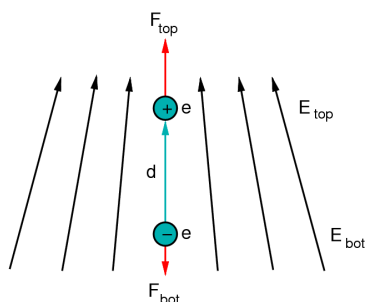


**Slika 37.7** Na dipol v homogenem električnem polju deluje navor, ki ga poskuša usmeriti vzdolž silnic.

Naj bo dipol postavljen pravokotno na električne silnice. Potem čuti navor  $M = 2 eE d/2 = p_e E$ . Če je dipol glede na silnice odklonjen za kot  $\theta$ , pa čuti navor  $M = p_e E \sin \theta$ . V vektorski obliki zapišemo

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}. \quad (37.20)$$

Neto sila na dipol se pojavi le, če je polje nehomogeno. Tedaj sili na naboja nista nasprotno enaki. Naj ima polje navpični gradient  $\partial E/\partial z$  in naj se dipol v njem usmeri navpično. Na zgornji naboj potem deluje sila  $eE_{\text{top}}$  navzgor in na spodnji naboj sila  $eE_{\text{bot}}$  navzdol. Razlika obeh sil znaša  $F = e(E_{\text{top}} - E_{\text{bot}})$ . Velja še  $E_{\text{top}} = E_{\text{bot}} + (\partial E/\partial z)d$ , zato  $F = p_e \partial E/\partial z$ . Sila deluje v smeri naraščanja polja.



**Slika 37.8** Na dipol v nehomogenem električnem polju deluje sila, ki ga poskuša povleči v smeri močnejšega polja.

Če je dipol nagnjen glede na polje, pa moramo upoštevati ustrezne projekcije. Naj bo pri negativnem naboju jakost polja  $\mathbf{E}$  in pri pozitivnem  $\mathbf{E} + d\mathbf{E}$ . Sila na dipol je potem  $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + d\mathbf{E}) - e\mathbf{E} = ed\mathbf{E}$ . Spomnimo se obrazca za smerni diferencial skalarnega polja  $dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)U$  in ga uporabimo za smerni diferencial vektorskega polja:  $d\mathbf{E} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ . Pomnožimo z  $e$  in dobimo

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_e \cdot \nabla)\mathbf{E}. \quad (37.21)$$

To je sila, s katero naelektrjen glavnik privlači k sebi koščke papirja, v katerih je induciral električne dipole.

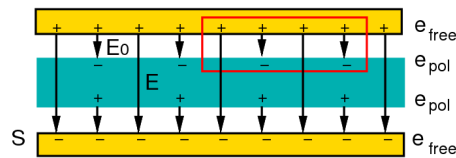
V stabilni ravnovesni legi je dipol orientiran v smeri električnih silnic. Ko ga zasukamo za kot  $\varphi$ , znaša velikost navora  $M = p_e E \sin \varphi$ . Pri tem opravimo delo  $A = \int M d\varphi = -p_e E \cos \varphi + p_e E$ . To delo lahko dipol vrne, zato z njim definiramo potencialno energijo dipola  $\Delta W = A$  takole:

$$W = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}. \quad (37.22)$$

S to definicijo narašča energija od  $-p_e E$  v stabilni legi do  $+p_e E$  pri zasuku  $180^\circ$ .

### 37.5 Polarizacija snovi

Vemo, da se kapaciteta ploščatega kondenzatorja poveča, če vanj vstavimo dielektrično snov, na primer steklo (25.4). Faktor povečanja smo poimenovali dielektričnost snovi,  $\epsilon$ . Povečanje kapacitete seveda pomeni, da se zmanjša napetost med ploščama. Ker je napetost krivuljni integral električne poljske jakosti, pa sklepamo, da se ta v dielektriku zmanjša, čeprav ostajajo naboji na ploščah nespremenjeni. Kako je to mogoče?



**Slika 37.9** Polarizacija dielektrika v kondenzatorju. Homogeno električno polje influencira v snovi električne dipole. Zato se na zgornji in spodnji plošči pojavita nasprotno enaka vezana naboja. Polje v snovi je manjše kot polje v praznem kondenzatorju.

Homogena polarizacija

Zamislimo si zaprto škatlo, ki objema mejo med ploščo in dielektrikom. Ker je električno polje v slednjem zmanjšano, sklepamo, da je neto naboj znotraj ploskve manjši, kot bi bil brez dielektrika. Sklep je samo eden: na površini dielektrika se je moralo pojaviti nekaj nasprotnih nabojev k tistim, ki so na plošči. Od kod so prišli? Iz atomov dielektrika. V teh atomih namreč razmakne zunanje električno polje težišči pozitivnega in negativnega naboja v smeri polja. Inducirani naboji se v notranjosti dielektrika izravnavajo (zaradi homogenosti polja), na površini pa ne in tam se pojavi vezan površinski naboj. Ta razredči obstoječi naboj na ploščah.

Naj dobi atom ali molekula električni moment  $\mathbf{p}_e = \mathbf{e}d$ . Vsoto momentov v prostorninski enoti poimenujemo *polarizacija snovi*:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}_e}{dV} = n\mathbf{e}d. \quad (37.23)$$

Zaradi polarizacije se na površini  $S$  nabere  $e_{pol} = Sned$  naboja oziroma njegova ploskovna gostota  $\sigma_{pol} = P$ . Pretok skozi obravnavano škatlo torej zapišemo  $E = (\sigma_{free} - \sigma_{pol})/\epsilon_0$  oziroma  $E = (\sigma_{free} - P)/\epsilon_0$ .

Če polje ni premočno, predpostavimo sorazmernost

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (37.24)$$

Sorazmernostni faktor  $\chi_e$  poimenujemo *električna susceptibilnost*. Potem znaša v dielektriku  $E = \sigma_{free}/\epsilon_0(1 + \chi_e)$ . S tem je določena tudi napetost med ploščama kondenzatorja

$U = El$  in njegova kapaciteta  $C = \sigma_{\text{free}}S/U = (1 + \chi_e)\epsilon_0S/l$ . To pomeni, da

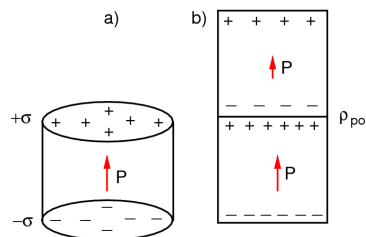
$$\epsilon = 1 + \chi_e. \quad (37.25)$$

Nehomogena polarizacija

Kaj pa, če polarizacija ni homogena? Naboj, ki se premakne skozi namišljeno majhno ploskev v dielektriku, je potem enak njeni ploščini krat normalni komponenti polarizacije, torej  $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ . Skozi zaprto ploskev vstopajo in izstopajo polarizacijski naboji. Znotraj ploskve se zato spremeni količina naboja za  $\Delta e = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$ . Spremembo naboja izrazimo kot  $\Delta e = \int \rho_{\text{pol}} dV$ . Izenačitev obeh izrazov pove  $\int \rho_{\text{pol}} dV = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$ . Ploščinski integral polarizacije izrazimo z prostorninskim integralom njene divergence, pa dobimo

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (37.26)$$

Tolikšna gostota polariziranega naboja se torej nabere v vsaki točki, kjer je divergenca polarizacije različna od nič. To so pravi naboji; polarizacijski naboji jim rečemo samo zato, da pojasnimo, kako so se tam znašli.



**Slika 37.10** Vezani neto naboji. a) Homogeno polariziran valj. Na zgornji in spodnji ploskvi ima vezan naboj. b) Dva različno polarizirana valja drug vrh drugega. Na vmesni ploskvi obstaja vezani neto naboj.

Osnovne enačbe v dielektriku

Osnovni enačbi elektrostatične sta divergenčna in rotorska. V divergenčni enačbi  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  pomeni  $\rho$  gostoto vseh nabojev, prostih in polarizacijskih. Zapišimo  $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$  in  $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ , pa dobimo

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.27)$$

Upoštevajoč  $\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$  se dobljena enačba poenostavi v

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.28)$$

To je torej divergenčna enačba, ki velja v dielektrikih. Druga enačba, rotorska, pa seveda ostaja nespremenjena:  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Na povsem enak način kot v praznem prostoru iz obeh enačb sledi

$$\nabla \cdot (\epsilon\nabla U) = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}. \quad (37.29)$$

Dielektričnost pustimo pod znakom odvajanja ter s tem upoštevamo, da se lahko v prostoru spreminja.

Merjenje susceptibilnosti

Kako pa merimo susceptibilnost oziroma permeabilnost dielektrikov in kakšne so številčne vrednosti? Permeabilnost merimo po definiciji: izmerimo kapaciteto ploščatega



kondenzatorja brez in z dielektrikom med ploščama. Razmerje kapacitet je enako permeabilnosti. S tem je določena tudi susceptibilnost. Zelo majhne spremembe kapacitete merimo z uporovnim mostičkom [24.10] (z dvema kondenzatorjema in dvema uporoma) in izmeničnim virom napetosti. Pokaže se naslednje.

Dielektriški so treh tipov. — V prvih je dielektričnost neodvisna od jakosti polja in specifična susceptibilnost  $\chi_e/\rho$  se ne spreminja s temperaturo. Takšna sta, na primer, zrak ( $\epsilon = 1,0005$ ) in tekoči kisik (1,5). Predstavljamo si, da so njihovi atomi/molekule nepolarni, to je, da nimajo stalnih električnih momentov. Zunanje polje momente šele ustvari. — Druga skupina ima tudi dielektričnost neodvisno od jakosti polja, njihova specifična susceptibilnost pa pada z naraščajočo temperaturo. Takšni so, na primer, vodna para pri 100 °C in 1 atm ( $\epsilon = 1,006$ ), tekoča voda pri 20 °C (80) in led pri -20 °C (16). Predstavljamo si, da so te molekule polarne, to je, da imajo stalne električne dipole. Zunanje polje jih obrača v svojo smer. Čim višja je temperatura, tem težje jih polje "počeše". — Nazadnje obstaja še nekaj spojin, katerih permeabilnost je zelo visoka in niti približno konstantna. Z njimi se ne bomo ukvarjali.

Polje v rovu in reži

V snovi, postavljeni v zunanje električno polje, se preko influence dipolov vzpostavi notranje polje. Če je snov plinasta ali tekoča, je to polje neposredno dostopno meritvam. Če pa je snov trdna, moramo v njej izvrtati votlino, kjer želimo meriti. Vendar pa električna poljska jakost v tej votlini ni enaka tisti v snovi, in je celo odvisna od oblike votline. Posebno zanimiva sta dva mejna primera za votlino: prečna reža in vzdolžni rov. Pretočna enačba za eno ploskev reže pove, da je polje v reži večje od polja v snovi, in sicer je takšno, kot v kondenzatorju brez dielektrika:  $E_{\text{slot}} = \epsilon E = E_0$ . Cirkulacijska enačba za rob rova pa pove, da je polje v rovu enako polju v snovi  $E_{\text{tunnel}} = E$ .

### 37.6 Magnetno polje

Jakost polja

Jakost magnetnega polja  $B$  v izbrani točki prostora, recimo znotraj dolge tuljave s tokom, smo definirali (25.5) preko magnetne sile  $F_m$  na tamkajšnji testni tokovodnik  $Il$ . Vektorsko ponovimo:

$$\mathbf{F}_m = Il \times \mathbf{B}. \quad (37.30)$$

Magnetno poljsko jakost že znamo izmeriti z vrtljivo indukcijsko tuljavo in priključenim balističnim galvanometrom [25.6]. Lepo bi bilo, ko bi jo znali tudi izračunati, in sicer za vsakršno porazdelitev tokov po prostoru.

Polje tokovodnika

K jakosti polja v izbrani točki prispevajo vsi *tokovni elementi* v prostoru. Žal pa poskusov s posamičnimi tokovnimi elementi ne moremo delati. Tako tudi ne moremo neposredno izmeriti, kakšno

je njihovo polje. Vse, kar lahko storimo, je tole: predpostavimo, da je polje tokovnega elementa takšno ali drugačno ter da se posamična polja vektorsko seštevajo; izračunamo, kakšno bi morale biti potem polje nekaterih preprosto oblikovanih tokovodnikov, recimo dolge ravne žice ali krožne zanke; in preverimo s poskusom, ali je res tako.

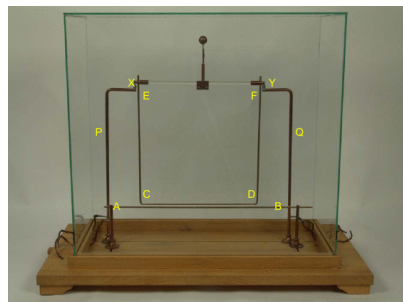
Prva misel, ki nas obide, je tale: če pojema električno polje s kvadratom oddaljenosti od točkastega izvora, pojema morda tudi magnetno polje tokovnega elementa na tak način; hkrati pa morda v izbrani smeri šteje zgolj pravokotna projekcija tokovnega elementa in ne celotni element. Poskusimo torej s predpostavko (BIOT/SAVART)

$$\mathbf{B}_P = \kappa_m \oint \frac{I d\mathbf{s}_Q \times \mathbf{n}_{QP}}{r_{QP}^2}. \quad (37.31)$$

Oznaka  $\mathbf{B}_P$  pomeni poljsko jakost v točki P. Iz tokovnega elementa  $I d\mathbf{s}_Q$ , ki je v točki Q, je proti P usmerjen enotni vektor  $\mathbf{n}_{QP}$ . Razdalje med obema točkama je  $r_{QP}$ . Konstante  $\kappa_m$  zaenkrat ne moremo določiti.

Sila med vodnikoma

Ali je domneva pravilna? Izračunajmo, kakšno bi morale biti polje dolgega ravnega vodnika! Iz izbrane točke na oddaljenosti  $R$  od vodnika vidimo tokovne elemente pod različnimi koti  $\varphi$  in na različnih oddaljenostih  $r$ . Vidna dolžina (pravokotna projekcija) takega elementa znaša  $ds = r d\varphi$  in  $R = r \cos \varphi$ , zato  $\int ds/r^2 = 1/R$ , torej  $B = 2\kappa_m I/r$ . Polje pojema obratno sorazmerno z oddaljenostjo od vodnika. Če torej drug ob drugega obesimo dva dolga vodoravna vodnika, bo eden drugega privlačeval s silo na dolžinsko enoto  $F/l \propto I_1 I_2/r$ . To pa zlahka preverimo eksperimentalno in ugotovimo, da res drži (AMPERE).



**Slika 37.11** Sila med dvema vodnikoma AB in CD. Prikazana je replika priprave, s katero je bil poskus prvič izveden. (Oldenburg Universität)

Začetna domneva o polju tokovnega elementa je zato podkrepljena in jo bomo do morebitnega preklica imeli za pravilno.

Polje tokov

Če tokovi niso tanki, marveč razmazani po prostoru, jih opišemo z gostoto tokov  $\mathbf{j} = d\mathbf{I}/dS$ . Magnetno polje, ki ga ustvarjajo, pa se zato zapiše v obliki

$$\mathbf{B}_P = \kappa_m \oint \frac{\mathbf{j}_Q \times \mathbf{n}_{QP}}{r_{QP}^2} dV_Q. \quad (37.32)$$

Kot vidimo, so enačbe za magnetno polje tokov presenetljivo podobne enačbam za električno polje nabojev.

### 37.7 Pretok in cirkulacija

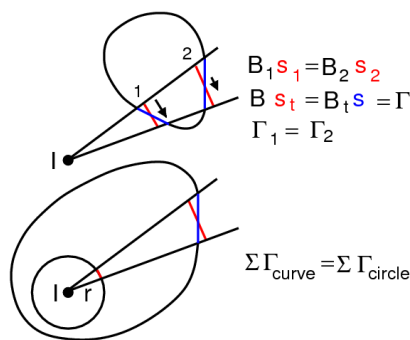
**Pretok** Slike magnetnih polj z opilki kažejo, da so magnetne silnice okrog tokov vedno sklenjene: nimajo ne izvorov ne ponorov. To nas navede na domnevo, da je pretok magnetnega polja skozi vsako zaprto ploskev enak nič. Postulirajmo torej *zakon o magnetnem pretoku*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (37.33)$$

oziroma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (37.34)$$

**Cirkulacija** Kaj pa cirkulacija polja? Lotimo se je po zgledu za pretok električnega polja!



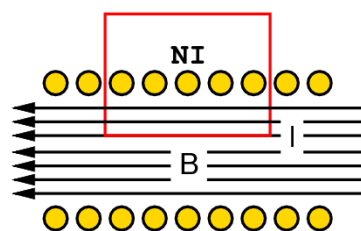
**Slika 37.12** Cirkulacija magnetnega polja vzdolž sklenjene zanke je sorazmerna z objetim tokom.

Objemimo polje ravnega vodnika s krožno zanko polmera  $r$ ! Zanka naj leži pravokotno na vodnik. Cirkulacija po tej zanki znaša  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r = 2\kappa_m I \cdot 2\pi$ . Ker  $B \propto 1/r$ , je prav takšna tudi cirkulacija po katerikoli drugi zanki, ki tok objema. Če je znotraj zanke več tokov, pa šteje njihova neto vsota. Navedene ugotovitve posplošimo v *zakon o magnetni cirkulaciji (AMPERE)*:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi\kappa_m I. \quad (37.35)$$

Z besedami: cirkulacija magnetnega polja po zaključeni zanki je sorazmerna z neto tokom skozi njo. Ni treba, da je zanka ravninska, lahko je poljubno skrivenčena.

**Cirkulacija v tuljavi** Pa v dolgi tuljavi objemimo  $N$  navojev na dolžini  $l$  s pravokotno zanko!



**Slika 37.13** Cirkulacija po zanki, ki objema navoje v dolgi tuljavi. K celotni cirkulaciji prispeva le notranja stranica.

Polje  $B$  znotraj tuljave je homogeno, zunaj pa enako nič, zato znaša cirkulacija po zanki  $B \cdot l = 4\pi\kappa_m NI$ . Vemo pa, da za tuljavo velja  $B = \mu_0 NI/l$ , iz česar sledi

$$\kappa_m = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (37.36)$$

S tem smo določili doslej nepoznano konstanto  $\kappa_m$ . Znaša  $1,00 \cdot 10^{-7} \text{ Am/Vs}$ . Zakon o magnetni cirkulaciji lahko zato zapišemo v lepši obliki

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (37.37)$$

oziroma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.38)$$

Zakon o magnetni cirkulaciji ima pri računanju magnetnih polj podobno vlogo kot zakon o električnem pretoku pri računanju električnih polj.

### 37.8 Magnetni potencial

Magnetni potencial

Divergenca rotorja poljubnega polja je enaka nič (32.19). To pomeni, da lahko jakost danega magnetnega polja  $\mathbf{B}$  zapišemo kot rotor ustrezno izbranega *magnetnega potenciala*  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (37.39)$$

Ker dobimo jakost polja z odvajanjem potenciala, je ta nedoločen do poljubne aditivne konstante. Vprašamo se lahko celo: če  $\mathbf{A}$  določa  $\mathbf{B}$  (preko svojega rotorja), ali še kakšen drugačen  $\mathbf{A}'$  določa isti  $\mathbf{B}$ ? Torej: kdaj velja  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$ ? Tedaj, ko  $\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0$ . Toda: če je rotor kakšnega vektorja enak nič, mora biti ta vektor gradient nekega skalarja:  $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$ . To pa pomeni, da je  $\mathbf{A}$  nedoločen celo do aditivnega člena  $\nabla \psi$ .

Vektorska potencialna enačba

Jakost polja  $\mathbf{B}$  je določena s tokovi, zato je tako tudi s potencialom. Kako je potencial potem odvisen od tokov? V rotorsko enačbo  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  vstavimo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  in dobimo  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$ . Dvojni vektorski produkt znamo zapisati kot  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ . Postavimo še pogoj  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . S tem ne vplivamo na  $\mathbf{B}$ . (Ker  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$ , lahko s primerno izbiro  $\psi$  napravimo kakršenkoli  $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ .) Tako dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.40)$$

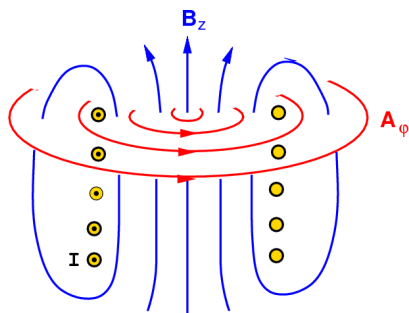
To je vektorska potencialna enačba, torej tri skalarne potencialne enačbe za tri komponente tokov. Vsaka od njih je formalno identična s potencialno enačbo za naboje. Torej poznamo tudi njeno rešitev:

$$\mathbf{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q dV_Q}{r_{QP}}. \quad (37.41)$$

Kadar v polju ni tokov, ampak so podane zgolj robne vrednosti potenciala, rešujemo enačbo  $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$  na podoben način kot njeno skalarno vzornico.

Vzorčni potenciali

Zanimivo bi bilo videti, kakšni so potenciali nekaterih znanih magnetnih polj.

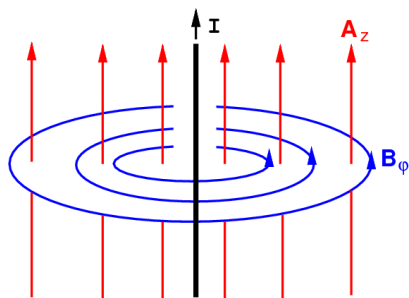


**Slika 37.14** Magnetni potencial tuljave. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

Magnetna poljska jakost znotraj dolge tuljave premera  $R$  je konstantna in usmerjena vzdolž tuljave:  $B_z = \mu_0 NI/l$ . Rotor iskanega potenciala  $\mathbf{A}$  ima torej le komponento  $\text{rot}_z \mathbf{A} = B_z$ . Tokovnice potenciala so zato koncentrični krogi. Komponento rotorja zapišemo v polarnih koordinatah kot  $(1/r)(\partial r A_\phi / \partial r - \partial A_r / \partial \phi) = B_z$ . Drugi člen je nič. Kakšen mora biti  $A_\phi(r)$ , da je enačba izpolnjena? Očitno  $A_\phi = Kr$ , kar vodi na  $2K = B_z$  oziroma  $K = \mu_0 NI/2l$ . Velikost potenciala torej narašča linearno od osi proti ovojem.

Zunaj ovojev mora biti rotor v vsaki točki enak nič:

$(1/r)(\partial r A_\phi / \partial r) = 0$ . To je res, če  $A_\phi = K'/r$ . Zaradi zveznosti mora veljati  $K'/R = K/R$ . Velikost potenciala torej pada obratno sorazmerno z oddaljenostjo od ovojev.



**Slika 37.15** Magnetni potencial ravnega vodnika. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

Magnetno polje okrog dolgega ravnega vodnika ima koncentrične tokovnice:  $B_\phi = \mu_0 I / 2\pi r$ . To pomeni, da ima rotor potenciala le tangento komponento  $\text{rot}_\phi \mathbf{A} = B_\phi(r)$ . Tokovnice potenciala so ravne črte, vzporedne z vodnikom. Komponento rotorja zapišemo  $\partial A_r / \partial z - \partial A_z / \partial r = B_\phi(r)$ . Prvi člen je enak nič. Da bo enačba izpolnjena, mora veljati  $A_z = -K \ln r$ , iz česar sledi  $K = \mu_0 I / 2\pi$ . Velikost potenciala pada sorazmerno z logaritmom oddaljenosti.

Magnetno polje opišemo bodisi z njegovo jakostjo  $\mathbf{B}$  ali s potencialom  $\mathbf{A}$ . Kateri opis je "pravi"? Odgovor je odvisen od

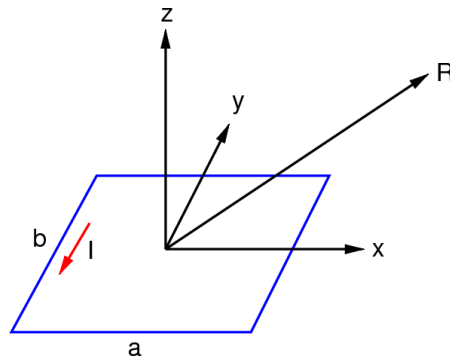
tega, kaj razumemo pod "pravi", in se zato z njim ne bomo ubadali.

### 37.9 Magnetni dipol

V atomih ujeti elektroni se – tako si predstavljamo – bolj ali manj gibljejo. Atomi torej niso zgolj skupki nabojev, ampak tudi drobni tokokrogi. Nekateri atomi, morda vsi, se zato vedejo kot drobceni magnetki s severnim in južnim polom. Rečemo, da so *magnetni dipoli*. Zaradi termičnega gibanja so dipoli usmerjeni v vse mogoče smeri. Če pa zaidejo v zunanje magnetno polje, se bolj ali manj usmerijo vzdolž njega. Dopustiti moramo, da velja podobno tudi za molekule.

Magnetni dipol

Preden se podrobneja lotimo atomarnih dipolov, moramo preučiti idealiziran magnetni dipol: pravokotno zanko s stranicama  $a$  in  $b$ , po kateri teče tok  $I$ . Zanko orientirajmo, kakor kaže slika.



**Slika 37.16** Magnetni dipol. Utelesa ga pravokotna zanka, po kateri teče tok.

V smeri  $z$  ni tokov, zato  $A_z = 0$ . V smeri  $x$  sta dva toka  $j_x$  vzdolž dveh stranic  $a$ . Potencial  $A_x$  teh tokov je formalno enak kot potencial  $U$  dveh nabitih palic z nabojem  $\rho$ . Palici imata nasprotno enak naboj. Pri velikih oddaljenostih zato ustvarjata dipolni potencial  $U = \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2$ . Dipolni moment je naboj na eni palici krat razmik med njima, torej  $p_e = \lambda ab$ . Z  $\lambda$  smo označili naboj na dolžinsko enoto, to je linearno gostoto naboja. Kosinus kota med  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{e}_r$  znaša  $-y/r$ . Tako zapišemo

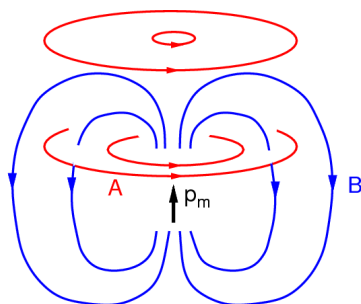
$U = -(\lambda ab / 4\pi\epsilon_0 r^2)(y/r)$ . Ko nadomestimo  $\lambda$  z  $I\mu_0\epsilon_0$ , preide  $U$  v  $A_x$ :

$$A_x = -\frac{\mu_0 I ab y}{4\pi r^2 r}. \quad (37.42)$$

Na enak način dobimo

$$A_y = \frac{\mu_0 I ab x}{4\pi r^2 r}. \quad (37.43)$$

Tokovnice vektorskega potenciala (pri velikih razdaljah) torej potekajo v krogih okrog osi  $z$  v isti smeri kot tok po zanki.



**Slika 37.17** Magnetni potencial dipola. Silnice polja so modre, tokovnice potenciala so rdeče. Obe polji sta osno simetrični.

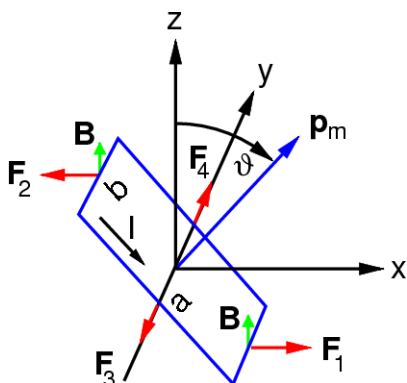
Magnetni moment Velikost potenciala je sorazmerna z  $Iab$ , to je, z *magnetnim momentom*  $p_m = Iab = IS$ . Če proglasimo magnetni moment za vektor, ki je normalen na zanko, pa lahko zapišemo magnetni potencial v vektorski obliki:

$$\mathbf{p}_m = IS \quad (37.44)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{e}_r}{r^2}.$$

Zapisana enačba velja za zanko poljubne oblike, saj si jo lahko mislimo sestavljeno iz samih pravokotnih zank.

Dipol v magnetnem polju Ko je magnetni dipol postavljen v magnetno polje, čuti navor in če je polje nehomogeno, še silo. V homogenem polju so razmere naslednje.

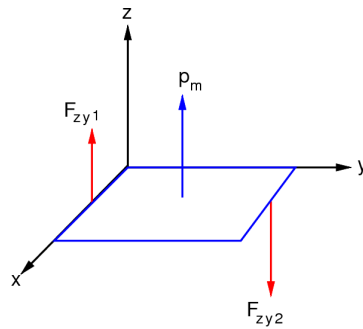


**Slika 37.18** Navor na magnetni dipol v homogenem polju. Magnetno polje poskuša zvrtni dipol v smer silnic.

Na vsako stranico  $b$  deluje magnetna sila  $F = IbB$  z ročico  $(a/2) \sin \theta$ . Navor obeh sil torej znaša  $M = 2 \cdot IbB(a/2) \sin \theta = p_m B \sin \theta$ . Vektorsko zapišemo

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (37.45)$$

V nehomogenem polju pa so razmere takšne.



**Slika 37.19** Sila na magnetni dipol v nehomogenem polju. Magnetno polje poskuša potegniti dipol v smeri gradienta silnic.

Magnetni moment naj bo usmerjen vzdolž osi  $z$ . Da bomo splošni kljub posebni orientaciji dipola, naj bo magnetno polje usmerjeno poljubno. — Vzdolž osi  $z$  deluje neto sila  $F_{zy1} - F_{zy2} = Idx(-\Delta B) = -I dx dy \partial B_y / \partial y = -IS \partial B_y / \partial y$ . — Podobno velja za neto silo preostalih dveh stranic:  $F_{zx1} - F_{zx2} = -IS \partial B_x / \partial x$ . — Obe neto sili seštejemo in dobimo  $F_z = -p_m(\partial B_y / \partial y + \partial B_x / \partial x)$ . Ker je divergenca polja enaka nič, mora biti izraz v oklepaju enak  $-\partial B_z / \partial z$ , torej  $F_z = p_m \partial B_z / \partial z$ . — Podobno velja za neto sili vzdolž preostalih dveh komponent:  $F_x = p_m \partial B_x / \partial x$  in  $F_y = p_m \partial B_y / \partial y$ . — Vse tri komponente zapišemo v obliki  $\mathbf{F} = p_m \cdot \nabla \mathbf{B} = \nabla(p_m \mathbf{B})$ . Ta enačba seveda velja za izbrani koordinatni sistem, ko je moment usmerjen vzdolž osi  $z$ . Kar zares šteje, je kot med magnetnim momentom in gradientom polja. V poljubno zasukanem koordinatnem sistemi zato zapišemo

$$\mathbf{F} = \nabla(p_m \cdot \mathbf{B}) = (p_m \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (37.46)$$

V stabilni ravnovesni legi je dipol orientiran v smeri magnetnih silnic. Ko ga zasukamo za kot  $\varphi$ , je velikost navora  $M = p_m B \sin \varphi$ . Pri tem opravimo delo  $A = \int M d\varphi = -p_m B \cos \varphi - p_m B$ . To delo lahko dipol vrne, zato z njim definiramo potencialno energijo dipola

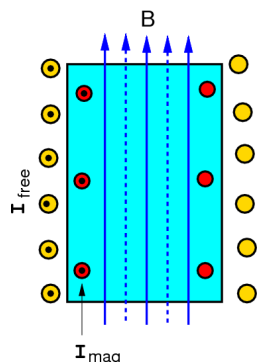
$$W = -p_m \cdot \mathbf{B}. \quad (37.47)$$

S to definicijo narašča energija od  $-p_m B$  v stabilni legi do  $+p_m B$  pri zasuku za  $180^\circ$ .

### 37.10 Magnetizacija snovi

Vemo, da se magnetno polje tuljave močno okrepi, če vanjo vstavimo železen valj [25.7]. Sklepamo, da so se na površini valja pojavili dodatni tokovi, ki tečejo okrog valja prav tako kot prosti tokovi po ovojih. Od kod so prišli? Kaže, da so atomi železa majhni tokokrogi, ki imajo svoje magnetne momente. Ti so usmerjeni v različne smeri. Ko pride železo v magnetno polje, pa se dipoli bolj ali manj usmerijo vzdolž njega. V notranjosti železa se drobni krožni tokovi med seboj izravnavajo, na površini pa ne in tam se pojavijo vezani površinski tokovi. Ti okrepijo že obstoječe proste tokove in s tem magnetno polje v notranjosti tuljave. Domnevamo, da se tudi v drugih snoveh pojavljajo magnetni dipoli, čeravno mnogo šibkejši.





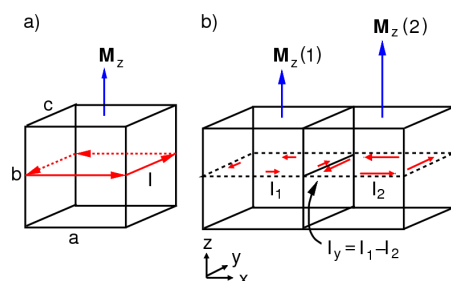
**Slika 37.20** Magnetizacija snovi v tuljavi. Homogeno magnetno polje (polne silnice) inducira v snovi atomarne tokovne zanke – magnetne dipole. Zato se na površini snovi pojavijo vezani tokovi in se obdajo z dodatnim magnetnim poljem (črtane silnice). Polje v snovi je zato večje kot v prazni tuljavi.

Homogena magnetizacija

Vsoto atomarnih magnetnih momentov  $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$  na prostorninske enoto poimenujemo *magnetizacija snovi*:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{p}_m}{dV} = nI\mathbf{S}. \quad (37.48)$$

Zaradi magnetizacije se po plašču valja pojavi tok  $I_{\text{mag}} = nVI = MI$ , torej njegova linearna gostota  $I_{\text{mag}}/l = M$ .



**Slika 37.21** Vezani neto tokovi. a) Homogeno magnetiziran kvader. Po plašču tečejo vezani tokovi. b) Dva različno magnetizirana kvadra drug ob drugem. Po vmesni ploskvi teče vezani neto tok.

Nehomogena magnetizacija

Če magnetizacija ni homogena, pa razdelimo snov na majhne kocke. Tokovi po njihovih stičnih ploskvah se ne izravnavajo več. Pogledajmo navpično vmesno ploskev dveh kock! — Iz slike razberemo neto vmesni tok  $I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b = -(\partial M_z / \partial x) ab$ . To pomeni, da  $j_y = I/ab = -\partial M_z / \partial x$ . — Obstaja pa še en prispevek k  $j_x$ , namreč sprememba  $M_x$  vzdolž  $z$ . Pogledamo vodoravno vmesno ploskev med dvema kockama in zanjo na podoben način ugotovimo  $j_x = \partial M_x / \partial z$ . — Oboje skupaj torej da  $j_x = \partial M_z / \partial x - \partial M_x / \partial z$ . To pa je komponenta rotorja magnetizacije v smeri osi  $x$ , zato zapišemo vektorsko:

$$\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (37.49)$$

Tolikšni tokovi se pojavijo v snovi, kjer je rotor magnetizacije različen od nič. To so pravi tokovi; magnetni jim rečemo samo zato, da pojasnimo, kako so nastali.

Osnovne enačbe v snovi

V rotorski enačbi  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  pomeni  $\mathbf{j}$  vse tokove, tako proste kot magnetizacijske. Upoštevajmo  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}_{\text{mag}}$  in  $\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$ , pa dobimo

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}. \quad (37.50)$$

Postavimo, da je magnetizacija sorazmerna z magnetnim poljem, in raziščimo posledice:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}. \quad (37.51)$$

Sorazmernostni koeficient poimenujemo *magnetna susceptibilnost*. Potem se rotorska enačba zapiše v obliki  $\nabla \times [(1 - \chi_m)\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}$ . Integralna oblika te enačbe, uporabljena na dolgi tuljavi, pove  $(1 - \chi_m)Bl = \mu_0 NI$ , torej  $B = \mu_0 NI / (1 - \chi_m)$ . Vemo pa že, da za snov v tuljavi velja  $B = \mu \mu_0 NI / l$ . Primerjava obeh enačb izda

$$\frac{1}{\mu} = 1 - \chi_m. \quad (37.52)$$

Za susceptibilnosti, ki so po velikosti mnogo manjše od 1, velja  $\mu = 1 + \chi_m$ . Rotorska enačba v (predpostavljeni linearni) snovi se zapiše kot

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}}. \quad (37.53)$$

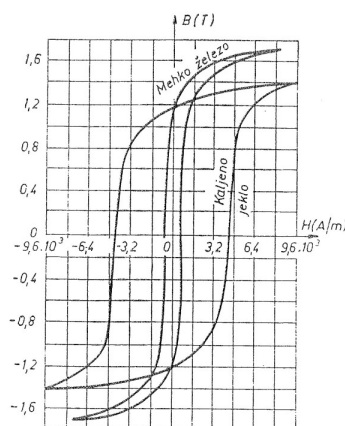
Merjenje  
susceptibilnosti

Kakšne pa so, s števkami, susceptibilnosti oziroma permeabilnosti raznih snovi in ali so magnetizacije res sorazmerne s polji? To ugotavljamo z merjenjem sile na vzorec snovi v znanem nehomogenem magnetnem polju. Pripravimo si močno tuljavo in izmerimo, na standarden način (z indukcijsko tuljavico), jakost in gradient polja ob ustju. Oboje lahko tudi izračunamo. Primerna je tuljava z dolžino 1 čevelj, zunanji premerom 1 čevelj, notranji premerom 1/3 čevlja, napajana z močjo nekaj sto kilowattov in hlajena s sto litri vode na minuto. To je že kar resna naprava. Takšna tuljava ima ob ustju jakost polja  $\sim 1 \text{ Vs/m}^2$  in gradient  $\sim 10 \text{ Vs/m}^2\text{m}$ . Potem tja obesimo vzorec snovi na občutljivi tehtnici ter izmerimo silo nanj:  $F = p_m \partial B / \partial z$ . Tipična sila na gramski vzorec snovi znaša nekaj milipondov. Iz sile in gradienta polja izračunamo magnetni moment  $p_m$ , ga delimo s prostornino vzorca  $V$  in dobimo magnetizacijo  $M$ . Iz enačbe  $M = (\chi_m / \mu_0) B$  nato izračunamo susceptibilnost in s tem tudi permeabilnost.

Paramagnetne in  
diamagnetne snovi

Pokaže se naslednje. Z izjemo železa, niklja in še nekaterih *feromagnetnih* snovi je magnetna permeabilnost vseh snovi zelo blizu 1. Od nje se razlikuje tipično za  $\pm 10^{-5}$ . Nekateri snovi imajo permeabilnost večjo od 1, to je, imajo pozitivno susceptibilnost; takšen je, na primer aluminij. Poimenujemo jih *paramagnetne*. Druge snovi pa imajo permeabilnost manjšo od 1, to je, imajo negativno susceptibilnost; primer je baker. Poimenujemo jih *diamagnetne*. Da je susceptibilnost snovi lahko negativna, je posebej presenetljivo: v takšni snovi se magnetni dipoli postavljajo proti smeri magnetnega polja. Zakaj je vse tako, kot je, ne moremo vedeti, ne da bi prej podrobneje raziskali gibanje nabojev v atomih. To nas še čaka.

Nekaj posebnega je železo in njegovi podobniki. Opisana merilna tuljava deluje na gramski vzorec železa s silo nekaj sto pondov! Zaradi tako močnih učinkov se lahko meritev magnetnih lastnosti feromagnetikov lotimo na bolj udoben način. Primeren je torus iz preučevane snovi. Na nasprotnih straneh sta naviti dve tuljavi; ena je preko ampermetra priključena na vir toka, druga pa na balistični voltmeter. Po korakih povečujemo tok in vsakokrat iz inducirane svenke napetosti izračunamo zvečanje magnetnega polja. Tako dobimo tabelo  $B$  proti  $I$ . Cirkulacija po zanki naokrog po torusu pove  $(B - M\mu_0) = \mu_0 NI/l$ . Če narišemo graf  $B$  proti  $NI/l$ , lahko za vsako točko grafa izračunamo tamkajšnjo magnetizacijo  $M$  in iz nje susceptibilnost ter permeabilnost.



**Slika 37.22** Histeriza mehkega železa in kaljenega jekla. Prikazana je odvisnost notranjega polja  $B$  v odvisnosti od zunanjega toka  $NI/l \equiv H$ . (Koškin, 1988)

V narisanim grafu opazimo naslednje. Z naraščanjem zunanjega magnetilnega toka  $H = NI/l$  narašča tudi notranje magnetno polje  $B$ . Naraščanje je nelinearno in se približuje konstantni nasičeni vrednosti  $B_{\max}$ . Ko nato zmanjšujemo tok  $H$  nazaj proti nič, se polje  $B$  tudi zmanjšuje, vendar pri  $H = 0$  preostane še nekaj polja. To je "remanentno" polje  $B_{\text{rem}}$ . Da polje zbijemo na nič, je potreben obraten "koercitivni" tok  $H_{\text{coerc}}$ . Z naraščanjem in nato z manjšanjem obratnega toka se ustrezno jača in slabi obratno magnetno polje in zgodba se ponovi. Jakost polja torej ni enolična funkcija zunanjih tokov, marveč je odvisna tudi od zgodovine polja. Rečemo, da ima polje *histerizo*. Za mehko železo izmerimo  $B_{\text{rem}} = 1,2 \text{ Vs/m}^2$  in  $H_{\text{coerc}} = 500 \text{ A/m}$ . Remanentno polje v železu ostane, ko izključimo magnetilni tok. Jeklo ima približno takšno remanenco kot mehko železo in tisočkrat večjo koercitivnost. Namagneteno jeklo je torej mnogo težje razmagnetiti in je zato primerno za stalne magnete.

V snovi, postavljeni v zunanje magnetno polje, se preko indukcije dipolov vzpostavi notranje polje. Če je snov plinasta ali tekoča, je to polje neposredno dostopno meritvam. Če pa je snov trdna, moramo v njej izvrtati votlino, kjer želimo meriti. Vendar pa magnetna poljska jakost v tej votlini ni enaka tisti v snovi, in je celo odvisna od oblike votline. Posebno zanimiva sta dva mejna

primera za votlino: prečna reža in vzdolžni rov. Pretočna enačba za eno ploskev reže pove, da je polje v reži enako polju v snovi:  $B_{\text{slot}} = B$ . Cirkulacijska enačba za rob rova pa pove, da je polje v rovu manjše od polja v snovi in sicer je takšno, kot je v prazni tuljavi:  $B_{\text{tunnel}} = \mu B = B_0$ .

### 37.11 Relativnost polj

Ko smo rekli, da je magnetna sila na naboj sorazmerna z njegovo hitrostjo, smo molče privzeli, da to hitrost merimo relativno na tokovodnike, ki magnetno polje ustvarjajo. Kaj pa, če hitrost merimo glede na kakšen drug referentni sistem?

Žica s tokom Poglejmo dolgo ravno žico, ki miruje v laboratorijskem sistemu S. Po žici naj tečejo v desno elektroni z linearno gostoto naboja  $\lambda$  in s hitrostjo  $v$  glede na S. Ozadje toku tvorijo pozitivni ioni, tudi z linearno gostoto  $\lambda$ ; žica je navzven nevtralna. Tok v žici znaša  $I = \lambda v$ . Zunaj žice, na razdalji  $r$  od nje, je pozitiven testni naboj  $e$ , ki se giblje v isto smer in z natanko isto hitrostjo, kot elektroni v žici. Kakšno silo čuti ta naboj?

Žica je nevtralna, zato naboj ne čuti električne sile. Ker pa se giblje, čuti magnetno silo  $F_m = evB$  proč od žice. Ker  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , znaša ta sila  $F_m = e\mu_0 \lambda v^2 / 2\pi r$ . Testni naboj se zato pospeši proč od žice.

Pa pogledajmo na isto žico iz koordinatnega sistema S', v katerem elektroni (in testni naboj na začetku) mirujejo. V tem sistemu se ionsko ozadje giblje s hitrostjo  $v$  proti levi. Ker je testni naboj v S' pri miru, ne more čutiti nobene magnetne sile. Zdi se tudi, da ne more čutiti nobene električne sile, saj imajo negativni in pozitivni naboji v žici (v sistemu S) enako gostoto. Torej se testni naboj sploh ne bi smel pospešiti od žice, kar je seveda skregano z realnostjo. Kje smo zašli?

Relativnost gostote nabojev V sistemu S sta gostoti pozitivnega in negativnega naboja res popolnoma enaki, sicer bi se pojavilo električno polje, ki pa ga bi mobilni elektroni hitro nevtralizirali. V sistemu S' pa se ioni gibljejo s hitrostjo  $v$  in relativistično skrajšanje dolžin jim poveča gostoto na  $\lambda / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \lambda + \lambda v^2/2c^2$ . Elektroni pa so pri miru, zato je njihova gostota manjša kot v S za  $\lambda v^2/2c^2$ . To pomeni, da ima žica, opazovana iz S', neto gostoto naboja  $\lambda v^2/c^2$ . Okrog sebe zato ustvarja električno polje  $E = (\lambda v^2/c^2) / 2\pi \epsilon_0 r$ . Testni naboj čuti silo  $F_e = eE$ , ki je (ko vstavimo  $E$ ) natanko enaka sili  $F_m$ .

Čisto magnetna sila v S je enaka čisto električni sili v S', vsaj za neprevelike hitrosti! Opazovalca v obeh sistemih torej vidita enak pospešek testnega naboja, le da ga eden pripiše magnetni, drugi pa električni sili. Električne in magnetne sile – ter zato tudi električna in magnetna polja – niso nekaj absolutnega, ampak so odvisne od tega, iz katerega opazovalnega sistema opazujemo.

Transformacija izvorov polj

Kakšna pa je transformacija nabojev in tokov, ko sedlamo iz enega opazovalnega sistema v drugega? Videli smo, da če je gostota nabojev v njihovem lastnem sistemu (kjer mirujejo) enaka  $\rho_0$ , potem je v sistemu, ki se giblje s hitrostjo  $v$ , gostota povečana:  $\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . V tem sistemu je gostota toka  $j = \rho v = \rho_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Spomnimo pa se tudi, da sta energija  $E$  in gibalna količina  $\mathbf{G}$  delca, ki se giblje s hitrostjo  $v$ , naslednja:  $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  in  $\mathbf{G} = m\mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Količini  $\rho$  in  $\mathbf{j}$  sta torej odvisni od hitrosti  $v$  natanko tako, kot količini  $E$  in  $\mathbf{G}$ . Iz tega sklepamo, da se četverica količin  $\rho$  in  $\mathbf{j}$  transformira prav tako kot četverica  $E$  in  $\mathbf{G}$ , to je, prav tako kot četverica  $t$  in  $\mathbf{r}$  (EINSTEIN):

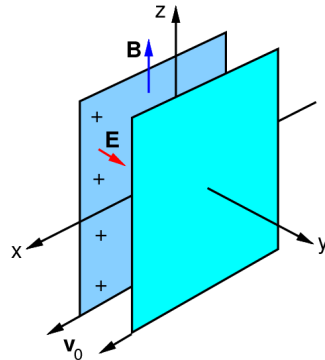
$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(j_x - u\rho) \\ j'_y &= j_y \\ j'_z &= j_z \\ \rho' &= \gamma(\rho - u j_x / c^2). \end{aligned} \quad (37.54)$$

V kateremkoli opazovalnem sistemu že opazujemo naboje in tokove, vedno veljajo zanje iste osnovne enačbe elektrodinamike. Gibanje delcev, ki ga z njimi izračunamo, bo vedno enako.

### 37.12 Transformacija polj

Opazovalni sistem

Zamislimo si, da sedimo na ravni cesti in gledamo vzdolž nje (os  $x$ ). Ob straneh sta dva navpična zidova, ki polzita vzdolž ceste s hitrostjo  $v_0$ . Zidova sta nasprotno enako naelektrena: desni pozitivno in levi negativno. V lastnem opazovalnem sistemu nabojev, torej v sistemu, povezanem z zidom, je ploskovna gostota nabojev  $\sigma_0$ . Ker nas obdajajo naboji in tokovi, čutimo električno in magnetno polje. Cesta je opazovalni sistem S.



**Slika 37.23** Transformacija polj. Nasprotno nabiti navpični plošči se gibljeta vzdolž osi  $x$ . Mirujoč opazovalec zaznava električno in magnetno polje  $E_y$  in  $B_z$ . Gibajoč se opazovalec pa zaznava drugačni polji  $E'_y$  in  $B'_z$ .

V S je zaradi relativističnega skrčenja gostota nabojev večja:  $\sigma = \sigma_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ . Električno polje je homogeno in poteka od desne proti levi. Po zakonu o električnem pretoku velja  $E_y = \sigma / \epsilon_0$  (1). Magnetno polje je homogeno in poteka navpično navzgor. Po zakonu o magnetni cirkulaciji velja  $B_z = \mu_0 \sigma v_0$  (2).

Gibanje prečno na polje

Po cesti pripelje tovornjak s hitrostjo  $v$  glede na cesto. Tovornjak je opazovalni sistem S'. Glede na tovornjak se zidova gibljeta s hitrostjo  $v'_0 = (v_0 - v) / (1 + v_0 v / c^2)$  (3). Gostota nabojev na stenah je  $\sigma' = \sigma_0 / \sqrt{1 - v'^2_0/c^2}$ , torej  $\sigma' = \sigma \sqrt{1 - v_0^2/c^2} / \sqrt{1 - v'^2_0/c^2}$ .

Vstavimo  $v'_0$  iz (3) in dobimo  $\sigma' = \sigma(1 - v_0v/c^2) / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$  (4). S tem pa tudi lahko izračunamo  $E'_y = \sigma'/\epsilon_0$  in  $B'_z = \mu_0\sigma'v_0$  ter ob upoštevanju (1) in (2) dobimo

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - uE_y/c^2). \end{aligned} \quad (37.55)$$

Namesto dveh navpičnih sten si zamislimo vodoravna tla in strop, torej namesto ploskev v ravnini  $xz$  ploskvi v ravnini  $xy$ . Razmišljanje je enako in rezultat naslednji:

$$\begin{aligned} E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) \\ B'_y &= \gamma(B_y + uE_z/c^2). \end{aligned} \quad (37.56)$$

Gibanje vzdolž polja

Do zdaj se je tovornjak – gibajoči se opazovalec – premikal pravokotno na električno in magnetno polje. Ostane še premikanje vzporedno z njima. Za električno polje si zamislimo dve steni, pravokotni na cesto. Opazovalcu na tovornjaku, ki vozi od ene stene proti drugi, se njuna ploščina nič ne spremeni, razdalja med obema pa se skrajša. Ker je jakost električnega polja med stenama odvisna le od ploskovne gostote naboja in nič od vmesne razdalje, velja

$$E'_x = E_x. \quad (37.57)$$

Pogled na zapisane enačbe kar kliče po tem, da bi morale veljati še

$$B'_x = B_x. \quad (37.58)$$

Domnevo upravičimo takole. Zamislimo si, da poteka cesta po osi dolge tuljave s tokom. Vozniku se zdi tuljava krajša:  $l' = l\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ , to je, število ovojev na dolžinsko enoto,  $N/l'$ , je zanj večje. Magnetno polje bi moralo zato biti večje. Vendar pa je tok, ki ga voznik izmeri v ovojih, manjši od toka, ki ga izmeri cestar. Slednji namreč s stališča voznika uporablja uro, ki teče počasneje, zato isti pretočeni naboj preračunava na manj časovnih enot, torej meri večji tok. Velja  $I' = de/dt' = (dt/dt')de/dt = (dt/dt')I = I/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ . V produktu  $NI'/l'$ , s katerim je magnetno polje določeno, se obe spremembi izravnata.

Polja in izvori

Spremembe polj (37.55-58) (EINSTEIN) so lokalne. To pomeni, da so z vrednostmi  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$ , ki ju opazimo v neki prostorsko časovni točki, enolično določene vrednosti  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  v kateremkoli drugem opazovalnem sistemu. Zato so transformacijske enačbe za polja, ki smo jih postavili s pomočjo posebno preprostih izvorov – ploščatega kondenzatorja in dolge tuljave, veljavne splošno. Tako se namreč transformirajo polja; izvori, ki ta polja povzročajo, so pri vsem skupaj nepomembni.

### 37.13 Gibanje skozi polja

Transformacijske enačbe za polja omogočajo, da izračunamo, kakšna polja vidimo, ko se gibljemo mimo poljubnih stalnih

nabojev in tokov. Dober primer je letalo, ki leti skozi zemeljsko električno in magnetno polje. Njegova hitrost naj bo zavidljivih  $v = 300 \text{ m/s}$ . Vendar je to je mnogo manj od svetlobne hitrosti, zato lahko v transformacijskih enačbah uporabimo približek  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + v^2/2c^2$ , ki zneso za letalo  $1 + 5 \cdot 10^{-13}$ . Tipično električno polje je navpično, usmerjeno je proti tlu in ima jakost  $\sim 100 \text{ V/m}$ . Magnetno polje nad severnim polom je navpično, usmerjeno je proti nebu in ima jakost  $\sim 10^{-5} \text{ Vs/m}^2$ .

Prečenje električnega polja Privzemimo, da leti letalo le skozi navpično električno polje  $E_z$ . Leti naj vodoravno v poljubno smer (os  $x$ ). Transformacijske enačbe povedo, da vidi pilot močnejše električno polje  $E'_z = \gamma \cdot E_z$  in novonastalo magnetno polje  $B'_y = \gamma \cdot vE_z/c^2$ . Sprememba električnega polja za  $5 \cdot 10^{-11} \text{ V/m}$  je nezaznavna. Nastalo magnetno polje pa znaša  $3 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2$ , kar je tudi nezaznavno.

Prečenje magnetnega polja Naj leti letalo le skozi navpično magnetno polje  $B_z$ . Leti naj vodoravno v poljubno smer (os  $x$ ). Transformacijske enačbe povedo, da vidi pilot močnejše magnetno polje  $B'_z = \gamma B_z$  in novonastalo električno polje  $E'_y = \gamma vB_z$ . Sprememba magnetnega polja za  $5 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2$  je nezaznavna. Nastalo električno polje pa znaša  $3 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$  in je na prvi pogled zlahka merljivo: z voltmetrom moramo le izmeriti potencialno razliko med koncema kril. V praksi tega žal ni mogoče narediti, ker se tudi voltmeter s priključki giblje skozi polje. Seveda pa to lahko naredimo (in smo že naredili) v laboratoriju s premikanjem prečke po tirnicah.

Nastanek prečnega električnega polja pri gibanju opazovalca skozi magnetno polje ni nič drugega kot relativistični opis za indukcijo napetosti pri gibanju vodnika:  $E'_y = \gamma vB_z \rightarrow U_i = Bvl$ . To kaže, da je magnetizem pravzaprav relativistični pojav. Dinamična indukcija pa je močna potrditev, da je teorija relativnosti pravilna.  $\square$





## 38 Elektromagnetni valovi

Elektromagnetno polje – Elektromagnetni valovi – Ravno valovanje – Stojno valovanje – Energija valovanja – Valovni potenciali – Dipolno sevanje – Radijski valovi – Valovanje v snovi – Valovanje v dielektriku – Valovanje v prevodniku – Vpad na dielektrik – Vpad na prevodnik – Uklon na ovirah

### 38.1 Elektromagnetno polje

Mirujoči naboji so obdani s statičnim električnim poljem in stacionarni tokovi so obdani s statičnim magnetnim poljem. Elektrostatično in magnetostatično polje sta med seboj povsem neodvisna. Vemo pa, da se lahko naboji gibljejo in tokovi spreminjajo. Pridružena polja potem niso več statična, ampak se spreminjajo s časom. To so polja, ki jih hočemo sedaj raziskati.

Ohranitev nabojev Kakorkoli se naboji in tokovi že spreminjajo, vedno velja zakon o *ohranitvi naboja*. Po zgledu za ohranitev mase (36.37) zapišemo *kontinuitetno enačbo*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (38.1)$$

Ohranitev pretokov Naboji so izvori in ponori električnih pretokov. Upravičeno se zdi predpostaviti, da se tudi pretoki ohranjajo, to je, da zakon o električnem pretoku (37.8) velja celo za naboje, ki se gibljejo. Podobno predpostavimo tudi za zakon o magnetnem pretoku (37.34). Postuliramo torej

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Indukcija električnega polja V spremenljivem magnetnem polju se, kot vemo, pojavlja električno polje, kakor ga zaznamo z indukcijsko tuljavo in priključenim balističnim galvanometrom. Zakon o dinamični indukciji (25.8) pove  $\int U dt = -S \Delta B$ . Za majhno zanko ploščine  $S$  in obsega  $s$  v homogenem polju zapišemo odvisnost električnega polja od lokalne spremembe magnetnega polja kot  $Es/S = -\Delta B/\Delta t$  oziroma v vektorski obliki

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (38.3)$$

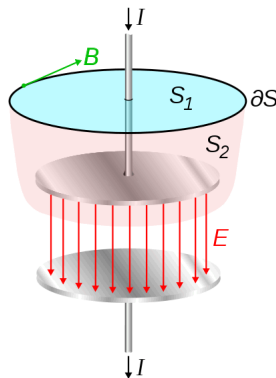
Indukcija magnetnega polja Vsako magnetno polje je, kakor vemo, povezano z lokalnim tokom:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . Če izračunamo divergenco te enačbe, vidimo, da je divergenca toka enaka divergenci rotorja polja; ta pa je za vsako polje enaka nič:  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Torej bi moral biti tok  $I$  skozi vsako zaprto ploskev enak nič. To pa gotovo ne more biti res, saj vemo, da lahko naboje kopičimo, na primer na eni plošči kondenzatorja. Enačba za rotor magnetnega polja zato ne more

biti popolna; manjka ji člen, ki bi zagotovil, da se bo divergenca enačbe reducirala v kontinuitetno enačbo, torej

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + [\text{missing}].$$

Kaj naj bi bil manjkajoči člen? Vsekakor mora zanj veljati  $\nabla \cdot [\text{missing}] = \mu_0 \partial \rho / \partial t$ . Gostoto naboja izrazimo iz električne divergenčne enačbe:  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ , zato  $\partial \rho / \partial t = \partial / \partial t (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t)$ . Iskani člen je potemtakem  $[\text{missing}] = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ , torej (MAXWELL)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (38.4)$$



**Slika 38.1** Praznjenje kondenzatorja skozi upor. Magnetna cirkulacija po zanki  $\partial S$  je enaka ne glede na to, ali jo računamo iz toka  $I$ , ki prebada ploskev  $S_1$ , ali iz "prekidalnega toka"  $\epsilon_0 \partial E / \partial t$ , ki prebada ploskev  $S_2$ . (Anon)

Osnovne enačbe polja

S tem je zaključen nabor štirih *osnovnih enačb elektrodinamike*, ki popolnoma opisujejo električno in magnetno polje: njuno povezanost z izvori ter njuno medsebojno odvisnost. Te enačbe so: dve divergenčni (38.2) in dve rotorski (38.3) (38.4). V stacionarnih razmerah se enačbe reducirajo na dva medsebojno neodvisna para: za elektrostatiko in za magnetostatiko. Kontinuitetna enačba ni neodvisna, ampak sledi iz četverice osnovnih enačb.

Kaj pravzaprav pravijo osnovne enačbe? Tole: v prostoru obstajajo električna in magnetna polja. Izvor električnih polj so naboji in spremenljiva magnetna polja. Izvor magnetnih polj so tokovi in spremenljiva električna polja. Električno in magnetno polje sta dva obraza istega, *elektromagnetnega polja*.

Osnovne enačbe elektrodinamike so posplošitve naših dosedanjih spoznanj o električnih in magnetnih poljih. Ne moremo jih izpeljati iz kakšnih drugih enačb; če bi jih lahko, ne bi bile več osnovne. Ali so pravilne ali ne, pa bomo sklepali na podlagi posledic, ki iz njih sledijo.

### 38.2 Elektromagnetni valovi

Osnovne enačbe v vakuumu

Za preučevanje elektromagnetnega polja so najpreprostejše razmere v vakuumu, kjer ni nabojev in tokov. Tam se osnovne enačbe glasijo:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{38.5}$$

Valovne enačbe Na tretjo enačbo delujemo z rotorjem  $\nabla \times$ . Na levi strani dobimo rotor rotorja, kar zapišemo kot  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  (32.19), pri čemer je člen z divergenco enak nič. Na desni strani zamenjamo vrstni red odvajanja  $\nabla \times \partial \mathbf{B} / \partial t = \partial / \partial t (\nabla \times \mathbf{B})$  in upoštevamo  $\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ . Tako dobimo enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.
\tag{38.6}$$

Podobno obdelamo četrto enačbo in dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.
\tag{38.7}$$

Obe enačbi imata enako obliko. Opisujeta, kako se *elektromagnetna motnja* v vakuumu spreminja s časom. Očitno igra pri tem pomembno vlogo produkt električne in magnetne konstante. Da so enote v prostorskem in časovnem členu enake, mora imeti recipročna vrednost tega produkta enoto hitrosti na kvadrat, kar tudi drži. Zato definiramo novo konstanto

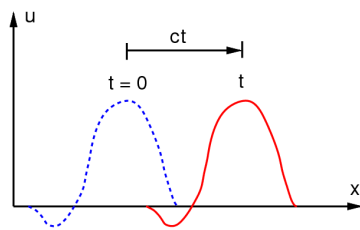
$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.
\tag{38.8}$$

Vstavimo številske vrednosti in dobimo  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s. Izjemno presenečenje! Saj to je vendar hitrost svetlobe, kakor smo jo svoj čas izmerili (27.1)! To ne more biti naključje. Sklepamo, da je svetloba elektromagnetno valovanje takšnih valovnih dolžin, ki jih vidimo, in da zapisani enačbi opisujeta elektromagnetne valove različnih vrst. Zato ju poimenujemo *valovni enačbi*.

Njihove rešitve V eni dimenziji se vsaka posamična komponenta valovnih enačb - označimo jo z  $u$  - zapiše v obliki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.
\tag{38.9}$$

Če takšna enačba res opisuje valovanje, mora veljati tudi za *ravne valove*  $u = u_0 \exp ik(x - ct)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ . Argument lahko zapišemo v priročnejši obliki  $k(x - ct) = kx - \omega t$ , kjer  $\omega = ck$ . Vstavitev v valovno enačbo potrди domnevo. Pa ne samo to: rešitev valovne enačbe je tudi vsota dveh ali več ravnih valov različnih valovnih dolžin, ki se vsi gibljejo z isto hitrostjo. Iz množice takih valov lahko sestavimo poljubno funkcijo  $u_1(x - ct)$ . To je hrib poljubne začetne oblike  $u_1(x, 0)$ , ki drsi, ne da bi spreminjal svojo obliko, vzdolž koordinatne osi s hitrostjo  $c$ .



Slika 38.2 Gibanje valovne motnje.

Druga taka funkcija je  $u_2(x + ct)$ , torej hrib drugačne oblike, ki se giblje v nasprotni smeri. Splošna rešitev valovne enačbe je vsota obeh:

$$u = u_1(x - ct) + u_2(x + ct). \quad (38.10)$$

### 38.3 Ravno valovanje

Ravno valovanje hočemo sedaj podrobneje preučiti. Naj potuje valovanje v smeri enotnega vektorja  $\mathbf{n}$ ; potem zapišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (38.11)$$

pri čemer  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ . Kaj o teh dveh nastavkih povedo divergenčne in rotorske enačbe?

Pravokotnost  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$

Nastavek za  $\mathbf{E}$  vstavimo v divergenčno enačbo  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , računamo po komponentah in dobimo  $i\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ , to je  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Vektor električne poljske jakosti je torej pravokoten na smer gibanja valovanja. Podobno ugotovimo za magnetno poljsko jakost:  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Tudi vektor magnetne poljske jakosti je pravokoten na smer gibanja valovanja.

Povezava  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$

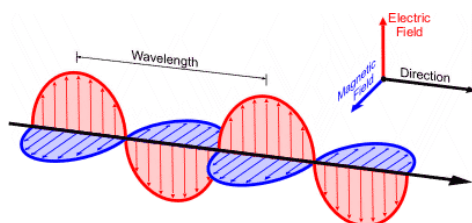
Nastavka za  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  vstavimo še v rotorsko enačbo  $\nabla \times \mathbf{B} = -(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$ , računamo po komponentah in dobimo  $i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mathbf{E}_0\omega/c^2$ . Ker  $\omega = kc$ , dobimo

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}. \quad (38.12)$$

Vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  sta torej med seboj pravokotna. Ker  $|\mathbf{n}| = 1$  in  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , velja  $|\mathbf{E}| = |c\mathbf{B}|$ , to je

$$E = cB. \quad (38.13)$$

V ravnem valovanju torej nihata električna in magnetna poljska jakost sočasno: kjer je vozle prve, je tudi vozle druge, in kjer ima maksimum prva, ga ima tudi druga. Električni poljski jakosti 1 V/m je pri tem pridružena magnetna poljska jakost  $10^{-9}$  Vs/m<sup>2</sup>.



Slika 38.3 Ravni elektromagnetni val. (Anon)

### 38.4 Stojno valovanje

Amplitudna enačba Ravni valovi so rešitev valovne enačbe v neomejenem prostoru. Kakšne pa so njene rešitve v omejenem prostoru, recimo v zaprti kovinski škatli? Omejimo se le na take rešitve, pri katerih električno polje v vseh točkah niha sinhrono, torej

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (38.14)$$

Valovna enačba se v tem primeru poenostavi v *amplitudno enačbo*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0 &= -k^2 \mathbf{E}_0 \\ k^2 &= \omega^2/c^2. \end{aligned} \quad (38.15)$$

Amplitude  $\mathbf{E}_0$  stojnih valovanj so seveda odvisne od oblike resonantne škatle. Podobna amplitudna enačba velja tudi za magnetno polje.

Mejni pogoji Električno in magnetno polje na meji s prevodnikom ne moreta biti poljubna. V prevodniku se namreč naboji hipno prerazporejajo tako, da v njem ni električnega in magnetnega polja. — Mejo objamemo s tanko pravokotno zanko. Cirkulacija  $\mathbf{E}$  po zanki je enaka spremembi pretoka  $\mathbf{B}$  skozi njo. Ker lahko naredimo zanko zelo ozko, je sprememba pretoka skozi njo nič, torej  $E_{\parallel}(1)l - E_{\parallel}(2)l = 0$ . V prevodniku je  $\mathbf{E}(2) = 0$ , zato na meji velja robni pogoj  $E_{\parallel} = 0$ . — Mejo objamemo še s plitvo pravokotno škatlo. Divergenca  $\mathbf{B}$  skozi njo mora biti enaka nič, torej  $B_{\perp}(1)S - B_{\perp}(2)S = 0$ . V prevodniku je  $\mathbf{B}(2) = 0$ , zato na meji velja robni pogoj  $B_{\perp} = 0$ .

Kvadratni resonator Najpreprostejši resonator je kvadratna škatla  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $z \in [0, h]$ . Poglejmo, če obstajajo taki valovi, pri katerih je  $\mathbf{E}_0$  usmerjena vzdolž osi  $z$  in neodvisna od  $z$ , torej  $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_z(x, y))$ . Zaradi kratkosti bomo namesto  $E_z$  zanaprej pisali kar  $E$ . Amplitudno enačbo zapišemo v kartezičnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0. \quad (38.16)$$

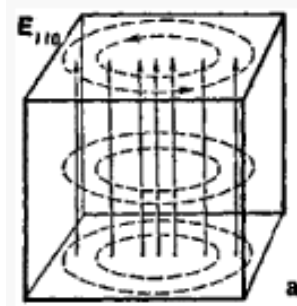
Rešitev iščemo z nastavkom  $E(x, y) = X(x)Y(y)$ . Dobimo  $X''/X + Y''/Y = -k^2$ . To je možno le, če je vsak izmed obeh členov enak konstanti:  $X''/X = -k_x^2$  in  $Y''/Y = -k_y^2$ , pri čemer  $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ . Rešitvi teh dveh enačb sta sinus ali kosinus. Da zadostimo pogoju na mejah  $x = 0$  in  $y = 0$ , izberemo  $\sin k_x x$  in  $\sin k_y y$ . Da zadostimo še pogoju na mejah  $x = a$  in  $y = b$ , pa postavimo  $k_x = m\pi/a$  in  $k_y = n\pi/b$ ,  $m, n = 1, 2, 3 \dots$  Iskane rešitve so torej

$$E_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (38.17)$$

Katerakoli izmed teh rešitev, recimo  $E_{11}$ , je dobra, prav tako pa katerakoli njihova linearna kombinacija, recimo  $A \cdot E_{11} + B \cdot E_{12}$ . Frekvenca nihanja znaša

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (38.18)$$

Ustrezno magnetno polje dobimo iz rotorske enačbe  $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0$ . Neposredni račun pove  $B_x = (ik_y/\omega) \sin k_x x \cos k_y y$  in  $B_y = -(ik_x/\omega) \cos k_x x \sin k_y y$ . Imaginarni faktor  $i$  pove, da magnetno nihanje kasni za električnim za  $\pi/2$ . Polji  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  sta med seboj pravokotni, kar potrdimo z izračunom  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ .



**Slika 38.4** Stojno elektromagnetno valovanje  $E_{11}$  v kvadratnem resonatorju. Električne silnice so navpične, magnetne so krožne. (The Great Soviet Encyclopedia)

Cilindrični resonator

Kaj pa cilindrična votlina  $\rho \in [0, a]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, h]$ ? Spet iščimo polje, v katerem je  $\mathbf{E}_0$  usmerjena vzdolž osi  $z$  in neodvisna od  $z$ , torej  $E_z(\rho, \varphi)$  ali krajše kar  $E$ . Amplitudno enačbo potem zapišemo v cilindričnih koordinatah, upoštevajoč (32.25), kot

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0. \quad (38.19)$$

Izberemo nastavek  $E = R(\rho)\Phi(\varphi)$  ter ga vstavimo vanjo. Če dobljeno enačbo pomnožimo še z  $\rho^2$ , postane njen drugi člen  $(1/\Phi)d^2\Phi/d\varphi^2$ , torej neodvisen od  $\rho$ , zato mora biti enak konstanti, ki jo zapišemo kot  $-n^2$ . Tako dobimo dve ločeni enačbi:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + [(k\rho)^2 - n^2]R &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (38.20)$$

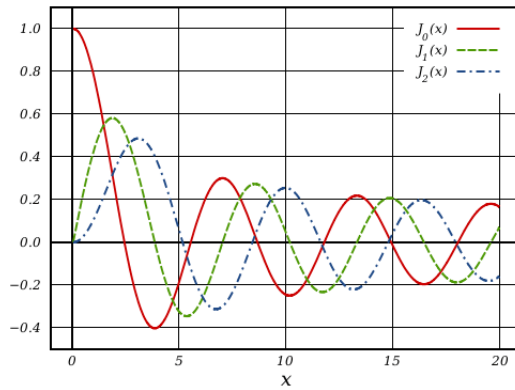
Rešitev druge enačbe je sinus ali kosinus argumenta  $n\varphi$ . Zanj moramo upoštevati periodični mejni pogoj  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ , kar pomeni, da mora biti  $n$  celo število  $0, 1, 2, 3 \dots$  in

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi. \quad (38.21)$$

Prvo enačbo polepšamo z vpeljavo spremenljivke  $k\rho = t$  v obliko  $t^2 R'' + tR' + [t^2 - n^2]R = 0$ . Rešitev iščemo z nastavkom v obliki potenčne vrste  $R(t) = t^n \sum c_j t^j$ . Vstavimo ga v enačbo in dobimo  $\sum (n+j)^2 c_j t^{n+j} + [t^2 - n^2] \sum c_j t^{n+j} = 0$ . Koeficiente  $c_j$  moramo zdaj tako izbrati, da bo enačba veljala. S precej truda najdemo

$$R(k\rho) = \sum_j \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{2j+n} = J_n(k\rho). \quad (38.22)$$

Funkcije  $J_0, J_1 \dots$  poimenujemo *cilindrične funkcije*.

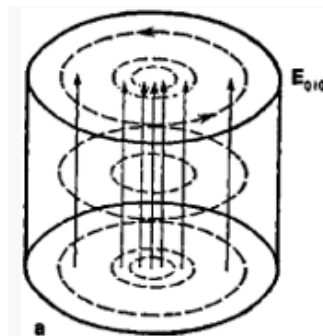


**Slika 38.5** Cilindrične funkcije kot rešitve amplitudne enačbe v cilindričnih koordinatah. (Anon)

Na robu mora biti vsaka cilindrična funkcija enaka nič. Za funkcijo  $J_n$  moramo zato izbrati takšne vrednosti  $k_{nm}$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots$ , da  $J_n(k_{nm}a) = 0$ . Funkcija  $J_0$ , na primer, ima prvo ničlo pri 2,4, zato mora biti  $k_{01} = 2,4/a$ . Iskana stojna valovanja v cilindrični votlini so torej

$$E_{nm} = J_n(k_{nm}\rho) \cos n\varphi. \quad (38.23)$$

Seveda je rešitev tudi katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvence nihanja pa so  $\omega^2/c^2 = k_{nm}^2$ . Ustrezno magnetno polje dobimo iz rotorske enačbe  $\nabla^2 \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0$ . Neposredni račun pove  $B_\rho = (in/\omega\rho)J_n(k_{nm}\rho) \sin n\varphi$  in  $B_\varphi = (-i/\omega)(dJ_n/d\rho) \cos n\varphi$ . Magnetno polje je spet pravokotno na električnega in kasni za  $\pi/2$ .



**Slika 38.6** Stojno elektromagnetno valovanje  $E_{01}$  v cilindričnem resonatorju. Električne silnice so navpične, magnetne so krožne. (The Great Soviet Encyclopedia)

### 38.5 Energija valovanja

Elektromagnetno polje deluje na naboje in jih premika. Če se naboj pospešuje, prejema od polja delo. Če naboj zavira, pa delo oddaja. Delo toka na časovno in prostorninsko enoto znaša  $P/V = UI/SI = jE$ .

Ohranitev energije

Iz osnovnih enačb hočemo izluščiti, kako je  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  povezan s polji. Gostota toka nastopa v magnetni rotorski enačbi. Skalarno jo pomnožimo z  $\mathbf{E}/\mu_0$ , da dobimo  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E}' - (1/\mu_0) \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$ . Električno rotorsko enačbo pomnožimo z  $\mathbf{B}/\mu_0$ , da dobimo  $\mathbf{B} \mathbf{B}'/\mu_0 + (1/\mu_0) \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Obe enačbi seštejemo in dobimo  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E}' + \mathbf{B} \mathbf{B}'/\mu_0 + (1/\mu_0)(\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) = 0$ . Prvi člen je iskano delo. Drugi in tretji člen, ki vsebujeta časovne odvode polj, zapišemo skupaj kot  $\partial/\partial t (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0)$ . Izraz v oklepaju je

gostota energije polja  $w$ . Zadnji člen, ki vsebuje rotorje polj, zapišemo kot  $\nabla \cdot (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . Izraz v oklepaju je *gostota energijskega toka*  $\mathbf{j}_{em}$ . Dobili smo torej energijski zakon

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{em} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (38.24)$$

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$$

$$\mathbf{j}_{em} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Energija polja se torej po prostoru raznaša z valovi. Lokalna sprememba gostote energije gre na račun energijskega pritoka/odtoka zaradi valov in na račun kinetične energije nabojev. Če se nosilci nabojev gibljejo v snovi z uporomo, pridobi snov notranjo energijo.

Energija pri ravnem valovanju

Pri ravnem valovanju je gostota energije

$w = (\epsilon_0/2)E^2 + (1/2\mu_0)B^2 = \epsilon_0 E^2$ , ker  $B = E/c$ . V vsaki točki prostora ta gostota niha. Kakšna je njene povprečna vrednost? Ker  $\langle E^2 \rangle = (2/\pi) \int_0^{\pi/2} E_0^2 \cos^2 \omega t \, d\omega = E_0^2/2$ , velja

$$\langle w \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2. \quad (38.25)$$

Gostota energijskega toka znaša  $j_{em} = (1/\mu_0)EB = \epsilon_0 c E^2$ , torej

$$\langle j_{em} \rangle = c \langle w \rangle. \quad (38.26)$$

Sončna svetloba, ki vpada na Zemljo, nosi gostoto energijskega toka  $\langle j_{em} \rangle \sim 1 \text{ kW/m}^2$ . To pomeni, da je v njej gostota energije  $\langle w \rangle \sim 10^{-6} \text{ J/m}^3$  in amplitudi elektromagnetnega polja  $E_0 \sim 10^3 \text{ V/m}$  ter  $B_0 \sim 10^{-6} \text{ Vs/m}^2$ .

### 38.6 Valovni potenciali

Statično električno in statično magnetno polje smo opisali z električnim in magnetnim potencialom. Poskusimo s tema potencialoma opisati še spremenljivo elektromagnetno polje. Kot izhodišče služijo popolne osnovne enačbe elektrodinamike, ki vključujejo naboje in tokove.

Razklopitev osnovnih enačb

Najpreprostejše izmed osnovnih enačb je magnetna divergenčna enačba  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Ker je divergenca vsakega rotorja enaka nič, lahko zapišemo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (38.27)$$

Polje  $\mathbf{B}$  nastopa tudi v električni rotorski enačbi  $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ . Nadomestimo ga z (38.27), zamenjamo vrstni red odvajanja po času in prostoru ter dobimo  $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$ . Ker je rotor vsakega gradienta enak nič, lahko izraz v oklepaju zapišemo kot  $-\nabla U$  in dobimo:



$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (38.28)$$

V električni divergenčni enačbi  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  nadomestimo  $\mathbf{E}$  z (38.28) in dobimo  $\nabla^2 U - \partial/\partial t \nabla \cdot \mathbf{A} = \rho/\epsilon_0$  (1).

Preostane še magnetna rotorska enačba  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + (1/c^2) \partial \mathbf{E}/\partial t$ . Nadomestimo  $\mathbf{B}$  z (38.27) in  $\mathbf{E}$  z (38.28), upoštevamo obrazec za dvojni vektorski produkt in dobimo  $-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (1/c^2) \partial/\partial t \nabla U + (1/c^2) \partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = \mu_0 \mathbf{j}$  (2).

V enačbi (2) lahko izberemo poljuben  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Vemo namreč, da je rotor nedoločen do aditivnega gradienta:  $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \varphi = \nabla \times \mathbf{A}$ . Pri tem je  $\varphi$  poljubno skalarno polje, torej tudi  $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A}$ . Izberemo  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2) \partial U/\partial t$ , se tako iznebimo dveh členov in dobimo

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (38.29)$$

Ista izbira za  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , postavljena v (1), pa pove

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (38.30)$$

Dobili smo dve valovni enačbi za električni in magnetni potencial. Vse spremenljivke so lepo ločene. Če so razmere stacionarne, odpadeta oba člena s časovnim odvodoma in enačbe preidejo v že znane potencialne enačbe, kakor tudi mora biti.

Zakasneni potenciali

Pri statičnih poljih je njihova jakost v opazovani točki popolnoma določena z naboji in tokovi po vsem prostoru. Domnevamo, da je pri spremenljivih poljih podobno, le da na vrednost polja v izbrani točki ob času  $t$  vplivajo naboji in tokovi z razdalj  $r$  ob ustrezno *zakasnenih* časih  $t - r/c$ . Saj se elektromagnetni vplivi širijo s končno hitrostjo. To je drzna, a plavzibilna domneva. Poskusimo jo dvigniti na raven izreka, to je, izpeljati jo iz znanih enačb.

V izhodišču koordinatnega sistema si mislimo točkast naboj  $de(t)$ , ki spreminja jakost, a se ne giblje. V izhodišču velja valovna enačba  $\nabla^2 U - (1/c^2) \partial^2 U/\partial t^2 = -(de/dV)/\epsilon_0$ . Zunaj izhodišča je desna stran enaka nič.

Pričakujemo krogelno simetrično rešitev, zato krajevni člen zapišemo v krogelnih koordinatah:  $\nabla^2 U = (1/r^2) \partial/\partial r (r^2 \partial U/\partial r)$ . Vpeljemo substitucijo  $U = u(r)/r$  in - s postopnim odvajanjem od znotraj navzven - izračunamo  $\nabla^2 U = (1/r) \partial^2 u/\partial r^2$ . Namesto  $u$  zapišemo nazaj  $Ur$  in tako pridemo valovno enačbo v obliki  $\partial^2 Ur/\partial r^2 - (1/c^2) \partial^2 Ur/\partial t^2 = 0$ .

Dobljena enačba ni nič drugega kot enodimenzionalna valovna enačba za spremenljivko  $Ur$ , katere splošno rešitev že poznamo. Tako lahko zapišemo  $U(r,t) = f(t-r/c)/r + g(t+r/c)/r$ . To sta dva *krogelna vala*, od katerih se prvi giblje navzven in drugi

navznoter. Slednjega iz rešitve izpustimo, ker nas zanima, kako naboj dela valove in ne, kako od zunaj prihajajoči valovi vplivajo na naboj.

V bližini izhodišča je časovna zakasnitev zanemarljiva:

$U(t) = f(t - r/c)/r \approx f(t)/r$ . Polje se spreminja sinhrono z nabojem.

Za takšno polje velja "statična" rešitev  $U(t) = f(t)/r = de(t)/4\pi\epsilon_0 r$ .

Nebližnje polje točkastega naboja, ki ima bližnje polje za limito, je zato  $U(t) = de(t-r/c)/4\pi\epsilon_0 r$ . Poljubno porazdeljeni naboji pa tvorijo v opazovani točki P superpozicijo

$$U_P(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t-r_{QP}/c) dV_Q}{r_{QP}}. \quad (38.31)$$

Podobno ugotovimo še

$$\mathbf{A}_P(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t-r_{QP}/c) dV_Q}{r_{QP}}. \quad (38.32)$$

Domneva je bila pravilna: polje je res opisano z *zakasnjnimi potenciali*.

### 38.7 Dipolno sevanje

Mirujoč električni dipolni oblak je obdan s statičnim električnim poljem. Če se električni moment oblaka spremeni, se spremeni tudi okolišnje električno polje, spremenljivo polje ustvari magnetno polje in tako naprej. Spremenljivi dipol torej okrog sebe ustvarja elektromagnetno polje. Kakšno je?

Spremenljivi dipol

Naj bo dipolni oblak v izhodišču koordinatnega sistema. Zanima nas polje v točki  $\mathbf{R}$  iz izhodišča; proti tej točki naj kaže enotni vektor  $\mathbf{n}$ . Označimo lokacijo vsakega nabojnega elementa z  $\mathbf{d}$  in oddaljenost od njega do opazovane točke z  $\mathbf{r}$ . Naj bo opazovana točka daleč proč. Potem velja  $r \approx R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ .

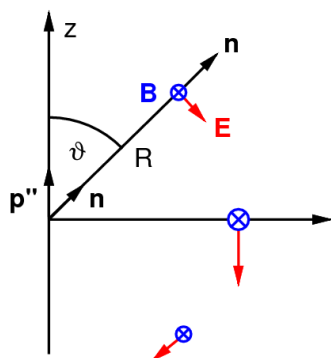
Zakasnjeni potencial  $U(t)$  v opazovani točki je sorazmeren s prostorskim integralom  $\rho(t-R/c+\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}/c)/r$ . Aproximiramo  $r \approx R$  in ga izvlečemo iz integrala, zanemarimo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$  v primerjavi z  $R$  in dobimo prostorski integral  $\rho(t-R/c)$ . Ker je oblak nevtralen, je ta integral enak nič. Torej je  $U(t) = 0$  (1).

Podobno obravnavamo zakasnjeni potencial  $\mathbf{A}(t)$  in pridemo do prostorski integral  $\mathbf{j}(t-R/c)$ . Upoštevamo  $\int \mathbf{j} dV = \sum e\mathbf{v} = d/dt \sum e\mathbf{d} = \dot{\mathbf{p}}_e$ , pa dobimo  $\mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{p}}_e/4\pi\epsilon_0 c^2 R$  (2).

Iz (1) in (2) sledi, ob uporabi  $\mathbf{E} = -\nabla U - \partial\mathbf{A}/\partial t$ , za magnetno polje okoli spreminjajočega se dipola

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{p}}_e \times \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R}. \quad (38.33)$$

Drugi odvod električnega momenta je treba seveda upoštevati ob času  $t - R/c$ . Električno polje je povezano z magnetnim kakor pri ravnem valovanju.



**Slika 38.7** Dipolno sevanje. Prikazano je polje  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  ob času  $t$  in vzročna sprememba dipola  $\mathbf{p}''$  ob prejšnjem času  $t - R/c$ .

Če usmerimo os  $z$  koordinatnega sistema vzdolž vektorja  $\mathbf{p}_e''$ , velja:

$$B = \frac{p_e'' \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 R}. \quad (38.34)$$

Gostota energijskega toka  $j_{em} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \mathbf{B}$  znaša

$$j_{em} = \frac{(p_e'' \sin \theta)^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \quad (38.35)$$

in izsevana moč  $P = \oint \mathbf{j}_{em} \cdot d\mathbf{S}$  skozi obdajajočo kroglo

$$P = \frac{p_e''^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (38.36)$$

Nihajoči dipol

Svetloba je elektromagnetno valovanje in sevajo jo atomi. Sklepamo, da so sevajoči atomi pravzaprav električni dipoli, ki nihajo z različnimi frekvencami. Za nihajoč dipol  $p_e = p_0 \cos \omega t$  izračunamo moč sevanja

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (38.37)$$

in povprečno moč (povprečje kvadrata kosinusa preko enega nihaja je 1/2)

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (38.38)$$

Sevanje ni izotropno, ampak je svetilnost  $I = dP/d\Omega = j_{em} R^2$  odvisna od polarnega kota:

$$\langle I \rangle = \frac{3 \langle P \rangle}{2 \cdot 4\pi} \sin^2 \theta. \quad (38.39)$$

Modro nebo

Bela sončna svetloba je mešanica elektromagnetnih valov z različnimi frekvencami/barvami. Ko valovi vpadajo v ozračje, se v plinskih molekulah (večinoma dušika in kisika) influencirajo električni dipoli in zanihajo. S tem začno sami sevati na vse strani; rečemo, da se je vpadna svetloba sipala na molekulah. Dipoli nihajo vsiljeno z isto frekvenco kot vpadajoča svetloba. Čim krajša je valovna dolžina svetlobe, tem močnejše je sipanje. Modra svetloba se sipa močnejše kot rdeča: zato je nebo modro.

Zvečer, ko je Sonce nizko nad obzorjem in je zato pot žarkov skozi ozračje dolga in sipanje veliko, pa je zahodno nebo bolj ali manj rdeče. Iz bele sončne svetlobe so se izsipale modre sestavine in preostal je višek rdečih. Če Zemlja ne bi imela ozračja, bi bilo nebo črno in podnevi bi videli zvezde. Tako mora biti na Mesecu.

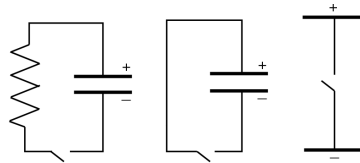
Zakaj pa so potem oblaki beli? Saj se svetloba vendar sipa tudi na kapljicah! In zakaj sploh vidimo kapljice, ko pa vodne pare, iz katere kapljice nastanejo, ne vidimo? Valovna dolžina vidne svetlobe je nekaj tisočkrat večja, kot je premer atomov. Zato molekula vode čuti homogeno nihajoče električno polje. Če se združi  $N$  molekul, nihajo sinhrono. Amplituda nihanja se poveča za  $N$ -krat, gostota sevanja pa za  $N^2$ -krat. Kapljica postane vidna. Vendar pa kvadratno naraščanje ne traja v nedogled. Ko postane premer kapljice primerljiv z valovno dolžino svetlobe, nihajo molekule z medsebojnim faznim zamikom in začno interferirati destruktivno. Za modro svetlobo je ta meja dosežena že pri majhnih, za rdečo pa pri večjih kapljicah. Rdeče sipanje je zato močnejše od modrega in ga preglasi. Modra barva izgine in oblak postane bel.

### 38.8 Radijski valovi

Če nihajoči električni dipoli res širijo okrog sebe elektromagnetne valove, potem bi jih morale sevati tudi žice oziroma naprave, po katerih tečejo izmenični (torej spremenljivi) tokovi. Omrežna nihanja s frekvenco 50/s bi povzročila valove z valovno dolžino 6000 km. Takih valovnih dolžin v laboratoriju ne moremo meriti. Za valovno dolžino reda velikosti 1 m, primerne za poskuse, pa so potrebna nihanja tokov z ogromno frekvenco  $3 \cdot 10^8$ /s. V kakšnih napravah bi lahko takšna nihanja nastajala?

Odprt nihajni krog

Spomnimo se na električni nihajni krog, sestavljen iz kondenzatorja in tuljave. Ko naelektrimo kondenzator in sklenemo stikalo, začne po krogu nihati tok sem in tja. Naboj se pretaka iz ena plošče kondenzatorja na drugo z visoko frekvenco (25.24); "čoveljski" kondenzator in "čoveljska" tuljava proizvajata nihanje s frekvenco  $10^6$ /s. Če raztegnemo nihajni krog, dobimo linearno "ogrodje", po katerem niha tok. Nihanje je tem hitrejše, čim manjši sta plošči in čim manj ovojev ima tuljava. V mejnem primeru se tuljava reducira v ravno žico. *Odprti nihajni krog* se preoblikuje v navadno žico s prevodnima ploščicama na obeh koncih. Dobili smo torej hitro nihajoč dipol, ki utegne res doseči željeno frekvenco. Če ga nabijemo in sklenemo stikalo, začne nihati.



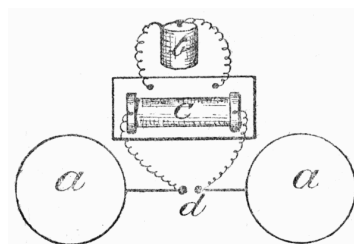
**Slika 38.8** Zaprt in odprt nihajni krog. Plošči sta nasprotno enako nabiti. Ko sklenemo stikalo, zaniha naboj gor in dol. Nihajoč naboj je električni dipol, ki seva elektromagnetne valove.

Iskriščni oddajnik

Žal je nihanje odprtega nihajnega kroga dušeno in rešiti moramo vprašanje, kako ga znova in znova nabijati ter prožiti. K sreči se spomnimo na indukcijsko tuljavo s prekinjevalcem, ki med svojima izhodnima priključkoma ustvarja električne iskre, to je, priključka periodično nabija, da se potem medsebojno praznita [26.8]. Pa povežimo stikalna priključka dipola z izhodoma iz tuljave, ki jo opremimo s samodejnim prekinjevalcem (elektromagnetnim stikalom). Kaj lahko pričakujemo?

Tok prihaja iz tuljave v kratkih sunkih. Tak sunek pride ob času, ko prekinitveno stikalo (del indukcijske tuljave) prekine primarni tokokrog. To se zgodi morda 50-krat na sekundo. Tokovni sunek najprej nabije obe plošči nihajnega dipola, eno pozitivno in drugo negativno. Ko sta tako močno nasprotno naelektreni, kot je le mogoče, preskoči med kroglicama iskra. Zrak med kroglicama je sicer dober izolator, a ko preskoči iskra, se ionizira in postane kar dober prevodnik. Kakor hitro torej preskoči prva iskra, postaneta plošči povezani skoraj tako, kot z žico. In tako nastane prevodni nihajni krog. Zato začne po ioniziranem kanalu med kroglicama teči tok sem in tja z zelo visoko frekvenco. Zaradi upornosti pa izzveni mnogo prej kot v petdesetinki sekunde, ko pride nov sunek iz indukcijske tuljave. Medtem zrak postane spet izolator in igra se ponovi.

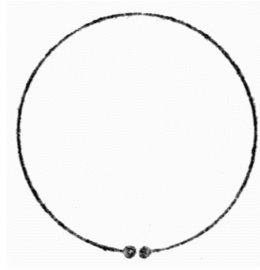
Vsak sunek iz indukcijske tuljave torej povzroči kratko dušeno nihanje toka z visoko frekvenco med obema ploščama. Nastal je nihajoči dipol, ki seva elektromagnetne valove v prostor. Pripravo poimenujemo *iskriščni oscilator*.



**Slika 38.9** Iskriščni oscilator - oddajnik elektromagnetnih valov: (a) kovinske plošče, (b) baterija, (c) indukcijska tuljava, (d) iskrišče. (Corbin, 1917)

Iskriščni sprejemnik

Kako bi zaznali izsevane valove? Z indukcijo toka v sklenjeni žični zanki. Ko valovi potujejo skozi zanko, v njej inducirajo električno napetost in poženejo tok. Če je zanka preščipnjena in opremljena z zaključnima kroglicama, pa preko reže - upajmo - skačejo drobne iskricice. To je *iskriščni sprejemnik*. Namesto preščipnjene krožne zanke lahko uporabimo kar preščipnjeno ravno žico.



**Slika 38.10** Iskriščni sprejemnik elektromagnetnih valov. (Corbin, 1917)

Poskusi z valovi Tako. Sestavili smo oddajnik in sprejemnik (HERTZ); lotimo se zdaj poskusov. Oddajni dipol postavimo v gorišče paraboličnega kovinskega zrcala. S tem pričakujemo usmerjen curek valov. Otipavamo ga s sprejemnim dipolom, ki je prav tako postavljen v gorišče svojega paraboličnega zrcala, da se mu s tem poveča občutljivost.

Vključimo oddajnik. V nekaj metrov oddaljenem sprejemniku se pokažejo iskrice; tako drobne so, da jih opazimo le v popolni temi in pod povečevalno lupo. Elektromagnetni valovi torej res obstajajo! — V bližino oddajnika postavimo raven cinkov zaslon in s sprejemnikom otipamo polje pred njim. Najdemo maksimume in minimume, torej vozle stojnega valovanja. Iz razdalje med njimi določimo valovno dolžino ustvarjenih valov. Odvisna je od frekvence uporabljenega oddajnika, ta pa od njegove velikosti, oblike, razdalje iskrišča in še česa. Z majhnimi oddajnimi dipoli dosežemo valovne dolžine okrog 1 metra. — Curek valov ne prodira skozi kovinski zaslon, prodira pa skozi leseno steno. — Curek valov, vpadajoč na asfaltno prizmo, se lomi. — V curek valov postavimo rešetko iz vzporednih bakrenih žic in z njenim sukanjem ugotovimo, da so valovi polarizirani. Vsi ti poskusi potrjujejo: poleg vidne svetlobe obstajajo še drugi, metrski elektromagnetni valovi. Prav kakor vidni valovi se ti valovi transverzalni, se odbijajo in lomijo. Poimenovali jih bomo *radijski valovi*.

Vse barve teme Obstoj metrskih radijskih valov nas navaja na misel, da obstajajo elektromagnetni valovi vseh valovnih dolžin, od najkrajših do najdaljših. Bolj ali manj samovoljno jih razdelimo na naslednje razrede: ultravijolična svetloba, vidna svetloba (0,4–0,8  $\mu\text{m}$ ), infrardeča svetloba, mikrovalovi (nad 1 mm) in radijski valovi (nad 1 m). Zaradi kratkosti si bomo vzeli še pravico, da besedo "svetloba", kadar ne bo škode, uporabljamo v dveh pomenih: za vidno svetlobo in za poljubno elektromagnetno valovanje.

### 38.9 Valovanje v snovi

Osnovne enačbe v snovi Čas je, da pogledamo, kakšen je medsebojni vpliv elektromagnetnega valovanja in snovi. Vemo že, da statično električno polje snov polarizira, pri čemer se v njej pojavijo vezani naboji. Statično magnetno polje pa snov magnetizira, pri čemer se pojavijo vezani tokovi. Pri spremenljivih poljih vse to

obvelja. Upoštevati pa moramo, da spremenljiva polarizacija doprinaša še dodaten tok (37.26). Tako zapišemo celoten naboj  $\rho = \rho_{\text{free}} - \nabla \cdot \mathbf{P}$  in celoten tok  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{free}} + \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{P}'$ . Ta naboj in tok vstavimo v osnovne enačbe elektrodinamike in zlahka dobimo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= \frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon_0} & (38.40) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right).\end{aligned}$$

Linearna snov Z znanima aproksimacijama za linearno snov  $\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0 = \varepsilon \mathbf{E}$  in  $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu$  pa dobimo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} &= \frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon_0} & (38.41) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Pričakujemo, da sta dielektričnost  $\varepsilon$  in permeabilnost  $\mu$  odvisna od frekvence valovanja. V prevodnikih moramo upoštevati še dodatno povezavo  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ .

Mejni pogoji Zapisane enačbe veljajo tako za homogeno kot za heterogeno snov, to je, dielektričnost in permeabilnost sta lahko funkciji kraja. Na zunanjih mejah obravnavanega telesa ali na notranjih mejah med dvema telesoma pričakujemo ustrezne *robne pogoje*. Poskusimo jih določiti.

Mejo med snovjo (1) in (2), na kateri ni prostih nabojev in tokov, zapremo v nizko škatlo. Pretočni enačbi  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  in  $\oint \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$  povesta

$$\begin{aligned}B_{\perp}(1) &= B_{\perp}(2) & (38.42) \\ \varepsilon_1 E_{\perp}(1) &= \varepsilon_2 E_{\perp}(2).\end{aligned}$$

Mejo zapremo še v ozko zanko. Ker je zanka ozka, velja  $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$  in  $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$ . Cirkulacijski enačbi  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$  in  $\oint \mathbf{B}/\mu \cdot d\mathbf{s} = 0$  potem povesta

$$\begin{aligned}E_{\parallel}(1) &= E_{\parallel}(2) & (38.43) \\ B_{\parallel}(1)/\mu_1 &= B_{\parallel}(2)/\mu_2.\end{aligned}$$

Pri prehodu iz ene snovi v drugo se torej ne spremenita normalna magnetna komponenta in tangentska električna komponenta polja. Ostali dve komponenti doživita skokovito spremembo.

### 38.10 Valovanje v dielektriku

Hitrost valovanja Pomemben primer valovanja v snovi je valovanje v neomejenem homogenem izolatorju, kjer ni prostih nabojev in tokov, recimo v vodi. V osnovnih enačbah zato postavimo ustrezne člene na nič. Ker sta dielektričnost in permeabilnost konstanti, ju izpostavimo pred operatorje odvajanja po prostoru in času. Tako dobimo nabor štirih enačb:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  in  $\nabla \times \mathbf{B} = (\epsilon \mu / c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$ . Ta nabor je formalno identičen tistemu za prazen prostor, če označimo  $\epsilon \mu / c^2 = 1/v^2$ . To pomeni, da je rešitev enačb ravno valovanje, ki se širi s hitrostjo

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (38.44)$$

Lom in dielektričnost S hitrostjo valovanja je definiran lomni količnik snovi  $n = c/v$ , torej

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (38.45)$$

Permeabilnost izolatorjev se ne razlikuje znatno od 1, zato  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ . Tako smo odkrili še eno povezavo med elektromagnetizmom in svetlobo.

Eksperimentalni test Lomni količnik in dielektričnost znamo meriti neodvisno. Prva količina bi moral biti enaka korenu iz druge. Meritve pokažejo za zrak pri standardnih pogojih obakrat 1,0003, torej odlično ujemanje. Zelo dobro je nasploh ujemanje pri žlahtnih plinih (npr. He), simetričnih dvoatomnih plinih ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ) in kovinskih parah. So pa tudi izjeme. Lomni količnik tekoče vode znaša 1,33, koren iz njene (statične) dielektričnosti pa kar 9. Razlaga je hitro pri roki. Molekula vode ima permanentni električni moment. Polje tako hitro niha, da mu molekularni dipoli ne uspejo slediti. Preden se povsem usmerijo v trenutno smer polja, se to že obrne v nasprotno smer.

### 38.11 Valovanje v prevodniku

Kaj pa valovanje v neomejenem homogenem prevodniku, to je v kovini s prostimi elektroni? Tam se lahko kopičijo prosti neto naboji in tečejo prosti tokovi. Privzamemo, da se morebitni neto naboji takoj razpršijo (zaradi odbijanja), to je, postavimo člen  $\rho/\epsilon_0 = 0$ . S tokovi pa ni tako. Člena  $\mu_0 \mathbf{j}$  ne smemo izničiti, ampak upoštevamo  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  in dobimo naslednje štiri enačbe:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  in  $\nabla \times \mathbf{B} = (\epsilon \mu / c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t + (\sigma \mu / \epsilon_0 c^2) \mathbf{E}$ . Na električno rotorsko enačbo delujemo z rotorjem  $\nabla \times$ , na levi strani uporabimo obrazec za dvojni vektorski produkt in črtamo člen z električno divergenco, na desni strani zamenjamo vrstni red časovnega in prostorskega odvoda ter substituiramo  $\nabla \times \mathbf{B}$  iz magnetne rotorske enačbe. Tako dobimo  $\nabla^2 \mathbf{E} - (\epsilon \mu / c^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 - (\sigma \mu / \epsilon_0 c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t = 0$  (1). To je valovna enačba z dodatnim členom.

Kompleksni lomni količnik Enačbo (1) poskušamo rešiti v eni dimenziji s kompleksnim nastavkom  $\hat{E} = E_0 \exp(ikx - i\omega t)$ . Vstavitev v reševano enačbo da



povezavo  $\hat{k} = (\omega/c)\sqrt{(\epsilon\mu + i\sigma\mu/\epsilon_0\omega)}$ . Upoštevamo, da so permeabilnosti enake 1 (razen pri feromagnetikih) in dobimo

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\hat{\epsilon}} \quad (38.46)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} i.$$

Pridelali smo kompleksni valovni vektor in, z definicijo, kompleksno dielektričnost. To, da je račun izvirgel kompleksni valovni vektor, čeravno smo (potiho) predpostavili, da je realen, nas ne bi smelo motiti. Saj so vsi računski postopki potekali tako, da so bili skupni realnim in kompleksnim količinam.

Po zgledu realnih količin definiramo še *kompleksni lomni količnik*

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}}. \quad (38.47)$$

Iz enačb  $\hat{\epsilon} = \epsilon' + \epsilon'' i$  in  $\hat{n}^2 = (n' + n'' i)^2 = (n'^2 - n''^2) + 2n'n'' i$  razberemo  $\epsilon' = n'^2 - n''^2$  in  $\epsilon'' = 2n'n''$ . K tema dvema enačbama obratni enačbi sta

$$n' = \sqrt{\frac{|\hat{\epsilon}| + \epsilon'}{2}} \quad (38.48)$$

$$n'' = \sqrt{\frac{|\hat{\epsilon}| - \epsilon'}{2}},$$

Ekstinkcijski  
koeficient

kjer  $|\hat{\epsilon}| = \sqrt{(\epsilon'^2 + \epsilon''^2)}$ . Kakšen pa je pomen realnega in imaginarnega dela lomnega količnika? Ker  $\hat{k} = (\omega/c)\hat{n} = k_0(n' + in'')$ , je ob izbranem trenutku  $E \propto \exp(ikx) = \exp(ik_0n'x) \cdot \exp(-k_0n''x)$ . To je (zamrznjen) dušeni val s prostorsko frekvenco  $k_0n'$  in eksponentno pojemajočo amplitudo. Energijski tok  $j \propto |E|^2 = \exp(-2k_0n''x) = \exp(-\beta x)$  pojema eksponentno z razdaljo. Pri vpadu valovanja na prevodnik torej realni del lomnega količnika določa prostorsko frekvenco, to je, igra vlogo "navadnega" lomnega količnika. Imaginarni del pa določa koeficient dušenja. Zato zapišemo

$$\hat{n} = n + \frac{\beta c}{2\omega} i = n + \kappa i. \quad (38.49)$$

Imaginarni del lomnega količnik poimenujemo *ekstinkcijski koeficient* in ga označimo s  $\kappa$ . Kovine so za vidno svetlobo neprosojne, zato v njih ne moremo meriti niti loma niti dušenja. Kompleksni lomni količnik kovin zato ostaja do nadaljnjega nemerljiva količina.

### 38.12 Vpad na dielektrik

Odbojni zakon

Ravno valovanje naj vpada z leve proti desni na navpično mejo med dvema dielektrikoma. Namesto snovi je veljaven tudi vakuum. Meja naj leži pravokotno na os  $x$  koordinatnega sistema pri  $x = 0$ . Vpadno valovanje je  $u_1 = A_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)$  in odbito

valovanje  $u_2 = A_2 \exp i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)$ . Zahtevamo zveznost faze na mejni ploskvi v vsakem trenutku:  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t$ . Iz tega najprej sledi  $\omega_1 = \omega_2$ . Frekvenca odbitega valovanja je enaka kot frekvenca vpadnega valovanja, kakor tudi mora biti.

Za vsak vektor  $\mathbf{r}$ , ki kaže na mejo, zahteva zveznost faze tudi  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$ , torej  $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = 0$ . To pomeni, da je  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  pravokoten na mejo oziroma  $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \mathbf{n} = 0$ . Sledi  $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n} - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{n} = 0$  oziroma  $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$ . Ker potujeta vpadno in odbito valovanje po isti snovi, je  $k_1 = k_2$ , zato

$$\alpha_1 = \alpha_2. \quad (38.50)$$

To je znani *odbojni zakon* (12.1). Odbiti kot je enak vpadnemu, kakor tudi mora biti. Ker  $c_2 = \omega_2/k_2 = \omega_1/k_1$ , je seveda enaka tudi hitrost:  $c_2 = c_1$ .

**Lomni zakon** Namesto odbitega valovanja glejmo sedaj prepuščeno valovanje. Označimo ga z indeksom 2. Razmišljanje je enako. Zveznost faze zahteva najprej  $\omega_1 = \omega_2$ . Prepuščeno valovanje ima isto frekvenco kot vpadno. Tako tudi mora biti. Druga zahteva, namreč  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$ , pa vodi do  $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$ . Upoštevamo  $k_1 = \omega_1/c_1$  in  $k_2 = \omega_2/c_2 = \omega_1/c_2$ , pa dobimo

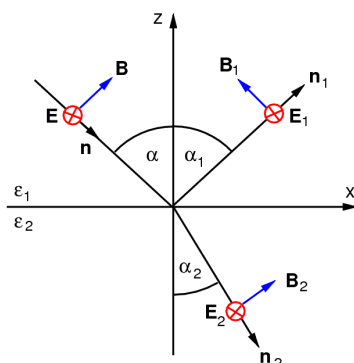
$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}. \quad (38.51)$$

To je znani *lomni zakon* (12.3). Enačbo pomnožimo s  $c$  in dobimo

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (38.52)$$

Prepuščeno valovanje je zlomljeno, kakor tudi mora biti. Kolikšen je lom, določata hitrosti valovanja v prvi in drugi snovi. Hitrost v snovi je zmanjšana za faktor  $n$  glede na hitrost v vakuumu. Za isti faktor je zmanjšana tudi valovna dolžina, saj ostaja frekvenca nespremenjena.

**Odbojnost in prepustnost** Kolikšen delež energije pa se odbije oziroma prepusti skozi mejo? Naj bo električna poljska jakost vpadajoče svetlobe pravokotna na vpadno ravnino. Iz slike razberemo naslednje.



**Slika 38.11** Vpad svetlobe na dielektrik. Del svetlobe se odbije in del nadaljuje pot. Prikazan je ravni val, v katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino.

Za vpadno svetlobo:  $E_y = A \exp ik_1 s$ ,  $B_x = (n_1/c) A \cos \alpha \exp ik_1 s$ ,  $B_z = (n_1/c) A \sin \alpha \exp ik_1 s$ . Za odbito svetlobo:  $E_y = B \exp ik_1 s_1$ ,

$B_x = -(n_1/c)B \cos \alpha \exp ik_1s_1$ ,  $B_z = (n_1/c)B \sin \alpha \exp ik_1s_1$ . In za prepuščeno svetlobo:  $E_y = C \exp ik_2s_2$ ,  $B_x = (n_2/c)C \cos \alpha_2 \exp ik_2s_2$ ,  $B_z = (n_2/c)C \sin \alpha_2 \exp ik_2s_2$ . — Komponenta  $E_y$  mora biti zvezna:  $A \exp ik_1s + B \exp ik_1s_1 = C \exp ik_2s_2$ , zato mora pri  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$  in  $s = 0$  veljati  $A + B = C$  (1). — Komponenta  $B_x$  mora tudi biti zvezna:  $(n_1/c)A \cos \alpha - (n_1/c)B \cos \alpha = (n_2/c)C \cos \alpha_2$ , torej  $n_1(A - B) \cos \alpha = n_2C \cos \alpha_2$  (2). — Iz enačbe (1) izrazimo  $C$  in ga vstavimo v enačbo (2). Iz tako dobljene enačbe izrazimo količnik  $B/A$ , to je, razmerje odbojne in vpadne amplitude, ter ga kvadriramo  $R = |B/C|^2$ , da dobimo razmerje odbitega in vpadnega toka oziroma *odbojnost* (FRESNEL)

$$R_{\perp} = \left| \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \alpha_2} \right|^2. \quad (38.53)$$

Enačbo lahko polepšamo. Vanjo substituiramo  $n_2 = n_1 \sin \alpha / \sin \alpha_2$  ter z uporabo sinusa vsote oziroma razlike kotov dobimo

$$R_{\perp} = \left| \frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin(\alpha + \alpha_2)} \right|^2. \quad (38.54)$$

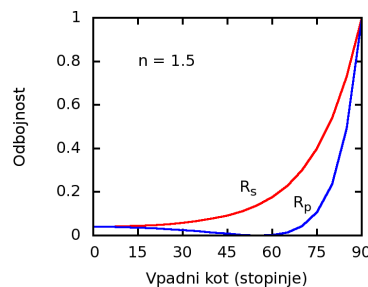
Podobno računamo za vpadajočo svetlobo, pri kateri je električna poljska jakost vzporedna z vpadno ravnino. Dobimo (FRESNEL)

$$R_{\parallel} = \left| \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \alpha_2} \right|^2 \quad (38.55)$$

in

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\tan(\alpha - \alpha_2)}{\tan(\alpha + \alpha_2)} \right|^2. \quad (38.56)$$

Vsota odbitega in prepuščenega toka je enaka vpadnemu toku, zato je z odbojnim količnikom podan tudi prepustni količnik oziroma *prepustnost*:  $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$  in  $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$ .



**Slika 38.12** Izračunani odbojni količnik za steklo ( $n = 1,5$ ).

Sončna svetloba ni polarizirana, ampak je enakomerna mešanica raznosmerno polariziranih valov. Zanj velja  $R = (R_{\perp} + R_{\parallel})/2$  ter  $R + T = 1$ .

Pravokotni vpad

Pri pravokotnem vpadu, ko  $\alpha = 0$  in zato tudi  $\alpha_2 = 0$ , ni razlike med pravokotno in vzporedno usmerjenostjo električne jakosti, in odbojni količnik znaša

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2. \quad (38.57)$$

Od vode se torej odbije le 2 % vpadle energije in od stekla 4 %. Na okenski šipi se odbija svetloba od obeh ploskev, torej skupaj okrog 8 %, če zanemerimo višje odboje.

Polarizacijski kot Kadar  $\alpha + \alpha_2 = 90^\circ$  je tangens neskončen in  $R_{\parallel} = 0$ . Pri katerem vpadnem kotu  $\alpha_B$  se to zgodi? Pri  $n_1 \sin \alpha_B = n_2 \sin (90^\circ - \alpha_B) = n_2 \cos \alpha_B$ , torej pri

$$\alpha_B = \text{atan} \frac{n_2}{n_1}. \quad (38.58)$$

To je že poznani *polarizacijski kot* [27.5]. Za vodo znaša  $53^\circ$  in za steklo  $56^\circ$ . Vzporedno polarizirana svetloba, vpadajoča pod tem kotom, se nič ne odbije, ampak se le lomi. Če je vpadajoča svetloba poljubno polarizirana, se njena vzporedna komponenta nič ne odbije, preostane le pravokotna komponenta. Odbita svetloba je zato polarizirana v smeri pravokotno na vpadno ravnino. Slika Sonca na vodni gladini, ki je vidimo pod kotom  $90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$  pod očesno vodoravnico, je popolnoma vodoravno polarizirana.

### 38.13 Vpad na prevodnik

Kaj pa vpad svetlobe iz dielektrika na prevodnik, recimo iz zraka na zglajeno srebrno ploščo? Pri vpadu svetlobe na dielektrik smo upoštevali le, da je dielektričnost na obeh straneh meje različna. Nič nismo zahtevali, da je realna, čeravno smo samoumevno tako računali. Zato vse izpeljane enačbe valjajo v nespremenjeni obliki, če v njih nadomestimo realne lomne količnike s kompleksnimi. Takšne pa imajo, kot vemo, prevodniki. Ugotovimo naslednje.

Odboj in lom Odbojni zakon ostane nespremenjen.

Lomni zakon se v kompleksni podobi glasi:

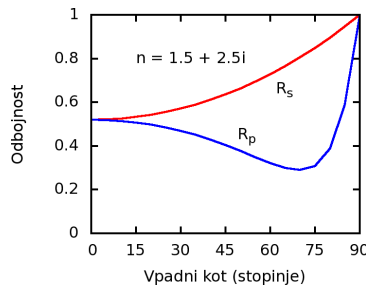
$$\hat{n}_2 \sin \hat{\alpha}_2 = n_1 \sin \alpha_1. \quad (38.59)$$

Da je leva stran enačbe kompleksna in desna realna, ni razlog za skrb. Saj so realna števila pravzaprav kompleksna števila z ničelno imaginarno komponento. S tem postane sinus lomnega kota kompleksna funkcija kompleksnega argumenta  $\sin \hat{z} = (\exp i\hat{z} - \exp(-i\hat{z}))/2i$ . Podobno velja za kosinus:  $\cos \hat{z} = (\exp i\hat{z} + \exp(-i\hat{z}))/2$ . Med seboj sta obe funkciji povezani  $\sin^2 \hat{z} + \cos^2 \hat{z} = 1$ . S to povezavo izluščimo iz lomnega zakona, da znaša kosinus lomnega kota

$$\hat{n}_2 \cos \hat{\alpha}_2 = \sqrt{\hat{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1}. \quad (38.60)$$

Odbojnost in prepustnost Enačbe za odbojne in prepustne količnike ostajajo nespremenjene, le da so v njih faktorji  $\hat{n}_2$  in  $\cos \hat{\alpha}_2$  kompleksni.

Številске vrednosti  $R_{\parallel}(\alpha)$  in  $R_{\perp}(\alpha)$  za dani snovi  $n_1$  in  $\hat{n}_2$  zato izračunamo brez težav, pač po pravilih kompleksne aritmetike.



**Slika 38.13** Izračunani odbojni količnik za vpad svetlobe iz zraka ( $n = 1,0$ ) na hipotetični prevodnik ( $n = 1,5 + 2,5 i$ ).

Grafi kažejo, da prevodniki - zaradi velikega ekstinkcijskega koeficienta - močno odbijajo svetlobo pri vseh vpadnih kotih. Ne obstaja pa kot, pri katerem bi se odbojnost zmanjšala na nič. Namesto tega obstaja *glavni kot*, pri katerem ima odbojnost rahel minimum. Odboji od prevodnikov pri tem kotu zato niso znatno polarizirani. Vse to potrjujejo tudi eksperimenti z zglajenimi kovinami, recimo s srebrom ali z aluminijem.

Tudi enačba za odboj pri pravokotnem vpadu ostaja nespremenjena. Zaradi preproste oblike pa jo lahko zapišemo tudi eksplicitno z obema komponentama lomnega količnika:

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2 + \kappa_2^2}{(n_2 + n_1)^2 + \kappa_2^2} \quad (38.61)$$

Enačba omogoča izračun ene izmed treh količin  $R$ ,  $n_2$  in  $\kappa_2$ , če sta drugi dve poznani. Če torej uspemo izmeriti ekstinkcijski koeficient merjenca, je z meritvijo odbojnosti določen tudi njegov lomni količnik.

### 38.14 Uklon na ovirah

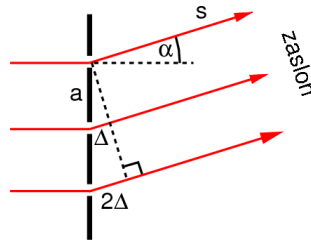
Valovanje, ki vpada na raven zaslon z odprtino, se za njim uklanja. Valovanje v izbrani točki za zaslonom je vsota krogelnih elementarnih valov iz vsake točke odprtine. Posebej preprost je uklon, pri katerem vpada ravno valovanje pravokotno na zaslon. Izvorna valovanja imajo tedaj povsod po odprtini enako amplitudo in enako fazo. Tedaj velja za "zamrznjeno" valovanje v točki P za oviro superpozicija  $u_P \propto \int dS \exp(iks)/s$ , pri čemer je  $s$  razdalja od točkovnega izvora do opazovane točke. Če opazujemo uklonsko sliko daleč za zaslonom, je  $s$  približno konstanten in ga lahko izvlečemo izpod integrala. Tedaj velja

$$u_P \propto \int \exp(iks) dS \quad (38.66)$$

Izračunajmo uklonjene energijske tokove za mrežico iz tankih rež, za široko režo in za okroglo odprtino!

Mrežica tankih rež

Slika kaže, da moramo izračunati vsoto  $u_P \propto \exp(iks_1) + \exp(ik(s_1 + \Delta)) + \exp(ik(s_1 + 2\Delta)) + \dots = \exp(iks_1) \cdot [1 + \exp(ik\Delta) + \exp(ik2\Delta) + \dots \exp(ik(N-1)\Delta)]$ , pri čemer je  $\Delta = a \sin \alpha$ .

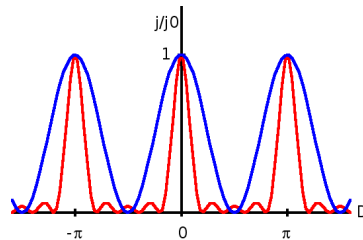


**Slika 38.14** Uklon na mrežici tankih rež na medsebojni razdalji  $a$ . Ravno valovanje vpada na mrežico pod pravim kotom. Opazujemo uklonjeno valovanje daleč proč pod različnimi koti  $\alpha$ .

Računamo takole. V oklepaju je geometrična vsota, ki znaša  $(\exp ikN\Delta - 1)/(\exp ik\Delta - 1)$ . Izračunamo  $u_P u_P^*$ , upoštevamo identiteto  $\exp i\eta + \exp(-i\eta) = 2 \cos \eta$  ter  $1 - \cos \eta = 2 \sin^2 \eta$  in dobimo  $w \propto (\sin^{1/2} Nk\Delta)^2 / (\sin^{1/2} k\Delta)^2$ . Limita  $\sin N\eta / \sin \eta$ , ko  $\eta \rightarrow 0$ , znaša  $N$ , zato lahko zapišemo

$$j(\alpha) = j_0 \left[ \frac{\sin(1/2 Nka \sin \alpha)}{N \sin(1/2 ka \sin \alpha)} \right]^2. \quad (38.67)$$

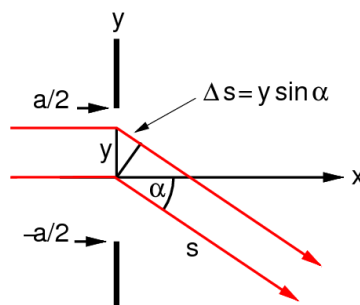
S tem smo uklonjeni tok v smeri  $\alpha$  normirali glede na uklonjeni tok pri  $\alpha = 0$ . Maksimumi ležijo tam, kjer  $1/2 ka \sin \alpha = \pi a \sin \alpha / \lambda = 0, \pi, 2\pi \dots$ , torej kjer  $a \sin \alpha = n \cdot \lambda$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ , kar že vemo.



**Slika 38.15** Uklon valovanja za mrežico iz dveh rež (modro) in iz petih rež (rdeče). Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra  $D = \pi(a/\lambda) \sin \alpha$ .

Če so reže zelo ozke, so vsi maksimumi enako močni. Lega maksimumov je neodvisna od števila rež  $N$ . So pa maksimumi tem ožji, čim več je rež. Med dvema sosednjima maksimumoma leži  $N-2$  majhnih sekundarnih maksimumov.

Široka reža Široko režo si mislimo sestavljeno iz samih ozkih rež, ki se med seboj stikajo. Izračunati moramo  $u_P \propto \int dy \exp(ik(s + \Delta s(y)))$ , pri čemer  $\Delta s = y \sin \alpha$ .



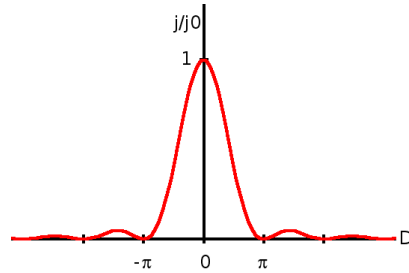
**Slika 38.16** Uklon na široki reži z debelino  $a$ . Okoliščine so enake kot pri mrežici.

Računamo takole. Ker  $\exp(iks)$  ni odvisen od  $y$ , ga izpustimo in preostane  $\int dy \exp(iky \sin \alpha)$  v mejah  $\mp a/2$ . Diferencial zapišemo v obliki  $(1/k \sin \alpha) d(ky \sin \alpha)$ , s čimer preide integral v obliko  $(1/k \sin \alpha) \int \exp(-i\eta) d\eta$  v mejah  $\mp (a/2)k \sin \alpha$ . Izračunamo  $\int \exp(-i\eta) d\eta = i \exp(-i\eta)$ , vstavimo meje, upoštevamo  $(\exp(i\eta) - \exp(-i\eta))/2i = \sin \eta$  in dobimo  $u_P \propto \sin(k \sin \alpha) / k \sin \alpha$ .

Kvadriramo in upoštevamo, da  $\sin \eta / \eta \rightarrow 1$ , ko  $\eta \rightarrow 0$ , pa lahko zapišemo

$$j(\alpha) = j_0 \left[ \frac{\sin(ka \sin \alpha)}{ka \sin \alpha} \right]^2. \quad (38.68)$$

Sorazmernostna konstanta  $j_0$  je gostota toka na zaslonu pri uklonskem kotu  $\alpha = 0$ . Prvi minimum je pri  $(2\pi/\lambda) a \sin \alpha = \pi$ , torej pri  $\sin \alpha \approx \alpha = 0,5 \cdot \lambda/a$ . Za rdečo svetlobo in 1/4 mm široko režo znaša  $\alpha = 0,1^\circ$ . Med obema prvima minimumoma je torej kot  $0,2^\circ$ . Na meter oddaljenem zaslonu to znaša okrog 3 mm.

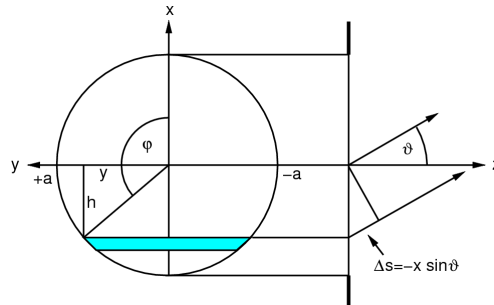


**Slika 38.17** Uklon za široko režo. Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra  $D = 2\pi (a/\lambda) \sin \alpha$ .

Okrogla odprtina

Okroglo odprtino si mislimo razrezano v vodoravne in navpične trakove. Izračunati moramo  $u_P \propto \int \exp(iks) dS = \int \exp(ik(s + \Delta s)) dS \propto \int \exp(ik\Delta s) dS$ . Z upoštevanjem  $\Delta s = -x \sin \theta$  je torej pred nami dvojni integral

$$u_P \propto \int_{-a}^{+a} dy \int_{-h(y)}^{+h(y)} dx e^{-ikx \sin \theta}. \quad (38.69)$$



**Slika 38.18** Uklon za okroglo odprtino. Razmere so take, kot pri uklonu na široki reži.

Desni integral je enakega tipa kot pri reži in ga tako tudi izračunamo ter dobimo  $u_P \propto (1/\sin \theta) \int_{-a}^{+a} dy \cdot \sin(k \sin \theta \cdot h(y))$ . Upoštevamo  $y = a \sin \varphi$ ,  $h = a \cos \varphi$  in  $dy = a \cos \varphi d\varphi$ , s čimer dobimo

$$u_P \propto \frac{1}{\sin \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(ka \sin \theta \cdot \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (38.70)$$

Na prvi pogled integrala ne znamo izračunati. Lahko pa nanj pogledamo kot na funkcijo parametra  $\eta = ka \sin \theta$ . Definirajmo torej funkcijo  $J$  kot

$$J(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\eta \cdot \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi. \quad (38.71)$$

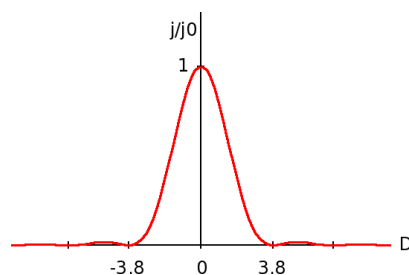
V definicijo smo zaradi lepšega vključili "normalizacijski" faktor  $1/\pi$ . — Ali lahko funkcijo  $J$  izračunamo? Podintegralsko funkcijo  $\sin t, t = \eta \cos \varphi$  razvijemo v potenčno vrsto  $t - t^3/3! + t^5/5! - \dots$  Tako pridelamo vsoto integralov oblike  $\cos^{2n} \varphi$ , ki jih znamo integrirati. Dobimo vrsto

$$J(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{2n+1}. \quad (38.72)$$

To pa ni nič drugega kot že spoznana cilindrična funkcija  $J_1$  (38.22)! S funkcijo  $J_1$  zapišemo iskano amplitudo kot  $u_P \propto J_1(ka \sin \theta) / \sin \theta$ , jo kvadriramo, upoštevamo  $J_1(\eta)/\eta \rightarrow 1/2$ , ko  $\eta \rightarrow 0$  (kar ugotovimo iz vrste), in končno pridelamo:

$$j(\theta) = j_0 \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2. \quad (38.73)$$

Sorazmernostna konstanta  $j_0$  je gostota toka na zaslonu pri  $\theta = 0$ . Prvi minimum je pri  $(2\pi/\lambda) a \sin \theta = 3,8$ , torej pri  $\sin \alpha \approx \alpha = 0,61\lambda/a = 1,22\lambda/2a$ . Za rdečo svetlobo in  $1/4$  mm široko luknjo znaša  $\theta = 0,2^\circ$ . Prvi minimalni obroč je torej napet na kot  $0,4^\circ$ . Na meter oddaljenem zaslonu to znaša okrog 6 mm. To je nekaj več kot pri enako široki reži.



**Slika 38.19** Uklon za okroglo odprtino. Prikazana je relativna gostota toka v odvisnosti od parametra  $D = 2\pi (a/\lambda) \sin \theta$ .

Ko z daljnogledom opazujemo zvezdo, se njena svetloba uklanja na okroglem objektivu premera  $2a$ . V goriščni ravnini se tvori uklonska slika. Zvezda ni ostra, ampak razmazana v majhen disk. Če sta dve zvezdi blizu skupaj, se diska prekrivata in ju ne moremo razločevati. Najmanjša razdalja, ko ju še ločimo, je nekako tedaj, ko pade maksimum ene zvezde v prvi minimum druge. *Kotna ločljivost* daljnogleda je zato  $1,22\lambda/2a \approx \lambda/2a$ , kakor smo svoj čas že ugotovili eksperimentalno.  $\square$



## 39 Elektroni in ioni

Piezo- in termoelektrika – Termični elektroni – Curki elektronov – Odklon curka v poljih – Relativistični odklon – Masni spektrometer ionov – Naboji na kapljicah – Elektroni v snovi – Dielektričnost – Permeabilnost – Prevodniki – Svetloba in elektroni

### 39.1 Piezo- in termoelektrika

Če privzamemo, da so nosilci električnega naboja res elektroni in ioni, v kar ne dvomimo preveč, dobimo s tem novo, upajmo da plodovito izhodišče za usmerjanje nadaljnjih raziskav. Razmišljamo takole.

Piezoelektrični pojav

Kristal izolatorja, recimo kvarca, je rešetka iz ionov, ki so med seboj povezani z elektronskimi pari kot vezmi. S to rešetko je določena tudi porazdelitev električnih dipolov po kristalu. Porazdelitev je taka, da se sosedni dipolni momenti med seboj izničujejo. Kaj pa, če bi kristal deformirali, recimo stisnili? Rešetka bi se potem spremenila in morda bi se električni dipoli več ne izničevali. Na nasprotnih ploskvah kristala bi se zato pojavili vezani pozitivni in negativni naboji in med njimi bi zavladata napetost.

Naredimo poskus! Kristal kvarca vtaknemo med dve kovinski ploščici, povezani z balističnim voltmetrom. Ko ploščici stisnemo, se voltmeter res za hip odkloni. Očitno je zaznal napetostni sunek, to je izenačevanje nabojev med obema ploščicama. Izmerimo, da sta pretočeni naboj in s tem napetost kar sorazmerna s pritiskom:  $U \propto p$ . Sorazmernostni koeficient je odvisen od vrste, oblike in razsežnosti kristala. Tipično znaša 10 V na  $\text{kp}/\text{cm}^2$ , kar je presenetljivo veliko. Odkrili smo *piezoelektrični pojav* pri nekaterih kristalih (CURIE, P.).

Termoelektrični pojav

V kovini elektroni niso vezani na ionsko rešetko, marveč se lahko prosto gibljejo skozi njo. Če staknemo dve kovini, se morda nekaj elektronov preseli iz kovine, kjer so šibkeje vezani, v kovino, kjer so vezani močneje. Z ene strani meje na drugo se preseli toliko elektronov, da ustvarijo dovolj veliko potencialno zaporno plast in preseljevanje se ustavi. Če naredimo krožno zanko iz dveh žic, sta na obeh stičiščih enako veliki in nasprotno usmerjeni potencialni plasti. Gonilna napetost po zanki je zato enaka nič. Če pa stičišči podvržemo različnim temperaturam (enega potopimo v vrelo in drugega v ledeno vodo, na primer), se morda potencialni plasti razlikujeta, pojavi se gonilna napetost in po zanki steče tok. To je *termočlen*.

Naredimo poskus! Meritve z voltmetrom res pokažejo, da obstaja gonilna napetost med stičiščema; je kar sorazmerna s temperaturno razliko:  $U \propto \Delta T$ . Sorazmernostni koeficient je

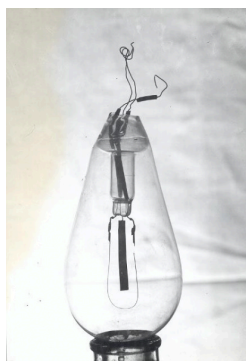
odvisen od vrste snovi in znaša tipično  $10 \mu\text{V/K}$ . Odkrili smo *termoelektrični pojav* (SEEBECK).

Termoelektrični pojav lahko izkoristimo kot generator napetosti iz temperaturnih razlik v okolju. Da dobimo dovolj visoke napetosti, moramo le zaporedno povezati več kovinskih parov. Ali pa merimo temperaturne razlike v okolju preko merjenja napetosti.

### 39.2 Termični elektroni

Ali lahko prevodniške elektrone spravimo ven iz kovine, morda s segrevanjem? Kakor iz tekoče vode pri segrevanju izhlapevajo molekule, tako morda iz kovin izhlapevajo tudi elektroni!

Dioda Ravnamo takole. V zaprto stekleno cev na vsakem koncu vtalimo kovinsko elektrodo in izsesamo zrak na okrog  $10^{-3}$  mm Hg. Tedaj imajo molekule zraka povprečno prosto pot (36.29) (ki je obratnosorazmerna z številsko gostoto) okrog 10 cm. S tem hočemo omogočiti elektronom nemoteno izhlapevanje in gibanje v prostoru. Eno elektrodo segrevamo z električnim grelcem do žarenja. Elektrodi priključimo na izvor enosmerne napetosti – baterijo nekaj 10 V: vročo elektrodo na negativni priključek (katoda) in hladno na pozitivnega (anoda). Priključeni ampermeter pokaže, da skozi cev teče tok. Očitno iz vroče elektrode res izstopajo elektroni, ki jih nato električno polje med elektrodama poganja proti hladni elektrodi. Ko priključka zamenjamo, pa tok ne teče. Iz hladne elektrode namreč elektroni ne morejo izstopati. Opisani cevi rečemo *dioda* (EDISON).

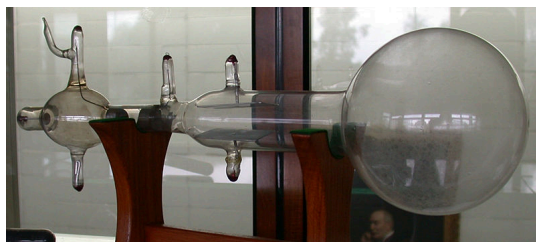


**Slika 39.1** Prva dioda – navadna žarnica na ogleno nitko, ki ima vtaljeno dodatno kovinsko elektrodo. Sestavil jo je T. Edison. Ko med elektrodo in žarilno nitko priključimo baterijo (elektrodo na pozitivni pol), steče skozi diodo tok. (National Museum of American History)

Diodni tok Kolikšen tok teče skozi diodo, je odvisno od oblike, lege in velikosti elektrod, od temperature katode ter še česa. V vsakem primeru pa je tok odvisen od napetosti: najprej hitro narašča, potem pa se ustali. Tedaj anoda sproti poskrka vse izhlapele elektrone iz katode. Tipični nasičeni tokovi znašajo 10–100 mA in tipične napetosti pri nasičenju 10–100 V.

Katodna cev Da bomo tok elektronov skozi prostor lažje preučevali, diodo ustrezno preoblikujemo. Razpotegnemo jo v hruškasto cev. Katodo in anodo namestimo v njen vrat ter v anodo izvrtamo luknjico. Tako upamo, da bodo nekateri elektroni zleteli skozi njo

in nadaljevali svojo pot v razširjeni prostor kot *katodni žarki*. Obe elektrodi priključimo na baterijo do 1000 V ali na indukcijsko tuljavo, ki je vir utripajoče enosmerne napetosti do 10 kV. Izdelali smo *katodno cev* (THOMSON).



**Slika 39.2** Katodna cev. Prikazana je katodna cev, ki jo je uporabljal J. Thomson za meritve elektronov. V sredini sta vtaljeni elektrodi kondenzatorja. (University of Cambridge).

Za uspešno delovanje katodne cevi je potrebno, kakor zmeraj, urediti kup podrobnosti. — Najprej moramo curek sploh videti. V cev zato dodamo majhno količino tega ali onega plina in poskušamo, ali njegove molekule, ko jih elektroni zadenejo, kaj sevajo. S poskušanjem ugotovimo, da sta primerna anodna napetost 100–300 V in helij oziroma vodik pri tlaku okrog  $10^{-2}$  mm Hg. Curek elektronov, ki teče skozi helij, zariše lepo modro črto. — Pri višjih anodnih napetostih opazimo na steklu, kamor vpada curek, svetlo piko. Heliju kot označevalcu žarka se zato lahko odrečemo. Poskušamo pa najti premaz, ki bi svetil čim močnejše. Za primerno kombinacijo se pokažeta anodna napetost okrog 1 kV in premaz iz cinkovega sulfida. — Hkrati poskušamo tudi povečati izhlapevanje elektronov iz katode in iščemo premaz s čim nižjim izstopnim delom. Za primerne se pokaže barijev oksid. — Končno še izboljšamo kolimacijo snopa z dodatkom ene ali več zaslonk.

S katodno cevjo smo dobili v roke prvovrstno orodje za ustvarjanje in raziskavo elektronskih curkov v vakuumu.

### 39.3 Curki elektronov

Ko elektron preleti potencialno razliko  $U_A$  med katodo in anodo, je na njem opravljeno delo  $eU_A$  in to je enako pridobljeni kinetični energiji  $mv^2/2$ , če je hitrost majhna v primerjavi s svetlobno. Elektron v curku ima zato hitrost

$$v = \sqrt{\frac{2eU_A}{m}}. \quad (39.1)$$

Kakšna je ta hitrost, vnaprej ne moremo vedeti, ker še ne poznamo mase elektronov. Njihov naboj pa že poznamo (36.10); izračunali smo ga iz elektrolizne in kilomolske konstante.

Elektronvolt Za elektron, ki preteče napetost 1 V, bomo rekli, da ima energijo 1 *elektronvolt* oziroma 1 eV. Ker že poznamo osnovni naboj, velja  $1 \text{ eV} = e \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Merjenje energije elektronov v joulih je očitno nerodno, zato jo bomo raje merili v elektronvoltih. To velja tudi za energije atomov in molekul. Povprečna termična translacijska energija atoma ali molekule, na primer, znaša  $K = (3/2)kT$ . Takšno energijo bi imel elektron, ki bi pretekel tolikšno napetost  $U$ , da  $eU = (3/2)kT$ . Pri 1000 kelvinih znaša  $U = 0,1 \text{ V}$ , kar pomeni  $K = 0,1 \text{ eV}$ . Očitno so kinetične energije delcev zaradi termičnega gibanja mnogo manjše kot energije, ki jih imajo elektroni v katodnih ceveh.

Hitrostna homogenost Ali se elektroni v izhodnem curku kaj razlikujejo po hitrosti? To bi se zgodilo, če bi se elektroni razlikovali po masi, po začetni energiji ob izstopu iz katode in po trkih ob anodo pri preletu skozi. Pričakujemo, da so mase vseh elektronov enake. Vpliv anodne luknje zanemarimo. Izhlapeli elektroni pa imajo le največ tolikšno začetno energijo, kot znaša termična energija delcev v katodi, torej okrog 0,1 eV. To pa je zanemarljivo v primerjavi z energijami preko aktualnih pospeševalnih napetosti nekaj sto ali tisoč voltov. Pričakujemo torej, da je elektronski curek hitrostno homogen.

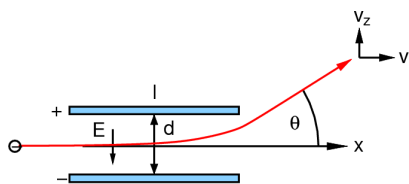
Hitrostna nehomogenost Kaj pa, če pospeševalna napetost ni konstantna, ampak se s časom hitro spreminja? To se dogaja pri indukcijskih tuljavah. V tem primeru so nekateri elektroni pospešeni z večjo in drugi z manjšo napetostjo. V curku zato najdemo elektrone z najrazličnejšimi hitrostmi. Taki curki so hitrostno nehomogeni.

### 39.4 Odklon curka v poljih

Elektronski curki nosijo naboj in ti naboji se gibljejo, torej predstavljajo električni tok. Zato nanje gotovo delujeta električna sila  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}$  (37.1) in magnetna sila  $\mathbf{F}_m = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$  (37.30), ki se za posamičen elektron zapišeta kot

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (39.2)$$

Električni odklon Raziščimo vpliv teh sil! V vodoravno katodno cev namestimo kondenzator iz dveh podolgovatih ploščic dolžine  $l$  na medsebojni razdalji  $d$ . Skozi ta kondenzator naj teče elektronski curek; z njim je definirana os  $x$ . Napetost  $U$  med lističema ustvari v kondenzatorju homogeno polje  $E = U/d$ , ki je usmerjeno (postavimo) navpično navzdol.



**Slika 39.3** Električni odklon. Curek elektronov se odkloni v električnem polju kondenzatorja.

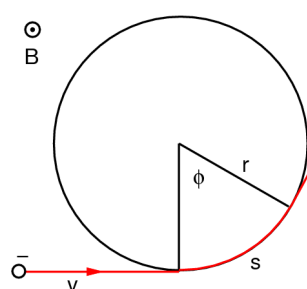
V kondenzatorju preživi elektron  $t = l/v$  časa. Medtem mu električna sila podeljuje pospešek  $a = F_e/m = eE/m$  in mu podeli hitrostno komponento navzgor  $v_z = at = eEl/mv$ . Po prehodu kondenzatorja je zato elektron odklonjen od prvotne smeri za kot  $v_z/v = \tan \theta$ , pri majhnih odklonih torej za

$$\theta = \frac{eEl}{mv^2}. \quad (39.3)$$

Vidimo, da  $\theta \propto 1/mv^2$ . Vsi elektroni z enako kinetično energijo se enako odklonijo. Rečemo, da je električno polje selektor curka po kinetični energiji. Kvalitativen poskus pokaže, da se elektronski curek res odkloni. Če je curek hitrostno nehomogen (na primer pridobljen z indukcijsko tuljavo), se pri tem raztegne v navpično pahljačo. Hitrejši elektroni pač preživijo v kondenzatorju manj časa in se manj odklonijo, počasnejši pa bolj.

Magnetni odklon

Postavimo na vsako stran katodne cevi enako obročasto tuljavo. Razmaknjeni naj bosta za polovico svojega premera: polje med takima tuljavama je namreč dobro homogeno. Odvisno je od toka, ki teče skozi, in ga lahko izmerimo na primeren način. Polje naj bo pravokotno na cev in usmerjeno (postavimo) v desni bok gibajočih se elektronov.



**Slika 39.4** Magnetni odklon. Curek elektronov se odkloni v magnetnem polju tuljave.

Curek čuti silo  $evB$  pravokotno na svojo smer, kar ga zvija navzdol v krožni lok z radijem  $r$ . Magnetna sila je centrifugalna, zato  $evB = mv^2/r$ , torej  $1/r = eB/mv$ . Po prehodu magnetnega polja po loku  $s$  so elektroni odklonjeni za kot  $\phi = s/r$ , to je

$$\phi = \frac{eBs}{mv}. \quad (39.4)$$

Vidimo, da  $\phi \propto 1/mv$ . Vsi elektroni z enako gibalno količino se enako odklonijo. Rečemo, da je magnetno polje selektor curka elektronov po gibalni količini. Kvalitativni poskus pokaže, da se elektronski curek res odkloni. Če je curek hitrostno nehomogen, se pri tem raztegne v navpično pahljačo. Hitrejši elektroni se manj odklonijo.

Hitrost elektronov

Kaj pa, če hkrati uporabimo navpično električno polje, ki odklanja curek navzdol, in vodoravno magnetno polje, ki odklanja curek navzgor? Premer tuljave v tem primeru naj bo enak dolžini kondenzatorja. Elektron, ki prileti s hitrostjo  $v$  v prekrizani polji,

čuti neto silo obeh polj in se ustrezno odkloni, navzgor ali navzdol. S prilagajanjem jakosti enega ali drugega polja (preko drsni upornikov) lahko dosežemo, da se elektron ne odkloni nikamor, ampak potuje naprej v ravni črti. Tedaj velja  $eE = evB$ , torej

$$v = \frac{E}{B}. \quad (39.5)$$

Za elektrone, ki so preleteli napetost 300 voltov, tako izmerimo strahotne hitrosti okrog  $10 \cdot 10^3$  km/s. V eni sekundi prepotuje tak elektron celotni premer Zemlje! Seveda pa je to še vedno zgolj 3 % svetlobne hitrosti. Če na prekržani polji vpadajo elektroni različnih hitrosti, se prepustijo v vodoravni smeri zgolj tisti s hitrostjo  $E/B$ , drugi pa zavijejo v stran. Polji zato delujeta kot *hitrostni selektor* elektronov.

Masa elektrona

Z izmerjeno hitrostjo  $v$  pri znani napetosti  $U_A$  je enolično določeno razmerje  $e/m = v^2/2U_A$ . Natančne meritve povejo  $e/m = 1,7 \cdot 10^{11}$  C/kg. Ker poznamo  $e = e_0$ , je s tem ugotovljena tudi masa elektronov:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}. \quad (39.6)$$

Elektron je torej 1800-krat lažji od atomske masne enote, ali kar je praktično isto, od vodikovega atoma.

Kaj pa, če ne poznamo napetosti  $U_A$ ? Tedaj uporabimo enačbi (39.3) in (39.4), ki opisujeta odklone in ne vsebujeta napetosti  $U_A$ . To je dvojica enačb z dvema spremenljivkama  $v$  in  $e/m$ . Njuna rešitev pove  $v = \phi E/\theta B$  in  $e/m = E\phi^2/B^2\theta l$ . Za primer  $\theta = \phi$  in  $l = s$  velja  $v = E/B$  in  $e/m = E\theta/B^2l$ . To pa je že iskana enačba. Govori nam, kako meriti: nastavite primeren  $E$  in izmerite odklon  $\theta$ . Vključite tuljavo in nastavite  $B$  tako, da se žarek vrne v izhodišče. Nato iz izmerkov izračunajte  $v$  in  $e/m$ .

### 39.5 Relativistični odklon

Sedaj, ko poznamo maso elektronov, lahko tudi izračunamo, s kakšno napetostjo jih moramo pospešiti, da se gibljejo relativistično. Velja  $eU = (\gamma(v) - 1)mc^2$ , iz česar sledi za  $v/c = 0,9$  vrednost  $U = 6,5 \cdot 10^6$  V, torej nekaj milijonov voltov. Tako visokih napetosti z obstoječimi usmerniki ne zmoremo ustvariti. Kljub temu pa izračunajmo, kako bi se takšni *relativistični elektroni* odklanjali v električnem in magnetnem polju.

Električni odklon

Opazovalni sistem S privežemo na kondenzator in opazovalni sistem S' na vpadajoči elektron. Za opazovalca v S torej kondenzator miruje in elektron se giblje v desno s hitrostjo  $v$ . Za opazovalca v S' pa elektron miruje in kondenzator se giblje v levo s hitrostjo  $-v$ . Čas v S, ki ga potrebuje elektron za prelet kondenzatorja, je  $t = l/v$ . Opazovalec S' vidi kondenzatorjevo polje  $E' = \gamma E$ . Opazovalec S' vidi skrajšan kondenzator  $l' = l/\gamma$ . V S' zato

potrebuje elektron preletni čas  $t' = l'/v$ . Vmes deluje nanj sila  $F' = eE'$ . Ta sila mu da pospešek (nerelativistični, ker so hitrosti  $v_z$  majhne)  $a' = F'/m$ . V času  $t'$  zato pridobi hitrost  $v_z' = a't'$ . Ta hitrost v S znaša  $v_z = v_z'/\gamma$ . V dobljeno enačbo za  $v_z$  vstavimo, po vrsti, vse predhodne enačbe, delimo z  $v$  in dobimo

$$\theta = \frac{eEl}{\gamma m v^2}. \quad (39.7)$$

To je prav takšna enačba kot za počasne elektrone, če za njihovo maso vzamemo vrednost  $\gamma m$ . Hitri elektroni se torej po teoriji relativnosti odklonijo manj, kot bi se po klasični teoriji.

Magnetni odklon Gibalna enačba za elektron v magnetnem polju je  $d(\gamma m \mathbf{v})/dt = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Ker je  $\mathbf{E} = 0$ , je  $|\mathbf{v}| = \text{const}$ . Zato je tudi  $\gamma = \text{const}$  in lahko zapišemo  $\gamma m d\mathbf{v}/dt = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . To pomeni, da se hitri elektron odklanja ravno tako kot počasni, če le za njegovo maso vzamemo vrednost  $\gamma m$ . Torej velja

$$\phi = \frac{eBs}{\gamma m v}. \quad (39.8)$$

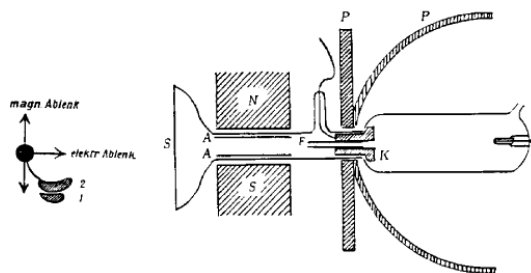
Odklonska pot elektrona ima obliko krožnega loka z radijem  $r$ . Ker  $\phi = s/r$ , znaša ta radij  $r = \gamma m v / eB$ . Če je magnetno polje razsežno, lahko elektron v njem zariše cel krog.

Prekrižani polji Enačbi za električni in magnetni odklon vsebujeta dve spremenljivki:  $v$  in  $e/m$ . Za primer  $\theta = \phi$  in  $l = s$  sledi iz izenačitve desnih strani enačb  $v = E/B$ . Vstavitev te hitrosti v prvo enačbo pa da  $e/\gamma m = E\theta/B^2 l$ . Hitrim elektronom torej izmerimo hitrost in razmerje  $e/m$  podobno kot počasnim. Po relativistični teoriji določeno razmerje je večje kot po klasični.

### 39.6 Masni spektrometer ionov

Kanalski žarki Električno in magnetno polje odklanjata seveda tudi ione, pozitivne in negativne. S tem se ponuja način, kako meriti njihove mase. V prostor med katodo in anodo zapremo nekaj plina. Namesto da preluknjamo hladno anodo, preluknjajmo vročo katodo. Elektroni na svoji poti od katode na anodo ionizirajo plin in nastali pozitivni ioni potujejo proti katodi ter skozi njeno luknjico. Tako dobimo curek pozitivnih ionov oziroma *kanalske žarke*. Za razliko od curka elektronov pa niso niti masno niti hitrostno homogeni: saj lahko nastane ionizacija kjerkoli, pospeševalne razdalje se zato razlikujejo in s tem tudi pridobljene hitrosti.

Parabolični spektrometer Ionski žarek je po odklonu v kondenzatorju navpično raztegnjen: v izbranem odklonu se znajdejo enako hitri, a masno različni ioni. Kako naj jih ločimo? S takim odklonom v vodoravni smeri, ki različno odklanja lahke kot težke delce. Takšno pa je magnetno polje, ki je vzporedno z električnim.



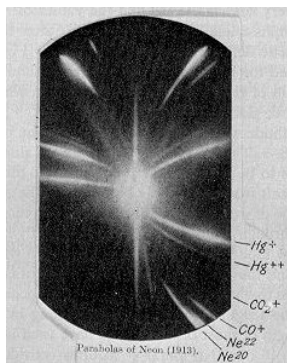
**Slika 39.5** Masni spektrometer ionov. K = katoda, F = kanal, AA = kondenzator, NS = magnet, S = zaslon, P = ščitnik. V posodi na desni je plin. Priključena indukcijska tuljava ga ionizira. Pozitivni ioni tečejo skozi kanal. Kondenzator jih odklanja navzdol in magnet vstran. Na zaslonu se rišejo deli parabol. (Thomson, J., 1897)

Izbrani ion se torej odklanja v navpični smeri za  $\theta \propto z \propto eE/mv^2$  in v vodoravni za  $\varphi \propto y \propto eB/mv$ . Sorazmernostna koeficienta vsebujeta geometrične konstante. Z izločitvijo hitrosti iz obeh enačb dobimo

$$\frac{y^2}{z} \propto \frac{e B^2}{m E} . \quad (39.9)$$

Ioni z istim  $e/m$  in različnimi hitrostmi torej zarišejo na zaslonu navpično parabolo, pravzaprav le njeno polovico. Različne točke na paraboli odgovarjajo istemu  $e/m$  in različni hitrosti. Če so prisotni različni ioni, vsak s svojim  $e/m$ , se zariše več parabol. Predpostavljamo, da nosijo ioni po en osnovni naboj. Če nosi ion dva naboja, se zariše kot ion z enim nabojem in polovično maso.

Masama  $m_1$  in  $m_2$  ustrežata pri višini  $z$  odmika  $y_1$  in  $y_2$ . Njuno razmerje znaša  $m_1/m_2 = (y_2/y_1)^2$  in je neodvisno od velikosti in oblike priprave ter polj. Če poznamo maso ene parabole, z meritvijo odklikov  $y$  pri istem  $z$  določimo tudi maso vseh ostalih parabol. To delamo na fotografskem posnetku zaslona. Na posnetku ni vidna navpična os, zato naredimo dve polovični osvetlitvi in vmes zamenjamo smer magnetnega polja. Tako pridemo obe polovici parabol. Za umeritveno parabolo so primerni katerikoli ioni z znano maso, na primer kisikovi.



**Slika 39.6** Masni spekter. Ioni z istim razmerjem  $e/m$  padajo na isto parabolo. Hitrejši ioni bliže vrhu, počasnejši bolj proč. Opazna sta dva izotopa neona. (Thomson, J., 1913)

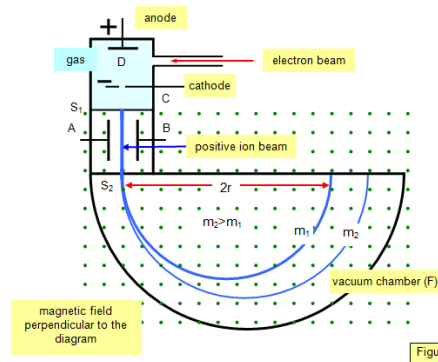
Z opisanim *masnim spektrometrom* odkrijemo, da so elementi z necelim masnim številom pravzaprav mešanica elementov z



različnimi celimi masnimi števili. Neon, na primer, ima masno število 20,2, spektrometer pa pokaže dve vrsti ionov: 20 in 22, prvih več in drugih manj. Rečemo, da so to *izotopi* neona. S tem oživimo domnevo, da so atomi pravzaprav sestavljeni iz celega števila enako težkih delcev.

Polkrožni spektrometer

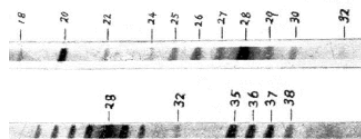
Ločljivost paraboličnega spektrometra znaša  $\Delta m/m \approx 1/10$ . Preučevanje izotopov pa zahteva večjo natančnost. Kot raziskovalci, ki nas zanima prav to področje, iščemo in izumimo mnoge izboljšave. Ena izmed njih je polkrožni spektrometer, ki dosega natančnost  $1/10^3$ .



**Slika 39.7** Polkrožni spektrometer. Hitrostno homogeni curek ionov se v magnetnem polju razcepi v delne curke z različnim razmerjem  $e/m$ . Prikazana je shema spektrometra, ki ga je sestavil K. Bainbridge. (SchoolPhysics, UK)

Spektroskop je sestavljen iz ionske komore, selektorja hitrosti in masnega analizatorja. V ionski komori poseben elektronski curek bombardira atome in jih ionizira v pozitivne ione. Polje med anodo in preluknjano katodo pospeši nastale ione ven iz komore. Na izhodu imajo ioni različne hitrosti. Sledi prehod skozi prekržani  $E$  in  $B$  polji, ki prepustita le ione z ostro določeno hitrostjo  $v = E/B$ . Teh izstopnih elektronov je seveda mnogo manj, kot je vstopnih. Ionski curek nato vpade v homogeno magnetno polje, ki ga razcepi in ukrivi v delne curke z različnimi radiji. Ioni z enakimi masami  $m$  se uvrstijo v curek z radijem  $r = mv/eB$ . Ko se curki odklonijo za  $180^\circ$ , zadenejo ob ravno fotografsko ploščo. Curek z radijem  $r$  zadene ploščo na oddaljenosti  $2r$  od vstopne točke. Masa ionov je torej kar sorazmerna z oddaljenostjo.

Zakaj prestrežemo curke pri  $180^\circ$  in ne kje drugje? Poskus (in tudi risba in račun) pokaže, da se curek, ki je pri vходу v magnetno polje zmeraj rahlo divergenten, po preletu za  $180^\circ$  spet lepo fokusira.



**Slika 39.8** Masni spekter neona z izotopoma 20 in 22 ter klora z izotopoma 35 in 37, kakor ju je s svojim spektrometrom izmeril F. Aston. (University of Cambridge)

Večina spektrometrov deluje na pozitivne ione. Takšni so tudi ioni, ki bi drugače od njih pričakovali, da bodo negativni, recimo klorovi. Atomi v ionizacijski komori pri obstreljevanju z elektroni

pač prej izgubijo kak elektron kot pa da kakšnega ujamejo. Če pa kakšen negativni ion le nastane, ne zmore poti do katode.

### 39.7 Naboji na kapljicah

Malo nas skrbi, če imajo elektroni in ioni res zmeraj enako velik naboj oziroma celoštevilski mnogokratnik tega naboja. Morda pa bi lahko drobne naboje neposredno merili in sicer na drobnih nosilcih?

Meritev nabojev

Med vodoravni plošči kondenzatorja, ki je priključen z drsnim delilcem napetosti na baterijo 1000 V, razpršimo oljne kapljice. Te se zaradi drgnjenja skozi šobo naelektrijo. Opazujemo jih z daljnogledom, pri čemer jih osvetljujemo z žarnico. Dokler na ploščah ni napetosti, padajo kapljice enakomerno. Njihova teža je enaka linearnemu zračnemu upor:  $\rho 4\pi r^3/3 = 6\pi\eta rv$ . Vzgon zanemarimo. Z merjenjem hitrosti med dvema vodoravnima črtama določimo radij izbrane kapljice in iz njega maso. Potem vključimo napetost. Nekatere kapljice se pospešijo navzdol, druge navzgor, kakor so pač naelektrjene. Napetost prilagodimo tako, da izbrana kapljica miruje. Tedaj je njena teža enaka električni sili:  $mg = eU/l$ , iz česar izračunamo naboj. Premerimo mnogo kapljic in ugotovimo, da so njihovi naboji res majhni mnogokratniki osnovnega naboja, za katerega dobimo  $1,6 \cdot 10^{-19}$  As. Manjših nabojev ne opazimo. S tem smo potrdili dosedanjo domnevo.



**Slika 39.9** Merjenje osnovnega naboja na kapljicah v električnem polju ploščatega kondenzatorja. Prikazana je priprava, ki jo je zgradil in uporabil A. Millikan. (University of Chicago)

Pri meritvah včasih opazimo, kako mirujoča kapljica nenadoma začne padati ali se dvigati. Očitno je zajela kakšen ion iz okolice. Opazimo pa tudi, da se vse mirujoče kapljice sčasoma, v kakšni minuti, začno dvigati. Očitno izhlapevajo in električna sila prevlada nad težo.

### 39.8 Elektroni v snovi

Snov je polna elektronov. V dielektrikih – trdnih, tekočih in plinastih – so elektroni vezani v atomih. V trdnih kovinah se prosto gibljejo skozi rešetko iz "mirujočih" pozitivnih ionov. In v prevodnih raztopinah potujejo, kakor kavboji na konjih, na gibljivih negativnih in pozitivnih ionih. Nekateri pa tudi samostojno, kakor kavboji brez konj.

|                              |  |
|------------------------------|--|
| Število elektronov           | <p>Koliko je pravzaprav elektronov v atomih raznih vrst? Tega zaenkrat ne vemo. Privlačna je misel, da je v najlažjem atomu vodika en elektron, v vseh naslednjih po teži pa ustrezno več.</p> <p>Koliko pa je presežnih elektronov na nabitih telesih? Preučimo ploščati kondenzator, ki ima bakreni plošči z debelino <math>d = 0,1</math> mm in ploščino po <math>S = 1</math> dm<sup>2</sup> na medsebojni razdalji <math>l = 1</math> cm. Vsaka elektroda ima maso <math>m = \rho Sl = 8,9</math> g. V kilomolski masi bakra <math>M = 64</math> kg je <math>N_A</math> atomov. Vsak atom prispeva, tako predpostavimo, 1 prevodni elektron. V kilomolski masi je zato <math>N_A</math> prevodnih elektronov. Skupni naboj teh elektronov je <math>N_A e_0 = 96 \cdot 10^6</math> As. V eni elektrodi pa je <math>m/M</math> tega naboja, to je <math>13\,400</math> As. Kondenzator ima kapaciteto <math>C = \epsilon_0 S/l = 8,9</math> pF. Z napetostjo <math>30</math> kV (ki jo dobimo iz tornega stroja in izmerimo s statičnim voltmetrom) spravimo na eno elektrodo naboj <math>e = CU = 2,7 \cdot 10^{-7}</math> As. Večja napetost povzroči preboj. Vendar pa je ta naboj <math>13\,400 / 2,7 \cdot 10^{-7} = 50 \cdot 10^9</math>-krat manjši kot skupni naboj vseh prevodnih elektronov. To pomeni: na vsakih <math>50</math> milijard prostih elektronov pride en elektron viška. Kar se kaže kot velika naelektrenost teles, je pravzaprav hudo neznamen višek ali primanjkljaj elektronov na njih.</p> |
| Hitrost elektronov v kovinah | <p>Električni tok po žicah, to je gibanje elektronov vzdolž njih. Kako hitro se gibljejo elektroni? To pove gostota toka: <math>j = nev</math>, pri čemer <math>n = N/V = N_A \rho / M</math>. Maksimalni tok, ki lahko teče po bakreni žici, ne da bi se ta preveč grela, znaša <math>j = 10</math> A/mm<sup>2</sup>. To pomeni, da se tedaj gibljejo elektroni s "strašno" hitrostjo <math>0,7</math> mm/s! To se na prvi pogled zdi malo, vendar tak elektron v eni sekundi preleti mimo milijona ionov. Seveda je to gibanje naloženo na obstoječe termično gibanje, ki je neprimerno hitrejše.</p> <p>Kako si ob tej majhni hitrosti razlagamo dejstvo, da se električna luč v stanovanju prižge takoj, ko pritisnemo na stikalo? Elektroni vzdolž žice se res premikajo počasi, njihov vpliv na naslednika v vrsti pa je bliskovit. Stvar je podobna, kot če z batom potisnemo vodo v cevi. Delci vode se premaknejo malo, njihov udarni val pa napreduje s hitrostjo zvoka.</p>   |
| Hitrost ionov v raztopinah   | <p>V vodni raztopini kislin, baz ali soli so nosilci električnega toka pozitivni in negativni ioni. Vsaka vrsta ionov se pri tem giblje s svojo hitrostjo in prispeva svoj delež k skupnemu toku: <math>j = n^+ e^+ v^+ + n^- e^- v^-</math>. Pozitivni ioni se gibljejo v smeri polja, negativni pa v nasprotni smeri, vendar imajo nasproten predznak, zato imata prispevka obojih enak znak. Obravnavajmo vodno raztopino morske soli NaCl. Ima naj koncentracijo <math>1</math> M/m<sup>3</sup>, to je <math>58</math> kg/m<sup>3</sup>. Če so vse molekule disociirane, je v raztopini natanko <math>N_A</math> ionov Na<sup>+</sup> in prav toliko ionov Cl<sup>-</sup>. Ker nosita obe vrsti ionov enak naboj in sta približno enako težki, privzamemo, da se tudi gibljeta enako hitro. Potem velja <math>j = 2N_A v</math>. Pri toku <math>1</math> A/cm<sup>2</sup> tako</p>   |

dobimo  $v \sim 0,1$  mm/s. Seveda je tudi to gibanje naloženo na obstoječe termično gibanje.

Lastnosti snovi Elektroni in ioni v snovi so vzrok za njihove električne in magnetne lastnosti. Te so opisane z dielektričnostjo  $\epsilon$ , permeabilnostjo  $\mu$  in prevodnostjo  $\sigma$  ter z različnimi iz njih izpeljanimi količinami, na primer z lomnim količnikom  $n$ . Vse to so fenomenološke količine. Doslej se nismo kaj dosti spraševali, od česa so odvisne. Zadoščale so nam kvalitativne razlage. Zdaj, ko poznamo maso in naboj elektronov, pa se vprašamo, kako bi te makroskopske količine kvantitativno povezali z mikroskopskimi.

### 39.9 Dielektričnost

Nepolarne molekule Začnimo z dielektričnostjo. Omejimo se na dielektrike v plinastem stanju. To pa zato, da bomo lahko zanemarili medsebojni vpliv molekul. Privzemimo najprej, da molekule nimajo stalnih dipolnih momentov. Za električno polje  $\mathbf{E}$  v dielektriku velja, kakor vemo, povezava  $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$  (1), pri čemer je polarizacija  $\mathbf{P}$  enaka vsoti molekularnih dipolov  $\mathbf{p}_e$  na prostorninsko enoto  $\mathbf{P} = (N/V)\mathbf{p}_e$  (2). Za ne premočna polja privzamemo, da je influencirani molekularni dipol sorazmeren z lokalnim poljem na mestu molekule:

$$\mathbf{p}_e = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{local}}. \quad (39.10)$$

Sorazmernostni koeficient  $\alpha$  poimenujemo *polarizabilnost*. Lokalno polje je vsota zunanega polja in polja okolišnjih molekul. Ker so molekule daleč narazen, njihov vpliv zanemarimo in velja  $\mathbf{E}_{\text{local}} = \mathbf{E}$ . Vstavimo (39.10) in (2) v (1), pa dobimo  $\epsilon = 1 + (N/V)\alpha$ . Ker  $N/V = Nm_1/Vm_1 = (Nm_1/V)/(M/N_A) = \rho N_A/M$ , sledi

$$\frac{M}{\rho} (\epsilon - 1) = N_A \alpha. \quad (39.11)$$

Dielektričnost nepolarnega plina je torej sorazmerna z njegovo gostoto. Meritve pokažejo, da je tak plin, na primer, vodik. Za vodik pri standardnih pogojih izmerimo  $\epsilon - 1 = 0,26 \times 10^{-3}$ , iz česar izračunamo najprej  $\alpha = 10 \text{ \AA}^3$  in nato iz tega  $p_e/E = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ e\AA} / (\text{kV/cm})$ . Po zgledu eV smo vpeljali e\AA kot  $e \cdot \text{\AA}$ . Polje 1 kV/cm torej influencira v vodikovi molekuli električni moment, ki ustreza razmiku dveh elementarnih nabojev za  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$ . Razmik  $N$  nabojev je seveda  $N$ -krat manjši. Težišči pozitivnega in negativnega naboja v vodikovi molekuli se torej razmakneta manj kot za milijoninko njeneg premera.

Polarne molekule Če imajo plinske molekule stalne električne momente, se ti bolj ali manj obračajo v smeri polja. Porazdelitev dipolov po odklonskem kotu  $\theta$  glede na smer polja je odvisna od njihove energije pri tem odklonu:  $dn/nd\Omega = A \exp(p_e E \cos \theta/kT) \approx A(1 + p_e E \cos \theta/kT)$ . — V smeri  $\theta = 0$  je delež  $A(1 + p_e E/kT)$  dipolov, v smeri  $\theta = \pi$  pa  $A(1 - p_e E/kT)$  dipolov. Več dipolov je torej

v smeri polja kot v nasprotni smeri. To se kaže kot polarizacija. — Normirno konstanto določimo iz pogoja  $\int (dn/n d\Omega) \cdot d\Omega = 1$ . Integriramo po  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  in dobimo  $A = 1/4\pi$ .

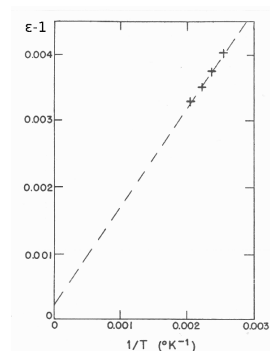
Povprečni moment v smeri polja znaša  $\langle p_e \rangle = \int (dn/nd\Omega) p_e \cos\theta d\Omega$ . Integriramo podobno kot prej in dobimo

$$\langle p_e \rangle = \frac{p_0^2}{3kT} E. \quad (39.12)$$

K dielektričnosti polarnih molekul prispevajo tako inducirani kot orientirani molekularni dipoli (DEBYE):

$$\frac{M}{\rho} (\epsilon - 1) = N_A \left( \alpha + \frac{p_0^2/\epsilon_0}{3kT} \right). \quad (39.13)$$

Konstanti  $\alpha$  in  $p_0$  sta značilni za posamezne snovi. Enačba ima obliko  $y = a + b/T$ . Z merjenjem dielektričnosti pri različnih gostotah in temperaturah lahko narišemo odvisnost  $y$  od  $1/T$  ter dobimo premico. Iz nje določimo konstanti  $b$  in  $a$  in iz njiju električni moment  $p_0$  ter polarizabilnost  $\alpha$ .



**Slika 39.10** Odvisnost susceptibilnosti  $(\epsilon - 1)$  vodne pare od temperature  $(1/T)$ . Prikazani so merski podatki pri konstantni gostoti, to je v zaprti togi posodi. (Feynman, 1963)

Meritve pokažejo, da je tak plin, na primer, voda. Za vodo izmerimo  $p_0 = 0,4 \text{ eÅ}$  in  $\alpha = 1,5 \text{ Å}^3$ . To sta tudi tipična reda velikosti za druge polarne molekule. Povprečni moment molekule pri sobni temperaturi, zasukan v smeri polja z jakostjo  $1 \text{ kV/cm}$ , znaša  $\langle p_e \rangle = 20 \cdot 10^{-6} \text{ eÅ}$ . Influencirani moment pa znaša  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ eÅ}$ , kar je za red velikosti manj.

Na osnovi izmerjenih električnih momentov lahko marsikaj sklepamo o molekulah. Vodna molekula  $\text{H}_2\text{O}$ , na primer, ima stalni električni moment. Zato ne more biti linearna  $\text{H-O-H}$ , ampak mora biti prepognjena. Molekula  $\text{CO}_2$  pa stalnega momenta nima, zato tudi ne more biti prepognjena, ampak je linearna  $\text{O=C=O}$ . Oboje seveda že vemo iz prostostnih stopenj in razmerja specifičnih toplot [36.9].

Konstanti  $\alpha$  in  $p_0$  sta odvisni od tega, kako so pozitivni in negativni električni naboji porazdeljeni po molekuli, to je, kako je molekula zgrajena. Tega zaenkrat ne vemo podrobno. Upamo pa,

da bomo v nadaljevanju raziskav to dognali. Tedaj bomo obe konstanti lahko kar izračunali.

### 39.10 Permeabilnost

Nemagnetne  
molekule

Kakor smo določevali električne momente plinskih molekul, tako določujemo tudi njihove magnetne momente. Preučimo najprej pline, katerih molekule nimajo stalnih magnetnih momentov. Poimenujmo jih nemagnetne molekule. Privzamemo, da se pri majhnih jakostih magnetnega polja v njih inducirajo magnetni momenti, ki so sorazmerni z jakostjo polja:

$$\mathbf{p}_m = \beta \mathbf{B} / \mu_0. \quad (39.14)$$

Sorazmernostni koeficient poimenujemo *magnetna polarizabilnost*. Upoštevajoč  $\mathbf{M} = (N/V)\mathbf{p}_m$  in  $\mathbf{B}/\mu = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}$  dobimo  $1/\mu - 1 = -(N/V)\beta = -(\rho N_A/M)\beta$ . Za  $\mu$ , ki je blizu 1, velja  $1/\mu - 1 \approx 1 - \mu$ , zato

$$\frac{M}{\rho} (\mu - 1) = N_A \beta. \quad (39.15)$$

(Zašli smo v težave z oznakami:  $M$  pomeni kilomolsko maso in  $\mathbf{M}$  magnetizacijo.) Permeabilnost plina iz nemagnetnih molekul je torej sorazmerna z njegovo gostoto.

Magnetne molekule

Stalne magnetne momente obravnavamo prav tako kot stalne električne momente, zato lahko rezultat kar prepisemo

$$\langle p_m \rangle = \frac{p_0^2}{3kT} B. \quad (39.16)$$

$$\frac{M}{\rho} (\mu - 1) = N_A \left( \beta + \frac{p_0^2 \mu_0}{3kT} \right). \quad (39.17)$$

(Spet smo v težavah z oznakami:  $p_0$  pomeni velikost magnetnega, ne električnega momenta molekule.) Specifična susceptibilnost plina iz magnetnih molekul je torej obratno sorazmerna z njegovo temperaturo.

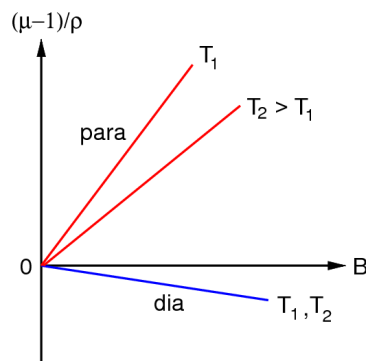
Težavne meritve

Ker imajo plini okrog 1000-krat manjšo gostoto kot snov v tekočem ali trdnem stanju, pričakujemo, da bo tudi njihova susceptibilnost ustrezno manjša, to je reda velikosti  $\pm 10^{-9}$  pri standardnih pogojih. To se, žal, pokaže za resnično.

Z mnogo truda ugotovimo, da ima vodik nemagnetne molekule in susceptibilnost  $-2,1 \cdot 10^{-9}$ . Temu ustreza inducirani moment  $p_m/B = -3,0 \cdot 10^{-10} \text{ \AA}^2/\text{T}$ . Predstavljajmo si, da kroži elektron v atomu s frekvenco  $\nu$  okrog ploščine  $S$ . Tedaj ustvarja moment  $p_m = IS = (e/t) \cdot S = e\nu S$ . Momentu  $p_m$  torej ustreza frekvenca  $\nu = p_m/eS$ . Za vodikov moment to znese  $1,9 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ . To se morda zdi na prvi pogled veliko, vendar je neznatno v primerjavi s frekvenco  $10^{15} \text{ Hz}$ , s katero nihajo elektroni, ko izsevajo vidno svetlobo.

Posebnost med plini je kisik, ki ima magnetne molekule in nenavadno veliko susceptibilnost  $+1,9 \cdot 10^{-6}$ . Iz temperaturne odvisnosti izluščimo  $\beta \approx 0$  in  $p_0 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}^2$ . Pri sobni temperaturi potem velja  $\langle p_m \rangle / B = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}^2 / \text{T}$ . Pri jakosti polja 1 T se torej vzdolž polja usmeri le tisočina razpoložljivega momenta.

Zanimivo je, da se kot plini z nemagnetnimi molekulami pokažejo le diamagnetni plini. Paramagnetni plini se pa vedno pokažejo kot plini z magnetnimi molekulami. To nas navaja na misel, da se sicer inducirajo momenti v vseh molekulah - nemagnetnih in magnetnih, vendar jih v slednjih zmeraj preglasijo orientirani momenti. Vse konstante  $\beta$  so negativne.



**Slika 39.11** Odvisnost specifične magnetne susceptibilnosti  $(\mu - 1)/\rho$  od magnetnega polja in temperature. Prikazane so kvalitativne odvisnosti za diamagnetno (modro) in paramagnetno (rdeče) snov.

Konstanti  $\beta$  in  $p_0$  sta odvisni od tega, kako se pozitivni in negativni električni naboji gibljejo po molekuli, to je, kako je molekula zgrajena. Tega zaenkrat ne vemo podrobno. Upamo pa, da bomo v nadaljevanju raziskav to dognali. Tedaj bomo obe konstanti lahko kar izračunali.

### 39.11 Prevodniki

Prevodnost Elektroni v kovinski žici se prosto gibljejo in pri tem trkajo z ioni. Vedejo se kot plin. Če je v žici stalno električno polje, čutijo elektroni silo  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$  in se gibljejo, kakor vemo iz kinetičnega opisa plinov, s prisilno hitrostjo (36.46)

$$\mathbf{v}_{\text{drift}} = \frac{e\mathbf{E}\tau}{m} \quad (39.18)$$

Količina  $\tau$  je povprečni čas med dvema trkoma (oznako za povprečje bomo kar izpustili). Ustrezna gostota toka znaša

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}_{\text{drift}} = \sigma\mathbf{E} \quad (39.19)$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Količino  $\sigma$  poimenujemo specifično prevodnost kovine. Če upoštevamo  $j = I/S$  in  $E = U/l$ , dobimo  $I = (\sigma S/l)U$ , v čemer takoj prepoznamo zakon upornosti  $U = RI$ , kjer  $R = l/\sigma S = \xi/lS$ . Lepo je videti, da smo našli zanj mikroskopsko razlago in smo ga spremenili v izrek!

Enačba za specifično prevodnost omogoča, da izračunamo povprečni čas med trki. Za baker, na primer, poznamo  $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 / \Omega \text{m}$  in  $n = N/V = \rho N_A / M = 8,3 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$  ter izračunamo  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{s}$ . S tem je določena tudi prisilna hitrost  $v_{\text{drift}}/E = 4 \text{ (mm/s)/(V/m)}$ . Pri gostoti toka  $j = 10 \text{ A/mm}^2$  vlada v žici polje  $E = j/\sigma = 0,17 \text{ V/m}$ , tako da je  $v_{\text{drift}} = 0,7 \text{ mm/s}$ , povsem v skladu s predhodnimi izračuni.

Kompleksna prevodnost

Kaj pa, če je kovina v spremenljivem električnem polju? To je tedaj, ko je žica priključena na izmenično napetost. Ko se elektron giblje skozi kovino, ima ob vsakem trenutku  $t$  gibalno količino  $\mathbf{G}(t)$ . Dve stvari se lahko zgodita v kratkem prihodnjem času  $dt$ . — Prvič, elektron doživi trk z verjetnostjo  $dt/\tau$ , izgubi vso dotedanjo gibalno količino in izide iz trka s slučajno gibalno količino  $e\mathbf{E}dt$ . Prispevek elektrona k svoji novi gibalni količini znaša  $\mathbf{G}_1(t + dt) = dt/\tau \cdot e\mathbf{E}dt$ . — In drugič, elektron ne doživi trka z verjetnostjo  $1 - dt/\tau$ . Po času  $dt$  ima potem gibalno količino  $\mathbf{G}(t) + e\mathbf{E}dt$ . Prispevek k svoji novi gibalni količini znaša  $\mathbf{G}_2(t + dt) = (1 - dt/\tau)(\mathbf{G}(t) + e\mathbf{E}dt)$ . Oba prispevka seštejemo, zanemarimo višje potence  $dt$  in dobimo

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\frac{\mathbf{G}}{\tau} + e\mathbf{E}. \quad (39.20)$$

To je gibalna enačba s pospeševalno silo  $e\mathbf{E}$  in z zaviralno silo  $\mathbf{G}/\tau$ . Pri enakomernem gibanju je leva stran enaka nič in enačba preide v znano obliko (39.18).

Za polje  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  poiščemo rešitev enačbe z nastavkom  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \exp(-i\omega t)$ . Tako pridemo do enačbe  $\mathbf{G}_0 = e\mathbf{E}_0\tau/(1 - i\omega\tau)$ . Množimo obe strani z  $ne/m$  in dobimo

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E} \quad (39.21)$$

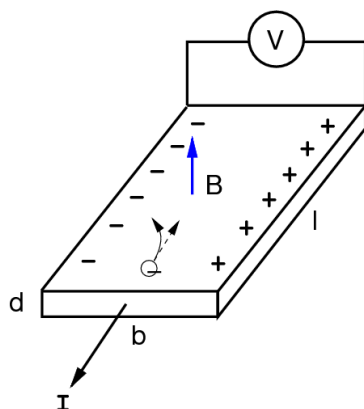
$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau}.$$

Pridelali smo kompleksno prevodnost, ki je odvisna od frekvence polja. To pomeni, da gostota toka ni več v fazi z jakostjo polja. Z naraščajočo frekvenco se prevodnost manjša. To je razumljivo: preden uspe polje dovolj pospešiti elektrone, se že obrne in jih začne pospeševati nazaj. Vpliv pa je znaten šele pri visokih frekvencah, ko postane  $1/\omega$  primerljiv s  $\tau$ . To pa so že frekvence vidne svetlobe. Za  $\omega = 0$  se enačba skrči na že znano stacionarno obliko, kakor tudi mora biti.

Prečna napetost

Elektronski curek se v magnetnem polju odklanja. To bi moralo veljati tudi za električni tok po prevodniku. Če po prevodniku v obliki traku teče tok in je nanj pravokotno usmerjeno magnetno polje, bi se morali elektroni nakopičiti ob enem robu. Tako bi se morala pojaviti napetost med obema robovoma traku. Izračunajmo to *prečno napetost*.





**Slika 39.12** Prečna napetost. Ko teče električni tok skozi prevodnik v magnetnem polju, se prečno nanj pojavi električna napetost.

Kovinski trak naj bo širok  $b$  in debel  $d$ . Vzdlž njega naj teče tok  $I = nev \cdot bd$ . Elektron v toku čuti magnetno silo  $F_m = evB$ . Iz prve enačbe izrazimo hitrost  $v$  in jo vstavimo v drugo enačbo ter dobimo  $F_m = IB/nbd$ . To magnetno silo uravnoveša električna sila  $F_e = eU/b$ . Z izenačitvijo sil dobimo (HALL)

$$U = \frac{1}{ne} \frac{IB}{d} \quad (39.22)$$

Prečna napetost je torej sorazmerna s tokom in z magnetnim poljem. Sorazmernostni koeficient je odvisen od gostote prevodniških elektronov. Za baker, recimo, smo že predpostavljali  $n = 8,3 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$ , zato je sorazmernostna konstanta zanj enaka  $7,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$ . Za trak debeline  $0,1 \text{ mm}$ , tok  $1 \text{ A}$  in polje  $1 \text{ T}$  dobimo, po računu,  $U = 75 \mu\text{V}$ . Merjenje prečne napetosti pri znanem toku in polju pokaže, da je sorazmernostna konstanta bakra  $5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$ . To pomeni, da je prevodniških elektronov več, kot smo domnevali, in vsak atom bakra odda v povprečju  $1,5$  elektrona v skupno elektronsko morje.

Magnetni trak s tokom je priročen merilnik za magnetno polje, a žal le za velike jakosti. Rekli mu bomo kar *magnetna sonda*. Prav tako lahko z njim merimo gostoto prevodniških elektronov v različnih kovinah.

### 39.12 Svetloba in elektroni

Svetloba v plazmi

Za elektromagnetni val v prevodniku velja  $\hat{\epsilon} = 1 + i\sigma/\epsilon_0\omega$ . V enačbi namesto prevodnosti  $\sigma$  upoštevamo kompleksno prevodnost  $\hat{\sigma}$ , torej  $\hat{\epsilon} = 1 + i\hat{\sigma}/\epsilon_0\omega$ . Vstavimo  $\hat{\sigma}$ , pri visokih frekvencah v faktorju  $(1 - i\omega\tau)$  zanemarimo  $1$  in dobimo

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (39.23)$$

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

*Plazemska frekvenca*  $\omega_p$  določa, kako se valovanje vede. Če  $\omega < \omega_p$ , je  $\epsilon$  realen in negativen, zato je  $k$  imaginaren: val se po vpadu hitro zaduši. Če  $\omega > \omega_p$ , pa je  $\epsilon$  realen in pozitiven, zato je

$k$  realen: valovanje potuje skozi prevodnik brez dušenja. Za kovine je  $\omega_p \sim 10^{15}$  Hz. To pomeni, da so za vidno svetlobo nepropustne, kar razumno odgovarja resnici.

Atomski oscilatorji

Poglejmo še svetlobo v dielektričnem plinu. Predpostavimo, da lahko elektroni v atomih prosto nihajo. Izbrani elektron lahko niha z lastno frekvenco  $\omega_0$ , recimo v smeri  $z$ . To pomeni, da je v atomu vezan z elastično silo  $m\omega_0^2 z$ . Opravka imamo z *atomskim oscilatorjem*.

Ko svetloba potuje čez atom, se elektron znajde v spremenljivem elektromagnetnem polju. Nanj delujeta električna in magnetna sila. Razmerje teh sil je  $F_m/F_e \leq evB/eE$ , pri čemer je  $v$  hitrost elektrona. Ker  $B = E/c$ , velja  $F_m/F_e \leq v/c$ . Če  $v \ll c$ , kar predpostavimo, je magnetna sila zanemarljiva.

Elektron v nihajočem električnem polju vsiljeno niha. Zanj velja gibalna enačba  $mz'' = -m\omega_0^2 z - eE_0 \sin \omega t$ . Enačbo smo že srečali in rešili (34.31), zato rezultat kar prepišemo:  $z = z_0 \sin \omega t$  in  $z_0 = eE_0/m(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Upoštevamo po vrsti  $p_e = ez$ ,  $P = (N/V)p_e$ ,  $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$ ,  $\varepsilon - 1 = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \approx 2(n - 1)$ , pa dobimo *disperzijsko enačbo*

$$n - 1 = \frac{e^2/m}{2\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{N}{V} \quad (39.24)$$

Mejni primeri

Za dolge valove lahko zanemarimo  $\omega$  v primerjavi z  $\omega_0$ . Tedaj je lomni količnik neodvisen od valovne dolžine in je opisan s konstantama  $\omega_0$  in  $N/V$ . Zrak je prozoren za vidno svetlobo. Svetlobo absorbira šele v ultravijoličnem delu spektra, pri valovni dolžini  $\lambda = 1860 \text{ \AA}$ . To odgovarja frekvenci  $\nu = 1,6 \cdot 10^{15}$  Hz. Elektron absorbira najmočnejše svetlobo tiste frekvence, ki jo sam seva, zato je navedena frekvenca tudi lastna frekvenca elektronovega nihanja. Konstanta  $N/V = N_A \rho/M$  je popolnoma določena z gostoto  $1,3 \text{ kg/m}^3$  in povprečno kilomolsko maso  $28,8 \text{ kg}$  zraka, zato izračunamo  $n - 1 = 4 \cdot 10^{-4}$ . To se dobro ujema z izmerjeno vrednostjo  $3 \cdot 10^{-4}$  pri standardnih pogojih.

Disperzijska enačba pove, kako je lomni količnik odvisen od frekvence svetlobe. Za vidno področje je imenovalc pozitiven, zato lomni količnik narašča s frekvenco. To je v skladu z opazovanji: vijolična svetloba se lomi močnejše kot rdeča.

Ko je frekvenca svetlobe enaka lastni frekvenci elektrona, bi moral biti lomni količnik neskončen. To je seveda posledica uporabljenih aproksimacij: nismo upoštevali, da je nihanje elektrona dušeno, ker pač seva energijo.

Ko postane frekvenca svetlobe mnogo višja od lastne frekvence elektrona, lahko zanemarimo  $\omega_0$  v primerjavi z  $\omega$ . Lomni količnik postane manjši od ena. To na prvi pogled pomeni, da se giblje zelo kratkovalovna svetloba v snovi hitreje kot v vakuumu. Težavo

odpravimo z naslednjo domnevo. V nekem smislu je res: hitrost čistega harmoničnega valovanja – njegova fazna hitrost – je lahko večja od  $c$ . Ovojnica dveh ali več čistih valov, ki se gibljejo z različno fazno hitrostjo, pa kaže modulacijske "hribe" in "doline", in njihova hitrost – grupna hitrost – ni nikoli večja od  $c$ . Za prenos sporočil je vedno potrebno modulirano valovanje in s tem je rešena teorija relativnosti. V raziskavo te razlage se ne bomo spuščali.

Večkratni oscilatorji

Pri izpeljavi disperzijske enačbe smo obravnavali atom kot harmonični oscilator z eno samo frekvenco. To gotovo ni res: kot vemo, sevajo atomi mnogo različnih frekvenc. Zato moramo disperzijski model ustrezno izpopolniti. Njegova naravna splošitev je

$$n - 1 = \frac{N}{V} \sum f_k \frac{e^2/m}{2\varepsilon_0(\omega_k^2 - \omega^2)}. \quad (39.25)$$

Frekvence  $\omega_k$  so določene z lego črt v spektru plina, koeficienti  $f_k$  pa z njihovo relativno jakostjo. Dokler ne poznamo zgradbe atomov, obojih ne moremo izračunati, ampak se moramo opreti na izmerke.  $\square$



# 40 Elektronika

Dioda in usmernik – Fotodioda in fotopomnoževalka – Trioda in ojačevalc – Osciloskop – Oscilator – Radijska povezava – Brežžična telefonija – Razvoj radia – Televizija – Magnetni zapis – Radiosonde – Mikrovalovi – Radar – Sonar – Družbeni vpliv

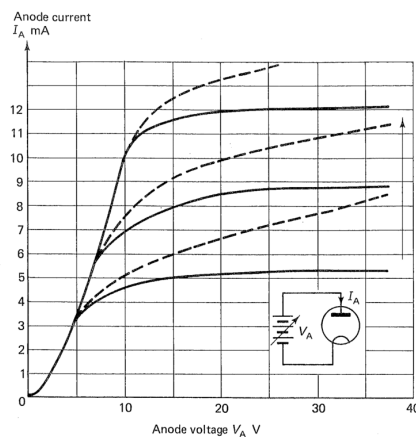
## 40.1 Dioda in usmernik

Dioda Vakuumska cev z žarilno nitko – *dioda* – je nov, zanimiv element, skozi katerega teče električni tok. Odvisnost tega toka od napetosti med obema priključkoma diode – njeno karakteristiko – določimo z drsnim baterijskim virom, voltmetrom in ampermetrom.



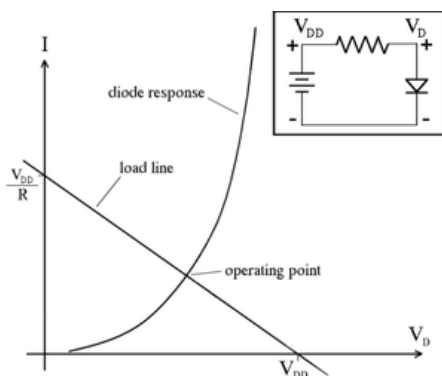
**Slika 40.1** Dioda. Dioda je vakuumna cev z dvema elektrodama: vročo katodo (žarilno nitko) in hladno anodo. Prikazana je prva uporabna dioda, ki jo je sestavil J. Fleming. (Science Museum, London).

Karakteristika diode Karakteristika diode je povsem drugačna, kot smo jo navajeni pri drugih električnih elementih – uporniku, tuljavi in kondenzatorju. Njena glavna značilnost je, da teče tok skozi diodo le v eni smeri: tedaj, ko je hladna elektroda, *anoda*, pozitivna glede na vročo elektrodo, *katodo*. Druga značilnost pa je, da tok ne narašča linearno z napetostjo, ampak se pri določeni napetosti ustali, postane nasičen.



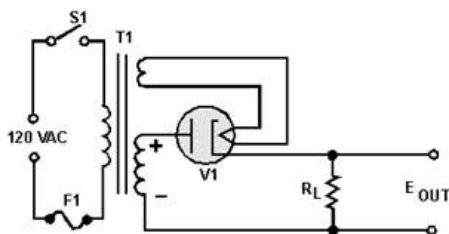
**Slika 40.2** Karakteristika diode. Prikazan je tok skozi tipično diodo v odvisnosti od anodne napetosti glede na katodo pri različnih temperaturah žarilne nitke. Pri višjih temperaturah je nasičeni tok večji. Neposredno segrevana (polna) in posredno segrevana (črtasta) nitka. (Meadows, 1978)

Delovna točka diode Karakteristika pove, kakšen je tok  $I$  skozi diodo, ko med njenima priključkoma vlada napetost  $U_D$ , torej  $f(U_D)$  (1). Če z baterijo  $U_{DD}$  poganjamo tok skozi zaporedno zvezana upornik  $R$  in diodo, pa napetost med priključkoma diode ni enaka napetosti med priključkoma baterije, ker nekaj napetosti vlada tudi med priključkoma upornika. Vsota padcev napetosti po krogotoku je enaka gonilni napetosti  $U_{DD} = IR + U_D$ , torej  $U_D = U_{DD} - IR$  oziroma  $I = (U_{DD} - U_D)/R$  (2). Enačbi (1) in (2) za dve neznaniki  $U_D$  in  $I$  rešimo grafično. Enačba (2) je namreč *delovna premica*, ki seka ordinato pri  $U_{DD}/R$  in absciso pri  $U_D = U_{DD}$ . Njeno presečišče z narisano  $f(U_D)$  pove napetost na diodi in tok skozi njo, to je njeno *delovno točko*.



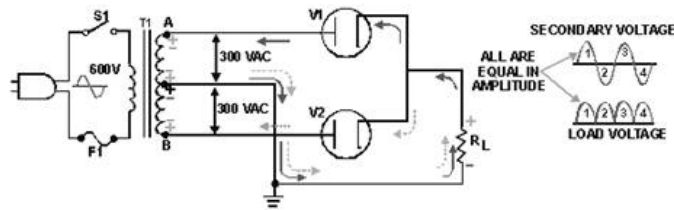
**Slika 40.3** Delovna točka diode. Delovna točka je dvojica  $(I, U_D)$ , to je tok skozi diodo in napetost na njej. Dioda je prikazana s trikotnim simbolom. Elektroni tečejo skozi diodo od priključka (-) do priključka (+). (Anon)

Polovični usmernik Če diodo priključimo na izmenično napetost, bo prepuščala tok le tedaj, ko bo napetost na anodi pozitivna. Prepuščeni tok bo torej utripajoče enosmeren: vseboval bo samo pozitivne vhodne polvalove. Na izhodnem uporniku bo zato ustvarjal utripajočo enosmerno napetost. Tok lahko zgladimo, če vzporedno k izhodnemu uporniku priključimo kondenzator. Kadar bo vanj dotekal tok, se bo polnil, ko pa bo tok presahnil, se bo praznil skozi upornik. Praznitveni čas kondenzatorja mora biti dolg v primerjavi z nihajnim časom izmeničnega toka.



**Slika 40.4** Polovični diodni usmernik. Gretje diode in napetost na njej zagotavlja vhodni transformator. Izglajevalni kondenzator, vzporeden izhodnemu uporniku  $R_L$ , ni narisan. (Schure, A.)

Polni usmernik Usmernik izboljšamo s središčnim odcepom iz transformatorja in z dodatkom druge diode. Tok skozi izhodni upornik zato vsebuje pozitivne polvalove in obrnjene negativne polvalove. Izglajevalni kondenzator tok še bolj zgladi.



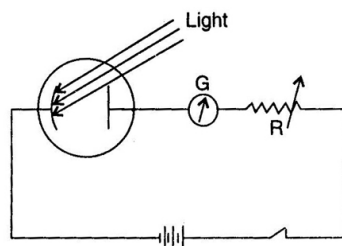
**Slika 40.5** Polni diodni usmernik. Gretje diod ni prikazano. Izglajevalni kondenzator, vzporeden izhodnemu uporniku, ni narisan. (NEETS)

Elektrifikacija je pripeljala izmenični tok iz elektrarn v vse hiše in raziskovalne laboratorije. Z usmernikom smo sedaj dobili v roke še orodje, kako iz tega izmeničnega vira dobiti enosmerno vire, tako nizke kot visoke. Zlasti slednje je nadvse pomembno: ni nam treba več graditi 1000-voltnih baterij, ampak uporabimo kar ustrezen transformator in usmernik. Za velike napetosti in tokove morajo biti seveda diode primerno zgrajene. Z visokonapetostnimi usmerniki nekaj deset kilovoltov poganjamo katodne cevi in masne spektrometre. Z nizkonapetostnimi pa polnimo akumulatorje.

## 40.2 Fotodioda in fotopomnoževalka

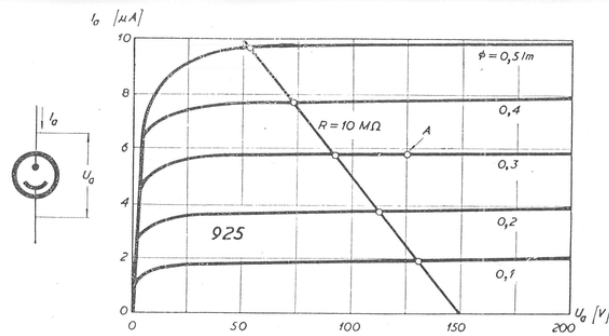
Morda lahko izbijamo elektrone iz katode tudi s svetlobo, ne le z gretjem? Saj svetloba nosi s sabo energijo. Potem katode ni treba greti, ampak jo le osvetljujemo. Poskus pokaže, da to drži, če je le katoda iz primerne snovi, recimo iz cezijevega antimona  $Cs_3Sb$ . To je *fotodioda*.

Fotodioda



**Slika 40.6** Fotodioda. Svetloba vpada na katodo in iz nje izbija elektrone. Te elektrone sprti srka anoda in s tem omogoča električni krogotok. (Anon)

Karakteristika fotodiode je podobna karakteristiki termične diode. Pri dovolj veliki pozitivni napetosti na anodi ta posrka vse izbite elektrone: tok je nasičen. Odlična lastnost pa je odvisnost tega nasičenega toka od osvetlitve: pri stalni anodni napetosti (in stalnem spektru svetlobe) je tok kar sorazmeren z osvetljenostjo.

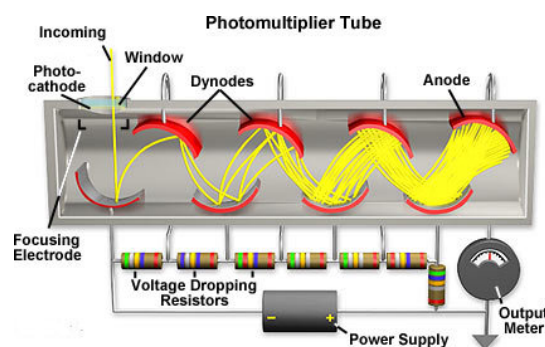


**Slika 40.7** Karakteristika fotodiode. Dodana je delovna premica za gonilno napetost 150 V in delovni upor 10 MΩ. Tok je sorazmeren z osvetlitvijo. Osvetlitev je podana v lumnih: 1 lm = 1/680 W za svetlobo 5500 Å. (Strojnik, 1962)

Delovno premico in delovno točko fotodiode izberemo po že znanem postopku. Na sliki je prikazan primer, ko sta dioda in zaporedni upornik 10 MΩ priključena na napetost 150 V. V temi ni toka in napetost na diodi znaša 150 V. Pri osvetlitvi 0,1 lumna steče tok 2 μA in napetost na diodi pade na 130 V. Linearna odvisnost toka od osvetlitve velja vse do osvetlitve 0,5 lm, ko doseže tok 10 μA in pade napetost na diodi na 50 V.

Fotopomnoževalka

Ko vpadejo hitri elektroni na anodo, v njej poniknejo, hkrati pa – taka misel se nam porodi – morda iz nje izbijejo *sekundarne elektrone*. Čim hitrejši so vpadni elektroni, tem več sekundarnih izbijejo. Morda pride na en vpadni elektron, v povprečju, celo več sekundarnih. Te potem anoda spet posrka vase. Kaj pa, če bi te elektrone posrkala kakšna dodatna, bližnja elektroda? Potem bi na njo dotekal večji tok, kot ga daje fotokatoda. Seveda nam nič ne brani, da zaporedoma vključimo celo več *dinod*, ki druga drugi jačajo tok, in tako dobimo *fotopomnoževalko*. Poskus pokaže, da je domneva pravilna.



**Slika 40.8** Fotopomnoževalka. Iz katode izbiti elektroni se pospešujejo proti zaporednim dinodam in iz njih izbijejo sekundarne elektrone. Nastane plaz elektronov. (Florida State University)

Primerna snov za dinode je kar taka, kot je za katodo. Vsaka naslednja dinoda je na bolj pozitivni napetosti od predhodne,

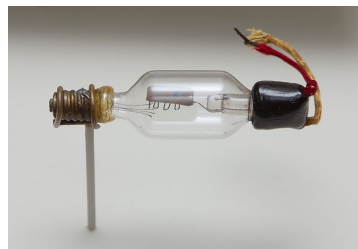


tipično za 100 V. Uspe nam nanizati do deset zaporednih dinod in pridelati ojačanje toka za faktor  $10^6$ !

Fotodiode in fotopomnoževalke uporabljamo, na primer, za merjenje svetlobnih spektrov.

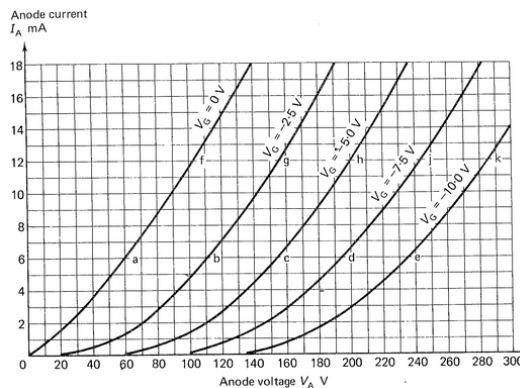
### 40.3 Trioda in ojačevalec

Trioda Na tok, ki teče skozi termično diodo, lahko vplivamo z zunanjim magnetnim ali električnim poljem. Tok takorekoč krmilimo. Pojavi se zamisel, kako bi tok krmilili bolj nadzorovano: tako, da med žarilno nitko in ploščo vstavimo še eno elektrodo v obliki prepustne mrežice. Ko na mrežico pritisnemo negativno napetost glede na žarilno nitko, tok elektronov bolj ali manj zavremo, odvisno od velikosti pritisnjene napetosti. Izumili smo *triodo*.



**Slika 40.9** Trioda - dioda z dodano tretjo elektrodo, mrežico, med vročo katodo in anodno. Prikazana je prva trioda, ki jo je sestavil L. Forest. (Perham Collection, San Jose)

Karakteristika triode Odvisnost anodnega toka od anodne napetosti - pri izbrani vrednosti žarilnega toka in pri različnih vrednostih mrežične napetosti - izmerimo z ampermetrom in voltmetrom. Pri mrežični napetosti 0 V se trioda kaže kot dioda s pripadajočo tokovno krivuljo. Čim bolj negativna je mrežična napetost, tem bolj dušena je ta tokovna krivulja.



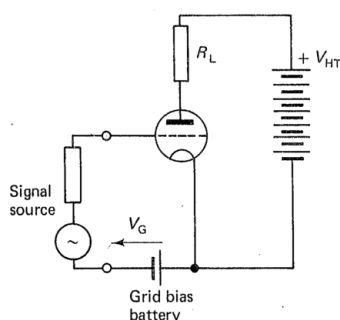
**Slika 40.10** Karakteristika triode: tok skozi triodo v odvisnosti od anodne napetosti pri različnih mrežnih napetostih, obakrat glede na katodo. (Meadows, 1978)

Ojačanje signalov Pogledjmo, kaj pravi narisan karakteristika triode! Naj bo anodna napetost 160 V in mrežna napetost  $-5$  V. Tedaj teče skozi anodo tok 7 mA. To je delovna točka triode. Pri nespremenjeni anodni napetosti nato spremenimo mrežno napetost na  $-7.5$  V. Tok se zmanjša na 3 mA. Na 3 mA pa bi se znižal tok tudi pri nespremenjeni mrežni napetosti in zmanjšanju anodne napetosti na 120 V. Vidimo, da na spremembo toka enako vpliva majhna sprememba mrežne napetosti za 2,5 V ali velika sprememba anodne napetosti za 40 V. Če je v anodnem krogu upornik, so

spremembe napetosti na njem sorazmerne s spremembami toka skozenj. Mrežna sprememba za 2,5 V se zato na uporniku pokaže kot sprememba za 40 V - oboje glede na izbrano delovno točko triode, seveda. Rečemo, da je trioda ojačevalec. V obravnavanem primeru ima ojačanje  $40/2,5 = 16$ . Tipična ojačanja znašajo med 10 in 100.

Ojačevalec z mrežno baterijo

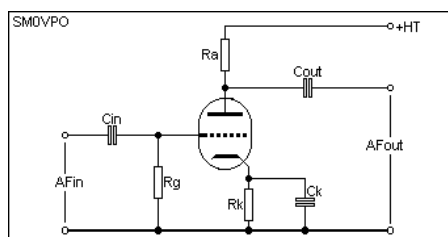
Z zadovoljstvom torej ugotovimo, da smo izumili *ojačevalec signalov*.



**Slika 40.11** Triodni ojačevalec. Vhodna sprememba napetosti glede na mrežično napetost  $U_g$  se odraža kot sprememba anodnega toka skozi breme  $R_L$  in s tem povezana sprememba padca napetosti na njem. Grelna baterija ni narisana. (Meadows, 1978)

Ojačevalec brez mrežne baterije

Triodni ojačevalec potrebuje za svoje delovanje tri baterije: grelno, mrežično in anodo. To ni praktično. Namesto da znižamo mrežično napetost glede na katodo, lahko zvišamo katodno napetost glede na mrežico. To naredimo z upornikom  $R_k$  v katodnem priključku: anodni tok  $I_A$  gre skozenj in na njem povzroči potrebni padec napetosti  $R_k I_A$ . Vendar tok skozi  $R_k$  niha, kar ni dobro, ker želimo na mrežici imeti konstantno referentno napetost. Zato vzporedno k  $R_k$  vključimo še kondenzator  $C_k$  z visoko kapaciteto (in zato nizko kapacitivno upornostjo), ki nihajočo komponento toka "kratkestično" speljuje mimo upornika. Preostali dve bateriji - anodno in grelno - pa lahko nadomestimo z odcepi iz ustreznega usmernika.



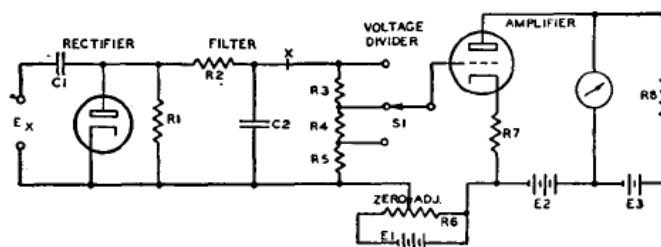
**Slika 40.12** Triodni ojačevalec brez mrežne baterije. Negativno napetost mrežice glede na katodo zagotavlja padec napetosti na uporniku  $R_k$ . Anodna baterija ni prikazana; priključena je med +HT in ozemljitvijo. (Lythall, H.)

Elektronski voltmeter

Dioda kot usmernik se ponuja kot naravna vhodna enota za voltmeter na tuljavo. Ta, kot vemo, meri le enosmerno napetost. Hitro nihajoči napetosti namreč tuljava ne more slediti. Če pred njim vključimo usmernik, pa postane tudi merilnik za izmenično napetost.

Merjenje šibkih napetosti si nadalja olajšamo z vključitvijo triode kot ojačevalca: namesto merilnika s tuljavo na tanki sučni žici lahko potem uporabimo robusten merilnik s tuljavo na spiralni

vzmeti. V praktičnem *elektronskem voltmetru* uporabimo oboje: usmernik in ojačevalec.

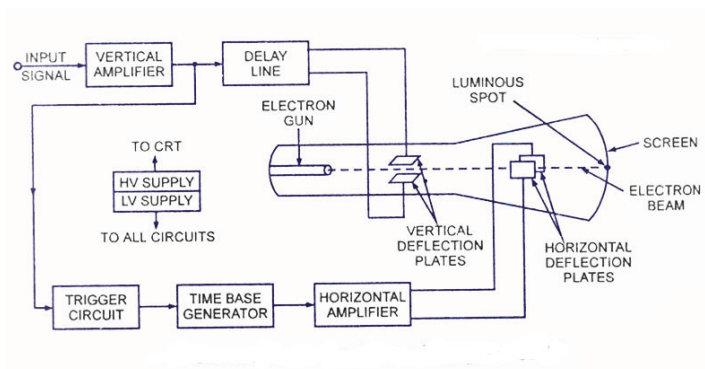


**Slika 40.13** Elektronski voltmeter za izmenično napetost. Sestavljen je iz usmernika (s filtrom R2-C2), ojačevalca in elektrometra na vrtljivo tuljavo. Merilna območja izbiramo s preklopnim delilcem napetosti R3-R5. Ničelno točko elektrometra prilagajamo s potenciometrom R6. (Rider, J.)

Elektronski voltmeter kalibriramo z znanimi enosmernimi napetostmi. Kar potem kaže, so efektivne vrednosti izmeničnih napetosti. Uporabljamo ga prav tako kot navadnega. Paziti pa moramo na potovanje ničelne točke na mrežici, kar je predvsem posledica nehotenih sprememb v ogrevni napetosti. Zato moramo pred vsako meritvijo po potrebi prilagoditi delovno točko ojačevalca z ustreznim potenciometrom.

#### 40.4 Osciloskop

Delovanje Tudi katodna cev je voltmeter: navpični odmik žarka na zaslonu je sorazmeren z napetostjo na odklonskem kondenzatorju (39.3). Žarek ima vlogo kazalca. Reagira bliskovito, ne tako kot kazalec tuljavnega elektrometra. Z njim torej lahko rišemo hitro spreminjajoče se napetosti, na primer omrežno napetost 50 Hz. Žal pa tega nihanja ne razločimo, saj se premika žarek vedno po isti navpični črti. Kaj pa, če bi se žarek med navpičnim nihanjem premikal še vodoravno? Potem bi na zaslonu narisal časovni potek vhodne napetosti! To bi bilo možno, če bi napetost na vodoravnem odklonskem kondenzatorju naraščala linearno med  $-U_0$  in  $+U_0$  v nastavljivem času  $t_0$ , sprožila pa bi se točno takrat, ko bi vhodni signal presegel nastavljivo vrednost  $U_{\text{trig}}$ , recimo od spodaj navzgor. V času  $t_0$  (ko žarek potuje preko zaslona), bi morali biti onemogočeni vsi morebitni novi prožilni zahtevki. Po preteku tega časa pa bi bilo proženje spet omogočeno. Potrebujemo torej *časovno krmilno vezje*, ki bo iz katodne cevi naredilo *osciloskop*. Z mnogo truda nam takšno vezje uspe sestaviti in sicer zgolj iz že poznanih električnih elementov. Vezje je zamotano, zato podrobnosti izpustimo.

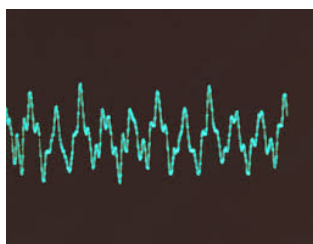


**Slika 40.14** Shema osciloskopa. Ko vhodni signal doseže predpisano vrednost, ustvari sprožilno vezje oster signal, ki aktivira vodoravno premikanje žarka. Na zaslonu se nariše časovni graf vhodnega signala. Kasnilno vezje poskrbi, da signal ne dospe do navpičnih plošč, preden se začne vodoravno premikanje žarka. (CircuitsToday)

Dobri osciloskopi imajo navpično občutljivost 1 mV na cm in dosejajo vodoravni preletni čas 1  $\mu$ s na cm.

Meritve zvoka

Z osciloskopom lahko gledamo vsak časovno spremenljiv pojav, če ga le znamo spremeniti v električni signal. Tako gledamo zvok. Ni treba drugega, kot da na navpični odklonski kondenzator vodimo signal iz primerne mikrofona. Tako si lahko ogledamo, kako nihajo razna zvočila, recimo struna na violini.



**Slika 40.15** Nihanje strune na violini, kot ga pokaže osciloskop. Na osnovni sinusni val so naloženi višji harmoniki. Struna niha z osnovno frekvenco 440 Hz. (Humboldt University)

Merjenje srčnih tokov

Že od poskusov z žabjimi kraki vemo, da se mišice krčijo pod vplivom pritisnjene električne napetosti. To nas tudi navaja na misel, da je krčenje živih mišic posledica električnih signalov, ki vanje prihajajo po živcih iz možganov in hrbtenjače. Posebej očitno je nenehno krčenje srčne mišice. Morda lahko z osciloskopom vidimo električne tokove, ki krčenje spremljajo?

Ravnamo takole. Na vsaki strani prsnega koša pritrdimo kovinsko elektrodo v obliki kovanca in ju preko ojačevalca vezemo na osciloskop. Upamo, da se ionski tokovi iz srca širijo od celice do celice v okolico vse do površine kože. Tam jih upamo zaznati z obema elektrodama. Uspe nam, vendar šele s primerno zgradbo elektrod. Dobra elektroda je srebrn disk, ki je na prikožni strani prevlečen s tanko plastjo srebrovega klorida. Med elektrodo in kožo je potrebna še prevodna plast, ki vsebuje klorove ione, recimo kar slana voda, ki jo zmešamo z vazelinom, da postane lepljiva pasta.



**Slika 40.16** Srčni tok na zaslonu osciloskopa. Vidna sta dva srčna utripa na medsebojni razdalji ~ 1 sekunde. (University of Michigan)

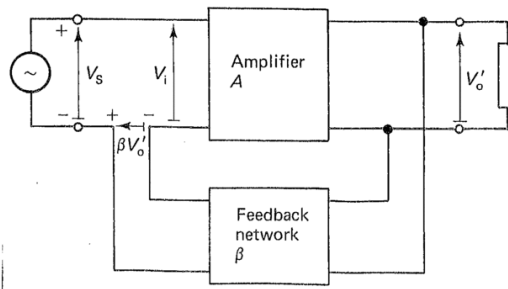
Preletni čas osciloskopa nastavimo na nekaj sekund. Izmerjeni srčni signali imajo stopnjo velikosti 1 mV. Iz njihove oblike sklepamo na morebitne bolezni. Podobno merimo tudi možganske tokove.

### 40.5 Oscillator

Povratna zveza

Na triodni ojačevalec lahko pogledamo kot na črno škatlo z dvema vhodnima in dvema izhodnima priključkoma. Izmenična napetost  $U_s$  med vhodnima priključkoma se kaže kot napetost  $U_0$  med izhodnima priključkoma. Razmerje  $A = U_0/U_s$  poimenujemo *napetostno ojačanje*. Pri triodnem ojačevalcu je izhodna napetost fazno zamaknjena za  $180^\circ$  glede na vhodno, zato je ojačanje negativno.

Kako pa se ojačevalec vede, če del njegovega izhoda speljemo nazaj na vhod, recimo preko uporabnega delilca? Rečemo, da smo ustvarili *povratno zvezo*. Vrnjeni signal se sešteva s siceršnjim vhodnim signalom in ga ojača ali oslabi, pač odvisno od tega, kakšen je fazni zamik vračanega signala. Rečemo, da je povratna zveza pozitivna li negativna.



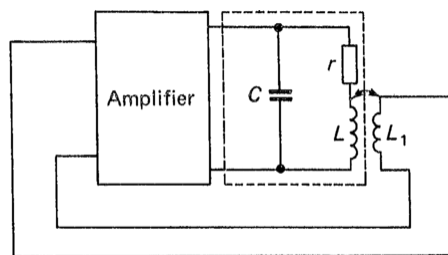
**Slika 40.17** Ojačevalec s povratno vezjo. Del izhodnega signala se vodi nazaj na vhod skozi povratno vezje, recimo skozi uporovni delilnik. Tam se zaporedno pridruži siceršnjemu vhodnemu signalu. (Meadows, 1978)

Nova izhodna napetost je  $U'_0$ . Vrača se njen del  $\beta U'_0$ . Sestavljeni vhod je potem  $U_i = U_s + \beta U'_0$ . To je napetost, ki jo ojačevalec vidi na svojem vhodu in jo seveda ojača v  $U'_0 = AU_i = A(U_s + \beta U'_0)$ , iz česar sledi  $U'_0 = AU_s / (1 - A\beta)$  oziroma  $A_f = U'_0/U_s = A/(1 - A\beta)$ . Oznaka  $A_f$  pomeni ojačanje ob uporabi povratne vezi. Če pri triodnem ojačevalcu z  $A = -50$  vračamo, na primer,  $\beta = 0,01$  izhodne napetosti preko uporabnega delilca (kar ne vpliva na

fazo), znaša  $A_f = -33$ . Ojačanje se zmanjša. Povratna zveza je negativna.

Zakaj bi sploh uporabili negativno povratno zvezo, če pa zmanjšuje ojačanje? Zato, ker so relativne spremembe  $A_f$  dosti manjše od relativnih sprememb  $A$ , ki jih povzročajo. Če je  $A$  zelo velik, je namreč  $\beta A$  mnogo večji od 1 in  $A_f \approx -1/\beta$ , torej neodvisen od sprememb  $A$ . Negativna povratna zveza zato stabilizira ojačanje. Vezje postane manj občutljivo na spremembe v napajalni napetosti, temperaturi, vhodni frekvenci in drugem. Če potrebujemo večja ojačanja, pa zmeraj lahko zaporedno združimo dve ali več ojačevalnih stopenj.

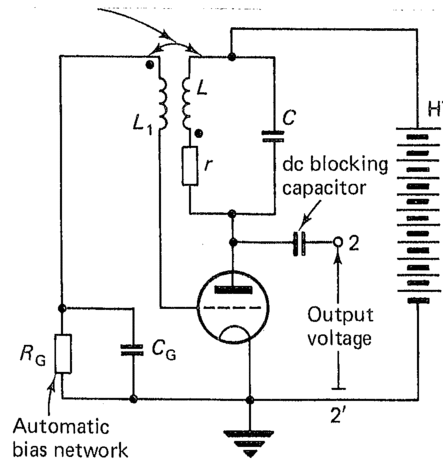
Oscilator Posebno zanimiva povratna vez v ojačevalcu nastane, ko  $A\beta = 1$ . Takrat je  $A_f = \infty$ . To pomeni, da se na izhodu pojavlja znatna napetost tudi tedaj, ko na vhod sploh ne vodimo zunanje napetosti. Ko namreč prižgemo ojačevalca, se v njem vzpostavijo stalni tokovi in napetosti ter ojačevalec postane sposoben ojačevanja. Superponirane na te stalne vrednosti so majhne fluktuacije različnih frekvenc: električni šum. Ta šum spravlja ojačevalec v nihanja z različnimi frekvencami. Prevladajo tiste frekvence, pri katerih je celotni fazni zamik signala od vhoda do izhoda in nazaj skozi povratno vez enak  $360^\circ$ . Ojačevalec s kritično ali pozitivno povratno vezjo postane oscilator.



**Slika 40.18** Ojačevalec s pozitivno povratno vezjo kot oscilator. Nihajni krog na izhodu določa frekvenco osciliranja. Povratna vez je izvedena z indukcijskim sklopom dveh tuljav. (Meadows, 1978)

Da iz "razglašeno" nihajočega ojačevalca dobimo željeno frekvenco, ga je treba opremiti z vezjem, ki to frekvenco izbira. To je seveda nihajni krog. Nihajni krog predstavlja breme na izhodu iz ojačevalca. Povratno vez ustvarimo z induktivno povezavo na njegovo tuljavo. Nihajni krog, delujoč pri svoji lastni frekvenci, tudi zagotovi dodatni fazni premik za  $180^\circ$ , kar je pogoj za ojačevanje.

Triodni oscilator Praktična izvedba triodnega oscilatorja je prikazana na spodnji sliki.



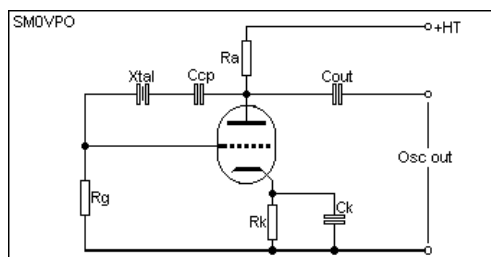
**Slika 40.19** Triodni oscilator – triodni ojačevalec z nihajnim krogom na izhodu in v pozitivni povratni vezi. Za negativno napetost mrežice glede na katodo poskrbita  $C_G$  in  $R_G$ . Podobno vezje je prvi sestavil E. Armstrong. (Meadows, 1978)

Negativno delovno napetost na mrežici lahko zagotovimo z baterijo v mrežičnem krogotoku. Bolj praktično pa je, da jo poskušamo potegniti iz obstoječih virov. To nam uspe z elementoma  $R_G$  in  $C_G$ . Pri vključitvi in vzpostavljanju nihanja se namreč zgornja plošča  $C_G$  naelektri negativno glede na katodo (podrobnosti so zapletene in jih izpustimo). Če je  $R_G C_G$  večji od nihajnega časa, se  $C_G$  ne izprazni bistveno med enim polnihajem povratne napetosti in se obnovi nazaj med drugim. Kondenzator potemtakem deluje kot enosmerna baterija.

Nihajni čas oscilatorja določimo z izbiro kondenzatorja  $C$  in tuljave  $L$ . Lahko ga pa tudi zvezno spreminjamo z uporabo spremenljivega kondenzatorja. Brez večjega truda so dosegljive frekvence od 10 Hz do 10 MHz. Vsa ta nihanja lepo vidimo na osciloskopu.

Kristalni oscilator      Frekvenca oscilatorja je občutljiva na razne spremembe v vezju, predvsem na temperaturo in ogrevno napetost. Povratna zveza nič ne pomaga, saj verno sledi frekvenci nihajnega kroga. Kako pa bi stabilizirali ta občutljivi nihajni krog? Tako, da ga nadomestimo z neobčutljivim. Seveda je to le leporečje: iskano stvar moramo še najti.

Spomnimo se piezoelektričnosti kremenovega kristala [39.1]: ko ga stisnemo, se na njem pojavi napetost; in ko nanj priključimo napetost, se stisne. Izmenična napetost zato kristal spravi v nihanje in to tem močnejše, čim bliže je lastni frekvenci kristala. Kristal s priključenima elektrodama je torej resonator, ki iz skozenj tekočega toka izbira/ojačuje svojo lastno frekvenco. Nihajni krog zato nadomestimo s primerno obrezanim kristalom in s tem izumimo kristalni oscilator.



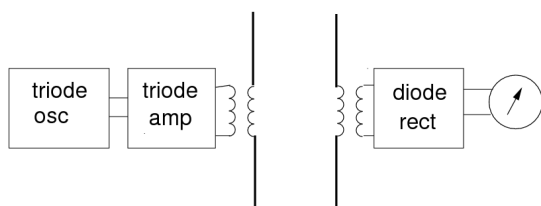
**Slika 40.20** Kristalni triodni oscilator. Frekvenca nihanja je določena z lastnim nihanjem kristala. Negativno delovno napetost na mrežici zagotavljata  $R_k$  in  $C_k$ . Prikazano je vezje, kakršnega je sestavil G. Pierce. (Lynthall, H.)

Pokaže se, da je kristalni oscilator še mnogo stabilnejši od navadnega. V glavnem čuti le (majhen) vpliv temperaturnih sprememb, čemur pa - če je potrebno - zlahka odpomoremo z vzdrževanjem stalne okolišnje temperature. Kristali, ki jih režemo iz kremenca, omogočajo nihanja med 10 kHz in 100 MHz. Vidimo jih na osciloskopu.

#### 40.6 Radijska povezava

S triodnim oscilatorjem dobimo v roke vir nedušenega visokofrekvenčnega nihanja, potrebnega za tvorbo radijskih valov z dolžino nad nekaj deset metrov [38.8]. Ni treba drugega, kot da primerno dolgo navpično žico preščipnemo in oba središčna konca vtaknemo v izhod iz oscilatorja. Spodnjo žico ozemljimo. Žica tako postane nihajoča dipolna antena, ki seva radijske valove v prostor.

Kako naj zaznamo te valove? Z drugo anteno! V njej se inducira izmenični tok s frekvenco vpadajočih valov. Sprejemno anteno v sredini preščipnemo in vtaknemo v vhod diodnega usmernika, ki visokofrekvenčni izmenični tok zgladi v enosmernega. Na izhodu pa priključimo galvanometer.



**Slika 40.21** Oddajnik in sprejemnik radijskih valov.

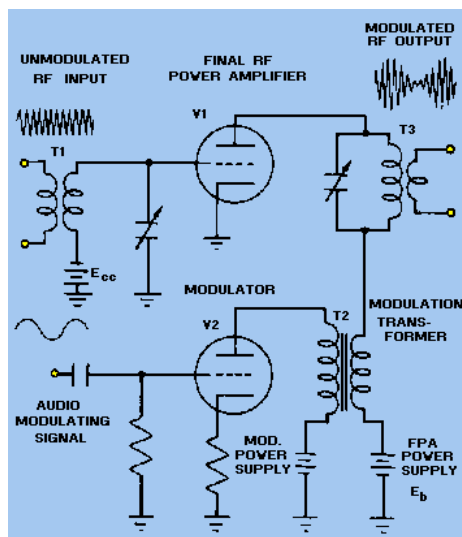
Poskrbimo še za nekaj izboljšav. Za večjo moč sevanja priključimo na izhod oscilatorja najprej ojačevalec in šele na njegov izhod oddajno anteno. Slednje tudi ne priključimo neposredno, ampak preko induktivnega stika. Prav tako, preko induktivnega stika, priključimo sprejemno anteno na usmernik. V anodni krog oddajnega ojačevalca vgradimo stikalo. Ko stikalo pritisnemo, se sprejemni galvanometer odkloni. Vzpostavili smo radijsko povezavo!



## 40.7 Brezžična telefonija

Radijska povezava med oddajnikom in sprejemnikom je "nesnovna žica", ki povezuje oba kraja. Poskusimo vanjo vtisniti govor in ga iz nje tudi izvleči! Drugače rečeno: vzpostaviti hočemo brezžično telefonijo.

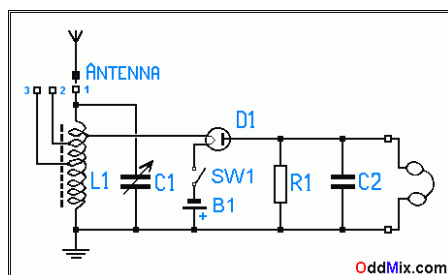
Radijski oddajnik Prilagoditev oddajnika za telefonsko uporabo je preprosta: dodati mu moramo le mikrofona in poskrbeti, da bo ustrezno vplival na jakost izsevanih valov.



**Slika 40.22** Priključitev mikrofona v anodni krog izhodnega ojačevalnika. Mikrofonski tok je pred vključitvijo ojačan s svojim ojačevalnikom. T1 = vhod iz oscilatorja, T3 = izhod v anteno, T2 = induktivni priključek mikrofona. (NEETS)

Najbolje je, če mikrofona vključimo v anodni krog izhodnega ojačevalnika, in sicer zaporedno k tamkajšnjem viru visoke napetosti. To naredimo preko induktivnega stika. Anoda potem čuti vektorsko vsoto obeh virov – gonilnega enosmernega in mikrofonskega spremenljivega. Temu ustrezno se spreminja jakost anodnega toka in s tem jakost izhodnega valovanja. Sestavili smo *radijski oddajnik*.

Diodni sprejemnik Prilagoditev sprejemnika – diodnega usmernika – je tudi preprosta: namesto izhodnega galvanometra namestimo primerne slušalke. Upoštevati pa moramo še naslednje. Na anteno vpadajo radijski valovi iz različnih oddajnikov, in ti valovi se med seboj razlikujejo po nosilni frekvenci. V anteni se seveda inducira "mešanica" teh frekvenc. Anteno zato priključimo na nihajni krog. Ta iz vhodnega nihanja "pobere" svojo lastno frekvenco. Nastavimo jo s spremenljivim kondenzatorjem. Tako izbiramo med različnimi oddajniki. Izhod iz nihajnega kroga pa vodi potem na diodni usmernik (FLEMING).

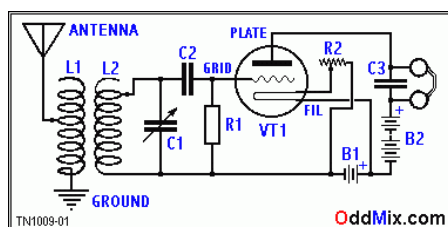


**Slika 40.23** Diodni sprejemnik. Pri piezoelektričnih slušalkah (kapacitivno breme) je upornik  $R_1$  potreben in kondenzator  $C_2$  pogrešljiv. Pri magnetnih slušalkah je kondenzator  $C_2$  potreben in upornik  $R_1$  pogrešljiv. (Nagy, K.)

Opisani *diodni sprejemnik* dobro deluje, če je antena dolga in visoko obešena in če oddajna postaja ni predaleč. Uspešno ga uporabimo na ladjah.

Triodni sprejemnik

Z diodnim sprejemnikom ne slišimo šibkih signalov. Saj dioda signal le zgladi in ga nič ne ojača. Lahko pa diodo nadomestimo s triodo in tako sestavimo *triodni sprejemnik* (FOREST).



**Slika 40.24** Triodni sprejemnik. Mrežica nima prednapetosti, zato hkrati ojačuje in usmerja anodni tok. S kondenzatorjem  $C_1$  nastavljamu sprejemno frekvenco. Kondenzator  $C_2$  blokira enosmerno napetost. Upornik  $R_1$  odvaja zajete elektrone iz mrežice. Kondenzator  $C_3$  je obvod signala mimo visokoupornih slušalk. Reostat  $R_2$  nastavlja gretje katode. (Nagy, K.)

Vhodni signal zdaj vodimo na mrežico triode in z njim krmilimo anodni tok. Na mrežici ni negativne prednapetosti. Tok zato ojačano, vendar usmerjeno zaniha. Zgladimo ga na izhodnem kondenzatorju, kjer ga tudi poslušamo s slušalkami. Triodni sprejemnik je precej bolj občutljiv od diodnega in ga uspešno nadomesti na ladjah.

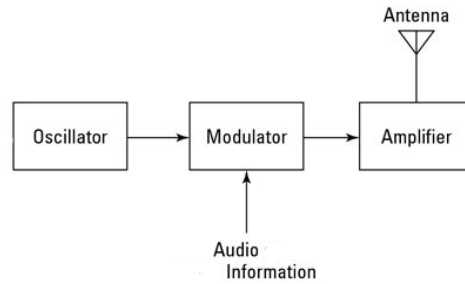
## 40.8 Razvoj radia

Radijski prenos zvoka je tako obetaven izum, da se okrog njega razvije celotna veja industrije. Ustanovijo se posebne firme za proizvodnjo in prodajo radijskih oddajnikov in sprejemnikov ter njihovih sestavnih delov. Firme ustanavljajo svoje raziskovalne oddelke, ki nenehno izboljšujejo svoje izdelke. Ti postajajo zato čedalje bolj zapleteni. Vsi pa si delijo isto funkcionalno osnovo.

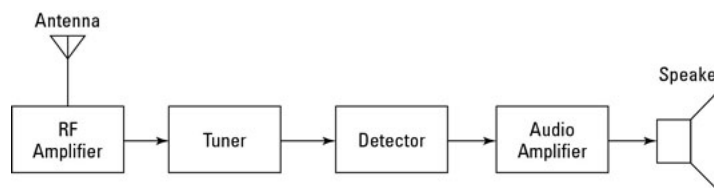
Oddaja in sprejem

Osnova radijskega prenosa zvoka je naslednja: oddajnik proizvaja in seva nosilni radijski val, na katerega naloži *avdio signal*, sprejemnik pa ga sprejema in iz njega ta avdio signal izvleče.

Govorimo o tvorjenju, *modulaciji*, izsevanju, sprejemu in *demodulaciji* radijskih valov.



**Slika 40.25** Oscilator proizvaja nosilno radijsko valovanje, modulator ga modulira z avdio signalom iz mikrofona, ojačevalec ojača in antena izseva. Vir električnega napajanja ni prikazan. (Lowe, D.)



**Slika 40.26** Shema radijskega sprejemnika. Antena sprejema modulirane radijske valove različnih frekvenc (od različnih oddajnikov), uglaševalec izbere eno frekvenco, detektor jo demodulira, ojačevalec ojača in zvočnik spremeni v zvočne valove. Vir električnega napajanja ni prikazan. (Lowe, D.)

Oscilator v oddajniku vsebuje bodisi nihajni krog ali kristal. Slednji zagotavlja večjo frekvenčno stabilnost. To pomeni, da oddajne postaje lahko delujejo na bližnjih frekvencah, saj se nobena ne spreminja znatno in ne zaide v frekvenčno območje sosedje. Vsak oddajnik deluje na svoji frekvenci. Sprejemniki pa se uglasijo na tistega, ki jih zanima.

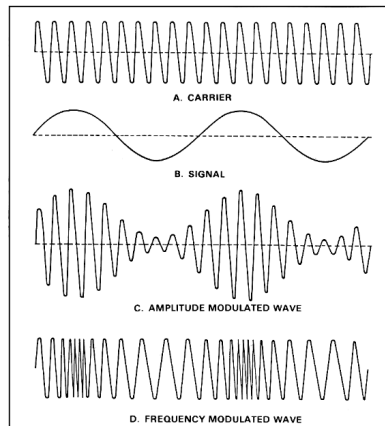
Mešalna frekvenca

Da lahko lovijo šibke signale, dobijo radijski sprejemniki več zaporednih ojačevalnih stopenj. Pri uglaševanju na izbrano postajo je zato treba nastaviti vsako stopnjo. Vse stopnje morajo torej biti nastavljive. To je nepraktično. Pojavi se zamisel, da bi različne vhodne frekvence najprej pretvorili v isto "mešalno" frekvenco, nakar bi vse ojačevalne stopnje delale samo z njo. Rešitev je skrita v naslednjem matematičnem izreku: produkt dveh sinusoid s frekvencama  $f_1$  in  $f_2$  je sorazmeren z vsoto dveh sinusoid s frekvencama  $f_1 + f_2$  in  $f_1 - f_2$ . Potrebno je torej sestaviti "mešalec frekvenc". Njegova vhoda sta dva: sprejemana frekvenca  $RF$  in nastavljiva frekvenca  $LO$ , izhod pa frekvenca  $IF = |RF - LO|$ . Kot dobrim inženirjem nam to tudi uspe, in sicer kar iz nekaj diod, kondenzatorjev in tuljav. Ko hočemo, na primer, s sprejemnikom  $IF = 30$  kHz poslušati frekvenco  $RF = 100$  kHz, nastavimo  $LO = 70$  kHz.

Modulacija

Glavna kvalitativna razlika med radijskimi sistemi je način, kako modulirajo nosilni val. Temu lahko spreminjamo amplitudo ali

frekvenco, odvisno pač od tega, kje in kako v vezje uvedemo avdio signal.



**Slika 40.27** Modulacija radijskih valov. Amplituda ali frekvenca nosilnega visokofrekvenčnega vala je modulirana z nizkofrekvenčnim avdio signalom. Prikazan je monofrekvenčni avdio signal. (Anon)

Vsaka vrsta modulacije seveda zahteva ustrezen način demodulacije.

Lastnosti radijskih valov

Nosilni radijski valovi imajo frekvence med 100 kHz in 100 MHz (3 km – 3 m). Zaradi priročnosti jih razdelimo na dolge valove (~ 100 kHz), srednje valove (~ 1 MHz), kratke valove (~ 10 MHz) in zelo kratke valove (~ 100 MHz). Izkušnje z oddajanjem in sprejemanjem teh valov pokažejo naslednje.

Dolgi valovi se večinoma širijo od antene kot prizemni valovi, to je, kot valovi med dvema vzporednima vodnikoma: zemljinim površjem in ozračjem. Električno polje v valovanju je usmerjeno navpično in magnetno vodoravno. Morje je bolj prevodno kot kopno in valovi se čezenj bolje širijo. Valovi se tudi močno uklanjajo okrog ovir in zato ne delajo senc.

Zelo kratki valovi se širijo "premočrtno", tako kot vidna svetloba. V dani smeri pada njihova energijska gostota s kvadratom razdalje. Okrog ovir se slabo uklanjajo in delajo za njimi sence. Radijski sprejem je zato mogoč le tedaj, če je oddajnik v vidni črti od sprejemnika. Seveda pa pomagajo odboji od tal in okolišnjih ovir.

Srednji in kratki valovi se širijo na vmesen način. Posebej zanimivo je, da se odbijajo od zgornje, ionizirane plasti ozračja; rečemo ji ionosfera. Odboj je močnejši ponoči. Očitno ima pri tem svoje prste vmes Sonce, ki s svojimi žarki tako ali drugače ionizira ozračje. Zaradi odboja se doseg oddajnika podaljša.

Vsi radijski valovi se močno absorbirajo na kovinskih ovirah, nekovinske pa bolj ali manj predirajo. Temu ustrezno morajo biti nameščene tudi sprejemne antene.

- Tehnične lastnosti Zakaj sploh uporabljamo tako visoke frekvence za nosilni val? Zato, ker njihovo hitro spremenljivo elektromagnetno polje inducira v sprejemni anteni mnogo večje tokove, kot bi jih nizke frekvence. Inducirana napetost v zanki je namreč sorazmerna s spremembo magnetnega pretoka skozi njo, torej s frekvenco nihanja. Brez visokih frekvenc bi bil uporabni doseg oddajnikov zanemarljiv.
- Moči zgrajenih radijskih oddajnikov so odvisne od tega, kako daleč želimo z njimi poseči. Segajo od 1 W do 1 MW. Slednji imajo več zaporednih ojačevalnih stopenj in njihove elektronke so velike kot človek. Taka elektronka pokuri samo za gretje 10 kW, zato jih je treba hladiti z zrakom ali celo z vodo.
- Radijski sprejemniki zaznavajo in demodulirajo še moči  $10^{-12}$  W. V ugodnih pogojih z njimi slišimo dolgovalovne oddajnike z nasprotne strani Zemlje.
- Zakaj pa uporabljamo dve vrsti modulacije, amplitudno in frekvenčno? Najprej je bila razvita amplitudna modulacija. Pri uporabi se je potem pokazalo, da sprejemnik včasih šumi in prasketa. Signal na vhodu v sprejemnik je namreč vedno superponiran z motnjami iz okolice, recimo od razelektritev v ozračju. Te motnje vplivajo v glavnem na amplitudo signala. Če modulacijo skrijemo v frekvenco, ne v amplitudo, postanejo motnje brezpredmetne. To je tudi glavni razlog za razvoj in uvedbo frekvenčne modulacije tam, kjer potrebujemo večjo čistost sprejema.
- Uporabna vrednost Prve radije uporabimo za razpošiljanje časovnih signalov iz astronomskih centrov. Z njimi nastavljamo čas na kronometrih povsod po svetu, zlasti na ladjah.
- Ladje sporočajo svojo lego in usklajujejo gibanje z drugimi ladjami. Ko so v stiski, pa pokličejo na pomoč.
- Vremenske opazovalnice na kopnem in na ladjah sporočajo vremenske podatke – tlak, temperaturo, vlago, veter in oblačnost – v meteorološke centre. Ti centri pa potem razpošiljajo vremenska obvestila in napovedi.



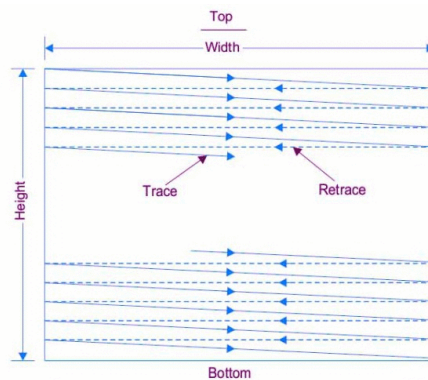
**Slika 40.28** Radijski sprejemnik v hiši. Prvi sprejemniki so bili dragi in privoščili so si jih lahko le bogati. (Anon)

Rastoča industrija poskrbi, da radijski sprejemniki prodro v hiše in domove. Oddajne postaje pa priskrbijo vsebino: obvestila,

poročila, predavanja, intervjuje, govorne igre, prenose športnih tekem in – nadvse čislano – živo glasbo iz studijev in koncertnih dvoran. Ljudem se odpre svet. Nikoli več ne bo tako, kot je bilo.

## 40.9 Televizija

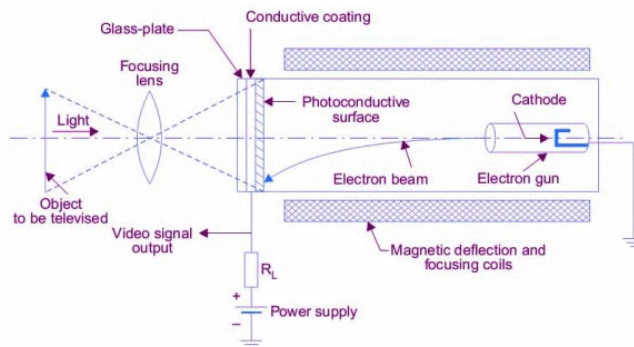
Opis slike Če že prenašamo zvok po radijskih valovih, zakaj ne bi prenašali še slike? Saj je slika – recimo tista na zaslonu fotografske kamere – pravzaprav zaporedje vrstic in vsaka vrstica je zaporedje različno svetlih točk. Potrebujemo "le" pripravo, ki bo otipala sliko vrstico za vrstico in zgradila ustrezajoč električni *video signal*. Pa tudi pripravo, ki bo iz video signala izvlekla zaporedne vrstice in jih narisala drugo pod drugo na primeren zaslon. Prenos video signala od prve priprave do druge – vključno z modulacijo in demulacijo – pa je seveda prav tak kot prenos avdio signala. Zahtevamo še, naj bralna priprava prebere sliko v delčku sekunde. Tako se slika na snemalnem zaslonu lahko spreminja in prav tako se bo spreminjala slika na prikazovalnem zaslonu. Na ta način bomo prenašali gibajoče se slike, video.



**Slika 40.29** Slika kot zaporedje vrstic. Slika je dvodimenzionalno polje različno svetlih točk. Za prenos po linearnem kanalu (radijskem valu) jo je potrebno razdeliti na vrstice in te vrstice pošiljati drugo za drugo. Snemalna naprava mora zato sliko razkosati in predvajalna naprava jo mora znova sestaviti. (SlideShare)

Video kamera Mnogo truda je potrebnega, da kot inženirji zamisel udejanimo in sestavimo uporabno *video kamero*. Osnova zanjo je fotografska kamera, ki ustvarja sliko na stekleni zadnji steni. Ta je na zunanji strani premazana najprej s prevodno (signalno) plastjo in nato še s fotoprevodno plastjo (tarčo). Slednja je tanka plast iz izolatorske mice, v kateri so natrosene drobne kroglice (0,025 mm) iz fotoprevodne snovi, recimo iz antimonovega trisulfida ( $\text{SbS}_3$ ) ali svinčevega monoksida ( $\text{PbO}$ ). Svetloba preleti steklo in signalno plast ter vpada na kroglice, ki pri tem izsevajo elektrone. Močnejša svetloba izbije iz kroglice več elektronov. Izbite elektrone privlači signalna plošča, ki je pozitivna, in se po ozemljitvi takoj izločijo iz cevi. Na osvetljeni kroglici ostane drobcen pozitivni naboj in kroglica tvori s signalno ploščo nabit

kondenzator. V tarči je tako vtisnjena vidna slika kot ploskovna porazdelitev pozitivnega naboja.

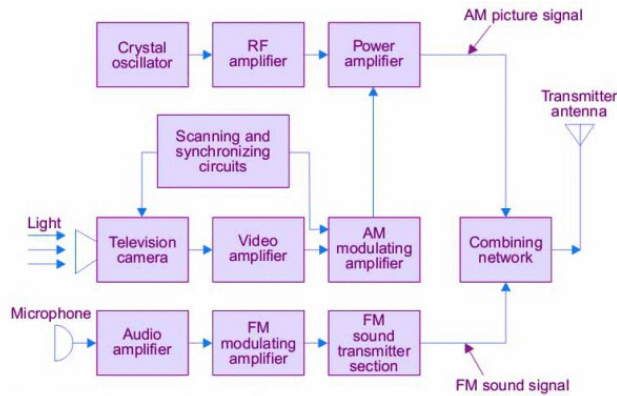


**Slika 40.30** Snemalna cev v video kameri. Svetloba izbija elektrone iz fotoprevodne plasti in na njej vtisne sliko iz pozitivnih nabojev. Elektronski žarek otipa sliko vrstico za vrstico. Vsako naelektreno točko pri tem razelektri, kar se pokaže kot ustrezno velik tokovni sunek na izhodu iz cevi. (SlideShare)

Shranjeno sliko na kroglicah otipava elektronski žarek iz elektronskega topa. Usmerjajo ga okolišnje tuljave, podobno kot pri osciloskopu. Žarek razelektri nabito kroglico, ki jo zadene, in s tem povzroči ustrezen tokovni sunek iz signalne plošče. Tokovni sunek je enak naboju, ki je bil shranjen v kroglici. Razelektrena kroglica je pripravljena, da jo svetloba spet naelektri do naslednjega prihoda žarka. Izhodni tok iz signalne plošče se v pomožnih vezjih dopolni še s signali za začetek in konec vsake vrstice ter za konec vseh vrstic slike. To je video signal.

Video zaslon Mnogo lažja je izdelava predvajalne naprave, ki sprejema video signal in ga riše na zaslon. Za to je primerna kar katodna cev, opremljena z vezjem/tuljavami za premikanje žarka na prav tak način kot v video kameri. Vezje mora prepoznati signale za začetek in konec vrstice ter za konec slike ter ustrezno premikati žarek. Jakost rišočega žarka pa je krmiljena z video signalom, ki je voden na posebno elektrodo tik ob izhodu iz elektronskega topa. Bolj kot je ta elektroda negativna, bolj je žarek oslabljen. Tako opremljena katodna cev je odličen *video zaslon*.

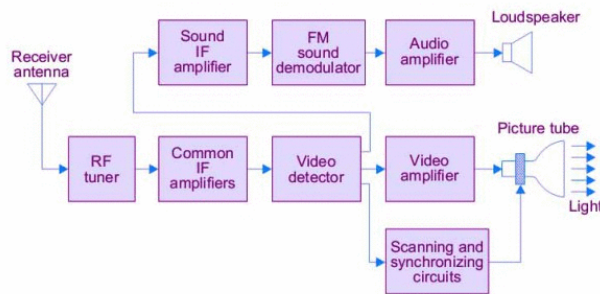
Televizijski oddajnik Video signal iz video kamere se sproti pošilja v svet preko *televizijskega oddajnika*. Srce oddajnika je kristalni oscilator, ki tvori nosilni radijski val. Nanj se naloži video signal z amplitudno modulacijo. Hkrati se na podval, ki je glede na nosilni val frekvenčno zamaknjen, naloži še avdio signal iz mikrofona, in sicer s frekvenčno modulacijo. Oba vala se izsevata skupaj.



**Slika 40.31** Televizijski oddajnik. Video signal iz video kamere se naloži na nosilni radijski val. Doda se mu avdio signal iz mikrofona, nakar ga antena izseva v prostor. (SlideShare)

Televizijski sprejemnik

Izsevane radijske valove lovijo *televizijski sprejemniki*. Antena sprejemnika sprejema valovanja od vseh oddajnikov, ugaševalec iz te mešanice izbere željeno frekvenco (skupaj z njeno podfrekvenco), ojačevalec ju ojača, detektor razcepi na avdio in video signal, nakar se oba ojačita in vodita na zvočnik ter video zaslon.



**Slika 40.32** Televizijski sprejemnik. Sprejemnik razcepi televizijski signal na video in avdio signal ter prvega prikaže na slikovni cevi in drugega v zvočniku spremeni v zvok. (SlideShare)

Tehnične značilnosti

Tipična televizijska slika je sestavljena iz 625 vrstic s po  $(4/3) \cdot 625$  "točkami". Žarek jo prebere/nariše 25-krat na sekundo. Človeško oko ne zaznava tako hitrih skokovitih sprememb in vidi zgolj gladko gibanje. V video signalu si torej sledi  $625 \cdot 625 \cdot (4/3) \cdot 25 \approx 10 \cdot 10^6$  "točkovnih" jakosti na sekundo. Najvišja frekvenčna komponenta v video signalu je zato 10 MHz. Če jo hočemo vtisniti v nosilni val, mora imeti ta vsaj tolikšno frekvenco. Zato tudi delujejo televizijski oddajniki na zelo kratkih valovih okrog 100 MHz. Nosilna frekvenca za avdio signal je za okrog 5 MHz višja od nosilne frekvence za video signal. Oddajne moči dosega 100 kW.

Televizija in družba

Televizija nadgradi radio. Televizijski sprejemnik postane središče doma in okno v svet. In ker ljudje v glavnem iščejo razvedrilo in



zabavo, se razmnožijo razne specializirane televizijske postaje, ki ljudem dajajo, kar pač ti hočejo, torej "razvedrilne" oddaje in igrane filme vseh vrst. Štiriindvajset ur na dan. Vse skupaj pa obilno začinijo s plačanimi oglasi, ki jih vstavljajo v najbolj neprimernih trenutkih.



**Slika 40.33** Televizija nadgradi radio s slikami in postane središče doma. (Anon)

Svojo priložnost prepoznajo tudi politiki in drugi zavajalci človeškega mišljenja: nikoli v zgodovini še niso imeli takšne možnosti, da nagovorijo toliko ljudi naenkrat in jih poskušajo naplahtati na ta ali oni način: ne samo z glasom, temveč tudi s stasom. Podobno je z ekshibicionisti vseh vrst. "Poglej me!" je namreč ena izmed osnovnih otroških potreb in nekateri otroci pač nikoli ne odrastejo. Za pet minut slave, da se lahko pokažejo na televizijskih zaslonih, so pripravljene storiti vse. Tako televizija poleg nespornih in sijajnih dobrobiti - vzgojnih, izobraževalnih in razvedrilnih - prinese tudi kopico slabosti, če se ne pazimo: neznanško izgubo časa, pasivizacijo in indoktrinacijo.

#### **40.10 Magnetni zapis**

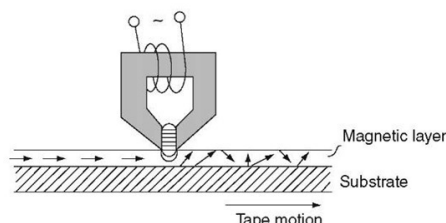
Avdio signal iz mikrofona in video signal iz televizijske kamere se sproti nalagata na radijske valove in razpošiljata k sprejemnikom. Kakor hitro nastajata, tako hitro tudi izginjata. Kaj ne bi bilo krasno, ko bi ju znali kam shraniti? Potem bi ju lahko v prihodnosti spet poslušali in gledali. Ali pa bi ju naknadno, in morda celo večkrat, pošiljali sprejemnikom.

Kako shraniti časovno spremenljiv električni signal na izhodu iz mikrofona ali kamere? Tako, da na izhod priključimo primeren elektromagnet, ki dovajani električni tok "spreminja" v magnetno polje, in skozi to polje enakomerno vlečemo magnetibilni trak, da ga polje magneti. Močnejši električni tok povzroči močnejšo namagnetnost traku. Magnetni zapis pa kasneje beremo z obratnim postopkom: namagneteni trak vlečemo mimo elektromagneta, v katerem se zato inducira električna napetost med koncema tuljave. Izumili smo magnetni zapis in branje električnega signala.

Magnetofon

Od zamisli do dobro delujoče naprave je seveda trnova pot. Najprej se osredotočimo na avdio signal. Kot primeren za zapisovanje se pokaže podkvast elektromagnet iz laminiranega mehkega železa in z ozko režo med poloma. To je magnetna glava. Tik pod režo magnetne glave teče trak od enega na drugi

vrteči se kolot. En kolot je vlečni; poganja ga primeren enosmerni elektromotor. Trak je iz plastike in je premazan s slojem, ki vsebuje drobne delce  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  ali  $\text{CrO}_2$ . Za zapisovanje zvoka do frekvence 20 kHz zadošča, da se giblje trak s hitrostjo nekaj centimetrov na sekundo. Zapisovalna glava služi tudi kot bralna glava. Primeren ojačevalec skrbi, da je tok v zapisovalno glavo (iz mikrofona) ali iz bralne glave (do zvočnika) dovolj velik. Tako smo sestavili *magnetofon*.

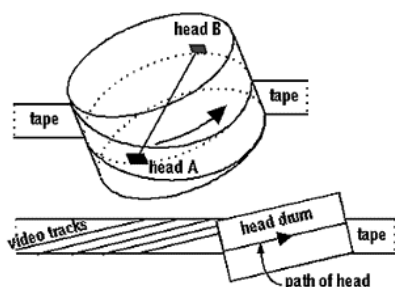


**Slika 40.34** Magnetna zapisovalna glava in trak. Električni tok skozi elektromagnet bolj ali manj namagnetni pod njim tekoč trak. (What-When-How)

Trak, na katerem je posnet zvok, lahko znova uporabimo za zapisovanje. To omogoča dodatna brisalna glava pred bralno/zapisovalno glavo, ki trak razmagnetni, to je, ga namagnetni z zvokom frekvence nad 20 kHz. Takega zvoka ne slišimo.

Magnetoskop

Za zapis videa v televizijski ločljivosti je potrebna frekvenčna širina okrog 5 MHz. Trak bi se zato moral gibati s hitrostjo preko deset metrov na sekundo, kar je mehansko nesprejemljivo. Zapis videa vzdolž traku zato ni mogoč. Kaj pa zapis prečno ali poševno na trak? Slednje omogoča zapisovalna glava na poševno usmerjenem vrtljivem valju. Ko se valj vrti, zapisuje glava na trak poševno sled. Vzdolž ene sledi so zapisane vse vrstice posamične slike. Še bolj praktično je, da sta na valju dve glavi; ena zapisuje sode in druga lihe vrstice slike.



**Slika 40.35** Vrtljivi boben z dvema magnetnima glavama. Pri enem obratu bobna zapiše vsaka glava eno poševno sled. Vzdolž ene sledi so zapisane vse sode vrstice in vzdolž druge vse lihe vrstice posamične slike. (Anon)

Tipičen valj ima premer nekaj centimetrov in se vrti s 25 obrati na sekundo, trak pa se giblje s hitrostjo nekaj centimetrov na sekundo. Širina video sledi na traku znaša okrog 0,05 mm in njena dolžina nekaj centimetrov. Ob enem robu traku se zapisujejo še sinhronizacijski impulzi in ob drugem zvok. Za oboje poskrbita ustrezni mirujoči glavi. Branje videa in zvoka s traku poteka podobno kot zapisovanje – preko istega vrtljivega bobna in glav. Nabor glav zaključuje mirujoča brisalna glava, s katero je mogoče brisati video sledi, avdio sled ali oboje skupaj.

## 40.11 Radiosonde

Seveda zvok in slika nista vse, kar lahko prenašamo po radijskih valovih. Prenašamo lahko kakršenkoli električni signal, recimo "elektrificirane" izmerke raznih merilnikov, na primer termometra. Poskrbeti moramo le za pretvorbo izmerjene količine, na primer temperature, v električni signal.

Vremenske sonde

Takoj nam pade na misel, da bi na opisani način lahko udobno merili tlak, temperaturo in vlago v ozračju. Obesimo, v mislih, na balon škatlo z ustreznimi merilniki/pretvorniki in majhen oddajnik na baterijo ter vse skupaj spustimo. Balon se bo dvignil v višave in sproti meril ter oddajal podatke o navedenih treh količinah. Na tleh pa bomo to sprejemali in beležili. Zamislili smo si *radiosondo*.



**Slika 40.36** Vremenska sonda. Helijev balon ponese v višave škatlo z merilniki za tlak, temperaturo in vlago ter z radijskim oddajnikom, ki sporoča izmerke sprejemniku na tleh. (NOAA)

Kot raziskovalci v državnih meteoroloških službah zamisel hitro uresničimo. Za primernega se pokaže balon iz tankega lateksa, napolnjen s helijem do premera okrog 1,5 m. Tak balon ima dovolj vzgona, da dvigne breme 1 kg od tal do višine preko 30 kilometrov. Ker pri tem prihaja v območje čedalje nižjega tlaka, se razpenja in na koncu počí. Pritrjeno padalo poskrbi, da preostanki padejo na tla brez škode.

V škatli pod balonom so že spoznani merilniki: aneroidni barometer, bimetalni termometer in higrometer na las. Ročica, pritrjena na barometrsko komoro, premika eno izmed plošč pridruženega kondenzatorja in mu s tem spreminja kapaciteto. Termometer in higrometer na podoben način premikata vsak svoj kondenzator. Poseben urni mehanizem z vrtečo se kontaktno ročico priključuje našete tri kondenzatorje, enega za drugim, vzporedno h kondenzatorju nihajnega kroga oddajnika. Nihajnemu krogu se zato spreminja kapaciteta in s tem frekvenca. Radijski val oddajnika je torej frekvenčno moduliran. Amplitudna modulacija ni dobra, ker se sonda oddaljuje in se na tleh sprejemana amplituda zato manjša. Sprejemnik na tleh signal demodulira in ga preko elektromagneta in premičnega peresa riše na papirni trak.

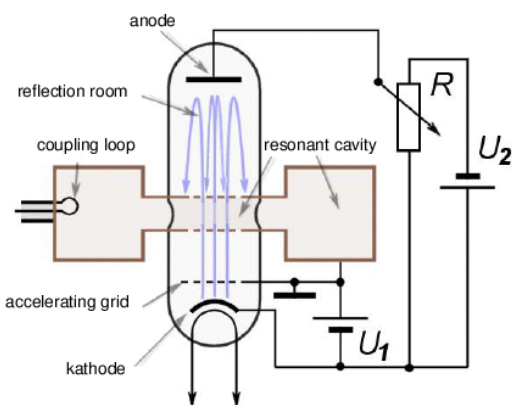
Iz izmerkov narišemo navpični profil ozračja. Pove nam, med drugim, koliko je ozračje stabilno, to je, kolikšna je verjetnost, da se v njem razvije konvekcija. Vsakodnevno spuščanje vremenskih sond postane rutinsko opravilo meteoroloških služb na kopnem in na preoceanskih ladjah.

#### 40.12 Mikrovalovi

Dipolne radijske antene sevajo v vse smeri. Včasih pa si zaželimo, da bi vzpostavili radijsko povezavo zgolj med dvema stalnima točkama, recimo iz doline, kjer je "vir informacij", na vrh hriba, od koder bi jih potem oddajali na vse strani. Za to potrebujemo usmerjeni parabolični anteni na obeh točkah: oddajno in sprejemno. Širina snopa  $\theta$ , v katerega seva parabolična antena s premerom  $D$ , je določena z uklonom valov na njenih robovih [38.14]:  $\theta \sim \lambda/D$ . Za ozke snope so torej potrebni kratki valovi in velike antene. Več kot desetmeterske antene so že nepraktične. Da seva desetmeterska antena v kot ene stopinje, pa so potrebni valovi reda velikosti  $\sim 10$  cm, torej mikrovalovi.

Ko poskušamo s triodnim oscilatorjem tvoriti radijske valove s frekvenco nad  $\sim 100$  MHz, to je z valovno dolžino pod  $\sim 3$  m, naletimo na težave; motiti začneta kapacitivnost med elektrodama (ne moremo je dovolj zmanjšati) in preletni čas elektronov. Izumiti moramo nov tip mikrovalovnega oscilatorja in ojačevalca.

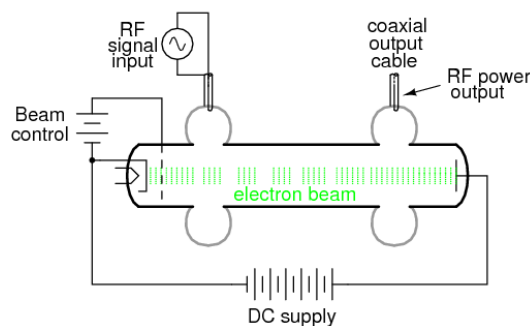
Oscilator Spomnimo se na stojno valovanje v resonančnih votlinah. Kaj bi elektronko – skozi katero teče curek elektronov – ovili s toroidno votlino; morda bi se v njej vzbudilo stojno valovanje, ki bi ga potem odvajali skozi majhno odprtino. To je približno tako, kot če pihamo zrak mimo ustja steklenice, da zazveni. Številni poskusi vodijo do *refleksnega klistrona*.



**Slika 40.37** Refleksni klistron. Pospešeni elektronski curek teče proti negativni anodi in se od nje odbija nazaj. Pri tem teče mimo torusne votline in v njej vzbuja stojče mikrovalove. Te odvezemamo skozi posebno odprtino in vodimo po koaksialnem kablu. (AAC – All About Circuits)

Izvorni curek elektronov je hitrostno homogen. Ko pa leti mimo ustja votline, v kateri je stojno valovanje, se nekateri elektroni dodatno pospešijo, drugi pa zavrejo, kakršno električno polje pač že srečajo ob ustju. Curek postane zaporedje zgoščin in razredčin. Ko se odbije od anode, te zgoščine spet priletijo do ustja, vplivajo na polje in poniknejo skozi kolektor/ozemljitev. S primerno dolžino elektronke in s primerno anodno napetostjo poskrbimo, da prideta curek in polje v resonanco: vsaka zgoščina prispe k ustju votline tedaj, ko ji polje nasprotuje, in jo zato zaustavi. Kinetična energija elektronov se prenese v energijo polja. Majhna zanka v resonančni votlini deluje kot sekundarni ovoj transformatorja in odvaja del energije v *koaksialni kabel* – dve žici, "ena znotraj votle druge". Moč mikrovalov, ki potujejo skozi kabel, izmerimo s priključenim termočlenom. Tako zgradimo refleksne klistrone z močmi med 1 mW in 1 W ter s frekvencami med 1 in 100 GHz.

Ojačevalec Poleg mikrovalovnega oscilatorja potrebujemo še mikrovalovni ojačevalec. Dobimo ga tako, da k obstoječi torusni votlini dodamo še eno ali več zaporednih enakih votlin. Mikrovalove dovajamo v prvo votlino in jih odvezemo iz druge (ali zadnje). Delovanje je podobno kot pri refleksnem magnetronu, le da curka ne odbijamo, ampak ga kar posrkamo v kolektor/ozemljitev. To je *večvotlinski klistron*. Po zgledu "navadnega" radijskega ojačevalca lahko del izhoda tudi vodimo po koaksialnem kablu na vhod in dobimo mikrovalovni oscilator, torej alternativo refleksnemu klistronu. Dvovotlinski klistroni dosegajo ojačanje  $10^2$ , večvotlinski pa celo do  $10^6$ . Izhodne povprečne moči dosegajo 1 kW. Temu ustrezna morata biti enosmerni izvor moči in hlajenje kolektorja.



**Slika 40.38** Dvovotlinski klistron. Prva votlina poskrbi za grupiranje elektronov, druga pa jim resonantno odvzema energijo. (AAC – All About Circuits)

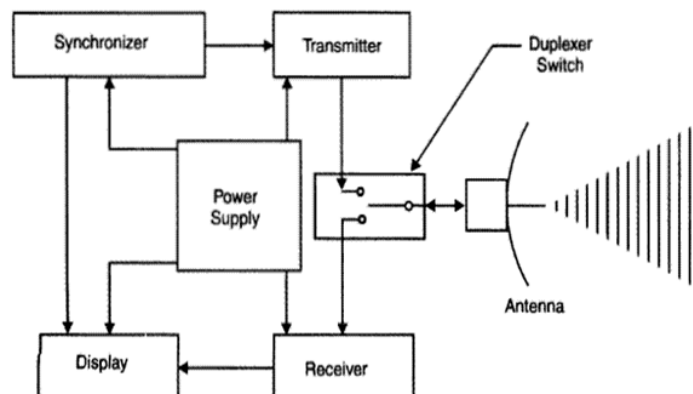
Usmernik Kakor vakuumška trioda ne zmore ustvarjati mikrovalov, tako jih tudi vakuumška dioda (priključena med os in plašč koaksialnega kabla) ne zmore izravnati. Zato tudi ne moremo z galvanometrom meriti jakosti visokofrekventnih tokov na izhodu ali odcepu iz kablov. Morda pa obstaja kakšna snov, kristal, ki bi električni tok – enosmerni, nizkofrekventni in visokofrekventni –

prevajala (vsaj deloma) anizotropno? Raziskave odkrijejo, da so takšni, med drugim, kovinski sulfidi. Najboljše rezultate pa pokaže silicijev kristal, ki se ga dotika tanka, priostrena kovinska žica ali igla. To je *kristalna dioda*. Deluje pri vseh frekvencah, tudi mikrovalovnih. Zakaj sploh deluje, nam zaenkrat ni jasno, ampak za uporabo to ni potrebno.

(De)modulacija Mikrovalove zmoremo torej ustvarjati (s klistronom), usmerjeno izsevati (z oddajno anteno) in zaznavati (s sprejemno anteno in kristalnim detektorjem). Za prenos zvoka in slike pa jih moramo še modulirati in demodulirati. Tukaj nas elegantno reši frekvenčna konverzija [40.8]. Z "navadnim" radijskim oddajnikom ustvarimo modulirane radijske valove *IF*, nato pa te valove v frekvenčnem mešalcu (s kristalnimi diodami) pomnožimo z mikrovalovi *LO* iz mikrovalovnega oscilatorja (refleksnega klistrona) ter pridobimo modulirane mikrovalove *RF*. Modulacija se pri tem ohranja. Po potrebi te valove še ojačimo z mikrovalovnim ojačevalcem (klistronom). Primer: iz  $IF = 30 \text{ MHz}$  in  $LO = 1,000 \text{ GHz}$  dobimo  $RF = 1,030 \text{ GHz}$ . Podobno je pri demoduliranju. Prejete valove *RF* vodimo v mešalec, kjer jih pomnožimo z *LO* in dobimo *IF*. Tega pa obdelamo z "navadnim" radijskim sprejemnikom.

### 40.13 Radar

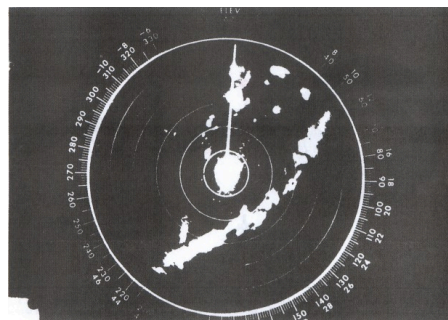
Princip radarja Vemo, da se radijski in svetlobni valovi odbijajo od ovir. To velja tudi za mikrovalove, ki jih izseva mikrovalovna antena. Če tak mikrovalovni snop zadene, na primer, ob sovražno letalo, se bo od njega odbil v vse smeri, tudi nazaj. Kaj, ko bi poskušali zaznati odbite valove? Če bi v izbrano smer izsevali kratek paket mikrovalov in izmerili zakasnitev  $t$  njegovega morebitnega odmeva, bi s tem določili tako smer kot oddaljenost  $r$  morebitnega letala:  $r = ct/2$ . Z vrtečo se anteno pa bi določili lege letal v vsej okolici. Izumili smo (vojaški) *radar*.



**Slika 40.39** Princip radarja. Oddajnik tvori mikrovalove, antena jih izseva in sprejema odmeve, sprejemnik pa jih ojačuje in prikazuje na katodnem zaslonu. (FAS - Federation of American Scientists)

Tehnična izvedba

Tehnična izvedba radarja je naslednja. — Navaden kvarčni oscilator s pomožnim vezjem nenehno ustvarja zaporedje ostrih prožilnih impulzov. — Mikrovalovni oscilator nenehno tvori mikrovalove in jih uvaja v mikrovalovni ojačevalec. — Enosmerni vir visoke napetosti stalno polni verigo vzporedno vezanih kondenzatorjev. Vzporedno k verigi je priključena s plinom napolnjena trioda, tiratron. Njena mrežica je na zaporni negativni napetosti in skozi triodo ni toka. Ko na mrežico dospe pozitiven prožilni signal, postane trioda prepustna in nabrani naboj na kondenzatorjih se začne pretakati skozi v visokonapetostni transformator in naprej v ojačevalec mikrovalov. Pretakanje je silovito in traja le kratek čas, toliko, da napetost na triodi pade pod prevodno vrednost. Po tem postane trioda neprevodna in začne se vnovično polnjenje kondenzatorjev. — S prejeto močjo tvori mikrovalovni ojačevalec kratek paket mikrovalov. — Ko tečejo mikrovalovi po valovodu mimo odcepa proti sprejemniku, morajo slednjega "zapreti". Med sredico in plaščem odcepnega koaksialnega kabla je priključena s plinom napolnjena dioda, tlivka. Mimobežno valovanje jo prižge in s tem kratkostično sklence vhod v sprejemnik. V sprejemnik zato ne prodre nič valovanja in ga ne more sežgati. — Ko se paket popolnoma izseva, tlivka ugasne in pot odmevom v frekvenčni mešalec je odprta. Drugi vhod v mešalec je lokalni mikrovalovni oscilator, ki deluje na rahlo različni frekvenci od oddajnega oscilatorja. Posebno vezje skrbi, da je ta frekvenčni zamik konstanten. Frekvenčno nižani izhod iz mešalca potem obdela navaden radijski sprejemnik. — Prožilni signal, ki sproži kondenzatorsko razelektritev, sproži tudi časovno bazo na standardnem osciloskopu. Odmevi iz sprejemnika se vodijo na odklonske plošče osciloskopa in se narišejo kot porazdelitev odmevov po razdalji. — Bolj pregledno pa se radarski odmevi prikažejo na katodnem zaslonu z radialno preletno črto. Smer preleta je določena z usmeritvijo antene. Odmevi se rišejo vzdolž črte bolj ali manj svetlo. Poseben premaz zadrži sliko nekaj sekund.



**Slika 40.40** Slika na katodnem zaslonu radarja. Viden je katodni žarek in dolga veriga nevihtnih oblakov, ki jo je zarisal pri svoji rotaciji. (FAA – Federal Aviation Administration)

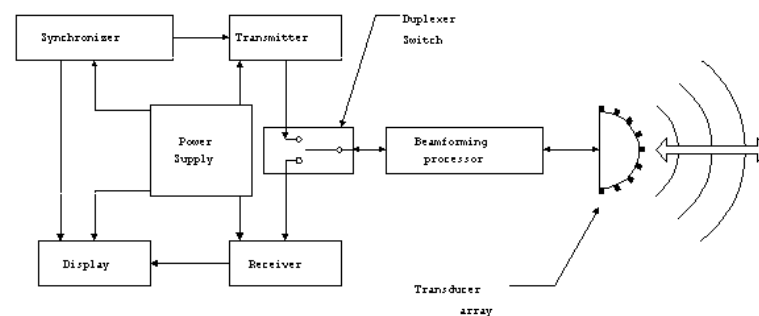
Uporaba radarja

Radarji, sprva namenjeni odkrivanju sovražnih letal, takoj najdejo pot v civilno uporabo. Civilni radarji delujejo z valovnimi dolžinami med nekaj centimetri in nekaj deset centimetri, z najrazličnejšimi širinami in oblikami snopov ter z raznovrstnimi

dolžinami impulzov, frekvencami impulzov in oddajnimi močmi. Tipične vrednosti radarskih parametrov so naslednje: valovna dolžina 5–10 cm; širina snopa 1–2°; frekvenca impulzov 250–1000/s; dolžina impulza 1–3  $\mu$ s; vršna moč v impulzu 10–1000 kW; povprečna moč sevanja 10–1000 W; najmanjša zaznavna moč  $10^{-14}$  W (!). Ladje z radarji tipajo okoli sebe skozi noč in meglo ter odkrivajo druge ladje, čeri in ledene gore. Letališča opazujejo zračni prostor nad seboj in skrbijo za red pri preletanju, pristajanju in vzletanju letal. Vremenske službe opazujejo odmeve od dežnih kapljic in ledenih zrn v oblakih ter določajo lego ter gibanje nevihtnih oblakov. Uspe jim celo meriti jakosti padavin pri tleh. Prav tako sledijo dvigovanju vremenskih sond ter določajo smer in hitrost vetrov na različnih višinah. In astronomi uspejo izmeriti odmeve od Meseca ter bližnjih planetov ter tako potrdijo njihove oddaljenosti.

#### 40.14 Sonar

Pod vodo radar žal ne dela, ker je dušenje mikrovalov premočno. Se pa skozi vodo dobro širi zvok. Kaj, ko bi naredili "radar" na zvočne valove? Recimo mu *sonar*.



**Slika 40.41** Shema sonarja. Od radarje se razlikuje le po tem, da namesto elektromagnetnih valov izseva in prejema zvočne valove. (FAS - Federation of American Scientists)

Ker so frekvence zvoka in ultrazvoka mnogo nižje od radijskih frekvenc, lahko za oddajno in sprejemno vejo sonarja uporabimo kar navadne radijske komponente in ni potrebe po mikrovalovnih komponentah. Namesto antene ima sonar kupolo, v kateri so nameščeni bati. Vsak bat je povezan s piezoelektričnim kristalom v kondenzatorju ali z magnetostrikijskim jedrom v tuljavi. Nihajoče polje kondenzatorja ali tuljave povzroči nihanje bata in obratno. Kako je izsevani zvočni impulz usmerjen, je določeno s faznimi razlikami med bati. S posebno pripravo (vrtljivo ploščo na kontaktni podlagi) lahko opazovalec ročno nastavlja časovne zakasnitve oz. fazne zamike batov, to je določa smer izseva. Ploščo lahko vrtil tudi elektromotor. Izmerki se rišejo na katodni zaslon in/ali na papirnat trak.



Hitrost zvočnih valov v vodi znaša 1500 m/s. Sonarji delujejo na frekvencah med 10 in 100 kHz, kar pomeni z zvočnimi valovnimi dolžinami med 10 in 1 cm. Tipične moči v impulzu znašajo 1 kW. Čim krajši so zvočni valovi, tem bolj so dušeni. Uporabni doseg sonarja je med 500 m (100 kHz) in 5000 m (10 kHz). Tipične širine snopov pa znašajo med 10 in 45 stopinjami.

Tudi sonar je bil razvit za vojaško uporabo, predvsem kot "zvočno oko" podmornic. Drugače pa sedaj z njim merimo globino morja pod ladjami, da se zavarujemo pred nasedanjem. Izdelamo tudi karto hribovitosti morskega dna. Če sonar postavimo na dno in usmerimo navzgor, lahko merimo višino valov. Ribiči pa ga uporabljajo za odkrivanje ribjih jat. Pri tem štejejo predvsem odmevi od ribjih zračnih mehurjev.

Dolgo preden je človek izumil sonar, ga je narava oblikovala v živalih. Z zvočnimi "klikli" se orientirajo in lovijo kiti, delfini in netopirji. V marsikaterem pogledu so njihovi sonarji celo boljši od naših. Od njih se moramo še marsičesa naučiti.

#### **40.15 Družbeni vpliv**

Elektronska revolucija

Kakor sta indukcijski generator in transformator sprožila elektrifikacijo držav in s tem popolnoma spremenila življenje ljudi, tako sta preprosta dioda in trioda omogočili razvoj elektronike in povzročili še večje spremembe v družbi. Brez teh dveh skromnih elementov ne bi bilo svetovne časovne službe, brezžičnih komunikacij v kopnem, ladijskem in letalskem prometu in, zlasti, nobenega radija in televizije po domovih v razvitih državah. Težko si je predstavljati življenje brez vseh teh naprav. Samo sprašujemo se lahko, kaj bo v nadaljnjem razvoju znanosti in tehnike še pustilo podoben družbeni pečat. □

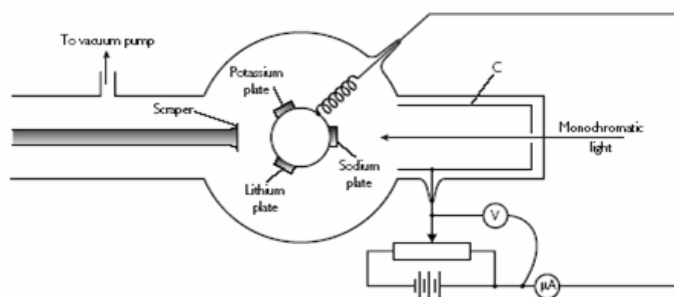


# 41 Kvantni delci

Fotoni – Rentgenski žarki – Rentgenska spektrometrija – Valovne lastnosti delcev – Elektronski mikroskop – Žarki alfa, beta in gama – Notranjost in jedro atoma – Planetarni in valovni model atoma – Vodikov atom – Eliptične tirnice – Večelektronski atomi – Magnetni moment – Spin elektrona – Struktura črt

## 41.1 Fotoni

Pri elektroniki smo ugotovili, da teče skozi fotodiodo tem močnejši nasičeni tok, čim močnejše jo osvetljujemo. Močnejša svetloba očitno izbija iz katode več elektronov na časovno enoto kot šibkejša. Kako je pa s kinetično energijo teh izbitih *fotoelektronov*? Pričakujemo, da tudi ta narašča z osvetljenostjo: na posamičen elektron pač mora v časovni enoti pasti tem več energije, čim večja je jakost svetlobe. Pa naredimo poskus!



**Slika 41.1** Merjenje energije fotoelektronov z zaporno napetostjo. Strgalo je potrebno zato, da očistimo izbrano katodno površino tik pred meritvijo. (Anon)

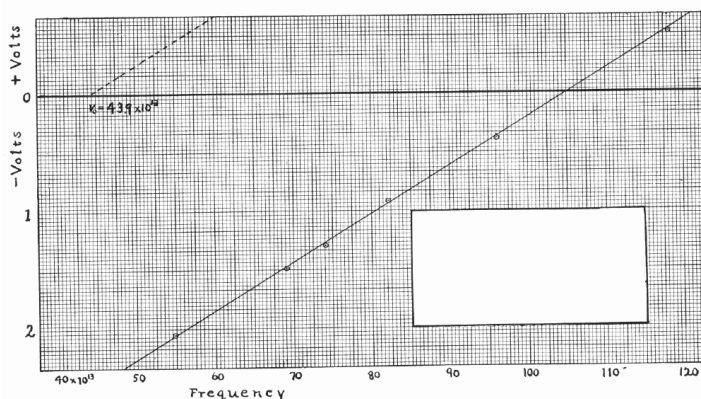
Energija  
fotoelektronov

V evakuirano stekleno bučo zatalimo katodo iz natrija, kalija ali litija in jo osvetljujemo z monokromatsko vidno svetlobo. Izbite elektrone zaustavljamo z negativno napetostjo na anodi. S presenečenjem ugotovimo, da je zaporna napetost  $U$  – torej tudi kinetična energija elektronov  $K = eU$  – neodvisna od jakosti svetlobe (LENARD)! Šibka svetloba izbija prav tako hitre elektrone kot močna, le manj jih je. Poskus ponovimo s svetlobo različnih valovnih dolžin. In spet presenečenje: maksimalna kinetična energija izbitih elektronov je odvisna od frekvence svetlobe (LENARD)! Ultravijolična in modra svetloba (četudi šibka) izbijata hitrejše elektrone kot rumena (četudi močna). Nizkofrekvenčna (rdeča in infrardeča) svetloba pa elektronov sploh ne izbija. Natančnejše meritve pokažejo sorazmernost (MILLIKAN)

$$K = h\nu - W \quad (41.1)$$
$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Sorazmernostna *kvantna konstanta*  $h$  je neodvisna od snovi, iz katere je katoda, konstanta  $W$  pa je od te snovi odvisna. Slednjo si razlagamo kot potrebno delo, da se elektron iztrga iz kovine.

Ker kinetična energija ne more biti negativna, sledi, da se se elektroni ne izbijajo, če je frekvenca svetlobe  $\nu \leq W/h$ .



**Slika 41.2** Zaporna napetost kot funkcija frekvence vpadajoče svetlobe za natrij. Prazni kvadrat je pobrisan izračun kvantne konstante. (Millikan, 1916)

Kvanti energije in fotoni

Opaženega rezultata si ne moremo razložiti drugače, kot da elektromagnetno polje predaja svojo energijo elektronom v paketih, *kvantih energije*. Elektron lahko prevzame enega ali več kvantov energije, nikakor pa ne polovični ali kak drug ulomni delež. Rečemo, da je energija elektromagnetnega polja kvantizirana količina. In če je energija svetlobe kvantizirana pri absorpciji, zakaj ne bi bila tudi pri emisiji ali celo pri širjenju? To nas navede na misel, da mora biti svetloba – kljub svoji valovni naravi – sestavljena iz delcev, *fotonov*, od katerih ima vsak energijo (EINSTEIN)

$$E = h\nu. \quad (41.2)$$

Vidna svetloba z valovno dolžino  $5000 \text{ \AA}$ , to je s frekvenco  $0,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ , je torej sestavljena iz fotonov z energijami po  $2,5 \text{ eV}$ . Koliko pa je fotonov v sončni svetlobi? Privzamemo, da je ta kar monokromatska vidna. Gostota toka sončne svetlobe na Zemlji znaša  $j = E/St = 1 \text{ kW/m}^2$ . Ker  $E = N \cdot h\nu$ , izračunamo  $N/St = j/h\nu \sim 10^{21} / \text{m}^2\text{s}$ . Ogromno število fotonov na sekundo in kvadratni meter! Človeško oko zazna še tok  $10^{-16} \text{ W}$  na sredini vidnega spektra. Tedaj pade v oko 250 fotonov na sekundo.

Gibalna količina fotona

Fotoni so delci, ki se gibljejo s svetlobno hitrostjo in imajo (mirovno) maso enako nič. Zanje zato veljajo relativistični zakoni. Za relativističen delec velja, kot vemo,  $E^2 - (cG)^2 = (mc^2)^2$ . Ko postavimo  $m = 0$ , dobimo

$$G = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (41.3)$$

To je gibalna količina fotona. Čeprav foton nima (mirovne) mase, pa ima gibalno količino. Tudi ona je kvantizirana. Ugotovitev seveda ni presenetljiva, saj vemo že od prej [35.14], da svetloba poleg energije prenaša še gibalno količino. Sedaj smo temu

dejstvo našli le korpuskularno razlago. Vse enačbe od prej ostanejo v veljavi, le celotno energijo svetlobe pišemo kot vsoto posamičnih energij fotonov:  $E = Nh\nu$ . Tako, na primer, zapišemo fotonski tlak na absorbirajočo steno kot  $p = (N/V)h\nu$ .

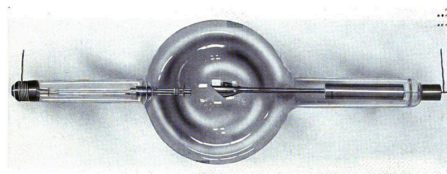
Realnost in modeli Pri raziskovanju svetlobe smo torej naredili poln krog: najprej smo mislili, da je svetloba curek delcev. Potem smo ugotovili, da je pravzaprav valovanje in nato še, da je elektromagnetno valovanje. Zdaj pa kaže, da je kljub vsemu le sestavljena iz delcev, čeravno so ti nekaj posebnega, saj imajo valovne lastnosti. Kaj je torej res? Ob tem vprašanju se zavemo, da pravzaprav ne vemo in ne moremo vedeti, kaj je svetloba (ali karkoli) v resnici. Saj gledamo naravo vedno preko svojih čutil, nikoli neposredno. Vse, kar nam je dosegljivo, je le izgradnja modelov realnosti. In tisti model, ki se bolje prilega opazovanjem, proglašimo za boljšega oziroma za bolj resničnega. Nobenega zagotovila nimamo, da bo tak tudi ostal. Najlepša usoda, ki jo kak model lahko doživi, je ta, da postane poseben primer bolj splošnega modela.

## 41.2 Rentgenski žarki

Pri poskusih s katodno cevjo v temi opazimo, da zraven stoječ fluorescentni zaslon zasveti, ko cev vključimo. Ko jo izključimo, pa svetlikanje izgine. Iz cevi očitno nekaj prihaja in vpada na zaslon. Je to vidna svetloba? Prižgano cev pokrijemo s črnim papirjem, vendar svetlikanje ne izgine. So to elektroni? Cev pokrijemo z aluminijasto folijo, a svetlikanje ostaja. Očitno smo na sledi nečesa novega. Lotimo se poskusov in ugotovimo naslednje (RÖNTGEN).

Lastnosti žarkov Iz svetle točke, kjer elektroni zadevajo zaslon, se v vse smeri – poleg vidne svetlobe – širijo neznani žarki. Ti brez posebnih težav prehajajo skozi snovi, ki imajo lahke atome. Ustavljajo jih le snovi s težkimi atomi, na primer svinec. Na fotografski plošči puščajo odtis železnega ključa, ki je zaprt v kartonski škatli. Žarki se ne odbijajo in ne lomijo. Na uklonski mrežici se ne uklanjajo. Ni jih mogoče odklanjati niti z električnim in magnetnim poljem. Kaže torej, da niso niti vidna svetloba niti curki nabitih delcev. Krstimo jih za *rentgenske žarke*.

Rentgenska cev Za preučevanje rentgenskih žarkov preoblikujemo katodno cev v primernejšo obliko. Elektronski curek spuščamo na poševno nagnjeno anodo iz platine ali volframa; nastajajoči rentgenski žarki so potem usmerjeni v glavnem v pravokotni smeri. Za pogon cevi uporabimo indukcijsko tuljavo ali visokonapetostni usmernik z napetostmi nekaj 10 kV. Ker se zaradi trkov elektronov anoda močno segreva, jo po potrebi hladimo z vodo. Tako dobimo *rentgensko cev*.



**Slika 41.3** Cev za tvorjenje rentgenskih žarkov. (Anon)

Slikanje notranjosti teles

Čeprav kot odkritelji še ne vemo, kaj pravzaprav so rentgenski žarki, je njihova uporabna vrednost takoj očitna: z njimi lahko slikamo notranjost človeškega telesa. Vidimo kosti, zlome, zobna vnetja, morebitne vojne spominke – krogle in še kaj. Zdravniki navdušeno sprejmejo novo orodje. Njegove koristi so neprecenljive.



**Slika 41.4** Slika roke z rentgenskimi žarki. (General Electric)

Žal pa se počasi začno kazati tudi škodljive lastnosti rentgenskih žarkov, zlasti pri ljudeh, ki so jim prekomerno izpostavljeni: začno jim izpadati lasje, pojavi se slabokrvnost in še kaj. Zdravniško osebje, ki vsakodnevno upravlja z močnimi rentgenskimi cevmi, mora biti zato zaščiteno s svinčenimi zasloni.

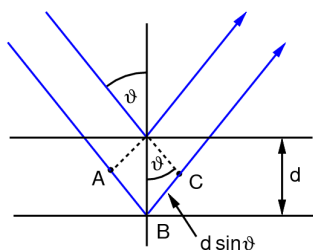
### 41.3 Rentgenska spektrometrija

Ena izmed možnosti, kaj naj bi rentgenski žarki bili, je naslednja: to so elektromagnetni valovi, vendar s tako kratko valovno dolžino, da se ne uklanjajo na uklonskih mrežicah, ki jih zmoremo narediti. Morda pa se uklanjajo na kristalih, ki so naravne tridimenzionalne mrežice z "režami" na medsebojnih razdaljah nekaj angstromov? Rentgenski žarek spustimo na velik kristal morske soli in za njim postavimo fotografsko ploščo. Na njej dobimo nekakšne uklonske pike (LAUE). Kaže torej, da so rentgenski žarki res kratkovalovna svetloba.

Uklon na kristalu

Raziščimo uklon na kristalu bolj natančno! Kristali morske soli so kvadri, ki so bolj ali manj obsekani z ravninami. Zamislimo si idealni, neobsekani kristal v obliki kvadra. Postavimo ga navpično. Tak kvader je tridimenzionalna mreža kock z robom  $d$ , v katere vozliščih tičijo atomi Na in Cl. Predstavljamo si, da je ta mreža navpična skladovnica vodoravnih mrežnih ravnin. Če pade na zgornjo ravnino valovanje, se deloma odbije in deloma prepusti ter nato odbije na naslednjih ravninah. Ako sta valovna

dolžina in vpadni kot pravšnja, imajo odboji od vseh mrežnih ravnin enako fazo, se konstruktivno seštejejo in dobimo močan odboj, sicer pa ne.



**Slika 41.5** Uklon rentgenskih žarkov na kristalnih ravninah. Pri izbranih kotih imajo odbiti žarki s posameznih ravnin enako fazo in konstruktivno interferirajo.

Slika pokaže, da znaša pogoj za odboj  $AB + BC = 2d \sin \theta$  torej (BRAGG)

$$2d \sin \theta = N\lambda, N = 1, 2, 3 \dots \quad (41.4)$$

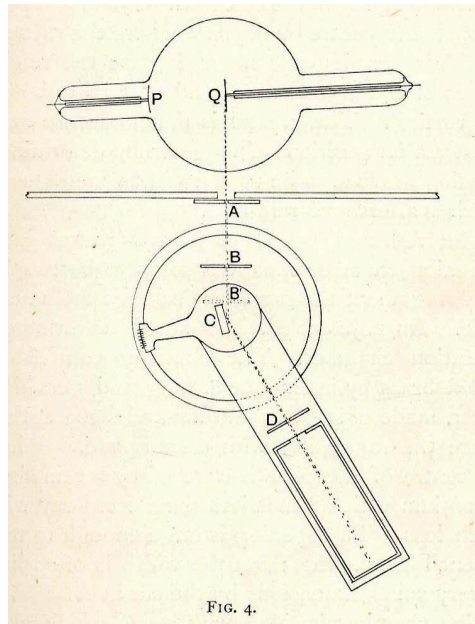
Da nastane konstruktivna interferenca, mora biti valovna dolžina vpadlega valovanja manjša od  $2d$ .

Če vpada na zgornjo ploskev valovanje z različnimi valovnimi dolžinami, se pri kotu  $\theta$  pač odbije tista komponenta, ki ima pravšnjo valovno dolžino. Kakšna je ta dolžina, je enolično določeno s kotom  $\theta$  in medmrežno razdaljo  $d$ . Kristal je torej selektor, ki iz množice valovnih dolžin prepusti le izbrano.

Tako upamo izmeriti valovno dolžino rentgenskih žarkov. Potrebujemo le medmrežno razdaljo kristala. Gostota NaCl je  $2,3 \text{ kg/dm}^3$  in kilomolska masa  $58,5 \text{ kg}$ . V tej masi je  $N_A$  "molekul" NaCl. Masa ene molekule je zato  $m_1 = M/N_A$ . V prostornini  $2 \cdot d^3$  je ena molekula. To pomeni  $\rho = m_1/2d^3$ , iz česar sledi  $d = 2,8 \text{ \AA}$ .

Rentgenski  
spektrometer

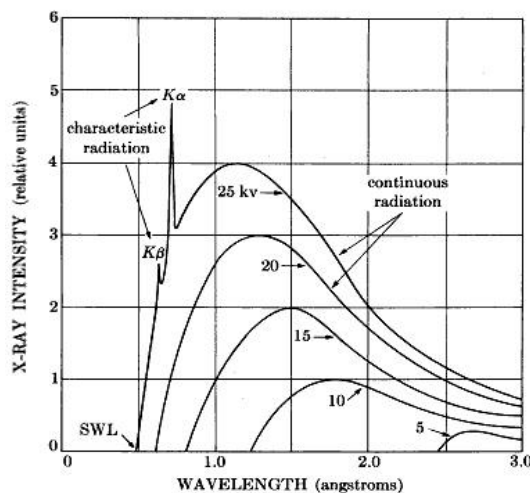
Meritev poteka tako, da na glavno ploskev kristala NaCl spuščamo ozek rentgenski žarek (ki ga dobimo iz rentgenske cevi in kolimiramo skozi dve svinčeni zaslonki) pod čedalje večjimi vpadnimi koti  $\theta$  od navpičnice ter beležimo jakost odbitega valovanja pod pripadajočimi odbojnimi koti. Jakost odbitega žarka beležimo kar na fotografski plošči, ki jo nato obdelamo tako, kot smo delali pri merjenju izseva zvezd. Bolj priročno pa je, da žarek spustimo v cilindrično posodo, napolnjeno s primernim plinom (etilovim bromidom). Rentgenski žarek ionizira plin in povzroči električni tok v priključenem vezju. Tok merimo z galvanometrom. To je *ionizacijska celica*. Iz praktičnih razlogov tudi ne nagibamo vhodnega žarka, ampak raje pod stalnim žarkom vrtilimo kristal. Prav tako z zobniki povežemo vrtenje kristala z vrtenjem merilnika: zasuk prvega za  $\theta$  povzroči zasuk drugega za  $2\theta$ . tako dobimo priročen *rentgenski spektrometer*.



**Slika 41.6** Prvi rentgenski spektrometer. Q = izvor rentgenskih žarkov, A = zaslon, C = kristal, D = detektor (ionizacijska celica). (Bragg, 1915)

Spekter rentgenskih žarkov

Takoj vidimo, da je *rentgenski spekter* sestavljen iz dveh delov: zveznega in črtastega. Zvezni spekter ima podobno obliko za vse anodne snovi. Čim višja je delovna napetost, tem višji je spekter. Pri kratkih valovnih dolžinah je ostro odrezan. Vse to lepo razložimo z domnevo o rentgenskih fotonih. Ko elektroni vpadejo na katodo, se namreč zaustavijo. To naredijo lahko v enem velikem ali več drobnih korakih. Pri tem izsevajo fotone z ustreznimi frekvencami. V najboljšem primeru se elektron zaustavi v enem samem koraku in pri tem izseva foton s frekvenco  $eU = h\nu_{\max}$  oziroma  $\lambda_{\min} = (12,3 \text{ \AA} \cdot \text{kV})/U$ . Fotoni z višjimi frekvencami (oziroma krajšimi valovnimi dolžinami) sploh ne morejo nastati. Spekter je zato odrezan. Z merjenjem mejne frekvence lahko zato natančno določimo kvantno konstanto  $h$ .



**Slika 41.7** Shematični spekter rentgenskih žarkov. Spekter je sestavljen iz zveznega in črtastega dela. Slednji je odvisen od snovi, iz katere je anoda. (Cullity, 1967)

Črtasti spekter pa je, nasprotno, odvisen od snovi, iz katere je anoda. Vsaka snov ima svoj karakterističen črtni spekter. To je njen prstni odtis, prav kakor črtni spektri v vidni svetlobi. Valovna

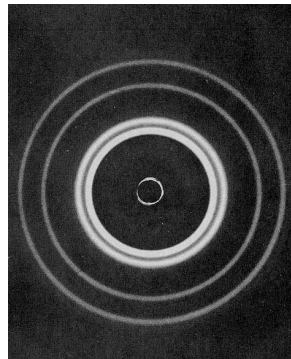


dolžina spektralnih črt je neodvisna od uporabljene napetosti, njihova intenziteta pa z napetostjo raste. Črte kažejo, da pri trkih elektronov z atomi v slednjih nastanejo resonantna nihanja z ostrimi frekvencami.

Obstoj črtastega spektra izkoristimo za pridobivanje intenzivne monokromatske rentgenske svetlobe. "Belo" svetlobo spustimo na kristal in ga tako zasučemo, da odbija svetlobo izbrane črte. Dobili smo monokromator.

Kristalometrija

V kristalu soli pa so poleg vodoravnih mrežnih ravnin še navpične ter bolj ali manj poševne. Na vsakem takem naboru ravnin nastanejo odboji. Če kristal vrtimo na vse možne načine pod monokromatskim žarkom, dobimo zato ojačanja v različnih smereh. Namesto da sipamo svetlobo na enem velikem kristalu, ki ga vrtimo, pa jo lahko sipamo na množici drobnih kristalčkov, ki so različno orientirani. Primerna sta kovinska folija ali kristalni prah, posut po stekleni plošči. Uklonska slika za takšno tarčo ima obliko koncentričnih krogov. Vsak krog pomeni uklon na ustrezni skladovnici ravnin. Svetlost kroga sporoča številsko gostoto atomov na teh ravninah. Radij kroga in njegova oddaljenost od tarče izdajata sipalni kot  $\theta$  in preko njega – ter poznane valovne dolžine – razmik  $d$  ustrežajočih ravnin.



**Slika 41.8** Uklon monokromatskih rentgenskih žarkov pri prehodu skozi aluminijasto folijo. V njej so drobni kristalčki, orientirani v vse smeri. Na "pravilno orientiranih" kristalnih ploskvah nastane konstruktivna interferenca. (Anon)

Če so kristalčki veliki, krogi niso sklenjeni, ampak so sestavljeni iz posameznih točk. Če krogov sploh ni, pa je preučevana folija iz amorfne, ne iz kristalne snovi. Tako s sipanjem monokromatske rentgenske svetlobe na kristalnih folijah ali kristalnem prahu raziskujemo lastnosti snovi.

Slednjič pomislimo tudi na to, da bi rentgenske žarke uporabili za izdelavo mikroskopa. Ker imajo ti žarki zelo kratko valovno dolžino, bi morala biti ločljivost takega mikroskopa mnogo boljša od ločljivosti optičnega mikroskopa. Žal pa v naravi ni snovi, na kateri bi se rentgenski žarki znatno lomili, zato tudi ne moremo izdelati ustreznih leč. Rentgenski mikroskop je torej neuresničljiv.

#### 41.4 Valovne lastnosti delcev

Elektroni kot valovi

Ugotovili smo, da se svetlobni valovi kažejo v določenih okoliščinah kot curki delcev. Pojavi se drzna misel: morda se pa

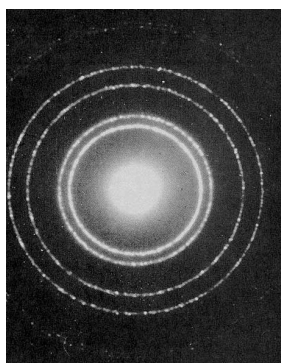
tudi curki elektronov lahko pokažejo kot valovanje? Drugače rečeno: fotonom, kot brezmasnim delcem, pripisujemo valovno dolžino. Ali imajo tudi elektroni, kot masni delci, valovno dolžino in če jo imajo, kakšna neki je? Morda pa velja tudi zanje ista enačba kot za fotone, namreč (DE BROGLIE)

$$\lambda = \frac{h}{G} = \frac{h}{mv} . \quad (41.5)$$

Čim hitrejši so delci, tem krajšo valovno dolžino naj bi imeli. Elektroni, ki preletijo napetost 100 V, bi tako imeli valovno dolžino okrog 1 Å.

Uklon elektronov na kristalu

Seveda je vse to zgolj domneva. Preveriti jo moramo s poskusom. Ponuja se kar sam: uklon elektronov na kristalu ali na foliji kristalčkov, čisto po vzoru uklanjanja rentgenskih žarkov. Tak poskus res naredimo. In poskus domnevo potrdi. Curek elektronov se na kristalni tarči res uklanja kakor valovanje (DAVISSON / GERMER)!



**Slika 41.9** Uklon elektronov pri prehodu skozi aluminijasto folijo. Elektroni s pravšnjo energijo imajo valovno dolžino, primerljivo z medmrežno razdaljo kristalov, in se na njih uklanjajo podobno kot rentgenski žarki. (Anon)

Masni delci kot valovi

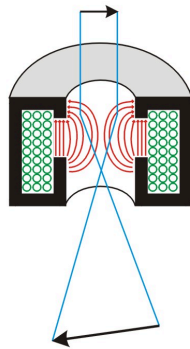
Domnevo - oziroma zdaj že dejstvo - lahko še razširimo: ne samo curki elektronov, ampak curki vsakršnih masnih delcev - ionov, atomov ali celo gumijastih kroglic - se vedejo kot ravno valovanje. Ker so pa ti delci mnogo težji od elektronov, je njihova valovna dolžina ustrezno krajša. Poskus uspe z atomi srebra pri sobni temperaturi, vendar so zaradi njihove hitrostne nehomogenosti uklonske slike precej razmazane. Pri makroskopskih delcih pa je valovna dolžina že tako kratka, da je sploh ne moremo zaznati.

### 41.5 Elektronski mikroskop

Na elektronske curke lahko torej gledamo kot na valovanje. Mikavna je misel, da bi z lomljenjem teh curkov izdelali *elektronski mikroskop* po zgledu svetlobnega. Ločljivost takega mikroskopa bi morala biti izjemna, saj so valovne dolžine hitrih elektronov večtisočkrat manjše kot pri vidni svetlobi. Težava je v tem, da moramo za to najprej izumiti primerne "leče".

Magnetne leče

Elektroni se odklanjajo v električnem in magnetnem polju. To izkoristimo za konstrukcijo magnetnih in električnih leč.

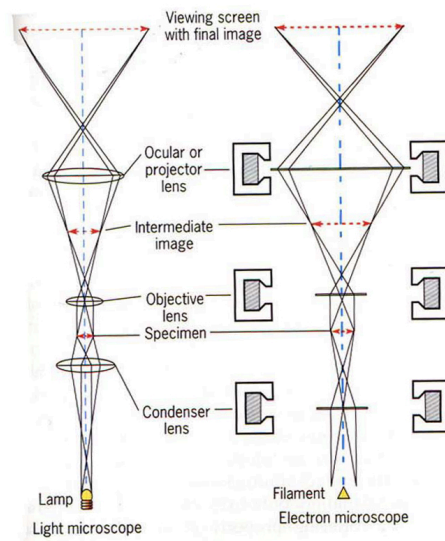


**Slika 41.10** Magnetna leča. Primerno oblikovano magnetno polje fokusira curek elektronov podobno, kot steklena leča fokusira curek fotonov. (ETH Zürich)

Magnetna leča je tuljava iz bakrene žice, zaprta v votel železen cilindar. Cilinder ima v notranji steni krožno režo v obliki prstana. Skozi to režo pronica magnetno polje, ki je v sredini šibko in proti robovom močnejše. Elektron, ki preleti polje, dobi neto sunek proti osi in zavrtljaj okrog nje. Robni elektroni dobijo večji sunek kot tisti ob osi. Vzporeden curek elektronov se zato fokusira v točko.

Elektronski mikroskop

Magnetne leče razporedimo v elektronskem mikroskopu tako kot steklene leče v optičnem mikroskopu. Opazovani predmet osvetljujemo s hitrimi elektroni in sliko ujamemo na fluorescentni zaslon ali fotografsko ploščo (RUSKA). Dobri elektronski mikroskopi dosežejo 100 000-kratno povečavo, torej stokrat več, kot optični.



**Slika 41.11** Elektronski mikroskop z magnetnimi lečami. Za primerjavo je prikazan tudi optični mikroskop. (Agar, 1974)

Celični organeli in virusi

Elektronski mikroskop nam odpre okno v svet s tipičnimi ločljivostmi nekaj deset atomskih premerov. To je *nanosvet*. V njem si ogledujemo podrobnosti v celicah ter odkrijemo nova, presenetljiva bitja - viruse.



iskali. Namesto elektroskopa lahko celo uporabimo občutljiv galvanometer in z njim merimo šibek tok.

Poleg uranovih rud so radioaktivne tudi nekatere druge rude, na primer tiste, ki vsebujejo torij. Pri tem je vseeno, v kakšnih kemičnih spojinah sta uran ali torij zvezana. Kaže torej, da radioaktivni delci spontano izletajo iz notranjosti nekaterih težkih atomov.

Polonij in radij

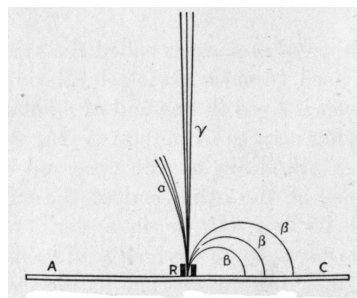
Poskusimo izolirati tisti element oziroma elemente iz uranove rude, ki so odgovorni za radioaktivnost! Z zapletenimi kemičnimi postopki iz rude zapovrstjo odstranjujemo različne primesi. Sproti z elektroskopom preverjamo, katere snovi so radioaktivne in katere ne. Tako pridemo – poleg urana in torija – še do dveh novih, doslej nepoznanih in močno radioaktivnih elementov: *polonija*  ${}_{84}\text{Po}$  in *radija*  ${}_{88}\text{Ra}$  (CURIE). Potrebno je nekaj ton rude, da dobimo 0,1 g radija. Kot pove galvanometer, seva polonij okrog  $10^3$ -krat močnejše od čistega urana in radij celo  $10^6$ -krat močnejše. V kalorimetru izmerimo, da – preračunano – 1 gram radija v eni uri odda 620 J toplote. To pomeni, da 1 g radija v 1 uri segreje 1,5 g vode od ledišča do vrelišča. Zdi se tudi, da se radioaktivnost radija s časom nič ne spreminja, dočim se radioaktivnost polonija počasi, preko mesecev, zmanjšuje.

Žarki alfa, beta in gama

Radioaktivne žarke hočemo sedaj podrobneje raziskati. Za sevalne poskuse sta primerna radijev bromid  $\text{RaBr}_2$  ali radijev klorid  $\text{RaCl}_2$ .

Ozek curek iz vzorca spustimo skozi magnetno polje in s fotografsko ploščo pogledamo, kam se curek odkloni. Ugotovimo, da se curek razcepi. Curki iz nekaterih virov se razcepijo v dva, iz drugih celo v tri delne curke, od katerih gre eden zmeraj naravnost, preostala dva pa se odklonita vsak na svojo stran. Opravka torej imamo s tremi vrstami žarkov. Pozitivno nabite poimenujemo *žarke alfa*, negativno nabite *žarke beta* in nevtralne *žarke gama* (RUTHERFORD).

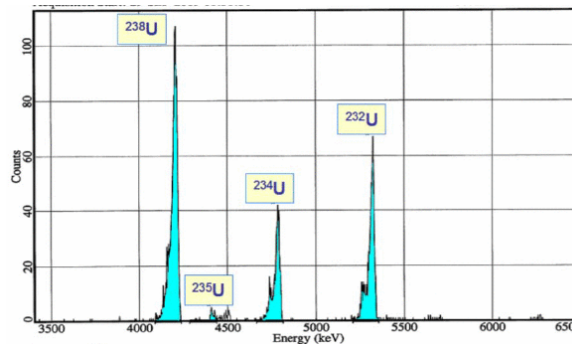
Z vstavljanjem ovir med izvor sevanja in svetleč zaslon ocenimo še doseg sevanj: delec alfa se zaustavi že v nekaj centimetrih zraka ali v listu papirja; beta se zaustavi v nekaj metrih zraka ali milimetru aluminija; gama pa potrebuje za zaustavitev kar nekaj centimetrov svinca.



**Slika 41.14** Žarki alfa, beta in gama, izvirajoči iz uranove rude, v močnem magnetnem polju. Prikaz je shematičen in razdalje niso sorazmerne. (Curie, 1904)

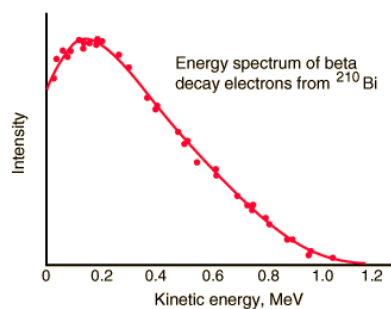
Spektri alfa, beta in  
gama

Razmerje  $e/m$  za nabite delce izmerimo z ustrezno prilagojenimi masnimi spektrometri. Za detekcijo delcev uporabimo fotografsko ploščo ali svetleč zaslon, na katerem štejemo bliske kar z očmi in mikroskopom. Delci alpha se pokažejo kot dvakrat ionizirani helijevi atomi. Iz njihovega odklona v magnetnem polju določimo gibalno količino ter iz nje kinetično energijo in hitrost. Dobimo diskretne vrednosti okrog 5 MeV, kar ustreza 5 % svetlobne hitrosti.



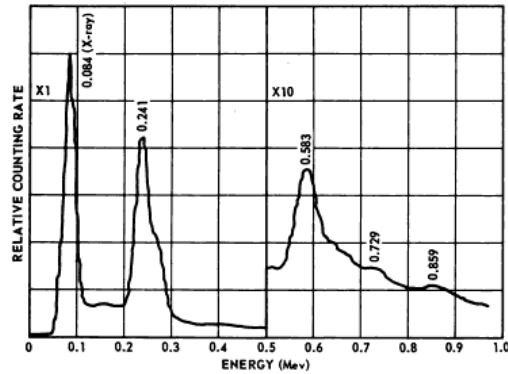
**Slika 41.15** Spekter žarkov alfa. Izvor sevanja je kemično čist uran, sestojč iz štirih izotopov. (Savannah River Laboratory)

Delci beta se pokažejo kot elektroni z zveznim energijskim spektrom do 1 MeV, to je s hitrostmi do 90 % svetlobne hitrosti. Pri merjenju moramo zato uporabiti (že spoznane) relativistične enačbe za odklon v električnem in magnetnem polju. Preseneti nas zelo velika hitrost elektronov. V katodnih ceveh jim lahko z visokonapetostnimi usmerniki podeljujemo le energije do okrog 100 keV.



**Slika 41.16** Spekter žarkov beta. Izvor sevanja je kemično čist bizmut. (Neary, 1940)

Delci gama pa se vedejo kot zelo prodorni rentgenski žarki z diskretnim energijskim spektrom. Njihove energije merimo preko fotoelektričnega pojava. Energijski razpon je približno takšen kot pri žarkih alfa in beta. Valovnih dolžin visokoenergijskih delcev gama ne moremo neposredno meriti, ker so premajhne, lahko jih pa iz energij izračunamo.



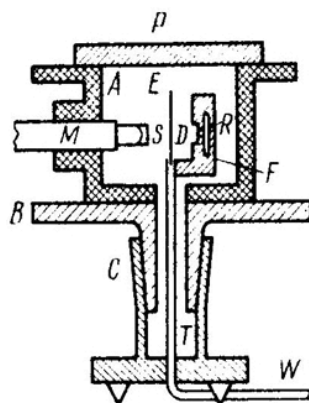
**Slika 41.17** Primer spektra žarkov gama. (Anon)

Kaže torej, da radioaktivni delci spontano nastajajo v notranjosti nekaterih težkih atomov. Kaj stoji za vsem skupaj, na tej stopnji ne vemo. Da bomo odgovorili na to vprašanje, bomo morali pred tem raziskati, kakšna je notranjost atomov in kakšna gibanja tam potekajo.

### 41.7 Notranjost in jedro atoma

Sipanje delcev alfa na atomih

Pri raziskavi odklona žarkov alfa v magnetnem polju opazimo, da majhna količina zraka v vakuumski merilni pripravi vpliva na gibanje žarka: njegova slika na svetlečem zaslonu postane rahlo motna. Očitno nekaj vpliva na gibanje delcev alfa in jih odklanja iz začetne smeri. To so trki z atomi oziroma z njihovimi elektroni. Da bi učinek povečali, obstreljujemo zlato folijo, ki vsebuje težje atome z več elektroni. Na drugi strani folije pa prestrezamo delce alfa s fluorescentnim zaslonom ter z mikroskopom gledamo in štejemo bliske. Razdaljo med izvorom delcev in zaslonom nastavimo tako, da je število bliskov na časovno enoto obvladljivo. Opazujemo pod različnimi koti glede na vpadni žarek.

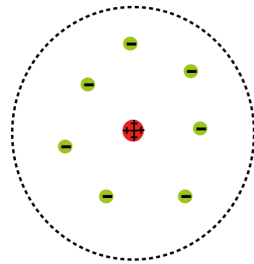


**Slika 41.18** Obstreljevanje zlato folije z žarki alfa. R = izvor žarkov, D = folija, S = fluorescenčni zaslon, M = mikroskop, W = cev za zračno črpalko. Mikroskop je vrtljiv okoli navpične osi. (Geiger, 1913)

Število bliskov - po pričakovanju - hitro upada z naraščajočim odklonskim kotom. Nikakor ne pričakujemo, da se bo kakšen delec odklonil za znaten kot, recimo za  $30^\circ$  ali več. Saj je delec alfa okrog 7000-krat težji od vsakega elektrona v atomu, naboj in masa v slednjem pa naj bi bila, tako mislimo, dokaj enakomerno razmazana. Ker pa smo že pri merjenju, pogledamo tudi velike kote. Presenečenje! Take uklone res zaznamo: 1 delec izmed

8000 se odkloni celo za  $180^\circ$ . To je tako, kot da bi se desetkilogramska topovska krogla odbila od lista papirja!

Kako si naj to razlagamo? Tako, da atom ni velika pozitivno nabita krogla, v kateri plavajo elektroni, ampak je sestavljen iz drobnega pozitivnega *jedra*, v katerem je zgoščena skoraj vsa masa atoma, in elektronov, ki rojijo okoli njega. Z velikostjo roja elektronov je določena velikost atoma. Za večino delcev alfa je zato atom popolnoma prozoren, na neznamenaten delež pa vplivajo velike odklonske sile (RUTHERFORD).



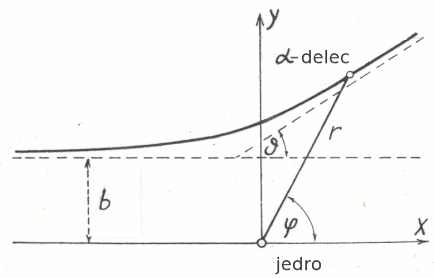
**Slika 41.19** Nuklearni model atoma. (Anon)

Gibanje delca mimo jedra

Izračunajmo, za kakšen kot se odkloni delec alfa z maso  $m$  in nabojem  $Z_1e$  ( $Z_1 = 2$ ) pri vpadu na točkasto jedro z nabojem  $Z_2e$ ! Zaradi lažjega računanja, zdaj in kasneje, bomo uporabili okrajšavo

$$q = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}. \quad (41.6)$$

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v jedro in os  $x$  usmerimo vzdolž gibanja delcev. Delec naj se giblje vzporedno tej osi na razdalji  $b$ . Ko pride blizu jedra, se odklanja in zariše hiperbolo. Obe asimptoti hiperbole, ki sta merljivi, oklepata kot  $\theta$ . To je kot odklona.



**Slika 41.20** Odklon delca alfa na atomskem jedru. Odklonski kot je odvisen od vpadne razdalje glede na atomsko jedro. (Supek, 1949)

Ko je delec v točki  $(r, \varphi)$ , je njegov pospešek v smeri  $y$  določen z gibalno enačbo  $mdv_y/dt = Z_1Z_2q^2 \sin \varphi / r^2$  (1). Pri gibanju se ohranja vrtilna količina  $mr^2\varphi' = -bmv$  (2). Iz (2) izrazimo  $r^2$  in ga vstavimo v (1). Dobimo  $mdv_y/dt = -(Z_1Z_2q^2/bv) \sin \varphi d\varphi/dt$  (3). Enačbo integriramo od kota  $\pi$  do  $\theta$ , pri čemer je na začetku  $v_y$  enak nič in na koncu  $v \sin \theta$ . Tako pridemo  $mv \sin \theta = (Z_1Z_2q^2/bv)(1 + \cos \theta)$  (4). Uporabimo še obrazca za sinus in kosinus dvojnega kota, pa dobimo *odklonsko enačbo* (RUTHERFORD)



$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1 Z_2 q^2}{mv^2/2} \right) \frac{1}{\tan(\theta/2)}. \quad (41.7)$$

Čim bolj je delec odklonjen, tem bliže jedru je prišel. Nazaj odbiti delci so doživeli čelni trk z jedrom.

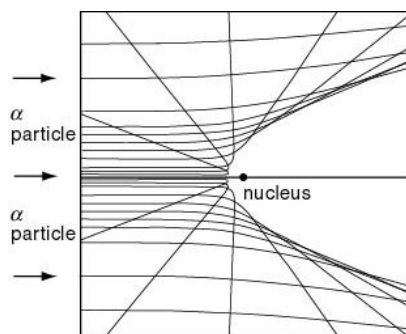
Sipanje delcev na jedrih

Ugotoviti hočemo še, koliko delcev alfa iz vpadajočega curka se sipa v posamezne smeri. Predpostavimo naslednje: delec alfa se sipa le enkrat; nanj deluje električna sila jedra; vpliv elektronov zanemarimo; atomsko jedro je med sipanjem pri miru, to je, je mnogo težje od delca alfa.

V valju s presekom  $S$  in dolžino  $l$ , torej v prostornini  $V = Sl$ , naj bo  $N$  atomskih jeder. Okrog vsakega jedra si mislimo "črno" kroglo polmera  $b$ . Gledano vzdolž valja ima taka krogla črno ploščino  $\pi b^2$ . Če valj ni predolg, se te ploščine ne prekrivajo in celotna črna ploščina znaša  $S_{\text{black}} = N\pi b^2 = (N/V)\pi b^2 Sl$ . V valj naj vpada  $I_0$  delcev na časovno enoto. Potem se v časovni enoti siplje  $I/I_0 = S_{\text{black}}/S = (N/V)\pi b^2 l$  delcev. Na interval  $b \pm db/2$  odpade  $dI/I_0 = (N/V) 2\pi b l db$  sipanj. Razdalja  $b$  je podana z odklonsko enačbo (41.7) in njen diferencial  $db$  z odvodom  $db/d\theta$  odklonske enačbe. Oboje vstavimo, vpeljemo prostorski kot  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  in dobimo (RUTHERFORD)

$$\frac{dI/I_0}{d\Omega} = \frac{1}{16} \frac{N}{V} \left( \frac{Z_1 Z_2 q^2}{mv^2/2} \right)^2 \frac{l}{\sin^4 \theta/2}. \quad (41.8)$$

To je *sipalna enačba*. Pove, kolikšen delež delcev, vpadajočih na folijo debeline  $l$ , se sipa v prostorski kot v smeri  $\theta$ .



**Slika 41.21** Sipanje delcev alfa v vse smeri. Delež sipanih delcev v ozek prostorski kot je odvisen od smeri. (Kyushu University)

Sipalna enačba preneha veljati za majhne kote, saj za smer  $\theta = 0$  napoveduje neskončen delež sipanj. Vendar majhnih kotov itak ne smemo upoštevati. Po odklonski enačbi bi to pomenilo, da je delec letel mimo jedra pri neskončni razdalji, kar je izključeno. Zgornja meja za mimobežno razdaljo je namreč še zmeraj majhna glede na premer atoma.

Naboj in velikost jeder

Sipalna enačba omogoča, da z merjenjem sipanja določimo neznani jedrski naboj tarče. Za baker ugotovimo  $29e$ , za srebro  $47e$  in za platino  $78e$ . Te številke so pa identične z vrstnim številom naštetih elementov v periodičnem sistemu. S tem smo našli fizikalno razlago zanje: vrstno število elementa ni nič

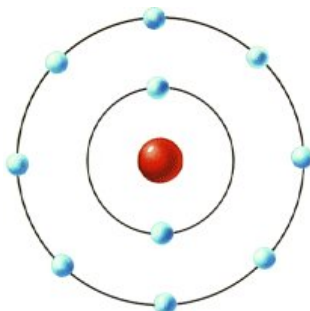
drugega kot število nabojev v njegovem jedru oziroma število elektronov v njegovem atomu.

Zdaj, ko poznamo naboj kakega jedra, poskušajmo oceniti še njegovo velikost. Delec alfa z znanim nabojem in z znano kinetično energijo naj potuje naravnost proti jedru z znanim nabojem ter se zaradi odbojne sile počasi zaustavlja. Zaustavi se na razdalji, ko se je vsa njegova kinetična energija pretvorila v potencialno energijo:  $mv^2/2 = Z_1Z_2q^2/r_{\min}$ . Iz tega takoj sledi razdalja  $r_{\min}$ . Za baker, na primer, dobimo  $16 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$ . Isti red velikosti velja za druge elemente. Atomska jedra so torej za faktor  $10^4$  manjša od atomov.

#### 41.8 Planetarni in valovni model atoma

Planetarni model

Ker je atom navzven nevtralen, mora biti naboj jedra enak vsoti nabojev na elektronih. Med jedrom in vsakim elektronom vlada električna sila in elektron bi moral pasti v jedro, če ne bi temu nasprotovala centrifugalna sila gibanja. Električna sila ima enako obliko kot gravitacijska, zato mora biti gibanje elektronov v atomu podobno gibanju planetov v osončju: krožno ali eliptično. Kaže torej, da je atom miniaturna slika sončnega sistema (BOHR).



**Slika 41.22** Planetarni model atoma. Elektroni krožijo okoli jedra podobno kot planeti okoli Sonca. Dovoljene so le izbrane tirnice. Število elektronov na vsaki tirnici je omejeno. Elektron seva le pri skoku iz višje tirnice na nižjo. (Anon)

Težave s tirnicami

*Planetarni model* atoma je na prvi pogled zelo privlačen, vendar hitro pokaže svoje pomanjkljivosti in nedodelanost. Prvič, model ne razloži stabilnosti atomov. Vsak krožeči elektron v atomu se namreč giblje pospešeno in bi zato moral nenehno sevati, izgubljati energijo ter prej ali slej pasti v jedro. Atomi potemtakem sploh ne bi smeli obstajati. Drugič, model ne razloži, zakaj so atomi iste vrste med seboj popolnoma enaki, to je, zakaj so tirnice elektronov okoli istovrstnih jeder identične. Saj se elektroni lahko gibljejo okoli jedra po poljubno velikih tirnicah, tako kot planeti okoli Sonca. In tretjič, model ne pove, kako atomi sploh sevajo in kako se po sevanju obnavljajo.

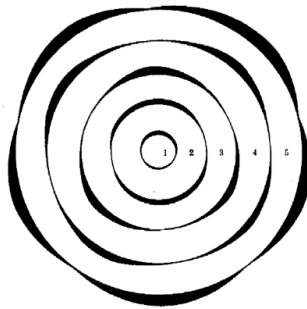
Valovni model atoma

Ob tem se spomnimo, da elektroni pač niso navadni delci, ampak imajo valovne lastnosti. Planetarni model atoma potem lahko nadgradimo takole. — Gibanje elektronov v privlačnem polju jedra se kaže kot njihovo stojno valovanje. — Možnih je več vrst takih stojnih valovanj – atomskih stanj – in vsako izmed njih ima svojo ostro energijo. — V *osnovnem stanju* z najnižjo energijo

elektron ne seva. Če dobi energijo od zunaj (s trki, vpadnimi elektroni ali fotoni), skoči v eno izmed stanj z višjo energijo. V takem *vzbujenem stanju* pa elektron ne zdrži dolgo, ampak spontano, po kratkem času, pade nazaj v kakšno nižje ali v osnovno stanje. — Pri padcu iz energijskega stanja  $E_2$  v  $E_1$  se izseva foton z energijo

$$h\nu = E_2 - E_1. \quad (41.9)$$

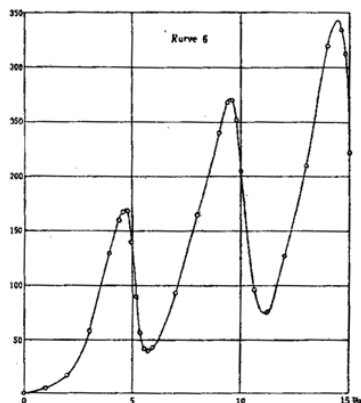
To je *valovni model* atomov (BOHR, DE BROGLIE). Kvalitativno "razloži" stabilnost, identičnost in sevanje atomov. Razlaga ima obliko postulatov, ki so oporečni tako zakonu gibanja kot zakonom električnega polja.



**Slika 41.23** Valovni model atoma. Elektroni so valovni delci. Dovoljene so le tirnice, vzdolž katerih pride celo število valov. (Anon)

Diskretne energije atoma

Da imajo atomi diskretna energijska stanja, jasno kažejo njihovi črtasti sevalni in absorpcijski spektri. Pri absorpcijskih spektrih atomi iz vpadne zvezne svetlobe poberejo le fotone z izbranimi frekvencami/energijami in jih nato spet izsevajo na vse strani. Kaj ko bi atome namesto v curek fotonov postavili v tok elektronov? Poskus opravimo v diodi s parami živega srebra (FRANCK / HERTZ). Počasi večamo napetost in gledamo, kaj se dogaja s tokom. Ta sprva raste, pri napetosti 4,9 V začne močno upadati, doseže minimum in nato začne spet rasti. Vrhovi/minimumi se nato ponavljajo na vsakih 4,9 V. Očitno je kinetična energija 4,9 eV elektronov natanko tolikšna, da jo atomi absorbirajo in preidejo iz osnovnega v prvo vzbujeno stanje, elektroni pa se pri tem zaustavijo. Z večanjem napetosti potem elektroni spet pridobijo dovolj kinetične energije in igra se ponavlja.



**Slika 41.24** Tok elektronov skozi diodo z živosrebrno paro. Napetostna razlika med minimumi toka ustreza energijski razliki med osnovnim in prvim vzbujenim stanjem atomov. (Herz, 1914)

Pri navedenih napetostnih minimumih se v spektru živosrebrne pare pojavijo sevalne črte z dolžino 2537 Å, kar natanko ustreza energijam elektronov. Poskus je sijajna potrditev kvantne narave atomov.

### 41.9 Vodikov atom

Najpreprostejši atom je vodikov. Sestavljen je iz jedra in enega samega elektrona, ki se giblje v njegovi okolici. Poskusimo določiti, kakšna stojna valovanja in energijske nivoje vsebuje!

Kvantizacija vrtilne količine

Elektron se lahko giblje okrog jedra stacionarno le po tistih krožnicah, vzdolž katerih je razmeščeno celo število valovnih dolžin:

$$2\pi r_n = n\lambda, n = 1, 2, 3 \dots \quad (41.10)$$

Upoštevamo  $\lambda = h/mv$  in dobimo zahtevo po kvantizaciji vrtilne količine

$$L = mvr = n\hbar, n = 1, 2, 3 \dots \quad (41.11)$$

$$\hbar = h/2\pi.$$

Možna so torej le gibanja s takšnimi radiji in hitrostmi, da je vrtilna količina pri tem celoštevilčni mnogokratnik kvantne konstante.

Kvantizacija radija krožnic

Pri kroženju deluje električna privlačna sila kot centripetalna sila  $mv^2/r = q^2/r^2$  (1). Hitrost v tej enačbi substituira iz (41.11) in dobimo dovoljene radije tirov (BOHR)

$$r = \frac{\hbar^2}{mq^2} \cdot n^2 = r_B \cdot n^2, n = 1, 2, 3 \dots \quad (41.12)$$

Najmanjši radij pripada osnovnemu stanju in znaša  $r_B = 0,53 \text{ \AA}$ . Vrednost se ujema z redom velikosti atomov ( $1 \text{ \AA}$ ), kakor ga že poznamo. Poznane radije vstavimo v (1) in dobimo ustrezajoče obodne hitrosti:  $v^2 = q^2/mr$ . V osnovnem stanju, ko znaša radij  $r_B$ , izračunamo hitrost

$$\alpha = \frac{v}{c} = \frac{q^2}{\hbar c} = 1/137, \quad (41.13)$$

torej okrog 1 % svetlobne hitrosti. Frekvenca kroženja potem znaša  $v/2\pi r = 6,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ , kar je istega reda velikosti kot frekvenca vidne svetlobe.

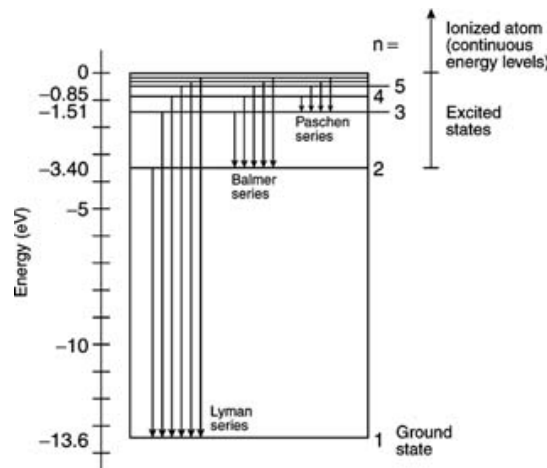
Kvantizacija energije

Energija elektrona na krožnici znaša  $E = K + W = mv^2/2 - q^2/r$ . Iz (1) izrazimo  $mv^2 = q^2/r$ , iz česar sledi  $E = -q^2/2r$ , torej (BOHR)

$$E = -\frac{mq^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = E_R \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (41.14)$$

Zapisana konstanta znaša  $E_R = 13,6 \text{ eV}$ . Energija vodika, ko  $n = \infty$ , je enaka nič. Energija osnovnega nivoja, ko  $n = 1$ , je  $-13,6 \text{ eV}$ .

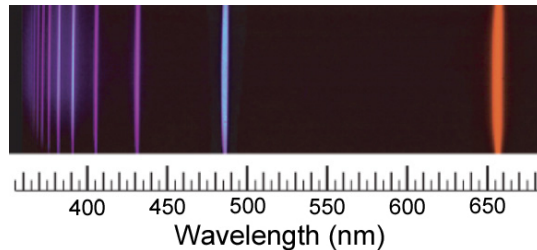
Toliko energije moramo torej dovesti atomu, da ga ioniziramo. Rečemo, da je to *ionizacijska energija* atoma.



**Slika 41.25** Napovedani energijski nivoji vodika. Energija ioniziranega atoma je po definiciji enaka nič. (Anon)

Ujemanje s spektrom

Kako dobro se napovedani energijski nivoji ujemajo z izmerjenim vodikovim spektrom? Za primerjavo so priročni sevalni prehodi na nivo  $n = 2$  iz nivojev 3, 4, 5 in 6, ki vsi ležijo v vidnem območju. Ujemanje je odlično - popolnoma znotraj natančnosti, s katero je določena konstanta  $E_R$  iz  $m$ ,  $q$  in  $\hbar$ . Tudi ujemanje pri drugih prehodih je odlično. Z modelom vodikovega atoma smo - vsaj za zdaj - lahko zelo zadovoljni.



**Slika 41.26** Izmerjene spektralne črte vodika za prehode na nivo 2 iz nivojev 3, 4, 5, 6 itd. (Max Planck Institute)

Vodikovo vidno serijo črt lahko zaradi (41.14) zapišemo z obrazcem (RYDBERG)

$$\nu = R_y \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (41.15)$$

in iz izmerjenih frekvenc oz. valovnih dolžin neposredno določimo konstanto  $R_y = 3,287 \cdot 10^{15}$  Hz. Seveda velja  $E_R = R_y h$ .

#### 41.10 Eliptične tirnice

Planeti se ne gibljejo okoli Sonca le po krožnicah, ampak tudi po elipsah. Dopustimo to tudi za vodikov atom (SOMMERFELD). Kot že vemo iz gibanja planetov [34.13], je velika polos elipse odvisna zgolj od energije, mala pa - pri dani energiji - še od vrtilne količine. To pomeni, da ima elektron enako energijo, če se giblje po krožnici z radijem  $r$  ali po elipsi z glavno polosjo  $a = r$ :

$$E = -\frac{q^2}{2a}. \quad (41.16)$$

Kvantizacija osi Ker je energija kvantizirana, mora biti tudi velika polos elipse enako kvantizirana kot radij:

$$a = r_B \cdot n^2 \quad (41.17)$$

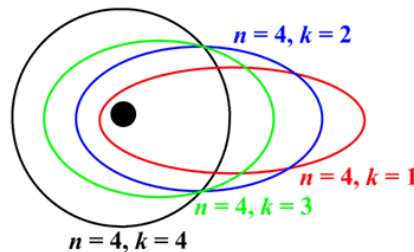
K elipsi s polosjo  $a$  pripada neskončno mnogo elips z različnimi polosmi  $b$ . Po katerih se giblje elektron? V duhu kvantizacije predpostavimo, da so to le tiste z ostro določenimi vrednostmi vrtilne količine:

$$L = l\hbar, \quad l = 1, 2, 3 \dots n. \quad (41.18)$$

Pri gibanju je vrtilna količina konstantna:  $L = mr^2\varphi' = \text{const}$ . Površina, ki jo v časovni enoti prebriše radij vektor, znaša  $(1/2)r^2\varphi' = L/2m$ . V obhodnem času  $T$  prebriše celotno ploščino elipse  $\pi ab$ , torej  $LT/2m = \pi ab$ . V to enačbo vstavimo kvantizirani  $a$  (41.17), kvantizirani  $L$  (41.18) in obhodni čas  $T$ , ki ga dobimo iz obhodnega zakona  $T^2/a^3 = 4\pi^2 m/q^2$ , pa dobimo:

$$b = nr_B = \frac{l}{n} a. \quad (41.19)$$

Orbite in lupine Ko  $n = 1$ , je  $l = 1$  in tir je krožnica. Ko  $n = 2$ , je  $l = 1$  ali  $l = 2$  in možna sta dva tira: krožnica in elipsa. In tako naprej. Krožnico  $n$  in njej pridružene elipse poimenujemo *orbite*, ki sestavljajo *lupino*  $n$ . Vsaka orbita v lupini ima enako energijo, razlikuje pa se po vrtilni količini. Bolj je orbita podobna krožnici, večjo vrtilno količino ima. Stanje vodikovega atoma torej opišemo z dvema kvantnima številoma: *glavnim številom*  $n$  in *orbitalnim številom*  $l$ . Glavno število določa velikost orbite, orbitalno število pa njeno eliptičnost.



**Slika 41.27** Eliptične tirnice. Elektroni se ne gibljejo le po krožnih tirnicah, ampak tudi po elipsah, ki imajo veliko polos enako radiju krožnic. Male polos elips so v celoštevilčnem razmerju z velikimi polosmi. (Anon)

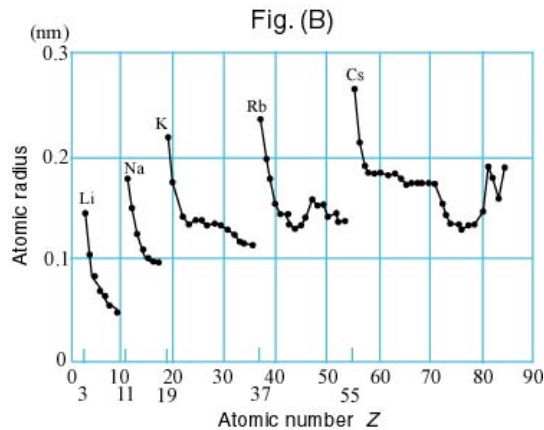
Ker imajo vse orbite v isti lupini enako energijo, so pri sevalnih prehodih med dvema lupinama vsi izsevani fotoni enaki, ne glede na to, med katerimi orbitami se zgodijo. Iz sevalnega spektra torej ne moremo ugotoviti, ali eliptični tiri res obstajajo ali ne.

### 41.11 Večelektronski atomi

**Enoelektronski ioni** Kar smo ugotovili za vodikov atom, velja tudi za vsakršen ion z enim samim elektronom, na primer za helijev ion  $\text{He}^+$  z jedrskim nabojem  $2q$  ali za litijev ion  $\text{Li}^{2+}$  z jedrskim nabojem  $3q$ . Veljajo vse enačbe za vodik, če v njih nadomestimo  $q$  z  $Zq$ . Osnovni in vzbujeni radiji iona tako znašajo  $r = r_B n^2 / Z$  in pripadajoče energije  $E = Z^2 E_R / n^2$ . Helijev ion v osnovnem stanju ima zato dvakrat manjši premer od vodikovega atoma in štirikrat višje spektralne frekvence, litijev pa je trikrat manjši in ima devetkrat povečane frekvence. Spektri vse to potrdijo.

**Večelektronski atomi** Kako je pa z večelektronskimi atomi? Ko golemu jedru dodamo elektrone, se morajo ti nekako umestiti v okolico jedra. Predpostavimo, da se vsak elektron giblje po krožnici s celim številom valov. Obstajajo torej krožnice z 1 valom, 2 valoma itd. Koliko elektronov zasede kakšno krožnico, pa ne vemo. Morda gredo vsi v prvo krožnico, morda vsak na svojo ali pa morda nekaj sem in nekaj tja. Upravičeno se tudi bojimo, da premer krožnic ni določen zgolj z nabojem jedra, ampak tudi s številom in razporeditvijo krožečih elektronov. Porodi se misel, da bi morda kaj več o tem izvedeli, če bi preučili premere atomov, torej radije najvišjih zasedenih krožnic.

**Premeri atomov** Velikost atomov izbranega elementa ocenimo takole. V kilomolski masi  $M$  tega elementa je  $N_A$  atomov z masami po  $m_1$ . En atom elementa v tekoči ali trdni fazi zapolnjuje kockico s stranico  $2r$ , torej prostornino  $(2r)^3$ . Gostota kockice je  $\rho = m_1 / (2r)^3 = (M / N_A) / (2r)^3$ . To je hkrati tudi gostota snovi, zato  $(2r)^3 = M / N_A \rho$ . Vse količine na desni so znane oziroma izmerljive.



**Slika 41.28** Ocenjeni polmeri atomov. Velikost atoma je funkcija njegovega vrstnega števila. Izbrani atomi kažejo skokovito povečanje velikosti glede na svojega predhodnika, kar sugerira namestitev elektrona v višjo krožnico. (Kyushu University)

**Slojevita zgradba atomov** Pogled na izmerke pove naslednje. — Kaže, da elektroni okrog jeder zapolnjujejo več krožnic. — V prvo krožnico gresta največ 2 elektrona, v drugo največ 8, v tretjo največ 8, v četrto največ 18,

v peto največ 18 in preostanek v višje krožnice. — Elektroni zasedajo krožnice po vrsti: v naslednjo gredo, ko je prejšnja popolnoma zasedena. — Radij krožnice  $n$  se manjša z naraščanjem njenega števila elektronov, to je z večanjem jedrskega naboja. — Vsaka naslednja krožnica je ob začetku popolnjevanja večja od prejšnje krožnice ob začetku popolnjevanja. Zakaj so zasedbena števila krožnic takšna, zaenkrat ne vemo. Velikost krožnic pa lahko kvalitativno razložimo takole. Po zgledu vodikovega atoma privzamemo, da znašata radij  $n$ -te krožnice in pripadajoča mu energija

$$r_n = r_B \frac{n^2}{Z-S} \quad (41.20)$$

$$E_n = E_R \frac{(Z-S)^2}{n^2}.$$

Pri tem je  $(Z-S)q$  efektivni naboj jedra, ki ga čuti elektron na tej krožnici. Med jedrom in elektronom so namreč gibljejo elektroni na nižjih krožnicah, ki jedrski naboj zasenčujejo. Koliko, je na splošno težko reči.

Poglejmo nekaj primerov. Za zunanjo krožnico helijevega atoma velja  $n = 1$  in  $Z - S \approx 2 - 0 = 2$ , zato  $r = r_B/2$ . Za zunanjo krožnico litijevega atoma pa velja  $n = 2$  in  $Z - S \approx 3 - 2 = 1$ , zato  $r = 4r_B$ . Obe oceni sta še kar dobri. Očitno je ocena radija krožnice zelo občutljiva na izbiro senčenja  $S$  in to tembolj, čim višja je krožnica. Če nam je kaj do tovrstne zabave, lahko iz izmerjenih radijev celo računamo, kakšna so pripadajoča senčenja.

Notranji elektroni

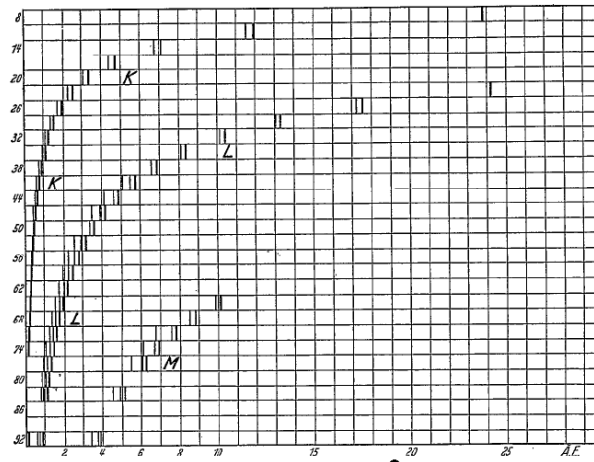
Kaj se zgodi, če s hitrim elektronom izbijemo iz atoma elektron na prvi krožnici, kjer sicer živita dva elektrona? Tole: kakšen elektron iz druge krožnice vskoči v nastalo luknjo. Pri tem izseva foton z ustrezno energijo. Na drugi krožnici je imel elektron energijo  $(Z-1)^2 E_R/2^2$  (preostali elektron na prvi krožnici zasenčuje jedro) in na prvi energijo  $Z^2 E_R/1^2$ . Razlika obeh, deljena s  $h$ , pove, kolikšna je frekvenca izsevanega fotona:

$$\nu = \frac{3}{4} R_y (Z-1)^2. \quad (41.21)$$

Za baker znaša  $Z = 29$ , torej  $\lambda = 1,5 \text{ \AA}$ . To so rentgenski žarki. Kot že vemo, nastajajo ti žarki pri obstreljavanju katode s hitrimi elektroni. Zdaj tudi vemo, kako nastanejo: z izbitjem notranjih elektronov v atomih katodne snovi. Pogled na izmerjeni rentgenski spekter bakra pove, da zapisana frekvenca sovпада z najmočnejšo črto  $K_\alpha$  spektra. Podobno velja za druge elemente.

Enačba (41.20) pravi, da bi morale biti najmočnejše rentgenske črte  $K_\alpha$  v spektrih atomov sorazmerne s kvadrati njihovih vrstnih števil. Meritve to potrdijo (MOSELEY).





**Slika 41.29** Črtni spektri rentgenskih žarkov za različne elemente. Prikazane so tri črte: K, L in M. Vsaka od njih je dvojna ali celo trojna. Velja kvadratna odvisnost med valovno dolžino črt K (pa tudi L in M) ter vrstnim številom. (Moseley, 1914)

Zapisani zakon omogoča, da izmerimo jedrski naboj preučevanega elementa kar iz njegovega rentgenskega spektra.

### 41.12 Magnetni moment

Magnetni moment

Kroženje posamičnega elektrona okrog jedra (v kateremkoli atomu) je pravzaprav električni tok po krožni zanki. Obhodni čas elektrona znaša  $T = 2\pi r/v$  in tok  $I = e/T$ . Zanka s tokom ima potem magnetni moment  $p_m = IS$ . Magnetni moment atomskih delcev bomo odslej označevali z  $\mu$  namesto s  $p_m$ . Iz zapisanih enačb in ob upoštevanju  $mvr = L$  dobimo

$$\mu = \frac{e}{2m} L. \quad (41.22)$$

*Orbitalni magnetni moment* krožečega elektrona je torej sorazmeren z njegovo vrtilno količino. Usmerjen pa je v nasprotno smer, ker ima negativen naboj. Ker je vrtilna količina kvantizirana (41.17), mora tak biti tudi magnetni moment:

$$\mu = l \frac{e}{2m} \hbar = l\mu_B, \quad l = 1, 2, 3 \dots n \quad (41.23)$$

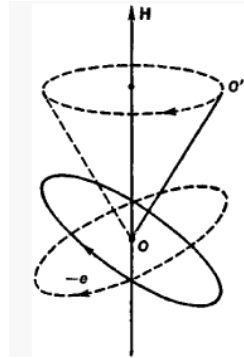
Vpeljali smo *elektronski magneton*  $\mu_B = e/2m = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$ . Vsak elektron v atomu ima zaradi svojega kroženja ustrezen magnetni moment. Njegova velikost je odvisna od tega, po kateri eliptični tirnici pač kroži. Usmerjen pa je pravokotno na ravnino kroženja.

Precesija magnetnega momenta

Elektron na svojem tiru okrog jedra je tudi vrtavka. Če nanj deluje magnetno polje z navorom  $\mathbf{M}$ , precesira okrog smeri polja s kotno hitrostjo  $\mathbf{\Omega}$ . Kakšna je hitrost precesije, smo že spoznali pri gibanju vrtavke:  $\mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}$ . To zapišemo kot  $\mu_B \sin \varphi = \Omega 2m\mu/e$ , iz česar sledi (LARMOR)

$$\Omega = \frac{e}{2m} B. \quad (41.24)$$

Ne glede na to, kako je magnetni dipol nagnjen glede na smer polja, zmeraj rotira z enako kotno hitrostjo. V atomu vodika v polju  $1 \text{ Vs/m}^2$  znaša kotna hitrost precesije  $10^{-11} \text{ Hz}$ .



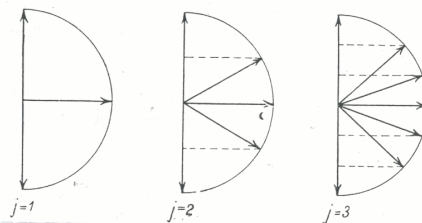
**Slika 41.30** Precesija magnetnega dipola. Kakor precedira vrtavka okoli smeri gravitacijskega polja, tako precedira orbitirajoči elektron okoli smeri magnetnega polja. (Anon)

Smerna kvantizacija

(Rotirajoči) magnetni dipol elektrona ima v zunanjem magnetnem polju  $B$  energijo  $W = -\mu B \cos \varphi$ . Energija je odvisna od kota  $\varphi$ , pod katerim je nagnjen glede na polje. Je ta smer lahko poljubna? Privlačna in drzna je misel, da je tudi smer kvantizirana, to je, da se magnetni dipol nagne le v točno določeno smer. Privzemimo torej, da se krožnica elektrona v zunanjem polju tako orientira, da sta projekcija vrtilne količine in projekcija magnetnega momenta vzdolž polja diskretni (SOMMERFELD):

$$\begin{aligned} L_z &= m_l \hbar \\ \mu_z &= m_l \mu_B \\ m_l &= -l, -l + 1 \dots -1, 0, 1 \dots l - 1, l. \end{aligned} \quad (41.25)$$

Vpeljali smo *magnetno orbitalno število*  $m_l$ , ki opisuje nagib elektronovega krožilnega magnetnega momenta od smeri polja.



**Slika 41.31** Orbitalni magnetni moment elektrona se v magnetnem polju postavi le pod točno določenimi koti glede na polje. (Supek, 1949)

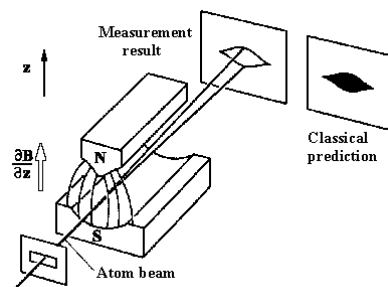
Pričakujemo, da se vrtilne količine vseh krožečih elektronov v stabilnem atomu sestavijo v skupno vrtilno količino. Isto velja za skupni magnetni moment. Privzemimo, da veljata velikostna in smerna kvantizacija tudi za ti dve količini:

$$\begin{aligned} L &= j \hbar \\ \mu &= j \mu_B \\ L_z &= m_j \hbar \\ \mu_z &= m_j \mu_B \\ m_j &= -j, -j + 1 \dots -1, 0, 1 \dots j - 1, j. \end{aligned} \quad (41.26)$$

Kako poteka sestavitev, je zaenkrat odprto vprašanje. To je pač odvisno od števila in velikosti elektronskih krožnic v atomu, njihove zasedenosti, individualnih nagibov, medsebojne sklopitve in morda še česa. Za opis kvantizacije smo vpeljali *vrtilno število  $j$*  in *magnetno vrtilno število  $m_j$* .

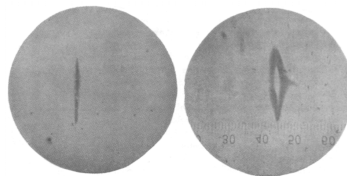
Meritev smerne kvantizacije

Kako bi ugotovili, ali atomski magnetni moment ter njegova velikostna in smerna kvantizacija res obstajajo? Vemo, da v nehomogenem magnetnem polju deluje na magnetne dipole sila v smeri gradienta polja:  $F_z = \mu_z dB/dz$ . Če torej spustimo curek atomov skozi nehomogeno polje, se bodo atomi različno odklonili v smeri polja. Razcep curka na več curkov bi domnevo potrdil. Razteg curka v zvezno črto pa bi jo zavrgel.



**Slika 41.32** Meritev magnetnega momenta v srebrovih atomih. V nehomogenem magnetnem polju se atomi z različnimi komponentami momenta vzdolž polja različno odklonijo. (Anon)

Poskus opravimo s curkom srebrovih atomov. Kapljico staljenega srebra segrevamo v peči in izhlapele atome usmerimo skozi zaslonke. Curek spustimo skozi nehomogeno magnetno polje in opazujemo, kolikšna plast srebra se naloži na steklenem zaslonu. Tam odkrijemo, da se je curek razcepil na dva curka. Domneva o smerni kvantizaciji je torej potrjena! (STERN / GERLACH)



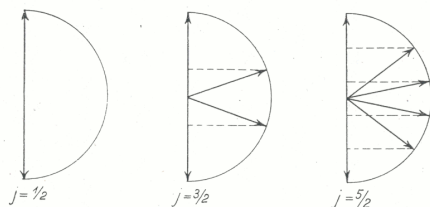
**Slika 41.33** Meritev magnetnega momenta v curku srebrovih atomov. Curek se razcepi v dva curka. Prikazan je rezultat meritev, ki sta ga dobila O. Stern in W. Gerlach. (Stern, 1922)

Meritev je zahtevna. Poskus je treba izvesti v vakuumu. Pri dolžini magnetnega polja nekaj centimetrov in pri gradientu magnetnega polja 10 T/cm znaša razdalja med obema curkoma na priročno oddaljenem zaslonu le nekaj desetink milimetra. Ekspozicijski čas je nekaj ur.

### 41.13 Spin elektrona

Kolikor že smo veseli ob izidu poskusa, pa nas ta tudi preseneti. Pričakovali bi namreč tole. Za  $j = 0$  bi se curek ne smel razcepiti. Za  $j = 1$  bi se moral razcepiti na tri curke  $m_j = [-1, 0, +1]$ , za  $j = 2$  na pet curkov in tako naprej, vedno v liho število curkov. Dobili smo pa dva curka, torej sodo število. Kako naj si to razlagamo?

Spin elektrona Recimo, da atomovo vrtilno število ne bi bilo le celo število, torej  $j = 1, 2, 3 \dots$ , ampak tudi polcelo število, torej  $j = 1/2, 3/2, 5/2 \dots$ . Za  $j = 1/2$ , na primer, bi potem obstajali zgolj dve smerni kvantizaciji  $m_j = [-1/2, +1/2]$ . To pa sta ravno dva curka. Prvi je paralelni, drugi antiparalelni, pravokotnega pa ni.



**Slika 41.34** Smerna kvantizacija polcelih vrtilnih števil. Poseben primer je  $j = 1/2$ , ki ga pripisujemo elektronu. (Supek, 1949)

Od kod pa naj pride polcelo vrtilno število? Saj ima vsaka elektronska krožnica le celoštevilčna orbitalna števila  $l$  oziroma celoštevilčna magnetna orbitalna števila  $m_l$ . Ponuja se drzen odgovor: od elektrona! Ta mora imeti poleg orbitalne še lastno vrtilno količino, *spin*. Stvar je podobna kot pri kroženju planeta okoli Sonca: planet ima vrtilno količino zaradi kroženja, pa še zaradi vrtenja okoli lastne osi. Zato vpeljemo za elektron *spinsko število*  $s$  in *magnetno spinsko število*  $m_s$ . (UHLENBECK / GOUDSMITH)

$$L = s\hbar, \quad s = 1/2 \quad (41.27)$$

$$L_z = m_s \hbar, \quad m_s = -s, +s.$$

Orbitalna ( $l$ ) in spinska ( $s$ ) števila elektronov v atomu se sestavijo v vrtilno število ( $j$ ) atoma. Kako poteka sestavitev pa je, kot smo že rekli, zaenkrat odprto vprašanje.

Spinski magnetni moment

Kako je pa s spinskim magnetnim momentom elektrona? Na prvi pogled bi moral ta biti enak  $\mu_z = (e/2m)L_z = \hbar/2$ . Vendar razcep srebrovega curka kaže, da odklon ustreza momentom  $\hbar$ , ne  $\hbar/2$ . Zato morajo imeti elektroni dvakrat večji spinski magnetni moment, kakor jim ga hočemo pritakniti, torej:

$$\mu_z = 2 \cdot \frac{e}{2m} L_z = \pm \hbar. \quad (41.28)$$

Odrpta vprašanja

Preseneča še dejstvo, da je atomsko vrtilno število srebra tako majhno. Saj je v atomu 47 elektronov. Kje so vrtilne količine posamičnih krožnic in kje so spini vseh elektronov? Očitno se v atomih krožnice in spini postavijo tako, da se med seboj kolikor se le da izničujejo. To ne velja le za srebro, ampak tudi za druge elemente: ne razcepijo se curki  $^2\text{He}$ ,  $^4\text{Be}$ ,  $^{20}\text{Ca}$ ,  $^{30}\text{Zn}$ ,  $^{48}\text{Cd}$ ,  $^{50}\text{Sn}$ ,  $^{80}\text{Hg}$ ,  $^{82}\text{Pb}$ ; v dva curka pa se razcepijo  $^1\text{H}$ ,  $^3\text{Li}$ ,  $^{11}\text{Na}$ ,  $^{19}\text{K}$ ,  $^{29}\text{Cu}$ ,  $^{47}\text{Ag}$ ,  $^{79}\text{Au}$ . Kaže, da se sodo število elektronov med seboj izničuje v  $j = 0$ , pri lihem pa preostane vpliv zunanje orbite in zunanjega elektrona  $j = 1/2$ . Najdejo se pa tudi izjeme:  $^{15}\text{P}$  ima  $j = 3/2$  in  $^{16}\text{O}$  ima  $j = 2$ . Vse to nas navaja na misel, da v vsaki orbiti, ki je opisana s kvantnimi števili  $n$ ,  $l$  in  $m_l$ , lahko krožita največ dva elektrona, vsak s svojim spinom  $\pm 1/2$ . To je *izključitveno načelo*

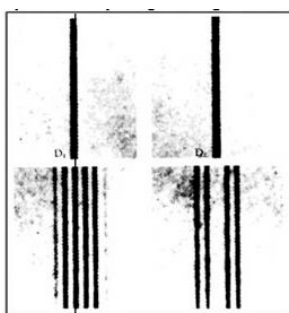
(PAULI). Zdi se celo, da imajo nekatere krožnice lahko  $l = 0$ , kar je v nasprotju z dosedanjim opisom, ko  $l \geq 1$ . Podrobnosti so očitno zamotane in se vanje ne bomo spuščali.

#### 41.14 Struktura črt

Ko opazujemo sevalne spektre atomov s spektrometri visoke ločljivosti, recimo vsaj  $\pm 0,1 \text{ \AA}$ , opazimo, da so črte pravzaprav sestavljene iz več ozkih črt. Komajda katera črta ostane enojna. Povzemimo glavna opažanja o *strukturi črt* in kvalitativne razlage zanje.

Prosti atomi Ko se elektron giblje okoli jedra v električnem polju, vidi relativistično magnetno polje. Elektronov magnetni moment se postavi paralelno ali antiparalelno k temu polju. S tem pridobi magnetno potencialno energijo, ki se prišteje oziroma odšteje k siceršnji energiji (kinetični in električni potencialni). Energijski nivo je zato razcepljen v dvojico nivojev. Ustrezno se razcepijo tudi spektralne črte. Vidne črte v spektru vodika so, na primer, vse razcepljene v dvojice na razdaljah  $0,2 \text{ \AA}$ .

Atomi v magnetnem polju Ko sevajoče atome postavimo v zunanje magnetno polje, se jim spektralne črte razcepijo, nekatere na tri, druge na več črt (ZEEMAN). Razlog je podoben kot pri razcepitvi črt v notranjem magnetnem polju. Orbitalni in spinski magnetni momenti elektronov se usmerjajo vzdolž polja in s svojimi magnetnimi potencialnimi energijami doprinašajo k razcepitvi energijskih nivojev. Razcep v tri črte je simetričen in ekvidistanten. Tako se, na primer, razcepi vodikova rdeča črta  $H_{\alpha}$ . Razdalja med črtami je sorazmerna z jakostjo polja in ima red velikosti  $0,2 \text{ \AA/T}$ . Razcep v več črt je bolj zamotan.



**Slika 41.35** Razcep natrijevih črt  $D_1$  in  $D_2$  v magnetnem polju. (Zeeman, 1897)

Trojni razcep izbrane črte spektra izkoristimo za merjenje magnetnih polj na Soncu in zvezdah. Na Soncu tako izmerimo največje jakosti magnetnega polja v pegah, in sicer do  $0,4 \text{ T}$ .

Atomi v električnem polju Tudi zunanje električno polje povzroči razcep spektralnih črt (STARK), na primer v vodikovem spektru. Polje namreč raztegne atom v električni dipol. Različne elipse v isti lupini raztegne različno. Tako nimajo več vse enakih energij, ampak se energijsko rahlo razlikujejo. Da opazimo razcep, so potrebna močna električna polja do  $10^5 \text{ V/cm}$ . □



## 42 Valovna mehanika

Valovni delci – Makroskopski hodci – Ansambli in valovne funkcije – Ravni valovi in valovni paketi – Razmazanost gibanja – Kvantni gibalni zakon – Lastne funkcije energije – Sipanje na potencialni oviri – Gibanje v potencialni jami – Harmonični oscilator – Enoelektronski atom – Vrtilna količina – Večelektronski atomi

### 42.1 Valovni delci

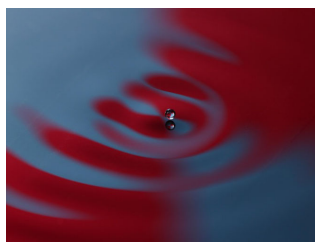
Videli smo, da se fotoni in elektroni pri nekaterih poskusih vedejo kot delci in pri drugih kot valovi. Kako si naj to razlagamo? So to delci ali valovi? Ali morda oboje hkrati? In kakšni so potem opisi in zakoni njihovega gibanja?

Pilotski val Privlačna je misel, da so fotoni in elektroni hkrati delci in valovi. Morda je vsak elektron delec, obdan z nekakšnim stojnim valom. Predstavljamo si lahko, da morda elektron niha in "trese" prostor okoli sebe, to je svoje ozadje, in v njem ustvarja svoj *pilotski val*. Ta val potem vpliva nazaj na gibanje elektrona. Elektron in njegov pilotski val sta nerazdružljiva celota – *valovni delec*. Ko prileti elektron na oviro, recimo na dve reži v zaslonu, gre pilotski val skozi obe reži, pri tem interferira sam s seboj in nastali interferenčni val usmeri elektron skozi eno izmed rež. Nato oba nadaljujeta pot do zaslona. Tako se dogaja z vsemi elektroni, ki vpadejo na oviro. Vendar se vsak ukloni drugače in na zaslonu naredi drugo piko. Vsi elektroni skupaj pa zgradijo celotno interferenčno sliko. Podobno velja tudi za druge delce – masne in brezmasne.

### 42.2 Makroskopski hodci

Gladinski hodci Morda lahko nihajoče delce in njihove pilotske valove poustvarimo z makroskopskimi telesi? V plitvo posodo nalijemo silikonsko olje in posodo tresemo v navpični smeri s takšno frekvenco, da se na gladini pojavijo prvi kapilarni valovi. Potem frekvenco rahlo znižamo, da valovi izginejo, in na gladino previdno spustimo milimetersko kapljico olja. Kapljica začne skakati po gladini kot človek po trampolinu: zaradi tanke plasti zraka med kapljico in oljem pa se med seboj ne združita. Pri primerni frekvenci pride kapljica v resonanco z gladino: tedaj se okoli nje pojavi stojni val. Kapljica jezdi na svojem valu. Kapljica in njen val tvorita pri tem nerazdružljivo celoto; rečemo, da je to *valovni hodec* (COUDER).

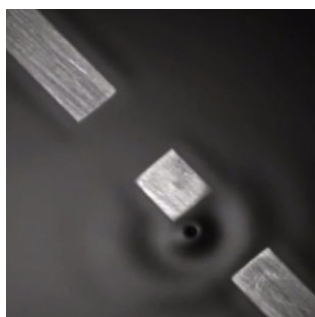
Nemoteno gibanje Valovni hodec niha na tistem mestu v kadi, kamor smo kapljico spustili. Ko pa ga rahlo potisnemo v izbrano smer, se giblje tja premo in enakomerno. Delec in val, oba se gibljeta sinhronizirano.



**Slika 42.1** Gladinski hodec. To je milimetrski kapljica olja na navpično nihajoči oljni gladini. Okoli kapljice se izoblikuje stojni val. Kapljica in val se združno gibljeta premo in nekomerno. (Bush, 2015)

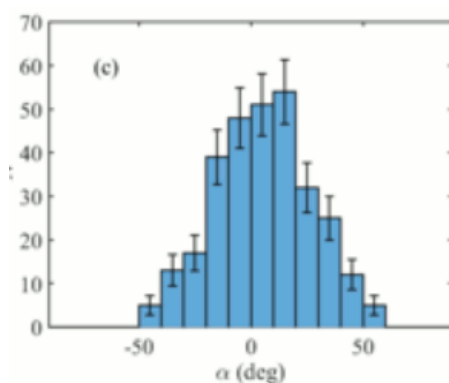
Sipanje na oviri

Postavimo na hodčevo pot oviro z dvema režama! Hodec vpadne na oviro, njegov pilotski val gre skozi obe reži, interferira sam s sabo, potegne kapljico skozi eno režo in jo nato usmeri v določeno smer. Hodec je s tem zarisal svoj tir.



**Slika 42.2** Vpad hodca na oviro z dvema režama. (Couder, 2006)

Zaporedni hodci, ki jih vse spustimo iz istega mesta z enako hitrostjo, po prehodu ovire zavijejo v različne smeri. To pa zato, ker drobne razlike v začetnih pogojih in s tem drobne razlike pri vpadu na oviro kritično vplivajo na prehod. Poglejmo porazdelitev velikega števila uklonjenih tirov po smeri! Potihoma pričakujemo, da bo podobna, kot če bi na reži vpadalo ravno valovanje z valovno dolžino pilotskega vala. Žal izrazitih maksimumov in minimumov ne uspemo poustvariti.

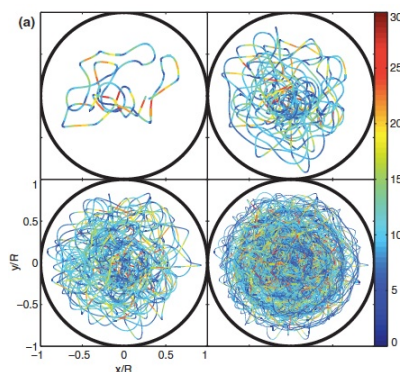


**Slika 42.3** Smerna porazdelitev uklonjenih tirov za dvojno režo. Zarisala jo je množica 301 enakih hodcev. Interferenčnih maksimumov in minimumov (žal) ne uspe poustvariti. (Andersen, 2015)

Vezano gibanje

Dajmo hodca v krožno ogrado in vrtimo nihajočo posodo okoli navpične osi! Tir hodca se zdi sprva kaotičen. Sčasoma pa začne pilotski val interferirati s svojo brazdo in časovno povprečje tira pokaže izrazite krožne maksimume. To je statistična porazdelitev hodčevih lokacij po prostoru. Ima obliko osno simetričnih stojnih valov. Razlika med statističnim stojnim "valovanjem" in pilotskim valom hodca je očitna.





**Slika 42.4** Hodčev tir v krožni ogradi za različna trajanja. Po dolgem času se pokažejo koncentrični krogi, kjer se je hodec največ zadrževal. To je statistični stojni "val", ki opisuje "razpršenost" hodčeve lege po prostoru. (Harris, 2013)

Rušenje tirov

Valovni hodci nudijo nazorno sliko o tem, kako se utegnejo gibati elektroni. Seveda slika ni popolna: hodci se gibljejo v dveh dimenzijah in njihov pilotni val je vtisnjen v okolišnjo tekočino. Elektroni se gibljejo v treh dimenzijah in sredstvo, v katero je vtisnjen njihov pilotni val, je "prostor". Pri hodcih je izvor tresenja v ozadju, pri elektronih pa v njih samih. Glavna razlika med obojima pa je naslednja. Hodce lahko gledamo s svetlobo, ki jo odbijajo, in jih pri tem nič ne motimo. Elektrone pa lahko gledamo, v principu, le preko "otipavanja" s fotoni (ali drugimi delci) in pri tem bolj ali manj močno ter nepredvidljivo spremenimo njihovo hitrost. Tir, ki ga opazujemo, s tem razrušimo. Kljub temu pa bomo sliko obdržali kot vodnico v nadaljnje raziskave. Če se bo pokazala za nepravilno, jo bomo pač spremenili ali zavrgli.

### 42.3 Ansambli in valovne funkcije

Delci in ansambli

Kam na zaslon bo izsevani elektron po preletu kristala priletel, tega vnaprej ne vemo. Zadelek je kritično odvisen od začetnih pogojev elektrona in od motenj, ki jih ta doživi vzdolž svojega tira. Vemo pa, da množica izsevanih "enakih" elektronov na zaslonu nariše določen vzorec. Očitno je nepredvidljivo gibanje posamičnih elektronov vendarle takšno, da se v množični ponovitvi pokorava določenim zakonitostim.

Namesto da preučujemo enkratno gibanje posamičnega elektrona, kar je verjetno brezupno početje, raje preučujmo mnogokratno ponovitev tega gibanja pod istimi pogoji. Idealno bi to pomenilo, da en in isti elektron znova in znova spravljamo v isto začetno stanje (izhod iz topa) in vsakokrat izmerimo, kam na zaslon vpade. V praksi tega seveda ne moremo narediti. Zato namesto enega elektrona pripravimo množico elektronov v kolikor se da enakem stanju in delamo poskuse z njimi. Namesto s posamičnim elektronom - v gibanju iz topa proti zaslonu - se bomo torej ukvarjali z *ansamblom* takih elektronov/gibanj. Namesto o tiru posamičnega elektrona  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  pa bomo govorili o njegovi verjetnostni porazdelitvi po prostoru

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{dP}{dV}. \quad (42.1)$$

Verjetnost lege fotonov Ko govorimo o verjetnostni porazdelitvi elektrona v prostoru, se spomnimo na tole. V elektromagnetnem valovanju je gostota energijskega toka sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti:  $j \propto |E|^2$ . To pomeni, da je tudi pogostost/verjetnost, da v okolici kakšne točke zaznamo foton, sorazmerna s kvadratom električne poljske jakostji:  $dP/dV \propto |E|^2$ . Predstavljamo si lahko, da so elektromagnetni valovi nekakšno "pomožno ogrodje", ki opisuje gibanje ansambla fotonov: kjer je polje močnejše, se pojavlja več fotonov, kjer je šibkejše, pa manj.

Verjetnost lege elektronov Kaj ne moremo elektronov obravnavati podobno? Postulirajmo "pomožno ogrodje" za gibanje ansambla elektronov po prostoru – kompleksno polje  $\Psi(\mathbf{r},t)$  – in zahtevajmo: verjetnost  $dP$ , da se elektron znajde znotraj prostorninskega elementa  $dV$ , znaša (BORN)

$$\frac{dP}{dV} = |\Psi|^2. \quad (42.2)$$

Polje  $\Psi(\mathbf{r},t)$  poimenujemo *valovna funkcija* ansambla elektronov. Zaradi kratkosti bomo večinoma rekli kar valovna funkcija elektrona. Pri tem se bomo zmeraj zavedali, da je to zgolj jezikovna olajšava in da se valovna funkcija nanaša na ansambel in ne na individualni delec. Namesto valovna funkcija bomo občasno rekli tudi *amplituda stanja* ali kar *stanje*. Verjetnostna definicija zahteva, da je valovna funkcija normirana:

$$\int |\Psi|^2 dV = 1. \quad (42.3)$$

Verjetnost, da elektron najdemo kjerkoli, je pač enaka ena. S tem smo privzeli, da elektroni ne morejo nastati in izginiti.

#### 42.4 Ravni valovi in valovni paketi

Ravni valovi Najpreprostejše je gibanje elektronov, ki posamič izletajo iz elektronskega topa in nemoteno vpadajo na oddaljeni zaslon. Kdaj kakšen elektron izleti iz topa, tega ne vemo. Vemo pa, da ima kinetično energijo  $K = eU$ . S tem sta določeni njegova gibalna količina  $G = \sqrt{2mK}$  in hitrost  $v = G/m$ . Prelet poteka po prostoru, kjer ni električnega polja, zato je tam potencialna energija elektrona enaka nič in njegova mehanska energija  $E$  je kar enaka kinetični energiji. Gibanje ansambla elektronov med topom in zaslonom opišemo formalno z ravnim valom

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}. \quad (42.4)$$

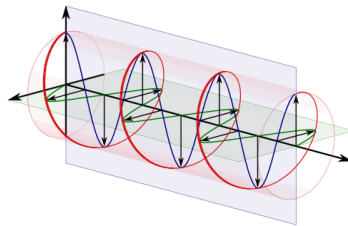
Z upoštevanjem znanih povezav

$$\begin{aligned} G &= h/\lambda = \hbar k \\ E &= h\nu = \hbar\omega \end{aligned} \quad (42.5)$$

dobimo

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(Gx - Et)/\hbar}. \quad (42.6)$$

To je torej valovna funkcija ansambla prostih elektronov z gibalno količino  $G$ , pri čemer  $E = G^2/2m$ . Verjetnostna gostota znaša  $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi = A^2$  in je neodvisna od časa in kraja, kakor tudi mora biti: kadarkoli in kjerkoli v curek postavimo primeren merilnik, zmeraj zaznamo približno enako število elektronov na časovno enoto. Ker je verjetnostna gostota konstantna vzdolž celotne osi  $x$ , valovne funkcije ne moremo normirati. Zato opisuje zgolj relativne verjetnosti in ne absolutnih.



**Slika 42.5** Valovna funkcija ansambla prostih delcev. To je kompleksna vijačnica. S časom se togo pomika vzdolž svoje osi. (Anon)

Valovni paketi

Ravni val opisuje elektrone z ostro določeno gibalno količino in s popolnoma nedoločeno lego. Vemo pa, da s superpozicijo ravnih valov različnih valovnih dolžin lahko zgradimo najrazličnejše funkcije [28.9]. Poljubno valovno funkcijo ob času  $t = 0$ , recimo ji *valovni paket*, torej lahko zapišemo kot

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A(k)e^{ikx} dk. \quad (42.7)$$

Oblika paketa  $\Psi(x)$  je odvisna od tega, kakšne uteži  $A(k)$  izberemo. Če želimo sestaviti točno določen paket, moramo izbrati, kot že vemo, točno določene uteži

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(x)e^{-ikx} dx. \quad (42.8)$$

Kakšen pa je stvarni pomen paketa  $\Psi(x)$ ? Slejkoprej pomeni njegov kvadrat verjetnostno gostoto  $dP/dx = |\Psi|^2$ : na intervalu  $x \pm dx/2$  znotraj paketa naštejemo delež  $dP$  ansambelskih elektronov. V paketu pa se ne skrivajo elektroni z enotno gibalno količino  $k$ , marveč elektroni, ki imajo različne vrednosti  $k$ : eni imajo takšno, drugi drugačno. Simetrija enačb vsiljuje zaključek

$$\frac{dP}{dk} = |A|^2. \quad (42.9)$$

Tudi verjetnostna porazdelitev gibalne količine mora biti normirana:

$$\int |A|^2 dk = 1. \quad (42.10)$$

Valovni paket  $\Psi(x)$  in njegov spekter  $A(k)$  sta torej medsebojni harmonični transformiranki. Kot že vemo, velja za taki dve

funkciji povezava  $\int |\Psi|^2 dx = \int |A|^2 dk$ . Če upoštevamo normiranost obeh funkcij, je to pač očitno:  $1 = 1$ .

Razpršenost lege in hitrosti

Če imamo torej opravka s paketom  $\Psi(x)$  in želimo vedeti, kakšne so gibalne količine elektronov v njem, izračunamo najprej spekter  $A(k)$  kot harmonično transformacijo  $\Psi(x)$  in ga nato kvadriramo. Različni paketi očitno vsebujejo različne razpore gibalnih količin. Elektroni v takem paketu torej niso "razmazani" zgolj po prostoru, ampak so "razmazani" tudi po hitrosti. Seveda to ne pomeni, da je kak individualni elektron ob istem času na različnih mestih oziroma da ima ob istem času različne hitrosti, ampak naslednje. Če v ansamblu elektronov določimo lego – bolj v mislih kot zares –, zaznamo nekatere tu, druge drugje v paketu; in če jim določimo hitrost – spet bolj v mislih kot zares –, se pokaže pri enih taka, pri drugih drugačna. Kakšno lego in kakšno hitrost elektrona bomo izmerili v posamičnem primeru, vnaprej ne moremo napovedati. Izračunamo lahko le verjetnosti za izmerke.

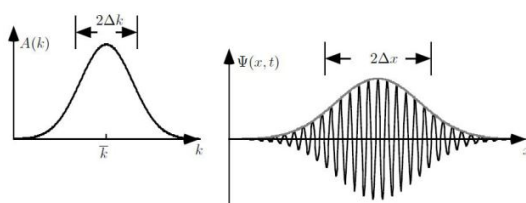
### 42.5 Razmazanost gibanja

Standardni valovni paket

Pa izberimo primeren razpis gibalnih količin  $A(k)$  in pogledjmo, kakšen je ustrezni valovni paket  $\Psi(x)$ ! Priročna izbira je standardni razpis  $A(k) \propto \exp -(k - k_0)^2/4\sigma_k^2$ . Njegova harmonična transformacija je  $\Psi(x) \propto \exp ik_0x \cdot \exp -x^2\sigma_k^2$ . Če zapišemo  $\sigma_k^2 = 1/4\sigma_x^2$ , vidimo, da smo dobili standardno moduliran ravni val. Disperzija gibalne količine in disperzija lege sta med seboj povezani:

$$\sigma_x \sigma_k = 1/2. \quad (42.11)$$

Čim širši je valovni paket, tem ožji razpon hitrosti najdemo v njem. V neskončnem ravnem valu je hitrost enovita, kakor tudi mora biti.



**Slika 42.6** Valovni paket  $\Psi(x)$  s standardnim spektrom  $A(k)$ . Prikazana je le realna komponenta paketa. (Anon)

Standardni paket vsebuje ravne valove z različnimi valovnimi vektorji, ki pripadajo različnim hitrostim elektronov:  $\exp i(kx - \omega t) = \exp ik(x - \omega t/k)$ ,  $\omega/k = G/2m = v$ . Zato se ti ravni valovi tudi različno hitro gibljejo. Standardni paket se zato giblje, hkrati pa se mu tudi spreminja oblika. Pričakujemo, da se njegova prostorska disperzija veča, zaradi normiranosti pa se mu vrh

niža. Hitrejši ansambelski elektroni pač bežijo naprej, počasnejši pa zaostajajo.

Poljubni valovni paket

Kaj pa valovni paketi drugačnih oblik? Tudi oni imajo disperzijo lege in gibalne količine:

$$\begin{aligned}\Delta x^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ \Delta G^2 &= \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2,\end{aligned}\quad (42.12)$$

pri čemer je  $\langle F(x) \rangle = \int F(x) |\Psi(x)|^2 dx$  in  $\langle F(G) \rangle = \int F(G) |A(G)|^2 dG$ . Brez izgube splošnosti privzamemo, da sta povprečji  $\langle x \rangle$  in  $\langle G \rangle$  enaki nič, kar dosežemo s primernim zamikom koordinat. Tako dobimo  $\Delta x^2 = \int x^2 |\Psi(x)|^2 dx$  in  $\Delta G^2 = \int G^2 |A(G)|^2 dG$ . — Uvedemo okrajšavi  $f(x) = x\Psi(x)$  in  $g(G) = GA(G)$ . Potem velja  $\Delta x^2 = \int |f(x)|^2 dx$  in  $\Delta G^2 = \int |g(G)|^2 dG$ . — K funkciji  $g(G)$  uvedemo obratno harmonično transformiranko  $h(x) = (1/\sqrt{2\pi\hbar}) \int g(G) \exp(iGx/\hbar) dG$ . Integracija po delih da  $h(x) = -i\hbar d/dx \Psi(x)$ . — Po energijskem izreku velja  $\int |g(G)|^2 dG = \int |h(x)|^2 dx$ , zato  $\Delta G^2 = \int |h(x)|^2 dx$ . — Za poljubni kompleksni funkciji  $f$  in  $h$  velja (kakor se prepričamo posebej) "trikotniška neenakost"  $\int f^* f dx \cdot \int h^* h dx \geq |\int f^* h dx|^2$ . Označimo  $z = \int f^* h dx$  in  $z^* = \int h^* f dx$ . Ker  $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 \geq \text{Im}(z)^2 = ((z - z^*)/2i)^2$ , lahko zapišemo  $|\int f^* h dx|^2 \geq ((\int f^* g dx - \int g^* f dx)/2i)^2$ . — Z nekaj truda izračunamo  $\int f^* g dx - \int g^* f dx = i\hbar$ . Nato zložimo skupaj vse delne rezultate in dobimo  $\Delta x^2 \Delta G^2 \geq (i\hbar/2i)^2$  oziroma (HEISENBERG)

$$\Delta x \Delta G \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (42.13)$$

Produkt razpršenosti lege in gibalne količine je za vsak paket večji od  $\hbar/2$ . Posebej je odlikovan normalni paket, pri katerem je produkt razpršenosti najmanjši. Pri tridimenzionalnih paketih velja zapisana *relacija razpršenosti* za vsako smer in ustrezno komponento gibalne količine posebej.

Atom kot valovni paket

Elektronski paket v vodikovem atomu ima razpršenost lege in razpršenost gibalne količine. Privzemimo, da je radij atoma večji od razpršenosti lege:  $r \geq \Delta x$  (1) in da je gibalna količina elektrona večja od svoje razpršenosti:  $G \geq \Delta G = \hbar/2r$  (2). Energija atoma znaša  $E = G^2/2m - q^2/r$  (3). Iz (2) izrazimo radij  $r = \hbar/G$  (4), ga vstavimo v (3) in dobimo  $E = G^2/2m - q^2 G/\hbar$  (5). Poiščemo minimum te energije, torej rešitev enačbe  $dE/dG = 0$ , in dobimo  $G = q^2 m/\hbar$ . Vstavitev v (4) in (5) da polmer in ionizacijsko energijo vodikovega atoma:

$$\begin{aligned}r &= \frac{\hbar^2}{mq^2} \\ E &= -\frac{mq^4}{2\hbar^2}\end{aligned}\quad (42.14)$$

Rezultat je točno tak kot pri planetarnem modelu atoma [41.9], to je  $0,53 \text{ \AA}$  in  $-13,6 \text{ eV}$ .

## 42.6 Kvantni gibalni zakon

Kakor elektromagnetni valovi zadoščajo klasični valovni enačbi, tako pričakujemo, da tudi valovne funkcije ansambla elektronov – prostih ali v polju sil – zadoščajo neki kvantni valovni enačbi. Poiščimo jo!

Gibanje prostega delca

Najpreprostejše je gibanje prostega delca vzdolž osi  $x$ . Kakršnokoli že je to gibanje, k energiji delca prispeva zgolj njegova kinetična energija:  $E = G^2/2m$ . Enačbo pomnožimo s poljubno valovno funkcijo:  $E \cdot \Psi(x,t) = G^2/2m \cdot \Psi(x,t)$ . Če je ta funkcija ravni val  $\Psi = \exp i(Gx - Et)/\hbar$ , potem vidimo  $E \cdot \Psi = i\hbar \partial\Psi/\partial t$  in  $G^2/2m \cdot \Psi = -\hbar^2/2m \partial^2\Psi/\partial x^2$ , torej:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \quad (42.15)$$

Zapisana enačba zagotovo velja za kakršenkoli ravni val. Velja pa tudi za vsoto dveh ali več ravnih valov, na primer  $a\Psi_1 + b\Psi_2$ , v kar se prepričamo z neposredno substitucijo. To pomeni, da velja tudi za poljuben valovni paket, saj je ta sestavljen iz samih ravnih valov. Zato lahko zadevo obrnemo in rečemo: tule je enačba, ki opisuje gibanje valovnih paketov; če poznamo valovni paket ob nekem času, enačba napoveduje njegovo prihodnost. Posplošitev na tri dimenzije je preprosta:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi. \quad (42.16)$$

Gibanje delca v polju sile

Gibanje prostega delca ni preveč zanimivo. Mnogo pomembnejše je gibanje delca v polju sil, zlasti v elektrostatičnem polju znotraj atomov. Energija delca v takem polju je vsota njegove kinetične in potencialne energije:  $E = G^2/2m + W$ . Na podoben način kot pri prostem delcu dobimo

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + W(x)\Psi \quad (42.17)$$

oziroma v treh dimenzijah (SCHRÖDINGER)

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi + W(\mathbf{r})\Psi. \quad (42.18)$$

To je iskani *kvantni gibalni zakon* za ansambel delcev v potencialnem polju, recimo za elektrone v množici vodikovih atomov. Opisuje, kako se začetni valovni paket ansambla spreminja s časom. Zakona nismo (deduktivno) izpeljali iz kakšnih postulatov, ampak smo ga (induktivno) postavili z bolj ali manj upravičenim posploševanjem delnih spoznanj. Drugače tudi ne gre: osnovnih zakonov pač ne moremo izpeljati iz ničesar; če bi

jih lahko, bi prenehali biti osnovni zakoni. Ali je pravkar postavljeni zakon pravilen ali ne, pa bomo sodili na podlagi njegovih napovedi oziroma posledic.

Tok verjetnosti Ko se valovni paket giblje ali deformira, se v točkah prostora spreminja tamkajšnja verjetnostna gostota. Sprememba gostote znaša  $\partial\rho/\partial t = \partial/\partial t (\Psi^*\Psi) = \Psi^{*'}\Psi + \Psi^*\Psi'$ . Časovni odvod  $\Psi'$  izrazimo iz gibalne enačbe in časovni odvod  $\Psi^{*'}$  iz konjugirane gibalne enačbe (zamenjamo  $\Psi \rightarrow \Psi^*$  ter  $i \rightarrow -i$ ), pa dobimo  $\partial\rho/\partial t = (\hbar/2mi) (\nabla^2\Psi^*\Psi - \Psi^*\nabla^2\Psi)$ . Izraz v oklepaju zapišemo kot  $\nabla \cdot (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)$ . Lokalna sprememba gostote je torej enaka divergenci gostote toka

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (42.19)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*).$$

To je kontinuitetna enačba za verjetnost. Integracija po prostornini pove  $\int \partial\rho/\partial t dV = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV$ . Leva stran je enaka  $d/dt \int \rho dV$  in desna  $\int \mathbf{j} d\mathbf{S}$ . Z besedami: pretok verjetnosti skozi zaprto ploskev je enak spremembi zaobjete verjetnosti. Tako tudi mora biti, saj elektroni ne nastajajo in ne izginjajo. Posebej za ravni val dobimo  $\rho = |A|^2$  in  $j = |A|^2 G/m$ , iz česar sledi  $j = \rho v$ . Verjetnostna gostota in gostota verjetnostnega toka sta povezani na enak način kot številčna gostota in gostota številčnega toka. To seveda ni nič čudnega, saj smo verjetnost lege posamičnega delca pravzaprav definirali kot številčno gostoto v ansamblu delcev.

## 42.7 Lastne funkcije energije

Stacionarna stanja Poizkusimo poiskati pakete/stanja, v katerih je verjetnostna gostota neodvisna od časa. Tedaj mora imeti valovna funkcija obliko

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\omega t}, \quad (42.20)$$

saj je  $|\exp(-i\omega t)|^2 = 1$ . Takim stanjem rečemo *stacionarna stanja*. Ker je njihova frekvenca ostro določena, je takšna tudi njihova energija  $E = \hbar\omega$ . Zapisano valovno funkcijo vstavimo v kvantni gibalni zakon (42.17) in dobimo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + [W(x) - E]\psi = 0 \quad (42.21)$$

oziroma v treh dimenzijah (SCHRÖDINGER)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + [W(\mathbf{r}) - E]\psi = 0. \quad (42.22)$$

To je *stacionarna valovna enačba*. V njej nastopa poleg neznane valovne funkcije tudi neznana energija. Enačba določa, kakšne so stacionarna stanja ansambla delcev v predpisanem potencialu.

Ni vsaka valovna funkcija, ki zadošča stacionarni valovni enačbi, že kar sprejemljiva. Njen verjetnostni pomen zahteva, da mora biti enolična, omejena in kvadratno integrabilna. Nadalje je prvi odvod funkcije povezan z gibalno količino in drugi s kinetično energijo, ki morata biti obe enolični in končni, zato mora biti funkcija še gladka, to je, ne sme imeti skokov ali lomov.

Lastne funkcije  
energije

Prosti elektroni v curku imajo lahko kakršnokoli energijo. Za elektrone, zaprte v atomih, pa vemo, da imajo le diskretne vrednosti energije. To nas navaja na naslednjo domnevo. Stacionarna valovna enačba za vezani delec v danem potencialu  $W(x)$  je podvržena tako zahtevnim robnim pogojem, da ji zadoščajo le izbrane energije  $E_n$  in njim ustrezajoče izbrane valovne funkcije  $\psi_n(x)$ . Poimenujemo jih *lastne energije* in *lastne funkcije energije*. Drugačnemu potencialu pa ustreza drug nabor lastnih energij in lastnih funkcij. Vezani elektron je torej lahko v tem ali onem *čistem stanju*

$$\Psi(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (42.23)$$

ali pa v kakršnikoli linearni kombinaciji dveh ali več čistih stanj, to je v *mešanem stanju*:

$$\Psi(x,t) = \sum c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (42.24)$$

Čisto stanje si razlagamo tako, da je vsak ansambelski elektron v istem stanju, na primer  $\psi_1$ , in ima isto energijo, namreč  $E_1$ . Pod mešanim stanjem pa razumemo, da je, na primer, nekaj ansambelskih elektronov v stanju  $\psi_1$  z energijo  $E_1$  in nekaj v stanju  $\psi_2$  z energijo  $E_2$ . Kakor torej posamičen elektron ni hkrati na dveh mestih in nima hkrati dveh hitrosti, tako tudi nima hkrati dveh energij. Če bi ansambel lahko sestavili iz zaporednih meritev istega elektrona v enakem mešanem stanju, bi dobili zdaj tako, drugič drugačno čisto stanje/energijo. Mešano stanje tudi ni več stacionarno, saj posamezne funkcije  $\psi_n(x)$  ne nihajo sinhrono. Verjetnostna gostota se zato s časom spreminja – ansambelski paket se deformira oziroma giblje.

Izračunajmo še gostoto verjetnosti za mešano stanje. Ta znaša  $\Psi^* \Psi = (\sum c_n^* \exp(iE_n t/\hbar) \psi_n^*) \cdot (\sum c_m \exp(-iE_m t/\hbar) \psi_m)$ , kar uredimo v

$$\Psi^* \Psi = \sum_n \sum_m c_n^* c_m e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar} \psi_n^* \psi_m. \quad (42.25)$$

Verjetnostna gostota paketa torej niha s frekvencami, ki so podane z razlikami energij  $E_m - E_n$  med čistimi stanji. Nazorno si predstavljamo, da je z verjetnostno gostoto elektrona v atomu opisana tudi njegova gostota naboja. Potem vidimo: kakor niha



gostota naboja, tako niha tudi izsevana svetloba. Črtasti sevalni spektri naravno sledijo iz energijskih stanj paketa.

Ortogonalnost lastnih funkcij

Dobro bi bilo še raziskati, kakšni so produkti lastnih funkcij  $\psi_n^* \psi_m$ . Za začetek naj bosta izbrani funkciji  $\psi_n$  in  $\psi_m$  realni. Vemo, da zadoščata isti stacionarni valovni enačbi  $-\hbar^2/2m \nabla^2 \psi_n + W\psi_n = E_n \psi_n$  in  $-\hbar^2/2m \nabla^2 \psi_m + W\psi_m = E_m \psi_m$ . Prvo enačbo pomnožimo s  $\psi_m$  in drugo s  $\psi_n$ , potem drugo enačbo odštejemo od prve in dobljeno razliko integriramo po vsem prostoru:  $-\hbar^2/2m \int (\psi_m \nabla^2 \psi_n - \psi_n \nabla^2 \psi_m) dV = (E_n - E_m) \int \psi_m \psi_n dV$ . Levi integrand spremenimo v divergenco  $\nabla \cdot (\psi_m \nabla \psi_n - \psi_n \nabla \psi_m)$ . Prostorninski integral divergence lahko spremenimo v integral po objemajoči ploskvi. Na tej ploskvi, če je zelo daleč, pa so valovne funkcije enake nič, s tem pa postane nič tudi integral. Sledi, da je tudi desna stran enačbe enaka nič. Ker je  $E_n$  različen od  $E_m$ , mora veljati  $\int \psi_m \psi_n dV = 0$ , če  $n \neq m$ . Rečemo, da sta funkciji *ortogonalni*. Na podoben način pokažemo, da ortogonalnost velja tudi za kompleksne funkcije, pri čemer

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = 0, \text{ če } n \neq m. \quad (42.26)$$

Če torej zapisano gostoto  $\Psi^* \Psi$  integriramo po vsem prostoru, so integrali  $\psi_n^* \psi_m$  različni od nič samo takrat, ko  $n = m$ . Zaradi normiranosti je vsak enak ena. Tako ugotovimo

$$\sum |c_n|^2 = 1. \quad (42.27)$$

Verjetnosti se seštevajo. Zato je verjetnost, da paketu izmerimo energijo  $E_n$ , enaka

$$P(E_n) = |c_n|^2, \quad (42.28)$$

povprečje vseh različnih izmerkov pa znaša  $\langle E \rangle = \sum |c_n|^2 E_n$ .

Razvoj po lastnih funkcijah

Sestavljanje ortogonalnih lastnih funkcij energije v mešano stanje spominja na sestavljanje harmoničnih valov v njihovo superpozicijo. Takoj se porodi misel, da je možno tudi obratno: morda lahko kakršnokoli stanje  $\Psi(x,0)$  razvijemo v uteženo vsoto ortogonalnih lastnih funkcij energije, torej  $\Psi(x,0) = \sum c_n \psi_n(x)$ , pri čemer so koeficienti razvoja podani kot  $c_n = \int \psi_n^* \Psi dV$ . Če je to res - in privzeli bomo, da je - potem lahko s primerno izbiro koeficientov opišemo kakršnokoli razporeditev delcev v prostoru ob začetnem času  $t = 0$ , nadaljni razvoj pa je enolično določen kot  $\Psi(x,t) = \sum c_n \psi_n(x) e^{iE_n t/\hbar}$ . Težava je seveda v tem, da moramo poznati lastne funkcije energije za aktualni potencial.

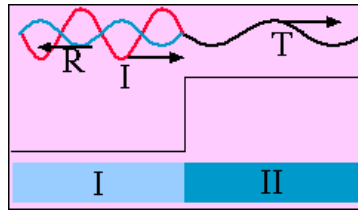
## 42.8 Sipanje na potencialni oviri

Do sedaj smo določili le valovne funkcije ansambla elektronov za gibanje v prostoru, kjer ni bilo električnega potenciala; to so bili ravni valovi oziroma njihove superpozicije. Ugotovitve veljajo v nespremenjeni obliki tudi za gibanje v konstantnem potencialu. Saj tam ne deluje na delec nobene sile.

Zdaj je napočil čas, da pogledamo, kakšne so valovne funkcije pri gibanju elektronov v prostorsko spremenljivih poljih potenciala. Ločimo dve kvalitativno različni vrsti gibanj: v prvem primeru prileti elektron od zunaj na potencialno spremembo, recimo pri vpadu na "rob" atoma, v drugem pa je elektron ujet znotraj potencialne jame, recimo v "notranjosti" atoma. Govorimo o *sipanju* in o *vezanem gibanju* elektrona.

Potencialna stopnica

Za obravnavo sipanja izberemo najpreprostejši primer: vpad elektrona na stopničast potencialni klanec: na intervalu  $x < 0$  znaša  $W = 0$ , na intervalu  $x > 0$  pa  $W = W_0$ . Pričakujemo, da bomo tako spoznali tipične lastnosti sipanja tudi na drugih, bolj zapletenih potencialnih ovirah.



**Slika 42.7** Vpad delcev na potencialno stopnico. Stopnica je nižja od kinetične energije delca. Na stopnici se nekaj delcev odbije in nekaj se jih prepusti. (Thomas, D.)

Odboj in prepustnost

Naj elektroni vpadajo na klanec z leve strani. Dopustimo možnost, da se elektron na klancu odbije ali prepusti, kakor nas uči svetloba. Za elektron - vpadni, odbiti ali prepuščeni - je mehanska energija, to je vsota njegove kinetične in potencialne energije, med letom vedno konstantna:  $G^2/2m + W = E$ . Iz tega sledi, kako je gibalna količina elektrona odvisna od potenciala, v katerem se giblje:  $G = \sqrt{2m(E - W)}$ . Podobno velja za valovni vektor  $k = G/\hbar$ : na levi strani znaša  $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  in na desni  $k_2 = \sqrt{2m(E - W)/\hbar^2}$ . Valovna funkcija na levi je vsota ravnega vpadnega in ravnega odbitega vala:  $\psi_1 = \exp(ik_1x) + R \exp(-ik_1x)$ . Amplitudo vpadnega vala smo postavili na 1. Valovna funkcija na desni pa pripada ravnemu prepuščenemu valu:  $\psi_2 = T \exp(ik_2x)$ . Na mestu potencialnega skoka pri  $x = 0$  morata biti leva in desna valovna funkcija enaki:  $\psi_1 = \psi_2$ . Prav tako morata biti enaka njuna prva odvoda:  $\partial\psi_1/\partial x = \partial\psi_2/\partial x$ . V tadva pogoja vstavimo obe valovni funkciji in dobimo dve enačbi za koeficienta  $R$  in  $T$ . Iz njiju izračunamo:

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (42.29)$$

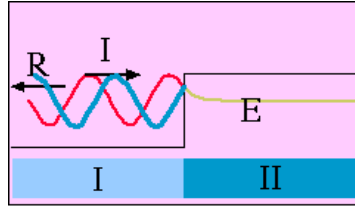
$$T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Verjetnost odboja znaša  $P_r = |R|^2$ . Ker se število elektronov ohranja, znaša verjetnost prepusta  $P_t = 1 - P_r$ .

Tuneliranje delca

Z računom smo pravzaprav zajeli dva primera: energija vpadajočih elektronov je večja od potencialnega skoka ali pa je manjša. V prvem primeru sta valovna vektorja na obeh straneh realna, prav tako amplitudi  $R$  in  $T$ . Imamo odboj in prepustnost. V

drugem primeru pa postane  $k_2$  imaginaren. Zapišemo  $k_2 = \sqrt{2m(E - W)} = i\sqrt{2m(W - E)} = i\kappa$ , s čimer postane prepuščena valovna funkcija  $\psi_2 = T \exp(-\kappa x)$ . Ta hitro pojema z razdaljo. Verjetnost odboja je v tem primeru  $P_r = R^*R = 1$  in verjetnost prepusta  $P_t = 0$ .



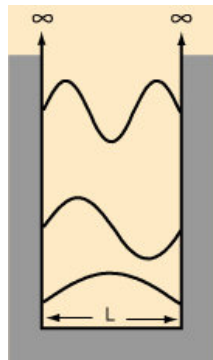
**Slika 42.8** Vpad delcev na potencialno stopnico. Stopnica je višja od kinetične energije delca. Vsi delci se odbijejo, nekateri pa predtem tunelirajo v stopnico. (Thomas, D.)

Elektroni se torej pri vpadu na potencialni klanec vedejo čisto drugače kot klasični delci. Klasični delci z dovolj energije se vsi povzpnejo čez klanec in nadaljujejo pot. Če energije nimajo dovolj, se pa vsi obrnejo nazaj še pred vrhom. Kvantni delci pa se deloma odbijejo, tudi če imajo dovolj energije. Če energije nimajo dovolj, se pa kljub temu deloma povzpnejo preko vrha klanca in se šele od tam odbijejo. Rečemo, da elektroni *tunelirajo* v stopnico. Če bi bila ta kratka, bi na drugi strani celo prišli ven in nadaljevali pot.

#### 42.9 Gibanje v potencialni jami

Neskončna  
potencialna jama

Najpreprostejši primer vezanega gibanja je elektron v neskončni potencialni jami: na intervalu  $[0, D]$  znaša  $W = 0$  in zunaj  $W = \infty$ .



**Slika 42.9** Gibanje delca v neskončni potencialni jami. Vrisane so lastne valovne funkcije energije. (Anon)

Lastne valovne funkcije energije v jami so določene s stacionarno valovno enačbo  $\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + E\psi = 0$ . To je dobro znana enačba  $\psi'' + \omega^2 \psi = 0$  s konstanto  $\omega^2 = 2mE/\hbar^2$ . Njene rešitve so  $\sin \omega x$  in  $\cos \omega x$ . Zahtevamo, da je  $\psi$  na robovih enaka nič. Ni namreč mogoče, da bi delec imel kje neskončno veliko potencialno energijo. Pogoju na levem robu ustrezemo z izbiro funkcije sinus. Pogoju na desnem robu pa ustrezemo s pogojem  $\sin \omega D = 0$ , torej  $\omega D = n/2$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ . To seveda pomeni, da so lastne energije delca

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{D} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (42.30)$$

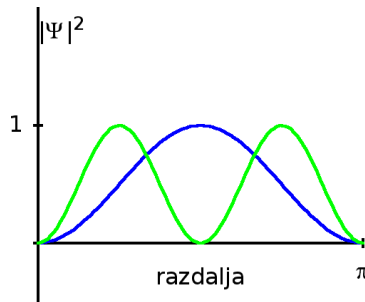
in (nenormirane) lastne funkcije

$$\psi_n = \sin \frac{n\pi}{D} x, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (42.31)$$

Zdaj vidimo, kako računi vodijo do diskretnih valovnih funkcij in do diskretnih energij: tako, da možnim valovnim rešitvam predpišemo določene robne pogoje. Enega izmed teh smo pravkar spoznali: v področju neskončno velike potencialne energije mora biti valovna funkcija enaka nič.

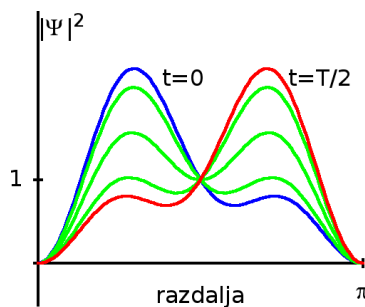
Čista in mešana stanja

Naj bo ansambel zaprtih delcev v kakšnem izmed čistih stanj, na primer v osnovnem stanju  $n = 1$  z valovno funkcijo  $\Psi = \sin(\pi x/D) \exp(-iE_1 t/\hbar)$ . Stanje ansambla je tedaj opisana z verjetnostno gostoto  $|\Psi|^2 = |\psi_1|^2 = \sin^2(\pi x/D)$  in se s časom ne spreminja. Mislimo si, da kakemu ansambelskemu delcu izmerimo energijo na primeren način. Meritev bi pokazala  $E_1$ . Pravzaprav je res obratno: če izmerimo  $E_1$ , potem vemo, da je bil delec v stanju  $\psi_1$ .



**Slika 42.10** Verjetnostna gostota za delec v potencialni jami. Prikazani sta gostoti v dveh čistih stanjih  $\psi_1$  (modro) in  $\psi_2$  (zeleno). V čistem stanju se gostota ne spreminja s časom.

Delci pa so seveda lahko tudi v mešanem stanju, recimo v takem z valovno funkcijo  $\Psi = \sin(\pi x/D) \exp(-iE_1 t/\hbar) + \sin(2\pi x/D) \exp(-iE_2 t/\hbar)$ . To ni več lastna funkcija in verjetnostna gostota  $|\Psi|^2 = \sin^2(\pi x/D) + \sin^2(2\pi x/D) + 2\sin(\pi x/D) \sin(2\pi x/D) \cos(E_2 - E_1)t/\hbar$  se zato s časom spreminja. V ansamblu delcev v takem stanju bi izmerili posamič  $E_1$  ali  $E_2$  in sicer v enakih relativnih deležih



**Slika 42.11** Verjetnostna gostota za delec v potencialni jami. Prikazna je gostota v mešanem stanju  $\psi_1 + \psi_2$ . Gostota se s časom periodično spreminja.

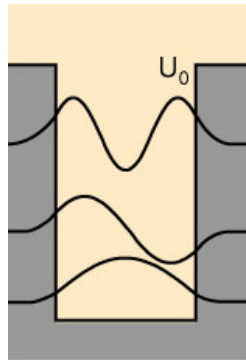
Razmazanost gibanja

Kakšna pa je gibalna količina delca v potencialni jami? Ker  $E = G^2/2m$ , sledi  $G = \sqrt{2mE}$ . Vstavimo izraz za energijo in dobimo  $G = \pm \hbar(\pi n/D)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . V osnovnem stanju je  $G = \pm \hbar(\pi/D)$ . Pol delcev v ansamblu se giblje v desno, pol v levo. Posamičen delec torej ne miruje, ampak se giblje. Ožja kot je jama, hitreje se v njej

giblje. Gibanje je razmazano, kakor tudi mora biti:  $\Delta x \Delta G \sim D\hbar\pi/D = \pi\hbar \geq \hbar/2$ . Če je ansambel delcev v višjem stanju, imajo delci večjo gibalno količino. Če je v mešanem stanju, pa ima nekaj delcev takšno, nekaj pa drugačno.

Končna potencialna jama

Če ima potencialna jama končno globino, pričakujemo, da valovne funkcije na robovih niso nič, ampak da eksponentno tunelirajo v steno. Saj nas to uči sipanje na visoki oviri. Pri tem se morajo notranji sinusi rahlo deformirati, tako da se gladko raztegnejo čez robove v eksponentne repke. Temu ustrezno se morajo prilagoditi tudi lastne energije. Brez računanja smo torej izdelali kvalitativno sliko valovnih funkcij v končni potencialni jami.



**Slika 42.12** Gibanje delca v končni potencialni jami. Vrisane so lastne valovne funkcije energije. (Anon)

Spekuliramo lahko celo naprej. Vidimo namreč, da v potencialni jami število  $n$  podaja število vozlišč valovne funkcije. Osnovno stanje z najnižjo energijo odgovarja funkciji brez vozlišč. Vsaka naslednja rešitev pa ima za eno večje število vozlišč. Privlačna je misel, da to velja tudi za bolj splošne potencialne jame, take, ki imajo poševne stene.

#### 42.10 Harmonični oscilator

Valovna enačba zanj

Najpreprostejše "realistično" vezano gibanje delca je tisto, ko ta delec harmonično niha pod vplivom elastične sile  $F = -kx$ . To silo predstavimo s potencialom  $F = -\partial W/\partial x$ , torej  $W = 1/2 kx^2 = 1/2 m\omega^2 x^2$ . Pri tem je  $m$  masa delca in  $\omega$  njegova frekvenca. Tako nihajo - po klasični teoriji - atomi v molekulah in kristalih. Koristno bi bilo, če bi o tem gibanju kaj več vedeli. Za to moramo rešiti valovno enačbo

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi. \quad (42.32)$$

Brezdimenzijska oblika enačbe

Preden se lotimo reševanja, preoblikujemo enačbo v brezdimenzijsko obliko. Opazimo, da ima količina  $m^2\omega^2/\hbar^2$  dimenzijo  $(\text{dolžina})^{-4}$ , zato definiramo  $\alpha = \sqrt{(\hbar/m\omega)}$ , ki ima dimenzijo dolžine. Za neodvisno spremenljivko nato uvedemo  $\rho = x/\alpha$ . Energijo pa normiramo kot  $\varepsilon = 2E/\hbar\omega$ . S tem se valovna enačba polepša v brezdimenzijsko obliko  $d^2\psi/d\rho^2 = (\rho^2 - \varepsilon)\psi$  (1).

Asimptotsko vedenje Za velike vrednosti  $\rho$  velja  $(\rho^2 - \varepsilon) \rightarrow \rho^2$  in enačba se poenostavi v  $d^2\psi/d\rho^2 = \rho^2\psi$ . Poskusimo jo rešiti z eksponentnim nastavkom  $\psi = \exp(\lambda\rho^2/2)$ . Vstavitev v enačbo pove  $\lambda^2 = 1$ , torej  $\lambda = \pm 1$ , zato  $\psi = A \exp(\rho^2/2) + B \exp(-\rho^2/2)$ . Prvi člen narašča v neskončnost, zato ni sprejemljiv in ga zavržemo. Rešitev na celotnem območju zato iščemo z nastavkom  $\psi = s(\rho) \exp(-\rho^2/2)$ . Ko ga vstavimo v (1), dobimo  $d^2s/d\rho^2 - 2\rho ds/d\rho + (\varepsilon - 1) = 0$  (2).

Osrednji polinom Spomnimo se, da ima  $n$ -ta vzbujena valovna funkcija v jami  $n$  vozlišč, zato je smiselno iskati rešitev v obliki polinoma stopnje  $n$ , torej  $s(\rho) = \sum a_j \rho^j$ . Če ta nastavek vstavimo v (2), dobimo  $\sum [(j+1)(j+2)a_{j+2} - (2j+1-\varepsilon)a_j] \rho^j = 0$ . Vsak koeficient mora biti enak nič, kar pomeni  $a_{j+2} = [(2j+1-\varepsilon)/(j+1)(j+2)]a_j$ . To je rekurzijska povezava iz poljubnih začetnih  $a_0$  in  $a_1$  za vse naslednike. Vsi sodi  $a$ -ji so nasledniki  $a_0$  in vsi lihi  $a$ -ji so nasledniki  $a_1$ .

Lastne energije Rekurzijska veriga - soda ali liha - se mora ustaviti pri  $j = n$ , to je, vsi njeni nadaljnji členi morajo biti enaki nič. To dosežemo z zahtevo  $2n + 1 - \varepsilon = 0$ , iz česar sledi  $\varepsilon = 2n + 1$  oziroma (SCHRÖDINGER)

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (42.33)$$

Delec v harmoničnem potencialu ima torej kvantizirane energije, kakor tudi mora biti. V osnovnem stanju ima energijo  $E_0 = \hbar\omega/2$ . Razmiki med energijskimi nivoji so enakomerni.

Lastne funkcije Določiti moramo še lastne funkcije. Iz vsega povedanega povzamemo

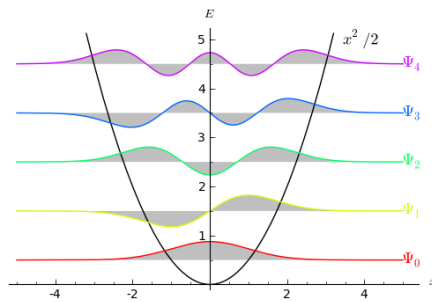
$$\psi_n(x) = \left( \sum_{j=0}^n a_j \rho^j \right) e^{-\rho^2/2} = H_n(\rho) e^{-\rho^2/2}, \quad \rho = \sqrt{(m\omega/\hbar)}x \quad (42.34)$$

$$a_{j+2} = \frac{2(j-n)}{(j+1)(j+2)} a_j.$$

Izračunajmo prvih nekaj (nenormiranih) lastnih funkcij! Če je  $n$  sod, postavimo  $a_0 = 1$  in vse lihe koeficiente na nič. Če je  $n$  lih, postavimo  $a_1 = 1$  in vse sode koeficiente na nič. Tako dobimo, kot primer

$$\begin{aligned} \psi_0 &= e^{-\rho^2/2} \\ \psi_1 &= \rho e^{-\rho^2/2}. \end{aligned} \quad (42.35)$$

Po potrebi funkcije še normiramo. Polinom  $H_n$  je stopnje  $n$  in vsebuje samo sode ali samo lihe potence. Tem polinomom rečemo *harmonični polinomi*.



**Slika 42.13** Lastne funkcije v harmoničnem oscilatorju. (Anon)

Vse, kar smo prej povedali o čistih in mešanih stanjih za delec v pravokotni potencialni jami, velja z ustreznimi spremembami tudi za delec v harmonični jami.

### 42.11 Enoelektronski atom

Valovna enačba zanj

Poiščimo sedaj energijske nivoje in lastne funkcije energije za vodikov atom. Potencialna energija elektrona z nabojem  $q = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$  v elektrostatičnem polju jedra z nabojem  $q$  znaša  $W(r) = -q^2/r$ . Valovna enačba se zato glasi

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{q^2}{r} \psi = E \psi. \quad (42.36)$$

Operator  $\nabla^2$  zapišemo - na že znani način - v polarnih koordinatah in dobimo

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{q}{r} \right) \psi = 0. \quad (42.37)$$

Ločitev radialnega dela

Enačba je strašljiva. Rešitev iščemo v obliki produkta dveh funkcij, od katerih je ena odvisna zgolj od radija in druga zgolj od smeri

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \quad (42.38)$$

Zapisani produkt vstavimo v (42.37), izvlečemo "konstantne" faktorje izpod odvajanj, množimo z  $r^2$  in delimo z  $RY$  ter zapišemo radialne člene na levi, krogelne pa na desni strani enačbe. Levi del je odvisen le od  $r$ , desni le od  $\theta$  in  $\varphi$ . Za vse točke prostora sta lahko medsebojno enaka le, če je vsak zase enak isti konstanti  $A$ , torej

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left( E + \frac{q}{r} \right) R - AR = 0 \quad (42.39)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + AY = 0.$$

Ločitev polarnega in azimutnega dela

Pridelali smo dve enačbi, *radialno* in *krogelno*. Slednja še vedno vsebuje dve spremenljivki,  $\theta$  in  $\varphi$ . Potrebna je njena nadaljnja ločitev. Ravnamo tako kot prej. Z nastavkom

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (42.40)$$

razcepimo smerno enačbo v *polarno* in *azimutno* enačbo, pri čemer vpeljemo konstanto  $B$ , in po majhni preureditvi dobimo

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + A - \frac{B}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (42.41)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + B\Phi = 0.$$

Rešitev azimutne enačbe

Rešiti moramo torej tri enačbe: radialno, polarno in azimutno. Začnimo z zadnjo, ki je najpreprostejša. Njena rešitev je  $\Phi = c_1 \exp(im\varphi) + c_2 \exp(-im\varphi)$ , pri čemer  $B = m^2$ . "Greenwiški meridian" atoma lahko postavimo kjerkoli, zato udobno izberemo  $c_2 = 0$ . Zahtevamo še, da je azimutna funkcija enolična, to je  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ , zato mora biti  $m$  celo število. Torej (nenormalizirano)

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (42.42)$$

Rešitev polarne enačbe

Sledi polarna enačba. Vanjo vstavimo  $B = m^2$ . Nato uvedemo novo spremenljivko  $x = \cos \theta$ , s čimer prevedemo iskanje funkcije  $\Theta(\theta)$  na iskanje nove funkcije  $P(x)$ :

$$\Theta(\theta) = P(\cos \theta) = P(x). \quad (42.43)$$

Diferencial  $d/d\theta = dx/d\theta \cdot d/dx = -\sin \theta d/dx$  pridela, ob uporabi identitete  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$ , enačbo

$$(1-x^2) \frac{d^2P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left( A - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0. \quad (42.44)$$

Žal koeficienti niso konstante, zato ne vidimo, kako bi enačbo rešili. Na srečo pa je rešitev že poznana (iz študija stojnega valovanja na krogelni opni, s katerim se mi nismo ukvarjali); to je modificirana potenčna vrsta

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \right] \quad (42.45)$$

$$a_{j+2} = \frac{(j+m)(j+m+1) - A}{(j+1)(j+2)} a_j. \quad (42.46)$$

Pri neugodni vrednosti  $A$  lahko postane vrsta na definicijskem intervalu  $x \in [-1, 1]$  neomejena. Da se to ne zgodi, mora kakšen koeficient pri rekurziji postati nič; potem postanejo tudi vsi naslednji koeficienti enaki nič, vrsta postane polinom in nevarnost je odpravljena. Vidimo, da koeficient  $a_{j+2}$  postane nič, če  $(j+m)(j+m+1) - A = 0$ . To pa se zgodi, če za  $j+m = l$  velja  $A = l(l+1)$ . Dovoljene vrednosti so torej

$$A = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2 \dots \text{ in } |m| \leq l. \quad (42.47)$$



Za izbrani  $l$  in  $m$  se torej vrsta  $P(x)$  okrajša v *polarni polinom*  $P_{lm}(x)$ . Prvih nekaj polinomov, izračunanih z rekurzijo iz  $a_0 = 1$  in  $a_1 = 1$  se glasi (nenormalizirano)

$$\begin{aligned} P_{00}(\cos \theta) &= 1 \\ P_{10}(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_{11}(\cos \theta) &= -\sin \theta. \end{aligned} \quad (42.48)$$

Rešitev radialne enačbe

Preostane še radialna enačba, v katero vstavimo  $A = l(l + 1)$ . Najprej jo poskušamo poenostaviti. Vpeljemo novo odvisno in novo neodvisno spremenljivko

$$\begin{aligned} u &= rR \\ \rho &= \kappa r, \quad \kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}. \end{aligned} \quad (42.49)$$

Ker je energija vezanega elektrona negativna, je podkorenski izraz pozitiven. Na ta način se radialna enačba poenostavi v obliko

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[ 1 - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u = 0, \quad (42.50)$$

pri čemer  $\lambda = 2mq^2/\hbar^2\kappa$ . Nato pogledamo, kako se enačba vede pri velikih in malih vrednostih  $\rho$ . Ko  $\rho \rightarrow \infty$ , odpadeta člena  $1/\rho$  in  $1/\rho^2$  ter preostane  $u'' = u$ . Rešitvi sta  $\exp(\rho)$  in  $\exp(-\rho)$ . Prva gre v neskončnost, zato obdržimo le drugo. Ko  $\rho \rightarrow 0$ , prevlada člen  $1/\rho^2$  ter preostane  $u'' = [l(l+1)/\rho^2]u$ . To enačbo rešujemo s potenčnim nastavkom  $u = \rho^s$ , kar pokaže  $s(s-1) = l(l+1)$ , torej  $s = -l$  in  $s = l+1$ . Rešitev  $\rho^{-l}$  gre v neskončnost, zato obdržimo drugo,  $\rho^{l+1}$ . Sedaj, ko poznamo obe limitni rešitvi, ju faktoriziramo ven iz splošne rešitve, to je, postavimo

$$u = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho). \quad (42.51)$$

Vstavitve v radialno enačbo pokaže

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + (\lambda - 2(l+1))v = 0. \quad (42.52)$$

Zapisano enačbo rešujemo z nastavkom

$$v(\rho) = \sum a_j \rho^j, \quad (42.53)$$

kar privede - z nekaj računanja - do koeficientne vsote, ki je enaka nič. Zato mora biti vsak koeficientni člen enak nič, iz česar sledi rekurzija

$$a_{j+1} = \frac{2(j+l+1) - \lambda}{(j+1)(j+2(l+1))} a_j. \quad (42.54)$$

Vrsto spet odrežemo v polinom z zahtevo  $2(j+l+1) - \lambda = 0$ . To pove, da mora veljati

$$\lambda = 2n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \text{in } l < n. \quad (42.55)$$

Upoštevajoč definicijo  $\lambda$  neposredno sledi kvantizacija energije, kakor tudi mora biti (SCHRÖDINGER):

$$E_n = \frac{mq^4}{\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (42.56)$$

S tem izrazom za energijo zapišemo  $\rho = kr$  kot  $\rho = r/nr_B$ . Izpišemo tudi že lahko poljubno radialno funkcijo. Nekaj prvih (nenormiranih) se glasi

$$R_{10} = \exp \frac{-r}{r_B} \quad (42.57)$$

$$R_{20} = \left(1 - \frac{r}{2r_B}\right) \exp \frac{-r}{2r_B}$$

$$R_{21} = \frac{r}{r_B} \exp \frac{-r}{2r_B}.$$

Združitev delnih rešitev

Radialne, polarne in azimutalne delne rešitve združimo v celotne lastne funkcije vodikovega atoma:  $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)P_{lm}(\cos\theta)\Phi_m(\varphi)$ . Kadar je to potrebno, izračunamo še normirno konstanto  $A$  preko pogoja  $1/A = \int |\psi|^2 dV = \int |\psi|^2 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$ . Lastne funkcije so oštevilčene s kvantnimi števili  $n, l$  in  $m$ . Ta števila, kot smo ugotovili, niso neodvisna. Izbira  $n$  omejuje  $l$  in izbira  $l$  omejuje  $m$ . Ponovimo ugotovitev:

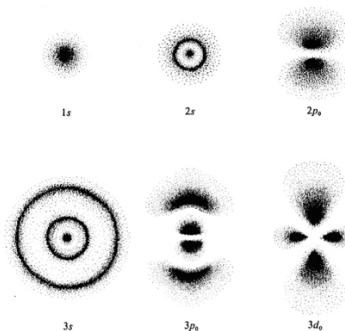
$$n = 1, 2, 3 \dots \quad (42.58)$$

$$l = 0, 1, 2 \dots n - 1$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm l.$$

Navedena kvantna števila močno spominjajo na kvantna števila pri planetarnem modelu; to je tudi razlog, da smo jih enako poimenovali. Pomembna pa je ena izjema: število  $l$  ne gre več od 1 do  $n$ , pač pa od 0 do  $n - 1$ . To nas navaja na misel, da je vrtilna količina atoma - ki jo še nameravamo izračunati - v marsikaterem stanju enaka nič.

Kvadrat valovne funkcije je verjetnostna gostota, da se elektron znajde v kakšni točki v okolici jedra. Nazorno si jo predstavljamo kot oblak, ki ga gibajoči se elektron zarisuje okoli jedra.



**Slika 42.14** Atom vodika v različnih lastnih stanjih  $nl$ : 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d. Ta stanja so označena kot 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d. Prikazana je verjetnostna porazdelitev elektronskega oblaka. Namesto po ostrih orbitah se giblje elektron znotraj razmazanih orbital. (McQuarrie, 1983)

Izračunajmo še povprečni radij elektronskega oblaka v osnovnem (normiranem) stanju  $R_{10} = (1/\sqrt{\pi r_B^3}) \exp(-r/r_B)$ . Velja  $\langle r \rangle = \int r |R_{10}|^2 dV$ . Substituiramo  $dV = r^2 dr \sin\theta d\varphi d\theta$  in izračunamo  $\langle r \rangle = 3/2 \cdot r_B$ .

Na enak način, kot smo obravnavali vodikov atom, lahko obravnavamo tudi vodik podobne atome, to je enoelektronske atome v polju jedra z nabojem  $Zq$ . Naboj jedra vstopa v obravnavo preko potencialne energije  $W = -Zq^2/r$ . Kjerkoli torej v obravnavi naletimo na  $q^2$ , ga moramo nadomestiti z  $Zq^2$ . Glavno mesto, kjer se skriva  $q^2$ , pa je v definiciji atomske dolžine  $r_B = \hbar^2/mq^2$ . Kjerkoli naletimo na  $r_B$ , ga moramo zato nadomestiti z  $r_B/Z$ .

#### 42.12 Vrtilna količina

Lastne enačbe količin

Če ima valovna funkcija  $\psi$  obliko ravnega vala, se v njej skrivajo elektroni z ostro določeno gibalno količino  $\mathbf{G}$  in velja "lastna enačba"  $-i\hbar\nabla\psi = \mathbf{G}\psi$ . Kadarkoli merimo, zmeraj dobimo enako vrednost. Če ima funkcija drugačno obliko, pa imajo elektroni v njej razmazano gibalno količino - enkrat izmerimo takšno, drugič drugačno.

Podobno velja za kinetično energijo: elektrone z ostrimi vrednostmi  $K = \mathbf{G}^2/2m$  najdemo le v ravnih valovih in ti zadoščajo lastni enačbi  $[(-i\hbar\nabla)^2/2m]\psi = K\psi$ . Ravni valovi so torej lastne funkcije tako gibalne količine kot kinetične energije.

In podobno velja za energijo v potencialnem polju: ostre vrednosti  $E = K + W$  najdemo samo v takšnih valovnih funkcijah, ki zadoščajo lastni enačbi  $[(i\hbar\nabla)^2/2m + W]\psi = E\psi$ . Za delec v neskončni potencialni jami, na primer, so to posamični harmonični valovi.

Lastna enačba za vrtilno količino

Pri gibanju elektrona v treh dimenzijah, na primer v atomih, se zakonu o ohranitvi energije pridruži še zakon o ohranitvi vrtilne količine:  $\mathbf{r} \times \mathbf{G} = \mathbf{L}$ . Naravno je predpostaviti, da vrednosti vrtilne količine in njim ustrezajoče valovne funkcije določa lastna enačba

$$-i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)\psi = \mathbf{L}\psi. \quad (42.59)$$

Enačbo hočemo zapisati v krogelnih koordinatah, da bo primerna za obravnavo gibanja v centralnih potencialih. — Enačbo najprej zapišemo v komponentni obliki v kartezičnih koordinatah. Prva komponenta se glasi  $L_x = -i\hbar(y\partial/\partial z - z\partial/\partial y)$  in ostali dve podobno. — Nato zapišemo kartezične odvode s krogelnimi:  $\partial/\partial x = \partial r/\partial x \cdot \partial/\partial r + \partial\theta/\partial x \cdot \partial/\partial\theta + \partial\varphi/\partial x \cdot \partial/\partial\varphi$  in podobno za ostala dva. — Sledi dejanski izračun odvodov  $\partial r/\partial x$ ,  $\partial\theta/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial x$  ter podobno za ostale. — Potem vse skupaj združimo, vstavimo "manjkajočo" valovno funkcijo in dobimo enačbe za  $L_x$ ,  $L_y$  in  $L_z$  kot funkcije krogelnih koordinat in odvodov nanje.

Velikost vrtilne količine

Velikost vrtilne količine dobimo kot  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , kar znese

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = -\frac{L^2}{\hbar^2} \psi. \quad (42.60)$$

Veliko presenečenje! Dobili smo krogelno enačbo (42.39) s konstanto  $A = L^2/\hbar^2$ . Kot vemo, so rešitve te enačbe - krogelne funkcije  $Y_{lm} = P_l(\cos \theta) \exp im\varphi$  - možne le za celoštevilske vrednosti  $A = l(l+1)$  in celoštevilske vrednosti  $|m| \leq l$ , zato mora biti vrtilna količina takole kvantizirana:

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2, l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (42.61)$$

Ista diferencialna enačba določa tako smerno gostoto elektronskega oblaka kot njegovo vrtilno količino zato, ker je tisti del operatorja  $\nabla^2$ , ki vključuje kote, sorazmeren z  $-L^2/r^2$ .

Njena navpična komponenta

Izmed treh komponent vrtilne količine je najpreprosteje zapisana "navpična" komponenta

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_z \psi. \quad (42.62)$$

Takoj vidimo, da ima rešitev  $\exp(im\varphi)$ , torej tudi katerokoli  $Y_{lm}$ . Neposredno sledi kvantizacija

$$L_z = m\hbar, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l \quad (42.63)$$

Pri izpeljavah se nismo naslanjali na nikakršen potencial, zato veljajo ugotovitve povsem splošno. Uporabne so povsod tam, kjer se vrtilna količina ohranja, to pa je zagotovo v vodikovem atomu.

Vodikov atom in vrtilna količina

Kar smo ugotovili glede vrtilne količine, se deloma razlikuje od napovedi planetarnega vodikovega modela. Prejšnja spoznanja moramo popraviti takole.

Minimalna vrednost  $l$  znaša 0 in ne 1. To pomeni, da je vrtilna količina atoma v stanjih 100, 200 ... enaka nič. Ta stanja so krogelno simetrična. Krogelno simetričen atom se "ne vrti".

Maksimalna vrednost  $l$  znaša  $(n-1)$  in ne  $n$ . To pomeni, je število podstanj  $l$ , ki pripadajo stanju  $n$ , nespremenjeno, namreč  $n$ .

V stanju  $l$  ne velja  $L = l\hbar$ , ampak  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ .

V stanju  $l$  je maksimalna velikost  $L_z$  nekaj manjša od  $L$ . To pomeni, da se vektor vrtilne količine nikoli ne usmeri povsem vzdolž osi  $z$ .

### 42.13 Večelektronski atomi

Sistem delcev

Doslej smo razvili valovni opis le za en elektron v polju jedra (pravzaprav za ansambel enoelektronskih atomov). Posplošitev na atome z več elektroni je neposredna. Ansambel dvoelektronskih atomov, na primer, opišemo z valovno funkcijo

$$\psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \psi(1, 2). \quad (42.64)$$

To je funkcija v konfiguracijskem prostoru z  $2 \cdot 3 = 6$  koordinatami. Prostorninski element znaša

$$dV = dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \quad (42.65)$$

in ustrezna gostota verjetnosti

$$\frac{dP}{dV} = |\psi|^2. \quad (42.66)$$

Valovna funkcija je normirana:  $\int |\psi|^2 dV = 1$ . Mutatis mutandis velja povedano tudi za atome z več kot dvema elektronoma.

Valovna enačba sistema

Kinetična energija dvoelektronskega sistema je enaka vsoti posamičnih kinetičnih energij in potencialna energija sistema je odvisna od leg vseh elektronov. Celotna energija je potem  $E = K_1 + K_2 + W(1,2)$ . Valovna enačba se zato glasi

$$-\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 \right] \psi + W(1,2)\psi = E\psi. \quad (42.67)$$

Če med elektroni ni sil (pa so), je celotna potencialna energija enaka vsoti posamičnih potencialnih energij v zunanjem polju:  $W(1,2) = W(1) + W(2)$ . Rešitev postavimo v obliki produkta  $\psi(1,2) = u(1)v(2)$ . Valovna enačba postane vsota dveh členov, ki je enaka  $E$ . To je mogoče le, če je prvi člen enak konstanti  $E_1$  in drugi konstanti  $E_2$ . Enačba se zato razcepi v dve enačbi

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 u + W(1)u &= E_1 u \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 v + W(2)v &= E_2 v \\ E &= E_1 + E_2. \end{aligned} \quad (42.68)$$

Ustrezna gostota verjetnosti pa je  $\psi^* \psi = u^* u v^* v$ . Verjetnost, da en elektron najdemo na mestu 1 in drugega na mestu 2 je enaka produktu posamičnih verjetnosti.

Simetrične in antisimetrične funkcije

Če imata elektrona vzajemno enako potencialno energijo (in imata jo), je valovna enačba simetrična glede na zamenjavo koordinat prvega delca s koordinatami drugega, to je, če je  $\psi(1,2)$  rešitev valovne enačbe, je rešitev iste enačbe tudi  $\psi(2,1)$ . Prav tako je rešitev linearna kombinacija  $\psi = c_1 \psi(1,2) + c_2 \psi(2,1)$ . Z izbiro koeficientov  $c_2 = c_1 = 1$  ali  $c_2 = -c_1 = -1$  dobimo rešitvi  $\psi(1,2) + \psi(2,1)$  ter  $\psi(1,2) - \psi(2,1)$ . Prvo rešitev imenujemo simetrično, drugo antisimetrično. Če v prvi zamenjamo 1 z 2, se valovna funkcija ne spremeni. Druga pa pri istem posegu spremeni predznak. V obeh primerih se gostota verjetnosti ne spremeni.

Elektroni so med seboj nerazločljivi. Gostota verjetnosti se ne sme spremeniti, če kordinate enega zamenjamo s koordinatami drugega. Računsko gledano pripadajo eni energiji vse mogoče linearne kombinacije obeh delnih rešitev. Glede na to, kako izberemo koeficienta  $c_1$  in  $c_2$ , pripade enemu ali drugemu elektronu drugačna vloga. Vse kar je računsko možno, pa ni tudi uresničeno. Privlačna je misel, da v naravi obstajajo le take rešitve, ki so simetrične ali antisimetrične. Očitno je antisimetrična funkcija v primeru  $u = v$  enaka nič: v istem stanju

ne more biti dveh elektronov. Spomnimo se na spin in na izključitveno načelo [41.13]. Morda pa je to načelo zgolj posledica dejstva, da so valovne funkcije elektronov naravno antisimetrične? In zaradi uravnovešenosti: nemara so valovne funkcije fotonov, ki jih zaenkrat ne poznamo, simetrične? V podrobnejšo raziskavo se ne bomo spuščali.

Lupinski model  
atomov

Izračunati natančno valovno funkcijo za ansambel atomov z več kot enim elektronom je brezupno početje. Zlahka pa si ustvarimo kvalitativno sliko o zgradbi takega atoma v osnovnem stanju. Za jedro z nabojem  $Zq$  poznamo "enodelčne" valovne funkcije  $\psi_{nlm}$  in ustrezne energije  $E(n)$ , vrtilne količine  $L(l)$  ter komponente  $L_z(m)$ . No, in v ta enodelčna stanja po vrsti vstavljamo elektrone, upoštevajoč izključitveno načelo. Pri tem privzamemo, da vstavljeni elektroni nič ne vplivajo drug na drugega. Prvi elektron gre torej v  $\psi_{100}$  s spinom gor. Naslednji gre tudi tja, vendar s spinom dol. Sledi zasedba  $\psi_{110}$ ,  $\psi_{11+1}$  in  $\psi_{11-1}$  ter tako naprej. Elektroni zapolnjujejo, po vrsti, *lupine*  $n = 1, 2 \dots$ . Znotraj vsake lupine zapolnjujejo, po vrsti, *podlupine*  $l = 0, 1, 2 \dots n - 1$ . In znotraj vsake podlupine zapolnjujejo *orbitale*  $m = 0, \pm 1 \dots \pm l$ . Maksimalno število elektronov v posamični lupini znaša  $2n^2$ , torej 2, 8, 18, 32, 50 itd.

Vsaki razporeditvi elektronov - torej vsakemu atomu - pripade ustrežajoča konfiguracijska gostota, celotna energija, celotna vrtilna količina  $j$  in komponenta celotne vrtilne količine  $m_j$ . V polni podlupini je skupna vrtilna količina (vsota vseh orbitalnih in spinskih) enaka nič, ker na vsak elektron pride drug elektron z nasprotno konfiguracijo. Ko atom absorbira ali izseva foton, se mu spremenita energija in vrtilna količina. Če predpostavimo, da ima foton spin 1, se zaradi ohranitve vrtilne količine spremeni stanje atoma le za  $\Delta j = \pm 1$  in  $\Delta m_j = 0, \pm 1$ . Rečemo, da so to izbirna pravila sevanja.

Pri planetarnem modelu atoma smo ugotovili [41.11], da zaporedne krožnice vsebujejo 2, 8, 8, 18, 18 ... elektronov. Zdaj pa pravimo, da so zasedbena števila lupin (ki prevzemajo vlogo krožnic) 2, 8, 18, 32, 50 ... Kaj je torej prav? Pravzaprav oboje. V tretji energijski lupini gredo res elektroni do 8, vendar s tem lupina še ni polna. Nekaj naslednjih elektronov gre nato v spodnje orbitale lupine štiri, ki - tako sklepamo - so energijsko nižje od višjih orbit v lupini tri. Potem pa dokončajo zapolnjevanje do 18 v lupini tri. Vse to kaže, da je lupinski model atoma sicer kvalitativno dober, mu pa še precej manjka do kvantitativne uporabnosti. Z boljšimi modeli se ne bomo ukvarjali. □

## 43 Kvantna statistika

Molekule - Molekularni plin - Kristali - Elektronski plin - Elektroni v kovinah - Elektroni v kristalih - Polprevodniki - Zvezdna plazma - Fotonski plin - Fotoni v votlini

### 43.1 Molekule

Molekulske vezi Atomi se združujejo v molekule. Na podlagi doslej povedanega si predstavljamo, da vezavo ustvarjajo le elektroni v zunanji lupini atomov - valenčni elektroni. Notranje lupine atomov ostajajo pri tem bolj ali manj nespremenjene. Možna sta dva mejna primera. Valenčni elektroni dveh atomov se zberejo v vmesnem prostoru med obema in s svojo privlačno silo zlepijo preostala pozitivna iona, na primer  $(H^+)--(H^+)$ . To je *kovalentna vez*. Ali pa valenčni elektroni enega atoma preidejo k drugemu atomu in ga povsem obkrožijo, nakar se nastala iona privlači, na primer  $(H^+)(Cl^-)$ . To je *ionska vez*. Druge vezi so nekje vmes. Elektronski oblak nastale molekule opisuje pripadajoča večdelčna valovna funkcija. Da bi jo - brez približkov - izračunali iz ustrezne valovne enačbe, je nemogoče. Ukvarjanje s približnimi rešitvami pa je težavno in ga prepuščamo specialistom.

Vrtenje molekul Molekule, sestavljene iz majhnega števila atomov, so bolj ali manj toge. Togo telo, ki se vrti okoli izbrane težiščne osi, ima vrtilno količino  $L = J\omega$ , pri čemer je  $J$  vztrajnostni moment telesa glede na aktualno vrtilno os. Kinetična energija vrtenja znaša  $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ . Iz obeh enačb sledi  $E = L^2/2J$ . Upoštevamo, da je vrtilna količina kvantizirana (42.61) in dobimo za energije rotatorja

$$E = \frac{\hbar^2}{2J} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (43.1)$$

Vsako stanje z danim  $l$  je še  $(2l+1)$ -krat degenerirano po projekciji vrtilne količine.

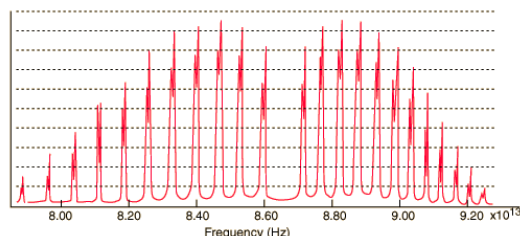
Najpreprostejše molekule so dvoatomne, na primer  $H_2$  ali  $HCl$ . Če sta atoma oddaljena za  $R$  in imata masi  $m_1$  in  $m_2$ , znaša njun vztrajnostni moment pri vrtenju okrog katerekoli pravokotne težiščne osi  $J = \mu R^2$ ,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Predpostavimo, da so možni le taki sevalni prehodi (emisijski in absorpcijski) med energijskimi stanji, da  $\Delta l = \pm 1$ . Pri skoku  $l+1 \rightarrow l$  se torej zmanjša energija rotatorja za  $\Delta E = (\hbar^2/J)l$ . Frekvence izsevanih črt zato linearno naraščajo z  $l$ : emisijski spekter je črtast in ekvidistanten. Enako velja za absorpcijski spekter. Sevalne prehode pričakujemo le pri polarnih molekulah, recimo pri  $HCl$ , ne pa tudi pri nepolarnih, recimo  $H_2$  (slednje namreč nimajo električnega dipolnega momenta). Vrednost  $J$  ocenimo na  $(1 \text{ u})(1 \text{ \AA})^2$ , kar ustreza energijskim spremembam  $\Delta E \sim 10^{-3} \text{ eV}$  oziroma valovnim dolžinam  $\lambda \sim 0,1 \text{ mm}$ . Črte vrtilnega spektra zato pričakujemo v mikrovalovnem področju.

Nihanje molekul Vezi med atomi v molekuli niso povsem toge: atomi tudi nihajo okoli ravnovesnih leg. Najpreprostejše je nihanje dvoatomne molekule: v prvem približku je to kar harmonično nihalo z reducirano maso  $\mu$  v kvadratnem potencialu  $U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$ . Lastne vrednosti takega *oscilatorja* že poznamo (42.33); to so

$$E = \hbar\omega_0(n + 1/2), \quad (43.2)$$

pri čemer  $\omega_0^2 = k/\mu$ . Dovoljeni so prehodi iz vseh višjih v vsa nižja stanja in obratno. Pri prehodu med sosednjima nivojema se izseva/absorbira foton frekvence  $\omega_0/2\pi$ . To je najnižja frekvenca. Ostale frekvence so njeni celoštevilčni mnogokratniki. Spektralne črte so torej ekvidistantne. Vrednost  $\omega_0^2$  ocenimo na  $2 \cdot (1 \text{ eV}) / (1 \text{ \AA})^2 (1 \text{ u})$ , kar ustreza energijskim spremembam  $\Delta E \sim 0,1 \text{ eV}$  oziroma valovnim dolžinam  $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$ . Črte nihajnega spektra torej pričakujemo v infrardečem območju.

Vrtilno-nihajni spektri Molekule hkrati nihajo in se vrtijo. Vsaka molekula je v nekem stanju  $(n, l)$  in lahko skoči v višje ali nižje nihajno stanje  $n \pm m$  in hkrati v višje ali nižje vrtilno stanje  $l \pm 1$ . Takemu prehodu ustreza sprememba energije  $\Delta E = \pm m \cdot \hbar\sqrt{k/\mu} \pm l \cdot \hbar^2/J = \pm m \cdot A \pm l \cdot B$ . Posamične molekule v plinu skačejo vsaka po svoje: vrši se množica različnih preskokov. Faktor  $A$  je mnogo večji od  $B$ , zato je nastali spekter sestavljen iz ločenih paketov črt. Središča paketov so med seboj energijsko oddaljene za  $A$ , črte v njih pa med seboj za  $B$ .



**Slika 43.1** Vrtilno-nihajni spekter HCl za nihajni prehod iz osnovnega v prvo vzbujeno stanje ter s sočasnimi vrtilnimi prehodi. (HyperPhysics)

Meritve z infrardečim absorpcijskim spektrometrom potrjujejo predvidevanja. Še več: iz izmerjenega središča  $A$  prvega paketa črt lahko izračunamo elastično konstanto. In iz izmerjenih razmikov  $B$  med črtami v paketu lahko izračunamo vztrajnostne momente ter iz njih dolžine dvoatomnih molekul. Za HCl tako izmerimo  $A = 8,66 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$  in  $B = 0,06 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ . Iz tega izračunamo  $k = 480 \text{ N/m}$  in reducirani radij  $R = 1,3 \text{ \AA}$ . Zaradi velike razlike v masah obeh atomov je to kar dolžina molekule.

Pri večatomnih molekulah so zadeve načeloma podobne, vendar so podrobnosti precej bolj zapletene. Kljub temu uspemo v mnogih primerih tudi zanje določiti velikosti in oblike.



### 43.2 Molekularni plin

Kanonična porazdelitev

Množico istovrstnih molekul v plinu opišemo statistično. Vsaka molekula ima več energijskih stanj – zaradi lege, translacije, vrtenja, nihanja in notranje elektronske razporeditve. Statistični opis pomeni, da povemo, kakšna je porazdelitev molekul po njihovih stanjih energije. Ali drugače rečeno: povemo verjetnost  $P_i$ , da je izbrana molekula v takem ali drugačnem stanju energije  $E_i$ . Porazdelitev že poznamo (36.13): to je kanonična porazdelitev

$$P_i = \frac{1}{Z} g_i e^{-E_i/kT} \quad (43.3)$$

$$Z = \sum g_i e^{-E_i/kT}.$$

Z  $g_i$  smo označili število stanj, ki imajo vsa isto energijo  $E_i$ . Porazdelitev velja ob pogoju, da molekule med seboj le toliko vplivajo, da se med njimi vzpostavi toplotno ravnovesje, sicer pa je njihov medsebojna potencialna energija zanemarljiva. Zdaj pa še dodatno zahtevajmo, da je medsebojna razdalja molekul  $l \sim (V/N)^{1/3}$  mnogo večja od njihove termične valovne dolžine  $\lambda = \hbar/mv$ . To je res pri normalnih pogojih, ko je razdalja okrog 10 Å in valovna dolžina okrog 0,1 Å. Na ta način se valovni paketi molekul ne pokrivajo in ne vplivajo drug na drugega. Rekli bomo, da so takšne molekule razločljive in da tvorijo *klasični plin*.

Svoj čas smo na podlagi kanonične porazdelitve izračunali prispevke energij translacije, nihanja in vrtenja molekul k notranji energiji in specifični toploti plina [36.9]. Vendar takrat še nismo vedeli, da so vrtilne in nihajne energije molekul kvantizirane, zato smo dobili rezultate, ki se niso ujemali s poskusi. Ponovimo račun z novim znanjem!

Porazdelitev molekul po nihanju

Porazdelitev dvoatomnih molekul po energiji nihanja znaša

$$P_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} n\right) \quad (43.4)$$

$$Z = \sum \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT} n\right).$$

Energijo osnovnega stanja  $\hbar\omega_0/2$  smo kar izpustili, ker samo spremeni normalizacijsko konstanto  $Z$ . Ta konstanta ima obliko geometrijske vrste  $\sum (\exp x)^n$ , kar znaša  $1/(1-x)$ , zato

$$Z = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega_0/kT)}. \quad (43.5)$$

Povprečna energija molekule je, kot vemo (36.15),  $\langle E \rangle = -(1/Z)dZ/d\beta$ ,  $\beta = 1/kT$ . Odvajamo in dobimo

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1} = \hbar\omega_0 \langle n \rangle. \quad (43.6)$$

S faktorjem  $\langle n \rangle$  smo definirali povprečno vzbujenost molekul. Ker je  $\hbar\omega_0 \sim 0,1$  eV in pri sobni temperaturi  $kT = 0,025$  eV, je

$\langle n \rangle \approx 0,02$ . To pomeni, da so skoraj vse molekule v osnovnem stanju.

Notranja energija plina zaradi nihanja je  $U = N\langle E \rangle$  in doprinos k specifični toploti je  $c_V = dU/dTm_1N$ . Pri visokih temperaturah  $kT \gg \hbar\omega_0$  lahko eksponentno funkcijo razvijemo do linearnega člena in dobimo  $\langle E \rangle = kT$ ,  $U = NkT$  in  $c_V = k/m_1 = R^*/M$ . To je prav toliko kot po klasičnem ekvipartijskem izreku za nihanje dvoatomne molekule, ki ima dve prostostni stopnji. Je pa res, da pri takih temperaturah ( $\sim 5000$  K) molekule že razpadajo.

Porazdelitev molekul po vrtenju

Vrtenje dvoatomnih molekul obravnavamo podobno kot njihovo nihanje. Porazdelitev po vrtilnih energijah znaša

$$P_l = \frac{1}{Z} (2l + 1) \exp - \frac{(\hbar^2/2J) l(l+1)}{kT} \quad (43.7)$$

$$Z = \sum (2l + 1) \exp - \frac{(\hbar^2/2J) l(l+1)}{kT}.$$

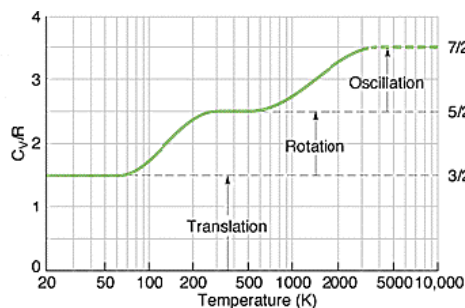
Vrste ne znamo eksplicitno izračunati. Če pa molekule niso prelahke in temperature ne prenizke, velja  $\hbar^2/2J \ll kT$ . Tedaj proglašimo  $l$  za zvezno količino in vsoto aproksimiramo z integralom  $Z = \int (2l + 1) \exp - (\hbar^2/2J) l(l + 1)/kT dl$ . Upoštevamo  $d(l(l + 1)) = d(l^2 + l) = (2l + 1)dl$  in integriramo:

$$Z \approx \frac{2J}{\hbar^2} kT. \quad (43.8)$$

Iz  $Z$  na znani način izračunamo povprečno vrtilno energijo molekule  $\langle E \rangle = kT$ , notranjo energijo plina  $U = NkT$  in prispevek k specifični toploti  $c_V = k/m_1$ . To je spet v skladu z ekvipartijskim izrekom za dve prostostni stopnji vrtenja.

Specifična toplota plinov

Porazdelitev dvoatomnih molekul po energijah nihanja, vrtenja in translacije razloži, zakaj in kako se spreminja specifična toplota plinov s temperaturo. Pri nizkih temperaturah ni znatnega nihanja in vrtenja molekul: k specifični toploti prispeva le translacija  $3/2 k/m_1$  na molekulo. Pri temperaturah nekaj sto stopinj se vzbudijo vrtenja in prinesejo  $2/2 k/m_1$ . In pri nekaj tisoč stopinjah se vzbudijo še nihanja ter prinesejo  $2/2 k/m_1$ .



**Slika 43.2**

Izmerjena/shematizirana specifična toplota vodika. Vidni so prispevki translacije, vrtenja in nihanja. (Peter's Physics Pages)

### 43.3 Kristali

Kristalne vezi Atomi se vežejo tudi v kristale. Osnovna značilnost kristalov je periodična razporeditev atomov. Predstavljamo si, da atomi s sosedi tvorijo podobne vezi kot v molekulah: kovalentne, na primer silicij, in ionske, na primer morska sol. S tem pa niso izčrpani vsi primeri. V kovinskih kristalih, na primer bakru, obstaja *kovinska vez*. Predstavljamo si jo kot skupno morje prosto gibljivih elektronov, ki obliva rešetko pozitivnih ionov. Vodni kristali pa nam kažejo še *molekularno vez*. Ta temelji na silah med električnimi dipoli polarnih molekul.

Nihanje atomov v kristalu Atome v kristalu si lahko predstavljamo kot izolirane oscilatorje, ki nihajo neodvisno drug od drugega. Kakšna so energijska stanja takega oscilatorja, že vemo. To pomeni, da je porazdelitev atomov po nihajnih energijah enaka kot pri dvoatomnem plinu. Edina razlika je v tem, da vsak atom v kristalu niha v treh smereh in je zato enakovreden trem linearnim oscilatorjem. Notranjo energijo kristala zato kar prepisemo:

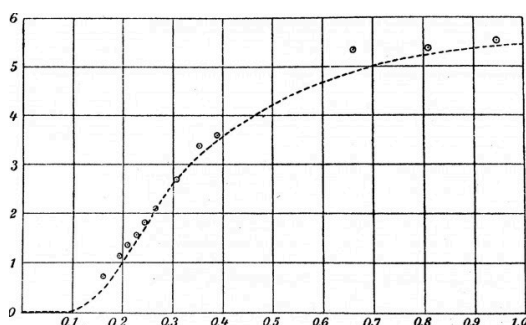
$$U = 3NkT \frac{\hbar\omega/kT}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (43.9)$$

Specifična toplota kristalov Notranjo energijo odvajamo po temperaturi in delimo z maso, pa dobimo specifično toploto kristala (EINSTEIN)

$$c_V = 3 \frac{k}{m_1} \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta/T}}{(e^{\theta/T} - 1)^2} \quad (43.10)$$

$$\theta = \frac{\hbar\omega}{k} .$$

Vpeljali smo "kritično" temperaturo  $\theta$ . To je snovna konstanta, ki opisuje jakost medatomnih vezi. Za vsak kristal jo določimo eksperimentalno tako, da se graf  $c_V(\theta)$  najbolje prilega izmerjenim vrednostim. Za baker je to 340 K. Največjo vrednost ima ogljik v diamantu: 1300 K.



**Slika 43.3** Specifična toplota diamanta. Ordinata: specifična toplota,  $6 \text{ kcal/K} = 3R$ . Abscisa:  $\theta/T$ ,  $\theta = 1300 \text{ K}$ . (Einstein, 1906)

Natančna merjenja pokažejo majhna sistematična odstopanja izmerkrov in napovedi. To pripisujemo dejstvu, da v kristalu ne obstajajo le nihanja atomov okrog ravnovesnih leg, ampak tudi nihanja kristalne mreže z različnimi lastnimi frekvencami. Preseneča nas pa tudi, da v kovinskih kristalih, kot kaže,

elektronski plin nič ne prispeva k toplotni kapaciteti. Saj imajo elektroni vendarle translacijsko energijo in bi zato morali prispevati  $^{3/2}Nk$  k toplotni kapaciteti, prav kakor enoatomni plin. Kovinski kristal iz  $N$  atomov bi torej moral imeti toplotno kapaciteto  $(3+3/2)Nk$ , ima pa zgolj  $3Nk$ . To bomo morali v nadaljevanju še raziskati.

#### 43.4 Elektronski plin

V kovinskih kristalih se "med atomi" gibljejo prosti elektroni. Obravnavamo jih lahko kot elektronski plin. Na prvi pogled bi zato zanje morala veljati kanonična porazdelitev po elektronovih energijskih nivojih. Vendar pa elektroni niso med seboj neodvisni, saj ne moreta biti dva v istem stanju. To je posledica polcelega spina elektronov. Rekli bomo, da tvorijo elektroni *fermionski plin*. Osnovne predpostavke za veljavo kanonične porazdelitve zato niso izpolnjene. Izpeljati moramo drugo, *fermionsko porazdelitev*.

Fermionska porazdelitev

V elektronskem plinu naj bodo vsakemu elektronu na voljo energijski nivoji  $E_i$ . Nivo  $E_i$  naj vsebuje  $N_i$  elektronov. To je zasedbeno število nivoja. Nivo je razcepljen na  $g_i$  razločljivih podnivojev; vsak ima isto energijo. Rečemo, da je energijski nivo degeneriran. V vsakem podnivoju je lahko samo en elektron. Za nivo 1 velja:  $N_1$  nerazločljivih elektronov lahko razporedimo po  $g_1$  podnivojih na  $P_1 = g_1! / N_1!(g_1 - N_1)!$  načinov. Seveda mora biti  $N_1 \leq g_1$ . Isto velja za nivo 2. Število načinov, da razporedimo nabor vseh zasedbenih števil, pa je enako produktu načinov, da razporedimo vsak posamezen  $N_i$ :

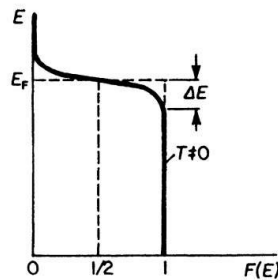
$$B = \prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!} \quad (43.11)$$

Nadaljujemo tako, kot pri kanonični porazdelitvi. Poiskati hočemo tisti nabor zasedbenih števil  $N_i$ , ki maksimira (logaritem)  $B$  ob pogojih  $\sum N_i = N$  in  $\sum N_i E_i = E$ . Iščemo torej vezani ekstrem sestavljene funkcije  $F(N_i) = \ln B + \alpha(N - \sum N_i) + \beta(E - \sum N_i E_i)$  z neznanima konstantama  $\alpha$  in  $\beta$ . Uporabimo aproksimacijo  $\ln x! = x \ln x - x$ , odvajamo  $F$  po  $N_i$ , postavimo odvod na nič in rešimo po  $N_i$ , pa dobimo  $N_i = g_i / [\exp(\alpha + \beta E_i) + 1]$ . Očitno je  $\beta = 1/kT$ . Drugo konstanto zapišemo kot  $\alpha = -E_F/kT$  in dobimo (FERMI)

$$f_i = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{(E_i - E_F)/kT} + 1} \quad (43.12)$$

To je iskana porazdelitev. Pove, kakšna je verjetnost  $f_i$ , da je stanje  $E_i$  zasedeno. Ugotoviti moramo še pomen parametra  $E_F$ . Ta je v splošnem lahko odvisen od temperature. Pri poljubni temperaturi za  $E = E_F$  sledi  $f = 1/2$ :  $E_F$  je torej energijski nivo, ki je - pri dani temperaturi - natanko polovično zaseden z elektroni. Pri  $T = 0$  so vsi delci v najnižjih stanjih in sicer v vsakem po eden.

Ko gre temperatura proti nič, gre  $f$  - za  $E > E_F$  - proti nič oziroma - za  $E < E_F$  - proti ena. Torej je  $E_F(T=0)$  energija najvišjega zasedenega stanja pri ničelni temperaturi. Rekli ji bomo *fermionska energija*.



**Slika 43.4** Verjetnostna porazdelitev plina elektronov po energijskih stanjih. (Anon)

Nebotičniška prispodoba

Fermionsko porazdelitev si nazorno predstavljamo takole. Ekstravaganten arhitekt zgradi visok nebotičnik z nadstropji neenake višine. Vsa nadstropja oštevilči od spodaj navzgor. V vsakem nadstropju je takšno ali drugačno število stanovanj. V nebotičnik se nato vseljujejo ljudje od spodaj navzgor. V vsako stanovanje sta spuščeni le dve osebi - moški in ženska. Naselitev v višje nadstropje je možna le, ko so vsa stanovanja v nižjem nadstropju polno zasedena. Tako se nebotičnik lepo zapolni do, recimo, sedemdesetega nadstropja. Višina tega nadstropja, to je gladina "človeškega morja": pod njo so vsa nadstropja popolnoma zasedena, nad njo so vsa nadstropja popolnoma prazna. Več kot je ljudi v nebotičniku, višja je njihova gladina.

Tako je ponoči, ko je hladno in ljudje spijo. Ko se zdani in otopli, začno med nadstropji voziti dvigala. V eno dvigalo gre lahko le en človek. Dvigalo se lahko dvigne le za eno nadstropje in sicer le tedaj, če je v ciljnim nadstropju kakšno prosto ali polzasedeno stanovanje. To pomeni, da se sprva povzpnejo le ljudje iz najbolj zgornjih zasedenih nadstropij; s tem deloma zasedejo višja nadstropja in za sabo pustijo praznine v nižjih nadstropjih. Šele kasneje pa se lahko povzpnejo tudi ljudje v nižjih nadstropjih. Gladina človeškega morja postane "valovita".

Če so energijski nivoji zelo gosti, zapišemo

$$\frac{dn}{dE} = \frac{g(E)}{\exp(E - E_F)/kT + 1} = g(E) f(E). \quad (43.13)$$

S tem je definirana gostota energijskih stanj  $g(E)$ . Delež elektronov  $dn$  (v prostorninski enoti) na intervalu  $E \pm dE/2$  je enak tamkajšnji gostoti stanj  $g(E)$  krat verjetnosti  $f(E)$ , da bo ta interval zaseden. V nebotičniški prispodobi: ne zanimajo nas več števila ljudi po nadstropjih, ampak deleži vseh ljudi po 100-metrskih odsekih nebotičnika, kolikorkoli nadstropij že ti vključujejo.

### 43.5 Elektroni v kovinah

Gostota elektronskih stanj

Pa izračunajmo gostoto stanj za prevodne elektrone v kovini! Elektrone si predstavljajmo kot delce v tridimenzionalni neskončno globoki potencialni jami. Naj ima jama obliko kocke z robom  $a$ . Lastne funkcije in lastne energije iščemo kot produkt treh rešitev za vsako dimenzijo posebej. Tako dobimo  $\psi \propto \sin n_x \pi/a \cdot \sin n_y \pi/a \cdot \sin n_z \pi/a$  (1) in  $E = \hbar^2 n^2 / 8ma^2 = \hbar^2 k^2 / 2m$  (2), pri čemer  $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ . Ker so  $n_x$ ,  $n_y$  in  $n_z$  neodvisne spremenljivke, ima sfera z radijem  $n$  površino s konstantno energijo. Z vsako spremembo radija  $dn$  zajamemo  $NdE$  stanj v lupini s prostornino  $4\pi n^2 dn$ . Obravnavamo le lupino v enem kvadrantu (1/8 celotne lupine), zato  $N = (\pi/2)n^2(dn/dE)$  (3). Iz (2) izrazimo  $n(E)$ , izračunamo  $dn/dE$  in ga vstavimo v (3). Dobljeno enačbo delimo s prostornino  $a^3$  in dobimo

$$g = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \sqrt{E}. \quad (43.14)$$

Zaradi izključitvenega načela smo dodali faktor 2. Gostota stanj torej počasi narašča z energijo.

Celotna populacija prostih elektronov na prostorninsko enoto znaša  $n = \int g f dE$ . Pri temperaturi 0 K je potrebno integrirati le od 0 do  $E_F$ . Dobimo  $n(E_F)$ , kar obrnemo v

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (43.15)$$

Enačba je uporabna za izračun fermionske energije, če poznamo gostoto prostih elektronov. Za baker, na primer, smo svoj čas že ugotovili  $n = 8,5 \cdot 10^{19} / \text{mm}^3$ , kar pomeni  $E_F = 7 \text{ eV}$ .

Notranja energija in tlak

Notranja energija fermionskega plina znaša  $W = V \int E g dE$  v mejah med 0 in  $E_F$ , kar znese

$$W = \frac{3}{5} N E_F. \quad (43.16)$$

Povprečna energija vseh zasedenih stanj je torej  $3/5 \cdot E_F$ .

Tlak plina izračunamo iz  $p = -\partial W / \partial V$ ,  $W = \sum f E_i$ . Pri počasnem stiskanju ostajajo delci v istih stanjih, zato se  $f$  v vsoti ne spreminja, torej  $p = -\sum f \partial E_i / \partial V$ . Energije enodelčnih stanj so  $E_i = \hbar^2 k^2 / 2m = \hbar^2 \pi^2 n^2 / 2mL^2 = \hbar^2 \pi^2 n^2 / 2m \cdot V^{-2/3}$ . Odvajamo  $\partial E_i / \partial V = -2/3 \cdot E_i / V$  in izračunamo  $p = 2/3 \cdot 1/V \cdot \sum f E_i$ , kar znese

$$p = \frac{2}{3} \frac{W}{V} = \frac{2}{5} \frac{N E_F}{V}. \quad (43.17)$$

To je enačba stanja za fermionski plin. Tlak je odvisen le od gostote in nič od temperature:  $p \propto (N/V)^{5/3}$ . Celo pri  $T = 0$  je različen od nič. Ko stiskamo elektrone, ki ne morejo biti hkrati na istem mestu, se jim pač povečuje kinetična energija in s tem tlak.

Tlak elektronskega plina v kovini tudi preprečuje, da bi se zmanjšala razdalja med ioni zaradi njihovega medsebojnega privlaka. Stisljivost elektronskega plina se torej kaže kot stisljivost kovin.

Fermionska hitrost elektronov

Energija elektronov v potencialni jami je kar njihova kinetična energija. Za gladinske elektrone velja

$$\frac{1}{2} m v_F^2 = E_F. \quad (43.18)$$

S tem smo definirali *fermionsko hitrost* elektronov. Ta prevzame vlogo standardne hitrosti  $v_{\text{rms}}$  iz klasičnega plina. Za baker izračunamo  $1,6 \cdot 10^3$  km/s. Hitrosti in energije v gostem elektronskem plinu so torej mnogo večje kot pri klasičnem plinu z enako številčno gostoto. To je posledica izključitvenega načela, ki elektronom ne dovoli, da bi se svobodno kopičili v stanjih z nizkimi energijami. Je pa res, da ima tako visoke hitrosti le nekaj elektronov tik ob gladini.

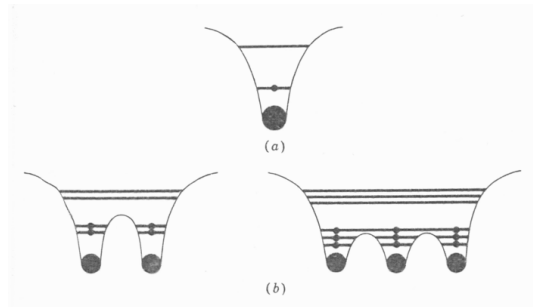
Kako pa naj visoko energijo elektronskega plina uskladimo z njegovo neznatno toplotno kapaciteto? Ko damo kovinski kristal v toplotno kopel, prejema s trki energijske obroke  $kT \sim 0,025$  eV. Te energije kristal ujame v nihanje atomov in v translacijo elektronov. Vendar lahko samo neznatni del elektronov sprejme tako energijo: tisti, ki ležijo na intervalu  $E_F \pm kT$ . Globlji elektroni se pač ne morejo dvigniti, ker nad sabo nimajo prostih mest. Samo neznatni del dovedene toplote se torej porabi za segrevanje elektronskega plina. Za veliko večino elektronov sploh nič ne pomeni, da so prišli v stik z zunanjim vročim okoljem.

### 43.6 Elektroni v kristalih

Gostoto energijskih stanj elektronov v kovinah smo določili iz predpostavke, da je kovinski kristal neskončna potencialna jama. V resnici pa je ta "jama" rezultat skupnega vpliva vseh kristalovih atomov. Nekovinski kristali imajo drugačne električne lastnosti (predvsem prevodnost) od kovinskih. Zato domnevamo, da je gostota energijskih stanj, po katerih so fermionsko porazdeljeni elektroni, pri njih drugačna. Kakšna neki je?

Energijski pasovi

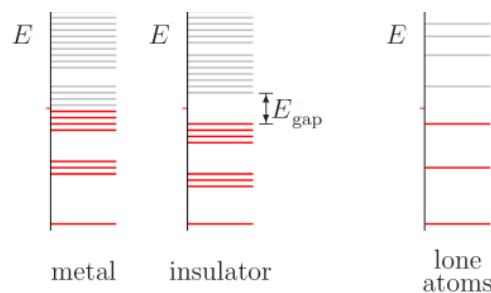
Razmišljamo takole. V izoliranih atomih se elektroni gibljejo v orbitalah. Vsaka orbitala ima ostro določeno energijo. Če se atomi medsebojno približajo, se orbitale začno prekrivati – zunanje bolj, notranje manj. Zaradi izključitvenega načela pa se morajo istoenergijske orbitale pri tem razcepiti. To pomeni, da se vsak energijski nivo atoma razcepi v gost energijski pas kristala. V pasu je približno toliko nivojev kot je atomov v kristalu. Med pasovi ostanejo večji ali manjši razmiki.



**Slika 43.5** Nastanek energijskih pasov. (Brophy, 1966)

Zasedenost pasov

Pri  $T = 0$  so pasovi zasedeni z elektroni do gladinske višine  $E_F$ . Najvišji pas, ki je - deloma ali v celoti - zaseden, poimenujemo *valenčni pas*. Pas nad njim je povsem prazen; poimenujmo ga *prevodni pas*. Razmik med vrhom valenčnega pasu in dnom prevodnega pasu poimenujmo *prepovedani pas*.



**Slika 43.6** Prevodniki in izolatorji. Energijski pasovi in njihova zasedenost pri nizki temperaturi. Razmiki med nivoji so narisani pretirano. (Anon)

Pri višjih/sobnih temperaturah se nekaj elektronov z vrha polno zasedenega valenčnega pasu uspe preseliti na dno prevodnega pasu. Čim ožji je prepovedani pas, tem več elektronov se uspe preseliti. Pri tem izpraznijo enako število nivojev v valenčnem pasu.

Vpliv pasov

Kaj sledi iz predpostavke o energijskih pasovih? Za nizke temperature, ko je prevodni pas prazen, sklepamo takole.

Kristali, ki imajo valenčni pas le delno zaseden, so dobri električne prevodniki: saj imajo valenčni elektroni nad sabo dovolj bližnjih nezasedenih energijskih nivojev, v katere jih lahko napetost potisne, to je, elektronom zviša kinetično energijo. Kristali s polno zasedenim valenčnim pasom so električni izolatorji: saj nad valenčnimi elektroni ni nič bližnjih nivojev za prisilno gibanje.

Če kristal obsevamo z vidnimi fotoni, jih lahko absorbirajo samo tisti elektroni, ki imajo za 1,7-3,5 eV višjeležeče prosto mesto. V prevodnikih/kovinah je takih elektronov mnogo: kristal svetlobo močno absorbira. V izolatorjih, katerih prepovedani pas je širši od  $\sim 3.5$  eV, pa obsevani valenčni elektroni ne dosežejo prevodnega pasu. Kristal je prozoren; tak je diamant. Če je prepovedani pas ožji, pa se svetloba z višjo energijo lahko absorbira, z nižjo pač ne. Kristal absorbira modri del spektra, prepusti pa rumenega. Takšno je žveplo. Če kristal ni čist, ampak vsebuje redke atome primesi, se na njihovem mestu pojavijo dodatni nivoji v



prepovedanem pasu in absorpcija svetlobe poteka temu ustrezno. Od tod razne barve kristalov, recimo rdečega rubina ali modrega safirja.

Pri višjih/sobnih temperaturah se v izolatorjih nekaj elektronov preseli iz valenčnega v prevodni pas. To pomeni, da izolatorji začnejo zelo šibko prevajati tok in zelo šibko absorbirati svetlobo, ki je prej niso. Višja kot je temperatura, bolj je to izrazito.

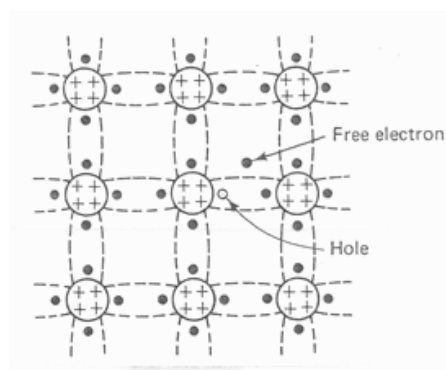
Zamisel o energijskih pasovih torej kvalitativno lepo pojasni električne in optične lastnosti kristalov ter s tem okrepi prepričanje o svoji pravilnosti.

### 43.7 Polprevodniki

Če označimo električno upornost bakra z 1, znaša izmerjena upornost dobrih izolatorjev, recimo keramike, okrog  $10^{18}$ . Obstajajo tudi snovi, katerih upornost pri sobni temperaturi leži nekje vmes med tema mejama; poimenujemo jih *polprevodnike*. Takšna sta, na primer, silicij z upornostjo  $10^{11}$  in germanij z upornostjo  $10^7$ . Oba sta štirivalentna in se v kristale vežeta s kovalentno vezjo.

Nosilci toka

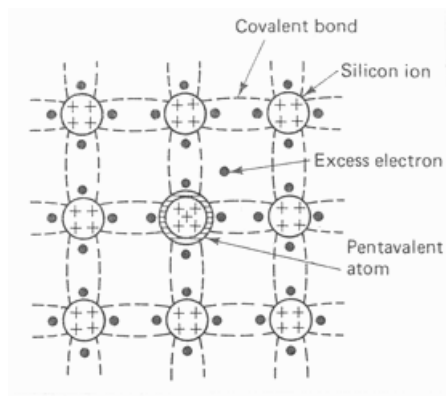
Vsak elektron v prevodnem pasu polprevodnika je pustil za sabo *vrzel* v valenčnem pasu. Pod vplivom napetosti se elektroni v prevodnem pasu gibljejo. V valenčnem pasu pa se vrzeli zapolnjujejo s sosednjimi elektroni. Videti je, kot da se vsaka vrzel giblje in deluje kot nosilec toka z efektivnim nabojem  $+e$  in efektivno maso  $m_v$ . Tok v polprevodnikih je torej sestavljen iz gibanja negativnih elektronov in nasprotnega gibanja pozitivnih vrzeli. Skupna gostota toka znaša  $j = j_e + j_v$ , pri čemer  $j_e = -en_e\langle v_e \rangle$  in  $j_v = en_v\langle v_v \rangle$ .



**Slika 43.7** Prevodniški elektroni in vrzeli v siliciju. (Meadows, 1978)

Dopiranje s primesmi

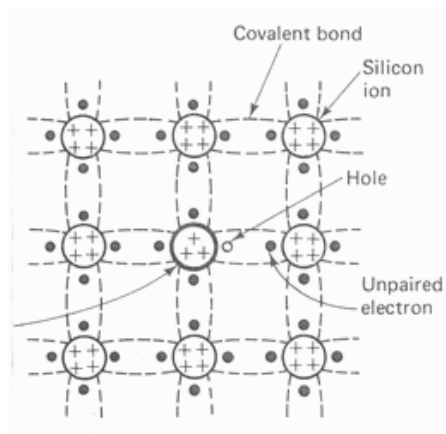
Prevodnost silicija je močno odvisna od nečistoč, ki jih vsebuje. Opazimo, da se zelo poveča, če kristalu (pri kristaliziranju iz raztopine) dodamo nekaj fosforja P, arzena As ali antimona Sb. Vsi so petvalentni. Isto velja za bor B, aluminij Al in galij G; ti so pa trivalentni. Rečemo, da smo silicij *dopirali*. Že dodatek 0,001 % nečistoč poveča prevodnost za nekaj redov velikosti. Kako si to razlagamo?



**Slika 43.8** Negativno dopirani silicij. (Meadows, 1978)

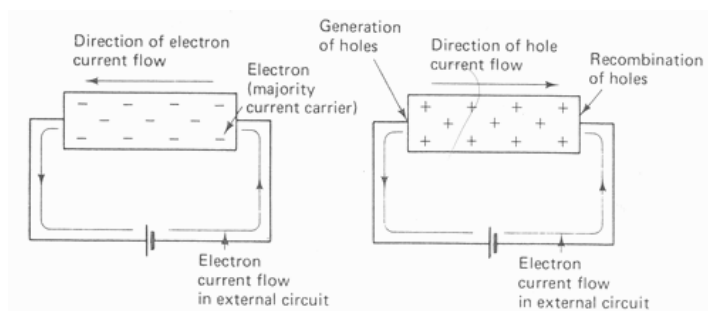
Petvalentnemu atomu, ki se vgradi v kristalno mrežo štirivalentnih atomov, postane en elektron "odveč". Ta elektron preide v prevodni pas. Za sabo pa ne pusti vrzeli. To pomeni, da se število negativnih nosilcev toka (elektronov) poveča, število pozitivnih nosilcev (vrzeli) pa ostaja enako. Že majhno število dopiranih atomov/elektronov je za mnogo redov velikosti večje od prvotnega števila prevodniških elektronov. Izdelali smo polprevodnik tipa n. Večinski nosilci toka v njem so elektroni. Vrzeli so samo manjšinski nosilci. Polprevodnik je navzven nevtralen.

Podobno je z dodajanjem trivalentnih atomov. Ena izmed štirih vezi, s katerimi se tak atom vgradi v okolico, ima vrzel. To pomeni, da se je število vrzeli v valenčnem pasu povečalo, število elektronov v prevodnem pasu pa je ostalo enako. Izdelali smo polprevodnik tipa p. Večinski nosilci toka v njem so vrzeli, manjšinski pa elektroni. Polprevodnik je navzven nevtralen.



**Slika 43.9** Pozitivno dopirani silicij. (Meadows, 1978)

Glavna značilnost polprevodnikov ni v tem, da imajo "vmesno" upornost, marveč v tem, da v njih hkrati prevajajo tok negativni in pozitivni nosilci - elektroni in vrzeli. V čistih polprevodnikih je obojih enako mnogo, v dopiranih pa močno prevladujejo eni nad drugimi. To lastnost polprevodnikov si bomo dobro zapomnili. Ko bo čas, bomo poskušali raziskati možnosti za njeno tehnično uporabo.



**Slika 43.10** Tok skozi polprevodnik n (večinski nosilci so elektroni) in polprevodnik p (večinski nosilci so vrzeli). (Meadows, 1978)

V čistem polprevodniku narašča število elektronov v prevodnem pasu s temperaturo in tako narašča tudi prevodnost. V dopiranem polprevodniku pa je število nečistoč – in s tem število večinskih nosilcev toka – fiksirano, zato je prevodnost približno konstantna. Manjšinski nosilci namreč ne prispevajo znatno k toku.

Kateri so večinski nosilci toka v danem dopiranem polprevodniku – elektroni ali vrzeli –, ugotovimo preko magnetoelektričnega pojava [39.11], to je, z merjenjem prečne napetosti na njih, ko so postavljeni v magnetno polje.

### 43.8 Zvezdna plazma

Elektronski plin v kovinah je ujet znotraj trdne ionske mreže. Če bi bila temperatura mnogo višja, bi mreža razpadla na plin ionov. Tedaj bi nastala *plazma* iz elektronskega in ionskega plina. Taka mora biti snov v vročih zvezdah. Poglejmo plin iz elektronov na ozadju plina iz protonov; s potrebnimi spremembami bo vse povedano veljalo tudi za drugačne plazme.

Elektronski plin je plin fermionov. Naj ima številsko gostoto  $n$  in temperaturo  $T$ . Če je gostota dovolj nizka in temperatura ne previsoka, je to kar idealni plin. Zanima nas, pri kateri gostoti in temperaturi postane pomembno degeneriran in relativističen. Drugače rečeno: določiti želimo območje veljavnosti za idealni elektronski plin.

Degenerirana plazma

Kvantni pojavi postanejo pomembni, ko je termična valovna dolžina elektrona primerljiva z razdaljo med elektroni:

$\lambda = h/G = 1/n^{1/3}$ . Za idealni plin velja  $\langle G^2/2m \rangle = 3/2 \cdot kT$  in  $G = \sqrt{\langle G^2 \rangle} = \sqrt{3mkT}$ , zato

$$\frac{h}{\sqrt{3mkT}} \ll \frac{1}{n^{1/3}}. \quad (43.19)$$

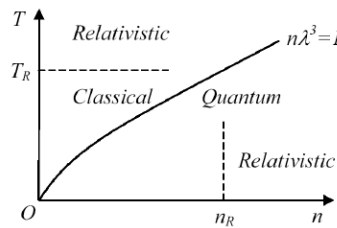
To je pogoj, da plin ni degeneriran. Takšen postane, če je  $T$  prenizka ali  $n$  previsoka. Pri  $10^6$  K, na primer, mora biti za elektrone  $n \ll 10^{30}/\text{m}^3$ , to je, ionizirani vodikov plin mora imeti gostoto  $\rho = nm_p \ll 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Relativistični pojavi postanejo pomembni, ko sta kinetična in fermionska energija elektrona primerljivi z njegovo lastno energijo:  $kT = mc^2$  in  $E_F = mc^2$ . Ker vemo, da  $E_F = (\hbar^2/2m)(3n/8\pi)^{2/3}$ , sledi

$$T \ll \frac{mc^2}{k} \tag{43.20}$$

$$n \ll \frac{\sqrt{8}}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3.$$

To sta pogoja, da plin ni relativističen. Za elektrone velja  $T \ll 10^{10}$  K in  $n \ll 10^{36}/\text{m}^3$  oziroma  $\rho \ll 10^9 \text{ kg/m}^3$ .



**Slika 43.11** Gostote in temperature, pri katerih je plin klasičen ali kvanten (degeneriran), ter meje, kjer postane relativističen. (Anon)

Večina sveta je iz plazme. Takšne so zvezde, zgornje plasti Zemljinega ozračja in elektroni v kovinah, iz katerih so naše priprave. Zdaj vemo, kdaj jih lahko opisujemo z znanimi enačbami za klasični ali kvantni plin in pri katerih temperaturah in gostotah postaneta opisa neustrezna.

### 43.9 Fotonski plin

Tudi fotone v votlini, recimo v vroči peči, lahko obravnavamo kot plin. Kakšna je njihova porazdelitev po energijskih nivojih? Fotoni so med seboj nerazločljivi, zato zanje ne velja kanonična porazdelitev. Tudi niso podložni izključitvenemu načelu, zato zanje ne velja niti fermionska porazdelitev. Porazdeljeni so po svojstveni *bozonski porazdelitvi*. Določimo jo!

Bozonska porazdelitev

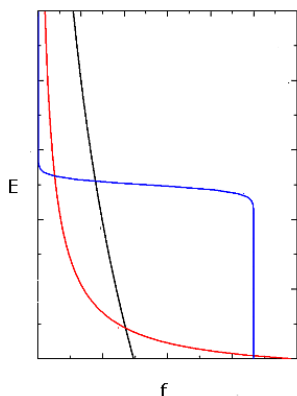
Poglejmo nivo 1, ki ima energijo  $E_1$  in ga sestavlja  $g_1$  podnivojev. Predstavljamo si jih kot  $g_1 - 1$  škatlic, v katere razporejamo  $N_1$  kroglic. Možnih razporeditev je  $(N_1 + g_1 - 1)!$ . Toda kroglice so nerazločljive, zato je  $N_1!$  razporeditev med seboj nerazločljivih. Podobno velja za  $(g_1 - 1)!$  razporeditev. Število različnih porazdelitev torej znaša  $P_1 = (N_1 + g_1 - 1)!/N_1!(g_1 - 1)!$ . Podobno velja za nivo 2 in preostale. Število načinov, da razporedimo zasedbena števila po vseh nivojih, pa je enako produktu načinov, da jih razporedimo po posameznih nivojih:

$$B = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!} \tag{43.21}$$

Nadaljujemo tako kot pri fermionski in še prej pri kanonični porazdelitvi, ter dobimo (BOSE)

$$f_i = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{(E_i - E_F)/kT} - 1}. \quad (43.22)$$

Na energijskem nivoju  $E_i$  je  $N_i$  fotonov. Konstanta  $E_F$  je določena s pogojem  $\sum f_i = 1$ . Porazdelitev je definirana le za  $E > E_F$ . Ker se število fotonov ne ohranja, moramo postaviti  $E_F = 0$ .



**Slika 43.12** Bozonska porazdelitev (rdeča). Za primerjavo sta dodani kanonična (črna) in fermionska (modra) porazdelitev.

Če so energijski nivoji zelo gosti, zapišemo

$$\frac{dN}{dE} = \frac{g(E)}{\exp(E/kT) - 1} = g(E) f(E). \quad (43.23)$$

Število fotonov  $dN$  z energijami na intervalu  $E \pm dE/2$  je enako tamkajšnjemu številu energijskih stanj  $g(E)dE$  krat zasedbeni verjetnosti  $f(E)$ . To velja za kakršnokoli gostoto stanj. Glavni problem je seveda določitev  $g(E)$  v okoliščinah, ki nas zanimajo.

### 43.10 Fotoni v votlini

Energijska stanja

Poiščimo gostoto energijskih stanj za fotonski plin, zaprt v votlini. Predstavljajmo si, da je votlina neskončno globoka potencialna jama v obliki kocke s stranico  $L$ . Valovne dolžine fotonov pri gibanju vzdolž osi  $x$  morajo biti  $\lambda = 2L/n_x$ ,  $n_x = 1, 2, 3 \dots$  in podobno za ostali dve osi. Ker  $G = h/\lambda$ , sledi  $G = (\pi\hbar/L)n$ ,  $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ . Za fotone je  $E = Gc$ , zato  $E_n = (\pi\hbar c/L)n$ . To so dovoljeni energijski nivoji za fotone v votlini. Poiskati moramo gostoto teh nivojev.

Gostota energijskih stanj

Predstavljajmo si prostor z osmi  $n_x$ ,  $n_y$  in  $n_z$ . Vsaka točka v tem prostoru označuje neko vrednost  $n$  in s tem neko vrednost  $E_n$ . Število  $n$  je razdalja točke iz izhodišča. Število stanj z energijo med  $E$  in  $E + dE$  je določeno s številom točk med  $n$  in  $n + dn$ . To je prostornina oktanta krogelne lupine z radijem  $n$  in debelino  $dn$ , torej  $\frac{4}{8}\pi n^2 dn = \frac{4}{8}\pi (L/\pi\hbar c)^3 E^2 dE$ . To je skorajda  $g(E)dE$ . Ampak vsak foton ima dvoje polarizacijskih stanj, zato

$$g(E) = \frac{8\pi V}{(hc)^3} E^2. \quad (43.24)$$

Gostota energije Pri tem je  $V = L^3$  prostornina votline. Število fotonov z energijo  $E \pm dE/2$  je  $dN/dE = g(E)f(E)$ , gostota energije je  $dw = EdN/V$ , torej

$$\frac{dw}{dE} = \frac{8\pi}{(hc)^3} \frac{E^3}{e^{E/kT} - 1} \quad (43.25)$$

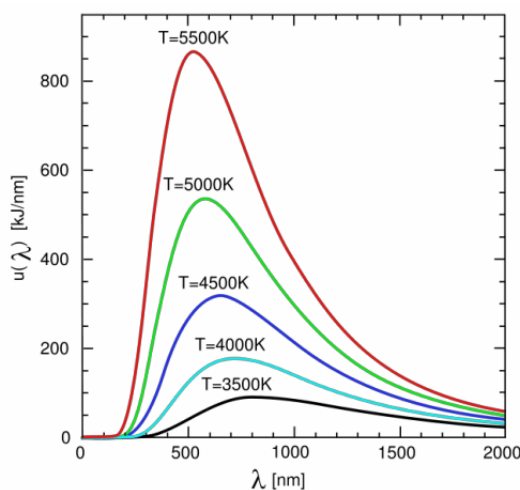
Upoštevamo  $E = h\nu$ , pa dobimo (PLANCK)

$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (43.26)$$

To je porazdelitev gostote energije po frekvencah. Pri nizkih frekvencah  $h\nu \ll kT$  lahko eksponentno funkcijo razvijemo do linearne člena in vidimo, da spekter narašča kot  $\nu^2$ , pri visokih frekvencah pa eksponentno pojema.

Ustrezno porazdelitev po valovni dolžini dobimo kot  $dw/d\lambda = dw/d\omega \cdot d\omega/d\lambda$ , kar znese (PLANCK)

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (43.27)$$



**Slika 43.13** Energijski spekter fotonov v votlini. (Anon)

Notranja energija in tlak

Fotonski tlak izračunamo podobno kot tlak elektronskega plina. Za fotone velja  $p = -\sum \partial E_i/dV \cdot n$  in  $E_i = \pi \hbar c n/L = \pi \hbar c n/V^{1/3}$ . Izračunamo  $\partial E_i/dV = -1/3 \cdot E_i/V$ , tako da je

$$p = \frac{1}{3} \frac{W}{V} \quad (43.28)$$

Tlak fotonov znaša le 1/3 gostote energije in ne 2/3, kakor pri (nerelativističnih) elektronih. Integracija (43.27) po vseh valovnih dolžinah pokaže

$$p = a T^4 \quad (43.29)$$

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \cdot$$

To je enačba stanja za fotonski plin. Tlak je odvisen le od temperature:  $p \propto T^4$ .

Toplotno sevanje

Na namišljeno ploščico  $dS$  v votlini vpada iz smeri njene normale iz prostorskega kota  $d\Omega$  moč  $dP$ . Vpadajoča moč je neodvisna od orientacije ploščice. Velja  $B \equiv dP/dS_{\perp}d\Omega = cw$ , torej

$$\frac{dB}{d\lambda} = \frac{2hc^3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (43.30)$$

Iz vseh smeri polprostora pa na ploščico vpada, kot vemo,

$$\frac{dj^*}{d\lambda} = \pi \frac{dB}{d\lambda}. \quad (43.31)$$

Kar vpada na namišljeno ploščico, jo na drugi strani tudi zapušča.

Če torej v steno votline izvrtamo luknjico, vpada nanjo ravno toliko energije, kot se jo na drugi strani izseva v polprostor.

Izpeljali smo izrek o *toplotnem sevanju* črnega telesa, ki smo ga svoj čas našli eksperimentalno (27.9). Tedanji konstanti se pokažeta kot  $c_1 = 2hc^2$  in  $c_2 = hc/k$ .

Integracija (43.31) in (43.30) po vseh valovnih dolžinah da že znani sevalni zakon in pokaže, od česa je odvisna tedanja sevalna konstanta:

$$\begin{aligned} j^* &= \sigma T^4 & (43.32) \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \\ a &= \frac{4\sigma}{3c}. \end{aligned}$$

Maksimum sevanja dobimo z odvajanjem (43.30) po valovni dolžini, z izenačitvijo odvoda z nič ter z rešitvijo te enačbe.

Enačbo moramo rešiti numerično: z grobim tabeliranjem in nato z razpolavljanjem ničelnega intervala:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= \frac{b}{T} & (43.33) \\ b &= \frac{hc}{4.97k} \end{aligned}$$

Tako smo razložili mnoge - do sedaj nerazumljive - toplotne lastnosti plinov in kristalov; električne lastnosti prevodnikov in izolatorjev; ter svetlobne spektre plinov in trdnin. Obenem smo nekaj eksperimentalnih konstant izrazili z osnovnimi konstantami. Uspeh je sijajen. Hkrati se je odprlo nepregledno polje za nadaljnje raziskave plinaste in kondenzirane snovi. In to je pravi trenutek, da stvar predamo v roke specialistom.  $\square$





## 44 Atomska jedra

O jedrih - Števci delcev - Meglična komora - Preletna dolžina - Dinamika trkov - Trki alfa ob jedra - Odkritje nevtronov - Vezavna energija - (Ne)stabilnost jeder - Razpadni mehanizmi - Statistika razpadov - Trki nevtronov ob jedra - Razcep težkih jeder - Zlivanje lahkih jeder - Kozmični žarki

### 44.1 O jedrih

Atomi so sestavljeni iz dveh delov: iz zunanjšega elektronskega ovoja in iz notranjšega jedra. Zunanji del smo raziskali. Sedaj se hočemo lotiti notranjšega dela.

Atomska jedra O jedrih marsikaj že vemo. Njihov premer je reda velikosti  $10^{-4}$  Å, to je  $10^4$ -krat manjši od premera atomov [41.7]. Če si jedro predstavljamo kot nogometno žogo, so elektroni muhe, ki brenčijo okrog nje na razdaljah do 1 km. Jedra nosijo pozitivne naboje, ki so natančni celoštevilčni mnogokratniki osnovnega naboja: od 1 pri vodiku do 92 pri uranu [41.7] Mase jeder so neprimerno večje od mase okolišnjih elektronov, ki znašajo po 1/1800 atomske masne enote [39.4]. Najlažje je jedro vodika, ki ga imenujemo proton, in znaša približno eno masno enoto. Najtežje je jedro uranovega izotopa z 238 masnimi enotami. Relativne mase čistih izotopov so zelo blizu celim številom. Odmik od njih je manjši od 0,1 [39.6].

Različna atomska jedra označimo tako kot ustrezne atome:  ${}_Z X^A$ . Pri tem je  $Z$  število osnovnih nabojev (*vrstno število*),  $A$  je zaokroženo število masnih enot (*masno število*) in  $X$  je ime jedra. Na primer: vodikovo jedro označimo kot  ${}_1 H^1$  in uranovo jedro kot  ${}_{92} U^{238}$ . Masno število je zmeraj večje od vrstnega števila. Zapisovanje vrstnega števila ni nujno potrebno, ker je že določeno s simbolom za element.

Protoni in nevtroni Skoraj celoštevilčne mase jedrskih izotopov kar prosijo, da si jedro  ${}_Z X^A$  predstavljamo kot skupek  $A$  vodikovih jeder - protonov. Ker pa ima jedro le  $Z$  nabojev, mora biti  $A - Z = N$  protonov nekako "nevtraliziranih". Kako je to mogoče?

Prva misel je tale: morda je v jedru vezanih toliko dodatnih elektronov, da je naboj jedra pravi. Ker bi bili v tem primeru elektroni omejeni na zelo majhen del prostora, bi moral biti razsip njihovih hitrosti zelo velik. Recimo, da je premer jedra 10 fm. Valovna dolžina vezanega elektrona mora biti zato manjša od  $\lambda = 10$  fm. Ustrezna gibalna količina znaša  $G = h/\lambda$  in energija  $E^2 = (Gc)^2 + (mc^2)^2$ . Ker  $Gc \gg mc^2$ , dobimo  $E \approx Gc = 124$  MeV. Tako energični elektroni bi morali v hipu odleteti proč.

Druga misel je bolj radikalna: poleg protonov morda obstaja v jedru še ena vrsta delcev. Ti imajo (skoraj) enako maso kot protoni, nimajo pa naboja. Recimo jim *nevtroni*. Ali zares

obstajajo ali ne, na tej stopnji ne moremo vedeti. Vsekakor je misel privlačna in ponuja resen izziv za potrditev ali zavržbo. Kot raziskovalci vemo: kdor bo zaznal nevtron, mu slava ne uide. Obstoj nevtronov zato do nadaljnjega privzamemo kot obetavno domnevo. Protone in  $-$  za sedaj domnevne  $-$  nevtrone poimenujemo s skupnim imenom *nukleone*.



**Slika 44.1** Atomsko jedro ogljika, kakor si ga zamišljamo. Jedro je sestavljeno iz pozitivnih protonov in nevtralnih nevtronov. (Morrison, 1994)

Kako hitro se nukleoni gibljejo v jedru? Tako hitro, kot razodevata velikost jedra in načelo nedoločenosti. Načelo nedoločenosti zapišemo kot  $2rv = h/m$ , iz česar sledi  $v \sim 10^4$  km/s, kar je desetkrat manj od svetlobne hitrosti. Gibanje je nerelativistično.

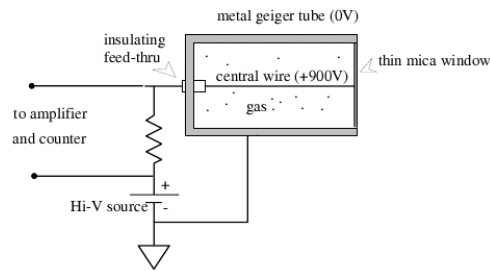
Močna sila Protoni v jedru se med seboj odbijajo z električno silo. Da se jedro ne razleti, mora zato med njegovimi nukleoni delovati neka privlačna sila, ki nasprotuje električni. Poimenujmo to silo *močna sila*. Očitno mora sila delovati med pari proton-proton, proton-nevtron in nevtron-nevtron. Kot vemo, je sipanje delcev alfa na jedrih pokazalo, da ti delci zaznavajo električno silo vse do razdalje  $\sim 10$  fm od središča jedra in pri tem ne čutijo vpliva nobene druge sile. Močna sila mora zato imeti kratek doseg, morda okrog 1 fm. Od česa je odvisna, pa zaenkrat ne moremo reči.

#### 44.2 Števci delcev

Atomska jedra smo odkrili z obstreljevanjem atomov z delci alfa. Podrobnejše raziskave jeder bomo vsekekor izvajali na podoben način, torej z njihovim obstreljevanjem. Delce alfa, pa tudi delce beta in gama smo do sedaj zaznavali kar s fotografsko ploščo ali s svetlečim zaslonom in mikroskopom. To je okorno in naporno za načrtovane raziskave. Pojavi se potreba po boljših merilnikih teh delcev. In potreba je mati iznajdb.

Ionizacijska cev Prvo zamisel za merilnik delcev dobimo iz že znanega pojava, da se nabit ploščati kondenzator počasi razelektri, če vanj postavimo radioaktivni izvor [41.6]. Sevani delci namreč ionizirajo zrak med elektrodama; s tem postane prevoden. Merilnik zato zgradimo kot zaprto kovinsko (npr. aluminijasto) cev. Po sredini ima tanko kovinsko žico. Med žico in ohišjem je priključena napetost. Pozitivni priključek je na žici. Električno polje med ohišjem in žico je cilindrično in je zato ob žici zelo močno. Cev je napolnjena s plinom (npr. zrakom ali helijem). En konec cevi ima tanko okno

iz mice. Delci alfa in beta lahko prodrejo le skozi okno, ne pa tudi skozi ohišje. Delci gama lahko prodrejo od povsod. To je *ionizacijska cev* (GEIGER).

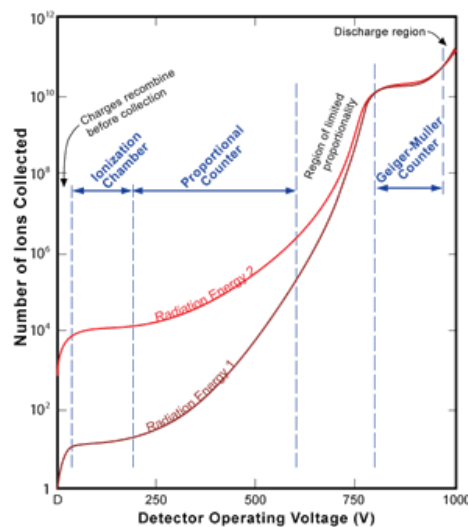


**Slika 44.2** Ionizacijska cev. Njen izhod je priključen na ojačevalnik in oscilograf/osciloskop. (Anon)

Ko nabit delec alfa ali beta prileti v cev, zaporedoma trka z atomi plina in jih ionizira, dokler pač ima dovolj kinetične energije. Delec gama pa iz kakega atoma – predvsem v ohišju – izbije elektron in pri tem preneha obstajati. Izbiti elektron nato ionizira atome plina. Ustvarjeni ionski pari v električnem polju stečejo vsak proti svoji elektrodi, lahki elektroni hitreje, težki ioni počasneje. Elektroni vstopijo v pozitivno žico, ioni pa se ob negativnem ohišju nevtralizirajo. Nastane kratek tokovni sunek, ki traja vse dotlej, dokler je v cevi kaj nabitih nosilcev toka. Tokovni sunek se na zunanjem uporniku odraža kot napetostni sunek. Vsak vpadli delec, ki uspe tvoriti kaj ionskih parov, ustvari svoj izhodni sunek. Zaporedje sunkov po potrebi ojačamo in ga vodimo na oscilograf ali osciloskop.

Trije načini dela

Koliko ionskih parov ustvari vpadli delec? Toliko, kolikor znaša njegova kinetična energija, deljena s povprečno ionizacijsko energijo atomov plina v cevi. Delec alfa nosi  $\sim 1$  MeV energije, ionizacijska energija valenčnega elektrona v atomu dušika ali kisika znaša  $\sim 10$  eV, kar pomeni okrog  $10^5$  ionskih parov. Kaj se z nastalimi elektroni in ioni zgodi, pa je odvisno od napetosti med obema elektrodama.



**Slika 44.3** Karakteristika tipične ionizacijske cevi. Prikazano je število na elektrodah zbranih ionskih parov v odvisnosti od delovne napetosti in sicer za dve energijsko različni vrsti vpadajočih delcev. (Iowa State University).

— Če je delovna napetost pod nekaj deset voltov, se nastali elektroni in ioni večinoma *rekombinirajo*, preden uspejo priti vsak na svojo elektrodo. Žica torej posrka manj elektronov, kakor jih je bilo ustvarjenih. Večja kot je napetost, večji delež jih posrka. Tokovni sunek od "istega" vpadlega delca zato narašča z delovno napetostjo.

— Pri napetostih nad nekaj deset voltov žica že posrka vse nastale elektrone, preden se uspejo rekombinirati z ioni. Nadaljnje večanje napetosti ne vpliva na število posrkanih elektronov. Tokovni sunek od "istega" vpadnega delca je zato neodvisen od delovne napetosti in je kar enak ioniziranemu naboju, ki ga je ta delec ustvaril. Rečemo, da cev deluje kot *ionizacijska komora*.

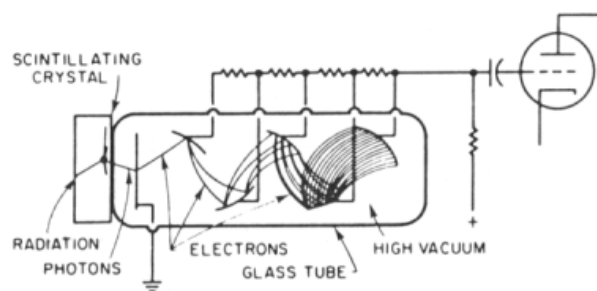
— Pri napetostih nad nekaj sto voltov se nastali elektroni v bližini žice že tako močno pospešijo, da ionizirajo druge atome; ob žici nastane plaz sekundarnih ionskih parov. Cev torej deluje kot pomnoževalka naboja. Žica posrka več elektronov, kakor jih je prvotno nastalo. Čim višja je napetost, tem močnejši plaz nastane. Tokovni sunek od "istega" vpadnega delca torej narašča z delovno napetostjo. Ugodno pa je, da je "ojačani" naboj približno sorazmeren s primarnim ioniziranim nabojem. Zato rečemo, da cev deluje kot *ionizacijski proporcionalni števec*.

— Blizu tisoč voltov je meja, ko se sekundarni plaz elektronov razširi od bližine žice preko celotne prostornine cevi. Nastali tokovni sunki so vsi enaki, ne glede na to, kako energetični delci jih sprožijo. Saj predstavlja primarna ionizacija le majhen delež v plazu. Rečemo, da cev deluje kot *ionizacijski števec*.

Če je delcev malo, jih lahko sproti rišemo na oscilografu. Če jih je veliko, pa fotografiramo osciloskopov zaslon pri enkratnem preletnem času, recimo 0,1 sekunde, in nato na fotografiji v miru preštejemo število sunkov. Ionizacijska cev zazna večino vpadlih delcev alfa in beta, ker je njena velikost (in vsebnost) primerljiva z dosegom teh delcev. Delci gama pa imajo tako velik doseg, da jih cev zazna le malo, morda okrog 1 %.

Scintilacijski števec

Druga zamisel je naslednja. Vemo, da elektroni in delci alfa povzročajo drobne bliske na zaslonu s kristalčki ZnS. Tam namreč izbijajo elektrone iz valenčnega v prevodni pas, nakar se ti elektroni rekombinirajo z vrzeli in pri tem izsevajo vidne fotone. Kaj ko bi te fotone ujeli v fotopomnoževalko [40.2]? Tako bi drobne bliske "spremenili" v resne električne sunke. Izumili smo *scintilacijski števec*: združbo "svetlečega" kristala in fotopomnoževalke.



**Slika 44.4** Scintilacijski števec. Priklučen je na triodo ojačevalnika. (Dresser Atlas)

Poiskati je treba še primerne kristale, ki izdatno sevajo vidne fotone, ko jih zadenejo nabiti delci ali fotoni gama. Odkrijemo CsI za nabite delce in NaI (z dodatkom talija) za fotone gama. Sunke napetosti gledamo na priklučenem oscilografu ali osciloskopu. Tak sunek je oster in je sorazmeren z energijo fotona, ki vpade na katodo fotopomnoževalke. Scintilacijski števec je torej odličen merilnik, s katerim – po umerjanju – lahko določamo tako energijo delcev kot njihovo pogostost.

### 44.3 Meglična komora

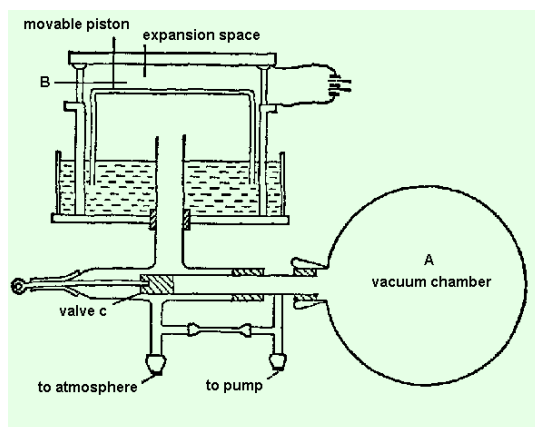
Kondenzacija pare

Na tretji detektor naletimo slučajno. Kot raziskovalci, ki jih zanima nastanek oblakov, poskušamo ustvariti meglo v laboratoriju. To nam uspe tako, da nasičeno vlažen zrak v zaprtem cilindru z batom hitro razpnemo. Zrak s paro se ohladi pod temperaturo rosišča in prenasočena para se kondenzira v kapljice. V prašnem zraku nastane lepa megla. Če zrak pred tem filtriramo, pa megla (pri enakem raztegu kot prej) ne nastane.

Ker smo že pri meritvah, poskusimo še z večjim raztegom in glej presenečenje – kljub očiščenemu zraku se pri 1,25-kratnem raztegu pojavijo redki kosmiči megle! Na čem pa se zdaj para kondenzira? Mogoče so to ioni, ki jih je v zraku vedno nekaj? Domnevo preverimo tako, da zrak presvetlimo z rentgenskimi žarki ali z uranovim sevanjem ter s tem ustvarimo dodatne ione. Ustvarjena megla je sedaj mnogo gostejša. Ko pa cilinder pred raztegom postavimo v električno polje, ki ione potisne na stene, megla ne nastane.

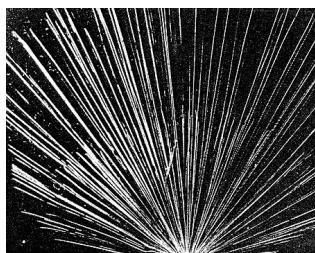
Ionizacijske sledi

Takoj se pojavi naslednja misel: če tik pred ekspanzijo preleti skozi cilinder ionizirajoč delec, recimo delec alfa, bo vzdolž svoje poti ioniziral molekule zraka in na njih se bo kondenzirala para v kapljice. Delec bo zarisal svojo pot! Izumili smo *meglično komoro* (WILSON).



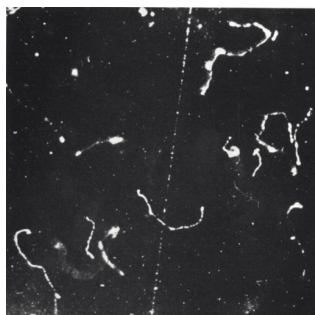
**Slika 44.5** Meglična komora. Nabiti delci v njej zarisujejo svoje poti kot nize iz drobnih kapljic. (Wilson, 1912 / priredba)

Za praktično uporabo nadomestimo nerodni bat z izsesano posodo in pipo. Ko pipo odpremo, se zrak iz cilindra raztegne v posodo. Komoro postavimo v električno polje, ki odstrani vse moteče ione. Obdamo jo z dvema tuljavama, da v njej ustvarita homogeno magnetno polje in ukrivljata poti delcev. Priključimo še fotografsko kamero, ki ob vsaki ekspanziji samodejno posname sliko.



**Slika 44.6** Delci alfa v meglični komori. Izvor seva delce dveh energij, kar se vidi v njihovem različnem dosegu. (Wilson, 1920+)

Komoro preizkusimo tako, da vanjo vstavimo košček radioaktivne snovi. Dobimo krasne slike žarkov alfa in beta. Sledi delcev alfa so veliko bolj izrazite kot sledi delcev beta. Dolžina meglene poti je odvisna od začetne kinetične energije delca. Večja kot je energija, daljša je pot. Poti se proti koncu debelijo, kar kaže na to, da počasnejši delci močneje ionizirajo atome. Očitno je to zato, ker dalj časa letijo mimo njih.



**Slika 44.7** Elektroni v meglični komori. Ozka ravna črta pripada hitremu elektronu iz radioaktivnega vira. Debele kratke črte so zarisali počasni elektroni, ki so jih iz atomov zraka izbili rentgenski žarki. (Wilson, 1920+)

Sledi fotonov gama žal ne vidimo, ampak vidimo sledi elektronov, ki jih ti fotoni izbijejo iz atomov. Ob ionizaciji atoma namreč foton izgine, izbiti elektron pa izleti iz atoma in na svoji poti ionizira druge atome.

#### 44.4 Preletna dolžina

Delec alfa orje skozi elektronske ovoje atomov kot topovska krogla skozi roj muh. Pri trku z elektronom izgubi le majhen del svoje kinetične energije in le neznatno spremeni svojo smer. Ko potroši vso energijo, se ustavi. Kako dolgo pot prepotuje?

Izguba energije

Da bomo bolj splošni, obravnavajmo namesto delca alfa kakršenkoli težek delec (alfa, proton ali poljuben ion) z maso  $m$ , nabojem  $Ze$  in hitrostjo  $v$ . Izguba energije takega delca ob enem trku z elektronom je sorazmerna s kvadratom gibalne količine, prenešene na elektron:  $\Delta K \propto G^2$ . Ta gibalna količina je sorazmerna s trajanjem trka:  $G \propto t$  in trajanje je obratno sorazmerno s hitrostjo delca:  $t \propto 1/v$ . Zato je povprečna izguba energije ob enem trku  $\Delta K \propto 1/v^2$ . Ker je prenešena gibalna količina sorazmerna z elektrostatično silo  $G \propto F_e \propto Z$ , je zato  $\Delta K \propto Z^2$ . Na dolžinsko enoto izgubljena energija pa je sorazmerna s prostorsko gostoto elektronov:  $\Delta K \propto n$ . Tako ugotovimo  $dK/dl \propto Z^2 n/v^2$ .

Snov z gostoto  $\rho$  naj bo sestavljena iz enakih atomov z maso  $m_a$ , vrstnim številom  $Z_a$  in masnim številom  $A$ . Prostorska gostota elektronov  $n$  se potem izraža s prostorsko gostoto atomov  $n_a$  takole:  $n = Z_a n_a$ . Velja  $\rho = m_a n_a = A u \cdot n / Z_a$ , torej  $n = (Z_a/A)(1/u)\rho$ . Razmerje  $Z_a/A$  je za vse atome razen vodika približno enako veliko (znaša 0,4–0,5), zato ga proglasimo za konstanto in velja

$$\frac{dK}{dl} \propto - \frac{Z^2 \rho}{v^2} \propto - \frac{Z^2 m \rho}{K} \quad (44.1)$$

Negativni predznak pove, da se energija zmanjšuje. Izguba energije na dolžino poti je torej odvisna od dveh značilnosti delca – njegove hitrosti in naboja – in od dveh značilnosti okolišnje snovi – njene gostote in povprečne ionizacijske energije (skrite v sorazmernostni konstanti). Čim hitrejši je delec, tem manj energije izgubi na dolžinsko enoto in tem globlje prodre v snov. Od dveh delcev z enako energijo in nabojem pa se tisti, ki ima večjo maso, prej ustavi.

Doseg delca

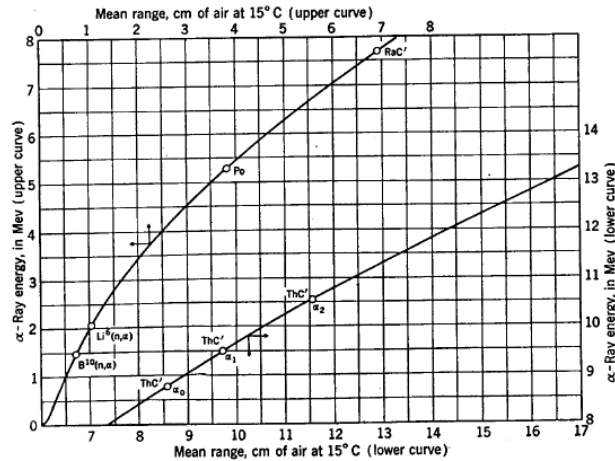
Dolžina poti, ki jo delec z energijo  $K$  preleti, preden se ustavi, znaša  $R = \int_0^K dK/(dK/dl)$ , torej

$$R \propto \frac{K^2}{Z^2 \rho} \quad (44.2)$$

Iz tega vidimo, da  $R \propto K^2$ . Sorazmernostna konstanta je odvisna od vrste delca in od vrste snovi. Določimo jo eksperimentalno. Delce alfa z znano energijo (določeno z magnetnim odklonom) spuščamo v meglično komoro, napolnjeno z zrakom pri standardnih pogojih (ter vodno paro), in merimo dolžino meglenih sledi. Med obema količinama ugotovimo naslednjo odvisnost:

$$\frac{R}{\text{mm}} = 3,2 \left( \frac{K}{\text{MeV}} \right)^{3/2}. \quad (44.3)$$

EkspONENT 3/2 sicer ni enak pričakovanemu eksponentu 2, ampak to nas ne sme preveč presenetiti, saj smo slednjega izračunali zelo na grobo.



**Slika 44.8** Dolžina sledi delca alfa v zraku pri standardnih pogojih. Prikazani so izmerki in prilegajoče se krivulje za različne radioaktivne izvore z energijami med 1 in 10 MeV. (Burcham, 1979)

Če poznamo doseg delca v plinu z gostoto  $\rho_1$ , ali poznamo doseg tudi pri gostoti  $\rho_2$ ? Da, enačba (44.2) pove  $\rho R = \text{const}$ , torej

$$R_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} R_1. \quad (44.4)$$

S precej predrznosti upamo, da velja zapisana enačba celo za dve različni snovi, na primer za plinasti zrak in za trdni aluminij. Poskusi to v grobem potrdijo. Iz tega sklepamo, da so povprečne ionizacijske energije elektronov v različnih atomih približno enake.

#### 44.5 Dinamika trkov

Ko potuje delec alfa skozi plin in ionizira njegove atome, bo prej ali slej trčil ob atomsko jedro – tako nas vsaj uči poskus z zlato folijo, s katerim smo atomska jedra sploh odkrili. Če jedro ni pretežko, ga bo delec alfa pač moral premakniti ali celo izbiti iz elektronskega ovoja. Pričakujemo, da bo takšno golo jedro tudi zarisalo svojo kondenzacijsko sled.

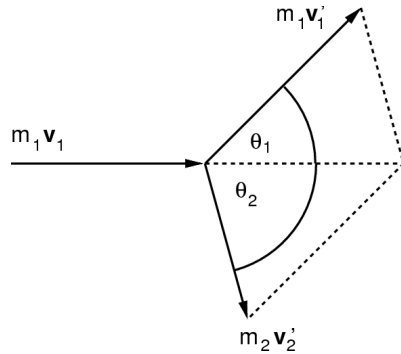
Ohranitveni zakoni

Ne glede na to, kakšne so sile med izstrelkom in jedrom, pričakujemo, da ob njunem trku vendarle veljajo ohranitveni zakoni gibanja: ohranitev energije, gibalne količine in vrtilne količine. Pred trkom naj ima delec alfa gibalno količino  $m_1 \mathbf{v}_1$ . Po trku se ta gibalna količina porazdeli na delec alfa  $m_1 \mathbf{v}_1'$  in na jedro  $m_2 \mathbf{v}_2'$ . Velja  $m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$ . To vektorsko enačbo zapišimo v komponentah. Iz risbe razberemo



$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2 \\ 0 &= m_1 v_1' \sin \theta_1 - m_2 v_2' \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (44.5)$$

Od prvotne smeri je delec alfa odklonjen za kot  $\theta_1$  in jedro za kot  $\theta_2$ . Prva enačba pravi, da je prvotna gibalna količina delca alfa enaka vsoti gibalnih količin obeh delcev v prvotni smeri. Druga enačba pa pravi, da se gibalne količine obeh delcev, pravokotne na prvotno smer, izničijo.



**Slika 44.9** Trk delca z jedrom. Po trku odletita delec in jedro vsak v svojo smer.

Pri trku se lahko ohranja tudi kinetična energija; tedaj rečemo, da je trk *elastičen*. Kadar pa ni tako, pravimo, da je trk *neelastičen*. Pri neelastičnem trku se nekaj začetne kinetične energije pretvori v notranjo energijo produktov ali pa se nekaj začetne notranje energije pretvori v kinetično energijo produktov. Priročno je vpeljati razliko kinetičnih energij po in pred trkom:  $Q = K' - K$ . Za elastične trke je potem  $Q = 0$  in za neelastične  $Q \neq 0$ .

Privzemimo, da je trk elastičen. Potem se mora ohranjati kinetična energija

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (44.6)$$

Mase in odbojni koti Iz enačb (44.5) in (44.6) odstranimo hitrosti ter dobimo

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}. \quad (44.7)$$

Enačba omogoča, da iz izmerjenih kotov  $\theta_1$  in  $\theta_2$  izračunamo maso udarjenega jedra. To je zelo prikladen način, da ugotovimo, kakšno jedro je udarec prejelo. Če trčita dva enako težka delca, je  $m_1 = m_2$  in sledi  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Delca se torej razletita pod pravim kotom.

Centralni trk Poseben primer je centralni trk. Tedaj  $\theta_1 = 0$  in  $\theta_2 = 0$  in iz (44.5) ter (44.6) sledi

$$\frac{v_2'}{v_1} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}. \quad (44.8)$$

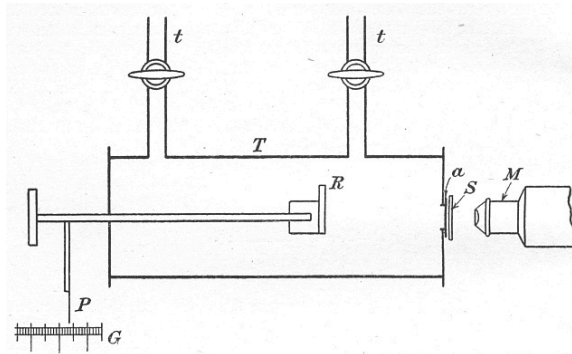
Če trčita enako težka delca, je  $v_2' = v$ . To pomeni, da se izstrelek ustavi, tarča pa prevzame vso njegovo hitrost. Lažja tarča odleti

hitreje od izstrelka in težja počasneje. Vodikovo jedro, ki ga centralno zadene delec alfa, tako odleti s hitrostjo  $v_2'/v_1 = 1,6$ . To je tudi maksimalna hitrost, ki jo vodikovo jedro lahko dobi pri takem trku. Dušikovo jedro, ki je težje od delca alfa, pa odleti s hitrostjo  $v_2'/v_1 = 0,4$ .

#### 44.6 Trki alfa ob jedra

Delci alfa in vodik

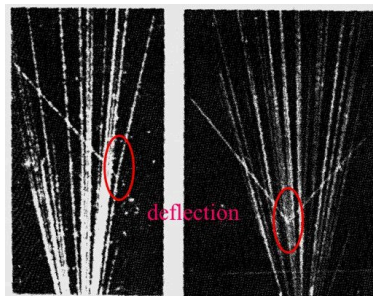
Pa obstreljajmo najlažja jedra – vodikova – z delci alfa! V izsesano cilindrično posodo namestimo radioaktivni izvor. Radioaktivni žarki prehajajo skozi odprtino v steni in vpadajo na svetleč zaslon, kjer opazujemo bliske z mikroskopom.



**Slika 44.10** Priprava za opazovanje raznih plinov z delci alfa. t = dovod preiskovanega plina, R = radioaktivni vir, a = srebrna folija, S = scintilacijski zaslon, M = mikroskop. (Rutherford, 1919 / priredba)

S prečnim magnetnim poljem iz curka odstranimo žarke beta. Nato pred zaslon postavimo tanko srebrno folijo. Njeno debelino izberemo tako, da na zaslonu ni več bliskov (od delcev alfa). Potem v posodo spustimo vodik. Na zaslonu se pojavijo bliski. Sklepamo, da jih povzročajo vodikova jedra, ki so jih iz atomov vodika izbili delci alfa pri centralnih trkih (RUTHERFORD).

Trke delcev alfa z jedri vodika opazujemo tudi v meglični komori. Pri tem moramo biti potrpežljivi. Potrebni je mnogo opazovanj, da uspemo takšen trk fotografirati. Seveda lahko opazujemo tudi trke z jedri kakega drugega plina. Zlasti lepo je opazovati helij: tedaj sta masi izstrelkov in tarč enaki in sipalni kot med njima znaša  $90^\circ$ .



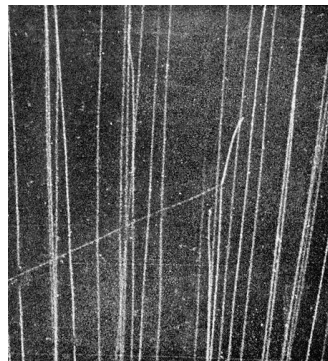
**Slika 44.11** Vpad delcev alfa na vodik (levo) in helij (desno). Delec alfa je po trku z jedrom vodika (protonom) odklonjen za  $8^\circ$  in proton za  $68^\circ$ . Kota povesta, da je razmerje mas obeh delcev 4 : 1. Trk delca alfa z jedrom helija pa kaže medsebojni kot  $90^\circ$ , saj sta oba delca enako težka. (Blackett, 1925 / priredba)

Delci alfa in dušik

Obstreljujemo tudi druge pline in sicer natanko tako kot vodik. Pri kisiku in ogljikovem dioksidu se za srebrno folijo (ki zaustavlja delce alfa) na zaslonu nič ne pokaže. Pri dušiku pa opazimo na zaslonu bliske. Odklon z magnetnim poljem pokaže, da te bliske povzročajo hitri protoni. Od kod so se vzeli, če pa v posodi ni vodika, ampak je dušik? Domnevamo, da sta se delec alfa in jedro dušika zlila v novo jedro, pri čemer je proč odletel proton. Ohranitev naboja in masnega števila pove, da mora biti nastalo jedro kisik (RUTHERFORD):



Domnevo preverimo in potrdimo v meglični komori, ki jo napolnimo z dušikom (in vodno paro).



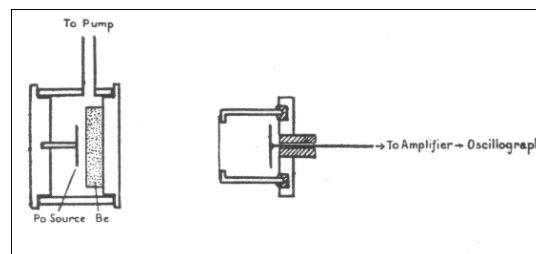
**Slika 44.12** Vpad delca alfa na dušik. Ta se spremeni v kisik (debela kratka sled) in izseva proton (dolga poševna sled). Potrebni je več tisoč fotografij, da ujamemo takšno pretvorbo. (Blackett, 1925)

Tako smo prišli do presenetljive ugotovitve: atomska jedra - in s tem atomi - se dajo spreminjati. To velja vsaj za spremembo dušika v kisik. Pričakujemo, da podobno velja tudi za druge snovi. Odkrili smo *transmutacijo* elementov.

#### 44.7 Odkritje nevtronov

Delci alfa in berilij

Sedaj šele dobimo veselje do obstreljevanja različnih snovi z žarki alfa! Ko namesto plinastega vodika ali dušika obstreljujemo ploščo iz berilija, zaznamo z ionizacijskim števcem redke sunke - nekaj na minuto. Magnetno polje nanje ne vpliva. Če med berilij in števec postavimo svinčeno ploščo, se v njej skorajda ne absorbirajo. Odkrili smo nevtralne, zelo prodorne "berilijeve" žarke (BOTHE). So to morda iskani nevtroni?



**Slika 44.13** Vpad delcev alfa na berilij. Iz berilija izhajajo nevtralni žarki, ki jih zaznava ionizacijski števec. (Chadwick, 1932)

Če so opaženi delci res nevtroni, se mora v beriliju dogajati naslednja reakcija:



Raziskujoč absorpcijo postavimo na pot berilijevih žarkov namesto plošče iz svinca ploščo iz parafina. Ionizacijski števec, megljučna celica in magnetno polje na naše veliko presenečenje pokažejo, da iz parafina izletavajo številni protoni (CHADWICK). Parafin vsebuje – za razliko od svinca – lahke vodikove atome. To nas utrjuje v misli, da so berilijevi žarki res nevtroni, ki trkajo z jedri vodika, protoni.

**Masa nevtronov** Pri trku delca alfa z jedrom berilija se ohranja polna energija  $m_\alpha c^2 + m_\alpha v_\alpha^2/2 + m_{\text{Be}}c^2 = m_{\text{C}}c^2 + m_{\text{C}}v_{\text{C}}^2/2 + m_{\text{n}}c^2 + m_{\text{n}}v_{\text{n}}^2/2$ . Privzamemo, da je kinetična energija nastalega ogljika precej manjša od kinetične energije nastalega nevtrona, ker je njegova masa precej večja, in jo zanemarimo. Potem sledi  $m_{\text{n}}c^2 \approx (m_\alpha v_\alpha^2/2 + m_\alpha c^2 + m_{\text{Be}}c^2 - m_{\text{C}}c^2)/(1 + v_{\text{n}}^2/2c^2)$ . Na desni strani poznamo energijo vpadajočih delcev alfa in vse mase (iz masnega spektrometra), ne poznamo pa hitrosti nevtronov  $v_{\text{n}}$ . Določimo jo tako, da spustimo berilijeve nevtrone na vodik, da iz njega izbijejo protone, potem pa z magnetnim odklonom določimo (maksimalno) hitrost  $v_{\text{p}}$  čelno udarjenih protonov. Ob predpostavki, da je masa nevtronov blizu masi protonov, velja  $v_{\text{n}} = v_{\text{p}}$ . Tako izmerimo  $m_{\text{n}}c^2 = 940 \text{ MeV}$  oziroma (CHADWICK)

$$m_{\text{n}} = 1,009 u. \quad (44.11)$$

Nevtron je torej od protona težji za okrog 0,2 %.

#### 44.8 Vezavna energija

**Masni primanjkljaj** Masa helijevega jedra znaša 4,002 (to je masa helijevega atoma z dvema odštetima elektronoma), masa njegovih sestavnih delov – dveh protonov in dveh nevtronov – pa  $2 \cdot 1,007 + 2 \cdot 1,009 = 4,032$ . Masa skupka vezanih nukleonov je torej manjša od vsote mas posamičnih, prostih nukleonov. Rečemo, da ima jedro *masni primanjkljaj*, v primeru helija 0,030 u, kar ustreza *vezavni energiji* 28 MeV. Očitno je to energija, ki jo sistem nukleonov izgubi, ko se poveže v jedro. Helijevo jedro ima za 28 MeV manj energije kot njegovi štirje ločeni nukleoni.

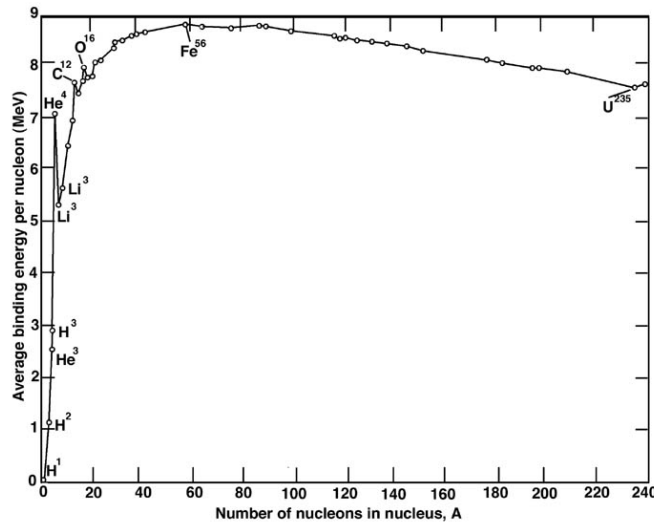
**Vezavne energije** Kar velja za helij, velja tudi za druga jedra. Vsa kažejo masni primanjkljaj. Zlahka ga določimo, če le izmerimo njihove mase z masnim spektrometrom. Vezavna energija jedra z maso  $m$ , z  $Z$  protoni in z  $A - Z$  nevtroni znaša

$$E_{\text{bind}} = (Zm_{\text{p}} + (A - Z)m_{\text{n}} - m)c^2. \quad (44.12)$$

V takem jedru je posamičen nukleon vezan s povprečno vezavno energijo

$$B = \frac{E_{\text{bind}}}{A} \quad (44.13)$$

Vezavna energija nukleona je približno enaka v vseh jedrih in znaša okrog 8 MeV, le pri najlažjih jedrih je nekoliko manjša. Pri vodiku je seveda enaka nič. Odvisnost  $B$  od  $A$  ima maksimum pri železu; njegovi nukleoni so najmočnejše povezani.



**Slika 44.14** Povprečna vezavna energija nukleona v različnih jedrih. Energija je izračunana iz znanega števila protonov in nevtronov v jedru ter iz izmerjene atomske mase v masnem spektrometru. (Anon)

Če so jedra lažja od vsote mas svojih ločenih sestavin, kaj ne velja isto tudi za atome? Kaj ne bi moral biti atom lažji od vsote mas svojega jedra in ločenih elektronov? Res je. Vendar je močna sila, ki veže nukleone, mnogo močnejša od električne sile, ki veže elektrone in jedra. Vezavne energije nukleonov v jedrih so zato milijonkrat večje kot vezavne energije elektronov v atomih. Temu ustrezni so tudi masni primanjkljaji. Zato jih v jedrih lahko izmerimo, v atomih pa tega ne moremo.

Obstoj masnega primanjkljaja in vezavne energije je sijajna potrditev sorazmernosti med maso in energijo, ki smo jo odkrili v teoriji relativnosti. S tem smo slednjo še bolj učvrstili.

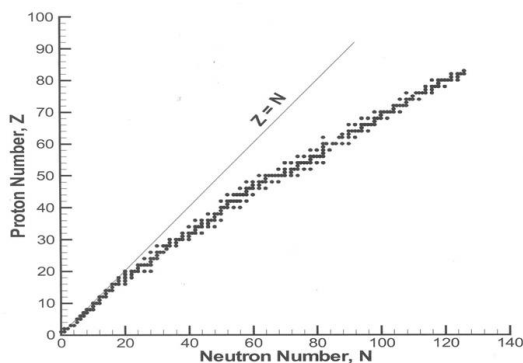
#### 44.9 (Ne)stabilnost jeder

Zdaj, ko poznamo sestavo jeder iz protonov in nevtronov, poskusimo povezati radioaktivnost atomov z zgradbo njihovih jeder. Saj ne more biti dvoma, da radioaktivni delci – alfa, beta in gama – izhajajo iz jeder. Gotovo se morajo pri tem jedra spremeniti. Rekli bomo, da *razpadajo*.

Evidenca jeder

Atomska jedra so enolično določena s številom protonov in nevtronov, ki jih vsebujejo. V naravi najdemo, kot vemo, jedra z 1 do 92 protoni in vsako od njih ima lahko več različnih števil

neutronov. Tako, na primer, najdemo ogljikove izotope  ${}^6\text{C}^{12}$ ,  ${}^6\text{C}^{13}$  in  ${}^6\text{C}^{14}$ . Prva dva sta stabilna, zadnji je radioaktiven. Drugih izotopov ogljika ne najdemo. Podobno je s preostalimi jedri. Stabilnih je okrog 250 vrst jeter; preostanek – vsaj 60 vrst – je radioaktiven. Vsa znana jedra poimenujemo *nuklide*.



**Slika 44.15** Stabilna atomska jedra. Nestabilna jedra se tiščijo stabilnih in niso prikazana. (University of Maryland)

Dolina stabilnosti

Ugotovimo naslednje. Vsa jedra z  $A > 83$  (bizmut) so nestabilna, to je radioaktivna. Od lažjih pa so stabilna le taka, v katerih je razmerje med številom nevtronov in protonov zelo natančno zamejeno. Pri lahkkih elementih je to razmerje enako 1, potem pa se počasi veča. Jedra, ki od tega razmerja rahlo odstopajo – imajo premalo ali preveč nevtronov glede na število protonov – so radioaktivna. Tistih, ki bi močno odstopala, pa sploh ni.

Zanimivo je, da ima dve tretjini stabilnih jeter sodo število protonov in hkrati sodo število nevtronov. Jeter sodo-liho ali liho-sodo je za eno tretjino. Jeter liho-liho pa je zgolj nekaj.

#### 44.10 Razpadni mehanizmi

Sedaj hočemo podrobneje raziskati mehanizme, ki so odgovorni za radioaktivni razpad jeter.

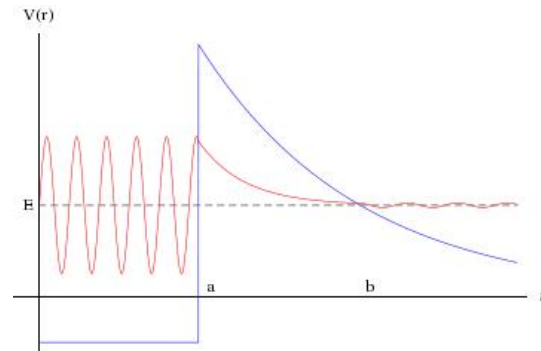
Razpad alfa

Pri razpadu alfa (uran, radij) izleti iz jedra delec alfa. To pomeni, da se zgodi naslednja jedrska reakcija:



Iz elementa X nastane element Y. Predstavljamo si, da so nekateri nukleoni v jedru že povezani v delce alfa (to je energijsko bolj ugodno, kot če bi bili ločeni). Tak delec alfa se giblje v sestavljenem potencialnem polju močne in električne sile. To polje je podobno krtini na travniku. V eni dimenziji se torej giblje delec med dvema grebenoma. Višina grebena je približno tolikšna, kot je električni potencial na robu jedra:  $U \approx Ze/R$ . Ker je delec alfa vezan, mora biti njegova energija  $E$  manjša od njegove potencialne energije na vrhu grebena  $W = 2eU$ . Kako naj potem sploh zapusti krtino? Tako, da skozi greben tunelira (GAMOW). Ker

je jedro atoma kvantni sistem nukleonov, so energije delca alfa v njem kvantizirane. Zato je tudi energijski spekter izsevanih delcev alfa diskreten.



**Slika 44.16** Razpad alfa kot tuneliranje delca alfa skozi potencialni greben okrog jedra. (University of Manchester)

Vemo, da valovna funkcija kvantnega delca po vpadu na visoko potencialno stopnico eksponentno pojema in da njen kvadrat na razdalji  $D$  znaša  $P \propto \exp -2D\sqrt{2m(W-E)/\hbar^2}$ . Verjetnost, da bo delec alfa prepuščen, je torej močno odvisno od višine in širine stopnice. Seveda velja podobno tudi za greben krtine, ki ni pravokoten.

Zakaj jedro lahko izvrže delec alfa, ne opazimo pa, da bi kdaj samo od sebe izvrglo proton ali nevtron? Relativne mase sosednjih izotopov istega elementa se ločijo med seboj za največ 1,007. To je premalo za izsevanje nevtrona, pa tudi protona. Jedro v osnovnem stanju torej ne more izvržiti posamičnega nukleona. Drugače je z delcem alfa, katerega masa je znatno manjša od vsote mas dveh protonov in nevtronov. Med težkimi elementi je precej primerov, kjer je razlika med maso začetnega in končnega jedra večja od mase delca alfa. Zato energijski zakon ne nasprotuje razpadu.

Razpad beta Pri razpadu beta ( ${}_6\text{C}^{14}$ ,  ${}_4\text{Be}^{10}$ ) izleti iz jedra elektron. To pomeni, da se zgodi naslednja reakcija:



Energijska bilanca za razpad jedra  $m_1$  v jedro  $m_2$  - brez [še kaj?] - je naslednja:  $m_1c^2 = m_2c^2 + K_2 + m_e c^2 + K_e$ , torej  $K_e = m_1c^2 - m_2c^2 - m_e c^2 - K_2$ . Odrivna kinetična energija jedra  $K_2$  je zanemarljiva v primerjavi s kinetično energijo elektrona. Tako vidimo, da bi moral imeti izsevani elektron ostro vrednost  $K_e$ . Pričakovali bi torej, da je energijski spekter elektronov diskreten. Do podobnega sklepa pridemo, če pomislimo, da prihajajo elektroni iz kvantiziranega jedra. Vendar pa meritve temu nasprotujejo: kot že vemo, je spekter zvezen [41.6]. Izleteli elektron ima poljubno energijo med nič in  $K_e$ . Kako naj si to razložimo?

Ponuja se presentljiv izhod iz zagate: morda pa se poleg vsakega elektrona izseva še en lahek nevtralen delec, in sicer tako, da je vsota energij obeh konstantna. Temu delcu recimo *neutrino*  $\nu$  (PAULI). Njegova masa mora biti zelo majhna. Povsem možno je, da ima maso nič in da se zato giblje s svetlobno hitrostjo. Ali tak delec res obstaja, bomo morali seveda še ugotoviti. Ker delec ni nabit in ima maso (blizu) nič, bo to težko, gotovo težje od odkrivanja nevtronov.

Šibka sila Kako si naj razložimo izsev elektrona iz jedra, če pa v njem ni elektronov? Ena izmed možnosti je naslednja. Ko atom izseva foton, to ne pomeni, da je bil foton pred tem že skrit v atomu. Foton šele nastane pri prehodu elektronskega oblaka iz višjega vzbujenega stanja v nižje. Lahko rečemo, da se fotoni pravzaprav rojevajo iz sprememb električnega polja, ki križema povezuje elektrone in protone. Morda je tako tudi v jedru. Morda obstaja med nukleoni polje sil, iz katerega se, ob spremembah, rojevajo elektroni in nevtrini. Zaradi ohranitve naboja se morajo pri tem spreminjati tudi nevtroni v protone.

Pretvorba nevtronov v protone se dogaja, kadar je na kupu "preveč" nevtronov in "premalo" protonov. Blizu je misel, da morda polje deluje tudi v obratni smeri: kadar je na kupu "preveč" protonov in "premalo" nevtronov, se začnejo protoni pretvarjati v nevtrone, pri čemer bi se morali zaradi ohranitve naboja izsevati *pozitivni elektroni* oziroma *pozitroni* in nevtrini. Na ta način kvalitativno razložimo dolino stabilnosti in napovemo še en nov delec, ki morda obstaja.

Poleg treh dosedanjih sil – gravitacijske, električne in močne – torej morda obstaja v naravi še četrta sila; poimenujmo jo *šibka sila*. Sila mora delovati križem med nukleoni, elektroni in nevtrini. Njen doseg mora biti kratek. Za razliko od drugih sil pa šibka sila delcev ne pospešuje, ampak jih "ob dotikih" spreminja, ustvarja in uničuje.

Razpad gama Nekatera jedra razpadajo z razpadom alfa, druga z razpadom beta. Večinoma se pri vsakem zgodi hkrati še razpad gama, to je, jedro izseva foton gama:



Razlaga je hitro pri roki. Razpad alfa ali beta praviloma pusti jedro v vzbujenem stanju. Jedro se nato povrne v osnovno stanje in pri tem izseva foton gama. Zaradi kvantizacije jedrskih stanj mora biti izsevani spekter diskreten. In takšen, kot vemo, tudi je.

#### 44.11 Statistika razpadov

Ko atomi radioaktivno razpadajo, se število še nerazpadlih atomov manjša. Kako?



Preostala jedra Predpostavimo, da je razpad slučajni dogodek in je neodvisen od zunanjih okoliščin. Verjetnost, da izbrano jedro razpade v kratki časovni enoti, je zato konstantna. To pomeni, da je delež jeder, ki razpadejo v časovni enoti, neodvisen od tega, koliko je še nerazpadlih jeder:  $-dN/Ndt = \lambda$ . Enačbo integriramo in dobimo

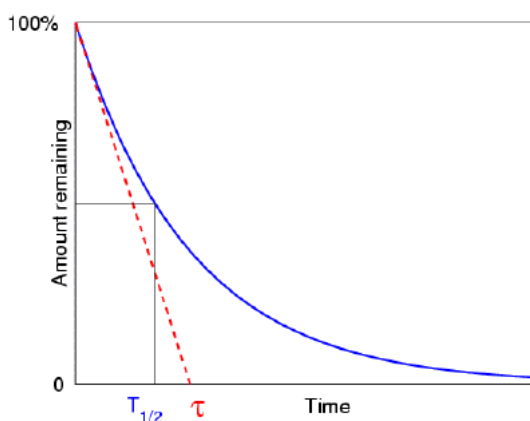
$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (44.17)$$

Število nerazpadlih jeder se eksponentno zmanjšuje. V času

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (44.18)$$

pade na vrednost  $1/e \approx 37\%$ . Rečemo, da je to *razpadni čas*. Namesto razpadnega časa je bolj nazorno vpeljati *razpolovni čas*, to je čas, v katerem se število nerazpadlih jeder zmanjša na polovico:  $N_0/2 = N_0 \exp -\lambda T_{1/2}$ . Sledi povezava

$$T_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (44.19)$$



**Slika 44.17** Zmanjševanje števila še nerazpadlih delcev s časom. (University of California)

Aktivnost vira Radioaktivni viri sevajo žarke bolj ali manj izdatno. Bolj kot vir seva, več jeder v njem razpade v časovni enoti. Število razpadov na časovno enoto poimenujemo *aktivnost* vira:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (44.20)$$

Aktivnost vira pojema eksponentno s časom. Če jo izmerimo (z ionizacijskim števcem) ob nekaj različnih časih in narišemo odvisnost  $\ln A/A_0$  od časa, dobimo premico in iz nje razpadno konstanto. Števec sicer ne zajame vseh radioaktivno izsevanih delcev, prestreže pa stalen odstotek. Vendar je to dovolj. Seveda lahko na ta način merimo le tiste izvore, ki se jim aktivnost znatno zmanjšuje s časom. Takšen, na primer, je izotop  ${}_{84}\text{Po}^{210}$  v poloniju, ki ga pridobimo iz uranove rude. Razpolovni čas ima kratkih 138 dni. Izmerjena aktivnost je natančno eksponentna. S tem potrdimo predpostavko, iz katere smo izhajali: radioaktivni

razpadi so res slučajni in neodvisni od sosednjih atomov in zunanjih okoliščin, recimo temperature ali magnetnega polja.

Radiju  ${}_{88}\text{Ra}^{226}$  ali uranu  ${}_{92}\text{U}^{238}$  se aktivnost s časom spreminja tako počasi, da mu na opisani način ne moremo določiti razpolovnega časa. Pomagamo si takole. Pridobiti moramo košček čistega izotopa. V njem so vsa jedra še nerazpadla. Košček mase  $m$  damo v ionizacijski števec in mu izmerimo aktivnost. Vemo, da je v koščku  $N_0 = m/m_1$ ,  $m_1 = M/N_A$  nerazpadlih jeder. Razpadno konstanto izračunamo iz povezave  $A = \lambda N_0$ . S tem je določen tudi razpolovni čas. Za radij dobimo 1600 let in za uran  $4,5 \cdot 10^9$  let.

Verižno razpadanje

Radioaktivne snovi s kratkim razpolovnim časom v naravi sploh ne bi smele obstajati, saj hitro izginevajo. Očitno morajo vedno znova nastajati. Ponuja se misel, da kratkoživi elementi morda nastajajo iz dolgoživih. Natančneje rečeno: izvorni radioaktivni element razpada v produkt, ki je tudi sam radioaktiven, in tako naprej, vse do zadnjega člena v *razpadni verigi*, ki je obstojen. Z detektivskim eksperimentalnim delom uspemo v naravi res odkriti vsaj dve takšni verigi. Prva se začne z uranom  $\text{U}^{238}$  in konča s svincem  $\text{Pb}^{206}$ . Vmes nastaja radij  $\text{Ra}^{226}$ . Druga pa se začne s torijem  $\text{Th}^{232}$  in konča s svincem  $\text{Pb}^{208}$ .

Zamislimo si čist kos radioaktivne snovi A z zelo dolgim razpolovnim časom. Z razpadanjem iz nje nastaja snov B. Njena količina ne raste kar naprej, ampak razpada ter se prej ali slej ustali pri vrednosti, ko je prav toliko razpade, kot jo nastane. Podobno velja za snov C, ki nastaja iz B. Kolikšen je razpolovni čas obeh snovi, pri tem ne igra vloge, le dosti krajši mora biti od razpolovnega časa prve snovi. Velja  $dN_A/dt = dN_B/dt = dN_C/dt$ . Zapišemo  $\lambda_A N_A = \lambda_B N_B = \lambda_C N_C$ , vstavimo razpolovna časa in dobimo

$$\frac{N_A}{T_A} = \frac{N_B}{T_B} = \frac{N_C}{T_C}. \quad (44.21)$$

V ravnotežju je številčno razmerje snovi enako razmerjem njihovih razpolovnih časov. Dolgožive snovi je več, kratkožive manj. Relacija velja za vse člene v razpadni verigi. Iz nje lahko izračunamo razpolovni čas ene snovi, če poznamo razpolovni čas druge snovi in njuno ravnotežno številčno razmerje. To je zlasti primerno za določanje dolgih razpolovnih časov.

Datiranje kamnin

Zemeljska skorja je nastala in še nastaja iz staljenih snovi v njeni notranjosti. Pri ohladitvi se tvorijo različni minerali/kristali. Nekateri so takšni, da ob strditvi vključijo vase uran, ne pa tudi svinca. Takšen je, na primer, cirkon  $\text{ZrSiO}_4$ , ki ima del cirkonijevih atomov Zr nadomeščenih z uranovimi. Ko čas mineva, ti razpadajo v svoje končne produkte: izotop  $\text{U}^{238}$  v  $\text{Pb}^{206}$  in izotop  $\text{U}^{235}$  v  $\text{Pb}^{207}$ . Razpolovna časa poznamo: 4,5 in 0,7 milijarde let. V kristalu pojema število istovrstnih uranovih

izotopov kot  $N_U = N_{U0} \exp -\lambda t$ , hkrati se pa povečuje število ustreznih svinčevih atomov  $N_{Pb} = N_{U0} (1 - \exp -\lambda t)$ . Deljenje obeh enačb pove  $t = (1/\lambda) \ln (1 + N_{Pb}/N_U)$ . Z meritvijo razmerja  $N_{Pb}/N_U$  je enolično določena starost kristala. Tako določamo starost različnih kamenin. Najstarejši kristali, ki jih najdemo, so stari 4,0 milijarde let. Meteoriti, ki iz vesolja padajo na Zemljo, pa so še starejši, okrog 4,5 milijarde let. Sklepamo, da je približno toliko stara tudi Zemlja.

#### 44.12 Trki nevtronov ob jedra

Nevtronov med letom skozi snov ne ovirata niti elektronski ovoji atomov niti električno polje jeder. Zato se z lahkoto približajo jedrom in z njimi trkajo, se od njih odbijajo ali v njih ponikajo ter povzročajo jedrske spremembe. To jih dela odlične izstrelke za raziskavo jeder. Dober vir nevtronov za poskuse že poznamo - zmes zdrobljenega radijevega bromida in berilija, zaprto v stekleni cevki.

Velikost jedra Naj na ploščo iz izbrane snovi v izbranem času vpade curek  $N$  nevtronov. Verjetnost, da nevtron iz vpadajočega curka obišči v snovi, znaša  $P = N_a \sigma / S$ , pri čemer je  $\sigma$  absorpcijski presek jedra,  $N_a$  število jeder vzdolž curka in  $S$  presek curka. Iz plošče naj izide  $N'$  nevtronov. To pomeni, da v plošči obišči  $N - N' = (N_a \sigma / S) N$  nevtronov. Število jeder  $N_a$  je določeno z maso obsevanega dela plošče in z maso posamičnega jedra:  $N_a = \rho S l / A u$ . To pomeni, da znaša presek jedra  $\sigma = (A u / \rho l) (N - N') / N$ . Z meritvijo  $N$  in  $N'$  je presek popolnoma določen. S tem je določen tudi absorpcijski radij jedra:  $\sigma = \pi r^2$ . Zaradi kratkega dosega močnih sil si ga lahko predstavljamo kar kot geometrijski radij.

Dejanske meritve pokažejo, da velja povezava

$$r = r_0 A^{1/3} \quad (44.22)$$

$$r_0 = 1,2 \text{ fm} .$$

Jedro bakra  $\text{Cu}^{64}$ , na primer, ima polmer 5 fm. To je trikrat manj, kot smo svoj čas določili iz sipanja delcev alfa [41.7]. Delci alfa se pač ne morejo približati jedrom tako močno kot nevtroni.

Ker  $r^3 \propto A$  in  $r^3 \propto V$ , je  $A/V = \text{const}$ . Gostota vseh jeder je zato približno enaka in je reda velikosti  $10^8 \text{ ton/cm}^3$ . To je strašna vrednost. Sklepamo tudi, da so nukleoni v jedrih prav tesno nagneteni. Jedra so torej precej podobna kapljicam tekočine s tesno nagnetenimi molekulami.

Tvorba izotopov Jedro, ki ujame nevtron, se spremeni v svoj "višji" izotop. Hvalevredno bi bilo sistematično obsevati vse elemente in pogledati, kakšne izotope lahko pridelamo. Pri tem želimo dosežati čim večji izplen. Pričakujemo, da bodo počasnejši nevtroni, ki v bližini jeder preživijo več časa, bolj pogosto vstopali vanje. Takšne počasne nevtrone dobimo, če izvirne hitre

nevtrone spustimo najprej skozi primerno snov, v kateri elastično trkajo z jedri in izgubljajo kinetično energijo. Potrebna je snov z majhnim absorpcijskim in velikim sipalnim presekom. Dobro se izkažeta voda in grafit.

Umetna radioaktivnost

Rezultati so pričakovani. Pridelamo veliko število lahkih izotopov, ki jih v naravi najdemo redko ali sploh ne. Vsi imajo "preveč" nevtronov, da bi bili stabilni, in so beta-radioaktivni. Nekaj primerov:  ${}^3_1\text{H}$ ,  ${}^{14}_6\text{C}$  in  ${}^{32}_{15}\text{P}$ . Razpolovni časi znašajo tipično od nekaj dni do nekaj tisoč let.

#### 44.13 Razcep težkih jeder

Razcep urana

Pri obsevanju težkega urana z nevtroni pa nas čaka presenečenje: namesto višjih izotopov urana nastane mešanica različnih srednje težkih elementov. Tega si ne moremo razlagati drugače, kot da se od nevtrona zadeto uranovo jedro razcepi na dve približno enako težki jedri in še na kakšen "odvečen" nevtron (HAHN). Nastala jedra so radioaktivna in izsevajo elektrone ter žarke gama. Pojav lahko celo opazimo v meglični celici: iz obsevane uranove ploščice včasih izletita dva bleščeča žarka. Njuna ionizacijska sled pravi, da nosita mnogo kinetične energije.

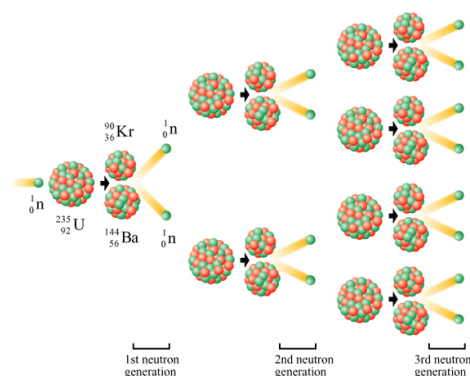
Vezavna krivulja nukleonov v jedrih pravi naslednje. V težkem jedru je vsak nukleon vezan z energijo 7,5 MeV, v srednjetežkem jedru pa z 8,5 MeV. Pri cepitvi težkega jedra se torej vezavna energija nukleona poveča za 1 MeV, to je, vsak nukleon odda okrog 1 MeV energije. V jedru urana je preko 200 nukleonov, zato ob razcepu odda okrog 200 MeV energije. Ta energija se naloži večinoma v kinetično energijo obeh fragmentnih jeder, deloma pa tudi v kinetično energijo sproščenih nevtronov in izsevanih elektronov ter fotonov gama.

Verižna reakcija

Uran v naravi sestoji predvsem iz dveh izotopov  ${}^{238}_{92}\text{U}$  (99%) in  ${}^{235}_{92}\text{U}$  (1%). Podrobne raziskave pokažejo, da se izotop  ${}^{238}_{92}\text{U}$  ob zajetju nevtrona redko razcepi, ampak raje postane izotop  ${}^{239}_{92}\text{U}$ , takoj dvakrat zaporedoma beta-razpade in postane plutonij  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ . Izotop  ${}^{235}_{92}\text{U}$  pa se razcepi pogosto, posebej še s počasnimi nevtroni. Pri tem s števci tudi opazimo, da iz obsevanega vzorca izstopa več nevtronov, kot jih vanj vstopa: na 1 (počasni) vstopajoči nevtron pridejo kar 2-3 (hitri) izstopajoči. To nas navede na naslednjo misel: ako zadenejo novorojeni nevtroni spet ob uranovo jedro, lahko sprožijo nove cepitve. Pri tem izletijo spet novi nevtroni in tako naprej. Namesto ene same cepitve sprožimo torej celo verigo cepitev. Rečemo, da smo sprožili *verižno reakcijo* (FERMI).

Če hočemo, da verižna reakcija ne ugasne, moramo poskrbeti za naslednje. Prvič, kepa urana mora biti dovolj velika, da nevtroni preveč ne uhajajo. In drugič, preprečiti moramo takšne reakcije, pri katerih se jedra ne cepijo. Predvsem moramo preprečiti vpliv

jeder  $U^{238}$ , ki požirajo nevtrone (razen najhitrejših), ne da bi se cepila.



**Slika 44.18** Verižna reakcija. Vpadajoči nevtron razcepi uranovo jedro, pri čemer se sprostita tipično dva nevtrona in razbijanje se nadaljuje. (Hong Kong University)

Očitno velja naslednje. V "premajhni" kepi urana verižna reakcija ugasne. V "preveliki" naraste preko vsake meje in kepa eksplodira. Ravno pravšnja kepa pa vzdržuje konstantno verigo razpadov ter zagotavlja ravnovesje med proizvedeno in oddano energijo. Odkrili smo princip za izdelavo *uranove bombe* in *uranove peči*.

Uranova bomba

Iz samega naravnega urana se ne da narediti bombe, tudi če ga nakopičimo skupaj več ton. V njem je namreč izotopa  $U^{238}$  toliko, da preveč pridno požira nevtrone in se verižna reakcija ne more prav razviti. Naravni uran moramo zato *obogatiti*, to je, v njem povečati delež izotopa  $U^{235}$ . Postopek temelji na frakcionalni difuziji in centrifugiranju uplinjenih uranovih soli (npr  $UF_6$ ) ter je zapleten in drag. Privoščijo si ga lahko le tehnološko razvite in bogate države. Ko nam uspe v taki državi pridelati dovolj primerno obogatene urana, ga moramo seveda shraniti v majhnih kosih na oddaljenih mestih. Sicer bi ga bilo na kupu toliko, da bi naključni nevtroni iz okolice v njem takoj sprožili uničujočo verižno reakcijo. Kakor pravijo tisti, ki se na to spoznajo, znaša kritična masa krogle iz čistega  $U^{235}$  komaj 15 kg.

Bombo izdelamo iz dveh podkritičnih cilindrov vsaj 80-odstotno obogatene urana. En cylinder je votel in drugi se vanj prilega. Cilindra sta nameščena v cevi na medsebojni razdalji ~ 2 metra. Smodnikov naboj izstreli en cylinder v drugega. S tem presežeta kritično maso in bomba eksplodira.

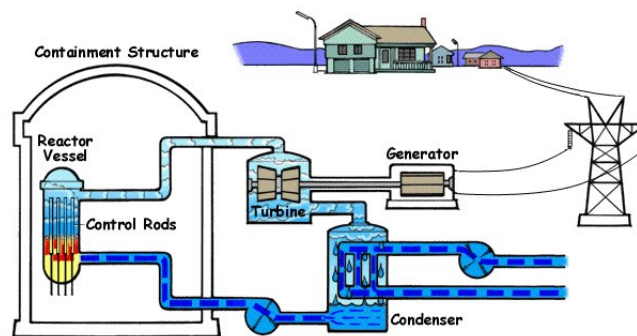


**Slika 44.19** Eksplozija uranove bombe nad Hirošimo. Bomba je pobila preko 100 000 ljudi in zravnila mesto z zemljo. (Hiroshima Memorial Peace Museum)

## Uranov reaktor

Uranov reaktor je ukročena uranova bomba, v kateri nadzorujemo nevtronski plaz, da bomba stalno "tli", namesto da bi eksplodirala. Jedro reaktorja sestavimo iz kosov delno obogatene (5 %) urana. V jedro potisnemo palice iz snovi, ki močno absorbira nevtrone: grafita, kadmija ali bora. Bolj kot jih potisnemo v jedro, več nevtronov absorbirajo in bolj dušijo razpadni plaz. Tako uravnavamo hitrost razpadanja (FERMI). Skozi jedro črpamo vodo, ki se od razpadajočega urana segreva in spreminja v paro. Z njo gonimo parno turbino in nanjo priklopljen električni generator. Ko para opravi svoje delo, jo ohladimo, da se kondenzira, in jo vodimo nazaj v reaktor. Voda hkrati služi kot sredstvo, ki upočasnuje nevtrone in s tem povečuje njihovo razbijalno uspešnost.

Bolj kot je uran obogaten, manjše delovno jedro je potrebno. Uporabimo lahko celo neobogateni uran, vendar moramo v tem primeru njegove hitre nevtrone upočasnjavati s težko vodo (tako, ki vsebuje težki vodik); navadna voda jih ne upočasni dovolj. Namesto enega vodnega kroga lahko uporabimo tudi dva. V prvem, ki je pod visokim pritiskom, vodo segrevamo nad 100 °C. S tako segreto vodo pa potem uparjamo vodo v drugem, ločenem vodnem krogu. Končno moramo reaktor obdati še s ščitom iz primerne snovi, da nevtroni, predvsem pa žarki gama, ne uhajajo v okolico. Primerna sta navadni beton in svinec.



**Slika 44.20** Uranov reaktor. Pri nadzorovanem razcepu urana se sprošča toplota. Ta segreva vodo v paro in slednja poganja parno turbino s priklučenim električnim generatorjem. (US Nuclear Regulatory Commission)

Kilogram  $U^{235}$  proizvede v reaktorju toliko energije kot sežig 3000 ton premoga! S tem dobimo v roke izjemno močan in zgoščen vir energije. Uranove reaktorje uspešno uporabimo za pogon velikih elektrarn. Namestimo jih na ladje in podmornice. Za avtomobile in letala pa so pretežki. Reaktorji služijo tudi kot izdaten vir nevtronov, s katerimi lahko opravljamo nadaljnje raziskave.

Ko se uranovo gorivo potroši, ostanejo za njim razni stranski produkti, ki so radioaktivni, recimo cezij  $Cs^{137}$ , stroncij  $St^{90}$  in plutonij  $Pu^{239}$ . Da njihovo sevanje ne bi škodovalo ljudem,

moramo vso to žilindro zapreti v primerne zabojnike in jih zakopati globoko pod zemljo. Potem pa čakamo, da razpade v končne, neradioaktivne produkte.

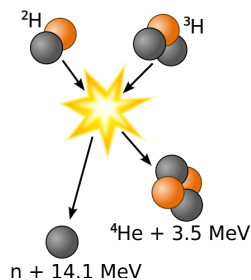
#### 44.14 Zlivanje lahkih jeder

Zlivanje vodika

Vezavna energija nukleona v zmerno težkem jedru je večja od vezavne energije nukleona v lahkem jedru: v devteriju znaša 1 MeV, v triciju 3 MeV in v heliju 7 MeV. Če se torej uspeta zlititi dve lahki jedri, se bo pri tem sprostil energija v okolico. Zamislimo si, da se lahko spojita devterij in tricij v helij:



Da se razdre devterij v dva nukleona, je potrebno  $2 \cdot 1 \text{ MeV} = 2 \text{ MeV}$  energije; da se razdre tricij v tri nukleone, je potrebno  $3 \cdot 3 \text{ MeV} = 9 \text{ MeV}$ ; in ko se združijo štirje nukleoni v helij, se sprosti  $4 \cdot 7 \text{ MeV} = 28 \text{ MeV}$  energije. Pri reakciji se torej sprosti  $(28 - 9 - 2) \text{ MeV} = 17 \text{ MeV}$  energije. Ker sodeluje 5 nukleonov, se na en nukleon sprosti dobre 3 MeV energije. To je trikrat več kot pri cepitvi uranovih jeder.



**Slika 44.21** Zlivanje lahkih jeder. Prikazano je zlitje devterija in tricija v helij (in nevtron). Sproščena energija se porazdeli med produkte v obratnem sorazmerju z njihovimi masami. (Anon)

Da se jedri devterija in tricija sploh lahko združita, morata najprej premagati medsebojno električno odbojno silo. Privzemimo, da se morata jedri približati na  $r = 10 \text{ fm}$ , da ju zagrabi močna sila. Na tej razdalji znaša njuna odbojna potencialna energija  $W = q^2/r = 0,14 \text{ MeV}$ . Posamično jedro mora torej imeti 0,07 MeV kinetične energije, da mu uspe preboj. To ustreza temperaturi  $5 \cdot 10^8$  kelvinov. Ker pa ima porazdelitev jeder po hitrosti svoj rep, jedra pa ovire premagujejo tudi s tuneliranjem, je potrebna temperatura lahko nekaj nižja, morda okrog  $10^7$  kelvinov.

Vodikova bomba

Našli smo teoretično pot za izdelavo vodikove bombe: to je zmes devterija in tricija, ki jo hitro in močno segrejemo, da eksplodira. Za segretje uporabimo kar uranovo bombo. Devterija je v oceanih več kot dovolj. Triticija pa v naravi ni (je radioaktiven z razplovno dobo 12 let). Vendar ga - na nesrečo - lahko delamo z reakcijo  $\text{Li}^6 + \text{n} \rightarrow \text{He}^4 + \text{H}^3$ . Ker se pri eksploziji uranove bombe sproščajo nevtroni, zaloge tricija zato ne potrebujemo, ampak uporabimo kar litij, iz katerega tricij spotoma nastane. Žal se recept pokaže za uspešnega in človeštvo pridobi še eno smrtonosno orožje. Vodikova bomba je kar stokrat močnejša od uranove.

Vodikov reaktor Nadzorovano zlivanje jeder pa nam zaenkrat ne uspeva. Glavni oviri sta dve: segrevanje goriva in njegova hramba. V poštev pride predvsem hramba v magnetnem polju. Tukaj se pokaže, kako velika je pravzaprav razlika med poznavanjem principa, kako naj kaj naredimo, in razvojem tehnologije, ki naj ta princip izkorišča. Brez dvoma nam bo nekoč uspelo. Tedaj bomo dobili neomejen in čist vir jedrske energije za vse svoje potrebe. Takorekoč bomo kurili vodo in pri tem ne bomo proizvajali nobenih radioaktivnih ostankov.

#### 44.15 Kozmični žarki

Višinsko sevanje Ionizacijski števec kaže redke sunke – nekaj na minuto – tudi tedaj, ko v bližini ni nobenega radioaktivnega izvora. Rečemo, da zaznava *sevanje ozadja*. Od kod prihaja to sevanje? Domnevamo, da iz radioaktivnih snovi v Zemlji in – kot primesi – v ozračju. To pomeni, da bi z višino moralo sevanje zaradi absorpcije in redčenja pojemati. Meritve na gorah in v balonih pa presenetljivo pokažejo, da sevanje z višino celo narašča. Na desetih kilometrih je ionizacija v merilnikih desetkrat večje kot na morski gladini. Sklepamo, da prihaja dodatno sevanje iz izvorov izven Zemlje. To sevanje poimenujemo *kozmični žarki*.

Žarkovna kaskada Kozmični žarki so sicer redki, a izredno prodorni. Balonske meritve na višini 30 km kažejo, da so tam žarki sestavljeni večinoma iz protonov in delcev alfa. Njihove energije imajo tipično vrednost 1–10 GeV. To je primarno kozmično sevanje. Kje nastaja in kaj ga tako pospeši, bo treba še raziskati. Primarno sevanje pri preletu skozi ozračje spotoma ionizira atome in razbija njihova jedra. Do tal tako prispe pisana mešanica protonov, nevtronov, elektronov, fotonov gama in še česa. To je sekundarno kozmično sevanje. Njegova intenzivnost, merjena v talni opazovalnici, je enaka podnevi in ponoči. Neodvisna je tudi od letnega časa. Kozmični žarki prihajajo torej izotropno iz daljnih globin vesolja. Je pa intenzivnost sekundarnega sevanja odvisna od zemljepisne širine opazovalnice: na polu je za 10 % večja kot na ekvatorju. Zemlja je pač magnet in s svojim magnetnim poljem usmerja poti nabitih delcev, predvsem lahkih elektronov, proti poloma.

Organsko datiranje Nevtroni v sekundarnem kozmičnem sevanju trkajo ob dušikova jedra in jih spreminjajo v radioaktivna ogljikova jedra:  
 ${}^7_7\text{N}^{14} + n \rightarrow {}^7_7\text{N}^{15} \rightarrow {}^6_6\text{C}^{14} + p$ . Nastali ogljik se veže s kisikom v ogljikov dioksid. V njem beta-razpada z razpadnim časom 5700 let:



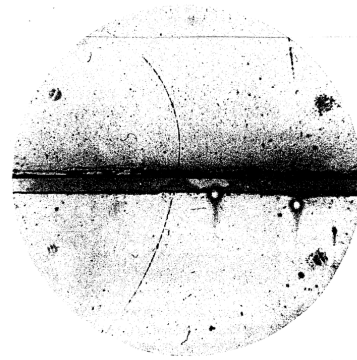
Ob vsakem času je v ozračju precej izotopa  $\text{C}^{12}$  in nekaj malega izotopa  $\text{C}^{14}$ , oboje v molekulah ogljikovega dioksida. Rastline "jedo" ogljikov dioksid in živali jedo rastline. Tkiva živih bitij zato



vsebujejo oba ogljikova izotopa v prav takšnem razmerju kot v ozračju. Vnos ogljikovega dioksida preneha, ko bitje umre in postane fosil. Izotop  $C^{12}$  v fosilu ostaja, izotop  $C^{14}$  pa radioaktivno razpada. Relativna koncentracija  $C^{14}/C^{12}$  v fosilu se zato eksponentno zmanjšuje s časom. Z njenim merjenjem lahko določimo starost fosila, če seveda poznamo koncentracijo v ozračju, ko je bil fosil še živ. V prvem približku privzamemo, da je ta koncentracija kar enaka današnji, to je, da sta sestava ozračja in obsevanje s kozmični žarki konstantna. Merimo z masnim spektrometrom. Alternativno lahko merimo aktivnost  $C^{14}$  v fosilu ( $A$ ) in v "tedanjem" ozračju ( $A_0$ ). Velja  $A = A_0 \exp -\lambda t$ , iz česar sledi  $t = (1/\lambda) \ln (A_0/A)$ . Z opisanim *organskim datiranjem* fosilov določimo starost lesenih izdelkov ali kosti naših prednikov do kakih 30 tisoč let nazaj.

Odkritje pozitrona

Pri raziskovanju absorpcije kozmičnih delcev v svinčeni plošči znotraj meglene komore naletimo na presenečenje: zaznamo sled delca z enako maso kot pri elektronu, vendar z nasprotno ukrivljenim tirom, torej s pozitivnim nabojem. Kaže, da smo odkrili pozitron, ki smo ga - ne prav prepričljivo - napovedali iz delovanja šibke sile (ANDERSON).



**Slika 44.22** Pozitron (pozitivni elektron) pri preletu skozi svinčeno ploščo. Pred ploščo je hitrejši (63 MeV) in za njo počasnejši (23 MeV), kar se odraža v večji ukrivljenosti tira. S tem je določena smer gibanja in zato tudi predznak naboja. (Anderson, 1933)

Nadaljnja opazovanja pokažejo, da zaznani pozitron nemudoma naleti na kak okolišnji elektron (saj se medsebojno privlačita), pri čemer oba izgineta, rodita pa se dva fotona gama. Rečemo, da sta se elektron in pozitron *anihilirala*. Pri tem se energija ohranja. Kinetična in masna energija obeh snovnih delcev se pretvorita v energijo nastalih fotonov.

Morda je možen tudi obratni pojav, da se iz fotona gama rodi par elektron-pozitron? Seveda mora imeti foton gama dovolj energije, vsaj dvakrat več od masne energije elektrona, torej vsaj 1 MeV. Opazovanja v meglčni celici to domnevo potrdijo: energični foton gama ob vpadu na atomsko jedro včasih res rodi elektronski dvojček. Brez prisotnosti jedra pri tem ne gre, saj se drugače ne moreta ohraniti gibalna količina in energija.



**Slika 44.23** Nastanek para elektron - pozitron ob vpadu fotona gama z energijo 5,7 MeV na svinčeno ploščo z debelino 0,5 mm. (Anon)

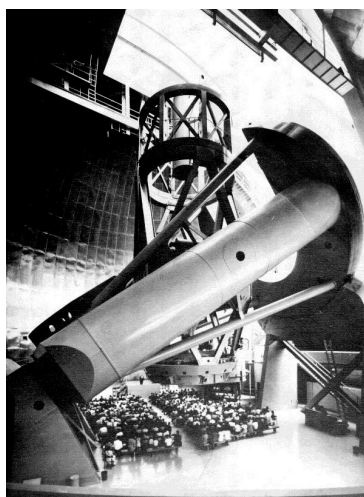
Delci in antidelci Elektron in pozitron sta v vseh pogledih enaka, razlikujeta se le v predznaku naboja. Rekli bomo, da je pozitron antidelec elektrona. Z enako pravico lahko tudi rečemo, da je elektron antidelec pozitrona. Seveda se takoj pojavi drzna misel: če že ima elektron svoj antidelec, zakaj ga ne bi imel tudi proton? Ali torej v naravi res obstajajo antiprotoni, to je protoni z negativnim nabojem? Z obstoječimi pripomočki jih v kozmičnih žarkih ne uspemo zaznati. Si pa dovolimo divjo spekulacijo: atomi na Zemlji in v njeni okolici so sestavljeni iz protonov, elektronov in nevtronov. Morda pa se v kakšnem zakotnem kotičku vesolja potikajo antiatomi, sestavljeni iz antiprotonov, antielektronov in antinevtronov? Takšna antisnov bi sevala enako kot običajna snov. Ob stiku pa bi se antisnov in snov anihilirali. Morda pa kaj takega le obstaja? □

## 45 Zvezde in vesolje

O zvezdah – Spektralni razredi – Zvezdni diagram – Rojevanje zvezd – Zrela doba zvezd – Staranje in smrt zvezd – Galaksija in galaksije – Širjenje vesolja – Širitveni model – Napovedi modela – Zgodnje vesolje

### 45.1 O zvezdah

Pri raziskovanju čedalje manjših sestavnih delcev snovi smo dospeli do atomskih jeder in do njihovih nukleonov. Čas je, da raziskave usmerimo v nasprotno smer, proti čedalje večjim zgradbam – zvezdam in njihovim združbam. Bistveno vlogo pri tem imajo opazovalni instrumenti, daljnogledi. Za bližnja telesa zadostujejo "navadni" daljnogledi, za oddaljena pa potrebujemo ogromne priprave.



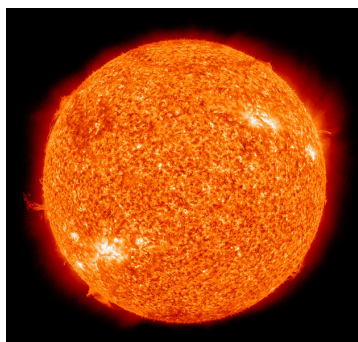
**Slika 45.1** Daljnogled na Mt. Palomarju. Njegovo zrcalo ima premer 5 metrov. Daljnogled je tako velik, da lahko sedi opazovalec kar v njem. (Palomar Observatory)

Lastnosti Sonca

O zvezdah marsikaj že vemo. Najbolj seveda poznamo najbližjo zvezdo, Sonce. Izmerili smo že njegovo oddaljenost  $d_{\odot}$  od Zemlje [27.2], polmer  $R_{\odot}$  [27.2], maso  $M_{\odot}$  [19.11], izsev  $P_{\odot}$  [27.7] in površinsko temperaturo  $T_{\odot}$  [27.9]:

$$\begin{aligned}d_{\odot} &= 150 \cdot 10^6 \text{ km} \\R_{\odot} &= 700 \cdot 10^3 \text{ km} \\M_{\odot} &= 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\P_{\odot} &= 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \\T_{\odot} &= 5800 \text{ K.}\end{aligned}\tag{45.1}$$

Z maso in polmerom je določena povprečna gostota Sonca  $\rho_{\odot} = M_{\odot}/(4\pi/3)R_{\odot}^3 = 1,4 \text{ g/cm}^3$ . To je približno gostota tekoče vode na Zemlji. V središču je gostota seveda večja in na površini manjša. Z radiometričnim datiranjem meteoritov [44.11] pa je določena še približna starost Osončja in s tem Sonca  $t_{\odot} = 4,5 \cdot 10^9$  let.



**Slika 45.2** Sonce. Fotografija z rumenim filtrom. Zrnata površina izdaja konvektivne celice. Na robu so vidni plinasti izbruhi - protuberance. (NASA)

Merjenje zvezd

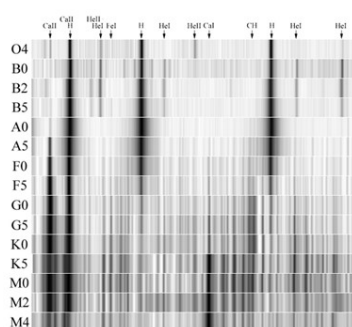
Izmed vse množice zvezd, ki jih vidimo z daljnogledi, jih je samo neznamenat delež takih, ki so dovolj blizu, da kažejo letno paralakso. Daljnogledi lahko izmerijo paralakse, ki so večje od  $0,1''$ , kar pomeni oddaljenosti do 10 pc oziroma do 30 svetlobnih let. Takih je nekaj sto zvezd. Tudi tem zvezdam lahko izmerimo skoraj vse lastnosti, ki smo jih izmerili Soncu. Razdaljo, kot rečeno, določimo s paralakso [27.12]. Temperaturo določimo iz valovne dolžine spektrovega maksimuma [27.8] ali iz razlike magnitud skozi moder in rumen filter. Izsev določimo iz bolometrične magnitude in oddaljenosti [27.13], radij pa iz izseva in temperature [27.13]. Najtežje je določiti maso: zvezda mora biti optično razločljivo dvoezvdje in izmeriti mu moramo obhodni čas [34.13]. Starosti pa zaenkrat ne znamo ugotoviti.

Kot vneti raziskovalci se lotimo težaškega dela in z veliko potrpežljivostjo sestavimo *katalog zvezd* z naštetimi izmerki. Poleg tega za vsako obravnavano zvezdo posnamemo še njen spekter. Vse to je nujna osnova za nadaljnje delo.

## 45.2 Spektralni razredi

Klasifikacija spektrov

Najprej se lotimo posnetih spektrov. Opazimo, da jih lahko razvrstimo v takšno zaporedje, da se istoležne spektralne črte gladko spreminjajo od spektra do spektra. Celotno zaporedje zato razdelimo v priročno število *spektralnih razredov* in za vsakega izberemo reprezentativni spekter.



**Slika 45.3** Spektralni razredi zvezd od O do M. Vsakemu razredu je dodan še podrazred kot številka. Sonce je zvezda tipa G. (Harvard Center for Astrophysics)

Razrede poimenujemo s črkami O, B, A, F, G, K in M. Čudni vrstni red črk odraža dejstvo, da smo prvo zaporedje, ki smo ga uspeli sestaviti, poimenovali po abecednem redu; potem pa smo spektre

bolje prerazporedili, pri čemer smo prvotne črke ohranili. Kakorkoli že: z uvedbo poimenovanih razredov si močno olajšamo nadaljnje delo. Zapomnimo pa si jih kot stavek "Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me!".

Temperatura in spektri

K vsakemu spektru pripišemo še njegovo temperaturo. Vidimo, da ta praviloma narašča od M (3000 K) proti O (30 000 K). Če kje ni tako, zaporedje spektrov ustrezno spremenimo. Dokončana klasifikacija zvezd po spektrih je torej ekvivalentna klasifikaciji po naraščajoči oziroma padajoči temperaturi. Od sedaj naprej bomo zato obravnavali oznake od O do M kar kot okrajšave za ustrezne temperature.

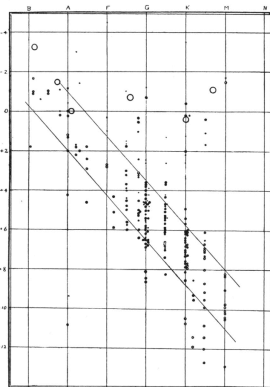
**Tabela 45.1** Razredi in površinska temperatura zvezd.

| Tip | $T_E(10^3 \text{ K})$ | barva   |
|-----|-----------------------|---------|
| O   | > 30                  | modra   |
| B   | 10 – 30               |         |
| A   | 7,5 – 10              | belá    |
| F   | 6 – 7,5               |         |
| G   | 5 – 6                 | rumena  |
| K   | 3,5 – 5               | oranžna |
| M   | < 3,5                 | rdeča   |

### 45.3 Zvezdni diagram

Temperatura in izsev

Ko pregledujemo izseve zvezd, opazimo, da imajo zvezde z višjo temperaturo praviloma tudi višji izsev oziroma – kar je isto – večjo absolutno magnitudo (HERTZSPRUNG). Zato narišemo ustrezen *zvezdni diagram*: porazdelitev zvezd po temperaturi in absolutni magnitudi (RUSSELL).



**Slika 45.4** Zvezdni diagram bližnjih zvezd. Na abscisi so spektralni razredi (torej temperature) in na ordinati absolutne magnitudo (torej izsevi). Temperatura narašča od desne proti levi, izsev narašča od spodaj navzgor. Obe skali sta logaritemski. Zvezde na diagonali tvorijo glavno vejo diagrama. (Russell, 1914)

Zvezdni diagram takoj pokaže, da zvezde nimajo vseh mogočih kombinacij temperature in izseva, ampak da tvorijo veje in otoke. Velika večina zvezd, preko 80 %, tvori *glavno vejo*: pri njih obstaja

tesna povezava med temperaturo in izsevom. Čim višja je temperatura zvezde, tem večji je njen izsev. Približno velja

$$P \propto T_E^8. \quad (45.2)$$

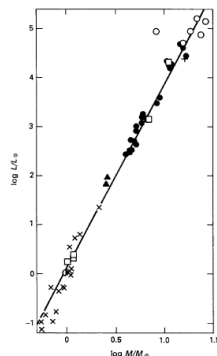
Ker  $P = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_E^4 \propto R^2 T_E^4$ , sledi z izenačitvijo obeh izsevov

$$R \propto T_E^2. \quad (45.3)$$

Bolj vroče zvezde torej nimajo samo večjega izseva, ampak tudi večji polmer. Na spodnjem delu veje so torej hladne, rdeče in majhne zvezde z majhnim izsevom. To so *rdeče pritlikavke*. Njihova temperatura znaša  $1/2$  Sončeve in radij  $(1/2)^2 = 1/4$  Sončevega. Na vrhu veje so vroče, modre in velike zvezde z velikim izsevom. To so *modre orjakinje*. Njihova temperatura je 5-kratnik Sončeve in njihov radij  $5^2 = 25$ -kratnik Sončevega. Sonce je nekje na sredini. Poleg glavne veje obstajata še dva otoka. Desno zgoraj so hladne rdeče zvezde z velikim izsevom in velikim polmerom  $\sim 100 R_\odot$ . To so *rdeče orjakinje*. Levo spodaj pa so vroče bele zvezde z majhnim izsevom in majhnim polmerom  $\sim 1/100 R_\odot$ ; to so *bele pritlikavke*.

Masa kot osnova  
drugih lastnosti

Izsev zvezd je torej povezan z njihovo temperaturo. Zanimivo bi bilo pogledati, ali je morda izsev povezan tudi z maso zvezd. Za maloštevilne izmerjene mase zato narišemo ustrezen diagram.



**Slika 45.5** Odvisnost izseva  $L$  zvezde od njene mase  $M$ . Križci označujejo meritve v optično razločljivih dvozvezdijh. Druge oznake pomenijo spektroskopsko in še kako drugače razločljiva dvozvezdja. (Anon)

Diagram pokaže naslednjo približno povezavo:

$$P \propto M^4. \quad (45.4)$$

Izenačitev (45.4) in (45.2) pove

$$T_E \propto M^{1/2} \quad (45.5)$$

in (45.5) z upoštevanjem (45.3) še

$$R \propto M. \quad (45.6)$$

Povprečna gostota zvezde  $\langle \rho \rangle = M/(4\pi/3)R^3 \sim M/R^3$  pa z upoštevanjem (45.6) pove

$$\langle \rho \rangle \propto \frac{1}{M^2}. \quad (45.7)$$

Kaže, da so izsev, temperatura, radij in gostota zvezde določeni kar z enim samim parametrom – z maso zvezde. Glavna veja na

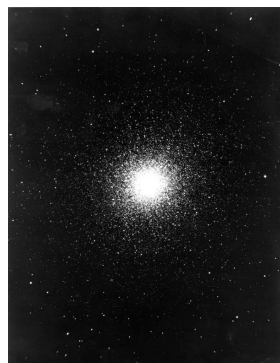
zvezdnem diagramu je torej masna veja. Na njej živijo zvezde različnih mas. Desno spodaj so lahke in goste, levo zgoraj težke in redke zvezde. Mase segajo od 0,1 do 100 Sončevih mas. Zvezda z desetkratno maso Sonca ima, v grobem,  $10^4$ -kratni izsev,  $10^{1/2} = 3$ -kratno temperaturo površja, 10-kratni radij in  $1/10^2 = 0,01$ -kratno gostoto. Takšna je, na primer, modra orjakinja Spika.

Mlade, zrele in stare zvezde

Zvezda nenehno seva energijo in ko bo izčrpale svoj energijski vir – kakršenkoli pač že je – bo ugasnila. Prav tako ni od nekdaj sevala. Kar nam kaže sevalni diagram, je torej trenutni časovni pogled na množico sevajočih zvezd različnih starosti. Kakor pogled na ljudi pokaže otroke, odrasle in starčke, tako pogled na zvezde pokaže mlade, zrele in stare zvezde. Kjer je v sevalnem diagramu največ zvezd, tam preživljajo največ časa. Populacija zvezd torej – v povprečju – preživi največ časa na glavni veji. Spodnji del veje je gostejši: zrela doba lahkih zvezd je dolga. Zgornji del je redek: zrela doba težkih zvezd je kratka. Kako poteka življenje zvezde pa je vprašanje, ki se mu hočemo posvetiti v nadaljevanju.

Spektroskopska paralaksa

Zvezdni diagram omogoča, da določimo oddaljenost vseh onih zvezd, ki so izven dosega paralaktičnih meritev. Taki zvezdi najprej izmerimo magnitudo. Potem ji posnamemo spekter ali ji izmerimo temperaturo; s tem jo umestimo v enega izmed spektralnih razredov. S podrobnim pogledom na spekter je mogoče izključiti zvezdo, ki leži izven glavne veje. Nato predpostavimo, da leži zvezda na glavni veji in iz zvezdnega diagrama odčitamo, kakšen je njen izsev. Iz izseva in magnitude pa izračunamo oddaljenost. Napaka pri določitvi izseva je okrog  $\Delta M = \pm 1$ , zato je oddaljenost nenatančna za faktor  $10^{\Delta M/5} \sim 2$ . To sicer ni bogve kako dobro, a je neprimerno bolje kot nič.



**Slika 45.6** Krogelna kopica M13. Spektroskopska paralaksa njenih zvezd razodeva, da je kopica od nas oddaljena 25 tisoč svetlobnih let. (Palomar Observatory)

Prileganje glavne veje

S spektroskopsko paralakso ne določamo le oddaljenosti posamičnih zvezd, ampak se lotimo tudi zvezdnih kopic. Za vsako izbrano zvezdo v kopici izmerimo magnitudo in temperaturo. Tako dobimo zvezdni diagram za zvezde v kopici. Ordinatna os tega diagrama je obeležena v navideznih magnitudah. Ker pa so vse zvezde v kopici približno enako oddaljene od nas, se

navidezne magnitude razlikujejo od absolutnih zgolj za aditivno konstanto. Zvezdni diagram kopice zato položimo na zvezdni diagram za bližnje zvezde (z absolutnimi magnitudami po ordinati). Premikamo ga vzdolž ordinatne osi, da se glavni veji pokrijeta. S tem je določena aditivna konstanta med obema skalama in z njo oddaljenost kopice. Tako, na primer, ugotovimo, da je znamenita kopica M13 oddaljena  $25 \cdot 10^3$  svetlobnih let.

#### 45.4 Rojevanje zvezd

Sevajoča zvezda je vroča plinasta krogla, ki jo lastna gravitacija stiska navznoter in jo segreva, sesedanje pa ji preprečuje gradient pritiska navzven. Pritisk povzročajo vrveči masni delci (molekule, atomi, ioni, gola jedra, elektroni) in fotoni. Naravna je misel, da zvezda nastane iz redkega, ogromnega in hladnega oblaka plina (od koderkoli se je pač vzela) pod vplivom lastne gravitacije.

Gravitacijsko krčenje

Zamislimo si velik *plinast oblak* iz vodikovih molekul, atomov ali ionov in elektronov. Oblak naj bo homogen in kroglast z radijem  $R$ , maso  $M$  in gostoto  $\rho$ . Poglejmo, kaj se dogaja z masno lupino  $dm$  pri radiju  $r_0$ , ko na začetku miruje. Ta lupina objema notranjo maso  $m_0$  in pada s pospeškom  $g = \kappa m_0/r^2$ . Notranja masa ostaja namreč znotraj padajoče lupine, saj tudi sama pada. Kinetična energija lupine se pri padanju večja, potencialna pa zmanjšuje. Ohranitev energije pove  $\frac{1}{2} (dr/dt)^2 - \kappa m_0/r = -\kappa m_0/r_0$ . Čas padanja lupine do središča znaša  $t_{\text{fall}} = r_0 \int_0^1 (dt/dr) dr$ . Odvod  $dt/dr$  vzamemo iz ohranitve energije in po integraciji dobimo  $t_{\text{fall}} = (\pi^2 r_0^3 / 8\kappa m_0)^{1/2}$ . Razmerje  $m_0/r_0^3$  izrazimo z začetno gostoto ter dobimo *čas skrčitve*

$$t_{\text{fall}} = \left( \frac{3\pi}{32\kappa\rho} \right)^{1/2}. \quad (45.8)$$

V tem času bi se (katerakoli!) oblačna lupina popolnoma skrčila, če se kinetična energija lupin ne bi pretvarjala v termično gibanje njihovih delcev. To pa se seveda pri krčenju prej ali slej začne dogajati. Tedaj se pojavi notranji pritisk, ki gravitacijsko stiskanje upočasnjuje.

Zanimivo je, da čas skrčitve ni odvisen od velikosti oblaka in od mase plinskih delcev, ampak samo od začetne gostote. Velik oblak se skrči enako hitro kot majhen oblak, če le imata enako gostoto. Brez notranjega pritiska bi se Sonce z gostoto  $1 \text{ g/cm}^3$  skrčilo v 1/2 ure! Oblak z maso Sonca in polmerom 1 svetlobno leto (kolikor je tipična razdalja med zvezdami v bližini Sonca) pa bi se skrčil v nekaj milijonih let.

Kritična masa

Plinski oblak se začne krčiti le, če privlačnih gravitacijskih sil ne prevpijejo odbojne sile zaradi notranjega pritiska. Oblak je gravitacijsko vezan, če je njegova gravitacijska potencialna



energija absolutno večja kot notranja kinetična energija delcev. Masa oblaka znotraj radija  $r$  znaša

$$M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr. \quad (45.9)$$

Potencialna energija oblaka je vsota potencialnih energij vseh lupin  $dm = \rho 4\pi r^2 dr$  v polju notranje mase:

$$E_G = - \int \frac{\kappa M_r}{r} dm \sim - \frac{\kappa M^2}{R}. \quad (45.10)$$

Notranja energija je vsota kinetičnih energij vseh delcev  $N = M/\bar{m}$ :

$$E_T = \frac{3}{2} \frac{M}{\bar{m}} kT. \quad (45.11)$$

Iz pogoja  $|E_G| = E_T$  sledi (JEANS)

$$M_J = \frac{3kT}{2\kappa\bar{m}} R. \quad (45.12)$$

Oblak radija  $R$  in temperature  $T$  se začne krčiti, če njegova masa presega mejno vrednost  $M_J$ . Namesto te *kritične mase* lahko vpeljemo *kritično gostoto* krčenja  $\rho_J \sim M_J/R^3$ , kar vodi do pogoja

$$\rho_J = \frac{1}{M^2} \left( \frac{3kT}{2\kappa\bar{m}} \right)^3. \quad (45.13)$$

Oblak z maso  $M$  se začne krčiti, če je njegova gostota večja od kritične  $\rho_J$ . Za krčenje potrebno maso  $M$  ima lahko redek, a dovolj velik oblak oziroma majhen, a dovolj gost oblak. Velik oblak se začne krčiti že pri majhni gostoti. Ko se dovolj skrči, mu pa gostota toliko naraste, da se lahko začnejo neodvisno krčiti posamični deli oblaka. Začetni oblak se razcepi v mnogo delov - *protozvezd*, ki se nato zgoščujejo naprej.

Hidrostatsično  
ravnovesje

Protozvezda se praviloma krči dovolj počasi, da jo lahko v vsakem trenutku obravnavamo, kot da je v hidrostatsičnem ravnovesju. Na razdalji  $r$  od središča protozvezde si mislimo radialni snovni cilindar s ploščino  $S$ , višino  $dr$  in maso  $dm = \rho S dr$ . Na cilindar deluje navzdol teža  $\kappa dm M_r / r^2$ . Če obstaja razlika pritiskov  $dp$  na vrhu in dnu cilindra, deluje nanj sila  $S dp$ . V ravnovesju sta sili nasprotno enaki, zato dobimo

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{\kappa M_r \rho}{r^2}. \quad (45.14)$$

To je hidrostatsična enačba za zvezdo. Negativni predznak pove, da pritisk narašča z globino. Enačba omogoča, da ocenimo njegovo velikost  $p_c$  v središču protozvezde. Postavimo  $dp/dr \sim p_c/R$ ,  $M_r/r^2 \sim M/R^2$  in  $\rho \sim M/R^3$  ter dobimo

$$p_c \sim \frac{\kappa M^2}{R^4}. \quad (45.15)$$

Segrevanje pri stiskanju Pri krčenju se protozvezda segreva. Plinska enačba, zapisana za središče, pove  $p_c = (\rho_c/\bar{m})kT_c$ . Izenačimo jo z enačbo (45.15). Radij  $R$  izrazimo preko aproksimacije  $\rho_c \sim \langle \rho \rangle \sim M/R^3$  in dobimo

$$kT_c = \kappa \bar{m} M^{2/3} \langle \rho \rangle^{1/3}. \quad (45.16)$$

Ko se protozvezda mase  $M$  stiska, se ji gostota  $\langle \rho \rangle$  večja in s tem se ji viša tudi temperatura. Molekule disociirajo, atomi se ionizirajo in nastala mešanica začne čedalje izdatneje sevati fotone. Stiskanje se lahko konča na dva načina. Prvič: temperatura dovolj naraste, da se začno vodikova jedra – protoni – zlivati v težja jedra in pri tem sproščati energijo. To se očitno zgodi tedaj, če je masa  $M$  dovolj velika. Zvezda je rojena. In drugič: če je masa premajhna, pa se – preden temperatura dovolj naraste – gostota že toliko poveča, da postanejo elektroni degenerirani. Plin degeneriranih elektronov pa se, kot vemo [43.5], pod obremenitvijo ne segreva, ampak zgolj upira s tlakom  $p \propto \rho^{5/3}$ . Protozvezda tako izgubi vir toplote, se s sevanjem nadalje ohlaja in čedalje bolj temni. Postati zvezda ji ni uspelo.

Pogoj za prižig Kolikšna je kritična *vžigna masa* zvezde? — Elektron s kinetično energijo  $K \approx kT$  ima gibalno količino  $G \approx (m_e kT)^{1/2}$  in valovno dolžino  $\lambda = h/G \approx h/(m_e kT)^{1/2}$ . Elektronski plin postane degeneriran, ko razdalja med elektroni postane primerljiva z njihovo valovno dolžino. Kritična gostota torej znaša  $\langle \rho \rangle \approx \bar{m}/\lambda^3$ . To gostoto vstavimo v (45.16) in po preurejanju dobimo

$$kT_c = \frac{\kappa^2 \bar{m}^{8/3} m_e}{h^2} M^{4/3}. \quad (45.17)$$

Enačba podaja temperaturo, ki jo doseže protozvezda z maso  $M$ , če se prej ne prižgejo fuzijske reakcije. Kakor smo svoj čas ocenili, se te prižgejo pri  $T \sim 10^7$  K [44.14]. Za to je potrebna vsaj masa  $M \sim 0,1 M_\odot$ . Našli smo razlago, zakaj ni lažjih zvezd.

### 45.5 Zrela doba zvezd

Življenje zvezd, ki v središču kurijo vodik, na primer sedanjega Sonca, tudi obravnavamo kot hidrostatično v vsakem trenutku.

Notranje razmere v Soncu Iz enačbe hidrostatike (45.15) ocenimo pritisk v sredini zvezde. Za Sonce dobimo  $p_c \sim \kappa M_\odot^2/R_\odot^4 \sim 10^{10}$  bar.

Pritisk v središču zvezde je vsota pritiska masnih delcev in fotonov:  $p_c = p_{\text{gas}} + p_{\text{rad}}$ , torej  $\kappa M^2/R^4 = nkT_c + 4\sigma/3c \cdot T_c^4$ . Privzemimo, da je masni plin popolnoma ioniziran vodik, to je plazma iz protonov in elektronov. Enačba stanja za idealen dvokomponentni plin je  $p_{\text{gas}} = nkT_c = \rho_c/\bar{m} \cdot kT_c$ , pri čemer  $\bar{m} = (n_1 m_1 + n_2 m_2)/n$ . Za ionizirani vodik je  $n_e = n_p = n/2$  in  $m_e \ll m_p$ , zato  $\bar{m} = m_p/2$ . Upoštevamo še  $\rho_c \sim M/R^3$  in izračunamo

za Sonce  $T_c \sim 10^7$  K. Pri tej temperaturi znaša razmerje pritiskov fotonov in masnih delcev  $p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} \sim 10^{-3}$ . Pritisk fotonov je zato zanemarljiv. Ves protiupor gravitacijskemu pritisku nudijo masni delci. Temperaturi  $10^7$  K ustreza energija 1 keV. Elektroni postanejo znatno relativistični šele pri 100 keV, protoni pa šele pri  $10^3$ -krat višji energiji. Plazma v Soncu je torej nerelativistična.

Notranje razmere v zvezdi

Ocenili smo temperaturo in pritisk v Soncu. Kakšne pa so te vrednosti v drugih zvezdah?

Ker je  $p_c \propto M^2/R^4 = MM/R^3R = M(\rho)/R$  in hkrati  $p_c \propto (\rho)T_c$ , izenačenje obeh izrazov pove

$$T_c \propto \frac{M}{R}. \quad (45.18)$$

Desetkrat težja zvezda enakega radija bi morala imeti desetkrat večjo središčno temperaturo. Ker pa velja  $R \propto M$ , je desetkrat težja zvezda ponavadi tudi desetkrat večja, zato ima približno enako središčno temperaturo.

Ostaneta še deleža plinskega in masnega pritiska. V razmerje  $p_{\text{rad}}/p_{\text{gas}} \propto T_c^4/(\rho)T_c \propto T_c^3/(M/R^3)$  vstavimo (45.18), pa dobimo

$$\frac{p_{\text{rad}}}{p_{\text{gas}}} \propto M^2. \quad (45.19)$$

Čim bolj masivna je zvezda, tem pomembnejši je v njej tlak fotonov. Pri 100-krat težji zvezdi od Sonca je tlak fotonov že 10-krat večji od tlaka masnih delcev.

Vezavna energija zvezde

Zvezda ima gravitacijsko energijo  $E_G = -\int (\kappa M_r/r)\rho 4\pi r^2 dr$ . V izrazu  $\kappa M_r \rho/r$  prepoznamo gradient hidrostatičnega pritiska  $rdp/dr$ , zato  $E_G = \int r(dp/dr) 4\pi r^2 dr$ . Integral preoblikujemo per partes z uvedbo  $u = 4\pi r^3$  in  $dv = (dp/dr)dr$  in dobimo

$$E_G = -12\pi \int pr^2 dr. \quad (45.20)$$

Gravitacijski pritisk  $p$  je uravnotežen s pritiskom masnega in fotonskega plina, tadv pa sta povezana z gostoto energije plina. Za masni plin znaša gostota energije  $w = (3/2)p$  in notranja energija  $E_T = \int (3/2)p 4\pi r^2 dr$ . Primerjava s (45.20) takoj pove

$$E_T = -\frac{E_G}{2}. \quad (45.21)$$

Za fotonski plin pa velja  $w = 3p$  in

$$E_T = -E_G. \quad (45.22)$$

Celotna energija zvezde znaša  $E_{\text{tot}} = E_T + E_G$  in njena *vezavna energija* je  $-E_{\text{tot}}$ . Za masni plin je torej vezavna energija enaka termični  $E_T$ . Za fotonski plin pa je enaka 0. To pomeni, da je taka zvezda na meji med vezano in nevezano, z drugo besedo, je hidrostatično nestabilna. Kakršnakoli majhna sprememba v zvezdi povzroči, da zvezda razpade. Tako smo razložili, zakaj v

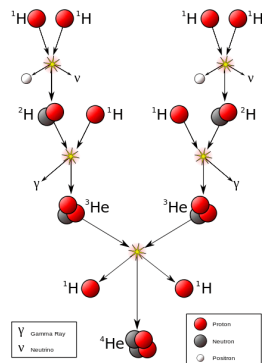
naravi ni zvezd z masami nad 100 Sončeve: zato, ker v njih prevladuje fotonjski tlak in so neobstoje.

Ko se zvezda stisne iz neskončnosti na  $R$ , pridobi toplotno energijo  $E_T \sim \kappa M^2/2R$ . Z izsevom  $P$  se te energije znebi v času  $t \sim E_T/P$ . Za Sonce to znese  $10^7$  let. S sedanjim konstantnim izsevom Sonce ne bi moglo svetiti več kot toliko časa. Vemo pa, da je Sonce staro okrog  $4,5 \cdot 10^9$  let [44.11]. Vemo tudi, da se v zadnji milijardi let njegov izsev ni bistveno spreminjal. To nam povedo radioaktivno datirane kamnine s fosili alg, podobnih današnjim, ki uspevajo le v ozkem temperaturnem območju. Gravitacijski rezervoar energije torej ne zadošča za sevanje zvezd. Potreben je jedrski vir energije.

Jedrski vir energije

Da lahko v zvezdi stečejo jedrske reakcije, mora biti njena središčna temperatura dovolj visoka. Ocenjena temperatura  $10^7$  K za središče Sonca je že kar pravega reda velikosti. Pri njej se protoni že lahko zlivajo v težja jedra in sproščajo energijo ter s tem ohranjajo zvezdo vročo in sevajočo. Veriga jedrskih reakcij se mora začeti s protoni (ker smo privzeli, da drugih jeter ni na voljo) in se končati vsaj z devterijevimi ali helijevimi jedri. Očitno se mora pri tem nekaj protonov spremeniti v nevtrone.

Ustrezna se zdi naslednja veriga reakcij: — Ob trku dveh protonov se eden zaradi šibke sile spremeni v nevtron, pozitron in nevtrino (potrebni je vsaj 1.8 MeV energije). Nastane jedro devterija (sprosti se 2.2 MeV energije). Pozitron se takoj anihilira z najbližjim elektronom. — Ob trku devterija in protona nastane jedro helija  ${}^3\text{He}$ . — Dve jedri  ${}^3\text{He}$  se zlijeta v  ${}^4\text{He}$ , pri čemer odletita proč dva protona.



**Slika 45.7** Zlivanje vodika v helij. Iz štirih protonov nastaneta dve helijevi jedri. Nastaneta tudi dva pozitrona, ki se takoj anihilirata z dvema bližnjima elektronoma; dva nevtrina, ki pobegneta; in dva fotona gama. (Anon)

Končni rezultat je zlitje štirih protonov v helijevo jedro, pri čemer odletita dva pozitrona in dva nevtrina:



Masni primanjkljaj helijevega jedra pove, da se sprosti  $4 \cdot 7 = 28$  MeV energije. Anihilacija prinese dodatna  $4 \cdot 0,5 = 2$  MeV, skupaj 30 MeV. Majhen delež tega odnesejo nevtrini. To je *protonski fuzijski cikel*. Privzeli bomo, da zares poteka v sredicah zvezd, kjer je temperatura dovolj visoka.

Ko zagori vodik v zvezdi, postane ta fuzijski reaktor. Kaj ji preprečuje, da ne eksplodira kot vodikova bomba? Naj se hitrost fuzije poveča. Potem se zgodi tole: temperatura se poveča; pritisk se poveča; sredica se razpne; gostota in temperatura se zmanjšata; hitrost fuzije se zmanjša. Če se hitrost fuzije zmanjša, pa velja nasprotno. Obstaja torej negativna povratna zveza, ki skrbi za to, da ne nastane eksplozija.

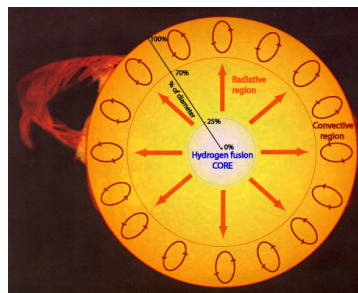
Za koliko časa pa zadošča vodik kot gorivo? Energija, ki jo izseva zvezda v življenju, je enaka vsoti energij, ki jo izsevajo vsi njeni protoni pri zlitju v težka jedra:  $Pt = (M/m_p) \cdot (8 \text{ MeV})$ . Za Sonce sledi  $t = 10^{11}$  let. Goriva za dosedanje življenje Sonca ( $10^{10}$  let) in za njegovo prihodnost je torej več kot dovolj. Ker  $Pt \propto M$  in  $P \propto M^4$  (45.3), velja

$$t \propto \frac{1}{M^3}. \quad (45.24)$$

Težje zvezde živijo manj časa. Zvezda z maso 10 Sončevih živi  $10^3$ -krat manj časa, to je, okoli 100 milijonov let. Odkar obstaja Sonce, se je lahko rodilo in umrlo že mnogo generacij težjih zvezd.

Prenos energije

Energija, ki se proizvaja v sredici zvezde, teče navzven na dva glavna načina. — Prvi način temelji na slučajnem termičnem gibanju posamičnih delcev. Delci se gibljejo, trkajo in prenašajo energijo iz vročih v hladne plasti. Če so delci fotoni, govorimo o *difuziji sevanja*: sredica seva fotone gama, ki pa med potjo do površine izgubljajo energijo in zvezdo zapustijo večinoma kot vidni fotoni. Če so delci elektroni in ioni, pa govorimo o difuziji toplote oziroma o *prevajanju toplote*. — Drugi način temelji na kolektivnem gibanju masnih delcev: mehurji vročega plina se dvigajo, mehurji hladnega plina pa spuščajo. Govorimo o *konvekciji toplote*. Konvekcija se prične, če je temperaturni gradient dovolj velik. Stvar je podobna kot pri prenosu toplote v zemeljskem ozračju.



**Slika 45.8** Prerez skozi Sonce. V sredini gori vodik v helij. Nastala toplota se širi navzven z difuzijo svetlobe in s konvekcijo. Relativne velikosti sredice, prevodne plasti in konvektivne plasti so ilustrativne. (Australia Telescope National Facility)

Za stacionarno stanje pove energijski zakon tole: v lupino z radijem  $r$  in debelino  $dr$  prihaja energijski tok  $P(r)$ , iz nje pa izhaja tok  $P(r + dr)$ , povečan za energijo, ki se v časovni enoti proizvede v lupini. Velja torej

$$\frac{dP}{dr} = \varepsilon \rho 4\pi r^2, \quad (45.25)$$

pri čemer je  $\varepsilon$  fuzijska energija, ki se proizvaja na masno in časovno enoto. Kolikšna je ta energija, zlasti kako je odvisna od temperature, gostote in sestave zvezdne snovi, to pa je vprašanje, ki se ga ne bomo lotili.

Stacionarni energijski tok implicira stacionarni temperaturni gradient. Difuzija svetlobe in toplote se pokorava difuzijski enačbi  $j = -\lambda dT/dr$ , pri čemer je  $\lambda$  povprečni difuzijski koeficient elektronov, ionov in fotonov. Upoštevamo  $P = 4\pi r^2 \cdot j$  in dobimo

$$\frac{dT}{dr} = \frac{P}{4\pi r^2 \lambda}. \quad (45.26)$$

To je enačba za difuzijski prenos energije. Koliko delci – elektroni, ioni ali fotoni – prispevajo k difuziji, to je, kako je difuzijski koeficient odvisen od temperature, gostote in sestave zvezdne snovi, pa je prav tako vprašanje, ki se ga ne bomo lotili.

Ostane še konvekcija. Pri radiju  $r$  vladajo temperatura  $T$ , pritisk  $p$  in gostota  $\rho$ , pri radiju  $r + dr$  pa  $T + \Delta T$ ,  $p + \Delta p$  in  $\rho + \Delta \rho$ . Zaradi  $p \propto \rho T$  velja  $\Delta \rho = \Delta p/p - \Delta T/T$ . Poglejmo mehur plina pri  $r$ . Njegova temperatura, pritisk in gostota so enaki vrednostim v okolici. Naj se mehur adiabatno dvigne za  $dr$ . Na novi višini dobi pritisk  $p + dp = p + \Delta p$  (pritisk se namreč izenači z okolišnjim), temperaturo  $T + dT$  in gostoto  $\rho + d\rho$ . Pri adiabatni spremembi velja  $p \propto \rho^\gamma$ ,  $\gamma = c_p/c_v = (1 + 2/f)$ , to je  $dp/p = \gamma d\rho/\rho$ . Če postane dvignjeni mehur redkejši od okolice, bo začutil neto vzgon iz se bo začel dvigati. Pogoji za konvekcijo je torej  $d\rho < \Delta \rho$  oziroma  $(1/\gamma)dp/p < \Delta p/p - \Delta T/T$  oziroma  $\Delta T/T < (1 - 1/\gamma)\Delta p/p$ . Drugače rečeno: temperaturni gradient v konvektivni plasti zvezde znaša

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dr} \quad (45.27)$$

Če se kje pojavijo večji temperaturni gradienti, jih konvekcija učinkovito zgladi v konvektivnega.

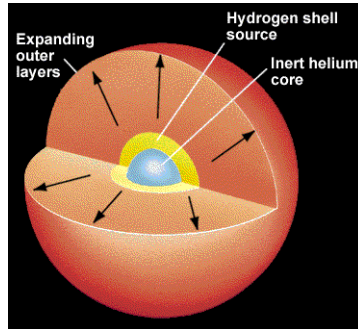
## 45.6 Staranje in smrt zvezd

Rdeče orjakinje

Zvezda na glavni veji nenehno sežiga vodik v helij. Sežiganje poteka v središču zvezde. Prej ali slej pride čas, ko se porabi ves tamkajšnji vodik. V zvezdi tako nastane vroča inertna sredica iz helijevega pepela. S tem presahne centralni fuzijski vir energije, ki vzdržuje notranji pritisk in preprečuje zvezdi gravitacijsko sesedanje. Nastala helijeva sredica se zato začne krčiti in se pri tem segreva.

Zaradi gravitacijskega sesedanja in segrevanja helijeve sredice se segreje tanka okolišnja plast vodika in se prižge. Sedaj gori vodik v tej plasti in nastajajoči helijev pepel pada na inertno helijevo

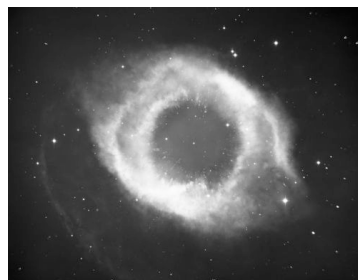
sredico. Ta sa seveda nadalje krči in segreva. Zaradi ne povsem jasnih vzrokov se zunanje plasti zvezde pri tem močno napihnejo. Gravitacijski stisk helijeve sredice in gorenje vodikove plasti povečata izsev; radialni razteg pa zmanjša površinsko temperaturo: zvezda zapusti svoje mesto na glavni veji in postane *rdeča orjakinja* z inertno, kolapsirajočo helijevo sredico in gorečo vodikovo plastjo.



**Slika 45.9** Prerez skozi rdečo orjakinjo z inertno, kolapsirajočo helijevo sredico in gorečo plastjo vodika. (University of Alberta)

Kolaps sredice poteka, dokler se ne zgodi eno od dvojega. — Če je masa zvezde majhna, se sredica, preden se segreje do vžiga, že toliko stisne, da postanejo elektroni v njej degenerirani ter ustavijo nadaljnje krčenje in segrevanje. Goreča plast vodika pa se počasi prežira skozi zunanji negoreči vodik in sproti odlaga nastajajoči helijev pepel na helijevo lupino. — Če je masa zvezde večja, pa se helijeve sredice segreje do vžiga, še preden se pojavi degeneracija. Helij začne goreti v ogljik (tri helijeve jedra ravno zadoščajo za tvorbo enega ogljikovega). Ko zgori ves helij v sredici, tam nastane inertna ogljikova sredica in zgodba se ponovi: sredica se gravitacijsko stiska in segreva, obdana z gorečima plastema helija in vodika. Odvisno od mase postane sredica elektronsko degenerirana ali pa se prižge.

Če je masa zvezde zelo velika, zaporedoma nastajajo in se prižigajo vedno težja jedra. Zvezda postaja podobna čebuli s čedalje več plastmi: v vsaki plasti gori po ena značilna zvrst jeder. Postopek se praviloma ustavi, ko se snov v najbolj notranji sredici tako stisne in zgosti, da postanejo njeni elektroni degenerirani. Kdaj je to, določa masa zvezde. Najkasneje pa se postopek zaporednega prižiganja ustavi, ko nastane železo. Kot vemo, fuzija železovih jeder v še težja jedra ne sprošča energije, ampak jo porablja. Zvezda je porabila vse fuzijsko gorivo.



**Slika 45.10** Razpad rdeče orjakinje v belo pritlikavko in planetarno meglico. Meglica je krogelna in beži navzven. V njenem središču je bela pritlikavka. (Palomar Observatory)

Vsako naslednje gorenje traja hitreje (ker je temperatura višja) in sprošča manj energije (ker se vezavna energija nukleona čedalje manj povečuje s težo jeder). Prižigi tudi povzročijo pritiskovne sunke, ki razpenjajo zunanje plasti zvezde in jih (ker je pri velikih razdaljah gravitacija manjša) odpihnejo v prostor kot *planetarno meglico*. Od rdeče velikanke preostane le gosta sredica, podprta z degeneriranim elektronskim plinom – *bela pritlikavka*. Odvisno od začetne mase je bela pritlikavka sestavljena iz helija; ogljika in kisika; ali še težjih jeder. Najtežje bele pritlikavke so iz železa.

Bele pritlikavke in planetarne meglice

Bela pritlikavka ima radij  $R$ , maso  $M$ , število elektronov  $N$  in število elektronov na prostorninsko enoto  $n$ . Gravitacijska energija na masno enoto znaša  $E_g \sim \kappa M/R$ , kinetična energija elektronov na masno enoto pa  $E_k = (N/M)G^2/2m$ . Elektroni so degenerirani: za vsakega velja  $\Delta \times \Delta G \sim \hbar$ . Aproximiramo  $G \sim \Delta G \sim \hbar/\Delta x$ ,  $\Delta x \sim 1/n^{1/3}$  in  $n \sim N/R^3$  ter vse skupaj vstavimo v izraz za kinetično energijo. V ravnovesju sta gravitacijska in kinetična energija (če se ne menimo za faktor dva) enaki. Izenačimo ju in dobimo  $R \sim (N/M)^{5/3} \hbar^2 / 2m\kappa M^{1/3}$ . Razmerje  $N/M$  je odvisno od sestave plazme; če je plazma popolnoma ioniziran vodik, pride en degeneriran elektron na maso enega protona, torej  $N/M = 1/m_p$ . Vidimo, da velja

$$R \propto \frac{1}{M^{1/3}}. \quad (45.28)$$

Čim bolj masivna je pritlikavka, tem manjši radij ima! Potemtakem bi morala zelo masivna pritlikavka imeti izredno majhen radij. Vendar: čim manjši je radij, v tem manjši prostor so zaprti elektroni in tem hitrejši zato postajajo. Upoštevati moramo, da prej ali slej postanejo relativistični; tedaj velja  $E_k = Gc$ . Ko spet, kot zgoraj, izenačimo  $E_k$  in  $E_g$ , se  $R$  pokrajša in dobimo

$$M \sim \left(\frac{N}{M}\right)^2 \left(\frac{\hbar c}{\kappa}\right)^{3/2}. \quad (45.29)$$

Ko se hitrost elektronov bliža svetlobni hitrosti, se masa pritlikavke približuje mejni masi  $M$ . Nobena pritlikavka torej ne more biti masivnejša od te *zgornje mase pritlikavk*. Če bi bila masivnejša, je degenerirani elektronski plin ne bi mogel več podpirati in bi kolapsirala. Za popolnoma ioniziran vodik izračunamo  $M \sim 2M_\odot$ . Seveda te številske vrednosti ne smemo jemati preveč resno, ker smo računali zelo na grobo. Vendar pa kaže, da smo res zadeli pravi red velikosti, saj v naravi ne najdemo pritlikavk z maso nad 1,5 Sončeve.

Nevtronske zvezde in supernove

Bele pritlikavke nastanejo iz tistih jeder rdečih orjakinj, ki so lažja od 1,5 Sončeve mase. Kaj pa, če je takšno jedro masivnejše? Potem se seveda tudi gravitacijsko krči, vendar ga degenerirani elektronski plin ne more zaustaviti in se krči ter segreva naprej. Predvidevamo, da se pod ogromnim pritiskom protoni in elektroni



v plazmi zlijejo v nevtrone. Nastali nevtronski plin tudi postane prej ali slej degeneriran in zaustavi nadaljnje krčenje. Ker so nevtroni  $10^3$ -krat težji od elektronov, se to zgodi pri  $10^3$ -krat manjših polmerih oziroma pri  $10^9$ -krat večji gostoti snovi kot v belih pritlikavkah. Nastane *nevtronska zvezda*.



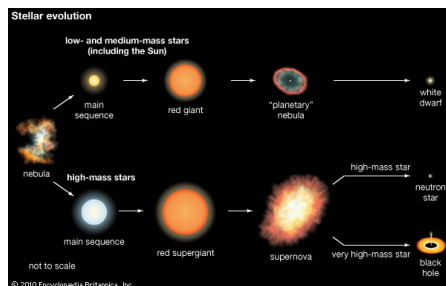
**Slika 45.11** Leta 1054 se je na nebu nenadoma pojavila nova svetla zvezda in bila z golim očesom vidna nekaj mesecev. Po  $\sim 900$  letih je na tistem mestu vidna meglica – ostanek eksplozije supernove. Znotraj meglice se skriva nevtronska zvezda. (Palomar Observatory)

Jedro rdeče superorjakinje kolapsira v nevtronsko zvezdo mnogo siloviteje kot jedro rdeče orjakinje v belo pritlikavko. Sproščena energija v obliki sevanja in udarnega vala je ogromna: zvezda eksplodira in zasveti kot *supernova*. Zunanji deli odletijo v prostor in ga obogatijo z vsemi elementi, ki so nastali v zvezdi med njenim življenjem in v času njene eksplozije. V eksploziji nastanejo tudi elementi, težji od železa. Iz teh ostankov se kasneje rojevajo nove zvezde, vključno s svojimi planeti in z živimi bitji na njih. Upravičeno lahko rečemo, da smo ljudje sestavljeni iz *zvezdnega pepela*.

Črne luknje

Kaj pa tako masivna jedra v rdečih superorjakinjah, ki jih pri gravitacijskem krčenju niti pritisk degeneriranih nevtronov ne uspe zaustaviti? Ni druge: takšna jedra se nadalje krčijo in ne vemo, kaj bi jih sploh lahko zaustavilo. Skrčijo se v točko. To pomeni, da je ubežna hitrost z njih  $v^2 = 2\kappa M/R$  neskončna. Svetlobna hitrost vsekakor ni dovolj za pobeg. Sklepamo, da zato tudi svetloba ne more zapustiti take gravitacijske singularnosti. Rečemo, da je to *črna luknja*.

Tako. Izdelali smo teorijo o rojstvu, življenju in smrti zvezd. Teorija je večinoma kvalitativna, vendar lepo pojasnjuje opažene in izmerjene lastnosti zvezd. Kot vsaka dobra teorija poskrbi tudi za konkretne napovedi, recimo obstoj nevtronskih zvezd in črnih lukenj. Teh napovedi z obstoječimi optičnimi daljnogledi (še) ne moremo eksperimentalno preveriti. Raziskovalnih ciljev in dela nam torej ne bo zmanjkalo.

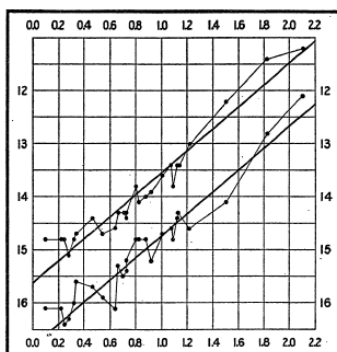


**Slika 45.12** Razvoj zvezd od rojstva do smrti. Življenska pot in končna usoda zvezde sta popolnoma določeni z njeno maso ob rojstvu. (Encyclopedia Britannica)

## 45.7 Galaksija in galaksije

Med zvezdami na nebu so nekatere, ki se jim sij periodično spreminja. Nihajni časi znašajo od nekaj ur do nekaj let. Vzroki so lahko raznovrstni, na primer nihanje radija. Naj bo vzrok kakršenkoli - *spremenljive zvezde* so očitno nekaj posebnega in zato jih hočemo podrobneje raziskati.

**Kefeide** Prva stopnja raziskave je fotografiranje izbranega dela neba v kratkih časovnih presledkih, recimo vsak dan. Sledi pregled slik, lociranje spremenljivih zvezd in določitev njihove temperature, magnitude in periode. Pri tem opazimo, da precej spremenljivih zvezd leži - kot kaže - znotraj zvezdne meglice Mali Magellanov oblak. Te zvezde so torej od nas približno enako oddaljene. Ko pregledujemo njihove izmerke, opazimo, da imajo svetlejšje zvezde daljšo periodo in temnejše zvezde krajšo. Narišemo ustrezen diagram in iz njega razberemo odvisnost: logaritem periode - med 1 in 100 dnevi - je sorazmeren z navidezno magnitudo (LEAWITT). Vse te spremenljive zvezde imajo približno enako temperaturo 6000 K. Kaže, da gre za zvezde "iste vrste". Poimenujmo jih *kefeide*.



**Slika 45.13** Perioda in izsev kefeid v Malem Magellanovem oblaku. Na abscisi je periodo (v logaritmu dnevov) in na ordinati izsev (v navidezni magnitudah). Vsaka kefeida je predstavljena z maksimumom (zgornja črta) in minimumom (spodnja črta) izseva. Razlike med obema znašajo približno 1 magnitudo. (Leawitt, 1912)

**Umeritev kefeid** Ker so vse kefeide v Magellanovem oblaku enako oddaljene od nas, velja opažena soodvisnost pravzaprav za njihove absolutne magnitude. Vendar so, žal, Magellanove kefeide izven dosega paralaktičnih meritev: tako jim absolutnih magnitud ne moremo določiti. Zato pa lahko to naredimo za kakšno dovolj bližnjo kefeido, če jo le uspemo najti! Da gre za kefeido, odločimo kar na podlagi njene periode in temperature, ki morata biti "ustrezni". Žal takih kefeid ne najdemo. Odkrijemo pa nekaj kefeid v kopici M13, ki smo ji že določili oddaljenost [45.3]. S tem smo problem rešili: za kefeido v M13 poznamo oddaljenost, magnitudo in periodo. Iz oddaljenosti in magnitude določimo absolutno magnitudo. K njej pripada izmerjena periodo. S tem je kefeidni diagram absolutno kalibriran (SHAPLEY). Prilegajoča premica za povprečne absolutne magnitude se glasi

$$M = -a \lg \frac{P}{\text{dan}} - b \quad (45.30)$$

$$a = 2.4$$

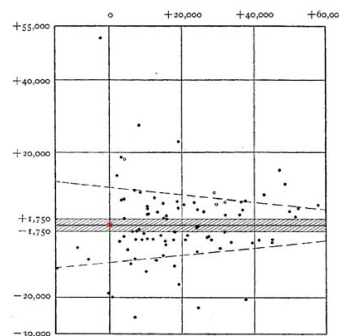
$$b = 1.7$$

Kefeide so torej svetle zvezde z izsevi med 300 in 40 000 izsevi Sonca. V zvezdnem diagramu ležijo izven glavne veje, približno nad Soncem.

Kefeida s svojo periodo razodeva svoj absolutni izsev. S tem postane odličen - in močan - vesoljski svetilnik. Z meritvijo magnitude in periode je namreč njena oddaljenost popolnoma določena. Tako, na primer, izračunamo, da je Mali Magellanov oblak oddaljen od nas za kakšnih  $150 \cdot 10^3$  svetlobnih let. Ne smemo pa pozabiti, da pri merjenju magnitude nagaja absorpcija v plinskih oblakih v medzvezdnem prostoru. Verjetno so izmerjene premajhne magnitude in zato so oddaljenosti precejšene.

Galaktični disk

Na nebu je polno kroglastih kopic. V večini najdemo in izmerimo kefeide. S tem ugotovimo tudi njihovo oddaljenost. Opazimo, da je število kopic "nad" in "pod" ravnino Mlečne ceste je približno enako. Zato narišemo porazdelitev kopic glede na to ravnino.



**Slika 45.14** Razporeditev zvezdnih kopic okrog Sonca. Osrednji pas je določen z ravnino Mlečne ceste. Sonce je označeno z rdečim križcem. Kopice tvorijo kroglast "halo" okrog sploščenega diska zvezd - Galaksije. Razdalje so v parsekih in so dvakrat precejšene glede na kasnejše meritve. (Shapley, 1918)

Iz risbe razberemo, da tvorijo kopice kroglast sistem, ki je centriran glede na neko točko v osrednji ravnini. Ta sistem razodeva, da je Mlečna cesta pravzaprav vidni del velikega diska zvezd - Galaksije - in da leži Sonce približno v osrednji ravnini diska, vendar izven njegovega središča. Premer diska ocenimo na 80 kpc in oddaljenost Sonca iz središča na 20 kpc (SHAPLEY). Izboljšane meritve pokažejo, da so te razdalje dvakrat precejšene: premer znaša okrog  $100 \cdot 10^3$  svetlobnih let in debelina 1/10 tega. Mali Magellanov oblak leži torej izven Galaksije, vendar v njeni neposredni bližini.

Koliko zvezd je v Galaksiji? Razdalja do Soncu najbližje zvezde je nekaj čez 3 ly. Predpostavljamo, da je to tudi povprečna razdalja med zvezdami, to je, da znaša številska gostota zvezd  $N/V \sim 1/(10 \text{ ly})^3$ . Prostornina galaktičnega diska znaša  $V \sim (10^5 \text{ ly})^2 \cdot 10^4 \text{ ly}$ . Množenje obeh količin pove  $N \sim 10^{11}$ .

#### Bližnja galaksija

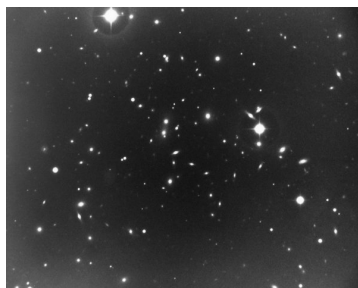
Krogelne kopice niso edine združbe zvezd, ki jih najdemo na nebu. Posebej markantne so spiralne meglice, recimo največja, znamenita M31. Z daljnogledom premera 5 metrov (!) uspemo v njej izmeriti nekaj kefeid. Tako izmerimo oddaljenost te meglice od nas:  $2 \cdot 10^6$  svetlobnih let. Njen kotni premer znaša okrog 3 stopinje (!), zato ima premer okrog  $100 \cdot 10^3$  svetlobnih let (HUBBLE). Meglica M31 je torej približno tako velika kot naša Galaksija in leži za kakšnih 20 svojih premerov proč. Ostale spiralne meglice so videti manjše. Sklepamo, da ležijo bolj daleč. Rečemo, da so vse to galaksije. Naša Galaksija je samo ena izmed mnogih. Če bi jo lahko pogledali od zunaj, bi bila verjetno podobna vsem ostalim.



**Slika 45.15** Najbližja galaksija M31 v ozvezdju Andromede. Od nas je oddaljena 2 milijona svetlobnih let. Njen premer znaša 100 tisoč svetlobnih let. (Palomar Observatory)

#### Množica galaksij

Kako daleč so druge galaksije? Kefeide v galaksijah uspemo meriti vse do razdalje kakšnih 10 milijonov svetlobnih let. Potem postanejo za naše daljnoglede prešibke, predvsem zaradi svetlosti ozračja. Tako izmerimo razdalje le za kakšnih 100 najbližjih galaksij. Naprej ne gre več. Na srečo pa pri merjenjih opazimo, da ima posebna vrsta supernov, ki občasno izbruhnejo v naši in bližnjih galaksijah, približno enako absolutno magnitudo: neverjetnih  $-19$ ! To pomeni, da sevajo kot  $10^{(19+4,6)/2,5} \sim 10^{10}$  Sonc! Te supernove prepoznamo po značilnem naraščanju in pojemanju sija. Z njimi sežemo 100-krat dalje kot s kefeidami, torej do 1 milijarde svetlobnih let! V naši galaksiji smo zabeležili 3 supernove v 1000 letih (leta 1054, 1572 in 1604). Približno tako pogosto - 1 supernova na galaksijo na 100 let - se pojavljajo tudi drugod.



**Slika 45.16** Gruča oddaljenih galaksij. Od bližnjih zvezd se ločijo po eliptični in difuzni obliki. (Palomar Observatory)

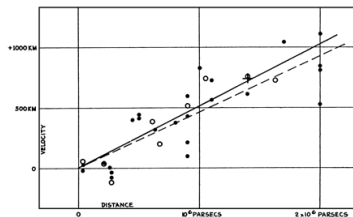
Koliko galaksij vidimo? Razdalja do prve galaksije znaša okrog 1 Mpc. Vzamemo, da je to povprečna razdalja med galaksijami.

Njihova številska gostota je zato  $N/V \sim 1/(1 \text{ Mpc})^3$ . Z daljnogledi vidimo do razdalje  $10^3 \text{ Mpc}$ , torej prostornino  $V \sim (10^3 \text{ Mpc})^3$ . Množenje obeh količin pove število vidnih galaksij  $N \sim 10^9$ . To pomeni, da se v vidnem dosegu (sedanjih) daljnogledov pojavi  $10^9$  supernov v 100 letih oziroma 1 supernova vsako sekundo!

### 45.8 Širjenje vesolja

Beg galaksij

Kako se galaksije gibljejo? Svoj čas smo merili radialne hitrosti bližnjih zvezd s frekvenčnim zamikom njihovih spektralnih črt. Na enak način [35.8] izmerimo sedaj radialne hitrosti galaksij. Doživimo hudo presenečenje: vse galaksije – razen najbližjih – se oddaljujejo od nas in bolj kot so oddaljene, hitreje bežijo!



**Slika 45.17** Beg galaksij. Vse galaksije bežijo proč od nas. Čim bolj so oddaljene, tem hitreje bežijo. Prijetno je videti, da so enote za hitrost napačne, namreč kilometri in ne kilometri na sekundo. (Hubble, 1929)

Graf pokaže, da velja sorazmernost med hitrostjo bežanja  $v$  in oddaljenostjo  $r$  (HUBBLE):

$$v = H_0 r. \quad (45.31)$$

To je *širitveni zakon*. Sorazmernostni koeficient  $H_0$  poimenujemo *širitveni parameter*. Prve meritve galaksij kažejo  $H_0 \approx 500 \text{ kms}^{-1}/\text{Mpc}$ ; kasnejše, bolj natančne, vključujoče bolj oddaljene galaksije, pa pravijo  $H_0 \approx 70 \text{ kms}^{-1}/\text{Mpc}$ .

Kako si naj to razlagamo? Kaj je res naša Galaksija nekaj posebnega, da se vse ostale gibljejo proč od nje? Kaj pa bi videl opazovalec v kakšni drugi galaksiji? Kratek razmislek pove: natanko isto, vse galaksije bi bežale proč od njega.

Veliki pok

Iz bega galaksij sklepamo naslednje. Ker se galaksije med seboj oddaljujejo, so morale biti včasih bolj skupaj. Če v mislih obrnemo tok časa, se začnejo galaksije stekati nazaj k nam. Dvakrat bolj oddaljena galaksija se giblje z dvakrat večjo hitrostjo, zato bi za vrnitev potrebovala enak čas. Vse galaksije, na kakršnikoli oddaljenosti od nas so pač, bi se zato vrnile k nam hkrati. Celotno vesolje bi se torej skrčilo v našo točko. Seveda to velja za vsako točko: vesolje bi se skrčilo vanjo. Pravzaprav bi se vse te opazovalne točke skrčile v skupno točko. Sklepamo torej, da ima vesolje svoj začetek, ko je bilo majhno in zgoščeno in zato vroče, tako kot pri gravitacijskem kolapsu plinskega oblaka v zvezdo. Vesolje se je torej, kot kaže, začelo z eksplozijo, z *velikim pokom*. Takrat je nastala snov, kakršnakoli je pač že bila, in svetloba, ki jo je začela snov sevati. Od tedaj naprej se snov in svetloba širita, pri čemer se oblikujejo galaksije, kakršne danes vidimo v bližnji in daljni okolici. Hitrost širjenja snovi opisuje

širitveni parameter. Njegova recipročna vrednost  $1/H_0$  ima dimenzijo časa in karakterizira čas širjenja, to je starost vesolja  $t_0$ :

$$t_0 \sim \frac{1}{H_0}. \quad (45.32)$$

Vesolje je torej staro  $t_0 \sim 14 \cdot 10^9$  let. Ocenjeni številski rezultat je ugoden, saj je precej daljši od domnevne starosti Sonca. Sonce pač ne more biti starejše od vesolja.

Raztezanje prostora

Če hitrost galaksij res narašča z oddaljenostjo linearno, mora prej ali slej preseči svetlobno hitrost in "izginiti". Toda - ali je to sploh možno? Kaj ni res, da nobeno telo ne more potovati hitreje od svetlobe? Zagato odpravimo z naslednjo izjemno drzno domnevo. Res je: nobeno snovno telo ne more potovati hitreje od svetlobe v lokalnem delu prostora; kaj pa, če se prostor širi? Meja svetlobne hitrosti potem še vedno velja lokalno. Se pa lahko dva različna dela prostora med seboj oddaljujeta, in to s poljubno veliko hitrostjo. Oddaljene galaksije potem pravzaprav ne bežijo od nas, ampak jih s sabo nosi šireči se prostor. Kar vidimo kot beg galaksij, je torej širjenje prostora, ki nosi galaksije s seboj.

Ko pravimo, da se vesoljski prostor razteza, s tem ne mislimo, da se večajo tudi atomi, ali naše telo, ali Zemlja, ali Sončni sistem ali Galaksija. Vse to so telesa, ki jih držijo skupaj močne sile, in na katere povprečna, zglajena gravitacija vesolja nima zaznavnega vpliva. Skupna lastnost naštetih sistemov je, da predstavljajo področja z velikim odstopanjem masne gostote od povprečja preko več deset megaparsekov.

Vidno obzorje

Od svetlobe, ki pada v naše oči, nobena ni starejša od starosti vesolja. Tudi z najmočnejšimi daljnogledi ne moremo videti starejše svetlobe, ker je pač ni. Doseg, do kamor vidimo, je torej omejen. Rečemo, da je to naše *vidno obzorje*. Na prvi pogled se zdi, da je vidno obzorje tako daleč, kolikor prepotuje svetloba v času od velikega poka do danes, torej  $r_{\text{vis}} = ct_0 = 14 \cdot 10^9$  ly. Vendar se je v tem času telo, ki je to svetlobo izsevalo, odmaknilo od nas zaradi širjenja prostora. Vidno obzorje je zato ustrezno večje. Ocenimo ga takole. V času  $t_0$ , ki ga potrebuje svetloba od izseva do vpada v oko, se izvor od razdalje  $r_0$  odmakne za dodatno razdaljo  $s \sim v(r_0)t_0 \sim (H_0 r_0)/H_0 \sim r_0$ . Vidno obzorje torej znaša  $r_{\text{vis}} \sim 2ct_0$ . Čim starejše je vesolje, tem večje je vidno obzorje. To velja za vsakega opazovalca: vsak ima svoje vidno obzorje. Kaj se skriva za njim, pa mora večno ostati nevidno.

### 45.9 Širitveni model

Širjenje vesolja hočemo zdaj zajeti v eno ali več enačb. Privzamemo, da je vesolje homogeno (na skali nekaj deset megaparsekov) in izotropno. To pomeni, da lahko za središče

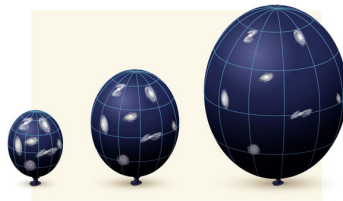
izberemo katerokoli njegovo točko, recimo kar našo Galaksijo. Poglejmo majhen prostorninski element – delec – z maso  $m$  na razdalji  $r$  od tega središča. Zaradi nazornosti si bomo namesto delca predstavljali kar razmazano galaksijo.

Skalirna enačba

Na galaksijo deluje gravitacijska sila mase  $m$  v zaobjeti krogli:  $F = \kappa M_r m / r^2 = 4\pi\kappa\rho r m / 3$ . Galaksija ima potencialno energijo  $W = -\kappa M_r m / r$  in kinetično energijo  $K = m r'^2 / 2$  (torej ne sme biti prehitra). Vsota obeh energij je konstantna:  $(1/2)m r'^2 - (4\pi/3)\kappa\rho r^2 m = E$ . Konstanta  $E$  je v splošnem različna za različne razdalje. Zapisana enačba opisuje spreminjanje razdalje med dvema galaksijama: izhodiščno in obravnavano. Ker je vesolje homogeno, velja enačba za poljubni dve galaksiji. To nam omogoča, da vpeljemo so-bežni koordinatni sistem, ki se giblje skupaj s prostorom. Ker je širjenje linearno, sta *fizična razdalja*  $\mathbf{r}$  in *so-bežna razdalja*  $\mathbf{R}$  med dvema poljubnima galaksijama povezani takole:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{R}. \quad (45.33)$$

Enačba opisuje so-bežno mrežo vektorjev  $\mathbf{R}$ , ki se širi skupaj s prostorom. Galaksije ostajajo, po definiciji, v fiksnih točkah te mreže. Količino  $a(t)$  poimenujemo *skalirni faktor* vesolja. Odvisen je le od časa. Pove nam, kako fizične razdalje med galaksijami naraščajo s časom.



**Slika 45.18** So-bežna koordinatna mreža na balonu. Mreža se širi skupaj z opno balona. "Galaksije" ostajajo v fiksnih točkah te mreže. (Bianchi, 2010)

Enačbo (45.33) vstavimo v energijsko enačbo, upoštevamo  $R' = 0$  in dobimo *skalirno enačbo* (FRIDMAN)

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\kappa}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (45.34)$$

pri čemer smo vpeljali okrajšavo  $k = -2E/mc^2R^2$ . Faktor  $c^2$  smo pritaknili zato, da polepšamo enote:  $[k] = 1/m^2$ . Količina  $k$  mora biti neodvisna od  $R$ , ker so taki vsi ostali členi v enačbi. Iz tega sledi  $E \propto R^2$ . Ker je  $E$  za izbrano galaksijo konstanta in ker je  $R$  zanj fiksiran, je  $k$  kar navadna konstanta. Kakšen je njen pomen? Očitno je vezana na vezavno energijo vesolja. Ničelni, pozitivni in negativni vezavni energiji ustrezajo vrednosti konstante  $k = 0$ ,  $k > 0$  in  $k < 0$ . Rekl bomo, da imamo opravka z gravitacijsko uravnovešenim (*ravnim*), gravitacijsko nevezanim (*odprtim*) ali gravitacijsko vezanim (*zaprtim*) vesoljem. Kakšno je naše vesolje, bomo morali v nadaljevanju še ugotoviti.

Gostotna enačba Skalarina enačba opisuje, kako se skalirni faktor  $a$  spreminja s časom, če poznamo gostoto vesolja  $\rho(t)$ . Kakšna pa je gostota vesolja kot funkcija časa? Krogelna prostornina vesoljske "tekočine"  $V = (4\pi/3)a^3$  vsebuje energijo  $E = mc^2 = (4\pi/3)a^3\rho c^2$ . Pri adiabatnem raztegu te prostornine velja  $dE + pdV = 0$ . Izraza za  $E$  in  $V$  odvajamo po času in vstavimo, pa dobimo *gostotno enačbo* (FRIDMAN)

$$\rho' + 3 \frac{a'}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (45.35)$$

Zdaj torej vemo, kako se spreminja gostota, vendar le, če vemo še, kakšna je enačba stanja  $p = p(\rho)$ . Če to enačbo poznamo, potem gostotna enačba in skalirna enačba enolično določata širjenje vesolja.

Skalirni faktor in širitveni parameter Hitrost bežanja galaksij  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  zapišemo kot  $(|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|)\mathbf{r}$ , upoštevamo  $\mathbf{r} = a\mathbf{R}$  in dejstvo, da je odvod so-bežnih koordinat enak nič. Potem iz širitvenega zakona  $v = Hr$  sledi

$$H = \frac{a'}{a}, \quad (45.36)$$

skalirna enačba pa dobi alternativno obliko

$$H^2 = \frac{8\pi\kappa}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (45.37)$$

Širitveni parameter se torej spreminja s časom. Njegovo vrednost ob današnjem času  $t_0$  označujemo kot  $H_0$ .

Skalirni faktor in rdeči premik Dve galaksiji naj bosta oddaljeni za  $dr$ . Potem se medsebojno razmikata z relativno hitrostjo  $dv = Hdr = (a'/a)dr$ . Svetloba, ki odpotuje iz ene galaksije in prispe v drugo, ima spremenjeno valovno dolžino:  $d\lambda/\lambda = dv/c$ . Potovalni čas znaša  $dt = dr/c$ . Ko zložimo vse skupaj, dobimo  $d\lambda/\lambda = da/a$  oziroma

$$\lambda \propto a. \quad (45.38)$$

Ko se prostor širi, se valovna dolžina svetlobe v njem večja. Predstavljamo si, da prostor razteguje svetlobne valove. S tem svetloba doživlja rdeči premik. Rdeči premik svetlobe je torej posledica relativne hitrosti oddajnika in sprejemnika, pri čemer je njuna relativna hitrost posledica širjenja prostora. Ugotovitev smo izpeljali za dve bližnji točki. Privzeli bomo, da velja tudi za velike razdalje.

#### 45.10 Napovedi modela

Sestavine vesolja Če hočemo ugotoviti, kaj napovedujeta skalirna in gostotna enačba, moramo poznati povezavo med masno gostoto in pritiskom sestavin vesolja. H gostoti  $\rho$  in pritisku  $p$  prispevata tako snov kot svetloba. Današnje vesolje je "plin" iz počasnih masnih delcev (galaksij, atomov v medgalaktičnem prostoru) in



relativističnega sevanja (fotonov in nevtrinov). Plin je redek in hladen, zato je pritisk v njem majhen in postavimo  $p = 0$ . Zgodnje vesolje pa je bilo gost in vroč plin iz osnovnih delcev. Kot vemo iz sredic zvezd, v takem plinu prevladuje pritisk zaradi radiacije; zato postavimo  $p = w/3 = \rho c^2/3$ . Zapisali smo dva mejna primera za vesolje. Rekli bomo, da sta to *masno dominirano* in *sevalno dominirano* vesolje.

Ravno, masno dominirano vesolje

Masno enačbo  $\rho' = 3(a'/a)\rho = 0$  zapišemo v obliki  $(1/a^3)d/dt(\rho a^3) = 0$  in nadalje  $d/dt(\rho a^3) = 0$ . To pomeni, da je  $\rho a^3$  konstanta oziroma  $\rho \propto 1/a^3$ . Nismo presenečeni, saj pričakujemo, da gostota pada obratno sorazmerno s prostornino vesolja. Če z  $\rho_0$  označimo gostoto ob sedanjem času  $t_0$ , ko  $a(t_0) = 1$ , velja  $\rho = \rho_0/a^3$ . To gostoto vstavimo v skalirno enačbo (45.34), upoštevajoč  $k = 0$ , in dobimo  $a'^2 = (8\pi k\rho_0/3) \cdot (1/a)$ . Enačbo poskušamo rešiti z nastavkom  $a \propto t^q$ . Leva stran je odvisna od  $t^{2q-2}$  in desna od  $t^{-q}$ . Obe strani se morata ujemati, kar se zgodi za  $q = 2/3$ . Zato  $a \propto t^{2/3}$  oziroma

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (45.39)$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3}.$$

Vesolje se torej večno razteza, pri čemer se širitveni parameter s časom zmanjšuje:  $H = a'/a = 2/3t$ . Za današnji čas velja  $t_0 = (2/3)(1/H_0) = 9 \cdot 10^9$  let. Po modelu ocenjena starost vesolja je torej nekaj manjša od prvotne ocene na podlagi nespremenljivega širitvenega parametra. Je pa še vedno dovolj velika, da nas ne skrbi preveč.

Ravno, sevalno dominirano vesolje

Z upoštevanjem  $p = \rho c^2/3$  se gostotna enačba glasi  $\rho' = 4(a'/a)\rho = 0$ . Rešujemo jo prav tako kot predhodno, pri čemer je  $a^3$  nadomeščen z  $a^4$ . Dobimo  $\rho \propto 1/a^4$  in nadalje še

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \quad (45.40)$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4}.$$

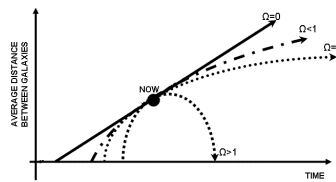
Sevalno dominirano vesolje se širi počasneje kot masno dominirano, in sicer zaradi vpliva tlaka. Torej ne smemo o tlaku misliti kot o nečem, kar vesolje razpihuje. Saj bi bil za to potreben pritiskov gradient, ki pa ga v vesolju ne najdemo. Je pa res, da pri razpenjanju pritisk opravlja delo, kar se kaže v dodatnem manjšanju gostote.

Odprto in zaprto vesolje

Kaj pa, če vesolje ni ravno, to je, če  $k \neq 0$ ? Privzemimo, da je vesolje masno dominirano, kar velja za njegovo celotno dobo, razen za začetek.

Če je v skalirni enačbi (45.37)  $k < 0$ , sta oba člena na desni pozitivna in  $H \equiv a'/a$  bo vedno večji od nič: vesolje se ne bo nikoli nehalo širiti. Z naraščanjem  $a$  pada člen  $kc^2/a^2$  počasneje kot člen  $\rho \propto 1/a^3$  ter prej ali slej postane dominanten. Skalirna enačba dobi zato obliko  $(a'/a)^2 = -kc^2/a^2$  in po krajšanju  $a \propto t$ . Hitrost postane konstantna: vesolje se širi enakomerno.

Če  $k > 0$ , postane razlika obeh členov na desni strani po določenem času enaka nič. To pomeni, da se širjenje ustavi. Ker gravitacijska privlačnost ostaja, pa se mora vesolje začeti krčiti. Kolaps je prav tak kot širitev, vendar v nasprotni smeri. Vesolje se skrči v vročo točko.



**Slika 45.19** Razvoj vesolja, odvisen od masne gostote. Gostota je podana z razmerjem  $\Omega$  med aktualno in kritično gostoto. Prazno vesolje  $\Omega = 0$ ; odprto vesolje  $\Omega < 1$ ; ravno vesolje  $\Omega = 1$ ; zaprto vesolje  $\Omega > 1$ . (Anon)

Širitev vesolja je zelo podobna metu kamna v višino. Če ga vržemo navzgor z veliko hitrostjo, ga Zemljina gravitacija ne bo mogla ustaviti in kamen bo odletel proč z enakomerno hitrostjo. Če ga vržemo z majhno hitrostjo, ga bo gravitacija ustavila in vrnila na tla. Vmes pa je ubežna hitrost, s katero kamen ravno še ubeži gravitaciji in se ustavi v neskončnosti.

Kritična gostota

V skalirni enačbi (45.37) obstaja za dano vrednost  $H$  takšna vrednost  $\rho$ , ki "dela" vesolje ravno, torej  $k = 0$ . To je *kritična gostota*

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi k}. \quad (45.41)$$

Ker se  $H$  spreminja s časom, se ustrezno spreminja tudi kritična gostota. Za sedanjo vrednost  $H_0$  izračunamo iz (45.41)  $\rho_c \sim 10^{-26} \text{ kg/m}^3 \sim 10 m_p/\text{m}^3$ . Na prvi pogled je to zelo majhna vrednost: po en nukleon na medsebojni razdalji en čevljev. Zapišemo pa jo lahko tudi v obliki  $\rho_c \sim 10^{11} M_\odot/(\text{Mpc})^3$ . To pa ni več videti tako majhno: tipična galaksija na tipični medsebojni razdalji galaksij! Kaže, da dejanska gostota vesolja ne more biti daleč od kritične.

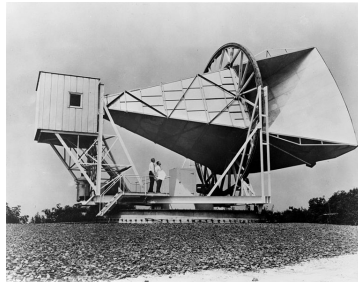
Kakšna je gostota vesolja (upoštevajoč zvezde, rjave pritlikavke, medgalaktične oblake plina, fotone, nevtrine in morda še kaj), je zaenkrat odprto vprašanje. Radi bi že videli, da bi bila enaka kritični gostoti. Zavedati pa se moramo, da vesolju ni mar za naše želje in upe. Na koncu vedno odločijo meritve.

### 45.11 Zgodnje vesolje

Prasevanje

Raziskave vesolja dobijo novo oporo z naslednjim nepričakovanim odkritjem. Kot radijski inženirji preučujemo širjenje mikrovalov in

pri tem uporabljamo veliko sprejemno anteno ter zelo občutljiv sprejemnik za 7-centimetrskе valove. Da bi lahko zaznali šibke energije, poskušamo odstraniti vse druge moteče vire. Med drugim tudi hladimo sprejemnik s tekočim helijem, da zmanjšamo njegov notranji termični šum. Kljub vsem naporom pa še vedno zaznavamo nekakšno sevanje. To sevanje prihaja enakomerno iz vseh delov neba in ni odvisno od dneva in noči ter od letnih časov. Kaže, da prihaja iz globin vesolja. Poimenujemo ga *sevanje ozadja* ali *prasevanje* (PENZIAs).



**Slika 45.20** Antena, s katero je bilo odkrito prasevanje. (NASA)

Merjenja pri različnih valovnih dolžinah razkrijejo, da ima prasevanje spekter črnega telesa s temperaturo  $T \approx 3$  K. To ustreza valovni dolžini  $\lambda \propto 1/T \approx 1$  mm. Gostota energije znaša  $w = 4\sigma T^4/3c$  in ustrezajoča gostota mase  $\rho = w/c^2 = 10^{-30}$  kg/m<sup>3</sup>. To je za štiri rede velikosti manj od kritične mase. Masa prasevanja ne igra nobene vloge pri širjenju današnjega vesolja.

Raztezanje in ohlajanje prasevanja

Ko se vesolje razteza, se z njim razteza tudi valovna dolžina prasevanja:  $\lambda \propto a$ . Ob upoštevanju  $\lambda \propto 1/T$  sledi

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (45.42)$$

Pri širjenju se torej prasevanje oziroma prazen vesoljski prostor, vsebujoč prasevanje, ohlaja kar obratno sorazmerno s svojo velikostjo. Danes, ko je vesolje veliko  $a = 1$ , ima temperaturo  $T_0 = 3$  K. Tisočkrat višjo temperaturo  $T = 3 \cdot 10^3$  K je imele, ko je bilo tisočkrat manjše:  $a = 10^{-3}$ . To se je zgodilo ob času  $t/t_0 = a^{3/2} \sim 10^{-5}$ , torej  $10^{-5} \cdot t_0 \sim 10^5$  let po velikem poku.

Ko govorimo o temperaturi vesolja, mislimo na temperaturo praznega prostora, vsebujočega prasevanje. Vemo pa, da so zvezde vroče in da temu ustrezno sevajo. V vesolju je torej več sestavin – zvezde, medzvezdni plin, svetloba, nevtrini in morda še kaj – in vsaka ima svojo temperaturo. Med seboj so v slabem toplotnem stiku. Vesolje, kot ga vidimo danes, ni v toplotnem ravnovesju, ko bi bila temperatura v njem povsod enaka.

Nastanek snovi in prasevanja

Dovolj daleč nazaj v času je bila temperatura vesolja tako visoka, da v njem niso mogli obstajati današnji atomi, pa tudi ne njihova jedra: termično gibanje je bilo tako silovito, da so bila jedra in atomi razdrobljeni na sestavne dele. Takratna snov je bila zato mešanica prostih protonov, nevtronov, elektronov, nevtrinov in

fotonov. Vsi so vplivali drug na drugega. Kaj je bilo pred to mešanico, na tej stopnji spoznavanja narave ne vemo.

Ko se je zaradi raztezanja vesolja temperatura znižala, so se začeli protoni in nevtroni združevati v jedra. To se je zgodilo tedaj, ko je energija delcev padla znatno pod vezavno energijo nukleonov v jedrih, recimo na okrog  $E \sim 1 \text{ MeV}$ . Tej energiji ustreza temperatura  $T = E/k \sim 10^{10} \text{ K}$ . Tedanji skalirni faktor je znašal  $a = (3 \text{ K})/T \sim 10^{-10}$ . Starost vesolja (predpostavimo masno dominiranega) pa je znašala  $t = t_0 a^{3/2} \sim 10^3$  sekund. Vesolje je bilo torej mešanica jeder (večinoma vodika, devterija in helija, morda še kaj drugega), elektronov, nevtrinov in fotonov. V tej plazmi so švigali fotoni sem in tja in se sipali na električno nabitih jedrih in elektronih. Zaradi sipanja je bila prosta pot fotonov kratka: vesolje je bilo neprozorno za svetlobo.

Ko je energija delcev padla znatno pod vezavno energijo elektronov v današnih atomih, recimo na okrog  $E \sim 1 \text{ eV}$ , so jedra zgrabila in si prisvojila proste elektrone in nastali so prvi atomi. Na enak način kot zgoraj izračunamo tedanjo temperaturo  $T \sim 10^4 \text{ K}$ , skalirni faktor  $a \sim 10^{-4}$  in starost vesolja (predpostavimo masno dominiranega)  $t \sim 10^5$  let. Prostih elektronov je zmanjkalo in s tem je prenehalo sipanje fotonov na njih. Fotonom se je odprla prosta pot za nemoteno gibanje. Snov je postala prozorna za svetlobo. Rodilo se je prasevanje s temperaturo  $\sim 10^4 \text{ K}$ , to je, z valovno dolžino  $\sim 10^3 \text{ \AA}$ . Do danes se je sevanje ustrezno ohladilo in raztegnilo. Snov pa se je gravitacijsko združila v galaksije, zvezde in planete.

Kaj nas čaka

Vesolju je bilo torej potrebnih nekaj minut, da je naredilo prva jedra; nekaj stotisoč let, da je naredilo prve atome in nekaj milijard let, da je naredilo galaksije, zvezde, planete in nas same. Kaj se je dogajalo v prvih minutah vesolja, (še) ne vemo. Kaj je bilo "pred" tem, tudi ne. Morda ne bomo nikoli mogli ugotoviti. Tudi daljna prihodnost nam je bolj ali manj neznana. Vesolje, kot ga poznamo, pa se bo gotovo širilo še milijarde let. Potem bodo zvezde počasi ugasnile in vesolje bo postalo temno in mrtvo pokopališče snovi. Ali pa se bo morda širjenje ustavilo, obrnilo in končalo v novem vročem velikem poku. Življenje človeškega rodu, kaj šele življenje človeškega posameznika, se pokažeta neznatna v primerjavi s trajanjem in razvojem vesolja. Tolaži nas lahko zavest, da smo kljub svoji neznatnosti le uspeli spoznati zgradbo dobršnega dela sveta in odkriti marsikatere zakone, po katerih se ravna. Mnogo raziskovalnega dela nas pa še čaka. Imamo svoj čas; izkoristimo ga.  $\square$

# Pot naprej

Predzadnji vrhovi – Računalniki – Numerična analiza – Analitična mehanika – Mehanika zvezne snovi – Analitična termodinamika – Štirirazsežni svet – Splošna relativnost – Raziskave vesolja – Kvantni prostor stanj – Kvantna elektrodinamika – Osnovni delci in polja – Kvantni čas-prostor – Zadnja meja

## Predzadnji vrhovi

Že in še Razvoj znanosti, poustvarjen v pričujoči knjigi, je dosegel stopnjo, ko smo – tako kaže – spoznali zgradbo in osnovne zakonitosti sveta povsod, razen v njegovih najbolj skrajnih področjih: v notranjosti in bližini nukleonov, v notranjosti in bližini črnih lukenj ter v najbolj zgodnjem in najbolj oddaljenem vesolju. S tem knjigo zaključujemo. Povzpeli smo se na vse "predzadnje" vrhove, kar jih je do danes osvojilo človeštvo. V oblakih pa se kažejo obrisi "zadnjih", najvišjih vrhov. Spodobi se, da za konec omenimo, kaj je bilo pri plezanju nanje že narejenega in kakšna je pričakovana pot navzgor.

## Računalniki

Raziskave polprevodnikov prinesejo nepričakovano odkritje polprevodniške diode in polprevodniške triode – transistorja (SHOCKLEY). Ta dva polprevodniška elementa delujeta (skoraj) tako, kot njuna vakuumška prednika. Sta pa mnogo manjša in robustnejša, zato ju prav hitro in povsod zamenjata. Zamenjata tudi dosedanjo kristalno diodo in refleksne ter (šibke) dvovotlinske klistrone v mikrovalovnih napravah.

Digitalna vezja Majhnost polprevodniških elementov omogoči, da sestavljamo čedalje bolj gosta in zapletena vezja za opravljanje najrazličnejših opravil. Posebej uporabna se pokažejo vezja za obdelavo digitalnih signalov, to je takšnih, ki so sestavljeni iz zaporedja dveh vrst impulzov: visokih in nizkih/ničelnih. Tako sestavimo števec impulzov s segmentnim zaslonom, digitalno uro, analogno-digitalni pretvornik, digitalno-analogni pretvornik, ročni kalkulator z zaslonom iz tekočih kristalov in – krono vsega – namizni *računalnik* s tipkovnico, miško in matričnim zaslonom.

Informacijski stroji Računalnik je najbolj zapletena in vsestranska priprava, kar jih je doslej naredil človek. Je stroj za obdelavo informacij: digitalno kodiranih števil, besedil, slik, zvoka, videa in še kaj. Z njim dobimo v roke sanjsko orodje za pisanje, risanje in računanje, za zajem, obdelavo in prikaz merskih podatkov, za krmiljenje merilnikov in drugih naprav ter še za mnogo drugega. Medsebojna povezava računalnikov v svetovno omrežje pa omogoča hipni dostop do nepreglednega morja informacij ter hipno komuniciranje preko vseh prostorskih meja. Posebej se razmahne komunikacija preko mikrovalov in množice mobilnih

osebnih telefonov ter talnih postaj kratkega dosega. Po pravici lahko rečemo, da je z računalnikom človeštvo stopilo v novo dobo.

### Numerična analiza

Računsko orodje znanosti je matematika – ukvarjanje s števili, funkcijami in enačbami. V principu lahko vse to delamo s svinčnikom na papirju. Če je računanje preobsežno, in v zapletenih primerih je vedno tako, pa pride praktično v poštev le računalnik. Ta v sekundi opravi toliko osnovnih računskih operacij, kolikor bi jih človek s svinčnikom in papirjem v milijon letih.

Računalniška  
numerika

Primeri za numerično uporabo računalnika so naslednji: statistična obdelava nepreglednih množic izmerkov – izračun porazdelitev, povprečij, standardnih deviacij, korelacijskih koeficientov, regresijskih parametrov in drugo; izračun in tabeliranje funkcij, podanih z vrsto ali integralom; izračun harmoničnih spektrov funkcij; reševanje poljubnih enačb; reševanje sistemov linearnih enačb – izračun inverzne matrike, lastnih vrednosti in lastnih vektorjev; in reševanje navadnih ter parcialnih diferencialnih enačb iz podanih začetnih in/ali robnih pogojev.

Reševanje osnovnih  
enačb

Vsi glavni zakoni narave, kakor smo jih spoznali, imajo obliko diferencialnih enačb. Njihovo reševanje je zato osnovnega pomena. Tako, na primer, lahko izračunamo gibanje planetov okoli Sonca, vključno z vsemi njihovimi medsebojnimi vplivi (gibalna enačba); prevajanje toplote po snovi (difuzijska enačba); statična električna in magnetna polja okoli nabojev in tokov (potencialna enačba); stojne akustične in elektromagnetne valove v notranjosti resonatorjev (amplitudna enačba); valovne funkcije in lastne energije elektronov v različnih potencialih (kvantna amplitudna enačba); stacionarna notranja stanja in razvoj zvezd; in še mnogo drugega.

### Analitična mehanika

Princip najmanjše  
akcije

Pot, ki jo pod vplivom konservativne sile ubere delec iz izbrane začetne točke, je določena z začetno hitrostjo in z gibalno enačbo. Sčasoma prispe delec v neko "končno" točko. Namesto da je ubrana pot določena z začetno lego in začetno hitrostjo, je morda določena tudi z začetno in končno lego? Med obema točkama si namreč lahko mislimo mnogo poti. Katera od njih je prava? Ugotovimo, da je prava tista pot, vzdolž katere je razlika med kinetično in potencialno energijo, integrirana po času, najmanjša. Drugače rečeno, prava pot je tista, za katero ima *akcija*  $S = \int_{t_1}^{t_2} (K - W) dt$  ekstrem (HAMILTON). Integrand poimenujemo *akcijska energija*  $L = K - W$ . Kar velja za eno točko in kartezične koordinate, velja tudi za poljuben sistem točk in za njegove splošene koordinate  $q_i$  – razdalje med deli sistema, kote, ki

določajo orientacijo, itd. Upoštevati moramo le celotno kinetično in celotno potencialno energijo sistema.

Posplošene enačbe gibanja Kako izračunamo ekstremalno pot? Ugotovimo, da mora akcijska energija zadoščati naslednjim enačbam druge stopnje (LAGRANGE):  $d/dt (\partial L/\partial q_i') - \partial L/\partial q_i = 0$ . To so *posplošene enačbe gibanja*. Če vanje vstavimo specifični  $L$ , ki opisuje preučevani sistem, dobimo sistem diferencialnih enačb za  $q_i(t)$ , ki ga potem rešujemo kakor vemo in znamo.

Kanonične enačbe gibanja Posplošene enačbe lahko tudi zapišemo kot sistem dvakrat toliko enačb prve stopnje za posplošene koordinate  $q_i$  in posplošene impulze  $p_i = \partial L/\partial q_i'$ . To so *kanonične enačbe gibanja* (HAMILTON):  $dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$ ,  $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$ ,  $H = K + W$ . V njih namesto akcijske energije nastopa *polna energija*, ki je enaka vsoti kinetične in potencialne energije sistema.

Gibanje sistema masnih točk lahko torej opišemo na več enakopravnih načinov: z akcijskim integralom oziroma z vektorskimi, posplošenimi ali kanoničnimi diferencialnimi enačbami. Eno sledi iz drugega. Izberemo tisti način, ki je za dani problem najbolj primeren.

Simetrije in ohranitveni zakoni Če je čas homogen, mora biti akcijska energija sistema neodvisna od časa. Iz tega sledi, da se ohranja energija zaprtega sistema. Če je prostor homogen, mora biti akcijska energija nespremenjena za majhen premik; iz tega sledi, da se ohranja gibalna količina zaprtega sistema. In če je prostor izotropen, mora biti akcijska energija nespremenjena za majhen zasuk; sledi, da se ohranja vrtilna količina zaprtega sistema. Veliki ohranitveni zakoni se tako pokažejo kot posledica homogenosti časa in homogenosti ter izotropnosti prostora (NOETHER).

### Mehanika zvezne snovi

Opis gibanja Gibanje kontinua opišemo tako, da za vsak njegov snovni del povemo, kam se pomakne v času. Ali pa za vsako prostorsko točko povemo, kakšna je tamkajšnja hitrost snovi. Spremembo gibanja v kratkem času zato podamo na dva načina: s substancialnimi odvodi  $d\mathbf{v}/dt$  ali z lokalnimi odvodi  $\partial\mathbf{v}/\partial t$ . Med obojimi velja advekcijaska povezava  $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ .

Gibalna enačba Sile, ki delujejo na snovne dele kontinua, so dveh vrst: prostorninsko porazdeljene (kot npr. teža)  $\mathbf{f}$  in površinsko porazdeljene (sile ob dotiku). Za vsako ploskev  $d\mathbf{S}$ , ki si jo zamislimo v snovi, moramo vedeti, s kakšno silo  $d\mathbf{F}$  deluje levi del na desnega in obratno:  $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{S}$ . Matrika devetih koeficientov  $\sigma_{ij}$  je (simetrični) *napetostni tenzor*. Gibalni zakon za del snovi se potem glasi  $\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}$ . Zapisani zakon lahko uporabimo za izračun gibanja šele, ko poznamo napetostni tenzor za preučevano snov. To nam uspe za dve vrsti snovi: za prožno snov in za viskozno stisljivo tekočino.

- Elastomehanika Za prožno snov tako izpeljemo enačbo gibanja  $\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathbf{f} + G \nabla^2 \mathbf{u} + (K + G/3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ , vsebujočo prožnostni in strižni modul (CAUCHY / NAVIER). To je valovna enačba. Z njo izračunamo deformacije in lastna nihanja "lepih" teles, na primer upogib nosilca, zasuk gredi, nihanje krožne opne, nihanje gumijaste žoge in podobno. Iz nje tudi izpeljemo enačbi za hitrost longitudinalnih in transverzalnih valov v neomejeni snovi. Obojni valovi nastajajo pri potresih. Z merjenjem časa potresnih sunkov na več opazovalnicah izračunavamo žarišča potresov. Ker se transverzalni valovi ne širijo skozi tekočine, ugotovimo, da ima Zemlja pod trdno skorjo tekoč plašč.
- Hidromehanika Za viskozno stisljivo tekočino pa izpeljemo gibalno enačbo  $\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ , vsebujočo strižno in dilatacijsko viskoznost (NAVIER / STOKES). Enačbo lahko poenostavimo za primer neviskozne in/ali nestisljive tekočine. Iz nje tudi izpeljemo enačbi za zvočne in gravitacijske valove.
- Meteorologija Posebej zanimiv kontinuum jo zemeljsko ozračje. To je suh zrak s primesmi vodne pare, oblačnih kapljic in padavinskih delcev. Vse skupaj opišemo z zapletenim sistemom enačb. Osnovo tvorijo enačbe za suh zrak: hidrodinamična gibalna enačba, energijska enačba, kontinuitetna enačba in enačba stanja. Dodane so še razne enačbe za primesi. Upoštevamo tudi systemske sile zaradi vrtenja Zemlje, sončno obsevanje in hribovitost. Začetne pogoje v ozračju določimo iz množice meritev, nadaljnji razvoj pa izračunamo z računalnikom. Tako uspešno napovedujemo vreme za nekaj dni vnaprej. Rešitev sistema enačb je zelo občutljiva na majhne spremembe v začetnih pogojih (LORENZ), zato bolj dolgoročnih napovedi (zaenkrat) ne zmoremo izdelovati.

### **Analitična termodinamika**

- Spremembe stanja Termodinamični sistem, na primer posoda s plinom, je v ravnovesju popolnoma opisan z enačbo stanja. Ta enačba povezuje temperaturo, pritisk, prostornino in še kaj, če je sistem bolj zamotan. Stanje sistema se lahko spreminja. Prehod iz začetnega v končno stanje je "reverzibilen" ali ne. Reverzibilen je tak prehod, katerega nazaj zavrten posnetek je realističen. Izotermno ali adiabatno stiskanje sistema je reverzibilno. Prevajanje toplote, difuzija in gorenje pa to nisto.
- Krožne spremembe in entropija Posebej zanimive so take spremembe, po katerih se sistem vrne v začetno stanje. To so krožne spremembe. Tudi te so lahko reverzibilne ali ne. Odkrijemo, da za krožno reverzibilno spremembo velja  $\oint dQ_{\text{rev}}/T = 0$  (CARNOT). Vsota dovedenih in odvedenih toplot, uteženih s pripadajočimi temperaturami, je enaka nič. To pomeni, da za reverzibilen prehod iz enega stanja v drugega velja  $\int dQ_{\text{rev}}/T = S_2 - S_1$ . S tem je definirana entropija  $S$  sistema relativno na poljubno izbrano stanje. Entropija je funkcija



stanja. Kakršenkoli prehod med dvema stanjema – reverzibilna linija – je povezan s spremembo entropije. Ta sprememba je natanko tolikšna kot pri reverzibilnem prehodu. Entropija je aditivna in se ne ohranja. V izoliranem sistemu narašča, dokler sistem ne doseže notranjega ravnovesja. Če sistem ni izoliran, pa se njegova entropija seveda lahko zmanjša, vendar se pri tem poveča entropija okolice. Skupna entropija sistema in okolice se poveča. To je entropijski zakon (CLAUSIUS).

Termodinamični  
potenciali

Z vpeljano entropijo se energijski zakon zapiše v obliki  $dU = TdS - pdV$  oziroma v kateri izmed ekvivalentnih oblik: za entalpijo  $dH = TdS + Vdp$ , prosto energijo  $dF = -SdT - pdV$  ter prosto entalpijo  $dG = -SdT + Vdp$ . To so diferencialne enačbe za termodinamične potencialne. S parcialnimi odvodi potencialov po pripadajočih spremenljivkah so določene preostale termodinamične spremenljivke. Za sistem v ravnovesju imajo potenciali minimalne vrednosti. Zapisane enačbe veljajo – s potrebnimi dopolnitvami – tudi za večfazne, večkomponentne in celo za kemično reagirajoče sisteme (GIBBS). Omogočajo nam, da izračunamo, kolikšen delovni izplen prinašajo razne krožne spremembe in kakšne so ravnotežne konstante raznih snovnih pretvorb. Tako med drugim ugotovimo, da znaša maksimalni izkoristek toplotnega stroja  $\eta = \Delta T/T$  in da so ravnovesja v dvofaznem sistemu (para in voda, voda in led) opisana z enačbo  $dp/dT = H/\Delta V$ .

Statistični opis

Do sedaj smo statistično opisovali množico enakih, vendar preprostih sistemov – atomov, molekul, elektronov in fotonov. Sedaj opis razširimo na množico enakih, vendar poljubnih sistemov. Tak sistem je, na primer, zaprta posoda z vodo in paro. Sistem, sestavljen iz  $N$  delcev, opišemo v principu s  $3N$  posplošenimi koordinatami  $q_i$  in s  $3N$  posplošenimi impulzi  $p_i$  ter ga predstavimo kot točko v  $6N$  faznem prostoru. Nato si zamislimo neskončno mnogo takih sistemov (ali obravnavani sistem v neskončno mnogo trenutkih) v toplotni kopeli in raziščemo, kako so njihove "točke" porazdeljene po faznem prostoru. Ugotovimo, da je porazdelitev prav taka, kot pri preprostih sistemih, namreč kanonična (GIBBS):  $P_i = (1/Z) \exp(-E_i/kT)$ . Pri tem je  $P_i$  delež sistemov, ki so v energijskem stanju  $E_i$ ,  $Z$  pa je normalizacijska konstanta – particijska funkcija. Termodinamični potenciali se izražajo preko njenih odvodov. Tudi za entropijo najdemo statistično razlago (BOLTZMANN). Sorazmerna je logaritmu števila mikrostanj  $\Omega$ , ki sestavljajo aktualno energijsko stanje sistema:  $S = k \ln \Omega$ . V termodinamičnem ravnovesju je ogromna večina sistemov v tistem makrostanju, ki je sestavljeno iz največ mikrostanj, zato je tedaj entropija največja.

## Štirirazsežni svet

- Četverna lega Ugotovili smo, da niti časovni presledki niti dolžine v svetu niso enake, če jih merimo v različnih inercialnih sistemih. Pri sedlanju iz enega sistema v drugega se časi in lege med seboj prepletajo: transformacija lege vsebuje čas in transformacija časa vsebuje lego. Čas in lega igrata formalno enakopravno vlogo. Zato na svet pogledamo (MINKOWSKI) kot na *štirirazsežni prostor*, katerega točke - dogodke - predstavimo s štirimi koordinatami: tremi prostorskimi in eno časovno (časom, pomnoženim s svetlobno hitrostjo). Takšno četverico poimenujemo četverno lego:  $x_i = (ct, x, y, z)$ . Njena kvadratna norma  $x_i \cdot x_i = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$  je invarianta, to je, v vsakem inercialnem sistemu je enaka. Transformacijo četverne lege iz enega v drug inercialni sistem opišemo z ustrezno transformacijsko matriko:  $x_i' = L_{ij} x_j$ . Podvojeni indeks, tukaj in zanaprej, pomeni seštevanje po njem.
- Četverni vektorji Gibanje delca predstavimo s krivuljo - življenjsko črto - v prostoru-času, pri čemer kot parameter služi čas, ki ga kaže ura na delcu, to je njegov lastni čas  $\tau$ . Kratek premik vzdolž življenjske črte se zapiše kot  $ds^2 = (cd\tau)^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Odvod četverne lege po lastnem času, ki je skalar, poimenujemo četverno hitrost. Ko jo pomnožimo z maso delca, pa dobimo četverno gibalno količino. Njena ohranitev vsebuje združeni zakon o ohranitvi gibalne količine in energije. Odvod četverne gibalne količine po lastnem času pa je četverna sila. V njej se skriva relativistično popravljeni trirazsežni gibalni zakon. Vsi našteti četverci se transformirajo enako - z isto matriko - kot četverna lega. Njihove norme so invariantne.
- Četverna elektrodinamika Za štirirazsežni svet priredimo še enačbe za električni naboj, tok in elektromagnetno polje. Vpeljemo četverni gradientni operator, četverno gostoto toka (ki vsebuje gostoto naboja in gostoto toka) ter četverni potencial (ki vsebuje skalarni in vektorski potencial). Stara kontinuitetna enačba za naboj se potem zapiše kot četverna divergenca četverne gostote toka. Iz gostote toka gibalne količine in iz gostote energijskega toka sestavimo četverni napetostni tenzor. Kontinuitetni enačbi za gibalno količino in energijo se potem zapišeta v eni sapi kot četverni gradient četvernega napetostnega tenzorja. Končno še iz komponent električne in magnetne poljske jakosti sestavimo četverno poljsko jakost. Osnovne štiri enačbe polja se potem zapišejo kot dve enačbi za četverno polje. Vsi vpeljani četverci se transformirajo kot četverna lega, četverni tenzorji pa kot tenzorski produkt dveh četvercev. V vseh inercialnih sistemih imajo vse "četverne" enačbe enako obliko.

## Splošna relativnost

V težnem polju, kakor smo ga opisali s težnim zakonom oziroma s težno potencialno enačbo, se vplivi širijo neskončno hitro. To je v nasprotju s teorijo relativnosti. Teorijo gravitacije je zato potrebno ustrezno nadgraditi (EINSTEIN).

- Ukrivljeni prostor-čas Osnovna zamisel je naslednja: gravitacijsko polje ni nič drugega kot deformacija inercialnega, to je "ravnega" prostora-časa. Kakšna je deformacija, določa prisotna snov. Delec se med dvema točkama giblje po najkrajši poti, geodetki. Dobesedno prosto pada. Z gibanjem delcev se pa seveda spremeni dotedanja porazdelitev snovi ter s tem dotedanja deformacija prostora-časa. Prostor ni nič več nekaj ločenega od snovi, ampak postane ena od "snovnih" sestavin sveta. Nakaj, kar se upogiba, krivi in valuje. Nismo ujeti v nevidno togo ogrodje: potopljeni smo v nekakšnem orjaškem gibkem mehkužcu. Pri roki je nazorna predstava. Prožno opno napnemo na okvir in nanjo tu in tam položimo različno težke kamne. Opna se pod njimi usloči. Po opni zaženemo kroglico in ta se giblje tako, kakor ji velevalo krivine.
- Enačbe gibanja Štirirazsežni prostor-čas opišemo s poljubnimi krivočrtnimi koordinatami  $x^i$ . Kratek premik v tem prostoru se zapiše kot  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ . To je metrična enačba ali krajše *metrika*. Koeficienti  $g_{ij}$  sestavljajo *metrični tenzor* in opisujejo, kako je prostor deformiran. Če te koeficiente poznamo, so geodetke popolnoma določene z geodetskimi enačbami  $d^2x^k/d\tau^2 - \Gamma^k_{ij} \cdot dx^i/d\tau \cdot dx^j/d\tau = 0$ . V izrazih  $\Gamma^k_{ij}$  so skriti metrični koeficienti in njihovi odvodi. Masni delci, kot rečeno, sledijo geodetkam. Geodetske enačbe so torej enačbe gibanja, v katerih koeficienti  $\Gamma^k_{ij}$  prevzamejo vlogo gravitacijske sile. Tudi fotoni sledijo geodetkam, le da te ne morejo biti opisane parametrično z lastnim časom, saj je zanje enak nič.
- Enačbe polja Lokalno deformacijo prostora-časa opisuje *krivinski tenzor*  $R_{ij}$ . To je posplošitev krivinskega radija pri dvorazsežnih ploskvah. Komponente krivinskega tenzorja so na zamotan način izražene z lokalnimi diferenciali geodetk. Vsota tega tenzorja in (s skalarno ukrivljenostjo pomnoženega) metričnega tenzorja je sorazmerna z *napetostnim tenzorjem*, katerega komponente vsebujejo porazdelitev in pretoke mase, energije, gibalne količine in pritiska po prostoru-času:  $R_{ij} - 1/2 R g_{ij} = \kappa/8\pi c^4 \cdot T_{ij}$ . Sorazmernostni koeficient vsebuje znano gravitacijsko konstanto. Zapisana tenzorska enačba - ki je sestavljena iz desetih različnih enačb, ker so nastopajoči tenzorji simetrični - prevzame vlogo stare potencialne enačbe. Slednja je tudi mejni primer, ko je gibanje počasno in ukrivljenost majhna, to je, ko je polje šibko.
- Rešitve enačb Reševanje relativistične gravitacijske enačbe pomeni, da za dani napetostni tenzor iščemo ustrežajoči metrični tenzor, torej metrične koeficiente. Če je napetostni tenzor enak nič, dobimo

ravno metriko. Izračun nam uspe tudi v dveh pomembnih primerih: za središče neskončno velike homogene krogle (FRIDMAN) in za okolico stacionarne krogle (SCHWARZSCHILD). Tako dobimo "vesoljsko" metriko in "zvezdno" metriko. Iz prve sledi opis raztezajočega se vesolja; ujema se s tistim, ki ga že poznamo. Iz druge pa izpeljemo, kolikšen je radij obzorja okrog črne luknje. Svetloba, ujeta znotraj tega obzorja, ne more ubežati preko njega. Črne luknje so nevidne.

Princip ekvivalence V vsaki točki ukrivljenega prostora-časa si lahko mislimo prosto padajoč predmet, recimo zaprto kabino. Na kabino vezan koordinatni sistem je lokalno inercialen: vsi pojavi v njem so prav taki, kakor bi bili v enakomerno se gibajočem sistemu - z izjemo gravitacije, ki čudežno izgine. Zato vse enačbe, ki veljajo v "zaresnih" inercialnih sistemih, veljajo v enaki obliki tudi v lokalnih inercialnih sistemih.

Napovedi in preizkusi Ali je teorija pravilna ali ne, preverimo preko njenih napovedi. Teorija med drugim napove naslednje. — Merkur, kot Soncu najbližji planet, se giblje po elipsi, katere perihelij se počasi vrti. — Svetloba se pri letu mimo Sonca rahlo odkloni. — Ure (seveda ne tiste na težno nihalo) tečejo v težnem polju počasneje. — Svetloba, izsevana iz atomov v težnem polju, je rdeče premaknjena. — Obstajajo težni valovi. Vse to res opazimo in kvantitativno potrdimo. Vendar pa so v teh in drugih "normalnih" okoliščinah posledice teorije tako majhne, da jih večinoma ni treba upoštevati.

### Raziskave vesolja

Razvoj polprevodniških naprav prinese tudi nov svetlobni senzor: kvadratno "fotometriko" iz drobcenih fotodiod. V hipu zamenja dosedanjo fotografsko ploščo v fotoaparatih in astronomskih daljnogledih. Za krmiljenje, zajem in obdelavo izmerkov seveda poskrbijo računalniki. Posebni motorji prilagajajo obliko sestavljenih zrcal tako, da zmanjšujejo motnje iz ozračja in poskrbijo za ostre slike.

Vidni daljnogledi S tako izboljšanimi daljnogledi - s premeri do 10 metrov - uspemo izmeriti paralakse zvezd do razdalje 300 svetlobnih let in katalogizirati preko 100 000 zvezd. S tem močno zgostimo dosedanje zvezdne diagrame. Z dolgim časom ekspozicije pa sežemo do galaksij na oddaljenosti  $10 \cdot 10^9$  svetlobnih let, to je, skoraj na rob (ali na začetek) vidnega vesolja. V vidnem vesolju naštejemo 100 milijard galaksij. Samo v naši Galaksiji naštejemo kakšnih 100 milijard zvezd. Okrog mnogih bližnjih zvezd zaznamo celo planete. Okrog nekaterih jat ali kopic galaksij pa opazimo tudi gravitacijski odklon svetlobe iz zadaj ležečih izvorov: kažejo se kot večkratne slike izvora.

- Radijski teleskopi Poleg vidnih daljnogledov zgradimo tudi radijske teleskope. Največji ima premer antene 300 metrov in leži v mrtvem vulkanskem kraterju. "Usmerjamo" ga s premikanjem fokalnega sprejemnika. Z radijskimi teleskopi odkrijemo *pulzarje*, ki jih prepoznamo kot hitro se vrteče nevtronske zvezde, in *kvazarje*, ki so verjetno ogromne črne luknje v središču mladih (oddaljenih) galaksij, požirajoče okolišnje zvezde. Radijski teleskop uporabimo tudi kot radar in z njim zelo natančno izmerimo oddaljenosti do Lune in do najbližjih planetov.
- Temna masa Pri raziskovanju pa nas čakajo tudi presenečenja. Zvezde na robu galaksij krožijo hitreje, kakor bi smele, če bi na njih delovalo skupno gravitacijsko polje galaksije, ocenjeno iz števila in mas vsebujočih zvezd. Zdi se, kakor da je vsaka galaksija ujeta v kroglo iz nekakšne *temne snovi*, ki ne seva (OSTRIKER). Te snovi je nekajkrat več kot navadne snovi. Kaj naj bi bila, ne vemo.
- Temna energija Oddaljene supernove so manj svetle, kakor bi morale biti pri oddaljenosti, izračunani iz rdečega zamika njihove svetlobe. To pomeni, da se vesolje danes širi hitreje kot nekoč. Kaže, da v vesolju obstaja nekakšna *temna energija*, enakomerno porazdeljena, ki vesolje pospešeno napihuje. Kaj naj bi se skrivalo za vsem tem, ne vemo. Morda so celo meritve napačne. K celotni masi vesolja naj bi temna energija prispevala 70 %, temna snov 25 %, vidna snov pa zgolj okrog 5 %. Vesolje je kot morje ponoči, ko vidimo le bele pene na valovih.
- Sateliti in sonde Vesolja pa ne opazujemo zgolj z Zemlje, ampak vanj tudi vstopimo. — V tirnico okoli Zemlje izstrelimo umetne satelite in nanje postavimo daljnoglede. Tako so povsem izven območja ozračnih motenj, zaznavajo pa lahko tudi žarke gama, ki jih ozračje sicer močno absorbira. — Vidne in infrardeče kamere na satelitih usmerimo proti Zemlji, da sporočajo lego in gibanje vremenskih sistemov v njenem ozračju. — Mreža posebnih satelitov z atomskimi urami na krovu pošilja na Zemljo časovne signale, sprejemniki na Zemlji pa iz njih izračunavajo svojo zemljepisno lego na 1" (30 m) natančno. Pri tem morajo upoštevati vpliv gibanja in težnega polja na tek ur. Kopenska, morska in zračna navigacija postanejo otročje lahke. — Na Mesec pošljemo rakete z ljudmi in jih tudi varno vrnemo. — Sonde na daljinsko krmiljenje in z množico raznih merilnikov pa pošljemo v orbite okrog Venere, Marsa in drugih planetov. Na Veneri in Marsu tudi pristanejo in raziskujejo okolico, izmerke in slike pa pošiljajo na Zemljo. Za izračunavanje poti v težnih poljih ni treba upoštevati relativnosti. — Energijo za delovanje satelitov in sond zagotavljajo radioaktivni viri in polprevodniške sončne celice.

## Kvantni prostor stanj

- Vektorji stanja Stanje kvantnega sistema, recimo delca v potencialni jami, smo opisali s kompleksno valovno funkcijo  $\Psi(x)$ . Zaradi preglednosti privzamemo, da so koordinate  $x$  celoštevilčne. Na valovno funkcijo  $\Psi(i)$  lahko potem pogledamo kot na zaporedje amplitud  $\{\Psi(1), \Psi(2) \dots\} = \{c_1, c_2 \dots\}$ . Zaporedje  $\{c_i\}$  je "vektor" s končno ali neskončno mnogo kompleksnimi komponentami. Po zgledu navadnih vektorjev v tridimenzionalnem skalarnem polju vpeljemo *kvantne vektorje* v mnogodimenzionalnem kompleksnem polju (DIRAC):  $|S\rangle = \sum c_i |i\rangle$ . Bazni vektor  $|i\rangle$  je stolpec, ki ima  $i$ -to komponento enako 1, vse druge pa 0. Njegovo transponirano (in konjugirano) obliko - vrstico - označimo kot  $\langle i| = |i\rangle^\dagger$ . Produkt baznega "bra" vektorja z njegovim "ket" vektorjem je enak 1, z drugimi ket vektorji pa 0. Zato velja  $\langle i|S\rangle = c_i = \Psi(i)$ .
- Kvantni prostor Stanje kvantnega sistema si torej lahko nazorno predstavljamo kot vektor  $|S\rangle$  v namišljenem *kvantnem prostoru*. Ta prostor je napet na končno ali neskončno mnogo baznih vektorjev  $|i\rangle$ . Vsak ima dolžino 1. Vsi so pravokotni drug na drugega. Projekcije  $|S\rangle$  na bazne vektorje so kompleksna števila  $c_i$  - verjetnostne amplitude za različna bazna stanja, v katerih moremo sistem najti ob merjenju. Število vektorjevih komponent je enako številu baznih stanj. Prehod iz diskretnih na zvezni nabor baznih vektorjev je formalno urejen z vpeljavo delta funkcij in njihovih integralov. V zvezni limiti velja  $\Psi(x) = \langle x|S\rangle$ . Posplošitev na večdelčne sisteme je neposredna.
- Posplošene baze Namesto s funkcijo  $\Psi(x)$  lahko opišemo sistem - v istem stanju - s funkcijo  $\Phi(G)$ . Velja vse povedano, le bazni vektorji so sedaj drugi: namesto "lokacijskih" so "gibalni". Zato je ugodno razmišljati o vektorju stanja neodvisno od tega, na katere bazne vektorje je projiciran. Postuliramo naslednje (DIRAC). — Stanje sistema je popolnoma opisano z vektorjem stanja  $|S\rangle$  v kvantnem prostoru. — Vsaka opazljivka  $A$ , recimo lega delca, ima v tem kvantnem prostoru razpet svoj nabor baznih vektorjev  $|a\rangle$ , na katerega je aktualni vektor stanja projiciran:  $|S\rangle = \sum c_a |a\rangle$ . Ko merimo  $A$ , najdemo sistem v enem izmed baznih stanj  $|a\rangle$  in izmerimo mu ustrezajočo vrednost  $a$ . — Bazne vektorje  $|a\rangle$  opazljivke  $A$  in njihove pripadajoče vrednosti  $a$  določa enačba  $A|a\rangle = a|a\rangle$ , pri čemer je  $A$  za to spremenljivko merodajen operator. — Povprečna vrednost spremenljivke, izmerjena v mnogo meritvah, znaša  $\langle A \rangle = \sum a |c_a|^2$ . — Vektor stanja se v času spreminja po gibalnem zakonu  $i\hbar d/dt |S\rangle = H|S\rangle$ , pri čemer je  $H$  energijski operator. Pravzaprav so to stare, že znane enačbe, zapisane na "nepopoln" način. Če jih množimo s konkretnimi baznimi vektorji, recimo z  $\langle x|$ , dobimo "popolne" enačbe v ustreznih koordinatah.

Mnogotirna pot Za gibanje klasičnega delca velja princip najmanjše akcije. Domnevamo, da velja nekaj podobnega tudi za gibanje kvantnega delca. Da se pojavi interferenca, pa morajo različne poti med seboj nekako sodelovati. Tako postuliramo (FEYNMAN): ko se delec giblje iz stanja  $|x_1, t_1\rangle$  v stanje  $|x_2, t_2\rangle$ , ne ubere enega določenega tira, ampak "sočasno" ubere vse mogoče tire  $x(t)$ , ki povezujejo obe točki. Prispevek posamičnega tira je eksponencial, katerega (imaginarna) faza je klasična akcija (normirana na kvantno konstanto) za dotični tir. Celotni prispevek od vseh tirov je amplituda verjetnosti za prehod:  $\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \sum \exp(iS/\hbar)$ . Nazorno to pomeni, da je delec opremljen s puščico enotne dolžine, ki se vzdolž tira vrti. V končni točki seštejemo puščice vseh tirov v skupno puščico. Njen kvadrat je verjetnost, da se tam delec pojavi. Prehod iz diskretnih na zvezni nabor tirov je formalno urejen z vpeljavo mnogotirnih integralov. Dejansko računanje je obsežno in zamotano.

Opisana formulacija kvantnega gibanja je nazorno zelo zadovoljjujoča. Ker ne vemo, po kateri poti se delec giblje, pač seštejemo vse poti. Delec med gibanjem takorekoč preizkuša oziroma "voha" vse možne poti. Če je zaprt v jami, delec raziskuje, kaj je zunaj nje in se odloči, ali bo tuneliral ali ne. Če čepi na vrhu potencialnega hriba, pa ugotovi, da je v okolici potencialna energija nižja, in se odloči, da pade.

Kar smo ugotovili za gibanje iz ene točke v drugo, velja tudi za gibanje iz množice začetnih točk v množico končnih točk. To pomeni, da s tem pravzaprav računamo časovni razvoj valovne funkcije. Tako definirana valovna funkcija in njen razvoj zadoščata kvantni gibalni enačbi. Posplošitev na več delcev je neposredna. Mnogotirni opis kvantnih sistemov je torej enakovreden valovnemu opisu.

### **Kvantna elektrodinamika**

Kvantna mehanika opisuje gibanje lahkih počasnih delcev, ki ne izginjajo in ne nastajajo in med katerimi delujejo konservativne sile, podane s potencialom. Ko jo uporabimo za opis atomov, predpostavljamo, da se elektroni v njih gibljejo nerelativistično, kar ni povsem res. Poleg tega je kvantizirano le gibanje elektronov, elektromagnetno polje sil med njimi pa je opisano klasično, z električnim potencialom. To ne zadostuje, da bi opisali vsa dogajanja v atomih, zlasti ne tista, pri katerih se rojevajo in umirajo fotoni. Izsevanje in absorpcija svetlobe v atomih (in prostih elektronih) sta pač področji, ki sta kvantni mehaniki tuja, in smo jih v njenem okviru tudi obravnavali kot tujka.

Kvantna polja Iz povedanega izhaja, da bi bilo zaželeno kvantno mehaniko nekako razširiti, da bo zajela tako relativistične elektrone kot fotone. To nam uspe: zgradimo novo teorijo – kvantno

elektrodinamiko. V njej nastopajo tako delci snovi – elektroni in pozitroni (antielektroni) – kot tudi delci elektromagnetnega polja – fotoni. Oboji so opisani s *kvantnimi polji*, ki medsebojno vplivajo druga na drugo. Elektroni in pozitroni torej niso več opisani kot posamični delci, pač pa so predstavljeni kot vzbujena stanja v kvantiziranem elektronsko-pozitronskem polju. Osnovna enačba kvantne elektrodinamike ima podobno obliko kot osnovna enačba kvantne mehanike; namesto "stare" valovne funkcije, ki je odvisna od koordinat elektronov, vsebuje "novo" valovno funkcijo, ki je odvisna od zasedbenih števil delčnih stanj. Energijski operator v enačbi pa je temu ustrezno prilagojen.

Virtualni fotoni V kvantni elektrodinamiki se elektromagnetna sila med električno nabitimi snovnimi delci kaže kot izmenjava *virtualnih fotonov* – tako kratkoživih fotonov, da jih ne moremo zaznati. Nabiti delci nenehno izsevajo in absorbirajo virtualne fotone in tako vplivajo drug na drugega. Tipični pojav, ki ga postavlja teorija opisuje, je sipanje: elektrona na elektronu, elektrona na pozitronu, fotona na elektronu in podobno. Dana je, na primer, začetna konfiguracija dveh elektronov; kakšna je verjetnost za katerokoli končno konfiguracijo? Najlažje jo izračunamo po prilagojeni metodi mnogotirnih poti iz začetne v vsako končno konfiguracijo. Pri tem moramo vključiti najrazličnejša izsevanja in absorpcije virtualnih fotonov. Brez računalnika ne gre. Podobno računamo tudi gibanje hitrih elektronov v električnih poljih atomov in sorodne probleme. Računi se povsem ujemajo z eksperimenti.

### Osnovni delci in polja

"Nemogoči" poskusi Izboljšani detektorji delcev, podprti z računalniki, omogočijo izvedbo takih poskusov, ki smo jih doslej imeli zgolj za miselne ali celo za nemogoče. Tako uspe, na primer, interferenčni poskus s posamičnimi elektroni na dveh režah.

Pospeševalniki delcev Obstreljevanje atomskih jeder z "naravnimi" izstrelki – predvsem z "radioaktivnimi" delci alfa in nevtroni – se hitro pokaže za nezadostno. Nimamo dovolj nadzora nad energijami teh delcev in želimo si tudi večjih energij. Zato zgradimo pospeševalnike za "umetne" izstrelke, zlasti elektrone in protone (LAWRENCE). Pospešujemo jih z električnimi polji – enkrat vzdolž ravnih stez ali večkrat vzdolž krožnih stez, pri čemer za ukrivljanje poskrbijo magnetna polja. Uspe nam zgraditi krožno stezo z obsegom 30 km in doseči energijo protonov preko 1 TeV, torej za faktor  $10^6$  večjo od radioaktivnih delcev alfa! Seveda za zajem in obdelavo izmerkov spet poskrbijo računalniki.

Množica novih delcev Izsledki poskusov so osupljivi. Poleg protonov, nevtronov, elektronov, pozitronov, nevtrinov in fotonov – do sedaj poznanih delcev – odkrijemo še nekaj sto drugih, lahkih in težkih. Večina je zelo kratkoživih. Vse te delce uspemo (GELL-MANN) sistemizirati



kot sestavljene iz dobrih dveh ducatov osnovnih delcev – delcev snovi in delcev interakcijskih polj med njimi. Zgledujemo se po kvantni elektrodinamiki. Snovni delci izsevajo ali absorbirajo delce polja in tako vplivajo drug na drugega.

Sistemizacija delcev

Osnovni delci snovi imajo polcel spin in spadajo v dve družini: *leptone* in *kvarke*. Med leptone štejemo: elektron, mion in tauon ter elektronski, mionski in tauonski nevtrino. Med kvarke pa štejemo delce u(p), d(own), s(trange), c(charm), b(ottom) in t(op). K vsakemu delcu obstaja še njegov antidelec, ki ima nekatere nasprotno lastnosti.

Osnovni delci polj imajo cel spin. Močno polje, ki deluje med kvarki, sestavljajo gluoni, in sicer osem njih. Šibko polje, ki deluje med vsemi delci, prenašajo šibki bozoni, troje njih. Obe polji imata kratek doseg. Elektromagnetno polje med delci z električnim nabojem pa prenašajo, kot že vemo, fotoni.

Kvark ima električni naboj  $\pm 1/3$  ali  $\pm 2/3$  ter barvni naboj, ki je lahko rdeč, zelen ali moder. Anti-kvarki imajo barvni naboj anti-rdeč, anti-zelen ali anti-moder. Prosti kvarki ne obstajajo. Obstajajo le vezani; med drugim tvorijo protone in nevtrone. Proton je sestavljen iz treh kvarkov tako, da je njegov električni naboj enak 1 in barvni naboj bel (rdeč + zelen + moder). Podobno velja za nevtron.

Kvarki se vežejo v protone in nevtrone preko gluonov. Vsak gluon izmed osmih nosi po en barvni naboj in anti-naboj, recimo moder in anti-zelen. Preostanek močne sile navzven se kaže kot jedrska sila, ki veže protone in nevtrone med seboj. Močna sila deluje celo med gluoni samimi, saj izsevajo in absorbirajo druge gluone.

Poenotenje treh sil

Tako imamo zgrajene kvantne teorije polj za elektromagnetno, močno in šibko silo. Vse te teorije so v skladu s posebno relativnostjo. Deloma je izdelana še poenotena teorija vseh treh sil. Ta teorija pravi, da so sile odvisne od temperature (energije) delcev. Močna sila, na primer, z energijo pojema. Pri temperaturah, kakršne so vladale na samem začetku velikega poka, naj bi postale vse tri sile med seboj nerazločljive. Ko se je vesolje širilo in ohlajalo, pa so se tudi sile začele razlikovati. Šibka in elektromagnetna sila sta že uspešno združeni. Močna sila na to še čaka.

### **Kvantni čas-prostor**

Kaj pa sila, ki jo je človeštvo spoznalo najprej: gravitacija oziroma ukrivljen prostor-čas, kakor smo jo že prepoznali? Ali je tudi ona kvantizirana v hipotetične gravitone?

Velika teorija vsega

V primerjavi z ostalimi tremi osnovnimi silami je gravitacija tako šibka, da ne igra nobene vloge v atomih in jedrih. Pomembna postane le v ekstremnih področjih: v notranjosti črnih lukenj in v

zgodnjem, gostem vesolju. S tem se pojavi tudi delovna potreba po njeni kvantizaciji. Še močnejše gonilo za to pa je stremljenje po poenotenem opisu vseh štirih sil, to je k izdelavi "velike teorije vsega". Ta teorija naj bi kvantizirala ukrivljeni prostor-čas in mase delcev ter zaobjela vse štiri znane sile in morda še kakšno neznano.

Kako do nje Pot do velike teorije vsega ni znana. Nekateri raziskovalci izhajajo iz obstoječih kvantnih teorij polj in jih poskušajo prilagoditi, da bi vključili še gravitacijo. Težava pri tem je, da izhodiščne teorije polj temeljijo na ozadju ravnega prostora-časa. Drugi pa raje izhajajo iz splošne relativnosti in poskušajo kvantizirati njene enačbe, nato pa vključiti še preostale sile, če bo šlo. Zdi se, da je ta pristop boljši. Kakšnih posebnih uspehov do sedaj pa še ni.

### **Zadnja meja**

Ali bo kdaj izdelana velika teorija vsega, ne vemo. Lepo bi jo že bilo imeti. Vendar na poti do nje stojijo visoke, morda nepremostljive ovire: matematične in eksperimentalne. Do sedaj je bilo človeštvo pri napredovanju še vedno uspešno. Upajmo, da bo tako tudi tokrat.

Ovire pri napredku Danes se zdi, da so trenutne ovire napredka matematične, in te verjetno niso nepremostljive. V okviru svojih omejitev bo človeški razum že našel način, kako jih odpraviti. Še zmeraj je bilo tako. S tem bi uspešno in poenoteno, vsaj v principu, opisali vse, kar je v naravi opaženega. Mnogo bolj resne so pričakovane eksperimentalne ovire. Sodobne meritve postajajo tako težke in merilne naprave tako drage, da se zdi, kot da že trkamo ob eksperimentalno mejo. Tudi če bi končno teorijo le uspeli izdelati, se kaj lahko zgodi, da njenih napovedi (recimo gravitonov) ne bi mogli izmeriti. Prav tako nikoli ne bi mogli biti gotovi, da izven končne teorije ni ničesar več, kar bi ji lahko oporekalo (tudi če bi teorija sama tako trdila). Morda je takšna možnost še najbolj verjetna.

Simulacije sveta Kakor vse kaže, bodo v prihodnje čedalje večjo vlogo igrali računalniški izračuni in simulacije izsekov sveta. Morda pri tem ne bo treba več reševati poznanih enačb gibanja, ampak preigravati nekaj preprostih pravil, kakor pri šahu, ki bi se jim pokoravali sestavni delci sveta pri medsebojni igri gibanja. Računalniki pa bi morali biti dovolj hitri, da bi po teh pravilih lahko uspešno računali. Konec koncev lahko tudi na vesolje pogledamo kot na orjaški računalnik, ki s svojimi sestavnimi deli "računa" in "kaže" rezultate, ne da bi reševal kakršnekoli enačbe. Do takih pravil in do takih računalnikov pa še ni vidne, kaj šele speljane poti. □

# Glavni viri

- Visoka šola Anton, H., 1977: *Elementary linear algebra*. Wiley and Sons, New York.  
Euler, L., 1785/1983: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen, I*. Springer Verlag, Berlin.  
Courant, R., 1971: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 1-2*. Springer Verlag, Berlin.  
Braun, M., 1979: *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin.  
Ivanović, D., 1971: *Vektorska analiza*. Naučna knjiga, Beograd.  
Taylor, J., 1982: *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, Mill Valley.  
Kuščer, I., et al., 1994: *Matematika v fiziki in tehniki*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana.  
Pohl, R., 1969: *Einführung in die Physik, 1-3*. Springer Verlag, Berlin.  
Feynman, R., et al., 1975: *Lectures on Physics, 1-3*. Addison-Wesley, Reading.  
Supek, I., 1949: *Teorijska fizika i struktura materije*. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.  
Atkins, P., et al., 2010: *Physical Chemistry*. Oxford University Press, Oxford.  
Mesinger, F., 1976: *Dinamička meteorologija*. Građevinska knjiga, Beograd.  
Roy, A., et al., 2003: *Astronomy: Principles and Practice*. Institute for Physics Publishing, Bristol.  
Phillips, A., 2004: *The Physics of Stars*. Wiley and Sons, Chichester.  
Little, A., 2015: *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley and Sons, Chichester.
- Dopolnilno čtivo Katz, V. (Ed.), 2007: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*. Princeton University Press, Princeton.  
Smith, D. E., 1959: *A Source Book in Mathematics*. Dover Publications, Mineola.  
Maggie, W. F., 1963: *A Source Book in Physics*. Harvard University Press, Cambridge.  
Shamos, M. H., 1987: *Great Experiments in Physics*. Dover Publications, Mineola.  
Smith, T. P., 2013: *How Big is Big and How Small is Small*. Oxford University Press, Oxford.  
Rothman, M., 1963: *The Laws of Physics*. Basic Books, New York.  
Rothman, M., 1972: *Discovering the Natural Laws*. Dover Publications, Mineola.  
Warren, J., 1965: *The Teaching of Physics*. Butterworth, London.  
Burton, D., 2006: *The History of Mathematics*. McGraw-Hill, New York.  
Mladenović, M., 1986: *Razvoj fizike, 1-4*. Građevinska knjiga, Beograd.



# Viri slik

- Zborniki odlomkov Longair, M., 2013: *Quantum Concepts in Physics*.  
Maggie, W., 1969: *A Source Book in Physics*.  
Shamos, M., 1987: *Great Experiments in Physics*.
- Publikacije pred 1923 Bernoulli, D., 1738: *Hydrodynamica*.  
Becquerel, H., 1896, fotografija.  
Bragg, W., 1915: *X-Rays and Crystal Structure*.  
Cavendish, H., 1798 / Shamos, M., 1987.  
Corbin, T., 1917: *Marvels of Scientific Invention*.  
Coulomb, C., 1785 / Shamos, M., 1987.  
Curie, M., 1904, disertacija.  
Einstein, A., 1906: *Ann. der Physik*.  
Geiger, H., 1913: *Phil. Magazine*.  
Herz, G., 1914: *Verhand. der Deutschen Phys. Gesellschaft*.  
Lebedev, P., 1901: *Ann. der Physik*.  
Leawitt, H., 1912: *Harvard College Observatory Circular*.  
Millikan, R., 1916: *Phys. Review*.  
Moseley, H., 1914: *Phil. Magazine*.  
Perrin, J., 1909: *Ann. de Chemie et de Physique*.  
Perrin, J., 1913 / Pohl, R., 1969.  
Rubens, P. / d'Aiguillon, F., 1613: *Opticorum Libri Sex*.  
Russell, H., 1914: *Nature*.  
Rutherford, E., 1919: *Proc. Roy. Soc.*  
Shapley, H., 1918 / *American Institute of Physics*.  
Stern, O., 1920: *Zeitschrift für Physik*.  
Stern, O., 1922: *Zeitschrift für Physik*.  
Thomson, J., 1897 / Marx, E., 1923: *Handbuch für Radiologie*.  
Thomson, J., 1913: *Proc. Roy. Soc.*  
Wilson, C., 1912: *Proc. Roy. Soc.*  
Wilson, C., 1920+, fotografije.  
Zeeman, P., 1897: *Nature*.
- Publikacije po 1923 Agar, W., 1974: *Princ. and Pract. of El. Mic. Operation*.  
Andersen, A., 2015: *Phys. Rev. Lett. E*  
Anderson, C., 1933: *Phys. Review*.  
*Berkeley Physics Course*, 1965.  
Bianchi, E., 2010: *Nature*.  
Blackett, P., 1925: *Proc. Roy. Soc.*  
Brophy, J., 1966: *Basic Electronics for Scientists*.  
Burcham, W., 1979: *Elements of Nuclear Physics*.  
Bush, J., 2015: *Ann. Rev. Fluid Mech.*  
Chadwick, J., 1932: *Proc. Roy. Soc.*  
Couder, Y., 2006: *Phys. Rev. Lett.*  
Cullity, B., 1967: *Elements of X-ray Diffraction*.  
Feynman, R., 1963: *Lectures on Physics*.  
Fraumeni, J., 1968: *J. Nat. Cancer Inst.*  
Harris, D., 2013: *Phys. Review E*.  
Hubble, E., 1929: *Proc. Nat. Acad. Sci.*  
Koškin, N., 1988: *Priročnik elementarne fizike*.  
McQuarrie, D., 1983: *Quantum Chemistry*.  
Michelson, A., 1927: *Studies in Optics*.  
Meadows, R., 1978: *Technician Electronics 2*.  
Morrison, P., 1994: *Powers of Ten*.  
Neary, G., 1940: *Proc. Phys. Soc.*  
Pohl, R., 1969: *Einführung in die Physik*.

Strojnik, A., 1962: *Industrijska elektronika*.  
Supek, I., 1949: *Teorijska fizika i struktura materije*.  
*The Great Soviet Encyclopedia*.

|             |   |
|-------------|---|
| Spletiŝća   | AAC – All About Circuits<br>American Chemical Society<br>Australia Telescope National Facility<br>CircuitsToday<br>Dresser Atlas<br>Encyclopedia Britannica<br>Eteera Estudios<br>ETH Zŭrich<br>Florida State University<br>FAA – Federal Aviation Administration<br>FAS – Federation of American Scientists<br>General Electric<br>Guardian<br>Harvard Center for Astrophysics<br>Hiroshima Memorial Peace Museum<br>Hong Kong University<br>Humboldt University<br>HyperPhysics / Nave, R.<br>Iowa State University<br>Kenyon College<br>Kyushu University / Takada, K.<br>Max Planck Institute / Hansch, W.<br>NASA – National Aeronautics and Space Administration<br>National Museum of American History<br>New York Times<br>NEETS – Naval Electrical Engineering Training Series<br>NOAA – National Oceanic and Atmospheric Administration<br>Oldenburg Universität<br>Palomar Observatory<br>Perham Collection, San Jose<br>Peter's Physics Pages / Eyland, P.<br>Savannah River Laboratory<br>Science Museum, London<br>SchoolPhysics, UK<br>SlideShare<br>Sol Company<br>University of Alberta<br>University of California / Koks, D.<br>University of Cambridge<br>University of Chicago<br>University of Manchester<br>University of Maryland<br>University of Michigan<br>University of Pittsburgh<br>US Nuclear Regulatory Commission<br>US Weather Bureau<br>What-When-How |
| Posamezniki | Gilchrist, A.<br>Harris, S.<br>Lowe, D.<br>Lynthall, H.<br>Mercator, P.<br>Nagy, K.   |

Rider, J.  
Schure, A.  
Scott, A.  
Thomas, D.  
Warnock, T.





# Kazalo

- absorpcija svetlobe 27.10
- absorpcijski koeficient 27.10
- absorpcijski zakon 27.10
- agregatna stanja 4.2
- agregatne spremembe 4.2
- akromatsko lečje 12.5
- akumulator 26.5
- alkohol 11.6
- amper 24.7
- ampermeter, balistični 24.8
- ampermeter, tuljavni 24.8
  - vezava 24.11
- ampersekunda 24.7
- amplitudna enačba 38.4
- angstrom 23.6
- anihilacija delcev 44.15
- ansambel delcev 42.3
- antidelci 44.15
- apnenec 4.5
- apno 4.5
- astrolab 7.2
- astronomska enota 27.2
- atmosfera (enota) 10.3
- atomi 11.1, 24.1
  - masno število 44.1
  - relativna masa 23.3
  - velikost 41.11
  - vrstno število 41.7, 44.1
- atomska enota mase 23.3, 23.7, 36.3
- atomska jedra 41.7
  - masa 44.1
  - naboj 41.7
  - velikost 41.7, 44.12
- baker 4.6
- bar 19.2
- barometer, vzmetni 10.7
- barometer, živosrebrni 10.3
- barometrijska enačba 22.4
- barve teles 1.4, 12.4
- baterija 24.6, 24.11
- batna brizgalka 20.8
- bencinski motor 26.8
  - glej tudi eksplozijski motor
- binomska porazdelitev 33.5, 33.6
- binomska vrsta 15.3
- bitja in okolje
  - osmoza 23.10
  - svetloba 27.8
  - težnost 20.3
  - toplota 22.18
  - viskoznost 20.7
- bolometer 27.6
- bozonska porazdelitev 43.9
- bozonski plin 43.9
- breztežnost 18.9
- bron 4.6
- centrifugalna sila 19.7
- centrifugiranje 36.3, 44.13
- centripetalna sila 19.7
- cepitev težkih jeder 44.13
- ciklotron 15.9
- cink 4.6
- cirkulacija polja 32.4
- coulomb 24.7
- čas 1.6
  - greenwichki kronometrski 7.9
  - lastni 35.10
  - lokalni kronometrski 7.6
  - lokalni sončni 7.4
  - lokalni zvezdni 7.7
  - nebesni 7.1
- časovna anomalija Sonca 7.6
- časovni pasovi 7.10
- čiste snovi 4.1
- črno telo 27.8
- daljnogled 12.9
- daljnovod 26.3
- dan (enota) 7.1
- deklinacija zvezd 7.7
- deklinacije Sonca 7.3
- delo sile 9.8, 19.8
  - teže 19.8
  - tlaka 22.7
- delta polja 32.5
- destilacija 11.6
- destilator 11.6
- diamagnetna snov 37.10
- dielektrična snov 25.2
- dielektričnost 25.2, 38.11, 39.9, 39.12
- diferenciali 16.2
  - totalni diferencial 30.5
- diferencialne enačbe 19.4
- difuzija snovi 36.11, 36.12
- difuzijska enačba 36.12, 36.13
- difuzijski zakon 36.11
- dinamični vzgon 20.9
- dinamostroj
  - glej električni generator
- dioda 39.2, 40.1
- dioptrija 12.5
- dipolna antena 40.6
- dipolno sevanje 38.7
- disociacija molekul 23.10
- disperzija svetlobe 12.4
- divergenčni izrek 32.3
- divergenca polja 32.3

dogajanje 1.6  
 dogodki 1.6, 35.4  
 dolžina 1.4, 8.1  
 doseg radioaktivnih delcev 44.4  
 dušik 11.2  
 dvigovanje bremena 9.8  
 dvolomnost 27.5  
  
 eksplozijski motor 22.14  
 eksponentna funkcija 15.4  
 ekstremi funkcij 16.8, 30.8  
     vezani 30.9  
 ekviparticijska energija 36.8  
 električna cirkulacija 37.2  
 električna energija 25.10  
     gostota 25.10, 38.5  
 električna iskra 24.3, 38.8  
 električna konstanta 25.2  
 električna moč 24.9  
     sipana 24.10  
 električna napetost 24.9  
     efektivna 25.9  
     gonilna 24.9  
     inducirana 25.5  
     izmenična 25.8  
     padci 24.9  
     trifazna 26.2  
 električna ozemljitev 26.4  
 električna polarizacija 37.5  
 električna poljska jakost 25.1, 25.3,  
     37.1  
     sistema nabojev 37.1  
     točkastega naboja 37.1  
 električna prevodnost 24.10  
     specifična 24.10, 39.11  
 električna sila 25.1  
 električna susceptibilnost 37.5  
 električna varovalka 26.4  
 električna žarnica 26.6  
 električni dipol 37.4  
 električni generator 25.8, 26.2  
 električni grelec 26.6  
 električni moment 37.4  
 električni naboj 24.1  
     gostota 37.1  
 električni potencial 37.3  
     sistema nabojev 37.3  
     točkastega naboja 37.3  
 električni pretok 37.2  
 električni tok 24.6  
     efektivni 25.9  
     enosmerni 24.6  
     gostota 24.7, 39.8  
     inducirani 25.5  
     izmenični 25.9  
     jakost 24.7  
     trifazni 26.2  
  
 električni transformator 25.8, 26.3  
 električni upor 24.10  
     specifični 24.10  
 električno delo 24.9  
 električno omrežje 26.4  
 električno polje 25.1  
     silnice 25.1  
 električno vozliščno pravilo 24.10  
 električno zračno pravilo 24.9  
 elektroliti 24.6  
 elektroliza srebra 24.7  
 elektroliza vode 24.7  
 elektrolizna konstanta 24.7  
 elektrolizni zakon 24.7  
 elektromagnet 24.8  
 elektromagnetna sila 39.4  
 elektromagnetni spekter 38.8  
 elektromagnetni valovi 38.2, 38.5  
 elektromagnetno polje 38.1  
 elektromagnetno valovanje v  
     dielektriku 38.10  
 elektromotorji 26.7  
 elektroni 24.1  
     magnetni moment 41.13  
     masa 39.4  
     naboj 39.7  
     spin 41.13  
 elektroni na kapljicah 39.7  
 elektroni v kovinah 39.8, 39.11, 43.5  
 elektroni v kristalih 43.6  
 elektroni v snovi 39.8  
 elektronske leče 41.5  
 elektronski curek 39.3  
     v električnem polju 39.4, 39.5  
     v križnem polju 39.4, 39.5  
     v magnetnem polju 39.4, 39.5  
 elektronski magneton 41.12  
 elektronski mikroskop 41.5  
 elektronski model snovi 24.1  
 elektronvolt 39.3  
 elektroskop 24.2  
 elektrostatični zakon 37.1  
 elementi 11.1  
 enačba dušenega nihanja 34.10  
 enačba hidrostatične 10.2  
 enačba nihanja 19.4  
 enačba preslikave 12.5  
 enačba tokovnice 20.8  
 enačba vsiljenega dušenega nihanja  
     34.10  
 enačba vsiljenega nihanja 34.10  
 enačba za parni tlak 22.11  
 enačbe elektrodinamike v snovi 38.9  
 enačbe elektrostatične v snovi 37.5  
 enačbe magnetostatike v snovi 37.10  
 enačbe, pomen 6.5, 6.6  
 enakonočje 3.4

energija nihanja 19.8  
 energija valovanja 21.14  
 energijski zakon 22.6, 22.7  
 enobarvna svetloba 12.4  
 farad 25.2  
 fermionska porazdelitev 43.4  
 fermionski plin 43.4  
 feromagnetna snov 37.10  
 fokusiranje svetlobe 4.7  
 fotoaparati 27.11  
 fotocelica 40.2  
 fotodioda 40.2  
 fotoelektrični pojav 40.2  
 fotografska plošča 27.11  
 fotoni 11.1, 12.1  
     energija 41.1  
     gibalna količina 35.14, 41.1  
     masa 41.1  
     spin 42.13  
     valovna dolžina 41.1  
 fotonski plin 43.10  
 fotopomnoževalka 40.2  
 fotoprevodnost, glej fotoupor  
 fotoupor 27.6  
 frekvenčni premik svetlobe 35.8  
 frekvenčni premik zvoka 21.12  
 frekvenca svetlobe 27.3  
 frekvenca valovanja 21.2  
 frekvenca zvoka 21.9  
 funkcije 14.1-2, zapis z  
     enačbo 14.1, 14.8, 33.15  
     grafom 14.1, 14.7  
     tabelo 14.1, 14.8  
 funkcije več spremenljivk 30.3-7  
 Galaksija 12.10  
     oblika 45.7  
     število zvezd 45.7  
     velikost 45.7  
 galaksije  
     beg 45.8  
     medsebojna razdalja 45.7  
     oblika 45.7  
     oddaljenost 45.7  
     širjenje prostora 45.8  
     velikost 45.7  
 galvanometer 24.8  
 galvanski člen 24.6  
 geocentrični model sveta 3.6  
 geometrijska vrsta 15.2  
 gibalna količina 34.3, 35.10  
     relativistična transformacija 35.13  
 gibalni zakon 19.3, 34.1  
 gibanje 1.7  
 gibanje delca v potencialni jami 42.9  
 gibanje tekočin 20.6  
 gibanje točkastega telesa 34.1  
 gibanje togega telesa 34.6  
     kotaljenje 34.8  
     rotacija 34.6, 34.7  
     težno nihanje 34.9  
     torzijsko nihanje 34.9  
     translacija 34.6  
     vrtavka 34.8  
 gladinski hodci 42.2  
 glasbeni intervali 21.11  
 glasilke 21.10  
 glina 4.5  
 gnomon 3.3  
 gorenje 4.3, 11.2  
 gorišče 12.2  
 gradbeni obok 20.3  
 gradient polja 32.2  
 gravitacijska energija 9.8, 19.8, 19.11, 34.12  
     gostota 20.8  
 gravitacijska konstanta 19.9, 34.11  
 gravitacijska poljska jakost 19.10, 34.12  
 gravitacijska sila 19.9  
 gravitacijski potencial 34.12  
 gravitacijski zakon 19.9  
 gravitacijsko polje 19.10, 34.12  
     krogle 19.10, 34.12  
 grezilo 3.3  
 guma 4.7  
 harmonične vrste 28.6, 28.8  
 harmonični integrali 28.9  
 hektar 8.9  
 heliocentrični model sveta 8.13  
 henry 25.7  
 hertz 21.2  
 higrometer na las 22.12  
 hitrost 1.7, 18.1, 18.3, 18.5, 34.1, 35.7  
     obodna 18.8, 34.1  
     pospešek 18.3, 18.5, 34.1  
     radialni 18.8, 34.1  
     tangentni 34.1  
 hitrost razpadanja 44.11  
 hitrost svetlobe 27.1, 35.2, 38.2  
 hitrost valovanja 21.1  
 hitrost zvoka 21.8, 21.9  
 hkratnost 1.6, 35.4  
 hladilni stroj 22.15  
 horizontalna ravnina 1.5  
 indukcija 25.5  
     kinematična 25.5  
     lastna 25.11  
     dinamična 25.5  
 indukcijski zakon 25.5  
 induktivni upor 25.9  
 induktivnost (tuljave) 25.7  
 inercialni sistem 19.6, 35.3

influenza naboja 24.2  
 infrardeča svetloba 27.8  
 infrazvok 21.10  
 integral funkcije 17.1  
     elementarni integrali 17.2  
     pravila integriranja 17.3  
 interferenca svetlobe 27.3  
 interferometer 35.2  
 invarianca svetlobne hitrosti 35.3  
 ioni 24.6  
 ioni v elektrolitih 24.7, 39.8  
 ionizacijska celica 41.3  
 ionizacijska cev 44.2  
 ionizacijska energija atoma 41.9, 44.2  
 ionizacijski števec 44.2  
 ionosfera 40.8  
 iskrilna tuljava 26.8  
 izbitje notranjega elektrona 41.11  
 izhlapevanje 4.2, 36.10  
 izključitveno načelo 41.13  
 izotopi 39.6  
 izparevanje, glej izhlapevanje  
 izparilna toplota 22.10  
     specifična 22.10  
 izrek o gibalni količini 34.3  
 izrek o gibanju težišča 34.2  
 izrek o istoležnih stranicah 8.2  
 izrek o kinetični energiji 19.8, 34.1, 34.5  
 izrek o mehanski energiji 19.8  
 izrek o vrtilni količini 34.4  
 izrek o vzporednih oseh 34.7  
 izsev 27.7, 27.13  
     gostota 27.7  
 iztekanje iz posode 20.8  
  
 jedrski reaktor 44.13  
 jeklo 4.6  
 joule 19.2  
  
 kalij 11.8, 23.4  
 kalorimeter, ledni 22.10  
 kalorimeter, vodni 22.7  
 kamnine 1.2  
 kanalski žarki 39.6  
 kanonična porazdelitev 36.6, 43.2  
 kapaciteta (kondenzatorja) 25.2  
 kapacitivni upor 25.9  
 kapilarni dvig / spust 20.10  
 katodna cev 39.2  
 katodni žarki 39.2  
 kavčuk 4.7  
 kelvin 22.2  
 kemijske formule  
     kvalitativne 11.8  
     kvantitativne 23.3-4, 23.11  
 keramika 4.5  
 kilogram 19.2  
  
 kilokalorija 22.6  
 kilomol 23.7, 23.8, 36.3  
 kilomolska masa 23.7  
 kilopond 9.2  
 kilopondmeter 9.8  
 kinetična energija 19.8, 34.5, 35.12  
     gostota 20.8  
     rotacijska 34.5, 34.7  
     težišča 34.5  
     translacijska 34.5, 36.2  
 kinetična teorija toplote 36.2  
 kinetični model plina 36.1  
 kisik 11.2, 11.4, 24.7  
 kisline, lugi in soli 11.5  
 kitara 21.11  
 klanec 9.5  
 klor 11.5  
 koks 4.4  
 kombinacije 33.1  
 kompleksna amplitudna enačba 42.7  
 kompleksna difuzijska enačba 42.6  
 kompleksne funkcije 28.5  
 koncentracija 23.9  
 kondenzacija 4.2  
 kondenzator 24.3  
     influenčni 25.3  
     ploščati 25.1  
 konjska moč 9.8  
 konservativno polje 32.5  
 konvekcija toplote 22.16  
     v atmosferi 22.16  
     v dimniku 22.16  
 konvektivni oblaki 22.16  
     kot generatorji toka 25.3  
 koordinate, cilindrične 29.1, 32.7  
 koordinate, kartezične 18.8, 29.1, 31.1  
 koordinate, polarne 18.8  
 koordinate, sferične 29.1, 32.8  
 koordinatni sistem 18.5, 19.6  
 korelacijski koeficient 33.10  
 koreni 6.4, 15.3  
 kositer 4.6  
 kot 7.2, 8.4  
 kotna hitrost 18.8, 34.1  
 kotna minuta 7.2  
 kotna sekunda 12.9  
 kotna stopinja 7.2  
 kotni pospešek 34.1  
 kotomer 7.2  
 kovarianca 33.10  
 kovine 4.6  
 kozmični žarki 44.15  
 krhkost 20.3  
 kristali 4.6  
     mrežna razdalja 41.3  
     mrežna zgradba 43.3  
     nihanje atomov 43.3

kristalizacija 23.9  
 kritična temperatura 22.9  
 kritični tlak 22.9  
 krivulje  
     dolžinski element 31.7  
     elementarne 31.2–5  
     krivinski radij 31.8  
     opis z enačbo 31.1  
     tangenta 31.8  
     ukrivljenost 31.8  
     vektorski opis 31.6  
 krog  
     obseg 8.4  
     razni izreki 8.4  
 kronometer 7.5  
 krožna konstanta 8.4, 17.4, 28.7  
 kulminacija 3.1  
 kulminacijska višina 7.3  
 kvadrant 7.2  
 kvadratna enačba 14.6  
 kvadratna funkcija 14.6  
 kvadratni zakon upora 20.9  
 kvantna amplitudna enačba 42.7  
 kvantna konstanta 41.1  
 kvantna stanja,  
     čista 42.7  
     mešana 42.7  
 kvantni gibalni zakon 42.6  
 kvantni oscilator 42.10  
 kvantni rotator 43.1  
  
 laminarni tok 20.6  
 lastna energija 35.12  
 lastne amplitude 42.7  
     lastne energije 42.7  
 ledišče 22.2  
 lega 1.5, 34.1  
 lepenje 19.5  
 les 1.2  
 letne dobe 3.4  
 leto 7.1  
     civilno 7.1  
 linearna enačba 14.6  
 linearna funkcija 14.6  
 linearna regresija 33.15  
 linearni zakon upora 20.7  
 liter 8.10  
 ločevanje zmesi 4.1  
 ločljivost  
     daljnogleda 27.3, 38.14  
     mikroskopa 27.3  
 logaritemska funkcija 15.5  
 logaritemsko računalo 13.7  
 logaritmi 13.4–6  
 lom elektromagnetnega valovanja  
     38.12, 38.13  
 lom svetlobe 12.3  
  
 lomni količnik 12.3, 38.10, 38.11,  
     39.12  
 lomni zakon 12.3, 21.6, 38.12  
 lupa 12.7  
  
 magnetna cirkulacija 37.7  
 magnetna deklinacija 24.5  
 magnetna energija 25.10  
     gostota 25.10, 38.5  
 magnetna konstanta 25.7  
 magnetna polarizacija 37.10  
 magnetna poljska jakost 25.4, 37.6  
     polja tokov 37.6  
     tokovodnika 37.6  
 magnetna sila 25.4  
 magnetna sonda 39.11  
 magnetna susceptibilnost 37.10  
 magnetne snovi 24.4  
 magnetni dipol 24.4, 37.9  
 magnetni model snovi 24.4  
 magnetni moment 37.9  
 magnetni navor 25.4  
 magnetni potencial 37.8  
 magnetni pretok 25.5, 37.7  
 magnetni učinek toka 24.8  
 magnetnica 24.5  
 magnetno polje 25.4  
     silnice 25.4  
 magnetoelektrični pojav 39.11  
 magnetofon 40.10  
 magnetoskop 40.10  
 magnetostatični zakon 37.6  
 masa 19.2  
     gostota 19.2  
     težka 19.3  
     vztrajna 19.3  
 masa in energija 35.12, 35.13  
 masni primanjkljaj jedra 44.8  
 masni tok 20.6  
 masno središče 34.2  
 matrike 29.8–9  
     in lastni vektorji 29.13–14  
     računanje z njimi 29.10–12  
 medatomske vezi 43.1  
     ionska 43.1  
     kovalentna 43.1  
     kovinska 43.3  
     molekulska 43.3  
 medenina 4.6  
 meglična kamera 44.3  
 mehanični ekvivalent toplote 22.6  
 meja natezne trdnosti 20.3  
 meja prožnosti 20.3  
 menzura 8.10  
 merske napake 33.12  
     absolutna 33.12  
     intervalna ocena 33.13

ocena 33.12  
 relativna 33.12  
 širjenje 33.12  
 značilna mesta 6.2  
 mešana svetloba 12.4  
 Mesec 3.5, 12.10  
 masa 19.12  
 oddaljenost 8.12, 40.13  
 težni pospešek 19.10  
 velikost 8.12  
 mesec 7.1  
 metacenter 10.8  
 metan 11.4  
 meter (palica) 8.1, 8.11  
 meter 8.1, 8.11  
 mikrofoni 26.10  
 mikroorganizmi 12.7, 12.8  
 mikroskop 12.8  
 mikrovalovi 40.12  
 milja 8.1  
 milo 4.7  
 minerali 4.6  
 minuta 7.5  
 mm Hg 10.3  
 moč 9.8  
 močna (jedrska) sila 44.1  
 modri premik svetlobe 35.8  
 molekule 11.1  
 dolžina vezi 43.1  
 medsebojna razdalja v plinih 36.1  
 nihanje 43.1, 43.2  
 povprečna hitrost 36.2  
 povprečna prosta pot 36.11  
 relativna masa 23.3  
 velikost 23.6, 36.3  
 vrtenje 43.1, 43.2  
 vrtilno-nihajni spektri 43.1  
 morska milja 8.11  
 motor z notranjim izgorevanjem  
 glej eksplozijski motor  
 mrki 3.6, 8.13  
 načelo nedoločenosti 42.5  
 naelektritev s trenjem 24.1  
 nafta 11.6  
 namagnetenje snovi 24.4  
 naočniki 12.6  
 napetostni most 24.9  
 natrij 11.8, 23.4  
 natrijev klorid (morska sol) 11.8  
 navor 9.7  
 notranji 34.4  
 teže 9.7  
 zunanji 34.4  
 navpičnica 1.5  
 nebesna os 3.5  
 nebesna telesa 3.5  
 nebesni ekvator 7.4  
 nebesni pol 3.5  
 nebesni poldnevnik 7.4  
 nebesno gibanje  
 Meseca 3.5  
 planetov 3.5  
 Sonca 3.1, 3.5  
 zvezd 3.5  
 nevtralizacija 11.5  
 nevtrino 44.10  
 nevtroni 44.1, 44.7  
 masa 44.7  
 newton 19.2  
 nihajni krog, električni 25.11  
 nihalo na spiralno vzmet 7.5  
 nihalo, balistično 34.3  
 nihalo, nitno 7.5  
 nihalo, težno 7.5  
 nihanje  
 amplituda 18.7  
 frekvenca 18.7  
 krožna frekvenca 18.7  
 lastna frekvenca 34.10  
 nihajni čas 18.7  
 perioda, glej nihajni čas  
 nihanje, dušeno 34.10  
 nihanje, harmonično 18.7, 34.10  
 nihanje, težno 7.5, 18.7, 19.4  
 nihanje, vzbujeno 34.10  
 nihanje, vzbujeno z dušenjem 34.10  
 nihanje, vzmetno 19.4  
 normalna porazdelitev 33.7  
 notranja energija 22.6, 36.9  
 nukleoni 44.1  
 nuklidi 44.9  
 obratna sorazmernost 14.4  
 obrestni račun 6.5, 6.6  
 obzorni krog 3.4  
 odboj elektromagnetnega valovanja  
 38.12, 38.13  
 odboj svetlobe 12.2  
 odboj zvoka 21.8  
 odbojni zakon 12.2, 21.5, 38.12  
 odbojnost 27.10, 38.12-13  
 odklonska sila 19.7  
 odvod funkcije 16.1  
 elementarni odvodi 16.3  
 pravila odvajanja 16.4, 16.5  
 parcialni odvodi 30.4  
 ogljik 4.4  
 ogljik-14 44.15  
 ogljikovi oksidi 11.3, 11.5  
 ohm 24.10  
 ojačevalec 40.3

oko 12.6  
 kratkovidnost in daljnovidnost 12.6  
 oksidacija 11.2, 23.11  
 opazovalni sistem 19.6, 35.4  
 orbitalna hitrost 18.9  
 orbitalni čas  
 siderski 18.10  
 sinodski 18.10  
 in središčna masa 34.13  
 orbitalni tiri 34.13  
 orbitalni zakon 18.9, 19.11, 34.13  
 orbitiranje dvozvezdja 34.13  
 orbitiranje planetov in satelitov 18.9-10  
 oscilator 40.5  
 osciloskop 40.4  
 osmoza 23.10  
 osmozni tlak 23.10  
 osnovni naboj 24.7, 36.3, 36.10, 39.7  
 osvetljenost 27.6  
 ozračje 1.3  
 naelektrenost 25.3  
 pritisk 10.3, 22.4  
 sestava 11.2  
 temperatura 22.3

paralaksa 8.6  
 planetov 27.12  
 zvezd 27.12  
 paralelogramsko pravilo 9.6  
 paramagnetna snov 37.10  
 parcialne diferencialne enačbe 36.12  
 parna turbina 26.1  
 parni stroj 22.13  
 parsek 27.12  
 pepelika 4.7  
 permeabilnost 25.7, 39.10  
 permutacije 33.1  
 piezoelektrični pojav 39.1, 40.5  
 pilotski valovi 42.1  
 piščali 21.8  
 planetarni model atomov 41.11-13  
 planetarni model vodikovega atoma 41.9-10  
 planeti 3.5, 12.10  
 periode 18.10  
 polosi 18.10, 40.13  
 lune 12.10  
 plavanje 10.8  
 plimovanje 19.12  
 plimske sile 19.12  
 plin 1.3  
 idealni 36.1  
 plinska enačba 22.4, 36.1  
 plinska konstanta 22.4, 23.8  
 plinski adiabatni zakon 22.8

plinski gorilnik 11.3  
 plinski izobarni zakon 22.4  
 plinski izohorni zakon 22.2  
 plinski izotermni zakon 20.4  
 ploščina 8.9  
 ploščina pod krivuljo 17.5  
 ploščine elementarnih likov 8.9  
 ploščinski integral 30.10  
 ploskve  
 elementarne 31.9  
 krivulje na ploskvi 31.11  
 normala 31.12  
 opis z enačbo 31.1  
 ploščinski element 31.11  
 ukrivljenost 31.12  
 vektorski opis 31.10  
 podaljšanje časa 35.6  
 podobni trikotniki 8.2  
 polarizacija pri odboju 27.5  
 polarizacija svetlobe 27.5  
 polarizacijska prizma 27.5  
 polarizacijski kot 27.5, 38.12  
 polarizacijski zakon 27.5  
 polje in krivočrtne koordinate 32.6  
 cilindrične 32.7  
 sferične 32.8  
 polna energija 35.12  
 relativistična transformacija 35.13  
 polprevodniki 43.7  
 popolni odboj svetlobe 12.3  
 porazdelitev delcev po hitrosti 36.4  
 porazdelitev delcev po legi 36.3  
 porazdelitev po faznem prostoru 36.7  
 poševni met 18.5-6  
 poševni trikotnik 8.7  
 izrek o vsoti kotov 8.7  
 kosinusni izrek 8.7  
 sinusni izrek 8.7  
 poskusi in izidi 33.2  
 potenčna funkcija 14.5  
 potenčne vrste 15.3  
 potence 6.1, 6.3, 13.3, 28.4  
 potencialna enačba 37.3, 37.8  
 potencialna enačba, homogena 37.3  
 potencialna energija 20.1, 21.14, 34.12  
 povprečje vzorčnih povprečij 33.11  
 povprečna vrednost 33.8  
 površina 8.9  
 površine elementarnih teles 8.9  
 površinska napetost 20.10  
 pozitron 44.15  
 pravokotni trikotnik  
 hipotenuzni izrek 8.3  
 kotna razmerja 8.5  
 preizkušanje domnev 33.14  
 premik 34.1

premo enakomerno drsenje 18.1  
 premog 4.4  
 pretakanje tekočine po cevi 20.7  
 pretok polja 32.3  
 prevajanje toplote 22.18, 36.11, 36.13  
 prevodniki in izolatorji 24.1  
 prevodniški elektroni 39.11  
 princip elementarnih valov 21.4  
 princip relativnosti 35.3  
 princip superpozicije 42.7  
 prisilna hitrost 36.14  
 projekcija, ekvatorska valjna  
     konformna 31.16  
 projekcija, polarna stereografska  
     31.15  
 projekcija, stožčna konformna 31.17  
 projekcije, geografske 31.14, 31.18  
 prosti pad 18.3-4  
 prosto razpenjanje plina 22.8  
 prostornina 8.10  
 prostornina vrtenine 17.5  
 prostornine elementarnih teles 8.10  
 prostorninski integral 30.11  
 prostorninski tok 20.6  
 prostorski kot 21.14  
 prostostne stopnje 36.8  
 protoni 44.1, 44.6  
     masa 44.6  
 prožnostna energija 20.1  
 prožnostni modul 20.2  
 prožnostni zakon 19.4, 20.1  
 psihrometer 22.12  
  
 radar 40.13  
 radij 41.6  
 radijski valovi 38.8  
 radio 40.6-8  
 radioaktivno datiranje 44.11, 44.15  
 radioaktivnost 41.6  
 radiosonda 40.11  
 raketna enačba 34.3  
 ravni val delcev 42.4  
 ravno elektromagnetno valovanje  
     38.3, 38.5  
 ravnotežje reakcij 23.12, 36.10  
     ravnotežna konstanta 23.12,  
     36.10  
 ravnovesje tekočine 10.2  
 ravnovesje telesa 9.1, 9.5-7  
 razcep spektralnih črt v električnem  
     polju 41.14  
 razcep spektralnih črt v magnetnem  
     polju 41.14  
 razcepljenost spektralnih črt 41.14  
 razkranjanje snovi 11.1  
 razpad alfa 44.10  
 razpad beta 44.10  
  
 razpad gama 44.10  
 razpadanje jeder 44.9  
 razpadni čas 44.11  
 razpolovna debelina 27.10  
 razpolovni čas 44.11  
 razpršenost lege in hitrosti 42.4  
 razpršilna leča 12.5  
 raztopine 4.1, 23.9  
     koncentracija 23.9  
 razvoj funkcije v harmonično vrsto  
     28.6  
     elementarni razvoji 28.7  
 razvoj funkcije v potenčno vrsto 16.6  
     elementarni razvoji 16.7  
 rdeči premik svetlobe 35.8  
 reakcijska sila curka 34.3  
 redukcija 23.11  
 reflektor 12.9, 45.1  
 refraktor 12.9  
 rektascenzija zvezd 7.8  
 relativistične transformacije gibanja  
     časa 19.6, 35.5  
     hitrosti 19.6, 35.7  
     lege 19.6, 35.5  
     pospeška 19.6  
 relativistične transformacije  
     nabojev in tokov 37.11  
     polj 37.12-13  
 relativistični gibalni zakon 35.11  
 relativnost električne in magnetne sile  
     37.11  
 relativnost gibanja 19.6  
 relativnost sočasnosti 35.6  
 rentgenska cev 41.2  
 rentgenska svetloba 41.2  
 rentgenski spekter 41.3  
 rentgenski žarki 41.2  
 resonanca 21.8, 34.10, 40.5  
 rosišče 22.11  
 rotor polja 32.4  
 rotorski izrek 32.4  
 rude 4.6  
     oksidne 4.6  
     sulfidne 4.6  
  
 scintilacijsk števec 44.2  
 segrevanje plina 22.1  
     izobarno 22.4  
     izohorno 22.2  
 segrevanje  
     z delom 22.6  
     z električnim tokom 24.9  
     s svetlobnim tokom 27.6  
 sekunda 7.5  
 sence 3.2, 7.4, 8.2  
 sestavljanje hitrosti 18.2  
 sestavljanje premikov 18.2



sestavljena leča 12.5  
 sevalna konstanta 27.8  
 sevalna vršna konstanta 27.8  
 sevalni spektralni konstanti 27.8  
 sežigna toplota 22.10  
     specifična 22.10  
 sferični trikotniki 31.13  
     hipotenuzni izrek 31.13  
     kosinusni izrek 31.13  
     sinusni izrek 31.13  
 sila 9.1  
     nasprotna 9.1  
     notranja 34.2  
     prijemališče 9.7  
     rezultanta 9.5, 9.6  
     ročica 9.7  
     zunanja 34.2  
 sila curka 34.3  
 silicij 40.12, 43.3  
 sinusoida 15.8  
 sipanje delca na potencialni oviri 42.8  
 sipanje delcev alfa na jedrih 41.7  
 skalarna polja 32.1  
 skrajšanje dolžin 35.6  
 slučajne spremenljivke 33.2  
 slušalke 26.10  
 smerni odvod 32.2  
 smodnik 11.7  
 snovi 1.2  
 soda 4.7  
 solarna konstanta 27.6  
 soliter 11.7  
 solna kislina 11.5  
 solsticij 3.4  
 sonar 40.14  
 Sonce 3.1, 12.10  
     gostota toka na Zemljo 27.6  
     izsev 27.7, 45.1  
     magnetno polje 41.14  
     masa 19.11, 45.1  
     oddaljenost 8.12, 27.2, 45.1  
     starost 44.11, 45.1  
     temperatura površja 27.9, 45.1  
     velikost 8.12, 45.1  
 sorazmernost 14.3  
 sorazmernost mase in teže 19.2  
 spajanje snovi 11.1  
 spekter zvoka 21.14  
 spektralne črte 27.4  
 spektrometer 27.4  
 spektrometer, masni 39.6  
 spektrometer, rentgenski 41.3  
 spektroskop 27.4  
 spojine 11.1  
 spremembe teles 1.8  
 spremenljivke 14.1  
 stabilnost 9.7  
 standardna deviacija 33.8  
 standardni kozmološki enačbi 45.9  
 statistično laganje 33.16  
 steklo 4.7  
 stiskalnica, hidravlična 10.5  
 stiskanje plina  
     adiabatno 22.8  
     izotermno 22.8  
 stisljivostni modul  
     adiabatni 22.8  
     izotermni 20.4  
 stoječe elektromagnetno valovanje 38.4  
 stopinja, temperaturna 22.2  
 strani neba 3.3  
 strelno orožje 11.7  
 strižna napetost 20.2  
 strižni modul 20.2  
 sunek napetosti 25.5  
 sunek navora 34.4  
 sunek sile 34.3  
 sunek toka 24.8  
 svetilnost 27.7  
 svetloba 3.2, 12.1  
 svetlobna hitrost 27.1, 35.2, 38.2  
 svetlobne preslikave 12.5  
 svetlobni eter 35.1  
 svetlobni spekter 12.4  
     absorpcijski 27.4  
     črtasti 27.4  
 svetlobni tlak 35.14, 35.15  
 svetlobni tok 27.6  
     gostota 27.6  
 svetlobni valovi 27.3  
 svetlobni žarki 3.2, 12.1  
 svetlobno leto 27.12  
 svetlost 27.7  
 svinec 4.6  
 šibka (jedrska) sila 44.10  
 širjenje svetlobe 12.1, 27.6-7  
 škripec 9.9  
 števila, decimalna 5.4  
     računanje z njimi 5.5  
 števila, kompleksna 28.1  
     računanje z njimi 28.2  
 števila, naravna 2.1-2  
     računanje z njimi 2.3-7  
 števila, relativna 13.1  
     računanje z njimi 13.2  
 števila, ulomna 5.1-2  
     računanje z njimi 5.3  
 število delcev 36.1  
     gostota 36.1  
 številski tok 36.11  
     gostota 36.11

talilna toplota 22.10  
     specifična 22.10  
 tališče 22.2  
 taljenje 4.2  
 tehtnica, torzijska 34.11, 37.1  
 tehtnica, vzmetna 9.3  
 tehtnica, vzvodna 9.2, 9.7  
 tekočina 1.3  
     idealna 20.8  
 telefon 26.10  
 telegraf 26.9  
 telesa 1.1  
     deformabilna 1.3  
     oblika in snov 1.2  
     sistem delcev 34.2  
     točkasta 34.1  
     toga 34.6  
 televizija 40.9  
 telo na klancu 9.5  
 telo na vrveh 9.6  
 temperatura 1.4  
     absolutna 22.2  
     in kinetična energija 36.2  
     relativna 22.2  
 temperaturna razteznost 22.5  
 teodolit 12.9  
 termična emisija elektronov 39.2  
 termična ionizacija atomov 36.10  
 termična konstanta 36.1, 36.3  
 termično gibanje 11.1, 36.14  
 termočlen 39.1  
 termoelektrični pojav 39.1  
 termometer, alkoholni 22.3  
 termometer, bimetalni 22.5  
 termometer, plinski 22.2  
 termometer, sevalni 27.9  
 termometer, uporovni 27.6  
 termometer, živosrebrni 22.3  
 termoskop, plinski 22.2  
 termoppor 27.6  
 tesla 25.5  
 teža 1.4, 9.1  
     in pospešek 19.1  
     specifična 9.4  
 težišče 9.7, 34.6  
 težiščnice 9.7  
 težna energija, glej gravitacijska energija  
 težni pospešek 18.4, 18.7  
 težno kroženje 18.8  
 tlak 10.1  
     hidrostatični 10.2  
     v kapljici 20.10  
     zastojni 20.9  
 tlak nasičene pare 22.11  
 tlak plina 22.1, 22.4  
     delni 22.12  
     kinetična slika 36.2  
 točka Gama 7.8  
 tokomer, ožinski 20.8  
 tokomer, zastojni 20.9  
 tokovne niti 20.8  
 tokovnice 20.6  
 tona 19.2  
 topljenje 23.9  
 toplota 22.6  
     specifična 22.7, 36.9, 43.2, 43.3  
 toplotna prevodnost 22.18, 36.11  
 toplotni tok 22.18  
     gostota 22.18  
 toplotni vetrovi 22.17  
     planetarna cirkulacija 22.17  
 toplotno raztezanje 22.1  
 toplotno sevanje 27.8, 43.10  
 torij 41.6  
 torni električni generator 24.3  
 trajanje 1.6  
 trajni magneti 24.4  
 trdnina 1.3  
 trenje, po podlagi 19.5  
 triangulacija 8.6, 8.8  
 trigonometrične funkcije 15.6–8  
 trioda 40.3  
 trk teles 34.3  
     čelni 44.5  
     delcev 44.5  
     elastični 44.5  
     neelastični 44.5  
 trkanje elektronov z atomi 41.8  
 tuljava 25.4  
     indukcijska 25.6  
 tuneliranje alfa 44.10  
 tuneliranje delca 42.8  
 turbulentni količnik 20.6  
 turbulentni tok 20.6  
 tvorba parov 44.15  
  
 ubežna hitrost 19.11  
 uho 21.10  
 uklon elektromagnetnega valovanja 38.14  
 uklon elektronov na kristalih 41.4  
 uklon rentgenske svetlobe na kristalih 41.3  
 uklon svetlobe 27.3, 38.14  
 uklon zvoka 21.8  
 uklonska mreža 27.3, 38.14  
 ultravijolična svetloba 27.8  
 ultrazvok 21.10  
 umetna radioaktivnost 44.12  
 upor, v tekočini 19.5  
 uporovni most 24.10

ura (enota) 7.4  
 ura, kvarčna 40.5  
 ura, nihalna 7.5  
 ura, sončna 7.4  
 ura, vzmetna 7.5  
 uran 41.6, 44.11  
 uranova bomba 44.13  
 usmernik 40.1  
 utekočinjanje plina 22.9  
  
 valenčni elektroni 24.7, 43.1  
 valenca 23.5, 24.7  
 valovanje na gladini 21.3  
     hitrost 21.3  
     lom 21.6  
     odboj 21.5  
     popolni odboj 21.6  
     uklon 21.7  
     valovne fronte in žarki 21.4  
 valovanje na struni  
     lastno nihanje 21.2  
     potujoče valovanje 21.2  
     stoječe valovanje 21.2  
     valovna motnja 21.1  
 valovna dolžina delcev 41.4  
 valovna dolžina svetlobe 27.3  
 valovna dolžina zvoka 21.9  
 valovna enačba 38.2  
 valovna funkcija, glej verjetnostna  
     amplituda  
 valovni delci 42.1  
 valovni paket delcev 42.4  
 valovni vektor 21.2  
 variacije 33.1  
 varianca 33.8  
 varianca vzorčnih povprečij 33.11  
 večdimenzijske verjetnostne  
     porazdelitve 33.9  
 večkratni integral 30.12  
 vektorji 18.2, 29.1-2  
     računanje z njimi 29.3-7  
 vektorska polja 32.1  
 vektorske funkcije 30.1-2  
 verižna reakcija 44.13  
 verižni razpad 44.11  
 verjetnost izida 33.3  
 verjetnost lege 42.3  
 verjetnost sestavljenega izida 33.4  
 verjetnostna amplituda 42.3  
 verjetnostna gostota 42.3  
 verjetnostna porazdelitev 33.3  
 verjetnostni model atomov 42.13  
 verjetnostni model vodikovega atoma  
     42.11-12  
 verjetnostni tok 42.6  
 Vesolje  
     masna gostota 45.10  
     število galaksij 45.7  
     prasevanje 45.11  
     velikost 45.8  
 Vesolje, razvoj  
     prihodnost 45.10, 45.11  
     starost 45.8  
     Veliki pok (rojstvo) 45.8  
     zgodovina 45.11  
 vesoljski širitveni parameter 45.8  
 vesoljski širitveni zakon 45.8  
 vetrna turbina 26.1  
 vezavna energija jedra 44.8  
 vezavna energija nukleona v jedru  
     44.8  
 vidna svetloba 27.3  
 vijak 9.9  
 virusi 41.5  
 viskozimeter 20.7  
 viskoznost 20.5, 36.11  
 vitel 9.9  
 vlaga v zraku  
     absolutna 22.12  
     relativna 22.12  
     specifična 22.12  
 voda 1.3  
     destilirana 11.6  
 vodik 11.3, 11.5, 24.7  
 vodikov oksid (voda) 11.3  
 vodikova bomba 44.14  
 vodikova spektralna konstanta 41.9  
 vodna črpalka 10.4  
 vodna para  
     nasičena 22.11  
 vodna turbina 26.1  
 vodno kolo 9.10  
 volt 24.9  
 voltmeter, elektronski 40.3  
 voltmeter, tuljavni 24.11  
     vezava 24.11  
 vosek 11.2  
 voz 18.1  
 vrelišče 22.2  
 vrteči se sistem 19.7  
 vrtilna količina 34.4  
 vrzeli 43.7  
 vzgon 10.8  
 vzgonski zakon 10.8  
 vzorčenje 33.11  
 vztrajnostni moment 34.7  
 vzvod 9.7  
  
 watt 19.2  
  
 zakon o delnih tlakih 22.12  
 zakon o električnem pretoku 37.2,  
     38.1  
 zakon o električnem uporu 24.10,  
     39.11

zakon o električni cirkulaciji 37.2, 38.1  
 zakon o izotropiji svetlosti 27.7  
 zakon o kilomolu plina 23.3  
 zakon o laminarnem toku 20.7  
 zakon o magnetnem pretoku 38.1  
 zakon o magnetni cirkulaciji 38.1  
 zakon o radioaktivnem razpadu 44.11  
 zakon o ravnovesju navorov 9.7  
 zakon o ravnovesju sil 9.1  
 zakon o rentgenskih črtah atomov 41.11  
 zakon o sevalnem maksimumu 27.8, 43.10  
 zakon o sevalnem spektru 27.8, 43.10  
 zakon o sevalni gostoti 27.8, 43.10  
 zakon o stalnih masnih razmejnih 23.2  
 zakon o volumskih razmerjih 23.2  
 zakon o vzajemnem učinku 9.1  
 zakon vzvoda 9.7  
 zakoni elektromagnetnega polja 38.1  
 zakoni o ohranitvi  
   elementov 11.1  
   energije 9.8, 19.8  
   gibalne količine 34.3  
   gibalne količine in energije 35.13  
   naboja 38.1  
   teže / mase 11.2  
   vrtilne količine 34.4  
 zakoni padanja 18.4  
 zakoni toplotnega sevanja 27.8, 43.10  
 zastojni tlak 20.9  
 zbiralna leča 4.7, 12.3, 12.5  
 zemeljski ekvator 7.9  
 zemeljski poldnevnik 7.9  
 zemeljski vzporedniki 7.9  
 Zemlja  
   električno polje 25.3  
   magnetno polje 25.6  
   masa 34.11  
   obkrožilna hitrost 18.9  
   oblika 3.6  
   težni pospešek 18.4, 18.7  
   velikost 8.11  
   vrtavka 34.8  
 zemljepisna dolžina 7.9  
 zemljepisna lega 7.9  
 zemljepisna širina 7.9  
 zenit 7.4  
 zenitna razdalja 7.4  
 zlitine 4.6  
 zlivanje lahkih jeder 44.14  
 zmesi 4.1  
 zmrzovanje 4.2  
 zračna črpalka 10.6  
 zračni tlak 10.3, 22.4  
 zrak 1.3  
 zrcalo, krogelno 12.2  
 zrcalo, parabolično 31.5  
 zrcalo, ravno 12.2  
 zvezde 3.5, 12.10  
   hitrost 35.9  
   izsev 27.13  
   magnituda 27.13  
   masa 34.13, 45.3  
   oddaljenost 45.1, 45.3  
   temperatura površja 27.9  
   velikost 27.13  
 zvezde, razvoj  
   jedrski vir energije 45.5  
   kritične mase 45.4  
   rojstvo 45.4  
   staranje in smrt 45.6  
   zrela doba 45.5  
 zvezde, razvrstitev  
   bele pritlikavke 45.3  
   črne luknje 45.6  
   dvojne zvezde 34.13  
   glavne zvezde 45.3  
   kefeide 45.7  
   modre orjakinje 45.3  
   nevtronske zvezde 45.6  
   rdeče orjakinje 45.3  
   rdeče pritlikavke 45.3  
   supernove 45.6  
   spektralni razredi 45.2  
   zvezdni diagram 45.3  
 zvezdna aberacija 27.2  
 zvezdna plazma 43.8  
   degenerirana 43.8  
   relativistična 43.8  
 zvočna resonanca 21.8  
 zvočni tok 21.14  
   gostota 21.14  
   jakost 21.14  
 zvočni valovi 21.8  
 zvočnik 26.10  
  
 žarki alfa 41.6  
 žarki beta 41.6  
 žarki gama 41.6  
 železo 4.6  
 železov oksid (rja) 11.3  
 živo srebro 4.6  
 žveplena kislina 11.3  
 žveplo 4.4  
 žveplova kislina 11.3  
 žveplovi oksidi 11.3



ISBN 978-961-290-117-2 (pdf)