PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 6
Strani 348–351

Nada Razpet:

KOLIKO PIJAČE LAHKO NATOČIMO V KOZAREC?

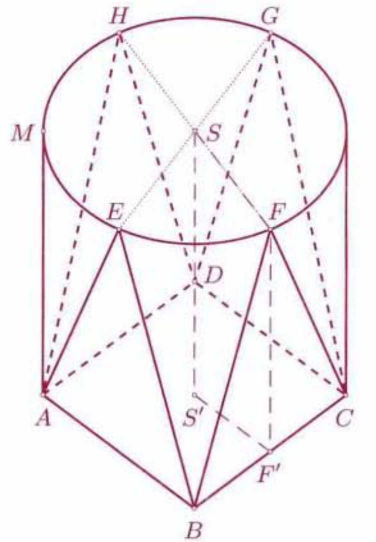
Ključne besede: matematika, geometrija, prostornine.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1423-Razpet.pdf

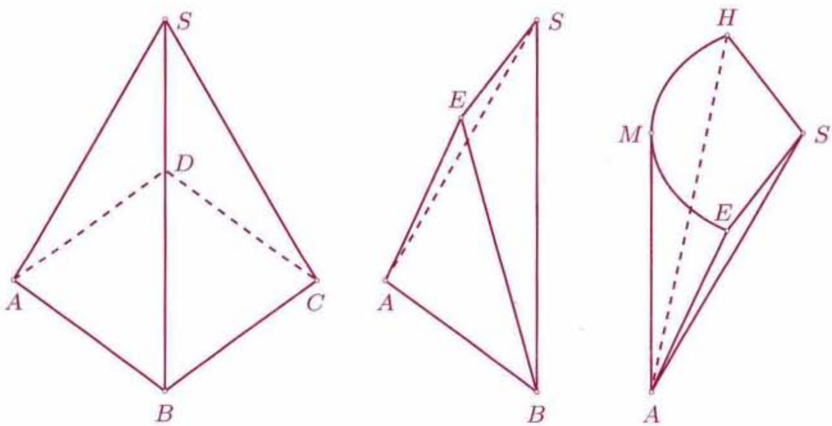
KOLIKO PIJAČE LAHKO NATOČIMO V KOZAREC?

Na enem izmed poletov z letalom nam je stevardesa prinesla kozarce nenavadne oblike. Dno je bilo kvadratno, zgornji rob pa krožnica, ki bi jo lahko očrtali kvadratu. Del plašča so sestavljali trikotniki (slika 1). Kozarec smo lahko postavili v za to pripravljeno stojalo tako, da se je vanj pogreznil do polovice. Ker zaradi slabe vidljivosti opazovanje okolice ni bilo zanimivo, smo se začeli pogovarjati, kako bi izračunali, koliko tekočine bi lahko nalili do roba takega kozarca. Kaj takega si v letalu seveda ne bi mogli privoščiti, saj letalo navadno začne premetavati, brž ko stevardese postrežejo s pijačo.

Vzemimo, da je polmer krožnice r, in zato osnovnica kvadrata $a = r\sqrt{2}$, višina kozarca v ter da je notranjost zapolnjena.



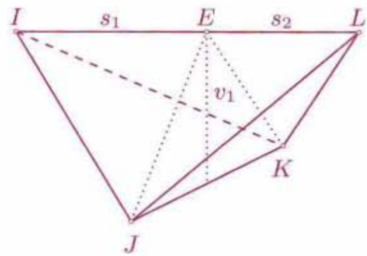
Slika 1.



Slika 2. Trije osnovni deli razrezanega kozarca.

Kozarec razrežemo na več delov, in sicer na pravilno štiristrano piramido, ki ima za osnovno ploskev dno kozarca, štiri piramide, katerih dva mimobežna robova sta pravokotna, in štiri četrtinske stožce, ki imajo za osnovno ploskev četrtino kroga (slika 2).

Preden začnemo računati prostornino posameznih delov, poglejmo, kako izračunamo prostornino piramide $IJKL$ (slika 3), katere mimobežna robova IL in JK sta pravokotna. Piramido presekamo z ravnino, ki vsebuje rob JK in je pravokotna na rob IL tako, da osnovna piramida razpade v dve piramidi, ki imata za osnovni ploskvi trikotnik JKE in višini $IE = s_1$ in $EL = s_2$. Vsota obeh višin je ravno dolžina roba IL.



Slika 3. Piramida, katere mimobežna robova IL in JK sta pravokotna.

Piramida $IJKL$ je torej sestavljena iz dveh piramid in njena prostornina je

$$V = V_1 + V_2 = \frac{|JK| \cdot v_1 \cdot s_1}{2 \cdot 3} + \frac{|JK| \cdot v_1 \cdot s_2}{2 \cdot 3} = \frac{|JK| \cdot |IL| \cdot v_1}{6} .$$

Prostornina piramide, katere mimobežna robova sta pravokotna, je torej enaka šestini produkta dolžin obeh mimobežnih pravokotnih robov in njune medsebojne razdalje.

Vrnimo se k našemu kozarcu in zapišimo prostornine posameznih delov.

Prostornina pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom a je

$$V_1 = \frac{a^2 v}{3} = \frac{2r^2 v}{3} .$$

Piramida $ABES$ ima pravokotna mimobežna robova $AB = a$ in $ES = r$, zato je

$$V_2 = \frac{rav}{6} = \frac{r^2 v\sqrt{2}}{6} .$$

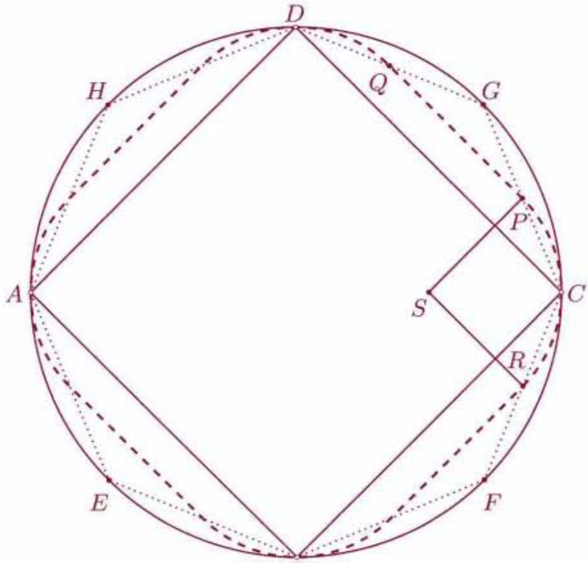
Prostornina dela, ki ima za osnovno ploskev četrtino kroga, je

$$V_3 = \frac{\pi r^2 v}{4 \cdot 3} .$$

Skupna prostornina je

$$V = V_1 + 4V_2 + 4V_3 = \frac{2r^2v}{3} + \frac{2r^2v\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{r^2v}{3}\left(2 + 2\sqrt{2} + \pi\right) .$$

Poglejmo, kakšne oblike je odprtina podstavka, v katerega postavimo tak kozarec. Narišimo tloris kozarca (slika 4).



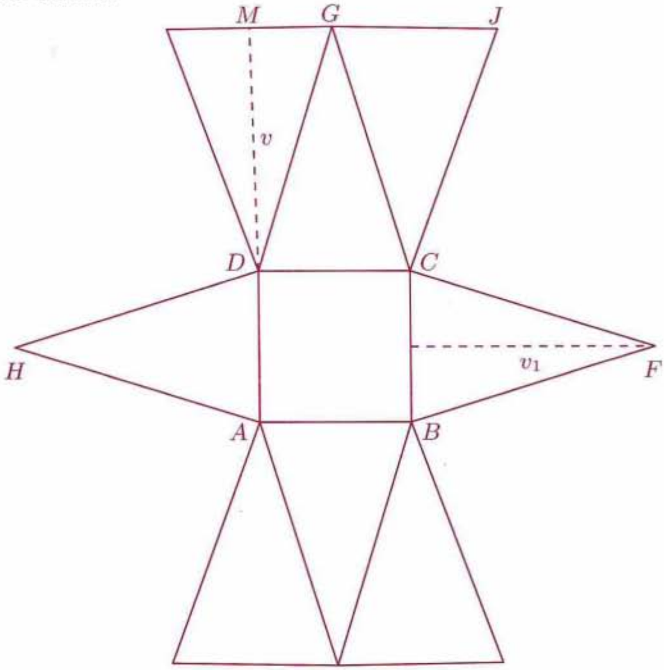
Slika 4. Tloris kozarca.

Enakokraki trikotniki, ki imajo za osnovnico stranice kvadrata, vrh pa na robu krožnice, so deli ravnine (na sliki so projekcije krakov označene pikčasto), zato so vodoravni prerezi kozarca sestavljeni iz daljic (na primer QP) in delov krožnice (PR). Z naraščajočo višino kozarca se daljice krajšajo, polmeri krožnic na vogalih pa večajo. Na polovici višine kozarca je ravni del enak $a/2$, polmer vogalnega dela krožnice pa $r/2$. Bralec naj sam izračuna, kako se z višino spreminjata dolžina ravnega dela in polmer vogalne krožnice.

Za konec izdelajmo model takega kozarca. Mrežo prikazuje slika 5 (narisana je v pravilnem razmerju, zato jo lahko samo povečate). Pri tem velja

$$|GJ| = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}, \qquad |MD| = v, \qquad |AB| = r\sqrt{2},$$
$$v_1 = \sqrt{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{r^2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) + v^2}.$$

Trikotnik GCJ je enakokrak, njegova osnovnica je GJ. Stransko višino v_1 izračunamo iz pravokotnega trapeza $S'F'FS$, označenega na sliki kozarca na začetku članka.



Slika 5. Mreža kozarca.

V trgovinah je na policah veliko kozarcev nenavadnih oblik. Premislite, če znate izračunati prostornine takih kozarcev. Seveda pa je najlaže določiti prostornino kozarca s prelivanjem tekočine v merilno posodo.

Nada Razpet