Dr. Fr. Ritter von Močnik

Der Rechen-Unterricht

in der Volksschule

fl. 1.20

Der

Rechen-Unterricht

in der

Volksschule.

Eine methodische Anleitung für Volksschullehrer.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Fünfte Auflage.

Preis geheftet fl. 1·—, gebunden fl. 1·20.

Leipzig. G. Freytag. Wien. F. Tempsky, Prag. F. Tempsky.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

1891.

Druck von Rudolf M. Rohrer in Brünn.

Erste Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume bis zwanzig.

Einleitung.

§. 1. Zweck des Rechenunterrichtes.

Der Unterricht im Rechnen hat einen formalen und einen materiellen Zweck: er soll die geistige Kraft des Schülers naturgemäß entwickeln, üben und schärfen, und diesen zur Selbständigkeit bilden; er soll anderseits den Schüler mit der Fertigkeit ausrüsten, die im bürgerlichen Leben vorkommenden Rechnungsaufgaben mit Einsicht, Sicherheit und Gewandtheit zu lösen.

Daraus geht von selbst die wichtige Stellung hervor, welche diesem Unterrichte unter den Lehrgegenständen der Volksschule eingeräumt werden muss. Ist es überhaupt die Aufgabe der Schule, die Kinder zu selbständigen Menschen heranzubilden, die in ihren künftigen Lebenslagen stets mit berechnender Überlegung und mit verständiger Erwägung aller Umstände handeln sollen, so läßt sich nicht leugnen, dass ein zweckmäßig geleiteter Rechenunterricht, indem er unausgesetzt die Urtheilskraft des Schülers in Anspruch nimmt, denselben an ein geordnetes Überlegen und Erwägen angewöhnt, als Mittel zur Lösung dieser Aufgabe die vorzüglichste Beachtung verdient. Nicht minder wichtig erscheint der Rechenunterricht im Hinblicke auf seinen materiellen Zweck. Während viele Menschen der niederen Stände seltener Veranlassung zum Lesen und Schreiben erhalten, vergeht fast kein Tag, wo sich für sie nicht die Nothwendigkeit zu rechnen ergeben würde. Auch bietet der Rechenunterricht die beste Gelegenheit dar, das Kind auf die verschiedenartigen Verhältnisse und Bedürfnisse des Lebens, auf die Beziehungen und Berührungen des Menschen mit der Außenwelt aufmerksam zu machen, indem man ihm in fortschreitenden, sich stets erweiternden Kreisen die sinnliche Welt der Größen allmählich vorführt, dieselben in ihren Hauptanwendungen betrachten und seiner berechnenden Untersuchung unterziehen läßt. Ein solcher Sachunterricht fördert eine richtige Wertschätzung der verschiedenen Dinge der Außenwelt und ihrer Beziehungen zu einander und wirkt dadurch auch sittlich bildend.

Diese wichtigen Zwecke kann jedoch der Rechenunterricht nur erfüllen, wenn er von einer klaren Einsicht in das innere Wesen des Lehrgegenstandes und in den Entwicklungsgang des menschlichen Geistes getragen wird. Da das Rechnen keine Erfahrungskenntnis, sondern unmittelbar in den Gesetzen unseres Denkens begründet ist, und somit die Anlage dazu sich im jugendlichen Geiste schon vorfindet, so kann es dem Unterrichte nur obliegen, diese Anlage zweckmäßig zu pflegen und auszubilden, damit sie allmählich zur Selbständigkeit erstarke. Man würde gegen die Natur dieses Lehrgegenstandes und gegen den Gang der geistigen Entwicklung verstoßen, wenn man den Schülern die Rechnungsweisen als etwas Gegebenes, als ein bloßes Ergebnis fremden Nachdenkens mittheilen wollte; die Schüler müssen vielmehr, durch entsprechende Fragen geleitet, aus der Beschaffenheit der jedesmaligen Aufgabe und aus dem Wesen der Zahlenverhältnisse durch eigene Beurtheilung folgern, wie die Auflösung durchzuführen ist; sie müssen das jedesmalige Rechnungsverfahren unter der anregenden Führung des Lehrers gleichsam selbst auffinden. Bei dieser heuristischen Methode lernt der Schüler jeden Schritt kennen, den er thun muss, um die Aufgabe zu lösen: er wird sich jederzeit auch der Gründe seines Verfahrens bewusst. Je mehr aber die selbstthätige Mitwirkung des Schülers in Anspruch genommen wird, eine um so größere Befriedigung gewährt ihm das Bewusstsein der eigenen Kraft; durch jede neue Erkenntnis, welche er als sein selbsterworbenes Besitzthum betrachtet, wird auch sein Interesse für den Gegenstand gesteigert. Ein in dieser Weise geleiteter Unterricht begründet nicht nur Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen, sondern allseitig einen schärferen Blick, Regsamkeit und Frische des Geistes; er bildet zur Selbständigkeit.

§. 2. Reines und angewandtes Rechnen.

Beim Rechnen sind entweder die Operationen, welche zur gesuchten Zahl führen, gegeben, und es handelt sich bloß um die Anwendung derselben; oder es sind die vorzunehmenden Operationen nicht angegeben, sondern sie müssen aus den Verhältnissen der Aufgabe durch verständige Beurtheilung erst abgeleitet werden. Im ersten Falle heißt das Rechnen r e i n e s R e c h n e n, im zweiten a n g e w a n d t e s R e c h n e n. Jenes stützt sich allein auf die richtige Erkenntnis der Zahlen und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, während es von außen her keine sachlichen Kenntnisse verlangt; dieses setzt zugleich die Kenntnis der Sachverhältnisse voraus, welche der Aufgabe zugrunde liegen.

Aus dieser Erklärung folgt, dass nicht jedes Rechnen mit benannten Zahlen schon an sich ein angewandtes Rechnen ist. Wenn man z. B. das Kind, damit es die Rechnungsform $4 + 2 = 6$ abstrahiere, an Kreuzern rechnen lässt: 4 Kreuzer und 2 Kreuzer sind 6 Kreuzer; so ist dies kein angewandtes, sondern ein reines Rechnen.

I. Da sich sowohl das reine als das angewandte Rechnen auf eine klare Einsicht in das Wesen der Zahlen, in die Gesetze ihrer gegenseitigen Verbindung und Abhängigkeit gründet, so ist die erste Aufgabe des Rechenunterrichtes die Kinder zu klaren Zahlenvorstellungen zu führen. Dieses kann nur auf dem

Wege der sinnlichen Anschauung geschehen. Anschaulichkeit ist das Grunderfordernis jedes Elementarunterrichtes; es muss daher auch der erste Unterricht im Rechnen vor allem ein anschaulicher sein, ausgehend von der körperlichen Außenwelt und einkehrend in die innere Werkstätte des Geistes.

Für die Herbeischaffung der ersten Zahlenvorstellungen und für das Verständnis der ersten Zahlenoperationen gibt es gar viele Veranschaulichungsmittel. Je zahlreicher und mannigfaltiger sie in Anwendung gebracht werden, desto klarer werden die Anschauungen.

Zur Veranschaulichung der Zahlen dienen zunächst Punkte oder Striche, die man auf der Schultafel vor den Augen der Schüler entstehen läßt.

Noch mehr, als bloße Figuren, eignen sich zu den Anschauungen bewegliche Körper, weil diese dem kindlichen Geiste die Vorstellungen durch mehrere Sinne zuführen und demnach eine größere Klarheit der Erkenntnis erzeugen. Das einfachste und natürlichste Anschauungsmittel dieser Art sind die Finger, in denen uns schon die Natur das dekadische Zahlensystem recht eigentlich an die Hand gegeben hat. Hierher gehören ferner Stäbchen, hölzerne Würfel oder Kugeln. Unter den Rechenapparaten mit beweglichen Kugeln empfiehlt sich durch Zweckmäßigkeit und Einfachheit besonders die sogenannte russische Rechenmaschine; sie besteht aus einem auf Füßen ruhenden hölzernen Rahmen mit zehn horizontalen eisernen Stäben (Drähten), auf deren jedem zehn verschiebbare Kugeln angebracht sind. Ein vorzügliches Veranschaulichungsmittel ist auch der Tillich'sche Rechenkasten. Derselbe enthält mehrere Würfel und mehrere viereckige Stäbchen (Säulen) von neun verschiedenen Größen; die Zahl eins wird durch einen Würfel von etwa vier Centimeter Kantenlänge veranschaulicht, die Zahl zwei durch eine viereckige Säule, welche zwei Würfel übereinander darstellt, die durch einen ringsum eingeritzten Theilungsstrich von einander getrennt erscheinen; die Zahlen drei, vier, . . . zehn werden ebenso durch Stäbchen, die drei, vier, . . . zehn Würfel übereinander enthalten, dargestellt, so dass jede Zahl in ihrer Zusammensetzung aus eins und zugleich als ein Ganzes veranschaulicht ist.

Zur Befestigung gewisser Vorstellungen, die nur durch wiederholte Anschauung und vielfältige Übung sicheres Eigenthum der Schüler werden können, werden mit Vortheil entsprechend eingerichtete Wandtafeln benützt. Zu diesen gehört vor allem eine Tabelle, welche die Zahlbilder (§§. 7 und 11) der Grundzahlen enthält und die Operationen mit diesen zur Anschauung bringt.

Die Anschauung beim Rechenunterrichte kann und darf jedoch nur so lange eine äußere bleiben, als der Schüler sich in einem kleinen Zahlenraume bewegt. Sowie sich sein Zahlengebiet allmählich erweitert, wie seine geistige Kraft so weit erstarkt, dass er im Stande ist, sich auch ohne sinnliche Wahrnehmung richtige Zahlenvorstellungen zu bilden, muss auch seine Anschauung mehr und mehr eine innere werden. Ohne Thätigkeit der inneren Anschauung ist ein verständiges Rechnen gar nicht denkbar.

II. Die richtige Auffassung der Zahlen als solcher und die Ausführung der Operationen mit denselben bildet nur die eine Seite des Rechnens; zur allseitigen Beherrschung der Zahl ist erforderlich, dass sie auch im Gewande ihrer Anwendung angeschaut werde. An das reine Rechnen muss sich daher auch das angewandte Rechnen anschließen.

Die Lösung jeder Aufgabe des angewandten Rechnens verlangt: 1. die Kenntnis der sachlichen Verhältnisse, die der Aufgabe zugrunde liegen; 2. die Befähigung, aus den in der Aufgabe gegebenen Verhältnissen durch Schlüsse die Operationen abzuleiten, welche mit den gegebenen Zahlen vorgenommen werden müssen, damit man zu der gesuchten Zahl gelange; 3. Fertigkeit im reinen Rechnen, um mit den Zahlen die nach den Schlüssen als nothwendig erkannten Operationen ausführen zu können.

Im Anfange wird der Stoff zu den Aufgaben unmittelbar aus den Lebensverhältnissen und dem Erfahrungskreise der Kinder selbst hergenommen. Später treten in den angewandten Aufgaben auch Sachverhältnisse auf, die sich auf die verschiedenartigen Bedürfnisse des Lebens und die Berührungen des Menschen mit der Außenwelt beziehen, und deren Verständnis den Schülern durch entsprechende Erklärungen erst vermittelt werden muss. Dabei herrsche naturgemäßes Fortschreiten, anregende Abwechslung und Mannigfaltigkeit; die vielseitige Anwendung des Erlernten erhöhet das Verständnis derselben, sichert das Festhalten und befördert die praktische Geschicklichkeit.

Die Schlüsse, durch welche man aus den Sachverhältnissen der Aufgabe die vorzunehmenden Operationen auffindet, sind mehr oder minder einfach, je nachdem die Aufgabe auf eine einzige oder auf mehrere Operationen führt. In jedem Falle muss anfänglich der Lehrer bei der Bildung richtiger Schlüsse dem Schüler durch leitende Fragen zu Hilfe kommen. Da es bei jeder Rechenaufgabe (ja bei jeder Aufgabe, die uns im Leben gegeben wird) auf die Erkenntnis dessen was die Aufgabe fordert, auf die Erwägung der zu Gebote stehenden Mittel und auf den richtigen Gebrauch dieser Mittel ankommt, so wird der Schüler im allgemeinen durch folgende Fragen auf die Lösung der Aufgabe zu führen sein: Was sollst du suchen? Was musst du wissen, um das finden zu können? Ist dir das in der Aufgabe gegeben? Wie wirst du aus diesen Angaben das Gesuchte finden?

Solcher Fragen müssen jedoch bei den folgenden Aufgaben ähnlicher Art immer weniger werden, bis endlich die Schüler selbständig unter kurzer und bündiger Angabe der Schlüsse den ganzen Weg beschreiben, auf dem die gesuchte Zahl gefunden wird.

§. 3. Kopf- und Zifferrechnen.

Es gibt nur ein wahres Rechnen, das Rechnen mit dem Verstande, das Denkrechnen. Der denkende Rechner wird bei seinen Auflösungen stets zuerst die in der jedesmaligen Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlenverhältnisse verständig beurtheilen, und sodann auf Grund dieser Beurtheilung die gegebenen Zahlen so miteinander verbinden, dass er dadurch die in Frage gestellte Zahl erhält. Dabei braucht er entweder keine Ziffern, oder er bedient sich, um bei größeren Zahlen und verwickelteren Verhältnissen seinem Gedächtnisse zu Hilfe zu kommen, oder um seine vollzogenen Rechnungen auch andern vorlegen und verständlich machen zu können, der schriftlichen Darstellung der Zahlen mit Ziffern. In dieser Hinsicht unterscheidet man eine zweifache Art des Rechnens: das Kopfrechnen und das Zifferrechnen. Beim Kopfrechnen benützt man keine Ziffern und darf sich dieselben auch nicht einmal vorstellen; beim Zifferrechnen bedient man sich der Ziffern als Zahlzeichen. Beim Kopfrechnen ist die Auflösung der Aufgaben eine völlig freie, indem hiebei aus der unmittelbaren Beurtheilung der gegebenen Bedingungen und aus den Eigenschaften der Zahlen durch naturgemäße Schlüsse gefolgert wird, welchen Wert die gesuchte Zahl haben muss; beim Zifferrechnen wendet man meistens bestimmte Regeln an, die von der Art und Weise abhängen, nach welcher wir vermöge unseres Zahlensystems die Zahlen mit Ziffern darstellen.

Beide Arten des Rechnens haben ihren eigenthümlichen nicht zu unterschätzenden Wert. Während uns erst die Benützung der Ziffer die volle Herrschaft über die Zahlen und ihre gegenseitigen Verbindungen erschließt, so dass wir mit Ziffern jede Aufgabe ohne Schwierigkeit lösen können, findet anderseits das Kopfrechnen im täglichen Leben eine weit größere Anwendung als das Zifferrechnen. Nicht immer, wenn wir rechnen sollen, haben wir Bleistift und Papier, Griffel und Schiefertafel zur Hand, da gilt es im Kopfe zu rechnen. Überdies sind gerade einfachere Aufgaben, welche durch das Kopfrechnen eben so leicht als sicher gelöst werden können, auch diejenigen, die im gewöhnlichen Leben am häufigsten vorkommen. Das Kopfrechnen fördert vorzüglich die richtige Vorstellung der Zahlenverhältnisse und übt das Zahlengedächtnis; es ist zugleich die beste Vorbereitung für das Verständnis des Zifferrechnens.

Dem Zifferrechnen sind darum stets angemessene Übungen im Kopfrechnen voranzuschicken; dem Kopfrechnen hat ebenso auf jeder Stufe schriftliches Rechnen zu folgen. Selbstverständlich kann auf den ersten Stufen das Zifferrechnen nur in solchen schriftlichen Übungen bestehen, die sich unmittelbar an das mündliche Rechnen anschließen, und deren Form genau dem Gedankengange entspricht, den das Verfahren beim Kopfrechnen nimmt. Das eigentliche, wenn man es so nennen will, künstliche Zifferrechnen kann erst auftreten, nachdem durch vielseitige Übungen im Kopfrechnen mit kleineren Zahlen die Denkkraft der Schüler so weit erstarkt ist, dass sie das auf bestimmten Vorschriften beruhende schriftliche Rechnungsverfahren mit Einsicht erfassen können.

§. 4. Einrichtung des ersten Rechenbuches für Volksschulen.

Das erste Rechenbuch ist für das erste Schuljahr bestimmt.

Da das Kind wegen der Ungeübtheit seines Anschauungsvermögens noch nicht im Stande ist, größere Zahlen aufzufassen, so erscheint es nöthig, ihm anfänglich nur einen beschränkten, leicht zu überschauenden Zahlenkreis vorzuführen und es darin vielseitig zu üben.

Dass der Zahlenkreis von 1 bis 100 bei einer allseitigen Betrachtung der einzelnen Zahlen auch unter günstigen Verhältnissen in einem Schuljahre nicht bewältigt werden könne, wird von praktischen Schulmännern allgemein anerkannt. Nur darin gehen die Ansichten auseinander, dass einige dem ersten Schuljahre bloß den Zahlenraum von 1 bis 10, andere auch noch die Zahlen bis 20 zuweisen. Der zweiten Ansicht dürfte unbedingt eine größere Berechtigung zuzuerkennen sein. Von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus empfiehlt sich allerdings der Aufbau des Zahlengebäudes durch den Fortschritt nach den aufeinander folgenden dekadischen Zahlenräumen, so dass sich an den Zahlenkreis 1—10 sogleich der Zahlenkreis 1—100, dann 1—1000 u. s. w. anschließe. Pädagogische Gründe lassen es jedoch nicht nur räthlich erscheinen, sondern stellen es gleichsam zu einer unabweisbaren Forderung, dass nach dem Zahlenraume 1—10 dem Zahlenraume bis 20 eine specielle eingehende Betrachtung gewidmet werde. Für die Zahl 20 als zweiten Ruhepunkt spricht schon die unmittelbare Anschaulichkeit der Zahlen von 10—20, welche es ermöglicht, dass dieselben in ganz gleicher Weise wie die Zahlen bis 10 behandelt werden; ferner der Umstand, dass in den Zahlen 10—20 zuerst die Unterscheidung zwischen Zehnern und Einern auftritt, wodurch eine willkommene Vorstufe für die Einführung in das dekadische Zahlensystem geboten wird; endlich und ganz vorzüglich aber die Rücksicht auf die bei den Schülern zu erzielende Rechenfertigkeit. Wenn sich auch alle Zahlenbildung auf die Zahlen von 1—10 zurückführen lässt, so erhält doch das Rechnen selbst in jenem Zahlenraume nur die ersten in jeder Beziehung unvollständigen Ansätze. Um Rechenfertigkeit zu erzielen, ist es unbedingt nöthig, dass gewisse Rechnungsergebnisse so oft und so lange reproduciert werden, bis die Reproduction ohne weiteres Nachdenken unmittelbar, schnell und sicher vor sich geht, bis die Schüler dieselben gedächtnismäßig aufgefasst haben. Zu diesen Rechnungsergebnissen gehören zunächst das sogenannte Einsundeins und das Einmaleins; diese müssen wiederholt reproduciert und bis zur größten Geläufigkeit durchgeübt werden, so dass die Schüler später ihre ganze Kraft den fachlichen Verhältnissen zuwenden können, ohne durch die Operation mit der Zahl abgezogen und gehemmt zu werden. Nun gelangt das Einsundeins in dem Zahlenraume 1—20, das Einmaleins in dem Zahlenraume 1—100 zum vollkommenen Abschlusse. Hierdurch ist sonach, da in den ersten zwei Schuljahren die Grundlage für das sichere und fertige Rechnen in den höheren Zahlenkreisen zu schaffen ist, auch die Abgrenzung des Übungsstoffes für diese Schuljahre von selbst gegeben. Dem ersten Schuljahre fällt der Zahlenraum von 1—20, und darin insbesondere die Einübung des Einsundeins, dem zweiten der Zahlenkreis von 1—100, und darin die Durchübung des Einmaleins naturgemäß zu.

Das erste Rechenbuch zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Zahlen von 1 bis 10 behandelt, der zweite den Zahlenkreis bis 20 erweitert. Der durchzuführende Übungsstoff umfaßt: 1. Übungen im reinen Rechnen, und zwar mündlich und schriftlich; 2. Übungen im angewandten Rechnen. Diese Übungen müssen in planmäßig lückenlos fortschreitender Ordnung aufeinander folgen, so daß jede spätere in den vorhergehenden genügende Vorbereitung und Unterstützung findet, zugleich aber eine gesteigerte Gewandtheit in der Ausführung verlangt.

Das erste Rechenbuch enthält bloß die Aufgaben für die schriftlichen Übungen der Schüler; es hat den Zweck, dem Schüler den Stoff für die stille Selbstbeschäftigung in der Schule und für die häusliche Wiederholung unmittelbar an die Hand zu geben und so den Lehrer des zeitraubenden Aufschreibens der Aufgaben auf die Schultafel zu überheben. Da die schriftlichen Übungen immer erst dann eintreten sollen, wenn schon durch den mündlichen Unterricht völlige Einsicht und ein gewisser Grad von Fertigkeit erreicht ist, so werden sie als eine bloße Wiederholung des mündlich Eingeübten erscheinen und dem Schüler, sobald er die Ziffern lesen und schreiben kann, keine Schwierigkeit darbieten; überdies sind, um die Ausarbeitung noch mehr zu erleichtern, den Übungsaufgaben in ihren Hauptformen überall auch entsprechende Versinnlichungen beigefügt.

Die Anweisung zum Gebrauche des ersten Rechenbuches enthält die vorliegende Anleitung; sie bringt methodische Andeutungen über das mündliche Lehrverfahren, Winke über die Behandlung der schriftlichen Aufgaben, und in harmonischer Gliederung mit dem reinen Rechnen zahlreiche angewandte Aufgaben, die in dem Übungsbuche für Schüler, da es diesem noch an der nöthigen Lesefertigkeit gebricht, zwecklos wären.

Wenn das unterrichtliche Verfahren hin und wieder mit größerer Ausführlichkeit dargelegt wurde, so geschah es, um insbesondere dem angehenden Lehrer einen sicheren Leitfaden und eine das eigene Nachdenken anregende Unterstützung zu gewähren; es ist eine bekannte Thatsache der Erfahrung, daß man anfangs meist so unterrichtet, wie man lernte. Dem geübten und denkenden Lehrer bleibt immerhin noch genug Spielraum gelassen, selbständig vorzugehen.

Erster Abschnitt.

Zahlenraum von eins bis zehn.

§. 5. Allgemeine Bemerkungen.

Der Ausgangspunkt alles Rechnens ist die Bildung der Zahlen; sie wird beim Kinde durch die Anschauung, durch das Zählen der vorgeführten Gegenstände vermittelt.

Sind die aufeinander folgenden Zahlen eines bestimmten Zahlenkreises gebildet und aufgefasst worden, so gibt es für die weitere Behandlung derselben beim ersten Unterrichte vorzugsweise zwei Wege, die bezüglich der Anordnung der Rechenübungen eingeschlagen werden können. Man kann entweder an den Zahlen innerhalb des ganzen Zahlenraumes zuerst das Zuzählen, dann folgeweise das Wegzählen, Vervielfachen, Messen und Theilen üben; oder man kann in der betreffenden Zahlenreihe allmählich von Zahl zu Zahl aufsteigen, und jede derselben sogleich nach allen jenen Operationen in Betrachtung ziehen. Dort liegt der Eintheilung und Anordnung der Übungen die Operation, hier die Zahl selbst zu Grunde, welche in ihrer Allseitigkeit betrachtet wird.

Für die Behandlung der höheren Zahlen erscheint zwar der erste dieser Wege besser geeignet; dagegen verdient für den Zahlenraum von 1 bis 10, dem man die unmittelbare äußere Anschauung zu Grunde legen kann, unstreitig die zweite Methode den Vorzug. Sie führt nicht nur sicher zum klaren Auffassen und allseitigen Durchdringen der einzelnen Zahlen, sondern fördert wesentlich auch das Verständnis der elementaren Rechenoperationen, welche sogleich mit jeder Zahl in Verbindung treten. Die verschiedenen Operationen in diesem Zahlenumfange werden auf anschauliche Weise am einfachsten mit Hilfe der Zerlegung der Zahlen erfasst; diese Zerlegbilder und die darauf beruhendeu Rechnungsfälle werden sich jedoch nur dann dem Gedächtnisse des Kindes fest einprägen, wenn die Unterweisung und Übung bei jeder einzelnen Zahl durch längere Zeit betrieben wird.

Wir wählen daher diesen zweiten Weg, jedoch auch nicht in seiner strengen Durchführung. Es lässt sich nicht leugnen, dass der Unterricht zu sehr erschwert wird, wenn schon in den allerersten Übungen auch die Operationen des Vervielfachens, Messens und Theilens mit einbezogen und bei der schriftlichen Ausführung die Schüler verhalten werden, sich mit den Zeichen für alle Rechnungsarten auf einmal vertraut zu machen. Diese Schwierigkeiten werden wir nun dadurch beseitigen, dass wir zuerst einen Vorcursus über die Zahlen von eins bis fünf vorausschicken und uns in demselben auf das Zuzählen und das Wegzählen beschränken, zu der allseitigen Behandlung der Zahlen von eins bis zehn aber erst dann den Übergang machen, nachdem in jenen Übungen volle Einsicht und Geläufigkeit erzielt wurde.

Man kann auch, um den obigen Schwierigkeiten noch mehr auszuweichen, zunächst bei sämmtlichen zehn Zahlen nur das Zuzählen und das Wegzählen berücksichtigen und erst am Schlusse die im ersten Zehnerraume ohnehin nur spärlich auftretenden Übungen im Vervielfachen, Messen und Theilen vornehmen.

Dabei müssen wir dem Lehrer im allgemeinen noch Folgendes empfehlen:

a) Da die Zahlen von 1 bis 10 die Grundlage aller Zahlenbildung und alles Rechnens bieten, so müssen sie mit besonderer Sorgfalt behandelt werden. Bei jeder Zahl soll der Lehrer so lange verweilen, bis alles klar erfasst und fertig eingeübt ist; nirgends straft sich ein zu schnelles Vorwärtseilen empfindlicher als beim ersten Rechenunterrichte.

b) Alle Übungen sind nicht nur mündlich, sondern auch schriftlich vorzunehmen. Überall sollen Kopf- und Zifferrechnen in harmonischer Verbindung nebeneinander fortschreiten. Durch die schriftlichen Übungen wird nicht nur die bei der mündlichen Behandlung gewonnene Einsicht befestigt; dieselben bieten auch namentlich in Schulen, wo die Unterclasse mehrere Abtheilungen enthält, ein vorzügliches Mittel, die Anfänger still zu beschäftigen, während der Lehrer eine andere Abtheilung unmittelbar unterrichtet.

c) Der Lehrer sage in der Regel die Aufgabe nur e i n m a l vor und betone dabei besonders die Zahlwörter; dies nöthigt die Schüler zur Aufmerksamkeit und fördert auch die Fertigkeit im Behalten der Zahlen.

d) Der Lehrer lasse die Schüler bald in vollständigen Sätzen, bald in der kürzesten Weise (bloß durch ein Zahlwort), im letzten Falle aber auch so rasch als möglich antworten. Jede dieser Formen hat ihren Wert. Während vollständige Antworten die Sprachrichtigkeit fördern, verdient die zweite Form der Antworten den Vorzug, wenn es auf die Übung der Fertigkeit, also auf Schnelligkeit ankommt.

e) Man lasse die Anfänger nie ununterbrochen zu lange Zeit (über eine halbe Stunde) rechnen, damit nicht Ermattung und Abspannung des Geistes eintrete.

I. Zahlen von e i n s bis f ü n f.

(Anschauung, Zuzählen und Wegzählen.)

§. 6. Anschauliche Bildung der Zahlen von e i n s bis f ü n f.

Die Kinder bringen bei ihrem Eintritte in die Schule im allgemeinen schon einige Kenntnisse im Zählen mit. Diese Kenntnis ist jedoch in den meisten Fällen eine bloß mechanische; sie besteht darin, dass die Zahlwörter zwar in geordneter Folge, aber ohne inneres Verständnis mit mehr oder weniger Fertigkeit hergesagt werden. Damit die Schüler eine richtige Vorstellung der einzelnen Zahlen erlangen, werde jede Zahl an verschiedenen äußern Gegenständen in mannigfaltiger Abwechslung zur Anschauung gebracht. Nur dadurch, dass die Kinder an verschiedenen wechselnden Dingen die gleiche Menge stets mit demselben Zahlworte bezeichnen hören, merken sie sich dieses Zahlwort in Verbindung mit der dadurch ausgedrückten Anzahl und lernen es auch auf andere gleiche Mengen anwenden, d. h. sie *abstrahieren die reine Zahl*.

Der Lehrer lasse zuerst verschiedene Gegenstände, als Griffel, Stäbchen, Würfel, Fenster, Bänke u. s. w. *zählen*, und *stelle* dann die betrachtete Zahl an der Schultafel durch Punkte, Striche, Kreuzchen u. dgl. auch *schriftlich* dar.

Wird zur Veranschaulichung der Zahlen die *russische Rechenmaschine* angewendet, so muss dabei alles entfernt bleiben, was die Aufmerksamkeit von dem anzuschauenden Gegenstande ablenken könnte. Darum nehme man anfänglich alle Kugeln heraus, zu welchem Zwecke die eisernen Stäbe an dem einen Ende umgebogen, auf dem andern mit einer Mutterschraube versehen sind, und bringe dann erst nach und nach, so wie die auf einander folgenden Zahlen auftreten, für die Zahl 1 *eine* Kugel auf den obersten Stab, für die Zahl 2 *zwei* Kugeln auf den zweiten Stab, für die Zahl 3 *drei* Kugeln auf den dritten Stab, u. s. w.

Wendet man *Tillichs Rechenkasten* an, so setze man bei der Bildung jeder neuen Zahl über das Stäbchen, welches die vorhergehende Zahl darstellt, noch einen Würfel und stelle sodann daneben das ganze Stäbchen für die neue Zahl.

Wenn auch hier die Kinder noch nicht mit den Ziffern bekannt zu machen sind, so können doch schon schriftliche Übungen eingeführt werden, indem man die Schüler die Darstellung der Zahlen durch Punkte, Striche, . . . die der Lehrer früher vor ihren Augen an der Schultafel gemacht und besprochen hat, auf ihren Täfelchen *nachbilden läßt*

a) Die Zahl *eins*.

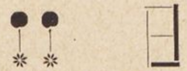
Das ist *ein* Griffel. Wie viel Griffel sind das? Das Kind antwortet mit einem vollständigen Satze: das ist *ein* Griffel. — Das ist *ein* Finger. — Wie viel Finger sind das? — Das ist *ein* Würfel. — Das ist *eine* Kugel (auf die an dem obersten Stabe der russischen Rechenmaschine angebrachte Kugel zeigend). — Wie viel Köpfe hast du? — Was ist an deinem Kopfe nur *einmal* da? — Was ist in dem Schulzimmer nur *einmal* da?

Der Lehrer macht an der Schultafel einen Punkt. Wie viel Punkte sind das? Machet auf dem Schiefertäfelchen *einen* Punkt. Wie viel Punkte habt ihr gemacht? — Ebenso mache der Lehrer an der Wandtafel *einen* Strich, ein

Sternchen, einen Würfel (in der Darstellung als Quadrat) und lasse dieselben von den Schülern auf ihren Täfelchen nachbilden.

Ihr kennet nun eine Zahl. Sie heißt eins.

b) Die Zahl zwei.



Das ist ein Würfel (aus Tillichs Rechenkasten), das ist auch ein Würfel. Ich lege diesen Würfel über den andern, dann habe ich mehr als einen Würfel, ich habe zwei Würfel. Sodann stellt der Lehrer daneben eine gleich große ganze Säule, welche zwei Würfel enthält, und spricht: Das sind auch zwei Würfel. — Wie viel Stäbchen sind ein Stäbchen und ein Stäbchen? — Wie viel Finger sind ein Finger und ein Finger? — Ein Fenster und ein Fenster sind wie viel Fenster? — (An der Rechenmaschine.) Der Lehrer schiebt auf dem zweiten Stabe eine Kugel zur Linken und spricht: das ist eine Kugel. Dann zeigt er auf die zweite Kugel und spricht: das ist auch eine Kugel. Indem er dann die zweite Kugel zu der ersten schiebt, spricht er: Eine Kugel und eine Kugel sind zwei Kugeln. Dann kommen mehrere Schüler der Reihe nach an die Maschine und machen die Operation selbst.

Was ist an deinem Kopfe zweimal da? — Wie viel Hände hast du? — Wie viel Füße? — Wie viel Füße hat die Henne? — Nenne noch andere Thiere, welche zwei Füße haben.

Nun zeichnet der Lehrer an der Schultafel zwei Punkte, darunter oder daneben zwei Striche, zwei Sternchen, zwei Kreuze, zwei übereinander stehende Würfel, und spricht dabei: ein Punkt und ein Punkt sind zwei Punkte; ein Strich und ein Strich sind zwei Striche; ein Sternchen und ein Sternchen sind zwei Sternchen; u. s. w. Eins und eins ist zwei.

Diese Darstellungen werden dann von den Schülern nach der Vorschrift an der Schultafel auf ihren Täfelchen nachgebildet.

c) Die Zahl drei.

Hier sind zwei Stäbchen: ich lege zu denselben noch ein Stäbchen, dann habe ich mehr als zwei Stäbchen, ich habe drei Stäbchen; zwei Stäbchen und ein Stäbchen sind drei Stäbchen. — (An der Rechenmaschine.) Wie viel Kugeln sind an dem ersten Stabe? Wie viel an dem zweiten. Wie viel an dem dritten? — (Mit Hilfe des Tillich'schen Rechenkastens.) Der Lehrer stellt die Säule von zwei Würfeln auf, legt darüber einen Würfel und spricht: zwei Würfel und ein Würfel sind drei Würfel. Sodann stellt er daneben die ganze Säule von drei Würfeln und läſst von unten nach oben zählen: ein Würfel, zwei Würfel, drei Würfel.

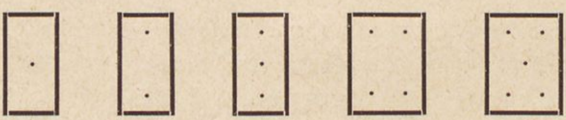
Zähle von diesen Griffeln drei ab. — Wie viel Finger sind das? Das sind zwei Finger. Ich halte noch einen Finger dazu; wie viel sind es jetzt? Nun hebe jeder drei Finger in die Höhe!

Darstellung der Zahl drei durch Punkte, Striche, Sternchen, . . . an der Schultafel; Nachbilden dieser Darstellung von den Schülern auf ihren Schiefertäfelchen.

d) Ebenso werden die folgenden Zahlen vier und fünf anschaulich vorgeführt.

§. 7. Die Zahlbilder.

Die noch ungeübten Kinder können eine größere Reihe von neben oder unter einander stehenden Punkten nicht leicht übersehen und zur Zahl zusammenfassen. Sie haben bisher die durch Punkte versinnlichte Zahl durch das Abzählen derselben angegeben. Damit sie sich nun von jeder Zahl, ohne erst die Punkte zählen zu müssen, sogleich eine richtige Vorstellung machen können, führt man ihnen für die einzelnen Zahlen bestimmte Zahlbilder vor, in denen die versinnlichenden Punkte in einer leicht zu überblickenden Gruppe zusammengestellt erscheinen. Ein Zahlbild muſs so gewählt werden, daſs das Kind in demselben mit einem Blicke sogleich die dadurch ausgedrückte Zahl erkennt und alle ihre Bestandtheile vorfindet. Wir wählen für die ersten fünf Zahlen die nachstehenden Zahlbilder:



Der Lehrer läſst diese Zahlbilder nach der Reihe vor den Augen der Schüler an der Schultafel entstehen, bespricht die Eigenthümlichkeiten eines jeden und zeigt die Bilder auch an der Wandtafel. Hierauf werden die Schüler mit Benützung der Wandtafel im Lesen der Zahlbilder so lange geübt, bis sie jedes derselben rasch und sicher anzugeben wissen.

Anfänglich wird gelesen:

1. Das ist ein Punkt.

2. Ein Punkt oben und ein Punkt unten sind zwei Punkte.

3. Ein Punkt oben, ein Punkt unten und ein Punkt in der Mitte sind drei Punkte.

4. Zwei Punkte oben und zwei Punkte unten sind vier Punkte.

5. Zwei Punkte oben, zwei Punkte unten und ein Punkt in der Mitte sind fünf Punkte.

Später lesen die Schüler kürzer:

Das ist ein Punkt. Das sind zwei Punkte. Das sind drei Punkte; u. s. w.

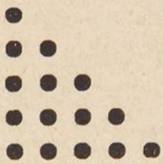
Endlich in und außer der Ordnung bloß:

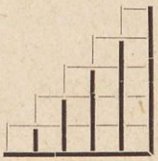
Eins; zwei; drei; u. s. w.

Sodann werden die Zahlbilder von den Schülern auf ihren Täfelchen nachgebildet, zuerst von der Wandtafel oder aus ihrem Rechenbuche, später in und außer der Ordnung aus dem Gedächtnisse.

§. 8. Übersichtliche Zusammenstellung der ersten fünf Zahlen.

A. Der Lehrer bilde an der Schultafel fünf Reihen von Punkten, welche die aufeinander folgenden Zahlen darstellen:





und knüpfe daran folgende Übungen:

a) Das Vorwärtszählen. Der Lehrer zeige auf die erste, dann auf die zweite, dritte, . . . fünfte Reihe und lasse die Kinder zählen: ein Punkt, zwei Punkte, drei Punkte, . . . fünf Punkte; hierauf bloß: eins, zwei, drei, . . . fünf.

b) Das Zählen außer der Ordnung. Der Lehrer zeigt außer der Ordnung irgend eine Anzahl von Punkten; die Schüler geben diese Zahl an.

c) Nennen einer Zahl und Zeigenlassen der entsprechenden Reihe von dem Schüler.

d) Angabe der Stelle, welche eine Zahl in der Zahlenreihe einnimmt. Welche Zahl folgt auf eins? auf vier, drei? — Welche Zahl steht vor zwei? vor fünf, drei? — Zwischen welchen Zahlen liegt zwei, vier, drei?

e) Nennen einer Zahl und Zeichnen der entsprechenden Anzahl Punkte von dem Schüler.

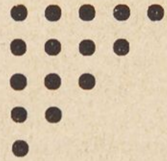
f) Nachbilden aller fünf Reihen von Punkten auf den Schiefertafeln als stille Beschäftigung.

Dieselben Übungen an der Rechenmaschine, mit Tillichs Rechenstäben, sowie an den Zahlbildern.

B. Damit die Aufeinanderfolge der Zahlen noch besser aufgefaßt werde, stelle der Lehrer die Zahlenreihe, von fünf ausgehend, rückwärts auf.

Zuerst an Stäbchen. Hier sind fünf Stäbchen; nehme ich ein Stäbchen weg, so habe ich weniger als fünf Stäbchen, ich habe nur vier Stäbchen. Nehme ich von vier Stäbchen noch ein Stäbchen weg, so habe ich weniger als vier Stäbchen, ich habe nur noch drei Stäbchen; u. s. f.

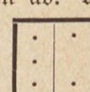
Dann wird ebenso an Punkten, welche vor den Augen er Schüler an die Schultafel gemacht werden, das Rückwärtszählen geübt. Die Kinder zählen, indem der Lehrer auf die erste, zweite, dritte, . . . Reihe zeigt, zuerst: fünf Punkte, vier Punkte, drei Punkte, zwei Punkte, ein Punkt; dann: fünf, vier, drei, zwei, eins.



Auch diese Darstellung von Punkten wird von den Schülern auf den Schiefertafeln nachgebildet.

§. 9. Zerlegung der Zahlen, Zu- und Wegzählen.

1. Die Kinder haben bisher bis *fünf* mit Bewusstsein zählen gelernt. Dieses genügt jedoch nicht. Damit die gewonnene Anschauung einer Zahl zu größerer Klarheit erhoben, damit der Inhalt der Zahl vollständig erkannt werde, muss man dieselbe mit allen kleineren Zahlen vergleichen, sie zu diesem Zwecke in ihre Bestandtheile *zerlegen* und diese wieder zusammensetzen lassen. Dabei ergeben sich von selbst die verschiedenen *Rechnungsoperationen*, durch welche man die betrachtete Zahl mit den ihr vorangehenden verbinden kann. Insofern wir uns in dem Zahlenraume von eins bis fünf, um die Schüler nicht zu überbürden, vorläufig auf die zwei einfachsten Rechnungsoperationen, das Zu- und das *Wegzählen*, beschränken, wird es genügen, jede der Zahlen zwei bis fünf in je *zwei* Bestandtheile zu zerlegen, indem wir schon dadurch zu allen Resultaten des Zu- und des Wegzählens gelangen.

Die einzelnen Zerlegungen der Zahlen werden durch *Zerlegbilder* anschaulich vorgeführt. Jedes Zerlegbild muss mündlich besprochen und, damit die durch dasselbe veranschaulichten Rechnungsfälle jederzeit und sicher reproduciert werden können, von den Schülern wiederholt *abgelesen* werden. Die Sicherheit und Schnelligkeit, eine Vorstellung zu reproducieren, hängt von der Stärke der ursprünglichen Auffassung und von der häufigen Wiederholung derselben ab. Um dies an an einem Beispiele zu beleuchten, wählen wir das Zerlegbild . Die Schüler ersehen aus demselben, dass 5 aus 3 und 2 besteht, und lesen: 3 und 2 ist 5; sie werden sich beim Anschauen des Bildes gleichzeitig zweier Vorstellungen bewusst, erstens der Vorstellung „3 und 2“, zweitens der Vorstellung „5“. Da nun gleichzeitig im Bewusstsein gewesene Vorstellungen einander reproducieren, so wird die Vorstellung „5“ genau so, wie sie das erstemal aufgefasst wurde, reproduciert werden, sobald die Vorstellung „3 und 2“ von neuem ins Bewusstsein tritt. Je stärker daher die ursprüngliche Auffassung der Vorstellung „3 und 2“ war, und je häufiger sie wiederholt wird, desto sicherer wird auch die unveränderte Reproduction der Vorstellung „5“ erfolgen.

Zur besseren Befestigung der erlangten Vorstellung werden die Schüler auch angehalten, das richtig aufgefasste Zerlegbild, anfangs von der Schultafel oder aus dem Rechenbuche, später aus dem Gedächtnisse auf ihren Täfelchen nachzuzeichnen.

2. Da die mündlich vorgenommenen Rechenübungen von den Schülern auch in schriftlicher Darstellung wiederholt werden sollen, müssen dieselben im Anschlusse an das entsprechende Zahlbild auch mit dem Lesen und Schreiben der Ziffer für die betrachtete Zahl vertraut gemacht werden. Der Lehrer schreibt die Ziffer einigemale an die Tafel, macht dabei auf die einzelnen Züge aufmerksam, und fragt jedesmal: Was bedeutet diese Ziffer? Dann lässt er die Schüler die Ziffer auf den Schiefertafeln wiederholt nachbilden, bis sie dieselbe richtig und ziemlich geläufig schreiben können.

Die Begriffe Zahl und Ziffer dürfen nicht verwechselt werden; die Kinder sollen dieselben nicht definieren, wohl aber richtig gebrauchen können.

In Bezug auf die Behandlung der schriftlichen Aufgaben nicht nur im Anfange, sondern auch in der Folge, so oft eine Übung zum erstenmal auftritt, sei dem Lehrer folgendes empfohlen: Er schreibe die Aufgaben zuerst an die Schultafel, spreche sie mit den Kindern durch, erkläre ihnen die arithmetischen Zeichen und setze die Resultate dazu. Dann lösche er letztere wieder weg, lasse nach der Reihe mehrere Schüler an die Tafel treten und von ihnen die Rechnung wiederholen. Hierauf lesen die Schüler einer nach dem andern die Aufgaben aus dem Rechenbuche und rechnen sie aus. Endlich werden die Schüler aufgefordert, die Aufgaben auf ihre Schiefertafeln zu schreiben, sie noch einmal auszurechnen und durch das Ansetzen des Resultates zu ergänzen. Ist dies geschehen, so sehe der Lehrer die einzelnen Arbeiten genau durch und helfe nach, wo er es nöthig findet.

In den schriftlichen Übungen muss eine solche Sicherheit erreicht werden, dass die Schüler zuletzt Aufgaben und Antworten aus dem Rechenbuch lesen, als ob die fehlenden Zahlen gedruckt wären.

3. Was die Schüler klar erfasst haben, das soll ihnen geläufig und zum unverlierbaren Eigenthum werden. Dazu ist anhaltende Übung und vielfältige Wiederholung nöthig. Bei den Übungen mit einer bestimmten Zahl müssen daher immer auch die Übungen mit den vorhergehenden Zahlen soviel als möglich zur Wiederholung gebracht werden.

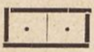
a) **Die Zahl eins.**

Bei der Zahl eins kann es sich hier, da dieselbe nicht zerlegt werden kann, nur um deren schriftliche Bezeichnung handeln.

Die Schüler lernen die Ziffer 1 kennen und schreiben.

b) **Die Zahl zwei.**

Der Lehrer zeigt auf die aneinander geschobenen Kugeln am zweiten Stabe der russischen Rechenmaschine. Wie viel Kugeln sind auf diesem Stabe? Nun rückt er die eine von der andern etwas weg. Wie viel Kugeln sind jetzt auf dem zweiten Stabe? Aber die zwei Kugeln sind nicht mehr zusammen, sie sind getrennt, zerlegt. Ich habe zwei Kugeln zerlegt in eine Kugel und eine Kugel.

Nun zeichnet der Lehrer auf der Schultafel das Zerlegbild von 2 , indem er spricht: Hier sind zwei Punkte. Ich kann sie nicht auseinander rücken; um sie zu zerlegen, mache ich zwischen den zwei Punkten einen kleinen Strich. Wie viel Punkte sind auf der einen Seite des Striches? Wie viel Punkte auf der andern? Zwei Punkte kann man zerlegen in einen Punkt und einen Punkt — Zwei kann man zerlegen in eins und eins. Zwei besteht aus eins und eins.

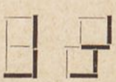
Nun sollen die Kinder auf die Operationen des Zu- und Wegzählens, die durch das Zerlegbild veranschaulicht sind, geleitet werden.

1 Punkt und 1 Punkt sind 2 Punkte. 1 und 1 ist 2 ($1 + 1 = 2$).

Nehme ich von 2 Punkten 1 Punkt weg (das Wegnehmen wird durch das Verdecken angedeutet), sind es dann noch 2 Punkte? Sind es mehr oder weniger? Wie viel sind es weniger? und wie viel sind noch da? 2 Punkte weniger 1 Punkt ist also 1 Punkt. 2 weniger 1 ist 1 ($2 - 1 = 1$).

Die Sätze „1 und 1 ist 2, 2 weniger 1 ist 1“ müssen von den Schülern von dem Zerlegbilde wiederholt abgelesen werden.

(Mittelst Tillichs Rechenkasten.) Das Stäbchen 2 wird aufgestellt.



Indem man den Bleistift in der Mitte an den Theilungsstrich anlegt, sehen die Schüler, daſs unten 1 Würfel und oben 1 Würfel ist. Sodann legt man daneben über einen Würfel einen zweiten Würfel etwas hervorstehend auf und läſst die Sätze ablesen:

2 besteht aus 1 und 1; 1 und 1 ist 2;

2 weniger 1 ist 1.

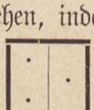
Nun mache man die Kinder mit der Ziffer 2 bekannt und lasse sie auf den Schiefertafeln zwei Punkte und daneben die entsprechende Ziffer wiederholt nachbilden.

Für die weitere schriftliche Übung ergeben sich nebst der Nachzeichnung des Zerlegbildes  die an demselben schon mündlich behandelten Aufgaben:

$1 + 1 =$ $\qquad$ $2 - 1 =$ $\qquad$ $2 = 1 + .$ *)

c) **Die Zahl drei.**

Der Lehrer läſst das Zerlegbild von drei vor den Augen der Kinder entstehen, indem er spricht: Ich mache auf der Tafel 3 Punkte, aber zu beiden Seiten



eines Striches; wie viel Punkte werde ich auf jeder Seite machen? Drei kann man zerlegen in zwei und eins. 3 besteht aus 2 und 1.

*) Lies: zwei ist eins und wieviel?

Hieraus ergeben sich folgende Rechnungsfälle:

2 und 1 ist 3;
1 und 2 ist 3;
3 weniger 1 ist 2;
3 weniger 2 ist 1.

Diese Sätze, welche von dem Zerlegbilde wiederholt abzulesen sind, können an der russischen Rechenmaschine auf dem dritten Stabe, auf welchem sich 3 Kugeln befinden, durch entsprechendes Zusammen- und Auseinanderschieben der Kugeln veranschaulicht werden.

Wendet man Tillichs Rechenkasten an, so wird an dem Stäbchen 3 der Bleistift an den zweiten Theilungsstrich von unten nach oben angelegt und dabei gesagt: unten sind 2 Würfel, oben ist 1 Würfel. Sodann legt man zur besseren Veranschaulichung daneben das Stäbchen 2 und darüber etwas hervorstehend einen Würfel und leitet die oben an dem Zerlegbilde veranschaulichten Sätze ab.

Die schriftlichen Übungen bestehen im Beibringen der Ziffer 3 und in der Ausführung der bei der Zerlegung angeführten Rechnungsfälle:

$2 + 1 =$	$3 - 1 =$	$3 = 2 + .$
$1 + 2 =$	$3 - 2 =$	$3 = 1 + .$

Nach der Behandlung jeder Zahl sollen über die an den vorhergehenden Zahlen vorgenommenen Übungen mündliche und schriftliche Wiederholungen eintreten.

a) Beim mündlichen Wiederholen ist insbesondere auch das Zählen ins Auge zu fassen.

Der Lehrer führe die aufeinander folgenden Zahlbilder an der Wandtafel noch einmal vor und lasse sie von den Kindern nach der Reihenfolge benennen: ein Punkt, zwei Punkte, drei Punkte; dann: eins, zwei, drei. Welche Zahl kommt nach 1, welche nach 2? Hierauf lasse er an den Zahlbildern nach rückwärts zählen: drei, zwei, eins. Welche Zahl steht vor 3, welche vor 2? Zwischen welchen Zahlen liegt 2? Die Veranschaulichung des Zählens kann auch an der Rechenmaschine geschehen.

Wie viel ist 1 und 1? — 2 und 1? — 1 und 2?

Wie viel ist 3 weniger 1? — 2 weniger 1? — 3 weniger 2?

Um wie viel ist 2 mehr als 1? — 3 mehr als 2? — 3 mehr als 1?

Um wie viel ist 1 weniger als 2? — 2 weniger als 3? — 1 weniger als 3?

Bei den schriftlichen Wiederholungsübungen werden die Aufgaben, welche sich bei den einzelnen Zahlen unmittelbar an die Zerlegbilder anschlossen, in beliebiger Aufeinanderfolge noch einmal aufgestellt.

d) **Die Zahl vier.**

Die Behandlung ist im wesentlichen dieselbe wie bei den Zahlen 2 und 3; eine Abweichung tritt nur insoferne ein, als sich für die Zahl 4 zwei Zerlegbilder ergeben.

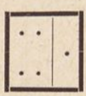
Lesen: 4 besteht aus 3 und 1.
3 und 1 ist 4; 4 weniger 1 ist 3;
1 und 3 ist 4; 4 weniger 3 ist 1.

Lesen: 4 besteht aus 2 und 2.
2 und 2 ist 4; 4 weniger 2 ist 2.

Veranschaulichung mittelst der Tillichschen Rechenstäbe:

e) **Die Zahl fünf.**

Auch die Zahl 5 kann auf zweierlei Art in zwei Bestandtheile zerlegt werden.



5 besteht aus 4 und 1.
4 und 1 ist 5; 5 weniger 1 ist 4;
1 und 4 ist 5; 5 weniger 4 ist 1.

5 besteht aus 3 und 2.
3 und 2 ist 5; 5 weniger 2 ist 3;
2 und 3 ist 5; 5 weniger 3 ist 2.

In den schriftlichen Übungen können hier auch wiederholtes Zuzählen, wiederholtes Wegzählen, und Zuzählen in Verbindung mit dem Wegzählen vorkommen. Die Schüler zählen, wie beim mündlichen Rechnen, zu der ersten Zahl zuerst die zweite, und zu dem, was herauskommt, die dritte. Ähnlich verfahren sie beim wiederholten Wegzählen und bei dem verbundenen Zu- und Wegzählen. Einige dieser Aufgaben sind früher auf der Schultafel durchzuführen. Die Form für die schriftliche Ausrechnung sei anfangs vollständig; z. B.

$1 + 2 + 1 =$

$1 + 2 = 3$
$3 + 1 = 4$

$1 + 2 + 1 = 4$

$4 - 2 + 3 =$

$4 - 2 = 2$
$2 + 3 = 5$

$4 - 2 + 3 = 5.$

Das sind kurze und einfache Schlüsse, welche das Denk- und das Sprechvermögen in gleichem Maße üben. Darum halte man mit Strenge darauf. In keinem Falle soll jedoch die folgende, durchaus falsche und sinnlose Darstellung geduldet werden.

$1 + 2 = 3 + 1 = 4; \qquad 4 - 2 = 2 + 3 = 5.$

Bei vorgeschrittener Übung können sich die Schüler auch bloß der kürzeren Darstellungsweise bedienen; sie sprechen z. B. 4 weniger 2, ist 2 und 3 ist 5, und schreiben sogleich

$$4 - 2 + 3 = 5.$$

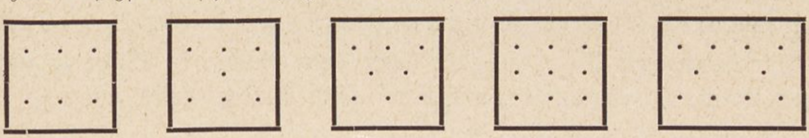
II. Zahlen von eins bis zehn.

(Allseitige Behandlung.)

§. 10. Anschauliche Bildung der Zahlen bis zehn.

1. Nach demselben Vorgange, den man bei der Bildung der Zahlen von 1 bis 5 beobachtet hat, werden auch die weiteren Zahlen von sechs bis zehn *anschaulich entwickelt*. Die Veranschaulichung geschieht auch hier insbesondere durch Punkte, mittelst der russischen Rechenmaschine und durch die Tillich'schen Rechenstäbchen.

2. Die Vortheile der Darstellung durch *Zahlbilder* (§. 7) treten bei den Zahlen von sechs bis zehn noch schärfer hervor als bei den ersten fünf Zahlen. Am zweckmäßigsten erscheint folgende Wahl derselben:



3. Nachdem die Schüler mit den Ziffern für die ersten fünf Zahlen bereits bekannt gemacht wurden, werden ihnen nunmehr auch die *Ziffern* 6, 7, 8, 9 vorgeführt. Bei der Zahl *zehn* bemerkt man, dass dieselbe mit zwei Ziffern 10, von denen die zweite *Null* heißt, bezeichnet wird. Der Grund dieser Bezeichnungsweise kann den Schülern erst später, wenn in dem bis zwanzig erweiterten Zahlenraume der Gegensatz zwischen Einern und Zehnern zur Geltung gelangen wird angegeben werden.

4. Zur Befestigung der gewonnenen Anschauungen werden am Schlusse die sämmtlichen Zahlen von eins bis zehn *übersichtlich zusammengestellt* und an ihnen die in §. 8 bezeichneten Übungen durchgeführt.

Münzen, Maße und Gewichte.

In den angewandten Aufgaben treten die Münzen, Maße und Gewichte auf; diese müssen den Kindern erklärt und vorgezeigt werden.

In dem ersten Zehnerraume werden hierüber folgende Belehrungen zu ertheilen sein:

a) *Münzen.*

Wenn ihr Papier, Griffel, oder etwas anderes kaufet, müsset ihr dafür *Geld* zahlen. Geldstücke heißen *Münzen*. Die kleinsten Geldstücke, die wir haben, sind der Kreuzer und der halbe Kreuzer (sie werden vorgezeigt). Beide sind aus Kupfer; sie heißen darum Kupfermünzen. Was man für einen Kreuzer kauft, kann man entweder mit 1 Kreuzer oder mit 2 halben Kreuzern bezahlen. 1 Kreuzer ist gleich 2 halben Kreuzern.

Der Lehrer zeigt dann ein Vierkreuzerstück und sagt: Außer dem Kreuzer und dem halben Kreuzer haben wir noch eine größere Kupfermünze, welche Vierkreuzerstück oder Vierer heißt. Ein Vierer gilt 4 Kreuzer.

Nicht alle Münzen bestehen aus Kupfer; einige sind auch aus Silber und noch andere aus Gold. Silber ist mehr wert als Kupfer, Gold ist mehr wert als Silber.

Der Lehrer zeigt einen Fünfer, einen Zehner, einen Zwanziger und ein Guldenstück vor und sagt: Diese Münzen bestehen aus Silber und heißen darum Silbermünzen. Statt 5 Kreuzer zu zahlen, kann ich 1 Fünfer zahlen; 1 Fünfer ist gleich 5 Kreuzern. Statt 2 Fünfer zu zahlen, kann ich 1 Zehner zahlen; 1 Zehner ist gleich 2 Fünfern. Statt 2 Zehner oder 4 Fünfer zu zahlen, kann ich einen Zwanziger zahlen; 1 Zwanziger ist gleich 2 Zehnern oder 4 Fünfern. Statt 5 Zwanziger oder 10 Zehner zu zahlen, kann ich einen Gulden zahlen; 1 Gulden ist gleich 5 Zwanzigern oder 10 Zehnern.

Wir haben auch Papiergeld. Statt einen Gulden in Silber zu zahlen, können wir eine Staatsnote, welche auf einen Gulden lautet, zahlen.

b) Längenmaße.

Die Dinge, welche man kauft, werden gemessen oder gewogen; sie werden nach dem Maße oder Gewichte gekauft.

Tuch, Leinwand, Bänder u. dgl. werden mit dem Meter gemessen. Der Lehrer zeige einen Meterstab vor und erkläre die darauf befindliche Eintheilung. 1 Meter ist gleich 10 Decimeter; 1 Decimeter ist gleich 10 Centimeter.

Der Lehrer misst dann auch die Länge und die Breite des Schulzimmers mit dem Meterstabe und zeigt, wie man zuerst die Meter, und dann die Decimeter und Centimeter abzählt.

c) Hohlmaße.

Wein, Bier und andere Flüssigkeiten werden mit dem Liter und dem Deciliter gemessen. Der Lehrer zeige sowohl ein Liter- als ein Decilitermaß, fülle das Deciliter 10mal nach einander mit Wasser und gieße dieses jedesmal in das Liter, wodurch dasselbe voll wird. Die Kinder ersehen daraus, dass 1 Liter gleich 10 Deciliter ist.

Das Liter dient auch zum Messen des Getreides und anderer trockener Gegenstände.

d) Gewichte.

Zum Abwägen braucht man eine Wage und Gewichte. Als Gewicht dient das Kilogramm. Um kleinere oder kostbare Gegenstände, z. B. Seide, Gold u. dgl. zu wägen, braucht man das Dekagramm und das Gramm. Der Lehrer zeige sowohl die Wage als die genannten drei Gewichte vor und erkläre das Wägen. Um den Kindern zur Anschauung zu bringen, dass ein Kilogramm das Gewicht eines Liters Wasser ist, lege er auf die eine Wagschale ein leeres Litergefäß und auf die andere so viel an Gewicht, als nöthig ist, um das Gleichgewicht der Wage herzustellen; dann fülle er das Gefäß mit Wasser und stelle das Gleichgewicht durch Hinzulegen neuer Gewichte wieder her, wozu gerade ein Kilogramm erforderlich ist. So viel an Gewicht zugelegt werden musste, so viel beträgt das Gewicht des in einem Liter enthaltenen Wassers, somit ein Kilogramm.

Legt man ferner in die eine Wagschale 1 Dekagramm und in die andere 10 Gramm, so ist in beiden Wagschalen gleich viel Gewicht. 1 Dekagramm ist also gleich 10 Gramm.

Die Untertheilungen: 1 Gramm = 10 Decigramm, 1 Decigramm = 10 Centigramm, 1 Centigramm = 10 Milligramm, können, da sie für das gewöhnliche Leben von keiner praktischen Bedeutung sind, hier noch übergangen werden.

e) Zählmaße.

Viele Gegenstände werden nach der Anzahl der Stücke gekauft; z. B. Griffel, Äpfel u. dgl. Zwei Dinge nennt man ein Paar. Manche Dinge müssen zum Gebrauche paarweise vorhanden sein, z. B. ein Paar Schuhe, ein Paar Strümpfe, u. dgl.

Beim Papier nennt man 10 Bogen eine Lage, und 10 Lagen ein Buch.

f) Zeitmaße.

Eine Woche hat 7 Tage. Wie heißt der erste Wochentag? der zweite? . . . der siebente? Ihr gehet an 6 Tagen in die Schule; das sind Schultage, Werktage oder Arbeitstage; der Sonntag ist der Ruhetag. 1 Woche hat 6 Arbeitstage.

§. 11. Allseitige Behandlung der Zahlen von eins bis zehn.

1. In dem Zahlenraume von 1 bis 5 wurden nur die Operationen des Zu- und Wegzählens berücksichtiget. Nachdem hiedurch die weiteren Schwierigkeiten überwunden erscheinen, sollen nun weiterhin in dem Zahlenraume bis 10, damit der Inhalt der Zahlen allseitig erfasst werde, auch die Rechnungsfälle des Vervielfachens, Messens und Theilens in den Kreis der Übungen einbezogen werden. Auch diese Operationen werden am zweckmäßigsten durch Zerlegung der Zahlen

in ihre Bestandtheile zur Anschauung gebracht. Dabei dürfen wir uns jedoch nicht, wie bisher, auf zwei Bestandtheile beschränken, sondern müssen alle jene Zerlegungen in Betracht ziehen, welche sich aus der Vergleichung der bezüglichen Zahl mit jeder der vorhergehenden Zahlen ergeben, welche also darstellen, wie vielmal 1, wie vielmal 2, wie vielmal 3 u. s. f. in der Zahl enthalten ist, die eben behandelt wird. Diese Zerlegungen reichen hin, um alle Rechnungsfälle des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens zur unmittelbaren Anschauung zu bringen.

Eine Wandtafel, welche nebst den Zahlbildern auch die einzelnen Zerlegbilder enthält, darf in keiner Schule fehlen. Sie kann nach dem auf Seite 23 mitfolgenden Entwurfe von dem Lehrer selbst auf einem Blatte von etwa 80 Centimeter Breite und 60 Centimeter Höhe angefertigt werden.

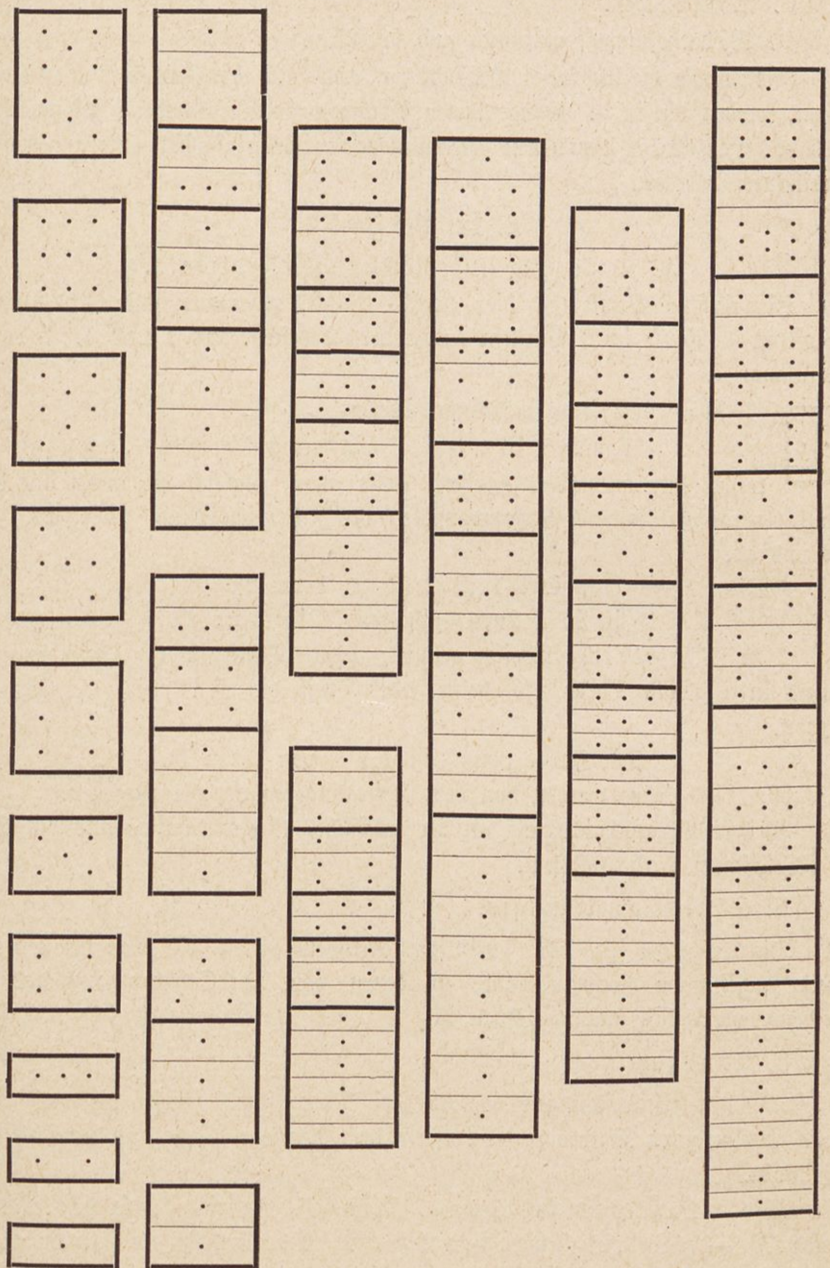
2. Wie die schriftlichen Übungen zu behandeln sind, wurde bereits in §. 9, 2 näher angeführt. Nur in Bezug auf die Bezeichnung der Operationen sei hier noch bemerkt, dass das Theilen bei dem ersten Rechenunterrichte allgemein durch eine Bruchzahl mit Beifügung des Wörtchens „von" angezeigt wird, z. B. $^1/_4$ von 8 = 2, oder $^1/_4$ v. 8 = 2, d. i. der 4te Theil von 8 ist 2. Das Messen pflegen viele durch das Divisionszeichen, und zwar in dem Sinne zu bezeichnen, dass z. B. 4 : 8 = 2 gelesen wird: 4 ist in 8 2mal enthalten. Diese Anschreibweise ist offenbar unrichtig, weil nach der arithmetischen Bedeutung des Divisionszeichens 4 : 8 nicht = 2, sondern = $^1/_2$ ist. Da man die Schüler nicht an eine Unrichtigkeit gewöhnen soll, das Verständnis der richtigen Schreibweise 8 : 4 = 2 aber für Anfänger noch zu schwierig wäre, so finden wir es am angemessensten, wie beim Theilen, so auch beim Enthaltensein von dem arithmetischen Divisionszeichen auf den ersten Stufen des Unterrichtes noch Umgang zu nehmen und, dem Vorgange der bedeutendsten Schulmänner folgend, das Enthaltensein durch das Wörtchen „in" zu bezeichnen, also 4 in 8 = 2 zu schreiben.

3. Ein weiteres Erfordernis zur allseitigen Anschauung einer Zahl ist, dass die erkannten Zahlenverhältnisse in einer dem Gesichtskreise des Kindes entsprechenden Weise sofort auf die mannigfaltigen Beziehungen des Lebens angewendet werden. Indem erst dadurch das Rechnen seine praktische Bedeutung erhält, trägt die Anwendung umgekehrt wieder das ihrige bei, Klarheit und Deutlichkeit in den Vorstellungen der Zahlenverhältnisse zu fördern.

4. Am Schlusse der Behandlung jeder Zahl sind auch hier mündliche und schriftliche Wiederholungsübungen vorzunehmen.

Mit Rücksicht auf die voranstehenden Bemerkungen ordnen wir daher die Übungen bei der allseitigen Behandlung der einzelnen Zahlen nach folgenden Beziehungen:

A. Zerlegung der Zahl und daraus sich ergebende Rechnungsfälle; mündlich.



B. Schriftliche Übungen.

C. Anwendungen.

D. Wiederholungen, mündlich und schriftlich.

Indem wir die allseitige Behandlung auch auf die Zahlen 2 bis 5 ausdehnen, werden die in §. 9 angeführten Übungen zur Wiederholung gelangen und durch das Hinzutreten der neuen Rechnungsoperationen zugleich eine angemessene Erweiterung erhalten.

§. 12. Die Zahl 2.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.

Hier steht 1 Punkt und hier noch 1 Punkt, zusammen sind es 2 Punkte; wie oft ist 1 Punkt in 2 Punkten enthalten? 2 besteht aus 1 und 1. 2 besteht aus 2 mal 1.

Außer den schon bekannten Sätzen

1 und 1 ist 2; 2 weniger 1 ist 1,

welche hier wiederholt werden, leitet man zugleich die durch das Zerlegbild veranschaulichten Rechnungsfälle des Vervielfachens, Messens und Theilens ab.

2 mal 1 ist 2 ($2 \times 1 = 2$).

1 ist in 2 2mal enthalten (1 in 2 = 2).

2 ist in 2 gleiche Theile getheilt, jeder Theil ist 1. Theilt man ein Ganzes in 2 gleiche Theile, so heißt jeder Theil die Hälfte ($^1/_2$) von dem Ganzen.

Die Hälfte von 2 ist 1 ($^1/_2$ von $2 = 1$).

Alle diese Sätze werden von dem Zerlegbilde wiederholt abgelesen.

Weitere Veranschaulichung an der russischen Rechenmaschine und mit Hilfe der Tillich'schen Rechenstäbchen.

B. Schriftliche Übungen.

Die Aufgaben für das schriftliche Rechnen bieten die oben bei der Zerlegung angeführten Rechnungsfälle, zu denen von den Schülern auch das entsprechende Zerlegbild nachzuzeichnen ist.

C. Anwendungen.

In den Anwendungen werden bei jeder Zahl zuerst die auf dieser Stufe ausführbaren Verwandlungen der Münzen, Maße und Gewichte vorgenommen.

Wie viel Kreuzer sind 2 halbe Kreuzer? Wie viel ist die Hälfte von 1 Kreuzer? — Wie viel Zehner sind 2 Fünfer? Wie viel Zehner sind die Hälfte von 1 Zwanziger? — Wie viel Tauben sind ein paar Tauben? 2 Pferde sind wie viel Paare?

Bei den angewandten Aufgaben wird der Lehrer im Anfange bald den Schülern die Lösung der Aufgabe gleichsam vordenken und bündig vorsprechen, bald dieselben durch angemessene Fragen auf die Schlüsse leiten, welche zur Lösung führen. In beiden Fällen erlangen die Schüler klare Einsicht in den Rechnungsgang, und lernen nach und nach die Schlüsse richtig aussprechen und selbständig bilden. Wir werden hier einigen Aufgaben auch die Lösung beifgüen.

August bekommt von dem Vater 1 Kreuzer und von der Mutter 1 Kreuzer; wie viel bekommt er von beiden?

August bekommt 1 Kr. und noch 1 Kr.; 1 Kr. und 1 Kr. sind 2 Kr.

Anton kauft für 1 Kr. einen Griffel und für 1 Kr. ein Bild; wie viel Geld gibt er aus?

Fritz ist 1 Jahr alt, Karl ist 2 Jahre alt. Welcher von beiden ist älter? Welcher jünger? Um wie viel ist Karl älter als Fritz? Um wie viel ist Fritz jünger als Karl?

Um wie viel Jahre sind 2 Jahre mehr als 1 Jahr? Um wie viel Jahre ist also Karl älter als Fritz? — Um wie viel ist 1 Jahr weniger als 2 Jahre? Um wie viel Jahre ist also Fritz jünger als Karl?

Emilie hat 1 Kreuzer, sie kauft für 1 halben Kreuzer einen Apfel; wie viel Geld behält sie noch?

1 Kr. hat 2 halbe Kr.; Emilie gibt also von 2 halben Kr. 1 halben Kr. aus; sie behält noch einen halben Kr.

Heinrich kauft 2 Bogen Papier, ein Bogen kostet 1 Kr.; wie viel muss Heinrich bezahlen?

So oft Heinrich 1 Bogen kauft, muss er 1 Kr. bezahlen; 2 Bogen sind 2mal 1 Bogen; also muss er für 2 Bogen auch 2mal 1 Kr. bezahlen; 2mal 1 Kr. sind 2 Kr.

Wie viel kosten 2 Bleistifte, wenn 1 Bleistift 1 Kr. kostet; — Wilhelm lernt jeden Tag 1 Buchstaben kennen; wie viel Buchstaben lernt er in 2 Tagen kennen?

Ein Vater hat 1 Sohn und 1 Tochter; wie viel Kinder hat er? — Der Sohn ist 1 Jahr alt, die Tochter ist doppelt (zweimal) so alt; wie alt ist die Tochter?

Anna kauft für 2 Kr. Birnen, jede Birne kostet 1 Kr.; wie viel Birnen bekommt Anna?

Wie viel Birnen bekommt Anna für 1 Kr.? Wie vielmal 1 Kr. sind 2 Kr.; Wie vielmal 1 Birne bekommt sie also für 2 Kr.? Wie viel sind 2mal 1 Birne?

Wie viel Tage reicht Anna mit diesen 2 Birnen aus, wenn sie jeden Tag 1 Birne isst? — Wie viel Kreuzersemmeln kannst du für 2 Kr. kaufen? — 1 Nadel kostet 1 halben Kr.; wie viel Nadeln bekommt man für 1 Kr.?

Marie kauft 2 Griffel für 1 Kr.; wie viel kostet 1 Griffel?

1 Griffel ist die Hälfte von 2 Griffeln; 1 Griffel kostet auch nur die Hälfte von 1 Kr.; die Hälfte von 1 Kr. ist ein halber Kr.

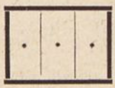
Franz kauft 2 Bilder für 2 Kr.; wie viel kostet 1 Bild?

§. 13. Die Zahl 3.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.

1. Hier stehen 3 Punkte; zählet, wie vielmal 1 Punkt in denselben enthalten ist. 3 kann zerlegt werden in 1 und 1 und 1. 3 besteht aus 3 mal 1.

Rechnungsfälle:

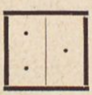


1 und 1 und 1 ist 3.
3 mal 1 ist 3.
1 ist in 3 3mal enthalten.

3 besteht aus 3 gleichen Theilen, deren jeder 1 ist. Wird ein Ganzes in 3 gleiche Theile getheilt, so heißt jeder Theil der dritte Theil oder ein Drittel ($^1/_3$) von dem Ganzen.

Ein Drittel von 3 ist 1 ($^1/_3$ von $3 = 1$).

2. Ein zweites Zerlegbild für die Zahl 3 ist das bereits in §. 9, c) angeführte Zerlegbild, welches gelesen wird:



3 besteht aus 2 und 1.

2 und 1 ist 3;	3 weniger 1 ist 2;
1 und 2 ist 3;	3 weniger 2 ist 1.

Dieses Zerlegbild stellt auch dar, wie vielmal 2 in 3 enthalten ist; es veranschaulicht den Satz:

2 ist in 3 1mal enthalten, bleibt 1;

wofür man schreibt: 2 in 3 = 1 (1).

Die hier entwickelten Sätze werden auch durch die Kugeln der Rechenmaschine oder durch Tillichs Stäbchen zur Anschauung gebracht.

Die späteren Wiederholungen dieser Sätze geschehen durch das Ablesen von der Wandtafel, welche auch für die weiter folgenden schriftlichen Übungen benützt wird.

B. Schriftliche Übungen aus dem Rechenbuche.

C. Anwendungen.

Wie viel halbe Kr. sind 1 Kr. und 1 halber Kr.? — Wie viel Fünfer sind 1 Zehner und 1 Fünfer? Wie viel Zehner sind 1 Zwanziger und 1 Zehner? — Wie viel Stück sind 1 Paar und 1 Stück? — Karl hat 2 Kr., seine Schwester Marie 1 Kr. mehr; wie viel Kr. hat Marie? — Ein Mann schenkte einem Armen 1 Kr. und einem andern 2 Kr.; wie viel Kr. verschenkte er?

Anton ist 3 Jahre alt, Josef ist 1 Jahr jünger; wie alt ist Josef? — Du bist um 1 Uhr in die Schule gekommen, um 3 Uhr wirst du wieder fortgehen;

wie viel Stunden bleibst du in der Schule? — Berta hat 3 Kr.; sie kauft für 2 Kr. Kirschen; wie viel Geld bleibt ihr noch?

Emilie und Anna bekamen zusammen 3 Äpfel; Emilie einen mehr als Anna; wie viel bekam jede?

1 Stricknadel kostet 1 Kr.; wie viel kosten 3 Stricknadeln? — Ein Knabe bekommt täglich 1 Apfel; wie viel Äpfel bekommt er in 3 Tagen? — Fritz ist 1 Jahr alt, Johann ist 3mal so alt; wie alt ist Johann?

Für 1 Kr. bekommt man 1 Semmel; wie viel Semmeln bekommt man für 3 Kr.? — Eduard kauft für 3 Kr. Papier, jeder Bogen kostet 1 Kr.; wie viel Bogen bekommt er?

Ein Liter Wein kostet 3 Zehner, ein Liter Milch nur den dritten Theil davon; wie viel kostet 1 Liter Milch? — Wenn 3 Kinder untereinander 3 Birnen theilen, wie viel Birnen erhält jedes Kind? — Gustav bekam von seinen 3 Schwestern 3 Kr.; wie viel Kr. bekam er von jeder Schwester?

D. Wiederholungen.

Bezüglich der Wiederholungsübungen gilt das in §. 9 unter c) Gesagte. Dabei kann hier auch schon mit dem Schnellrechnen der Anfang gemacht werden.

Beim Schnellrechnen treten mehrere Operationen nach der Reihe in Verbindung; der Lehrer stellt die Aufgabe kurz, der Schüler sagt rasch das Resultat, an welches der Lehrer sogleich wieder die folgende Aufgabe knüpft, die an einen andern Schüler gestellt wird. Z. B. Lehrer: Wie viel ist 3 weniger 1? Schüler A: 2. Lehrer: Davon die Hälfte? Schüler B: 1. Lehrer: Und 2? Schüler C: 3.

Wie viel ist 1 und 1, und 1? — Wie viel ist 1 und 2, weniger 1? — Wie viel ist 3 weniger 2, und 1? — Wie viel ist 2mal 1, weniger 1, 3mal genommen? — Wie viel ist die Hälfte von 2, und 2, weniger 1? — Wie viel ist 1 und 2, weniger 1, davon die Hälfte?

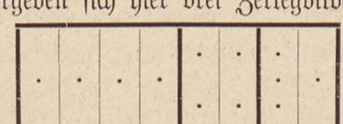
Zur Wiederholung der Anwendungen können die schon vorgekommenen oder ähnliche angewandte Aufgaben benützt werden.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im Rechenbuche.

§. 14. Die Zahl 4.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.

Für die Zahl 4 ergeben sich hier drei Zerlegbilder:

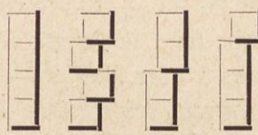


Aus denselben werden nach der Reihe die nachstehend bezeichneten Sätze gelesen:

$1 + 1 + 1 + 1 = 4$		
$4 \times 1 = 4$	1 in $4 = 4$	$\frac{1}{4}$ v. $4 = 1$
$2 + 2 = 4$	$4 - 2 = 2$	
$2 \times 2 = 4$	2 in $4 = 2$	$\frac{1}{2}$ v. $4 = 2$
$3 + 1 = 4$	$4 - 1 = 3$	
$1 + 3 = 4$	$4 - 3 = 1$	
$1 \times 3 + 1 = 4$	3 in $4 = 1$ (1).	

Die Behandlung ist im wesentlichen dieselbe wie bei der Zerlegung der Zahlen 2 und 3.

Veranschaulichung mittelst der Tillich'schen Rechenstäbchen:



B. Schriftlich.

Als schriftliche Aufgaben dienen die Nachbildung der Zerlegbilder und die dabei angeführten Rechnungsfälle.

C. Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind die Hälfte von einem Vierer? Wie viel Kreuzer ist der 4te Theil von einem Vierer? — Wie viel halbe Kreuzer sind 2 Kreuzer? Wie viel Kreuzer sind 4 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner? Wie viel Zwanziger sind 4 Zehner? Wie viel Fünfer sind der 4te Theil von 2 Zwanzigern?

Dieses Zimmer hat 3 Fenster auf die Gasse und 1 Fenster auf den Hof; wie viel Fenster sind es zusammen? — In einen Topf, welcher 1 Kilogramm wiegt, gibt man 3 Kilogramm Butter; wie viel Kilogramm wiegt dann der Topf sammt der Butter? — In einem Wagen sitzen 2 Herren und 2 Frauen; wie viele Personen zusammen?

Auf der Violine sind 4 Saiten; wie viele sind es noch, wenn eine reißt? — Wie viel Füße hat der Hund mehr als die Gans? — Minchen kauft für 3 Kreuzer Birnen und zahlt 1 Vierkreuzerstück; wie viel muss sie zurückbekommen? — Karl bekam von seinen Eltern 4 Kr.; vom Vater erhielt er mehr als von der Mutter; wie viel gab ihm der Vater, wie viel die Mutter?

Die Tante kauft 2 Paar Handschuhe; wie viel Handschuhe sind es? — Ein Bleistift kostet 1 Vierer; wie viel Vierer kosten 4 Bleistifte? — Eine Semmel kostet 2 Kr.; wie viel kosten 2 Semmeln? — Eine Kuh gibt täglich 4 Liter Milch; wie viel Zehner ist die Milch wert, wenn das Liter 1 Zehner kostet? — August ist 1 Jahr alt, Emma 4 Jahre; wie vielmal so alt als August ist Emma?

Zu einem Hemdchen braucht die Mutter 2 Meter Leinwand; wie viel Hemdchen kann sie aus 4 Meter Leinwand machen? — Ein Griffel kostet 1 Kreuzer; wie viel Griffel bekommt man für 4 Kreuzer?

Peter bekam von der Großmutter 4 Äpfel, Paul nur halb so viel; wie viel Äpfel bekam Paul? — 4 Bogen Papier kosten 4 Kr.; wie kostet 1 Bogen? — Für 4 Vierer erhält man 2 Meter Band; wie viel für 2 Vierer? — Ludwig holt beim Kaufmanne für 4 Kr. 2 Dekagramm gebrannten Kaffee; wie viel kostet 1 Dekagramm?

D. Wiederholung.

Die mündliche Wiederholung findet in ähnlicher Weise wie bei der Zahl 3 statt. Noch besser kann der dabei zu beobachtende Vorgang aus der weiter unten bei der Zahl 10 beigefügten Wiederholung ersehen werden.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im Rechenbuche.

Hier kann den Schülern auch das Wegzählen einer Zahl von einer gleich großen Zahl erklärt werden. Da sind 4 Würfel; wenn ich von denselben 1 Würfel wegnehme, wie viele bleiben noch übrig? Wie viel Würfel bleiben übrig, wenn ich von 4 Würfeln 2 Würfel wegnehme? wie viel, wenn ich 3 Würfel wegnehme? Wie viel bleibt übrig, wenn ich von 4 Würfel alle 4 Würfel wegnehme? 4 weniger 4 ist nichts. Dass nichts übrigbleibt, bezeichnet man durch 0 (Null); also $4 - 4 = 0$.

§. 15. Die Zahl 5.

Da das bisher befolgte unterrichtliche Verfahren sich auch bei der Behandlung der folgenden Zahlen im wesentlichen gleich bleibt, so werden wir weiterhin bei den einzelnen Zahlen bloß die angewandten Aufgaben anführen und nur die Zahl 10 wieder ausführlicher behandeln.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Vierer und 1 Kr.? — Wie viel halbe Kreuzer sind 2 Kr. und $\frac{1}{2}$ Kr.? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner und 1 Fünfer? — Um wie viel sind 5 Fünfer mehr als 1 Zwanziger? — Wie viel Zehner sind 1 Zwanziger und 3 Zehner?

Ein Landmann hat 3 Ochsen, er kauft noch 1 Paar Ochsen; wie viel Ochsen hat er dann? — Anna hat 2 Kilogramm Flachs gesponnen, Agnes 3 Kilogramm mehr; wie viel Kilogramm hat Agnes gesponnen?

Walter hat 5 Kr., er kauft ein Bild für 2 Kr.; wie Geld bleibt ihm noch? — Fritz hat 1 Fünfer, Leopold 3 Kr.; um wie viel hat Leopold weniger als Fritz? — In dieser Schulbank waren gestern 5 Knaben, heute sind nur 3 da; wie viele fehlen? — In beiden Händen habe ich 5 Bohnen, und zwar in der rechten 1 weniger als in der linken; wie viele habe ich in jeder Hand?

Wenn ich jedem von 5 Schülern einen Griffel geben will, wie viel Griffel brauche ich dazu? — Wie viel Fünfer kosten 5 Schreibhefte, wenn 1 Schreibheft 1 Fünfer kostet?

Für 1 Kr. erhält man 1 Bogen Papier; wie viel für 5 Kreuzer? Die Mutter braucht jede Woche 1 Kilogramm Zucker; wie viel Wochen wird sie mit 5 Kilogramm ausreichen?

5 Kilogramm Salz kosten 5 Zwanziger; wie viel Zwanziger kostet 1 Kilogramm? — 5 Stricknadeln kosten 1 Fünfer; wie viel kostet 1 Stricknadel? — Ein Vater vertheilt unter seine 4 Kinder 5 Birnen; das älteste bekommt 2 Birnen; wie viel bekommt jedes der übrigen Kinder?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 16. Die Zahl 6.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 1 Kr.? — 1 Vierer und 2 Kr.? — 6 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 3 Zehner? — Wie viel Zehner sind 3 Zwanziger? — Wie viel Zehner sind der dritte Theil von 6 Zwanzigern?

Ein Landmann hat 5 Kühe, er kauft noch eine; wie viel hat er dann? — Dein Onkel hat zwei Reisen gemacht; die eine dauerte 4 Tage, die andere 2 Tage; wie viel Tage dauerte die erste länger als die zweite? wie viel Tage dauerten beide zusammen? — Felix hat 6 Kr.; er kauft eine Schiefertafel für 5 Kr.; wie viel Geld bleibt ihm noch? — Von 6 Fensterscheiben hat der Hagel 2 zerschlagen; wie viele sind ganz geblieben?

Vor einen schwer beladenen Wagen sind 3 Paar Pferde gespannt; wie viel Pferde sind es? — Eine Häkelnadel kostet 3 Kr.; wie viel kosten 2 Häkelnadeln? — Adolf will 2 Schreibhefte machen, er braucht zu jedem 3 Bogen Papier; wie viel Bogen muss er haben? — 1 Briefbogen kostet 1 Kr.; wie viel kosten 6 Briefbogen?

In dieser Bank sitzen 6 Schüler; wie viel Paare sind es? — Rosa ist 3 Jahre alt, Mina 6 Jahre; wie vielmal so alt als Rosa ist Mina? — 1 Meter Band kostet 3 Kr.; wie viel Meter erhält man für 6 Kr.?

1 Kilogramm Rindfleisch kostet 6 Zehner; wie viel kostet ein halbes Kilogramm? — Moriz hat 6 Griffel, Fritz nur den dritten Theil davon; wie viel Griffel hat Fritz? wie viel hat er weniger als Moriz? — Ein Landmann hat 6 Kühe und halb so viele Pferde; wie viel Pferde hat er? — Karl hat 6 Bilder, davon gibt er die Hälfte der Schwester und den sechsten Theil dem Bruder; wie viel Bilder gibt Karl der Schwester? wie viele dem Bruder? wie viele behält er für sich?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

Aufgaben, welche die Verbindung des Vervielfachens und Theilens mit dem Zu- und Wegzählen enthalten, werden ebenso behandelt, wie die Aufgaben über das verbundene Zu- und Wegzählen.

§. 17. Die Zahl 7.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 2 Kr.? — 1 Vierer und 3 Kr.? — 7 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner und 3 Fünfer? — Um wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger und 3 Fünfer mehr als 3 Zehner? — Um wie viel sind 2 Tage weniger als 1 Woche? — Von 1 Woche sind 4 Tage vergangen; wie viele kommen noch?

Die Mutter kauft einmal 3 Kilogramm Butter, ein anderesmal 4 Kilogr.; wie viel zusammen? — Ein Vater hat 5 Söhne und 2 Töchter; wie viel Kinder hat er? — Marie holte Eier aus dem Hühnerstalle; in einem Neste fand sie 2, in einem andern 1 und in einem dritten 4; wie viel im ganzen? — Von 7 Bäumchen sind 2 erfroren; wie viele sind übrig geblieben? — Eine Bäuerin trug 7 Hühner zu Markte und verkaufte 6; wie viel Hühner blieben ihr noch? — Hans suchte Erdbeeren und hatte bereits 5 gefunden; wie viel fehlten ihm noch, wenn er 4 für die Mutter und 3 für sich haben wollte? — Mit welchen Geldstücken kann man 7 Kr. bezahlen?

Rosa hat 7 Kr., sie kauft 3 Bilder, wovon jedes 2 Kr. kostet; wie viel Geld bleibt ihr noch übrig? — Die Mutter braucht täglich 1 Liter Milch; wie viel in einer Woche? — Mina kaufte 2 Strähnchen Zwirn, wovon jedes 3 Kr. kostet, und für 1 Kr. Nähnadeln; wie viel musste sie zahlen?

Für 1 Kr. bekommt man 1 Knopf; wie viel Knöpfe bekommt man für 7 Kr.? — Wenn 7 Kinder untereinander 7 Nüsse vertheilen, wie viel Nüsse erhält jedes Kind? — 7 Birnen werden unter 6 Kinder vertheilt; wenn das älteste Kind 2 Birnen bekommt, wie viel bekommt jedes der übrigen? — Wenn du von 7 Kr. die Hälfte ausgibst, wie viel hast du noch?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 18. Die Zahl 8.

Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 8 Kr. bezahlen? — Wie viel Kreuzer sind 8 halbe Kreuzer? — Wie viel Zehner sind 8 Fünfer? — Wie viel Zehner sind 4 Zwanziger? — Wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger und 2 Zehner? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 1 Tag?

Franz hat eine Schwester, welcher 5 Jahre alt ist; er selbst ist um 3 Jahre älter; wie alt ist Franz? — In einem Garten sind 6 Birnbäume und 2 Äpfelbäume; wie viel Obstbäume sind es zusammen? — Emil wirft mit zwei Würfeln 4mal hinter einander 8 Augen, aber jedesmal andere Zahlen; welche Zahlen bei jedem einzelnen Wurfe? — Jemand hat 8 Zehner zu bezahlen, er hat nur 7 Zehner; wie viel fehlt ihm noch? — Wie viel Ecken hat ein Würfel mehr als Seiten (Flächen)? — August hatte 8 Äpfel, er aß 3 davon; wie viele behielt er noch? — Elise hat 8 Bilder, sie verschenkt 4 Bilder; wie viel bleiben ihr noch? — Eine Zweikreuzersemmel wiegt 8 Dekagramm, eine Einkreuzersemmel 3 Dekagr.; um wie viel ist die erste Semmel schwerer als die zweite? — Anna hat 5 Meter Band, dazu kauft sie noch 3 Meter und verbraucht dann 4 Meter; wie viel Meter Band hat sie noch?

Wie viel Räder haben 2 Wägen? — 4 Paar Schuhe sind wie viel einzelne Schuhe? — 1 Apfel kostet 1 Kr.; wie viel kosten 8 Äpfel? — Für 1 Kr. bekommt man 2 Griffel; wie viel für 4 Kr.? — 1 Meter Tuch kostet 2 fl.; wie viel kosten 2, 3, 4 Meter? — Peter kauft 2 Bilder, wovon jedes 3 Kr. kostet, und es bleiben ihm noch 2 Kr.; wie viel Kr. hatte Peter?

Wie viel Paar sind 8 Tauben? — Jemand hat 8 Pferde; wie viel Wägen kann er damit bespannen, wenn er an jeden 2 Pferde spannt? — 1 Semmel kostet 2 Kr.; wie viel Semmeln bekommt man für 8 Kr.? — Wie oft kann man 2 Meter Band von 8 Metern abschneiden?

Moriz kauft 8 Bogen Papier für 8 Kr.; wie viel kostet 1 Bogen? — Aus diesen 8 Bogen will Moriz 4 Schreibhefte machen; wie viel Bogen wird er zu jedem Hefte nehmen? — Reinhold hat in 4 Tagen 8 Buchstaben gelernt; wie viel Buchstaben lernte er täglich? — Wilhelm hat 8 Nüsse, er will daraus 2 gleiche Häufchen machen; wie viel Nüsse wird er auf 1 Häufchen legen?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 19. Die Zahl 9.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 1 Vierer? 2 Vierer und 1 Kr.? 9 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 4 Zehner und 1 Fünfer? — Wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger, 2 Zehner und 1 Fünfer? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 2 Tage?

In der ersten Bank sitzen 5 Schüler, in der zweiten 4; wie viel in beiden Bänken? — Ein Landmann hat 2 Kühe im Stalle und 7 auf der Weide; wie viel Kühe hat er zusammen? — Der Stundenzeiger steht auf 4, wo wird er nach 5 Stunden stehen? — Marie fängt um 6 Uhr nachmittags zu stricken an und strickt 3 Stunden lang; um wie viel Uhr hört sie auf?

Wie viel Stunden sind von 1 Uhr bis 9 Uhr? — An einem Aste hängen 9 Äpfel, davon schüttelte der Wind 3 herab, wie viele blieben oben? — Ein Herr traf, als er auf der Kegelbahn die Kugel hinausschob, nur 2 Kegel; wie viele blieben stehen? — Von 9 aufgerichteten Kegeln werden 5 (3, 7, 1, 6) umgeworfen; wie viele blieben stehen? — Von 9 Kegeln ist 1 einziger (sind 3, 7, 2 5) stehen geblieben; wie viele wurden umgeworfen? — Die Mutter kauft Butter: der Topf sammt der Butter wiegt 9 Kilogramm; der Topf wiegt 2 Kilogramm; wie viel wiegt die Butter?

1 Meter kostet 3 Zehner; wie viel kosten 3 Meter? — In einer Hauswirtschaft hat man 9 Hennen, jede legt täglich 1 Ei; wie viel Eier legen täglich

alle Hennen? — Eine Bäuerin hat 3 Kühe, jede gibt täglich 3 Liter Milch; wie viel Milch geben alle zusammen? Von den 9 Liter Milch behält die Frau 5 für sich, die übrige Milch verkauft sie, das Liter zu 2 Fünfer; wie viel Fünfer nimmt sie dafür ein?

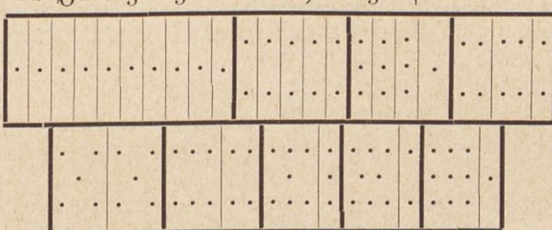
1 Schreibheft kostet 3 Kr.; wie viel Schreibhefte bekommt man für 9 Kr.? — Wie viel Bogen Papier bekommst du für 9 Kr., wenn 1 Bogen 1 Kr. kostet?

3 Kinder theilen untereinander 9 Birnen so, dass jedes gleich viel bekommt; wie viel erhält jedes Kind? — Berta hat 9 Kr., sie gibt davon den 9ten Theil der Schwester; wie viel bekommt diese? wie viel behält noch Berta? — 3 Liter Wein kosten 9 Zehner; wie viel kostet 1 Liter?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 20. Die Zahl 10.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.



$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$
$10 \times 1 = 10$ | 1 in 10 = 10 | $\frac{1}{10}$ v. 10 = 1

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
$5 \times 2 = 10$ | 2 in 10 = 5 | $\frac{1}{5}$ v. 10 = 2

$3 + 3 + 3 + 1 = 10$
$3 \times 3 + 1 = 10$ | 3 in 10 = 3 (1)

$4 + 4 + 2 = 10$
$2 \times 4 + 2 = 10$ | 4 in 10 = 2 (2)

$5 + 5 = 10$ | $10 - 5 = 5$
$2 \times 5 = 10$ | 5 in 10 = 2 | $\frac{1}{2}$ v. 10 = 5

$6 + 4 = 10$ | $10 - 4 = 6$
$4 + 6 = 10$ | $10 - 6 = 4$
$1 \times 6 + 4 = 10$ | 6 in 10 = 1 (4)

$7 + 3 = 10$ | $10 - 3 = 7$
$3 + 7 = 10$ | $10 - 7 = 3$
$1 \times 7 + 3 = 10$ | 7 in 10 = 1 (3)

$8 + 2 = 10$ | $10 - 2 = 8$
$2 + 8 = 10$ | $10 - 8 = 2$
$1 \times 8 + 2 = 10$ | 8 in 10 = 1 (2)

$9 + 1 = 10$ | $10 - 1 = 9$
$1 + 9 = 10$ | $10 - 9 = 1$
$1 \times 9 + 1 = 10$ | 9 in 10 = 1 (1).

Von besonderer Wichtigkeit und darum bis zur größten Sicherheit zu üben sind die Zerlegungen:

$$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5$$

B. Schriftliche Übungen.

Die Schüler bilden das Zahlbild nebst dem Ziffernausdruck, dann die obigen Zerlegbilder nach und führen die sich daraus ergebenden Operationen schriftlich aus.

C. Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 2 Fünfer? 2 Vierer und 2 Kr.? 10 halbe Kr.? Um wie viel ist 1 Zehner mehr als 1 Fünfer und 3 Kr.? Wie viel Kr. ist die Hälfte, der 5te Theil von 1 Zehner?

Um wie viel ist 1 Meter länger als 7 Decimeter? Wie viel Decimeter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Meter? Wie viel Centimeter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Decimeter?

Um wie viel sind 6 Deciliter weniger als 1 Liter? Wie viel Deciliter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Liter?

Wie viel Gramm ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Dekagramm?

Wie viel Stücke sind 5 Paar? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 3 Tage?

Wie viel Uhr ist es 1 Stunde nach 9 Uhr? — Wie viel Zimmer sind in einem Hause, das unten 4, und oben 6 Zimmer hat? — Ein Gärtner pflanzte gestern 7, heute 3 Bäumchen; wie viel zusammen? — Karl legt Bauklötzchen auf den Tisch; in die erste Reihe 1, in die zweite Reihe 2, in die dritte 3, in die vierte 4; wie viel sind es zusammen? — Ein Kind ist 7 Jahre alt; wie alt wird es nach 3 Jahren sein? wie alt war es vor 3 Jahren? — Für ein Schreibheft zahlt Karl 1 Zehner und bekommt 4 Kr. zurück; wie viel kostet das Schreibheft. — Von 10 Kilogramm Zucker sind 8 Kilogramm verbraucht worden; wie viel blieb noch übrig? — Du hast 1 Fünfer; wie viel fehlt dir noch zu 1 Zehner? — Von 10 Gläsern wurde eines zerbrochen; wie viele blieben ganz?

1 Meter Band kostet 5 Kr.; wie viel kosten 2 Meter? — Eine Stricknadel kostet 2 Kr.; wie viel kosten 5 Stricknadeln? — Ein Vogel hat 2 Flügel; wie viel Flügel haben 2, 3, 4, 5 Vögel?

Für 1 Kr. bekommt man 2 Nüsse; wie viel für 5 Kr.? — 1 Meter Tuch kostet 5 fl.; wie viel Meter kann man für 10 fl. kaufen? — Wie viel Semmeln bekommt man für 10 Kr., wenn eine Semmel 2 Kr. kostet? — Ein Fäßchen enthält 10 Liter Bier; wie oft läßt sich ein Krug daraus füllen, der 2 Liter hält?

Eine Familie braucht in 5 Wochen 10 Kilogramm Zucker; wie viel braucht sie in 1 Woche? — 2 Pomeranzen kosten 10 Kr.; wie viel kostet 1 Pomeranze?

— 1 Kilogramm Öl kostet 10 Zehner; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Kilogramm? — Heinrich hat 10 Kirschen, davon ißt er die Hälfte auf; wie viel bleiben ihm noch? — Zwei eiserne Kugeln sind gleich schwer und wiegen zusammen 10 Kilogramm; wie viel Kilogramm wiegt jede?

D. Wiederholungen.

Damit das bisher Geübte zur möglichst großen Fertigkeit gebracht werde, sind darüber recht vielseitige Wiederholungen, an reinen und angewandten Zahlen, mündlich und schriftlich vorzunehmen.

Der Lehrer stelle die bisher behandelten Zahlen an der Schultafel dar, indem er einen Punkt, darunter zwei Punkte, und in jeder folgenden Reihe einen Punkt mehr macht.

Wie viel Punkte sind in der ersten zweiten, ... zehnten Reihe? — Zählet nach der Ordnung: ein Punkt, zwei Punkte, ... zehn Punkte; dann eins, zwei, ... zehn. Nun zählet rückwärts: zehn, neun, ... zwei eins. — Welche Zahl folgt auf 1? auf 6, 4, 8, 3, 7, 2, 9, 5? — Welche Zahl steht vor 2? vor 5, 7, 3, 6, 9, 4, 8, 10? — Zwischen welchen Zahlen liegt 2, 6, 3, 8, 5, 9, 4, 7?

10,	7,	5,	9,	2,	8,	3,	6,	4	ist	um	1	mehr	als	welche	Zahl?
	5,	3,	7,	10,	4,	8,	6,	9	„	„	2	„	„	„	„
		6,	8,	4,	9,	10,	5,	7	„	„	3	„	„	„	„
			5,	10,	8,	9,	7,	6	„	„	4	„	„	„	„
				8,	6,	9,	7,	10	„	„	5	„	„	„	„
					9,	8,	10,	7	„	„	6	„	„	„	„
						8,	9,	10	„	„	7	„	„	„	„
							10,	9	„	„	8	„	„	„	„
								10	„	„	9	„	„	„	„

1,	3,	6,	9,	5,	7,	4,	2,	8	ist	um	1	weniger	als	welche	Zahl?
	8,	4,	5,	1,	3,	7,	2,	6	„	„	2	„	„	„	„
		3,	7,	4,	2,	6,	5,	1	„	„	3	„	„	„	„
			5,	2,	1,	4,	3,	6	„	„	4	„	„	„	„
				4,	5,	2,	1,	3	„	„	5	„	„	„	„
					1,	3,	2,	4	„	„	6	„	„	„	„
						3,	1,	2	„	„	7	„	„	„	„
							2,	1	„	„	8	„	„	„	„
								1	„	„	9	„	„	„	„

Dieselben Übungen an der Wandtafel, an der Rechenmaschine und an Tillichs Rechenkasten.

Wie viel ist 3 und 1? — Wieviel ist 2 und 3? 4 und 4? 7 und 2? 1 und 8? 4 und 6? 5 und 3? u. s. w.

In welche zwei Theile kann man zerlegen: 3, 5, 7, 9? — In welche gleiche Theile kann man zerlegen: 2, 4, 6, 8, 10?

Wie viel ist 2 und 3, und 1, und 2, und 2? — Wie viel ist 1 und 2, und 2, und 1, und 3? — Wie viel ist 2 und 2, und 2, und 4?

Karl kommt um 8 Uhr in die Schule und bleibt da 2 Stunden; um wie viel Uhr geht er aus der Schule? — Man hat Gewichte von 1, 2, 5 Kilogramm; mit welchen Gewichten wird man 3, 6, 7, 8 Kilogramm abwägen?

Wie viel ist 5 weniger 2? — Wie viel ist 6 weniger 3? 4 weniger 2? 9 weniger 4? 10 weniger 7? 8 weniger 5? u. s. w.

Um wie viel ist 10 mehr als 3, 6, 8, 1, 7, 9? — Um wie viel ist 3 weniger als 5, 9, 4, 10, 8, 6?

Wie viel ist 10 weniger 2, weniger 5? — Wie viel ist 8 weniger 1, weniger 3, weniger 2? — Wie viel ist 7 weniger 3, und 5, weniger 6? — Wie viel ist 3 und 6, weniger 7, und 8, weniger 4?

Karl ist 9 Jahre alt, er ist 3 Jahre älter als Franz; wie alt ist Franz? — Wie viel Stunden sind von 2 Uhr bis 5, 8, 7, 10 Uhr? — Marie hat 1 Zehner, Emma 1 Fünfer; wie viel Kreuzer hat Emma weniger als Marie? — Von 9 Kegeln werden 2, 5, 3, 6 umgeworfen; wie viele bleiben stehen? — Eduard kauft für 3 Kr. Papier, er zahlt 1 Zehner; wie viel Kreuzer erhält er zurück? Die Mutter kauft für sich ein Trinkglas, das 7 Fünfer kostet, und für die kleine Anna eines, das 4 Fünfer weniger kostet; wie viel muss sie für beide Trinkgläser bezahlen? — Unter 3 Kinder werden 9 Birnen vertheilt; das erste bekommt 2 Birnen, das zweite 1 mehr; wie viel das dritte?

Wie viel ist 2mal 4? 3mal 3? 5mal 2? 7mal 1? 3mal 2? 1mal 9? 2mal 2? 2mal 5?

Wie viel ist 2mal 2, und 2? — Wie viel ist 2mal 5, weniger 4? — Wie viel ist 3mal 3, weniger 7, und 8? — Wie viel ist 4mal 2, und 1, weniger 6, und 5, weniger 3?

1 Ei kostet 2 Kr.; wie viel kosten 2, 3, 4, 5 Eier? — 1 Meter Tuch kostet 3 Gulden; wie viel kosten 2, 3 Meter? — 1 Liter Milch kostet 1 Zehner; wie viel kosten 10 Liter? — 2 Gramm Seide kosten 1 Fünfer; wie viel kosten 2 Dekagramm? — In einem Zimmer sind 4 Fenster, jedes hat 2 Flügel; wie viel Flügel haben alle Fenster? — Fritz ist 4mal so alt, als seine Schwester; wie alt ist Fritz, wenn die Schwester 2 Jahre alt ist? — Johann kauft 3 Bogen weißes und 2 Bogen farbiges Papier; 1 Bogen weißes Papier kostet 1 Kr., 1 Bogen farbiges Papier kostet doppelt so viel; wie viel muss Johann für das Papier bezahlen?

Wie oft ist 5 in 10 enthalten? — Wie oft ist enthalten 2 in 4, 8, 6, 2, 10? 3 in 6, 9? 1 in 3, 5, 9, 7?

1 Paar Strümpfe kosten 4 Zehner; wie viel Paar bekommt man für 8 Zehner? — Äpfel kosten 1 Kr.; wie viel Äpfel bekommt man für 2, 3, 4, 5 Kr.; — Wie viel Nadeln bekommst du für 3 Kr., wenn 3 Nadeln 1 Kr. kosten? — Adolf hat 10 Fünfer, er will sie gegen Zehner umwechseln; wie viel Zehner wird er dafür erhalten? — Aus zwei Bogen Papier macht man 1 Schreibheft; wie viele Schreibhefte macht man aus 4, 6, 8 Bogen?

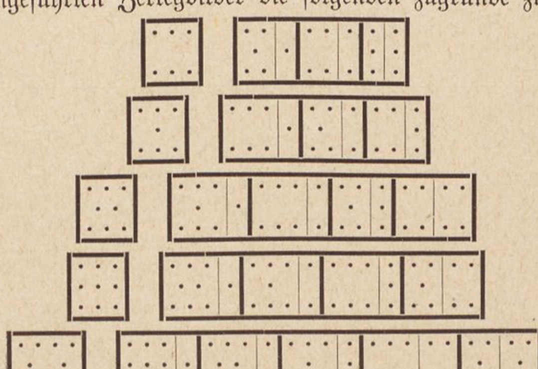
Wie viel ist der 5te Theil von 10? Wie viel ist die Hälfte von 4, 8, 6, 2, 10? — Wie viel ist der 3te Theil von 6, 3, 9? Wie viet ist der 4te Theil von 8, 4?

Wie viel ist die Hälfte von 10, und 4? — Wie viel ist das Drittel von 9, weniger 2? — Wie viel ist der 5te Theil von 10, und 7, weniger 4, doppelt genommen? — Wie viel ist 3mal 3, weniger 5, und 4, davon der vierte Theil?

3 Meter Tuch kosten 9 fl.; wie viel kostet 1 Meter? — 5 Dekagramm kosten 10 Kr.; wie viel kostet 1 Dekagramm? — 2 Liter Wein kosten 8 Zehner; wie hoch kommt 1 Liter? — 1 Kilogramm Öl kostet 8 Zehner; wie viel kostet $\frac{1}{4}$ Kilogramm? — Unter 5 Arme sollen 10 Kr. zu gleichen Theilen vertheilt werden; wie viel erhält einer? — Berta hatte 9 Blumen; davon gab sie den 3ten Theil der Schwester, und 2 dem Bruder; wie viel behielt sie für sich? — Von 10 Äpfeln wurden aufgegessen der 5te Theil, von dem Reste noch die Hälfte und 1 Apfel; wie viel Äpfel blieben noch übrig?

Zusatz.

Beschränkt man sich, wie bei den Zahlen von 1 bis 5 (§§. 6—9), auch bei den weiteren Zahlen 6 bis 10 anfänglich auch das Zuzählen und das Wegzählen, so sind für diese Zahlen zur Veranschaulichung der Rechnungsfälle statt der in §. 11 angeführten Zerlegbilder die folgenden zugrunde zu legen:



Die Rechenübungen im Vervielfachen, Messen und Theilen der ersten zehn Zahlen werden dann erst am Schlusse in nachstehender Reihenfolge vorgenommen:

$1 + 1 = 2$ | 1 in $2 = 2$

$2 \times 1 = 2$ | $\frac{1}{2}$ v. $2 = 2$

$2 + 2 = 4$ | 2 in $4 = 2$

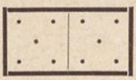
$2 \times 2 = 4$ | $\frac{1}{2}$ v. $4 = 2$

$3 + 3 = 6$ | 3 in $6 = 2$

$2 \times 3 = 6$ | $\frac{1}{2}$ v. $6 = 3$

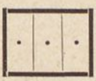
$4 + 4 = 8$ | 4 in $8 = 2$

$2 \times 4 = 8$ | $\frac{1}{2}$ v. $8 = 4$



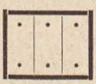
$5 + 5 = 10$ | 5 in $10 = 2$

$2 \times 5 = 10$ | $\frac{1}{2}$ v. $10 = 5$



$1 + 1 + 1 = 3$ | 1 in $3 = 3$

$3 \times 1 = 3$ | $\frac{1}{3}$ v. $3 = 1$

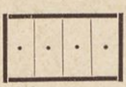


$2 + 2 + 2 = 6$ | 2 in $6 = 3$

$3 \times 2 = 6$ | $\frac{1}{3}$ v. $6 = 2$

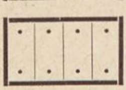
$3 + 3 + 3 = 9$ | 3 in $9 = 3$

$3 \times 3 = 9$ | $\frac{1}{3}$ v. $9 = 3$



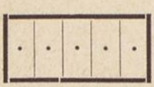
$1 + 1 + 1 + 1 = 4$ | 1 in $4 = 4$

$4 \times 1 = 4$ | $\frac{1}{4}$ v. $4 = 1$



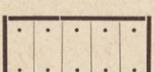
$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ | 2 in $8 = 4$

$4 \times 2 = 8$ | $\frac{1}{4}$ v. $8 = 2$



$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ | 1 in $5 = 5$

$5 \times 1 = 5$ | $\frac{1}{5}$ v. $5 = 1$



$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ | 2 in $10 = 5$

$5 \times 2 = 10$ | $\frac{1}{5}$ v. $10 = 2$

Zweiter Abschnitt.

Zahlenraum von zehn bis zwanzig.

---

§. 21 Allgemeine Bemerkungen.

Dass nach dem Zahlenraume von 1 bis 10 nicht sogleich der zweite natürliche Zahlenkreis von 1 bis 100 vorgeführt, sondern den Zahlen von 11 bis 20 ein besonderer Abschnitt gewidmet werde, erscheint durch gewichtige pädagogische Rücksichten, welche bereits in der Einleitung näher hervorgehoben wurden, geboten.

Der Lehrgang und die Anordnung der Übungen sind hier im allgemeinen dieselben, wie im ersten Zahlenkreise. Auch hier schicken wir die Bildung der Zahlen voraus; dann folgt die allseitige Behandlung der einzelnen aufeinander folgenden Zahlen von 11 bis 20. Die Rechnungsoperationen, welche auch in diesem Zahlenraume neben einander fortschreiten, werden durch Zerlegungen gewonnen; nur werden diese hier noch mehr eingeeingeschränkt werden müssen, als es bei den Grundzahlen geschah. Zur richtigen Erfassung der Zahlen wird es hinreichen, wenn man die aus ihrer Vergleichung mit den Zahlen von 1 bis 10 sich ergebenden Beziehungen allseitig betrachten läſst. Man wird daher jede Zahl in Bestandtheile, deren jeder 2 ist, dann in solche, deren jeder 3, 4, ... 10 ist, zerlegen, und an diese Zerlegungen die Operationen des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens anknüpfen. Aus wie vielmal 1 eine Zahl besteht, ist von selbst einleuchtend, und es bedarf hiezu keiner besonderen Zerlegung.

Auch die Veranschaulichungsmittel bleiben hier dieselben, wie bei den ersten zehn Zahlen. In Bezug auf den Gebrauch der russischen Rechenmaschine sei bemerkt, dass man zur Versinnlichung der Zahlen von 11 bis 20 auf den ersten Stab sogleich 10 Kugeln, auf den zweiten aber erst nach und nach so viele Kugeln bringt, als die zu behandelnde Zahl noch erfordert, während die übrigen Stäbe leer gelassen werden. Beim Gebrauche des Tillich'schen Rechenkastens stellt man ein Zehnerstäbchen auf und fügt daneben nach und nach 1, 2, 3, ... 9, 10 Würfel übereinander.

Bei allen Übungen hat der Lehrer unablässig dahin zu wirken, dass die Schüler befähiget werden, die einzelnen Rechnungsoperationen durch entsprechende Zerlegung der Zahlen sogleich selbst abzuleiten, und dass sie die durch Anschauung gewonnenen Resultate möglichst auch dem Gedächtnisse einprägen. Gelingt dieses nicht bei allen Kindern, so hat der Lehrer bezüglich jener Rechnungsfälle, welche auf den folgenden Stufen noch einmal wiederkehren, noch immer Gelegenheit, allfällige Lücken auszufüllen. Unbedingt muss aber gefordert werden, dass im ersten Schuljahre alle Schüler bei der allseitigen Behandlung der Zahl 11 im Zu- und Wegzählen von 1, das sich dort abschließt, bei der Zahl 12 im Zu- und Wegzählen von 2, ... bei der Behandlung der Zahl 20 im Zu- und Wegzählen von 10 die vollste Sicherheit und Geläufigkeit erlangen.

In Beziehung auf die Zerlegbilder und deren Lesen gilt das bei dem Zahlenraume bis zehn hierüber Gesagte. Zur Darstellung derselben sind, da hier jede Zahl neun Zerlegbilder gibt, mehrere Wandtafeln erforderlich.

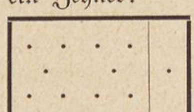
I. Bildung und Auffassung der Zahlen von eilf bis zwanzig.

§. 22. Anschauliche Bildung der einzelnen Zahlen.

Hier müssen den Schülern zunächst die Begriffe Zehner und Einer beigebracht werden.

Wie heißt das Geldstück, das 10 Kreuzer gilt? 10 Kreuzer sind 1 Zehner. — Wie viel Finger hast du an einer Hand? Wie viel Finger hast du an beiden Händen? 10 Finger sind 1 Zehner von Fingern. — 10 Würfel sind 1 Zehner von Würfeln. — Ich mache an der Schultafel 5 Punkte nebeneinander, und darunter wieder 5 Punkte. Wie viel Punkte sind es zusammen? 10 Punkte sind 1 Zehner von Punkten. — Jedes einzelne Ding heißt ein Einer; zehn Einer sind ein Zehner. Wie viel Einer hat ein Zehner?

a) **Die Zahl eilf.**



Mündlich. Hier sehet ihr 10 Punkte oder 1 Zehner von Punkten; mache ich noch einen Punkt dazu, so habe ich mehr als 10 Punkte, ich habe eilf Punkte; 10 Punkte und 1 Punkt sind eilf Punkte. — Hier sind 10 Kugeln (auf den obersten Stab der Rechenmaschine deutend), auf dem zweiten Stabe ist 1 Kugel; zusammen sind es eilf Kugeln. Wie viel sind 10 Kugeln und noch 1 Kugel? — Hier sind 10 Würfel (ein Zehnerstab wird aufgestellt); ich lege daneben 1 Würfel; wie viel Würfel sind es zusammen? — Wie viel ist 10 und 1?

10 und 1 ist eilf.

1 Zehner und 1 Einer sind eilf Einer.

Schriftlich. Zehn ist zehnmal eins. 1 Zehner ist zehnmal so viel als 1 Einer. Wir schreiben darum auch für 1 Zehner die Ziffer 1; zum Zeichen jedoch, dass diese 1 zehnmal so viel bedeutet als 1 Einer, rücken wir sie um eine Stelle weiter nach links, so daß sie an die zweite Stelle zu stehen kommt; um dann die leere Stelle rechts auszufüllen, setzen wir an dieselbe eine 0; also

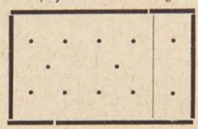
zehn = 1 Zehner = 10.

Eilf besteht aus 1 Zehner und 1 Einer; 1 Zehner wird an die zweite Stelle (links), 1 Einer an die erste Stelle (rechts) geschrieben; also

eilf = 1 Zehner und 1 Einer = 11.

Die Schüler zeichnen nun auf ihren Täfelchen das obige Zahlbild von der Schultafel oder aus dem Rechenbuche nach und schreiben dazu 10 + 1 = 11.

b) **Die Zahl zwölf.**



Mündlich. Zehn Punkte und noch zwei Punkte sind zwölf Punkte. — Auf dem ersten Stabe der Rechenmaschine sind zehn Kugeln, auf dem zweiten Stabe zwei Kugeln; wie viel Kugeln sind es zusammen? — Hier ist ein Stäbchen von 10 Würfeln (ein Zehnerstab); ich füge daneben noch 2 Würfel an; wie viel Würfel sind dann?

10 und 2 ist zwölf.

1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer.

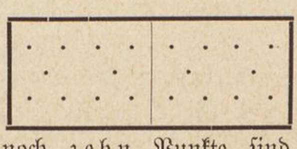
Schriftlich. Zwölf besteht aus 1 Zehner und 2 Einern; 1 Zehner wird links (an die 2. Stelle), 2 Einer werden rechts (an die 1. Stelle) geschrieben; also

zwölf = 1 Zehner und 2 Einer = 12.

Das obige Zahlbild wird nachgezeichnet und 10 + 2 = 12 dazugeschrieben.

Ebenso wird die Bildung der folgenden Zahlen und ihre Bezeichnung mit Ziffern anschaulich dargestellt.

c) **Die Zahl zwanzig.**



Mündlich. Zehn Punkte und noch zehn Punkte sind zwanzig Punkte; das sind 2 Zehner von Punkten. — 10 Kreuzer machen 1 Zehner. Hier ist 1 Zehner und daneben sind 9 Kr.; wie viel Kr. sind es zusammen? Ich lege zu den 19 Kr. noch 1 Kr.; 19 Kr. und 1 Kr. sind zwanzig Kreuzer. Welche Geldstücke sind da? 1 Zehner und 10 Kr. Für 10 Kr. kann ich einen Zehner hinlegen, dann habe ich 2 Zehner; 2 Zehner sind also 20 Kr. — 10 Kugeln und 10 Kugeln sind 20 Kugeln. — 10 Würfel und 10 Würfel (dargestellt durch zwei Zehnerstäbchen) sind 20 Würfel. — Wie viel Finger hat 1 Kind an beiden Händen? Wie viel Finger haben 2 Kinder an beiden Händen?

10 und 10 ist zwanzig.

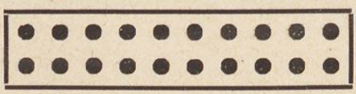
1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer oder 2 Zehner.

Schriftlich. Sowie man 1 Zehner durch 10 bezeichnet, so schreibt man auch für 2 Zehner 20.

Zwanzig = 2 Zehner 0 Einer = 20.

---

§. 23. Übersichtliche Zusammenstellung der Zahlen bis zwanzig.



Die vorliegende Darstellung lasse der Lehrer an der Schultafel vor den Augen der Schüler entstehen. Er mache erst zehn Punkte nebeneinander und lasse zählen: eins, zwei, ... zehn.

Zehn Einer sind ein Zehner.

Unter dieser Reihe macht er noch einen Punkt, dann sind es 11 Punkte; er läßt die Kinder sprechen: 10 und 1 ist 11; 1 Zehner und 1 Einer sind 11 Einer. Dann setzt der Lehrer in der zweiten Reihe einen zweiten, dritten, ... zehnten Punkt dazu und läßt dabei sprechen:

10 und 2 ist 12; 1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer;

10 und 3 ist 13; 1 Zehner und 3 Einer sind 13 Einer;

u. s. f.

10 und 10 ist 20; 1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer oder 2 Zehner.

Diese Sätze werden auch an der russischen Rechenmaschine, sowie mit Hilfe der Tillich'schen Stäbchen veranschaulicht.

Ebenso wird mit den zehntheiligen Münzen, Maßen und Gewichten gezählt.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 4 Kr.? 1 Zehner und 2 Kr.? 1 Zehner und 3 Kr. . . . . . 1 Zehner und 10 Kr.?

Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 1 Decimeter? 1 Meter und 2 Decimeter? . . . . 1 Meter und 10 Decimeter?

Durch diese übersichtliche Wiederholung wird den Schülern klar gemacht, dass die Zahlen von 10 aufwärts ebenso gebildet werden, wie von 1 bis 10, dass dabei der Zehner bleibt, und immer nur neue Einer dazukommen, bis diese wieder einen Zehner ausmachen.

Übungen.

Vorwärtszählen von 1 bis 20.

Rückwärtszählen von 20 bis 1.

Welche Zahl folgt auf 8? auf 13, 6, 17, 11, 19?

Welche Zahl steht vor 16? vor 7, 14, 20, 18, 9?

Zwischen welchen Zahlen liegt 15, 4, 17, 12, 5, 10, 19?

Welche Zahlen liegen zwischen 12 und 20? zwischen 7 und 13? zwischen 5 und 11? zwischen 9 und 17?

Zum Schlusse Übungen über das Lesen und Schreiben der Zahlen, wobei wiederholt betont wird, dass man die Zehner an die zweite Stelle (links), die Einer an die erste Stelle (rechts) schreibt. Schreibet alle Zahlen von 10 bis 20 wagrecht neben einander, dann senkrecht unter einander; ebenso die Zahlen von 20 abwärts bis 10. Schreibet 15, 12, 17, 19, 11, 16, 14, 20.

---

§. 24. Münzen, Maße und Gewichte.

An jede Erweiterung des Zahlenkreises schließt sich auch eine entsprechende Erweiterung der Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte an. Der Zahlenraum von 10 bis 20 bietet in dieser Beziehung nur wenig Neues.

a) Rücksichtlich der Münzen, welche die Schüler bereits kennen gelernt haben, wird nur bemerkt: 1 Zwanziger hat 20 Kreuzer, 1 Gulden hat 20 Fünfer.

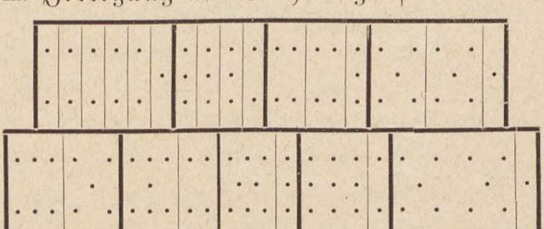
b) Unter den Zählmaßen tritt das Dutzend auf; 12 Stück nennt man 1 Dutzend. Das ganze Dutzend wird in 2 halbe Dutzend getheilt.

c) Die Zeitmaße werden dahin vervollständiget, dass man angibt, das Jahr werde in 12 Monate eingetheilt. Wie heißen diese? Wie viel Monate hat 1 halbes Jahr, wie viel 1 Vierteljahr?

II. Allseitige Behandlung der Zahlen von zehn bis zwanzig.

§. 25. Die Zahl 11.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.



$11 \times 1 = 11$	1 in $11 = 11$	$\frac{1}{11}$ v. $11 = 1$
$5 \times 2 + 1 = 11$	2 in $11 = 5$ (1)	
$3 \times 3 + 2 = 11$	3 in $11 = 3$ (2)	
$2 \times 4 + 3 = 11$	4 in $11 = 2$ (3)	
$2 \times 5 + 1 = 11$	5 in $11 = 2$ (1)	

$6 + 5 = 11$ | $11 - 5 = 6$
$5 + 6 = 11$ | $11 - 6 = 5$
$1 \times 6 + 5 = 11$ | 6 in $11 = 1$ (5)

$7 + 4 = 11$ | $11 - 4 = 7$
$4 + 7 = 11$ | $11 - 7 = 4$
$1 \times 7 + 4 = 11$ | 7 in $11 = 1$ (4)

$8 + 3 = 11$ | $11 - 3 = 8$
$3 + 8 = 11$ | $11 - 8 = 3$
$1 \times 8 + 3 = 11$ | 8 in $11 = 1$ (3)

$9 + 2 = 11$ | $11 - 2 = 9$
$2 + 9 = 11$ | $11 - 9 = 2$
$1 \times 9 + 2 = 11$ | 9 in $11 = 1$ (2)

$10 + 1 = 11$ | $11 - 1 = 10$
$1 + 10 = 11$ | $11 - 10 = 1$
$1 \times 10 + 1 = 11$ | 10 in $11 = 1$ (1)

Das didaktische Verfahren entspricht demjenigen, das bei der Zerlegung der Grundzahlen befolgt wurde; nur über die Benützung des Rechenapparates, die hier in anderer Form auftritt, müssen wir einige Andeutungen beifügen.

Ist z. B. die Zerlegung von 11 in 7 und 4 zu veranschaulichen, so läſst der Lehrer, nachdem die Zahl 11 dargestellt wird, auf dem obersten Stabe 7 Kugeln auf der linken Seite stehen, schiebt die übrigen 3 Kugeln sowie die 1 Kugel des zweiten Stabes auf die entgegengesetzte Seite, und fragt: Wie viel Kugeln sind auf der linken Seite? 7. Und wie viele auf der andern Seite? 3 und 1, oder 4. 11 läſst sich also zerlegen in 7 und 4.

Wie viel ist 7 und 4? (Auf dem ersten Stabe werden links 7 Kugeln stehen gelassen, die andern 3, sowie die eine Kugel des zweiten Stabes weggeschoben.) Indem der Lehrer die 3 Kugeln des oberen Stabes zu den 7 Kugeln schiebt, spricht er: 7 und 3 ist 10. Nun haben wir erst 3 zugezählt; 4 ist aber 3 und 1; wie viel müssen wir noch zuzählen? 10 und 1 (indem er auch die eine Kugel des untern Stabes zu den übrigen hinüberrückt) ist 11; 8 und 3 ist also 11.

Wie viel ist 11 weniger 4? — Der Lehrer schiebt zuerst die eine Kugel des zweiten Stabes auf die rechte Seite, und spricht: 11 weniger 1 ist 10. Jetzt haben wir erst 1 weggezählt; 4 ist aber 1 und 3; wie viel haben wir noch wegzuzählen? 10 weniger 3 (indem er noch 3 Kugeln von dem Zehner des ersten Stabes wegschiebt) ist 7; 11 weniger 4 ist also 7.

Es ist unerläſslich nothwendig, daſs die Schüler abwechselnd jede Übung an der Maschine nachmachen; die eigene Thätigkeit erweckt Liebe und Lust am Gegenstande.

Es sei hier für alle folgenden Übungen bemerkt, daſs die geltenden Kugeln immer links stehen, und daſs wir beim Wegzählen die Kugeln nach rechts, beim Zuzählen nach links schieben.

Die Art und Weise, wie hier Tillichs Rechenkasten zu benützen ist, kann aus dem eben angeführten Vorgange bei der russischen Rechenmaschine leicht abgeleitet werden.

B. Schriftliche Übungen.

Zur schriftlichen Übung dienen die oben bei der Zerlegung angeführten Rechnungsfälle als Aufgaben, denen von den Schülern auch die entsprechenden Zerlegbilder beizufügen sind.

C. Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 11 Kr. bezahlen? — Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 1 Zehner? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 1 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 1 Deciliter? Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 1 Gramm? — Dein Vater war 1 Woche und 4 Tage auf der Reise; wie viel Tage macht dieses?

Ein Wort hat 8 Buchstaben, ein anderes 3 Buchstaben; wie viel Buchstaben haben beide zusammen? — Marie ist 5 Jahre alt, ihre ältere Schwester Emma 11 Jahre; um wie viel ist Emma älter als Marie? — 1 Kilogramm Kaffee kostet 11 Zehner, 1 Kilogramm Zucker 4 Zehner; wie viel kostet 1 Kilogramm Zucker weniger als 1 Kilogramm Kaffee? — Ein Landmann hat 4 Kühe, sein Nachbar hat 3 Kühe mehr; wie viel Kühe haben beide zusammen? — Fritz arbeitet vormittags 5 Stunden, nachmittags 4 Stunden; Konrad arbeitet täglich 11 Stunden; wie viel Stunden täglich arbeitet Konrad mehr als Fritz? — Karoline ist heute um 6 Uhr aufgestanden, 2 Stunden später gieng sie in die Schule und blieb da bis 11 Uhr; wie lange ist Karoline in der Schule gewesen? — Anna ist 6 Jahre und 6 Monate alt, Emilie ist 5 Monate älter; wie alt ist Emilie? — August hat 11 Bohnen, weiß und roth; von den weißen sind 5 mehr als von den rothen; wie viel hat er weiße, wie viel rothe Bohnen?

D. Wiederholungen.

Die mündliche Wiederholung wird in ähnlicher Weise wie bei der Zahl 10 vorgenommen.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im Rechenbuche.

Im Zahlenumfange von 1 bis 11 gelangt das Zu- und Wegzählen von 1 zum vollständigen Abschlusse. Es ist daher bei den mündlichen und schriftlichen Wiederholungsaufgaben ein besonderes Gewicht darauf zu legen, dass hier die bezüglichen Rechnungsfälle bis zur größten Geläufigkeit durchgeübt und bleibend dem Gedächtnisse aller Kinder eingeprägt werden.

Aufgaben über das Zuzählen, wobei der Übergang in einen andern Zehner eintritt, sind hier von großer Wichtigkeit und sollen darum bis zur vollsten Sicherheit geübt werden. Die Übungen dieser Art können sich an die

Zerlegbilder anschließen und beruhen auf der unmittelbaren äußeren Anschauung. Es ist jedoch wichtig, dass die Anschauung nach und nach immer mehr eine innere werde, dass die Zahlen bloß gedacht werden. Die Schüler sind im Zerlegen der Grundzahlen vielfältig geübt worden; die dadurch erworbene Fertigkeit soll hier verwertet werden, indem die zuzuzählende Zahl stets so zerlegt wird, dass man zuerst den Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zuzählt z. B.

$$7 + 4 =$$

Wie viel muss ich zu 7 zuzählen, um 10 zu erhalten, um den Zehner voll zu machen? Noch 3. Wovon nehme ich die 3? Von 4. Aber 4 ist 3 + 1. Wie viel ist dann von 4 noch da? Noch 1. Wie viel ist 10 und 1? Um also 4 zu 7 zu zählen, zählen wir zuerst 3, und dann noch 1 dazu.

Was die Form der schriftlichen Ausrechnung anbelangt, so lasse man anfänglich die vollständige Lösung aufschreiben, nämlich

$$\begin{array}{r}7 + 4 = \\ \hline 7 + 3 = 10\\ 10 + 1 = 11\\ \hline 7 + 4 = 11.\end{array}$$

Später, wenn schon größere Fertigkeit vorherrscht, mögen die Kinder nur sogleich das Resultat aufschreiben:

$$7 + 4 = 11.$$

Dasselbe gilt von den Übungen im Wegzählen, wobei ein Übergang von einem Zehner in den andern stattfindet. Die Schüler werden angeleitet, immer zuerst so viel wegzunehmen, dass der reine Zehner übrig bleibt, und von diesem dann die noch übrigen Einer wegzuzählen. Z. B.

$$11 - 4 =$$

Wie viel muss man von 11 wegnehmen, um auf 10 herunter zu kommen? 4 ist aber 1 + 3. Wie viel haben wir noch wegzuzählen? 10 weniger 3 ist 7. Anstatt also 4 von 11 auf einmal wegzuzählen, zählen wir zuerst 1, und dann noch 3 weg.

Die Form für die schriftliche Veranschaulichung ist anfänglich

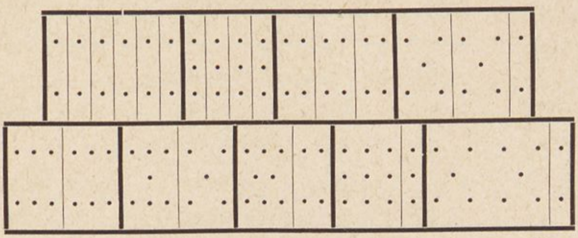
$$\begin{array}{r}11 - 4 = \\ \hline 11 - 1 = 10\\ 10 - 3 = 7\\ \hline 11 - 4 = 7;\end{array}$$

später wird bloß das Resultat angeschrieben:

$$11 - 4 = 7.$$

§. 26. Die Zahl 12.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.



$12 \times 1 = 12$	1 in $12 = 12$	$\frac{1}{12}$ v. $12 = 1$
$6 \times 2 = 12$	2 in $12 = 6$	$\frac{1}{6}$ v. $12 = 2$
$4 \times 3 = 12$	3 in $12 = 4$	$\frac{1}{4}$ v. $12 = 3$
$3 \times 4 = 12$	4 in $12 = 3$	$\frac{1}{3}$ v. $12 = 4$
$2 \times 5 + 2 = 12$	5 in $12 = 2\ (2)$	

$6 + 6 = 12$ | $12 - 6 = 6$
$2 \times 6 = 12$ | 6 in $12 = 2$ | $\frac{1}{2}$ v. $12 = 6$

$7 + 5 = 12$ | $12 - 5 = 7$
$5 + 7 = 12$ | $12 - 7 = 5$
$1 \times 7 + 5 = 12$ | 7 in $12 = 1\ (5)$

$8 + 4 = 12$ | $12 - 4 = 8$
$4 + 8 = 12$ | $12 - 8 = 4$
$1 \times 8 + 4 = 12$ | 8 in $12 = 1\ (4)$

$9 + 3 = 12$ | $12 - 3 = 9$
$3 + 9 = 12$ | $12 - 9 = 3$
$1 \times 9 + 3 = 12$ | 9 in $12 = 1\ (3)$

$10 + 2 = 12$ | $12 - 2 = 10$
$2 + 10 = 12$ | $12 - 10 = 2$
$1 \times 10 + 2 = 12$ | 10 in $12 = 1\ (2)$

Das unterrichtliche Verfahren wie bei den früheren Zahlen.

B. Schriftliche Übungen.

Die bei der Zerlegung mündlich behandelten Rechnungsfälle unter Beifügung der Zerlegbilder.

C. Anwendung.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 2 Kreuzer? 2 Fünfer und 2 Kreuzer? 12 halbe Kreuzer? — Wie viel Gulden und Zehner sind 12 Zehner? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 2 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 12 Gramm? — Eine Woche hat 6 Arbeitstage; wie viel Arbeitstage haben 2 Wochen? — Wie viel Monate sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ Jahr?

In einem Garten stehen auf einem Beete 8, auf einem andern 4 Rosenstöcke; wie viel auf beiden Beeten? — In einem Stalle stehen 3 Kühe, in dem andern 9; wie viele in beiden Ställen? — Eine Köchin erhält 12 Zwanziger und kauft Verschiedenes für 9 Zwanziger; wie viel muss sie zurückbringen? — Ein Kind ist 9 Monate alt; wie viel Monate fehlen ihm auf 1 Jahr? — Wie viel Zahlen stehen auf dem Zifferblatte einer Uhr zwischen 8 und 12? — Von 1 Dutzend werden 10 Stück verkauft; wie viel Stück bleiben noch übrig? — Für 1 Kr. erhält man 3 Birnen; wie viel für 4 Kr.? — Wie viel Füße haben 3 Pferde? — Ein paar Tauben kosten 12 Fünfer; wie viel kostet 1 Taube? — Adolf braucht jeden Monat 2 Griffel; wie lange wird er mit 12 Griffeln ausreichen? — Zu einem Hemd braucht die Mutter 3 Meter Leinwand; wie viel Hemden kann sie aus 12 Meter Leinwand machen? — Emil bekommt von der Mutter 12 Äpfel; er gibt davon den dritten Theil seiner Schwester; wie viel Äpfel behält er für sich? — Ein Vater zahlt für seinen Sohn monatlich 1 Gulden Schulgeld; wie viel beträgt dieses in $\frac{1}{4}$ Jahr? — Wenn eine Kuh täglich 6 Liter Milch gibt; wie viel gibt sie in zwei Tagen? — Eine Bäuerin hat 12 Hühner, sie verkauft davon den dritten und den vierten Theil; wie viel Hühner bleiben ihr noch?

D. Wiederholungen.

Mündlich in ähnlicher Weise wie oben bei der Zahl 10.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im Rechenbuche.

Bei der mündlichen und schriftlichen Wiederholung ist den Übungen im Zu- und Wegzählen von 2, das sich in dem Zahlenumfange von 1 bis 12 vollständig abschließt, die vorzüglichste Sorgfalt zuzuwenden.

§. 27. Die Zahl 13.

Da das Lehrverfahren sich gleich bleibt, so werden wir bei dieser und den folgenden Zahlen bloß die angewandten Aufgaben anführen, und methodische Winke nur dann beifügen, wenn besondere Übungen dazu Anlass bieten.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 3 Kr.? Um wie viel sind 13 Kr. mehr als 2 Vierer? Um wie viel ist 1 Fünfer weniger als 13 Kr.? Wie viel Zehner sind 1 fl. und 3 Zehner? 4 Zwanziger und 5 Zehner? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 6 Tage? — Wie viel Meter und Decimeter sind 13 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind ein Liter und 3 Deciliter? — Wie oft kann man 1 Dekagramm von 13 Gramm wegnehmen?

August bekam vom Vater 4 Kr., von der Mutter 3 Kr. und vom Onkel 6 Kr.; wie viel bekam er von allen? — Der Vater hat 13 Bäumchen gepflanzt, davon sind 3 verdorrt; wie viele wachsen? — Wie viele Stunden ist jemand gefahren, der um 5 Uhr morgens abgereist und um 6 Uhr abends am Ziele angekommen ist? — Von 13 Schafen verkauft ein Landmann 10; wie viel behält er noch? — In einem Garten stehen zwei Reihen Bäume; in der ersten Reihe sind 8, in der zweiten 5 Bäume; wie viel Bäume sind in der ersten Reihe mehr als in der zweiten; wie viel stehen in beiden Reihen? — Die Mutter hat 13 Meter Leinwand, sie macht 2 Hemden, und braucht zu jedem 3 Meter Leinwand; wie viel Leinwand bleibt ihr noch übrig?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 28. Die Zahl 14.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 4 Kr.? 2 Fünfer und 1 Vierer? 3 Vierer und 2 Kr.? 14 halbe Kr.? Wie viel Zehner sind 14 Fünfer? Wie viel Gulden und Zehner sind 14 Zehner? — Wie viel Tage sind 2 Wochen? Um wie viel sind 14 Monate mehr als 1 Jahr? — Wie viel Meter sind 1 Meter und 4 Decimeter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 14 Gramm? — Wie viel Paar sind 14 Knöpfe? — Wie viel Stück ist 1 Dutzend und $\frac{1}{6}$ Dutzend?

Ein Zuckerhut wiegt 8 Kilogramm, ein anderer 6 Kilogramm; wie viel wiegen beide zusammen? — Wie viel Tage sind vom 2. bis 14. März? — Eine Treppe besteht aus zwei Absätzen; ein Absatz hat 9, der andere 5 Stufen; wie viel Stufen enthält die ganze Treppe? — Jemand kauft ein Kalb für 10 Gulden und verkauft es für 14 Gulden; wie viel gewinnt er? — Ein Knabe war in 2 Wochen 5 Tage krank; an wie viel Tagen war er während dieser Zeit gesund? — An einer Tafel saßen 14 Personen, 6 giengen fort; wie viele blieben zurück? — Ein Arbeiter verdient in 2 Tagen 1 Gulden; wie viel in 14 Tagen? — In diesem Schulzimmer stehen 2 Reihen Bänke, in jeder Reihe stehen 7 Bänke; wie viel Bänke sind es zusammen? — Dein Vater war 1 Woche auf der Reise und brauchte täglich 2 Gulden; wie viel Geld hat er ausgegeben? — Eduard ist 7 Jahre, sein Bruder 14 Jahre alt; wie vielmal so alt als Eduard ist sein Bruder? — 2 Meter Band kosten 14 kr.; wie viel kostet 1 Meter? — In einer Wagschale sind 9 Dekagramm, in der andern 5 Dekagramm; wie viel muss man aus der ersten in die zweite übertragen, um in beiden gleich viel Dekagramm zu haben?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 29. Die Zahl 15.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 5 Kr.? 3 Fünfer? Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 5 Zehner? 7 Zwanziger und 1 Zehner? Wie viel Gulden sind 15 Zwanziger? — Um wie viel sind 15 Tage mehr als 2 Wochen? Wie viel Monate sind 1 Jahr und 3 Monate? — Wie viel Centimer sind 1 Decimeter und 5 Centimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und $\frac{1}{2}$ Liter? — Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 5 Gramm? — Um wie viel sind 15 Stück mehr als ein Dutzend?

Von 15 Gulden gibt man 5 Gulden aus; wie viel Gulden behält man noch? — Von 15 Nüssen isst Karl den dritten Theil, 6 verschenkt er; wie viel hat er noch? — Eine Uhr, welche bloß Stunden schlägt, hat in drei aufeinanderfolgenden Stunden 15 Schläge gemacht; welche Stunden waren es? — Ein Schreibheft kostet 5 Kr.; wie viel kosten 3 Schreibhefte? — Jemand hat 3 fl. ausgegeben; wie viel sind es Zwanziger? — Wenn man für 5 Kr. 15 Birnen bekommt, wie viel bekommt man für 1 Kr.? — Du hast 1 Zehner und 1 Fünfer; wie viel Meter Band kannst du dafür kaufen, wenn 1 Meter 3 Kr. kostet? — Ein Tischler erhält 15 Gulden für mehrere Fenster; jedes Fenster kostet 5 Gulden; wie viel Fenster sind es? — Die Mutter macht aus 15 Meter Leinwand 5 Hemden; wie viel Meter braucht sie zu 1 Hemd? — Ein Landmann hat 15 Stück Schafe; er verkauft davon den dritten und den fünften Theil; wie viel bleiben ihm?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

Hier sollen die Schüler im Zu- und Wegzählen innerhalb desselben Zehners geübt werden. Aus 2 + 3 = 5 wird gefolgert: 12 + 3 = 15. Der Lehrer rechnet die Aufgabe zuerst an der Schultafel vor, etwa in folgender Weise: Wie viel ist 2 und 3? Wie viel wird 12 und 3 sein? 12 ist 1 Zehner und 2 Einer. Werden wir die 3 Einer zu dem Zehner oder zu den 2 Einern zählen? Zählet also 3 Einer zu 2 Einern. 2 Einer und 3 Einer sind 5 Einer; und jetzt noch 1 Zehner dazu, sind 15. Wie viel ist also 12 und 3? — (An der Rechenmaschine:) Nachdem die Zahl 12 dargestellt wurde, schiebt der Lehrer zu den 2 Kugeln des zweiten Stabes noch 3 Kugeln hin. Wie viel Kugeln sind nun da? Oben sind 10, unten 2 und 3, d. i. 5; wie viel also zusammen? 12 und 3 ist also 15.

Um den Schülern zu zeigen, dass z. B. die Rechnung 15 — 4 = 11 auf 5 — 4 = 1 zurückgeführt werde, verfahre der Lehrer auf folgende Art: 15 ist 1 Zehner und 5 Einer. Um davon 4 Einer wegzuzählen, kann man sie von 1 Zehner oder auch von 5 Einern wegzählen; wovon werden wir sie wegnehmen, damit der Zehner ungeändert bleibe? 5 Einer weniger 4 Einer ist 1 Einer. Wie viel haben wir jetzt noch von 1 Zehner und 5 Einern? Noch 1 Zehner und 1 Einer oder 11 Einer. Wie viel ist also 15—4? — (An der Rechenmaschine:) Der Lehrer stellt die Zahl 15 dar und schiebt auf dem zweiten Stabe, auf welchem 5 Kugeln links stehen, 4 Kugeln nach rechts. Es bleiben dann noch die 10 Kugeln des ersten Stabes unverändert und auf dem zweiten Stabe noch 1 Kugel; also 15—4=11.

§. 30. Die Zahl 16.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 6 Kr.? 3 Fünfer und 1 Kr.? 4 Vierer? 16 halbe Kreuzer? Wie viel Zehner sind 16 Fünfer? Wie viel Gulden und Zehner sind 16 Zehner? Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 3 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 4 Monate? Wie viel Wochen und Tage sind 16 Tage? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 16 Gramm? — Wie viel

Decimeter sind 1 Meter und 6 Decimeter? — Wie viel Liter und Deciliter sind 16 Deciliter? — Wie viel Stück sind 1 Dutzend und $\frac{1}{3}$ Dutzend?

Der 10. Mai fällt auf einen Sonntag; auf welchen Wochentag fällt der 16. Mai? — Jemand kaufte eine Taschenuhr für 16 Gulden, und verkaufte sie später für 10 Gulden; wie viel Gulden verlor er dabei? — In einem Schreibhefte sind 16 Seiten, 6 sind schon vollgeschrieben; wie viel Seiten sind noch leer? — Wie viel Kegel muss man jedesmal treffen, damit man in 4 Würfen 16 Kegel treffe, wenn nach jedem Wurfe die Kegel wieder aufgesetzt werden? — Wie viel Räder haben 4 Wägen? — Wenn vor jeden dieser Wägen 4 Pferde gespannt werden, wie viel Pferde sind es zusammen? — Auf 1 halbes Kilogramm gehen 8 Kerzen; wie viel auf 1 Kilogramm? — Wie viel Schreibhefte kann man aus 16 Bogen machen, wenn man zu jedem Schreibhefte 2 Bogen braucht? — Wie viel Paar sind 16 Handschuhe? — Zu 2 Paar Strümpfen braucht man 16 Dekagramm Garn; wie viel braucht man zu 1 Paar? — 3 Kilogramm Mehl geben 4 Kilogramm Brot; wie viel Kilogr. Brot erhält man aus 12 Kilogr. Mehl? — Von 16 Kirschen isst Franz die Hälfte auf, den vierten Theil schenkt er dem Bruder und den achten Theil der Schwester; wie viele Kirschen bleiben ihm noch?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 31. Die Zahl 17.

Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 17 Kr. bezahlen? Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 7 Zehner? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 5 Monate? 2 Wochen und 3 Tage sind wie viel Tage? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 7 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 7 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 17 Gramm?

Deine Mutter kauft ein Glas für 9 Kr., und ein anderes für 8 Kr.; wie viel kosten beide Gläser? — Konrad bekam von seinem Vater 17 Bogen Papier, davon hat er nur noch 7 Bogen; wie viel hat er schon verbraucht? — Jemand kauft ein Kalb für 15 fl.; wie theuer muss er es verkaufen, wenn er dabei 2 fl. verdienen will? — Von 17 angepflanzten Linden vertrockneten 8; wie viele erhielten sich? — Karl, Eduard und Fritz spielten miteinander um Haselnüsse; Karl hat 17 gewonnen, Eduard 9 verloren; wie viel hat Fritz verloren? — Anna besucht die Schule 17 Monate, Berta 1 Jahr, $\frac{1}{4}$ Jahr und $\frac{1}{6}$ Jahr; welche besucht länger die Schule?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 32. Die Zahl 18.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 8 Kr.? 3 Fünfer und 3 Kr.? 4 Vierer und 2 Kr.; 18 halbe Kreuzer? Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 8 Zehner? 9 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 1 halbes Jahr?

Wie viel Arbeitstage haben 3 Wochen? — Um wie viel Decimeter ist 1 Meter weniger als 18 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind ein Liter und 8 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 18 Gramm?

Eine Bäuerin nahm in einem Monate für Milch 10 fl. und für Butter 8 fl. ein; wie viel zusammen? — In einem Dorfe, das 18 Häuser zählte, brannten 5 Häuser ab; wie viele blieben noch? — Drei Knaben haben zusammen 18 Nüsse; der erste hat 5, der zweite 6 Nüsse; wie viel hat der dritte? — Edmund hat 1 Zehner und 1 Fünfer, er braucht aber für 1 Buch 18 Kr.; wie viel fehlt ihm noch? — Die Mutter kauft 3 Pomeranzen, das Stück zu 6 Kr.; wie viel muss sie dafür bezahlen? — 1 Schreibheft kostet 6 Kr.; wie viel kosten 2, 3 Schreibhefte? — Wie viel kostet 1 Meter Tuch, wenn 6 Meter 18 fl. kosten? — 1 Liter Bier kostet 18 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Liter? — Auf 3 Bänken sitzen 18 Schüler gleich vertheilt; wie viele sitzen auf 1 Bank? — Ein Arbeiter verdient täglich $\frac{1}{2}$ fl.; wie viel in 3 Wochen? — Für 6 Kr. bekommt man einen schönen Bilderbogen; wie viel solche Bilderbogen kann man für 3 Fünfer und 3 Kr. kaufen?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 33. Die Zahl 19,

Anwendungen.

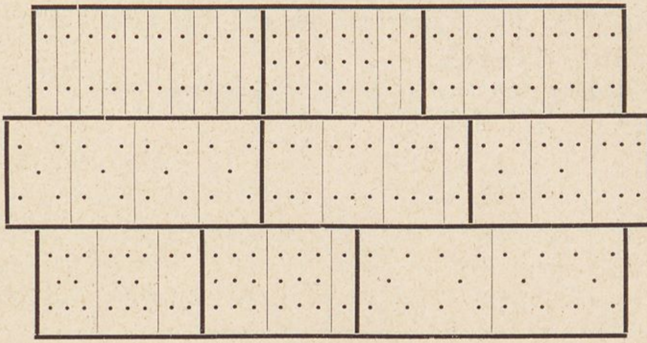
Mit welchen Geldstücken kann man 19 Kr. bezahlen? Wie viel Gulden und Zehner sind 19 Zehner? 19 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 7 Monate? — Wie viel Meter und Decimeter sind 19 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 9 Deciliter? — Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 9 Gramm?

Ein Landmann hat 4 Paar Ochsen und 11 Stück Kühe; wie viel Stück Rindvieh sind dies zusammen? — 1 Dutzend Knöpfe kostet 1 Zehner; wie viel kosten 19 Dutzend? — Wie viel Tage sind vom 8. bis 19. Mai? — Eduard hat 10 Kirschen gegessen, jetzt hat er noch 9; wie viel Kirschen hatte er früher? — Ein Knabe lernte in 9 Tagen 18 Sprüche; wie viel Sprüche hat er in einem Tage gelernt? — In einem Walde wurden 9 Eichen, 6 Buchen und 4 Fichten gefällt; wie viel Bäume sind das? — Karl kauft ein Buch um 19 Kr., eine Schiefertafel um 11 Kr. und ein Schreibheft für 8 Kr.; um wie viel ist das Buch theurer als die Schiefertafel? um wie viel ist das Schreibheft wohlfeiler als das Buch? — Man hat Gewichte von 1, 2, 5, 10 Dekagramm; mit welchen Gewichten kann man 19 Dekagramm abwägen?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

§. 34. Die Zahl 20.

A. Zerlegung und Rechnungsoperationen.



$20 \times 1 = 20$	1 in $20 = 20$	$\frac{1}{20}$ v. $20 = 1$
$10 \times 2 = 20$	2 in $20 = 10$	$\frac{1}{10}$ v. $20 = 2$
$6 \times 3 + 2 = 20$	3 in $20 = 6$ (2)	
$5 \times 4 = 20$	4 in $20 = 5$	$\frac{1}{5}$ v. $20 = 4$
$4 \times 5 = 20$	5 in $20 = 4$	$\frac{1}{4}$ v. $20 = 5$
$3 \times 6 + 2 = 20$	6 in $20 = 3$ (2)	
$2 \times 7 + 6 = 20$	7 in $20 = 2$ (6)	
$2 \times 8 + 4 = 20$	8 in $20 = 2$ (4)	
$2 \times 9 + 2 = 20$	9 in $20 = 2$ (2)	
$10 + 10 = 20$	$20 - 10 = 10$	
$2 \times 10 = 20$	10 in $20 = 2$	$\frac{1}{2}$ v. $20 = 10$

B. Schriftliche Übungen.

Die unter A mündlich behandelten Rechnungsfälle, bei denen die Schüler auch die Zerlegbilder nachzuzeichnen haben.

C. Anwendungen.

Ein Landmann hat 10 Schafe, jedes gibt 2 Kilogramm Wolle; wie viel Wolle geben alle zusammen? — Ein Fuhrmann führt 12 Kisten Zucker und 8 Kisten Kaffee; wie viel Kisten sind es zusammen? — Von 20 Meter Leinwand werden 10 Meter verkauft; wie viel Meter bleiben übrig? — Zum Frohnleichnamsfeste bestellt die Mutter für die 5 Fenster ihrer Wohnung Blumen; wie viele Blumentöpfe braucht sie, wenn sie auf jedes Fenster 4 Töpfe aufstellen will? — Karl hatte 20 Aufgaben gerechnet, 4 Aufgaben waren unrichtig gerechnet; wie viele hatte er richtig gerechnet? — Unter 10 Arme werden 20 Zehner zu gleichen Theilen vertheilt; wie viel erhält jeder? — 20 Nüsse sollen unter 2 Knaben so vertheilt werden, dass der eine 2 Nüsse mehr bekommt, als der andere; wie viel bekommt jeder? — Von 20 Tannen wurden 14 Stück gefällt; wie viele blieben stehen? — 5 Dekagramm Gewürz kosten 20 Kr.; wie viel kostet 1 Dekagramm? — Dein älterer Bruder ist 15 Jahre alt, und hat noch 5 Jahre zu studieren; wie alt wird er sein, wenn er seine Studien vollendet hat? — Fritz holte 2 Kilogramm Reis für 6 Zehner und 1 Kilogramm Kaffee für 12 Zehner; die Mutter hatte ihm 2 fl. mitgegeben; wie viel Zehner muss er zurückbringen?

D. Wiederholungen.

Zu- und Wegzählen bis zur größten Fertigkeit zu üben.

Wie viel ist

11 + 1?	17 + 1?	13 + 1?	u. s. w.
14 + 2?	18 + 2?	11 + 2?	u. s. w.
12 + 3?	14 + 3?	17 + 3?	u. s. w.
. . .	. . .	. . .	. . .
11 + 9?	10 + 9?	10 + 10?	u. s. w.

Wie viel ist

11 — 1?	20 — 1?	15 — 1?	u. s. w.
15 — 2?	11 — 2?	18 — 2?	u. s. w.
12 — 3?	19 — 3?	14 — 3?	u. s. w.
. . .	. . .	. . .	. . .
19 — 9?	16 — 9?	13 — 9?	u. s. w.

Wie viel fehlt

zu 1, 7, 15, 19, 8, 16, 11, 4, 17, 12 an 20?

zu 13, 6, 18, 10, 3, 14, 7, 11, 9, 15 an 19? u. s. w.

Wie viel ist 11 + 3 + 2 + 4? 7 + 5 + 1 + 6? 3 + 8 + 9 — 5? 17 — 6 + 8 — 9? 20 — 7 + 5 — 8 + 3? u. s. w.

Leopold ist 19 Jahre alt, seine Schwester Marie wird erst nach 10 Jahren so alt sein; wie alt ist Marie? — Ein mit Butter gefüllter Kübel wiegt 20 Kilogramm, der leere Kübel wiegt 2 Kilogramm; wie viel Butter ist in demselben? — Wenn jetzt 9 Uhr morgens ist, wie viel Uhr wird nach 3, 6, 7, 11 Stunden sein? wie viel Uhr war vor 4, 6, 12, 15 Stunden? — Ein Arbeiter fängt um 6 Uhr früh mit der Arbeit an und arbeitet außer 1 Stunde Ruhezeit 12 Stunden; um wie viel Uhr hört er zu arbeiten auf? — Wie viel Äpfel sind unter drei Kinder vertheilt, wenn das erste 4 Äpfel, und jedes folgende 2 Äpfel mehr als das vorhergehende bekommt?

Vervielfachen, Messen und Theilen bis zur Fertigkeit zu üben.

Wie viel ist 1 × 2? 2 × 2? 3 × 2? 4 × 2? . . . 9 × 2? — Wie oft ist 2 in 2, 4, 6, 8, . . . 20 enthalten?

Wie viel 2 × 1? 2 × 2? 2 × 3? 2 × 4? . . . 2 × 10? — Wie viel ist die Hälfte von 2, 4, 6, 8, . . . 20?

Wie viel ist 1 × 3? 5 × 3? 2 × 3? 6 × 3? — Wie oft ist 3 in 15, 9, 18, 3, 12, 6 enthalten?

Wie viel ist 3 × 1? 3 × 5? 3 × 2? 3 × 6? 3 × 3? Wie viel ist der dritte Theil von 6, 15, 3, 12, 18, 9?

Wie viel ist 4 × 5? — Wie vielmal 5 ist 20? — Wie oft ist 5 in 20 enthalten?

Wie viel ist 5 × 4? — 20 ist 5mal wie viel? Wie groß ist der 5te Theil von 20?

Wie viel ist 3 × 4 + 6 — 9? 2 × 9 — 7 + 6? 6 × 3 — 9 + 4? $\frac{1}{3}$ von 15 + 8 ÷ 7? $\frac{1}{5}$ von 20 + 10 — 8? u. s. w.

1 Meter Tuch kostet 2 fl.; wie viel kosten 2, 5, 7, 9, 6, 4, 3, 8 Meter? — In einem Walde sollen 18 Bäume gefällt werden; in wie viel Tagen werden 3 Holzhauer damit fertig sein, wenn jeder täglich 2 Bäume fällt? — Ein Knabe verlor von 15 Kr. den 5. Theil; wie viel hat er noch? — Wie viel Scheiben haben 3 Fenster, wenn jedes Fenster 2 Flügel, und jeder Flügel 3 Scheiben hat? — Wie lange kann man 4 Pferde mit dem Heu füttern, das für 1 Pferd 20 Tage ausreicht? — 1 Liter Bier kostet 20 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Liter? — Für 1 Kr. kauft man 2 Griffel; wie viel für 1 Zehner? — In einer Gesellschaft waren 4 Frauen und 4mal so viele Herren; wie viele Personen waren in der Gesellschaft? — 3 Personen haben zusammen 20 fl. zu zahlen; davon trifft die erste die Hälfte, die zweite der 4te Theil, und die dritte das übrige; wie viel hat jede Person zu zahlen? — Ein Landmann verkauft 4 Schafe, eines zu 4 fl.; a) wie viel bekommt er dafür? b) wie viel Schafe hätte er verkauft, wenn er 20 fl. bekommen hätte? c) wie viel hätte ein Schaf kosten müssen, wenn er für die 4 Schafe 20 fl. bekommen hätte?

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im Rechenbuche.

Zweite Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **zweiten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen im Zahlenraume bis hundert. Elemente des Bruchrechnens. Preisberechnungen.

Einleitung.

§. 35. Das Rechnen im Zahlenkreise bis hundert.

Das zweite Rechenbuch umfasst das Rechnen im Zahlenkreise von 1 bis 100 nebst den Elementen des Bruchrechnens und ist für das zweite Schuljahr bestimmt.

In den beiden Zahlenräumen von 1 bis 10 und von 10 bis 20 sind wir, nachdem die Zahlen in denselben gebildet worden sind, allmählich von Zahl zu Zahl fortgeschritten und haben durch Zerlegung derselben die Resultate der verschiedenen Rechnungsoperationen gewonnen, die dann von den Schülern eingeübt wurden. Wir werden auch hier zunächst den Zahlenkreis bis 100 erweitern; wir dürfen, nachdem die Schüler schon bei den Zahlen von 10 bis 20 auf das Erkennen des Zehnergesetzes vorbereitet wurden, hier nur die bereits gewonnene Einsicht vervollständigen, um eine klare Auffassung der neuen Zahlen und ihres Zusammenhanges zu vermitteln. Auch bezüglich des Rechnens mit diesen Zahlen könnten wir denselben Weg, wie in den früheren Zahlenkreisen einschlagen; allein er wäre zu umständlich und hätte auch weder für die richtige Auffassung noch für die Anwendung einen besonderen Wert. Dazu tritt der Umstand, dass mit der Größe der Zahlen auch die Bestandtheile zunehmen, die man durch Zerlegungen erhalten kann, und dass die Menge der daraus hervorgehenden Rechnungsresultate sich nicht mehr, wie bei den kleineren Zahlen, dem Gedächtnisse einprägen lässt. Bereits in den Zahlenkreisen bis 10 und bis 20 wurde durch die vollständige Einübung des Einsundeins für das Zu- und Wegzählen auch der höheren Zahlen eine sichere Grundlage geschaffen, die nur einer sehr unbedeutenden Erweiterung bedarf, um diese Operationen auf alle Zahlen des ersten Hunderts anwenden zu können. Die Übungen des Zu und Wegzählens werden sich also hier hauptsächlich nur als Wiederholungsübungen gestalten. Degegen traten im Rechnen mit den Zahlen bis 20 über das Vervielfachen, Messen und Theile nur einzelne Fälle auf. Diese zu vervollständigen, das Einmaleins bis zur größten Geläufigkeit einzuüben und aus der Umkehrung desselben auch die verschiedenen

Rechnungsfälle des Messens und Theilens abzuleiten, muss eine Hauptaufgabe des Rechnens im Zahlenraume bis 100 bilden. Da aber die Schüler Sicherheit und Fertigkeit in einer bestimmten Operation, z. B. im Vervielfachen von 3, nur dann erlangen können, wenn sie längere Zeit ausschließlich in dieser Operation geübt werden, so erscheint es am angemessensten, in den Rechnungsübungen dieses Zahlenraumes das Fortschreiten von Zehner zu Zehner festzuhalten und in jedem Zehner insbesondere diejenigen Vielfachen einzuüben, welche in demselben ihren vollständigen Abschluss finden, z. B. in dem Zahlenraume bis 30 das Vervielfachen von 3 und mit 3, im Zahlenraume bis 40 das Vervielfachen von 4 und mit 4 u. s. w., die Rechnungsfälle aber, welche in höhere Vielfache hinübergreifen, vor der Hand zu übergehen. So tritt z. B. im vierten Zehner die Verbindung $5 \times 8 = 40$ auf, sie wird jedoch, damit hier die Aufmerksamkeit ungetheilt auf die 4fachen der einzelnen Zahlen gerichtet bleibe, vorläufig übergangen und findet später im fünften Zehner, wo die 5fachen der Zahlen an die Reihe kommen, ihre passendere Stelle. Die Gründlichkeit fordert keineswegs, dass auf jeder Stufe mit den Zahlen alle Verbindungen geübt werden, die sich überhaupt nur vornehmen lassen; im Fortgange des Unterrichtes legt sich eines an das andere, und man gelangt bei sachgerechter Anordnung schließlich zu einem vollständigen Ganzen.

Wir nehmen also, nachdem die Schüler den Zahlenkreis bis 100 kennen gelernt haben, in jedem einzelnen Zehner der Reihe nach die einzelnen Operationen des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens vor, und legen dabei das Hauptgewicht auf die in jedem Zehner sich abschließenden Vielfachen, in ganz analoger Weise, wie wir im Zahlenraume bis 20 bei der Zahl 11 das Zu- und Wegzählen von 1, bei der Zahl 12 das Zu- und Wegzählen von 2, u. s. f. als die hervorragendste Übung behandelt haben.

Kopf- und Zifferrechnen sind auch hier, der Ausführung nach, noch nicht von einander geschieden; dem reinen Rechnen folgt überall angewandtes Rechnen.

Beim reinen Rechnen behandeln wir neben den bisher geübten Grundaufgaben auch solche, die aus diesen durch Veränderung des sprachlichen Ausdruckes abgeleitet werden. Bei den Grundaufgaben wird die Operation unmittelbar durch den Wortlaut der Aufgabe angegeben; bei den abgeleiteten Aufgaben bedarf es schon einer Überlegung, um aus dem Wortlaute der Aufgabe die Operation zu erkennen, welche in Anwendung kommen muss. Eine Grundaufgabe ist die folgende: wie viel ist 32 und 6? Die Schüler antworten darauf entweder: 32 und 6 ist 38, oder, wenn es auf Schnelligkeit ankommt, bloß: 38. Dieser Grundaufgabe entspricht z. B. die abgeleite Aufgabe: wie viel erhalte ich, wenn ich 32 um 6 vergrößere? Die Schüler antworten hier immer in einem vollständigen Satze: wenn ich 32 um 6 vergrößere, so erhalte ich 38. Der Ausdruck kann für dieselbe Aufgabe sehr verschieden sein, und gerade in diesem Wechsel der

Ausdrucksweise liegt wesentlich der Wert der abgeleiteten Aufgaben für das denkende Rechnen und für die Sprechübung. Während die Grundaufgaben Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen bezwecken, dienen die abgeleiteten Aufgaben nicht bloß zur Übung im Rechnen, sondern vorzüglich auch zur Förderung der Denk- und Sprechfertigkeit. Die letzteren sollen darum immer erst dann auftreten, nachdem schon durch das Lösen zahlreicher Grundaufgaben Fertigkeit und Sicherheit in der jedesmaligen Operation erreicht ist.

Bei dem angewandten Rechnen muss hier insbesondere auch die bisherige Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte ergänzt werden.

Das Rechenbuch für das zweite Schuljahr enthält schriftliche Übungsaufgaben mit reinen Zahlen und zahlreiche Anwendungen. Die letzteren werden größtentheils in der Schule selbst mündlich vorgenommen; will man ihre Lösung der stillen Selbstbeschäftigung oder dem häuslichen Fleiße überlassen, so werden die Schüler verhalten, die Resultate mit Ziffern aufzuschreiben.

§. 36. Der Anschauungsunterricht im Bruchrechnen.

Brüche sind schon bisher wiederholt vorgekommen. Das war auch methodisch richtig; was sich auf einer Stufe des Unterrichtes naturgemäß ergibt und folgerichtig darbietet, soll nicht unberücksichtigt bleiben. Wir mussten Einheiten theilen, und führten dafür die Bruchbezeichnungen ein, wodurch auch das Theilen vom Messen schon äußerlich unterschieden wurde; wir ließen daher die Schüler schon bisher Halbe, Drittel, Viertel, . . . kennen lernen. Doch wurde noch nicht eigentlich mit Brüchen gerechnet. Damit soll nun der Anfang gemacht werden und zwar zunächst an Brüchen, deren Entstehung sich unmittelbar veranschaulichen lässt, und die auch im praktischen Leben am häufigsten vorkommen.

Wir wählen für diesen anschaulichen Unterricht denselben Vorgang, den wir bei den ganzen Zahlen der unteren Zahlenräume befolgt haben. Dort stiegen wir in der Zahlenreihe allmählich aufwärts und brachten bei den einzelnen Zahlen sogleich alle Operationen zur Anschauung. Auch hier werden wir die auf einander folgenden Bruchzahlen einzeln, anschaulich und allseitig behandeln, indem wir mit denselben sogleich auch die entsprechenden Rechnungsfälle in Verbindung bringen. Auch hier soll den Eintheilungsgrund der Übungen nicht die Operation, sondern die allseitig behandelte Bruchzahl bilden.

Durch die allseitige und wiederholte äußere und innere Anschauung der einzelnen Bruchzahlen prägen sich Sache und Zeichen, Begriff und Ausdruck so tief und fest ein, dass sie unverlierbares Eigenthum des Schülers werden. Ferner lernt der Schüler mit den einzelnen Brüchen sogleich auch rechnen, und zwar zunächst nur bei unmittelbarer Anschauung, wodurch das richtige Verständnis gesichert wird; das Zifferrechnen ist dabei nichts anderes als ein durch Ziffern dargestelltes Kopfrechnen Diese Übungen gewähren zugleich eine zweckmäßige Vorstufe für die spätere Behandlung der Decimal- und der gemeinen Brüche.

Die Veranschaulichungsmittel zum Verständnis der Brüche sind mannigfaltig. Man versinnlicht die Brüche durch getheilte Stäbe, Papierstreifen u. dgl.; auch hat man dazu eigene Apparate, unter denen wohl derjenige den Vorzug verdient, der mit der russischen Rechenmaschine Ähnlichkeit hat und am obersten Stabe das ungetheilte Ganze, am zweiten Stabe das ganze in 2, am dritten in 3, . . . am zehnten Stabe in 10 gleiche Theile getheilt zur Anschauung bringt. Das einfachste Veranschaulichungsmittel bieten jedenfalls gleich lange gerade Linien, welche von dem Lehrer an der Schultafel gezogen und vor den Augen der Schüler in gleiche Theile getheilt, später auch von den Schülern selbst zur anschaulichen Darstellung der einzelnen Rechnungsfälle gezeichnet werden.

Die Übungen im anschaulichen Bruchrechnen bringt das Rechenbuch.

Einfache **Preisberechnungen** in dem Zahlenraume bis 100 bilden den Schluss der Rechnungsübungen des zweiten Schuljahres.

Erster Abschnitt.

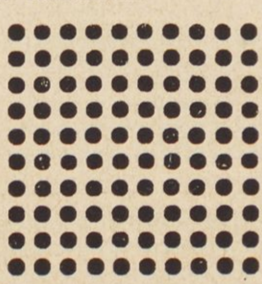
Das Rechnen im Zahlenraume von eins bis hundert.

I. Erweiterung des Zahlenkreises bis 100.

§. 37 Mündlich.

1. Wir nehmen, damit das Zehnersystem besser aufgefasst werde, zunächst bloß die Zehnerzahlen vor und entwickeln erst dann die einzelnen Zahlen in den aufeinander folgenden Zehnerräumen.

Die besten Veranschaulichungsmittel sind hier die Zehnertafel, die russische Rechenmaschine und Tillichs Rechenkasten; weiter sind auch unsere Münzen und neuen Maße und Gewichte zu verwenden.



Die voranstehende Zehnertafel läſst der Lehrer vor den Augen der Schüler entstehen. Er macht zuerst 10 Punkte nebeneinander und läſst zählen: eins, zwei, drei, . . . neun, zehn. Zehn Einer sind ein Zehner.

Der Lehrer bildet eine zweite Reihe von 10 Punkten. Wie viel Zehner sind es jetzt? Zwei Zehner sind zwanzig Einer.

Nun wird noch eine dritte Reihe von 10 Punkten dazugefügt. Wie viel Zehner sind es jetzt? Drei Zehner sind dreißig Einer.

Fügt man noch eine vierte, fünfte, . . . zehnte Reihe von Punkten hinzu, so erhält man

vier Zehner oder vierzig Einer,
fünf Zehner oder fünfzig Einer,
u. s. w.
zehn Zehner oder hundert Einer, oder ein Hundert.

Diese Reihen werden nun wiederholt gelesen. Der Lehrer sagt vor und läſst die Kinder nachsprechen (auf den letzten Punkt der ersten Reihe zeigend): 1 Zehner oder 10 Einer; (auf den letzten Punkt der zweiten Reihe zeigend): 2 Zehner oder 20 Einer u. s. w.

Hierauf zeigt der Lehrer auf die Reihe (immer auf den letzten Punkt derselben) und läſst sich von den Schülern die Zehnerzahl nennen; dann nennt er selbst die Zehnerzahl und einer der Schüler zeigt darauf hin; — beides zuerst in, dann außer der Ordnung.

Wie viel ist 10 + 10? 20 + 10? 30 + 10? u. s. w.

Wie viel ist 100 — 10? 90 — 10? 80 — 10? u. s. w.

Welche Zehnerzahl folgt auf 20, 50, 10, 80, 40?

Welche Zehnerzahl steht vor 20, 40, 70, 60, 100?

Zwischen welchen Zehnerzahlen liegt 20, 50, 30, 90, 70?

Auf ganz gleiche Weise werden die Übungen auch an der russischen Rechenmaschine und mittelst des Tillich'schen Rechenkastens durchgeführt, indem man bei der ersten auf jeden Stab 10 Kugeln bringt, bei dem zweiten die Zehnerstäbchen nebeneinander aufstellt.

Mit den Münzen, Maßen und Gewichten. Wie viel Kreuzer hat 1 Zehner? 2 Zehner sind 20 Kr.; 3 Zehner sind 30 Kr.; . . . 10 Zehner sind 100 Kr. oder 1 Gulden. — Umgekehrt: 10 Kr. sind 1 Zehner; 20 Kr. sind 2 Zehner; . . . 100 Kr. sind 10 Zehner.

Wie viel Decimeter hat 1 Meter? 2 Meter sind 20 Decimeter, 3 Meter sind 30 Decimeter u. s. w

Wie viel Gramm hat 1 Dekagramm? 2 Dekagr. sind 20 Gramm, 3 Dekagr. sind 30 Gramm u. s. w.

An den Fingern. Wie viel Finger hat 1 Kind an beiden Händen? Wie viel Finger haben 2 Kinder an beiden Händen? Wie viel Finger haben 3, 4, . . . 10 Kinder?

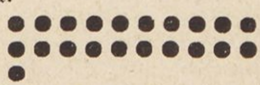
2. Haben die Schüler die Zehnerzahlen richtig aufgefaßt, so gehe der Lehrer auf die Bildung der Zahlen in den einzelnen Zehnerräumen zurück, wobei er sich gleichfalls bald der Zehnertafel, bald der Rechenmaschine, bald der Münzen als Veranschaulichungsmittel bedient.

Von den Zahlen von 10 bis 20, welche schon in dem vorhergehenden Zahlenkreise allseitig angeschaut wurden, genügt hier eine wiederholende Zusammenstellung:

10 und 1 ist 11; 1 Zehner und 1 Einer sind 11 Einer;
10 und 2 ist 12; 1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer;
10 und 3 ist 13; 1 Zehner und 3 Einer sind 13 Einer;
u. s. w.
10 und 10 ist 20; 1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer oder 2 Zehner.

Zahlen von 20 bis 30.

An der Zehnertafel.



Der Lehrer macht 2 Reihen von je 10 Punkten und sagt:

Hier stehen 10 Punkte, hier stehen auch 10 Punkte. Wie viel Zehner sind das? 2 Zehner sind 20.

Ich mache unter den beiden Reihen noch 1 Punkt; nun sind es 21 Punkte.

20 und 1 ist 21; 2 Zehner und 1 Einer sind 21 Einer.

Der Lehrer bringt in der dritten Reihe einen zweiten, dritten, . . . zehnten Punkt an, und spricht:

20 und 2 ist 22; 2 Zehner und 2 Einer sind 22 Einer;
20 und 3 ist 23; 2 Zehner und 3 Einer sind 23 Einer;
u. s. w.
20 und 10 ist 30; 2 Zehner und 10 Einer sind 30 Einer oder 3 Zehner.

Die Schüler sehen, daß von 20 aufwärts ebenso gezählt wird, wie von 10 aufwärts; die 2 Zehner bleiben und es kommen immer nur neue Einer dazu, bis diese wieder 1 Zehner ausmachen.

Übungen.

a) Der Lehrer lasse gezeigte Zahlen von den Schülern nennen, zuerst in der Reihenfolge, dann außer derselben; z. B. (auf den 4ten Punkt der 3ten Reihe zeigend): welche Zahl ist gezeigt?

b) Der Lehrer lasse genannte Zahlen von den Schülern zeigen.

c) Vorwärts- und Rückwärtszählen zwischen 1 und 30.

d) Zählen mit Überspringen einer Zahl:

1, 3, 5, 7 . . .	30, 28, 26, 24 . . .
2, 3, 6, 8 . . .	29, 27, 25, 23 . . .

e) Fragen, wie die folgenden:

Welche Zahl kommt nach 21, 25, 29, 24?

Welche Zahl steht vor 26, 28, 21, 27?

Zwischen welchen Zahlen liegt 22, 29, 25, 23?

f) Zusammenfassen der Zehner und Einer zu einer Zahl.

Wie heißt die Zahl, welche 2 Zehner und 4 Einer, — 2 Zehner und 7 Einer, — 2 Zehner und 1 Einer enthält?

g) Zerlegen in Zehner und Einer.

Wie viel Zehner und Einer hat 26, 23, 29, 21, 27, 30?

Die Veranschaulichung mittelst der Rechenmaschine und der Tillich'schen Stäbchen ist von selbst klar.

Mit Münzen. Ich lege hier links 2 Zehner und rechts daneben 1 Kr.; wie viel Kreuzer sind es zusammen? — Ich lege rechts noch 1 Kr.; jetzt sind es 2 Zehner und 2 Kr. oder 22 Kr. u. s. w. — Endlich erhalte ich 2 Zehner und 10 Kr.; wie viel Kreuzer sind es dann? Statt der 10 Kr. kann ich auch 1 Zehner hinlegen, dann habe ich 3 Zehner; 2 Zehner und 10 Kr. sind also 30 Kr. oder 3 Zehner.

Auf ähnliche Weise mit Maßen und Gewichten.

Nachdem in dem Voranstehenden die Entwicklung der Zahlen von 20 bis 30 ausführlich dargelegt wurde, brauchen wie nur beizufügen, dass auf ganz gleiche Weise auch die Zahlenräume

31, 32, 33, . . . 39, 40;
41, 42, 43, . . . 49, 50;
u. s. w.
91, 92, 93, . . . 99, 100

zu behandeln sind.

Nach jedem Zehner tritt eine Pause ein, die man zur Wiederholung der vorhergehenden Zahlen benützt, wobei insbesondere nach den Zehnern und Einern, aus denen eine Zahl besteht, und umgekehrt nach der Zahl, welche die genannten Zehner und Einer enthält, sehr häufig zu fragen ist.

§. 38. Schriftlich.

Die schriftliche Darstellung der Zahlen dieses Zahlenraumes soll erst dann vorgenommen werden, wenn die Schüler durch die früher angedeuteten Übungen von diesen Zahlen eine klare Vorstellung und in deren Zerlegung in Zehner und Einer volle Sicherheit haben. Bis dahin mögen die schriftlichen Übungen nur aus dem Kreise von 1 bis 10 genommen werden.

Der Lehrer entwerfe auf der Schultafel nachstehende Zahlentabelle:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Indem die einzelnen Felder nach und nach ausgefüllt werden, lasse der Lehrer immer die Frage beantworten, wie viel Zehner und Einer die jedesmalige Zahl enthalte, und schreibe dann die Zehner links, die Einer rechts an. Kommt er auf eine Zahl, welche nur Zehner enthält, z. B. 30, so mache er darauf aufmerksam, dass diese Zahl 3 Zehner und keine (0) Einer enthalte, dass man also in die zweite Stelle 3, in die erste Stelle 0 schreiben müsse.

Aus dieser Behandlung der Zahlen ersehen die Schüler, dass die Zehner stets links an der zweiten Stelle, die Einer rechts an der ersten Stelle stehen, und das Nichtvorhandensein der letzten durch 0 bezeichnet wird.

Bei 100 bemerkt man: 1 Zehner ist 10mal so viel als 1 Einer; 1 Hundert ist 10mal so viel als 1 Zehner. Wir schreiben für 1 Einer die Ziffer 1 in die erste, für 1 Zehner in die zweite Stelle; für 1 Hundert schreiben wir auch die Ziffer 1, setzen sie aber wieder um eine Stelle weiter nach links, also in die dritte Stelle, und füllen die erste und die zweite Stelle, weil keine Zehner und Einer vorkommen, mit Nullen aus; also

hundert = 1 Hundert = 100.

Zur Einübung folgt:

a) Vor- und Rückwärtszählen an der Zahlentafel;

b) Lesen gezeigter Zahlen an der Zahlentafel;

c) Aufsuchen genannter Zahlen an der Zahlentafel;

d) Lesen von Zahlen, die der Lehrer auf die Schultafel schreibt;

e) Anschreiben genannter Zahlen auf der Schultafel und auf den Schiefertäfelchen.

Bei den Übungen im Vor- und Rückwärtszählen muss man darauf sehen, dass dieselben, mögen sie mit einzelnen Schülern oder im Chor vorgenommen werden, nicht in ein gedankenloses Hersagen ausarten. Zu diesem Ende lasse der Lehrer öfter bei irgend einer Zahl plötzlich innehalten und sich über dieselbe nähere Rechenschaft geben. Wenn z. B. die Schüler beim Vorwärtszählen bis 36 gekommen sind, wird plötzlich abgebrochen und wird gefragt: in welchem Zehner sind wir? (im vierten); wie viel Einer fehlen noch, bis der vierte Zehner voll ist? (vier Einer); beim Rückwärtszählen dagegen: wie viel Einer bleiben im vierten Zehner noch übrig? (sechs Einer).

Schließlich werden von den Schülern die Aufgaben aus dem Rechenbuche durchgeführt.

§. 39. Münzen, Maße und Gewichte.

Die bisher vermittelte Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte wird in diesem Zahlenraume durch folgende Angaben vervollständiget:

a) Münzen. 1 Gulden hat 100 Kreuzer.

An Papiergeld haben wir Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden und Banknoten zu 10 und 100 Gulden.

b) Längenmaße.

Das Metermaß kann hier schon eingehender behandelt werden. Zur Veranschaulichung dient, wie bereits oben im §. 9, b bemerkt wurde, zunächst ein mit den betreffenden Untertheilungen versehener Meterstab, an welchem gezeigt wird, dass man das Meter in 10 Decimeter, das Deeimeter in 10 Centimeter und das Centimeter in 10 Millimeter theilt, und dass demnach ein Meter 10 Decimeter oder 100 Centimeter enthält. Der Lehrer kann dieses auch an der Schultafel anschaulich darstellen, indem er darauf ein Meter zeichnet und dieses vor den Augen der Schüler zuerst in Decimeter, dann in Centimeter, und ein Centimeter noch in Millimeter eintheilt. Es wird den Schülern auch noch ein Bandmaß aus Metallblech von 2, 5 oder 10 Meter Länge gezeigt und bemerkt, dass dieses zum Ausmessen größerer Längen benützt wird.

Ein sehr wichtiges Maßglied in der Stufenleiter der Längenmaße ist das Decimeter, nicht nur, weil sich aus ihm sehr leicht alle übrigen Längenmaße ableiten lassen, sondern insbesondere auch darum, weil dasselbe die Grundlage des Hohl- und Gewichtsmaßes bildet. Um sich die Länge desselben besser einzuprägen, soll jeder Schüler auf seinem Lineal die Zeichnung eines Decimeters haben. Er wird aus derselben unmittelbar die Eintheilung in Centimeter und Millimeter ersehen. Er soll sich aber auch mittels dieser Zeichnung aus einem starken Bindfaden ein Meter selbst anfertigen, indem er mit Hilfe eines Papierstreifens die gezeichnete Länge des Decimeters möglichst genau zehnmal auf den Bindfaden aufträgt und nach jeder Länge eines Decimeters einen Knoten einbindet.

Damit die Schüler mit den neuen Längenmaßen recht vertraut werden, messe man mit dem Meterstabe mehrere im Schulzimmer befindliche Gegenstande, z. B. die Länge und Breite der Schultafel, des Schultisches, einer Bank, einer Fensterscheibe. Auch lasse man die Schüler die Länge ihres Mittelfingers, ihres Armes, sowie ihre Körperlänge in Centimeter angeben. Später versuche man Längen nach dem Augenmaße abzuschätzen und lasse der Schätzung jedesmal die wirkliche Messung nachfolgen.

Auch kann hier vorläufig bemerkt werden, dass man eine Strecke, welche ein Fußgeher bequem in einer Viertelstunde zurücklegt, 1 Kilometer nennt; die genaue Bestimmung des Kilometers wird erst in dem späteren Zahlenraume erfolgen können.

c) Hohlmaße. 1 Hektoliter = 10 Liter. Mit dem Hektoliter misst man nicht nur Wein, Bier und Flüssigkeiten überhaupt, sondern auch Getreide und andere trockene Gegenstände. 1 Liter = 10 Deciliter, 1 Deciliter = 10 Centiliter, daher 1 Liter = 100 Centiliter.

d) Gewichte. 1 Kilogramm hat 100 Dekagramm.

e) Zählmaße. 60 Stück nennt man 1 Schock.

f) Papiermaße. 1 Buch Papier hat 100 Bogen.

g) Zeitmaße. 1 Jahr hat 12 Monate und wird auch in 52 Wochen eingetheilt. Die Monate bestehen aus Tagen, aber nicht alle Monate haben gleich viele Tage. Die Monate Jänner, März, Mai, Juli, August, October und December haben 31 Tage; die Monate April, Juni, September und November haben 30 Tage; der Monat Februar hat 28 oder 29 Tage. Bei vielen Rechnungen wird der Monat = 30 Tage angenommen.

Zur Vervollständigung der Zeitmaße wird ferner angeführt, dass 1 Tag 24 Stunden hat, und zugleich gezeigt, wie die Stunden an unseren Uhren gezählt werden. 1 Stunde wird in 60 Minuten und 1 Minute in 60 Secunden eingetheilt. Die letzteren Eintheilungen werden gleichfalls an einer Uhr anschaulich gemacht. Der Lehrer zeigt, wie der Stundenzeiger nur von einer Zahl zur nächstfolgenden rückt, während der Minutenzeiger eine ganze Umdrehung macht. Hat die Uhr auch einen Secundenzeiger, so sieht man, dass derselbe eine ganze Umdrehung macht, bis der Minutenzeiger von einem Striche zum nächstfolgenden rückt.

II. Das Rechnen im Zahlenraume von eins bis hundert.

§. 40. Wiederholung der Rechnungsübungen im Zahlenraume bis zehn.

Auf jeder Stufe des Unterrichtes soll das Neue mit dem bereits Gelernten in enge Verbindung gebracht und das letztere fleißig wiederholt werden, um bei einzelnen Schülern Vergessenes zu erneuern, Fehlendes zu ergänzen, bei sämmtlichen Schülern aber das im ersten Schuljahre Geübte zu befestigen und zur vollen Sicherheit zu bringen.

A. Reines Rechnen.

1. Mündlich.

Vorwärtszählen von 1 bis 10, **Rückwärtszählen** von 10 bis 1; beides an der Rechenmaschine, nachdem man auf die einzelnen Stäbe folgeweise 1, 2, 3, . . . 10 Kugeln gebracht hat.

Sodann werden die Zerlegungen der Grundzahlen wiederholt.

$$2 = 1 + 1 \qquad 3 = 1 + 1 + 1 \qquad 4 = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 2 + 1 \qquad = 2 + 2$$
$$= 3 + 1$$

u. s. w.

Eine Zahl, welche in zwei gleiche Theile zerlegt werden kann, heißt eine gerade Zahl, jede andere eine ungerade Zahl. — Die Schüler sollen selbst die geraden und die ungeraden Zahlen aufsuchen. 2, 4, 6, 8, 10 sind gerade, 1, 3, 5, 7, 9 ungerade Zahlen. Nenne du eine gerade Zahl, du eine ungerade, du eine ungerade, du eine gerade!

Nun folgen die Rechnungsoperationen.

a) **Zuzählen und Wegzählen.**

Wie viel ist 1 und 1? 2 und 1? 5 und 1? u. s. w.

Wie viel ist 1 und 2? 2 und 2? 8 und 2? u. s. w.

Ebenso Zuzählen von 3, 4, 5, ... 9.

Wie viel muss ich noch zu 3 zuzählen, um 4 zu erhalten? 3 und wie viel ist also 4? — 5 und wie viel ist 6? — 5 und wie viel ist 7? u. s. w.

Gedankenloses Zuzählen der Einheiten, etwa noch mit Hilfe der Finger, darf hier nicht geduldet werden.

Wie viel ist 4 — 1? 6 — 1? 3 — 1? u. s. w.

Wie viel ist 3 — 2? 7 — 2? 2 — 2? 9 — 2? u. s. w.

Ebenso Wegzählen von 3, 4, 5, ... 9.

b) **Vervielfachen und Messen.**

Da die Vielfachen von 1 unmittelbar aus der Vorstellung der Zahlen von 1 bis 10 hervorgehen, so braucht man bei denselben nicht lange zu verweilen; es genügt, die Schüler darauf aufmerksam zu machen, dass z. B. statt der Ausdrucksweise „1 und 1 und 1 und 1 ist 4“ der kürzere Ausdruck „4mal 1 ist 4“ gebraucht wird. Ebenso ist von selbst einleuchtend, dass 1mal 4 4, 1mal 7 7 u. s. w. ist.

Die Vielfachen 2×3, 3×3, 5×2 u. s. w., die ebenfalls schon im ersten Zehner auftreten, werden hier übergangen, und erst bei den späteren Zehnern im Zusammenhange vorgenommen werden.

Auch das Messen, wie oft nämlich 1 in den einzelnen Zahlen enthalten ist, folgt unmittelbar aus der Vorstellung dieser Zahlen.

Das Theilen braucht hier noch nicht berücksichtigt zu werden; die Rechnungsfälle $\frac{1}{2}$ von 6, $\frac{1}{3}$ von 9, $\frac{1}{5}$ von 10 u. s. w. bleiben den folgenden Zehnern vorbehalten.

2. Schriftlich.

Was die Schüler mündlich geübt haben, führen sie nun auch schriftlich durch. In Bezug auf die Behandlung der schriftlichen Aufgaben gilt auch hier das hierüber in der I. Abtheilung §. 9 unter 2. Gesagte.

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

B. Anwendungen.

Angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

Bei den angewandten Aufgaben muss mit Strenge darauf gesehen werden, dass die Schüler nicht bloß das Resultat angeben, sondern jedesmal während der Lösung selbst auch die Schlüsse aussprechen, auf denen die Auflösung beruht.

§. 41. Wiederholung der Rechnungsübungen im Zahlenraume bis zwanzig.

Die hier vorzunehmenden Wiederholungsübungen haben sich insbesondere auf das Zu- und Wegzählen mit dem Übergange aus dem einen Zehner in den andern, auf das Vervielfachen von 2 und mit 2, das Messen und Theilen durch 2 zu erstrecken.

A. Reines Rechnen.

Vorwärtszählen von 1 bis 20, und **Rückwärtszählen** von 20 bis 1.

Nenne alle geraden Zahlen bis 20. Schreibe sie mit Ziffern. — Nenne alle ungeraden Zahlen bis 20. Schreibe sie mit Ziffern.

Dann werden die Rechnungsoperationen mündlich und schriftlich vorgenommen.

a) **Zu- und Wegzählen.**

Wie viel ist 9 und 1? — Wie viel ist 9 und 3? 9 und 1 ist 10; 3 ist aber 1 und 2; ich muss noch 2 zuzählen; 10 und 2 ist 12.

Die zuzuzählende Zahl wird daher so zerlegt, dass man zuerst den Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zuzählt.

Wie viel ist 8 und 2? 8 und 3? 8 und 7? u. s. w.

6 und wie viel ist 13? — Wie viel muss ich zu 6 zuzählen, um 10 zu erhalten? Wie viel muss ich noch zu 10 zuzählen, um 13 zu erhalten? Ich muss also zu 6 zuerst 4, und dann noch 3, zusammen 7 zuzählen, um 13 zu erhalten; also $6 + 7 = 13$.

$8 + . = 11$; $9 + . = 14$; $7 + . = 15$ u. s. w.

Wie viel ist 12 weniger 2? Wie viel ist 12 weniger 5? 12 weniger 2 ist 10; 5 ist aber 2 und 3; ich muss also noch 3 wegzählen; 10 weniger 3 ist 7.

Man zählt also zuerst so viel weg, dass der reine Zehner übrig bleibt; dann werden die noch übrigen Einer weggezählt.

Wie viel ist 11 weniger 3? — 13 weniger 6? — 16 weniger 7? u. s. w

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

b) **Vervielfachen von 2 und mit 2.**

Das *Vervielfachen* wird den Schülern als ein kürzeres Verfahren beim Zuzählen gleichgroßer Zahlen dargestellt; statt 4 und 4 sagen wir 2mal 4, statt 2 und 2 und 2 und 2 sagen wir kürzer 4mal 2. Das Vervielfachen der Grundzahlen besteht in der Kenntnis des sogenannten *Einmaleins*. Der vollständigen Einübung desselben muss die größte Aufmerksamkeit zugewendet werden. Das Einmaleins muss den Kindern durch passende Veranschaulichungsmittel zum klaren *Verständnis* gebracht und sodann durch anhaltende Übung dem Gedächtnisse derselben fest und unverlierbar eingeprägt werden.

Die *Veranschaulichung* geschieht am besten an Punkten, die in gleicher Anzahl untereinander angebracht werden, an der Rechenmaschine und mittelst der Tillich'schen Rechenstäbe.

Das *Einprägen* der durch Anschauung abgeleiteten Vielfachen soll durch fortgesetzte Übung und Anwendung in der Schule selbst vermittelt werden. Das Können des Einmaleins erfordert *Schlagfertigkeit*; die Schüler dürfen sich zuletzt auf das Resultat gar nicht mehr besinnen, bei dem Klange „8mal 2" muss auch schon die Zahl 16 vor ihrem geistigen Auge stehen.

Die Vielfachen von 2.

Diese sind bereits im ersten Schuljahre bei der Behandlung der Zahlen von 1 bis 20 aufgetreten; vielen Schülern werden dieselben auch schon bekannt sein; gleichwohl müssen sie hier noch einmal im Zusammenhange vorgenommen und bis zur größten Fertigkeit durchgeübt werden.

Der Lehrer mache zuerst 2 Punkte nebeneinander und frage: Wie vielmal stehen hier 2 Punkte? Wie viel Punkte sind es? Wie viel sind also 1mal 2 Punkte? 1mal 2 ist 2.

Ich setze noch einmal 2 Punkte darunter. Wie vielmal stehen jetzt 2 Punkte da? Wie viel Punkte sind es? 2 Punkte und 2 Punkte sind 4 Punkte. Wie viel sind also 2mal 2 Punkte? 2mal 2 ist 4.

Ebenso wird durch weitere Zufügung von je zwei Punkten nach und nach $3 \times 2 = 6$, $4 \times 2 = 8$, . . . $10 \times 2 = 20$ abgeleitet.

Die Veranschaulichung an den Kugeln der *Rechenmaschine* könnte auf gleiche Weise wie an den Punkten der Schultafel geschehen, indem nämlich nach und nach 2 Kugeln eines jeden Stabes nach links vorgeschoben werden. Um jedoch zugleich das Anwachsen der Vielfachen zu Zehnern und Einern anschaulich zu machen, erscheint es *zweckmäßiger*, dieselben durch das Aneinanderschieben der wiederholt zuzuzählenden Kugeln sogleich an den obersten Stäben zu versinnlichen. Der Lehrer schiebt 2 Kugeln des ersten Stabes nach links und spricht: 1mal 2 ist 2; dann schiebt er 2 weitere Kugeln, und zwar mit *einem* Griffe, nach links und spricht: 2mal 2 ist 4 u. s. w. bis 5mal 2 ist 10. Hierauf schiebt er ebenso 2 Kugeln des zweiten Stabes nach links und spricht: 6mal 2 ist 12 u. s. w. bis 10mal 2 ist 20.

Ebenso werden bei Tillichs Rechenapparat nach und nach zuerst fünf Zweierstäbchen, und daneben wieder fünf übereinandergelegt, bis die beiden Zehner voll werden.

Die auf diese Art durch Anschauung gewonnenen Resultate werden nun zuerst in der Ordnung durchgesprochen, dann außer der Reihe gefragt und so lange geübt, bis die Antworten rasch und sicher erfolgen.

Die 2fachen der Zahlen.

● ●
● ●
● ●

Das Vervielfachen mit 2 wird in ähnlicher Weise, wie das Vervielfachen von 2, versinnlichet. Der Lehrer macht auf der Schultafel einen Punkt und daneben noch einen Punkt und fragt: Wie vielmal 1 Punkt ist da? Wie viel Punkte sind es zusammen? 2mal 1 ist 2.

Unter die zwei Punkte setzt der Lehrer noch zwei Punkte; da stehen links 2 Punkte und rechts 2 Punkte. Wie vielmal 2 Punkte sind da? Wie viel Punkte sind es zusammen? 2mal 2 ist 4.

Ebenso leitet man weiter 2mal 3, 2mal 4, . . . 2mal 10 ab, indem die Schüler jedesmal angeben müssen, wie vielmal die Zahl von Punkten, welche in einer senkrechten Reihe stehen, vorkommt, und wie viele Punkte es in beiden Reihen zusammengenommen gibt.

Die Schüler werden dadurch zur Überzeugung geführt, daß z. B. 2×3 eben so viel als 3×2 ist. Zählt man nämlich in der obigen Darstellung die senkrechten Reihen, so hat man zwei Reihen und in jeder Reihe 3 Punkte, also zusammen 2mal 3 Punkte; zählt man dagegen die wagrechten Reihen, so hat man 3 Reihen und in jeder Reihe 2 Punkte, somit zusammen 3mal 2 Punkte, jedoch in beiden Fällen dieselbe Gesammtzahl von Punkten; also $2 \times 3 = 3 \times 2$. Dieses kann auch so versinnlicht werden: Der Lehrer stelle 6 Schüler in 2 Reihen auf, so daß auf jede Reihe 3 kommen, dann sind 2×3 Schüler aufgestellt; läßt man nun die Schüler eine Viertelschwenkung nach rechts machen, so bilden sie 3 Reihen, jede zu 2 Schülern, zusammen sind also 3×2 Schüler; da nun die Zahl der Schüler jedesmal die gleiche ist, so ist $2 \times 3 = 3 \times 2$.

Zur schriftlichen Übung bilden die Schüler auf ihren Schiefertafeln die Vielfachen mit Punkten und Ziffern und schreiben die Resultate dazu:

1	● ●	2	$1 \times 2 =$	$2 \times 1 =$
2	● ●	4	$2 \times 2 =$	$2 \times 2 =$
3	● ●	6	$3 \times 2 =$	$2 \times 3 =$
4	● ●	8	$4 \times 2 =$	$2 \times 4 =$
5	● ●	10	$5 \times 2 =$	$2 \times 5 =$

6	● ●	12	$6 \times 2 =$	$2 \times 6 =$
7	● ●	14	$7 \times 2 =$	$2 \times 7 =$
8	● ●	16	$8 \times 2 =$	$2 \times 8 =$
9	● ●	18	$9 \times 2 =$	$2 \times 9 =$
10	● ●	20	$10 \times 2 =$	$2 \times 10 =$

Dann folgen Wiederholungsaufgaben in Verbindung mit dem Zu- und Wegzählen.

c) **Messen durch 2.**

Das Messen läßt sich auf ein wiederholtes Wegzählen derselben Zahl zurückführen; man untersucht dabei, wie oft eine Zahl von einer anderen weggezählt werden kann, oder wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist. Z. B. Wie oft läßt sich 2 von 8 wegzählen? $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $2 - 2 = 0$. 2 läßt sich also von 8 4mal wegzählen, oder 2 ist in 8 4mal enthalten. Diese Zahl, welche man beim Messen findet, ist stets von dem Wörtchen „mal" begleitet.

Das Messen der Zahlen wird entweder an der Rechenmaschine veranschaulicht, oder auch mit Rücksicht auf die bekannten Vielfachen ohne Veranschaulichung gelöst. Darum soll zum Messen jedesmal erst dann übergegangen werden, wenn die Schüler im Vervielfachen der bezüglichen Zahl bereits vollkommene Sicherheit erlangt haben.

Zuerst wird das Messen von solchen Zahlen, die keinen Rest zurücklassen, dann auch das Messen von Zahlen, wobei ein Rest bleibt, vorgenommen.

Wie oft ist 2 in 6 enthalten?

Veranschaulichung an der Rechenmaschine. Die Zahl 6 wird dargestellt. Zählet, wie oft ich 2 Kugeln von 6 Kugeln wegnehme. Indem der Lehrer immer 2 Kugeln gleichzeitig faßt und sie nach rechts schiebt, zählen die Schüler: 1mal, 2mal, 3mal. 2 läßt sich also von 6 3mal wegnehmen, oder 2 ist in 6 3mal enthalten. — Beim Wegschieben werden hier immer die letzten Kugeln, also die Kugeln rechts, und wenn die Kugeln auf mehreren Stäben stehen, die Kugeln des letzten Stabes zuerst in Anspruch genommen.

Herleitung aus den Vielfachen von 2. Nachdem die Vielfachen von 2, nämlich $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$ . . . wiederholt wurden, fragt der Lehrer: wie vielmal 2 ist 6? 6 ist **3**mal 2. Wie oft ist also 2 in 6 enthalten?

Ist 16 ein Vielfaches von 2? Wie oft ist also 2 in 16 enthalten?

Der Lehrer lasse nun die Reihe

2	ist **1**mal 2,	also	ist	2 in 2	1mal	enthalten;
4	„ **2**mal 2,	„	„	2 in 4	2mal	„
6	„ **3**mal 2,	„	„	2 in 6	3mal	„
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
20	„ **10**mal 2,	„	„	2 in 20	10mal	„

in der Ordnung wiederholt durchsprechen und frage sie dann auch außer der Ordnung ab, bis völlige Sicherheit erreicht ist.

Hierauf folgen Übungen im Messen, wobei ein Rest übrig bleibt. Z. B.

Wie oft ist 2 in 13 enthalten?

Wenn man an der Rechenmaschine die Zahl 13 darstellt, dann immer 2 Kugeln mit einem Griffe nach rechts schiebt, so findet man, dass sich 2 Kugeln von 13 Kugeln 6mal wegnehmen lassen, und dass noch eine Kugel übrig bleibt. Was übrig bleibt, heißt der Rest. 2 ist also in 13 6mal enthalten und es bleibt noch 1 als Rest. — Wenn Kugeln, welche sich nicht auf demselben Stabe befinden, wegzuzählen sind, so muss man sie auf einmal fassen und gleichzeitig nach rechts schieben.

Mit Rücksicht auf die Vielfachen. 13 ist kein Vielfaches von 2, die nächstkleinere Zahl, welche ein Vielfaches von 2 ist, ist 12, nämlich 6mal 2; 13 ist also 6mal 2 und noch 1, oder 2 ist in 13 6mal enthalten und es bleibt noch 1 übrig.

Wie oft ist 2 in 15, 19, 9, 5, 17, 3, 7 enthalten?

Wie oft kann man 2 von 1 wegnehmen? Was bleibt übrig, wenn ich v n 1 nichts wegnehme? 2 ist also in 1 keinmal enthalten, es bleibt 1 (unvermindert) übrig.

Schriftliche Übungsaufgaben im Rechenbuche.

d) **Theilen durch 2.**

Durch das Theilen wird eine Zahl in mehrere gleiche Theile zerlegt und bestimmt, wie groß ein solcher Theil ist. Zur Veranschaulichung bedient man sich der Bohnen, Nüsse oder Kreuzer als Versinnlichungsmittel. Im allgemeinen wird die Größe eines Theiles durch Folgerung aus dem bekannten entsprechenden Vielfachen ohne äußere Anschauung entwickelt.

Theile ich eine Zahl in 2 gleiche Theile, so ist jeder Theil die Hälfte der ganzen Zahl.

Die Hälfte der einzelnen Zahlen von 1 bis 20 wird sowohl anschaulich als mit Rücksicht auf die Zweifachen der Zahlen entwickelt, und zwar zuerst, wenn die Hälfte eine ganze Zahl, und dann, wenn die Hälfte keine ganze Zahl ist.

Wie viel ist die Hälfte von 14?

(Mit Bohnen.) Hier sind 14 Bohnen; sie sollen unter 2 Kinder so vertheilt werden, dass das eine so viel wie das andere, dass also jedes die Hälfte bekommt. Ich gebe jedem zuerst eine Bohne, dann wieder eine Bohne, und so fort, bis alle Bohnen vertheilt sind. Wie viel Bohnen erhält jedes Kind? Wie viel ist also die Hälfte von 14?

(Aus den Vielfachen.) Nachdem die 2fachen der Zahlen, nämlich $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ . . . wiederholt wurden, fragt der Lehrer: ist 14 das 2fache oder Doppelte von einer Zahl? Von welcher Zahl?

von 7. Was ist also die Hälfte von 14? — Oder: 14 ist 2mal wie viel? Die Hälfte von 14 ist also 1mal 7, d. i. 7.

Ebenso wird die Hälfte von jeder der übrigen durch 2 theilbaren Zahlen bis 20 entwickelt, und die Schlussreihe

2	ist	2mal	1;	die Hälfte	von	2	ist also	1;
4	„	2mal	2;	„ „	„	4	„ „	2;
6	„	2mal	3;	„ „	„	6	„ „	3;
. . .				. . .				
20	„	2mal	10;	„ „	„	20	„ „	10;

in und außer der Ordnung so lange durchgesprochen, bis volle Sicherheit vorherrscht.

Hierauf wird das Halbieren solcher Zahlen, die durch 2 nicht ohne Rest theilbar sind, vorgenommen. Z. B.

Wie viel ist die Hälfte von 9?

(Mit Kreuzern.) Ich soll 9 Kr. zwischen 2 Schüler so vertheilen, dass jeder die Hälfte bekommt. Ich gebe jedem zuerst 1 Kr., dann noch 1 Kr. und wieder 1 Kr., und noch 1 Kr. Wie viel Kreuzer hat jetzt jeder? Wie viel ist vertheilt worden? 2mal 4 Kr., d. i. 8 Kr. Wie viel bleibt noch zur Vertheilung übrig? Für 1 Kr. setze ich 2 halbe Kreuzer und gebe jedem Schüler noch 1 halben Kreuzer. Wie viel hat dann ein jeder Schüler? — Die Hälfte von 9 ist $4\frac{1}{2}$.

(Mit Rücksicht auf die Vielfachen.) Ist 9 das 2fache einer Zahl? Welches ist das nächstkleinere 2fache? Von welcher Zahl ist 8 das 2fache? Was ist also die Hälfte von 8? 9 besteht aber aus 8 und 1; die Hälfte von 8 ist 4, die Hälfte von 1 ist $\frac{1}{2}$; die Hälfte von 9 ist also 4 und $\frac{1}{2}$. — Oder: 9 ist 2mal wie viel? 9 ist 2mal 4 und noch 1; die Hälfte von 2mal 4 ist 1mal 4, d. i. 4, die Hälfte von 1 ist $\frac{1}{2}$, die Hälfte von 9 ist also $4\frac{1}{2}$.

Wie viel ist die Hälfte von 7, 13, 17, 3, 19, 11, 5, 15?

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

Die Aufgaben der letzten Art sind anfänglich vollständig darzustellen; z. B.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ v. } 15 = \\ \hline \frac{1}{2} \text{ v. } 14 = 7 \\ \frac{1}{2} \text{ v. } \ \ 1 = \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \text{ v. } 15 = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Später können die Schüler sogleich nur das Resultat, nämlich $\frac{1}{2}$ v. $15 = 7\frac{1}{2}$, anschreiben.

e) **Schnellrechnen.**

Zur Wiederholung der bisher geübten Operationen gebe man Aufgaben, in welchen diese Operationen in bunter Aufeinanderfolge in Verbindung treten, und wende dabei, um nebst reger Bethätigung und unausgesetzter Aufmersamkeit aller Schüler zugleich die größtmögliche Fertigkeit im Rechnen zu erzielen, das Schnellrechnen an. (I. Abth. §. 13, D.)

Z. B.: Wie viel ist 8 und 6? — weniger 4? — davon die Hälfte? — und 3? — das 2mal?

Wie viel ist 12 weniger 5? — 2mal? — und 4? — die Hälfte? — und 6? — weniger 9? u. s. w.

Auf solche Übungen im Schnellrechnen sollte in jeder Schule ein großer Wert gelegt werden; sie spornen, da auf die Frage die Antwort folgen soll, zur Kraftanstrengung und Sammlung der Gedanken an und befördern den Lerneifer. Nur hüte sich der Lehrer, dabei die schwächeren Schüler zu übertreiben, oder sie gar gänzlich zurückzulassen und sich nur an die fähigeren zu halten. Bei schwächeren Schülern warte er etwas zu, und hebe eben ihre Leistungen besonders hervor.

f) **Abgeleitete Aufgaben.**

Welche Zahl ist um 9 größer als 7? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 10 um 5 vergrößere? — Von welcher Zahl muss man 6 wegnehmen um 8 zu erhalten? — Von welcher Zahl bleibt 4 übrig, wenn man von ihr 8 weggenommen hat? — Welche Zahl erhalte ich, wenn ich in der Zahlenreihe von 9 an noch um 3 fortschreite? — Wie heißt die 5te Zahl nach 6? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 10 und 7 zusammenzähle? — Welche Zahl ist so groß als 8 und 8 zusammen?

Wie viel erhalte ich, wenn ich von 17 7 wegnehme? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 20 um 5 vermindere? — Wie viel bleibt übrig, wenn von 11 4 abgezogen wird? — Welche Zahl erhalte ich, wenn ich in der Zahlenreihe von 18 an um 9 zurückschreite? — Wie heißt die 7te Zahl vor 15? — Um wie viel ist 17 größer als 8? — Um wie viel ist 2 kleiner als 10? — Welches ist der Unterschied zwischen 16 und 6? — Wie viel muss ich von 18 wegnehmen, um 8 zu erhalten? — Um wie viel muss ich 12 vermindern, um 7 zu erhalten? — Ich denke mir eine Zahl; zähle ich zu ihr 4, so erhalte ich 13; welche Zahl habe ich mir gedacht? — Zu welcher Zahl muss ich 5 zuzählen, um 11 zu erhalten? — Wenn ich 17 in zwei Zahlen zerlege, von denen die eine 10 ist; wie groß ist die andere? — 14 besteht aus zwei Zahlen, die eine ist 6; wie groß ist die andere?

Welche Zahl erhalte ich, wenn ich 2mal 4 nehme? — Welche Zahl ist das 6fache von 2? — Wie heißt das doppelte von 9? — Welche Zahl ist 8mal so groß als 2? — Welche Zahl beträgt 5mal so viel als 2? — Von welcher Zahl läßt sich 2 7mal wegnehmen? — In welcher Zahl ist 2 6mal enthalten? — Von welcher Zahl beträgt die Hälfte 4?

Wie vielmal 2 ist 18? — Das Wievielfache von 2 ist 10? — Wie vielmal 2 muss ich zusammenzählen um 6 zu erhalten? — Wie viele gleiche Zahlen, deren jede 2 ist, muss ich zusammenzählen, um 12 zu erhalten? — Wie oft kann ich 4 um 2 vermindern? — Wie oft 2 von 11 wegnehmen? — Wie oft kann 2 von 9 abgezogen werden? — Aus wie vielmal 2 besteht 8? — Der wievielte Theil von 16 ist 2? — In wie viele Theile muss ich 18 zerlegen, damit auf jeden Theil 2 kommt?

Wie viel erhalte ich, wenn ich die Zahl 16 in 2 gleiche Theile zerlege? — Aus welchen 2 gleichen Zahlen besteht 12? — Welche Zahl muss ich 2mal nehmen, um 6 zu erhalten? — Von welcher Zahl ist 18 das Doppelte? — Welche Zahl ist in 10 2mal enthalten?

B. Anwendungen.

Angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

Für einige Aufgaben lassen wir hier die Schlüsse folgen, welche die Schüler bei der Auflösung zu bilden haben.

Für 1 Kr. erhält man 2 Griffel; wie viel für 2, 3, . . . 10 Kr.? — Für 1 Kr. erhält man 2 Griffel, für 2 Kr. erhält man 2×2 Griffel, d. i. 4 Griffel u. s. w.

Ein Ei kostet 2 Kr.; wie viel Eier erhält man für 6, 4, 10, 16, 12, 20 Kr.? — Für 2 Kr. erhält man 1 Ei; 6 Kr. sind 3×2 Kr., für 6 Kr. erhalte ich daher 3×1 Ei, also 3 Eier u. s. w.

2 Liter kosten 18 Kr.; wie viel kostet 1 Liter? — 2 Liter kosten 18 Kr., 1 Liter ist nur die Hälfte von 2 Liter, es kostet also auch nur die Hälfte von 18 Kr., d. i. 9 Kr.

1 Meter kostet $2\frac{1}{2}$ fl; wie viel kosten 8 Meter? — 8 Meter kosten $8 \times 2\frac{1}{2}$ fl.; 8mal 2 fl. sind 16 fl., $8 \times \frac{1}{2}$ fl. sind $\frac{8}{2}$ fl., d. i. 4 ganze Gulden; 16 fl. und 4 fl. sind 20 fl.: 8 Meter kosten also 20 fl.

§. 42. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis dreißig.

A. Reines Rechnen.

Zuerst **Vorwärts- und Rückwärtszählen.** Die Reihe der ungeraden und der geraden Zahlen; Anschreiben und Lesen derselben. Dann folgen die einzelnen Rechnungsoperationen.

a) **Zu- und Wegzählen.**

Nachdem wir uns in dem Vorhergehenden auf das Zu- und Wegzählen der Einer beschränkt und darin einen sicheren Grund gelegt haben, werden wir auf dieser und den folgenden Stufen das Zu- und Wegzählen auf alle daselbst auftretenden Fälle ausdehnen, und daher folgende Übungen, zuerst mündlich, dann schriftlich vornehmen:

Zuzählen der Einer, zuerst innerhalb desselben Zehners, dann mit Überschreitung des Zehners.

Um hier das bereits Geübte zu wiederholen und gleichzeitig zu erweitern, erscheint es am angemessensten, zu Zahlen, welche um 10 fortschreiten, die also gleiche Einer haben, dieselbe Zahl zuzuzählen. Z. B.

Wie viel ist 6 und 2? — Wie viel wird nun 16 und 2 sein? (An der Rechenmaschine.) Nachdem die Zahl 16 dargestellt wurde, schiebt der Lehrer zu den 6 Kugeln des zweiten Stabes noch 2 Kugeln hin. Wie viel Kugeln sind nun da? Oben sind 10, unten 6 und 2, d. i. 8; wie viel zusammen? 16 und 2 ist 18. — Wie viel ist 26 und 2? (Die Veranschaulichung geschieht auf gleiche Weise an der Rechenmaschine; auch eignen sich dazu vorzüglich unsere Münzen.) Hier sind 2 Zehner und daneben 6 Kr.; wie viele Kreuzer sind es? Zu den 6 Kr. lege ich noch 2 Kr.; dann habe ich 2 Zehner und 8 Kr. oder 28 Kr.

Die Schüler gelangen dadurch zu der Einsicht, daſs die Rechnungen $16 + 2 = 18$ und $26 + 2 = 28$ auf dem bekannten Rechnungsfalle $6 + 2 = 8$ beruhen, daſs dabei die Zahl 2 nur zu den Einern zugezählt wird, die Zehner aber ungeändert bleiben.

Man führe eben so durch

$4 + 3$, $14 + 3$, $24 + 3$; $2 + 4$, $12 + 4$, $22 + 4$;
$8 + 1$, $18 + 1$, $28 + 1$; $3 + 5$, $13 + 5$, $23 + 5$;
$6 + 3$, $16 + 3$, $26 + 3$; u. s. w.

Bevor man zu dem Zuzählen mit Überschreitung des Zehners übergeht, muſs vor allem die Ergänzung einer gegebenen Zahl zu dem nächsten Zehner tüchtig geübt werden.

Wie viel ist

$9 + 1$? $19 + 1$? $29 + 1$?
$8 + 2$? $18 + 2$? $28 + 2$?
$7 + 3$? $17 + 3$? $27 + 3$? u. s. w.

Wie viel ist 6 und 7? — Wie viel ist 16 und 7? (An der Rechenmaschine.) Die Zahl 16 wird dargestellt; dann schiebt man zuerst auf dem zweiten Stabe die noch vorhandenen 4 Kugeln nach links und spricht: 16 und 4 ist 20. Wir haben aber 7 zuzuzählen, 7 ist 4 und 3, wir müssen also noch 3 zuzählen; 20 und 3 (indem auf dem dritten Stabe 3 Kugeln nach links geschoben werden) ist 23; 16 und 7 ist also 23.

Die Zahl, welche zugezählt werden soll, wird hier immer so zerlegt, daſs zuerst die Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zugezählt werden.

Wie viel ist

$9 + 2$? $19 + 2$?	$7 + 4$? $17 + 4$?	$5 + 7$? $15 + 7$?
$8 + 5$? $18 + 5$?	$6 + 8$? $16 + 8$?	$4 + 9$? $14 + 9$?

u. s. w.

Wegzählen der Einer, zuerst innerhalb desselben Zehners, dann mit Übergang in den nächsten Zehner.

Wie viel ist 8 weniger 6? Wie viel ist 18 weniger 6? (An der Rechenmaschine.) Nachdem die Zahl 18 dargestellt wird, schiebt man von den 8 Kugeln des zweiten Stabes 6 Kugeln nach rechts. Wie viel Kugeln bleiben noch? Wie viel ist also 18 weniger 6?

Die Schüler ersehen, dass hier die Zahl von den Einern weggezählt wird, die Zehner aber unverändert bleiben, dass es sich also dabei nur um das Wegzählen im Zahlenkreise von 1 bis 10 handelt.

Wie viel ist

4 — 1? 14 — 1? 24 — 1?	8 — 5? 18 — 5? 28 — 5?
7 — 2? 17 — 2? 27 — 2?	7 — 6? 17 — 6? 26 — 6?
9 — 3? 19 — 3? 29 — 3?	9 — 7? 19 — 7? 29 — 7?
u. s. w.	u. s. w.

Wie viel ist 13 weniger 7? — Wie viel ist 23 weniger 7? (An der Rechenmaschine.) Der Lehrer stellt die Zahl 23 dar und schiebt zuerst die drei Kugeln des dritten Stabes, und dann noch 4 Kugeln des zweiten Stabes nach rechts. Wie viel Kugeln bleiben noch auf der linken Seite? 23 weniger 7 ist also 16. Hier wurde 7 in 3 und 4 zerlegt, und von 23 zuerst 3, dann 4 weggezählt.

Es werden also hier zuerst so viele Einer, dass man auf die reinen Zehner herabkommt, und dann die noch übrigen Einer weggezählt.

Wie viel ist

13 — 3? 23 — 3?	11 — 2? 21 — 2?	15 — 8? 25 — 8?
17 — 7? 27 — 7?	14 — 6? 24 — 6?	18 — 9? 28 — 9?

u. s. w.

Zuzählen der Zehner, dann der Zehner mit Einern.

Wie viel ist 20 und 10? — 20 sind 2 Zehner, 10 sind 1 Zehner? 2 Z. und 1 Z. sind 3 Z. oder 30; 20 und 10 ist also 30. (Ist an der Rechenmaschine zu veranschaulichen.)

Wie viel ist 18 und 10? — 10 und 10 ist 20, und 8 ist 28. (An der Rechenmaschine.) Wenn eine zweistellige Zahl mit einer andern zweistelligen in Beziehung zu bringen ist, so wird an der Rechenmaschine die erstere am angemessensten so dargestellt, dass links oben auf dem ersten Stabe die Einer, und unten die Zehner erscheinen; ob die Einer unten oder oben sind, ändert nichts an dem anschaulichen Zahlbilde. Der Lehrer stellt also für die vorliegende Aufgabe auf dem ersten Stabe 8 und auf dem zweiten 10 Kugeln dar, schiebt dann die 10 Kugeln des dritten Stabes nach links und spricht: 10 und 10 ist 20, und 8 ist 28. — Auf ähnliche Art kann man bei Anwendung der Tillich'schen Rechenstäbe vorgehen.

Wie viel ist 11 + 10? 15 + 10? 19 + 20? u. s. w.

Im Anfange werden diese Aufgaben vollständig mit Zerlegung, dann bloß mit der Angabe des Ergebnisses gelöst, z. B. 18 und 10 ist 28. Diese kürzere Auflösungsweise muss zuletzt zur vollen Fertigkeit gebracht werden.

Wie viel ist 15 und 13? — Man zählt zu der ersten Zahl zuerst die Zehner und dann die Einer der letzten Zahl, nämlich: 15 und 10 ist 25, und 3 ist 28.

Wie viel ist 12 und 17? 13 und 14? 15 und 13? 11 und 19? u. s. w.

Wegzählen der Zehner, dann der Zehner mit Einern.

Wie viel ist 30 weniger 20? — Anfangs: 30 sind 3 Zehner, 20 sind 2 Zehner, 3 Z. weniger 2 Z. ist 1 Z., oder 10; also 30 weniger 20 ist 10. (An der Rechenmaschine.)

Wie viel ist 27 weniger 10? — Anfangs: 20 weniger 10 ist 10, und 7 dazu ist 17. Später sogleich: 27 weniger 10 ist 17.

Wie viel ist 28 — 10? 21 — 10? 26 — 10 u. s. w.

Wie viel ist 29 — 12? Hier zählt man von der größeren Zahl zuerst die Zehner, dann die Einer der kleineren Zahl weg, also: 29 weniger 10 ist 19, weniger 2 ist 17.

Wie viel ist 27 — 14? 23 — 11? 28 — 15? 30 — 16? u. s. w.

Zerlegung der Zahlen in zwei Bestandtheile.

Ist der eine Bestandtheil mit der gegebenen Zahl innerhalb desselben Zehners, so darf man nur zu den Einern so viel zuzählen, dass man die Einer der gegebenen Zahl erhält; was zugezählt wurde, ist der andere Bestandtheil. Z. B. 27 ist 24 und wie viel? 4 und 3 ist 7; 24 und 3 ist 27.

15 und wie viel ist 19? 11 + . = 18; 21 + . = 25 u. s. w.

Wenn sich aber der eine Bestandtheil mit der zu zerlegenden Zahl nicht innerhalb desselben Zehners befindet, so muss man zu demselben zuerst so viel zuzählen, dass man den nächsten Zehner ergänzt; dann zählt man noch so viel zu, dass man die gegebene Zahl selbst erhält; die beiden zugezählten Zahlen zusammengenommen bilden den zweiten Bestandtheil. Z. B. 12 und wie viel ist 27? 12 und 8 ist 20, und 7 ist 27; 8 und 7 ist 15; 12 und 15 ist also 27.

13 und wie viel ist 21? 14 + . = 24; 15 + . = 28; 16 + . = 30 u. s. w.

2. Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

b) **Vervielfachen von 3 und mit 3.**

Bei den Vielfachen der Zahl 2 haben wir das didaktische Verfahren ausführlich erklärt. Für die Vielfachen der folgenden Zahlen wird die einfache Anführung der vorzunehmenden Aufgaben genügen; nur dort, wo wesentliche Abweichungen eintreten, sollen die nöthigen Erklärungen beigefügt werden.

Anschauliche Entwicklung der Vielfachen von 3 an Punkten, wie die der Vielfachen von 2 im Zahlenraume bis 20.

An der Rechenmaschine. Hier findet bei dem Übergange vom ersten Stabe auf den zweiten, und von diesem auf den dritten eine Zerlegung statt. Der Lehrer schiebt mit jedem Griffe 3 Kugeln des ersten Stabes nach links und spricht: 1mal 3 ist 3, 2mal 3 ist 6, 3mal 3 ist 9. Bei 4mal 3 erfolgt der Übergang auf den zweiten Stab; zu 9 müssen 3 zugezählt werden, es ist aber auf dem ersten Stabe nur noch eine Kugel; 3 ist 1 und 2, es müssen also 1 Kugel des ersten Stabes und noch 2 Kugeln des zweiten Stabes nach links geschoben werden; dann erhalten wir 12 Kugeln; 4mal 3 ist also 12 u. s. w. — Ähnlich mit den Stäbchen des Tillich'schen Apparates.

Durchsprechen der Vielfachen von 3 im Chor und einzeln vorwärts und rückwärts.

Fragen außer der Reihe bis zur vollen Geläufigkeit.

Auf gleiche Weise werden auch die 3fachen der einzelnen Zahlen vorgenommen.

Schriftlich.

1 ● ● ●	3	1 × 3 =	3 × 1 =
2 ● ● ●	6	2 × 3 =	3 × 2 =
3 ● ● ●	9	3 × 3 =	3 × 3 =
4 ● ● ●	12	4 × 3 =	3 × 4 =
u. s. w.		. . . .	. . . .
		10 × 3 =	3 × 10 =

Aufgaben im Rechenbuche.

c) **Messen durch 3.**

Wie beim Messen durch 2.

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

d) **Theilen durch 3.**

Theile ich eine Zahl in 3 gleiche Theile, so ist jeder Theil ein Drittel oder der dritte Theil der ganzen Zahl.

Der dritte Theil von 1 ist $\frac{1}{3}$. — Wie viel ist der dritte Theil von 2? Wenn 3 Kinder 2 Kuchen unter einander vertheilen sollen, so theilen sie zuerst den einen Kuchen, da erhält jedes Kind 1 Drittel; hierauf theilen sie auch den zweiten Kuchen, da erhält wieder jedes 1 Drittel; wie viel Drittel kommen daher zusammen auf jedes Kind? Der dritte Theil von 2 ist also 2 Drittel.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 18?

(Anschaulich mit Nüssen.) Sollen aus 18 Nüssen 3 gleiche Häuflein gebildet werden, so lege ich auf jedes Häuflein so oft eine Nuss, bis alle Nüsse vertheilt sind. Wie viel Nüsse enthält dann jedes Häuflein? Der dritte Theil von 18 ist also 6.

(Aus den Vielfachen.) 18 ist 3mal wie viel? 18 ist 3mal **6**; der dritte Theil von 18 ist also 1 mal 6, oder 6.

24 ist 3mal wie viel? 24 ist 3mal 8; der dritte Theil von 24 ist also 8.

Die Schlussreihe

3	ist	3mal	**1**,	das	Drittel	von	3	ist also	1;
6	„	3mal	**2**,	„	„	„	6	„ „	2;
9	„	3mal	**3**,	„	„	„	9	„ „	3;
. . .									
30	„	3mal	**10**,	„	„	„	30	„ „	10;

muss wiederholt bis zur Geläufigkeit durchgesprochen werden.

Dann folgen Übungen im Theilen, wo dieses auf einen Bruch führt. Z. B. Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 20?

Ist 20 das 3fache einer Zahl? Welches ist das nächstkleinere 3fache? 20 besteht nun aus 18 und 2; der dritte Theil von 18 ist 6, der dritte Theil von 2 ist 2 Drittel; der dritte Theil von 20 ist also 6 und $\frac{2}{3}$.

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

f) **Schnellrechnen.**

Wie viel ist 7 und 2? — davon das Drittel? — und 5? — 3mal? — weniger 6? — die Hälfte? — 3mal?

12 — 3, + 5, die Hälfte, 3mal, — 3, das Drittel, + 4, 2mal?

3 × 9, — 7, + 4, das Drittel, + 2, 2mal, — 8, die Hälfte, 3mal? u. s. w.

g) **Abgeleitete Aufgaben.**

Wie im Zahlenraume bis 20.

B. Anwendungen.

Angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

Bei diesen ist unnachsichtlich darauf zu bestehen, dass die Schüler während der Auflösung selbst auch die Schlüsse, auf welchen diese beruht, bündig aussprechen.

§. 43. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis vierzig.

Nachdem wir bei den vorhergehenden Zahlenräumen das zu beobachtende unterrichtliche Verfahren ausführlich dargelegt haben, werden wir uns bei den folgenden Zehnern zur Vermeidung von Wiederholungen darauf beschränken, die auszuführenden schriftlichen und angewandten Aufgaben bloß anzudeuten und nur dort, wo neue Übungen auftreten, die erforderlichen Erläuterungen beizufügen.

Im Zahlenraume bis 40 ist das didaktische Verfahren beim mündlichen Rechnen das gleiche, wie in dem vorhergehenden Zahlenraume.

Schriftliche Übungen und angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

§. 44. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis fünfzig.

Für das Zu- und Wegzählen der Einer empfehlen sich hier und für die Folge, da man bereits ein größeres Zahlengebiet beherrscht, am besten die Reihen.

So beim Zuzählen:

Fange mit 1 an und zähle immer 2 dazu.

1 und 2 ist 3; 3 und 2 ist 5; 5 und 2 ist 7; u. s. w. bis 47 und 2 ist 49.

Fange	mit	1	an	und	zähle	immer	1, 3, 4, . . . 8, 9	dazu.
"	"	2	"	"	"	"	2, 3, 4, . . . 8, 9	"
"	"	3	"	"	"	"	3, 4, . . . 8, 9	"
"	"	4	"	"	"	"	4, 5, . . . 8, 9	"
"	"	5	"	"	"	"	5, 6, 7, 8, 9	"
"	"	6	"	"	"	"	6, 7, 8, 9	"
"	"	7	"	"	"	"	7, 8, 9	"
"	"	8	"	"	"	"	8, 9	"
"	"	9	"	"	"	"	9	"

Ebenso beim Wegzählen:

Fange mit 50 an und zähle immer 2 weg.

50 weniger 2 ist 48; 48 weniger 2 ist 46; 46 weniger 2 ist 44; u. s. w. bis 2 weniger 2 ist nichts.

Fange	mit	50	an	und	zähle	immer	1, 3, 4, . . . 8, 9 weg.
"	"	49	"	"	"	"	2, 3, 4, . . . 8, 9 "
"	"	48	"	"	"	"	3, 4, . . . 8, 9 "
"	"	47	"	"	"	"	4, 5, . . . 8, 9 "
"	"	46	"	"	"	"	5, 6, 7, 8, 9 "
"	"	45	"	"	"	"	6, 7, 8, 9 "
"	"	44	"	"	"	"	7, 8, 9 "
"	"	43	"	"	"	"	8, 9 "
"	"	42	"	"	"	"	9 "

Schriftliche und angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

Auch für das schriftliche Rechnen empfehlen sich Aufgaben über das Zu- und Wegzählen der Einer in Reihen. Diese sind ein vorzügliches Mittel, eine oder mehrere Abtheilungen schriftlich zu beschäftigen; sie lassen sich mit wenigen Ziffern andeuten und eben so leicht controlieren. Anstatt z. B. bei der Aufgabe 4 zu sagen: Fanget bei der Zahl 2 an und zählet immer 3 dazu, also 2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11 . . . . kann der Lehrer die Aufgabe ganz kurz mit den Worten bezeichnen: Rechnet die Reihe 2 + 3.

§. 45. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis sechzig.

Unterrichtlicher Vorgang wie bei den früheren Zahlenräumen.

Schriftliche und angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

§. 46. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis siebenzig.

In dem Vorhergehenden haben wir uns auf das Vervielfachen der Einer (Grundzahlen) beschränkt. Die weiteren Übungen werden sich, da wir uns nun schon in einem größeren Zahlenkreise bewegen können, auch auf das Vervielfachen der Zehner und Einer erstrecken, dann ebenso im Messen und Theilen eine angemessene Erweiterung erhalten.

Nachdem die Vielfachen von 7 und die 7fachen der ersten zehn Zahlen in gleicher Weise, wie z. B. das Vervielfachen von 3 und mit 3, entwickelt wurden, folgen Übungen im Vervielfachen zweistelliger Zahlen.

Wie viel ist 2 × 10? 3 × 10? 5 × 10? 7 × 10?

Wie viel ist 2 × 20? — 20 sind 2 Zehner, 2mal 2 Z. sind 4 Z., d. i. 40. (An der Rechenmaschine zu veranschaulichen.)

Wie viel ist 2 × 30? 3 × 20?

Wie viel ist 2 × 12? — 2mal 10 ist 20, 2mal 2 ist 4; 20 und 4 ist 24.

Wie viel ist 2 × 11? 2 × 13? 2 × 14? 2 × 23? 2 × 31? 2 × 21? 4 × 12? 5 × 11?

Wie viel ist 2 × 27? — 2mal 20 ist 40, 2mal 7 ist 14; 40 und 14 ist 54.

Wie viel ist 2 × 15? 2 × 16? 2 × 18? 2 × 26? 2 × 29? 3 × 18? 4 × 16?

Auch beim Messen kann man schon mit solchen Aufgaben des Messens beginnen, bei denen die kleinere Zahl in der größeren mehr als 10mal enthalten ist.

Wie oft ist 2 in 60 enthalten? — 2 ist in 6 3mal enthalten, 60 ist aber 10mal so viel als 6, folglich ist 2 in 60 10mal so oft als in 6, also 30mal enthalten.

Ebenso

2 in 2 = 1	2 in 4 = 2	3 in 3 = 1	3 in 6 = 2
2 in 20 = 10	2 in 40 = 20	3 in 30 = 10	3 in 60 = 20

Wie oft ist 2 in 48 enthalten? — 48 ist 40 und 8, 2 ist in 40 20mal, in 8 4mal, in 48 also 24 mal enthalten.

Wie oft ist enthalten 2 in 24? 2 in 26? 2 in 42? 2 in 46? 3 in 63? 3 in 69?

Wenn die kleinere Zahl in der Zehnern der größeren nicht ohne Rest enthalten ist, muſs man die größere Zahl so zerlegen, daſs der eine Bestandtheil Zehner enthält, die ein Vielfaches der kleineren Zahl sind. Z. B. Wie oft ist 2 in 54 enthalten? — 54 ist 40 und 14, 2 ist in 40 20mal, in 14 7mal, in 54 also 27mal enthalten.

Wie oft ist enthalten 2 in 36? 2 in 32? 2 in 58? 2 in 34? 3 in 42? 3 in 48? 3 in 51? 3 in 50? 4 in 52? 4 in 56? 4 in 60?

Ebenso wird beim Theilen in diesem Zahlenraume mit solchen Aufgaben der Anfang gemacht, bei denen der gesuchte Theil größer als 10 ist.

Wie viel ist die Hälfte von 40? — 40 sind 4 Zehner, die Hälfte von 4 Z. sind 2 Z. oder 20; also $\frac{1}{2}$ von 40 = 20.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 20? $\frac{1}{2}$ von 60? $\frac{1}{3}$ von 30? $\frac{1}{3}$ von 60?

Ist die zu theilende Zahl zweistellig, so zerlege man sie in zwei Bestandtheile und nehme als ersten eine solche Zehnerzahl an, welche sich in die verlangte Anzahl gleicher Theile theilen läſst. Z. B.

Wie viel ist das Drittel von 69? — 69 ist 60 und 9, $\frac{1}{3}$ von 60 ist 20, $\frac{1}{3}$ von 9 ist 3, $\frac{1}{3}$ von 69 also 20 und 3, d. i. 23.

Wie viel ist die Hälfte von 32? — 32 ist 20 und 12, die Hälfte von 20 ist 10, die Hälfte von 12 ist 6, die Hälfte von 32 also 10 und 6, d. i. 16.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 24? $\frac{1}{2}$ von 28? $\frac{1}{2}$ von 44? $\frac{1}{2}$ von 46? $\frac{1}{2}$ von 64? $\frac{1}{2}$ von 34? $\frac{1}{2}$ von 35? $\frac{1}{2}$ von 52? $\frac{1}{2}$ von 50? $\frac{1}{3}$ von 42? $\frac{1}{3}$ von 54? $\frac{1}{3}$ von 58? $\frac{1}{4}$ von 52? $\frac{1}{4}$ von 60? $\frac{1}{4}$ von 65?

Schriftliche und angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

§. 47. Rechnungsübungen in den Zahlenräumen bis achtzig und neunzig.

Der didaktische Vorgang wie bei der Behandlung der vorhergehenden Zehnerräume.

Schriftliche und angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

In den schriftlichen Übungen können Reihen gerechnet werden, in denen man bald zwei verschiedene Zahlen abwechselnd zuzuzählen, bald zwei verschiedene Zahlen abwechselnd wegzuzählen, bald abwechselnd eine Zahl zuzuzählen und eine andere wegzuzählen hat.

§. 48. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis hundert.

Mit dieser Stufe gelangt der Zahlenkreis bis 100 zum vollständigen Abschlusse. Indem dabei das bisherige Rechnen mit Rücksicht auf den erweiterten Zahlenraum zu vervollständigen und insbesondere der Zahl 100, da sie bei unseren Münzen, Maßen und Gewichten eine so wichtige Rolle spielt, die größte Beachtung zu widmen ist, müssen zugleich alle in den früheren Zahlenräumen vorgenommenen Rechnungsübungen auf das sorgfältigste wiederholt werden. Darum ist ein längeres Verweilen bei dieser Stufe unabweisbar geboten. Was von jedem Schüler am Schlusse des zweiten Schuljahres unbedingt gefordert werden muss, ist die volle Sicherheit und Fertigkeit im Zu- und Wegzählen der Grundzahlen, in dem Einmaleins und in den daraus sich ergebenden Aufgaben des Messens und des Theilens.

Der Stufengang bleibt der bisher befolgte.

Schriftliche Aufgaben im Rechenbuche.

Aufgaben über die Ergänzung der verschiedenen Zahlen auf 100 sollen hier, da sie im Hinblick auf die Hunderttheilung unseres Guldens, Meters, Hektars, Hektoliters und Kilogramms sehr häufig in Anwendung kommen, bis zur größten Fertigkeit durchgeübt werden.

Bei den Aufgaben von der Form $\frac{1}{2}$ von $5 \times 3 + 1$ oder $\frac{1}{2}$ von $4 \times 5 - 3$ sollen die Schüler anfangs die vollständige Ausrechnung darstellen, später nur die Resultate anschreiben.

Angewandte Aufgaben im Rechenbuche.

Zweiter Abschnitt.

Elemente des Bruchrechnens.

§. 49.

1. Halbe.

a) Anschauliche Auffassung.

Hier ist ein ganzer Apfel. Wenn ich denselben zerschneide, so heißen die Stücke Theile. Zerschneide ich den Apfel durch die Mitte, so dass ein Stück eben so groß wird als das andere, so erhalte ich zwei gleiche Theile, und jeder solche Theil ist ein halber Apfel oder die Hälfte eines Apfels.

$^1/_2$ $^1/_2$

Ich ziehe auf der Schultafel eine Linie. Ich kann dieselbe in zwei ungleiche, aber auch in zwei gleiche Theile theilen. Wo muss ich die Linie theilen, damit beide Theile gleich groß werden? Ich theile also die Linie genau in der Mitte; was ist dann ein Theil? — Theile ich daher ein Ganzes in 2 gleiche Theile, so heißt ein Theil ein Halbes oder die Hälfte. 1 Halbes erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theile und 1 solchen Theil nehme. Wie viel Halbe hat 1 Ganzes? 2 Halbe geben zusammen wieder 1 Ganzes. — 1 Halbes bezeichnet man durch $\frac{1}{2}$, 2 Halbe durch $\frac{2}{2}$.

Der Lehrer kann die Schüler schon hier mit den Ausdrücken „Bruch, Zähler, Nenner" bekannt machen; er kann aber dies auch erst bei einem späteren Cursus über die Brüche thun.

b) Verwandeln der Ganzen in Halbe und umgekehrt.

Die Übungen sind zuerst mündlich, dann schriftlich vorzunehmen; das schriftliche Rechnen fällt der Ausführung nach genau mit dem mündlichen zusammen.

Wie viel Halbe sind 3 Ganze? — 1 Ganzes hat 2 Halbe, 3 Ganze sind also 3mal 2 Halbe, d. i. 6 Halbe.

Schriftlich. $3 = \frac{6}{2}$.

Wie viel Ganze sind 10 Halbe? — 2 Halbe sind 1 Ganzes. Nehme ich daher $\frac{2}{2}$ von $\frac{10}{2}$ weg, so habe ich 1 G.; nehme ich vom Reste wieder $\frac{2}{2}$, so habe ich wieder 1 G., u. s. w.; $\frac{10}{2}$ sind daher so vielmal 1 G., als $\frac{2}{2}$ in $\frac{10}{2}$ enthalten sind; $\frac{2}{2}$ sind in $\frac{10}{2}$ so oft enthalten, als 2 in 10, also 5mal; $\frac{10}{2}$ sind also 5mal 1 Ganzes oder 5 Ganze.

Wir sehen also hier den Nenner als einen Namen an und rechnen dann wie mit benannten ganzen Zahlen. Diese Auffassung ist sehr geeignet, dem Anfänger das Rechnen mrt Bruchzahlen zu erleichtern.

Wie viel Ganze sind 6, 12, 28, 5, 2, 17 Halbe?

Schriftlich. $\frac{14}{2} = ?$ Ganze

Anfangs: $\frac{2}{2} = 1$ G; $\frac{2}{2}$ in $\frac{14}{2} = 2$ in $14 = 7$ G.; später sogleich $\frac{14}{2} = 7$ G.

c) Zuzählen.

3 Halbe und 1 Halbes sind 4 Halbe, d. i. 2 Ganze.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = ?$ — $5\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ ist 6, und 2 ist 8.

Für das schriftliche Rechnen empfehlen sich auch hier Reihenfolgen (II. Abth. §. 44); z. B.:

$37 + 5\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}$,
$42\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 47\frac{2}{2} = 48$,
$48 + 5\frac{1}{2} = 53\frac{1}{2}$, u. s. w.

d) Wegzählen:

Wie viel ist $\frac{9}{2}$ — $\frac{3}{2}$? — 9 Halbe weniger 3 Halbe sind 6 Halbe, oder 3 Ganze.

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

Wie viel ist 4 — $\frac{1}{2}$? Statt 4 kann ich $3\frac{2}{2}$ setzen; dann habe ich $3\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Auch hier sind Reihenfolgen zu rechnen.

e) Vervielfachen.

Wie viel ist 7mal $\frac{3}{2}$? — 7mal 3 Halbe sind 21 Halbe; also $7 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$.

Wie viel ist 6mal $8\frac{1}{2}$? — 6mal 8 ist 48, 6mal $\frac{1}{2}$ ist $\frac{6}{2} = 3$; 48 und 3 ist 51.

f) Messen.

Wie oft ist $\frac{3}{2}$ in $\frac{15}{2}$ enthalten? — 3 Halbe sind in 15 Halben so oft enthalten, als 3 in 15, also 5mal; folglich $\frac{3}{2}$ in $\frac{15}{2} = 5$.

Wie oft ist $\frac{1}{2}$ in 3 enthalten? — Hier muss 3 in Halbe verwandelt werden; $3 = \frac{6}{2}$, daher $\frac{1}{2}$ in $\frac{6}{2} = 6$.

Wie oft ist $2\frac{1}{2}$ in $12\frac{1}{2}$ enthalten?

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$; $\frac{5}{2}$ in $\frac{25}{2} = 5$.

g) Theilen.

Wie viel ist der 5te Theil von $\frac{35}{2}$? — Der 5te Theil von 35 Halben sind 7 Halbe; also $\frac{1}{5}$ von $\frac{35}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

h) Anwendungen.

Hier ist zunächst das Verwandeln der Münzen, Maße und Gewichte zu üben.

Wie viel Kreuzer sind $\frac{1}{2}$ fl.? — 1 fl. = 100 kr.; $\frac{1}{2}$ fl. ist die Hälfte von 100 kr. = 50 kr.

Welcher Theil einer Stunde sind 30 Minuten? — 60 Minuten sind 1 Stunde; 30 Minuten sind die Hälfte von 60 Minuten, also $\frac{1}{2}$ Stunde.

Dann folgen angewandte Aufgaben über die Rechnungsoperationen mit Halben, bei deren Lösung auch hier auf richtige und bündige Schlüsse zu bringen ist.

2. Drittel.

Die Übungen stimmen mit denen überein, die wir mit den Halben vorgenommen haben; auch das unterrichtliche Verfahren bleibt sich gleich.

3. Viertel.

Hier tritt eine Erweiterung der Uebungen insofern ein, als wir nicht ausschließlich mit Vierteln rechnen, sondern mit denselben auch die schon behandelten Halben in Verbindung bringen. Nur über diese erweiterten Übungen sollen hier einige Erläuterungen folgen.

Viertel erhalte ich, wenn ich ein Ganzes in 4 gleiche Theile theile. Viertel kann ich aber auch dadurch erhalten, dass ich ein Ganzes zuerst in 2 Halbe, und dann jedes Halbe wieder in 2 gleiche Theile theile. Viertel kann ich also aus Halben machen; Halbe lassen sich in Viertel verwandeln.

1 Halbes = 2 Viertel, 1 Viertel = $\frac{1}{2}$ von 1 Halben. Kann ich aus Dritteln auch Viertel machen? Drittel lassen sich nicht in Viertel verwandeln.

Wie viel Viertel sind $\frac{5}{2}$? — 1 Ganzes = 4 Viertel; 1 Halbes ist nur die Hälfte davon, also 2 Viertel; 5 Halbe sind also 5mal 2 Viertel = 10 Viertel.

Wie viel Halbe sind $\frac{14}{4}$? — $\frac{2}{4}$ = 1 Halbes; $\frac{14}{4}$ sind daher so viele Halbe, als $\frac{2}{4}$ in $\frac{14}{4}$, oder 2 in 14 enthalten sind, also 7mal 1 Halbes oder 7 Halbe.

Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$? — Kann ich z. B. 1 Zehner und 3 Kreuzer als solche zusammenzählen? Sie geben weder 4 Zehner, noch 4 Kreuzer. Was muss mit diesen Münzsorten geschehen? — Ich verwandle sie auf die gemeinschaftliche Benennung Kreuzer und habe dann 10 Kr. + 3 Kr. Ebenso muss ich $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, um sie zusammenzählen zu können, auf einen gleichen Namen bringen. Ich verwandle also $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$, und habe dann $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Wie viel ist $41\frac{1}{2} - 12\frac{3}{4}$? — Statt $41\frac{1}{2}$ setze ich zuerst $41\frac{2}{4}$; da ich aber $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{4}$ nicht wegzählen kann, löse ich 41 in $40\frac{4}{4}$ auf; dann habe ich $40\frac{6}{4} - 12\frac{3}{4} = 28\frac{3}{4}$.

Wie oft ist $1\frac{1}{4}$ in $7\frac{1}{2}$ enthalten? — Die Bruchzahlen müssen gleichnamig gemacht werden, indem man die Halben in Viertel verwandelt.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $7\frac{1}{2} = 7\frac{2}{4} = \frac{30}{4}$; $\frac{5}{4}$ in $\frac{30}{4}$ = 5 in 30 = 6.

4. Fünftel.

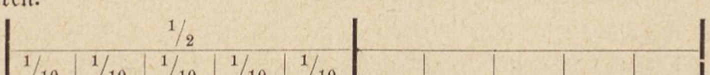
Die Behandlung ist dieselbe, wie bei den Halben und Dritteln.

5. Achtel.

Mit den Achteln werden Halbe und Viertel in Verbindung gebracht. Die Behandlung ist die gleiche, wie bei den Vierteln.

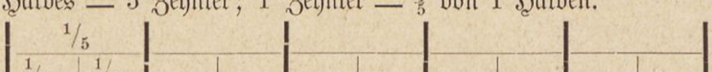
6. Zehntel.

Über die Verbindung der Zehntel mit den Halben und Fünfteln ist einiges zu bemerken.



Wenn ich 1 Ganzes in 10 gleiche Theile theile, so erhalte ich Zehntel. Zehntel kann ich aber auch mittelbar aus Halben erhalten, wenn ich jedes Halbe in 5 gleiche Theile theile. Halbe lassen sich in Zehntel verwandeln.

1 Halbes = 5 Zehntel; 1 Zehntel = $\frac{1}{5}$ von 1 Halben.



Zehntel erhalte ich ferner aus Fünfteln, wenn ich jedes Fünftel in 2 gleiche Theile theile. Fünftel lassen sich in Zehntel verwandeln.

1 Fünftel = 2 Zehntel; 1 Zehntel = $\frac{1}{2}$ von 1 Fünftel.

Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$? Halbe und Fünftel kann ich als solche nicht zusammenzählen, weil sie verschiedene Namen haben. Ich kann aber Halbe und Fünftel in Zehntel verwandeln: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; $\frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$.

7. Hundertel.

Wenn wir in den Anschauungsunterricht im Bruchrechnen auch die Hundertel aufnehmen, so geschieht es nicht nur wegen ihrer Wichtigkeit für unsere Münzen und neuen Maße, sondern auch darum, damit die Schüler allmählich die Grundlagen für die später folgende Decimalbruchrechnung gewinnen. Die Veranschaulichung der Hundertel sowie ihrer Bildung aus Zehnteln, die wir hier mit den Hunderteln in Verbindung bringen, geschieht am besten mit dem Meterstabe; die Decimeter sind Zehntel, die Centimeter sind Hundertel.

Anhang.

§. 50. Preisberechnungen.

Durch die Wichtigkeit, welche die Preisberechnungen für das praktische Leben haben, erscheint es gerechtfertigt, dass denselben schon bei der Behandlung des engeren Zahlenraumes bis 100 eine besondere Stelle eingeräumt werde. Die hieher gehörigen Aufgaben führen auf das Vervielfachen, auf das Theilen oder auf eine Verbindung des Theilens mit dem Vervielfachen. Die Aufgaben der letzteren Art gehören zu den eigentlichen Dreisatzrechnungen und müssen auf dieser Stufe so gewählt werden, dass das Theilen und Vervielfachen im Kopfe leicht vollzogen werden kann.

Wir ordnen hier die Aufgaben nach folgenden Fällen:

Man schließt

a) von dem Preise der Einheit auf den Preis der Mehrheit;

b) von dem Preise der Mehrheit auf den Preis der Einheit;

c) von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Vielfachen dieser Mehrheit;

d) von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Theiles dieser Mehrheit; endlich

e) von dem Preise der Mehrheit durch den Preis der Einheit auf den Preis einer andern Mehrheit.

Bei allen diesen Aufgaben ist auf die Bildung richtiger *Schlüsse* große Sorgfalt zu verwenden.

a) **Schluss von dem Preise der Einheit auf den Preis der Mehrheit.**

Diese Aufgaben theilen wir in vier Gruppen ein.

1. Bei den Aufgaben der ersten Gruppe wird die Rechnung durch eine *einfache Vervielfachung* ausgeführt. Z. B.

1 Meter kostet 7 fl.; wie viel kosten 9 Meter?

So oft ich 1 Meter kaufe, so oft muss ich 7 fl. zahlen; 9 Meter sind 9mal 1 Meter, für 9 Meter muss ich daher 9mal 7 fl. zahlen; 9mal 7 fl. sind 63 fl.; 9 Meter kosten also 63 fl. — Kürzer: 1 Meter kostet 7 fl., 9 Meter sind 9mal 1 Meter, 9 Meter kosten also 9mal 7 fl., d. i. 63 fl.

2. Bei den Aufgaben der zweiten Gruppe beruhet die Auflösung auf dem Zusammenhange, welcher zwischen den Eintheilungszahlen unserer Münzen, Maße und Gewichte besteht. Aus der Lösung dieser Aufgaben werden die Schüler von selbst folgende allgemeine Sätze (Rechnungsvortheile) abstrahieren:

So viele Kreuzer das Decimeter, ebenso viele Zehner kostet das Meter.

So viele Kreuzer das Buch Papier, eben so viele Zehner kostet das Ries.

So viele Kreuzer das Kilogramm kostet, eben so viele Gulden kostet der Centner.

So viele Kreuzer das Liter, eben so viele Gulden kostet das Hektoliter.

3. Bei den Aufgaben der dritten Gruppe wird die Rechnung durch Zerlegung in Zehner und Kreuzer ausgeführt.

Bevor die hieher gehörigen Rechnungen vorgenommen werden, sind die im Zahlenraume bis 100 vorgekommenen Aufgaben über das Verwandeln der Geldsorten als Vorübungen fleißig zu wiederholen.

Die Schlüsse, welche bei diesen im gewöhnlichen Leben besonders häufig vorkommenden Rechnungen gebildet werden müssen, sind aus folgender Aufgabe ersichtlich:

1 Kilogr. kostet 43 Kr.; wie viel kosten 6 Kilogr.?

1 Kil. kostet 43 Kr. = 4 Zehn. + 3 Kr.
6 Kilo kosten 6 × 4 Zehn. + 6 × 3 Kr.
6 × 4 Zehn. = 24 Zehn. = 2 fl. 40 Kr.
6 × 3 Kr. = 18 Kr.
2 fl. 40 Kr. + 18 Kr. = 2 fl. 58 Kr.

4. Die Aufgaben der vierten Gruppe enthalten Kreuzerzahlen, welche bequeme Guldentheile sind, oder sich in solche zerlegen lassen.

Während die früher behandelte Rechnung nach Zehnern und Kreuzern allgemein mit Vortheil anwendbar ist, erscheint das Rechnen nach Guldentheilen nur dann vortheilhaft, wenn der Preis der Einheit 20 Kreuzer = $\frac{1}{5}$ fl., 25 Kr. = $\frac{1}{4}$ fl. oder 50 K. = $\frac{1}{2}$ fl. beträgt, oder wenn er von diesen Guldentheilen oder von einem Gulden nur um wenige Kreuzer abweicht.

Die Auflösung und die dabei zu bildenden Schlüsse sind in den folgenden Aufgaben angedeutet:

1 Meter kostet 26 Kr.; wie viel kosten 16 Met.

1 Meter kostet 26 Kr. = $\frac{1}{4}$ fl. + 1 Kr.
16 Meter kosten $\frac{16}{4}$ fl. + 16 × 1 Kr.
$\frac{16}{4}$ fl. = 4 fl.
16 × 1 Kr. = 16 Kr.
4 fl. + 16 Kr. = 4 fl. 16 Kr.

1 Liter kostet 48 Kr.; wie viel kosten 7 Lit.?

1 Liter kostet 48 kr. = $\frac{1}{2}$ fl. — 2 Kr.

7 Liter kosten $\frac{7}{2}$ fl. — 7 × 2 Kr.

$\frac{7}{2}$ fl. = 3 fl. 50 Kr.

7 × 2 Kr. = 14 Kr.

3 fl. 50 Kr. — 14 Kr. = 3 fl. 36 Kr.

b) **Schluss von dem Preise der Mehrheit auf den Preis der Einheit.**

Die hieher gehörigen Aufgaben lassen sich durch eine einfache Theilung berechnen. Z. B.

5 Dutzend kosten 20 fl.; wie viel kostet 1 Dutzend?

Will ich wissen, wie viel 1 Dutzend kostet, so muss ich die 20 fl. auf 5 Dutzend so vertheilen, dass auf ein Dutzend so viel kommt, als auf das andere; ich muss also 20 fl. in 5 gleiche Theile zerlegen. Auf 1 Dutzend kommt also der 5te Theil von 20 fl., oder 4 fl. — Kürzer: 5 Dutzend kosten 20 fl., 1 Dutzend ist der 5te Theil von 5 Dutzend, 1 Dutzend kostet also auch nur den 5ten Theil von 20 fl., d. i. 4 fl.

Einige Aufgaben dieser Art beruhen auf dem Zusammenhange zwischen den Eintheilungszahlen der Münzen, Maße und Gewichte, und führen auf folgende Rechnungsvortheile:

So viele Zehner das Meter, eben so viele Kreuzer kostet das Decimeter.

So viele Zehner das Ries Papier, eben so viele Kreuzer kostet das Buch.

So viele Gulden der Centner, eben so viele Kreuzer kostet das Kilogr.

So viele Gulden das Hektoliter, eben so viele Kreuzer kostet das Liter.

c) **Schluss von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Vielfachen dieser Mehrheit.**

Die Lösung dieser Aufgaben führt auf das Vervielfachen. Z. B.

4 Kilogr. kosten 5 fl.; wie viel kosten 12 Kil.?

12 Kil. sind 3mal 4 Kil., 12 Kil. kosten also 3mal 5 fl., d. i. 15 fl.

d) **Schluss von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Theiles dieser Mehrheit.**

Die Rechnung wird bei allen diesen Aufgaben durch das Theilen ausgeführt. Z. B.

15 Liter kosten 6 fl.; wie viel kosten 5 Liter?

5 Liter sind der 3te Theil von 15 Lit., 5 Liter kosten also auch nur den 3ten Theil von 6 fl., d. i. 2 fl.

e) **Schluss von dem Preise der Mehrheit durch den Preis der Einheit auf den Preis einer andern Mehrheit.**

Dies sind eigentliche Regeldetri-Aufgaben, bei denen das Theilen mit dem Vervielfachen in Verbindung tritt. Z. B.

4 Ries kosten 20 fl.; wie viel kosten 7 Ries?

Aus dem Preise von 4 Ries kann ich den Preis von 7 Ries nicht unmittelbar berechnen; ich muss zuerst wissen, wie viel ein Ries kostet; 1 Ries ist der 4te Theil von 4 Ries, 1 Ries kostet also auch nur den 4ten Theil von 20 fl., d. i. 5 fl.; 7 Ries sind 7mal 1 Ries, also kosten 7 Ries 7mal 5 fl., d. i. 35 fl.

Dritte Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume bis 1000 und bis zu den Tausendteln.

Einleitung.

§. 51. Das schriftliche Rechnen.

In dem Zahlenkreise von 1 bis 10, wie auch in dessen Erweiterung bis 20 und 100 fand zwischen Kopf- und Zifferrechnen der Ausführung nach kein Unterschied statt. Die schriftlichen Übungen schlossen sich durchgängig an die mündlichen an; dieselben Schlüsse, durch welche die Schüler beim Kopfrechnen zum Resultate gelangten, musſten sie auch beim schriftlichen Rechnen machen; Gedankengang und Form waren bei beiden durchaus dieselben.

Diese Form des schriftlichen Rechnens ist auch in dem weiteren Zahlenkreise bis 1000 noch recht gut anwendbar; sie kann jedoch beim Rechnen mit den später auftretenden größeren Zahlen, das sich meistens nicht mehr im Kopfe ausführen läſst, nicht beibehalten werden. Die Einrichtung unseres Zahlensystems bietet da eigene kürzere Formen, die von der Weise des Kopfrechnens mehr oder weniger abweichen, und das eigentliche Zifferrechnen bilden. Mit diesem kürzeren Verfahren können die Schüler am leichtesten und zweckmäßigsten schon an den Zahlen des kleineren Zahlenraumes bis 1000 vertraut gemacht werden; es wird dadurch nicht nur in die schriftlichen Übungen dieses Zahlenkreises durch den Reiz der Neuheit mehr Anregung gebracht, sondern auch für das später auftretende Zifferrechnen mit größeren Zahlen die nöthige Grundlage gewonnen.

Das eigentliche Zifferrechnen wird übrigens in dem Zahlenraume bis 1000 bei jeder Operation erst dann vorzunehmen sein, wenn die Schüler schon im mündlichen Rechnen volle Geläufigkeit erlangt haben. Der Lehrer hat dabei nachstehendes zu berücksichtigen:

1. Mit den technischen Ausdrücken, welche im Rechnen eingeführt sind, werden die Schüler bei den ersten Beispielen des Zifferrechnens bekannt gemacht, wozu es jedoch nicht so sehr der Definitionen, als vielmehr des wiederholten Gebrauchs dieser Ausdrücke bedarf. Niemals ist mit Namen und Definitionen anzufangen; früher muſs die Sache da sein, dann folgt der Name.

2. Das bei jeder Operation zu beobachtende Verfahren soll den Schülern nicht durch bloßes Vorsagen beigebracht werden; diese müssen vielmehr durch ent-

sprechende Fragen, durch Hinweisung auf ihre von den Zahlen und deren Verhältnissen erworbenen Kenntnisse angeleitet werden, durch angeregtes Nachdenken gleichsam selbst zu finden, was sie bei jeder Rechnungsart thun, wie sie dieses nach einander verrichten sollen, und warum das, was sie thun, richtig ist.

3. Das Rechnungsverfahren d. i. die Regel, welche auf diese Art die Schüler unter der Führung des Lehrers aus mehreren Beispielen selbst ableiten, wird schließlich in bündiger Weise in Worten ausgesprochen. Die lebendige Selbstthätigkeit ist zwar die beste Grundregel, die überall, und besonders im Rechnen, praktisch zur Anwendung kommen soll, und man kann nicht genug darauf bringen, dass aus dem Unterrichte jedes trockene und gedankenlose Regelwerk verbannt bleibe; allein es ist eben so eitler Wahn, wenn manche fordern, dass der Schüler keine Regel anwende, dass er auf keiner Stufe etwas mechanisch übe, sondern bei der Ausrechnung stets nur heuristisch vorgehe. Mögen die Schüler noch so sehr angehalten werden, jede Rechnung durch eine Reihe von Erwägungen und Schlüssen rein geistig auszuführen, so werden sie nach vielfältiger Übung doch immer zuletzt dahin kommen, dass sie sich die mechanische Regel abstrahieren, dass ihnen das Rechnen zur Sache des unmittelbaren Könnens wird, welches jener Schlussfolgerungen nicht mehr bedarf. Will man dieses Mechanismus nennen, so ist das ein Mechanismus edlerer Art, weil ihm Einsicht und Überzeugung zu Grunde liegt.

4. Das jedesmalige Rechnungsverfahren wird an vielen reinen und angewandten Aufgaben, die theils in der Schule auszuarbeiten, theils zur häuslichen Wiederholung aufzugeben sind, eingeübt. Die von den Schülern zu Hause ausgearbeiteten Aufgaben müssen von dem Lehrer durchgesehen, und, wenn darin Fehler vorkommen, zur Verbesserung zurückgestellt werden. Jede Gleichgiltigkeit des Lehrers in dieser Hinsicht hat Unfleiß und Leichtfertigkeit der Schüler zur unausbleiblichen Folge. Häufig geschieht es, dass schwächere oder nachlässige Kinder die häuslichen Aufgaben nicht selbst lösen, sondern die Ausarbeitungen anderer Schüler abschreiben; der verständige Lehrer wird einen solchen Unfug bald entdecken und demselben mit allem Nachdrucke entgegen wirken. — Bei den angewandten Aufgaben dringe der Lehrer stets auf eine verständige Beurtheilung der gegebenen Sach- und Zahlenverhältnisse; der Schüler soll z. B. bei einer Multiplicationsaufgabe nicht bloß darum das Multiplicieren anwenden, weil eben diese Operation an der Reihe ist, sondern durch folgerichtige Schlüsse die Überzeugung gewinnen, dass gerade nur durch die Multiplication der zwei gegebenen Zahlen die in Frage gestellte Zahl gefunden werden kann.

5. Der Lehrer schreite nicht eher zu einer folgenden Rechnungsart, als bis es die Schüler in der Ausführung der vorhergehenden zur vollen Sicherheit und Fertigkeit gebracht haben. Das beständige Zurückgreifen, um bereits Vorgenommenes von neuem zu entwickeln und zu üben, ermüdet den Schüler und lähmt den Fortschritt; es ist zugleich ein Beweis, dass sich der Lehrer Übereilungen zu

Schulden kommen ließ. Überhaupt suche der Lehrer, wenn es nicht vorwärts gehen will, die Ursache stets in sich und in seiner Behandlungsweise und nicht in den Kindern.

§. 52. Einrichtung des dritten Rechenbuches.

Das dritte Rechenbuch soll zunächst das Rechnen im Zahlenraume von 1 bis 1000 enthalten.

Hiebei tritt ein Vorgang auf, welcher von dem Wege, der in den vorhergehenden Zahlenräumen eingeschlagen wurde, theilweise abweicht. In dem Zahlenraume bis 10 schritten wir von Zahl zu Zahl, in jenem bis zu 100 von Zehner zu Zehner vorwärts. Dies war dort nothwendig, damit die Zahlen des ersten Zehners mit Hilfe der Zerlegung allseitig aufgefasst, und damit in den Zehnerräumen des ersten Hunderts die wichtigsten Ergebnisse, insbesondere das Einmaleins, dem Gedächtnisse fester eingeprägt wurden. Wir könnten nun auch bei den Zahlen bis 1000 von Hundert zu Hundert fortschreiten; das hätte jedoch keinen praktischen Wert, da alle Zahlen nach demselben Gesetze gebildet sind und es, wenn einmal dieses Gesetz erkannt wird, gleichgiltig ist, welche Zahlen in der Rechnung vorkommen. Wir werden daher zuerst die Zahlen des neuen Zahlenkreises vorführen und schriftlich darstellen, und dann sogleich innerhalb dieses ganzen Zahlenumfanges nach der Reihe die einzelnen Rechnungsoperationen vornehmen. Bei jeder Operation zerfallen die Übungen in zwei Abtheilungen, von denen die erste das Rechnen im Kopfe und solche schriftliche Übungen, die nach Form und Ausführung genau mit dem mündlichen Rechnen übereinstimmen, die zweite das eigentliche Zifferrechnen enthält. Bei den Übungen im Kopfrechnen wird, damit das Neue an Bekanntes angeknüpft und zugleich das, was einzelnen Schülern etwa entschwunden ist, erneuert und befestiget werde, überall mit W i e d e r h o l u n g e n des bereits Geübten begonnen; dazu tritt dann die E r w e i t e r u n g der bezüglichen Übungen an den größeren Zahlen des neuen Zahlenkreises. An das reine Rechnen schließt sich auf jeder Stufe angewandtes Rechnen an.

Ferner können hier auch die ersten Elemente der Decimalbruchrechnung, d. i. das Rechnen mit Zehnteln, Hunderteln und Tausendteln, vorgenommen werden.

Das dritte Rechenbuch ist im allgemeinen für das d r i t t e S c h u l j a h r bestimmt. An ein- und zweiclassigen Volksschulen, wo die Zeit Einschränkung gebietet, kann der Zahlenkreis bis 1000 nicht so vollständig, wie die früheren Zahlenräume, durchgenommen werden und wird daher als ein für sich bestehender Cursus zu übergehen sein. An solchen Schulen entfällt daher der Gebrauch des dritten Rechenbuches; dagegen muss dann bei der Behandlung des unbegrenzten Zahlenraumes auch auf die Zahlen bis 1000 besondere Rücksicht genommen werden, worüber wir in der IV. Abtheilung dieses Handbuches nähere Andeutungen folgen lassen.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen im Zahlenraume von eins bis tausend.

1. Kenntnis der Zahlen von 1 bis 1000.

§. 53. Wiederholende Zusammenstellung der Zahlen von 1 bis 100.

Wiewohl die Schüler schon in den ersten zwei Schuljahren mit den Zahlen bis 100 bekannt gemacht wurden, so erscheint es aus pädagogischen Rücksichten dennoch rathsam, dieselben auch hier noch einmal wiederholend vorzuführen, damit aber auch schon auf eine immer deutlichere Auffassung des Grundgesetzes unseres Zahlensystems hinzuarbeiten.

1. Mündlich.

Der Lehrer lasse zuerst bis 10, dann bis 100 zählen, und bemerke: Ihr kennt bereits hundert Zahlen. Von diesen bestehen einige bloß aus Einern, andere bloß aus Zehnern, die meisten aber aus Zehnern und Einern. Welche Zahlen bestehen bloß aus Einern? Welche bloß aus Zehnern? Nun nennt auch Zahlen, welche aus Zehnern und Einern bestehen,

Aus wie viel Zehnern und Einern besteht 47, 21, 83, 38, 19, 57, 64, u. s. w.?

Wie heißt die Zahl, welche aus 4 Einern, 9 Zehnern, aus 2 Z. und 4 E., aus 7 Z. und 1 E., u. s. w. besteht?

Zeigt sich da oder dort noch eine Stockung, so helfe man mit der Veranschaulichung an der russischen Rechenmaschine, oder an der Zehnertafel oder an unseren Münzen nach. (II. Abtheilung.)

2. Schriftlich.

Die Einer werden in die erste Stelle (rechts), die Zehner in die zweite Stelle (links) geschrieben.

Nach dieser Vorbemerkung lasse der Lehrer zuerst mit Ziffern geschriebene Zahlen lesen, hierauf ausgesprochene Zahlen mit Ziffern anschreiben.

Leset die Zahl 27. — An welcher Stelle steht hier dier die Ziffer 2? Was bedeutet sie also? An welcher Stelle steht hier die Zahl 7? Was bedeutet sie also? Wie heißt die Zahl, welche aus 2 Zehnern und 7 Einern besteht? 27 wird also gelesen: sieben und zwanzig.

Das Lesen zweizifferiger Zahlen beruhet demnach auf dem Zusammenfassen der Zehner und Einer zu einer Zahl; 27 = 2 Z. 7 E. = sieben und zwanzig.

Wie wird die Zahl drei und vierzig mit Ziffern geschrieben? — Drei und vierzig besteht aus 4 Zehnern und 3 Einern; man schreibt also die Ziffer 3 in die erste und die Ziffer 4 in die zweite Stelle.

Wie wird die Zahl fünfzig geschrieben? Fünfzig besteht aus 5 Zehnern, hat aber keine Einer. Ihr setzet also 5 in die zweite Stelle; was kommt in die erste Stelle? Dürfet ihr diese leer lassen? Würde dann die Ziffer 5 fünf Zehner bedeuten? Ihr setzet also in die Stelle der Einer 0, um anzuzeigen, daſs keine Einer vorkommen.

Das Anschreiben zweistelliger Zahlen beruhet demnach auf dem Zerlegen derselben in Zehner und Einer;

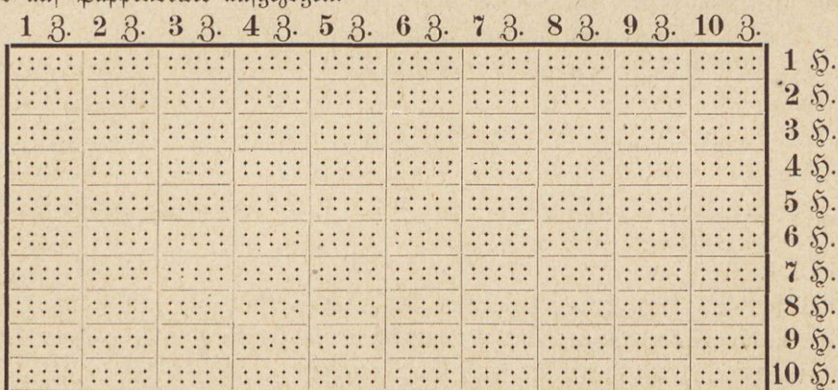
drei und vierzig = 4 Z. 3 E. = 43.
fünfzig = 5 Z. 0 E. = 50.

§. 54. Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000.

1. Mündlich.

Es ist schwer, den Schülern so viele gleichartige Gegenstände vorzuführen, daſs sie die Zahlen von 100 bis 1000 daran anschauen können. Am besten kann man sich zur Versinnlichung der Hundertertafel bedienen.

Die nachstehende Hundertertafel wird von dem Lehrer auf der Schultafel entworfen, oder in groſsem Maſsstabe auf einem Bogen Papier gezeichnet und auf Pappendeckel aufgezogen.



a) Auffassung der Hunderte.

Die anschauliche Entwicklung beginnt mit den Hunderten. Die Schüler sehen an der Hundertertafel, daſs in jedem Felde zehn Punkte, in jeder Reihe zehn solche Felder vorkommen, und daſs zehn solche Reihen unter einander stehen. Es werden nun die Zehner der ersten Reihe gezählt: 1 Zehner, 2 Z., 3 Z. . . . 9 Z., 10 Z.; 10 Zehner sind 1 Hundert oder hundert. In zwei Reihen stehen 20 Zehner oder 2 Hunderte, oder zweihundert; u. s. w. In 10 Reihen sind 100 Zehner oder 10 Hunderte, oder tausend.

Die Reihenfolge

1 Hundert oder 10 Zehner, oder hundert;

2 Hunderte oder 20 Zehner, oder zweihundert;

3 Hunderte oder 30 Zehner, oder dreihundert;
u. s. w.
10 Hunderte oder 100 Zehner, oder tausend

wird nun, indem der Lehrer dabei stets auf die bezügliche Reihe, und zwar auf den letzten Zehner derselben zeigt, wiederholt durchgesprochen.

Hierauf zeigt der Lehrer auf die Reihe und läſst sich von den Schülern die Hunderte nennen; dann nennt er selbst die Hunderte und ein Schüler zeigt auf die entsprechende Reihe; beides zuerst in, dann außer der Ordnung.

Schließlich hebt man noch die dekadischen Einheiten und ihren Zusammenhang hervor: 10 Einer sind 1 Zehner, 10 Zehner sind 1 Hundert, 10 Hunderte sind 1 Tausend, und es folgen Fragen:

Wie viel Zehner sind 1 Hundert, 2 H., 8 H., 5 H.?
Wie viel Hunderte sind 10 Zehner, 60 Z., 30 Z., 90 Z.?
Wie viel Einer sind 1 Hundert, 3 H., 7 H., 400 H.?
Wie viel Hunderte sind 200 Einer, 600 E., 900 E., 500 E.?

b) Auffassung der Hunderte mit Zehnern.

Indem zu der ersten Reihe der Hundertertafel nach und nach das erste, zweite, . . . zehnte Feld der zweiten Reihe hinzugefügt wird, sprechen die Schüler

1 H. und 1 Z. oder hundert zehn,
1 H. und 2 Z. oder hundert zwanzig,
. . . .
1 H. und 10 Z. oder 2 H. oder zweihundert;

dann ebenso

2 H. und 1 Z. oder 210	3 H. und 1 Z. oder 310
2 H. und 2 Z. oder 220	3 H. und 2 Z. oder 320
. . . .	. . . .

und so fort bis 9 H. und 10 Z. oder 10 H. oder 1000.

Hierauf läſst man gegebene Zehnerzahlen als Hunderte und Zehner sowie als Einerzahlen, und umgekehrt darstellen; nämlich

10 Z. = 1 H. = 100	20 Z. = 2 H. = 200
11 Z. = 1 H. u. 1 Z. = 110	21 Z. = 2 H. u. 1 Z. = 210
12 Z. = 1 H. u. 2 Z. = 120	22 Z. = 2 H. u. 2 Z. = 220
. . . .	. . . .

u. s. w. bis 100 Z. = 10 H. = 1000;

dann umgekehrt:

100 = 10 Z.	200 = 20 Z.	300 = 30 Z.
110 = 11 Z.	210 = 21 Z.	310 = 31 Z.
120 = 12 Z.	220 = 22 Z.	320 = 32 Z.
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

u. s. f. bis 1000 = 100 Z.

Diese Umwandlungen werden zuerst in Reihenfolgen, dann außer der Ordnung bis zur Fertigkeit geübt.

c) Auffassung der Hunderte mit Zehnern und Einern.

Nachdem der Schüler bis 1000 zuerst nach Hunderten, dann nach Zehnern gezählt haben, wird nun die Zahlenreihe auch durch die Einer vervollständigt. Der Lehrer zeigt auf die erste Reihe der Hundertertafel und auf den ersten Einer der zweiten Reihe und sagt: wir haben

1 Hundert und 1 Einer oder hundert eins.

Zählen wir noch 1 Einer dazu, so haben wir

1 H. und 2 E. oder hundert zwei.

Setzen wir so einen Einer nach dem andern dazu, so erhalten wir

1 H. und 3 E. oder hundert drei,
1 H. und 4 E. oder hundert vier,
u. s. w.
1 H. u. 10 E. oder 1 H. 1 Z. oder hundert zehn.

Der Lehrer nimmt ebenso aus dem zweiten Felde der zweiten Reihe einen Einer nach dem andern dazu und läſst die Schüler sprechen:

1 H., 1 Z. u. 1 E. oder hundert eilf,
1 H., 1 Z. u. 2 E. oder hundert zwölf,
u. s. w.
1 H., 1 Z. u. 10 E. oder 1 H. u. 2 Z. oder hundert zwanzig.

Die Schüler sehen bald, daſs sie bei weiterer Fortsetzung der Reihe zu allen Zahlen kommen, welche sie schon an der Zehnertafel oder an der Rechenmaschine kennen gelernt haben, nur daſs jede um 1 Hundert größer ist.

Ist die ganze zweite Reihe zugezählt, so erhält man 2 Hunderte oder zweihundert. Dann nimmt man wieder nach und nach die Einer der dritter Reihe dazu und erhält: zweihundert eins, zweihundert zwei, . . . dreihundert.

Ebenso geht die Bildung der Zahlenreihe im vierten, fünften, . . . zehnten Hundert vor sich.

Um die erweiterte Zahlenreihe mit Hilfe unserer Münzen zu veranschaulichen, braucht der Lehrer 10 Guldenstücke, 10 Zehnkreuzerstücke und 10 Kreuzerstücke. Stellt der Kreuzer einen Einer vor, so stellt das Zehnkreuzerstück einen Zehner, und der Gulden, da er 100 Kreuzer gilt, ein Hundert vor. Legt man zu einem Gulden einen Kreuzer, so hat man hundert und einen Kreuzer, es ist also die Zahl 101 dargestellt, welche aus 1 Hundert und 1 Einer besteht. Nimmt man nach und nach immer einen Kreuzer dazu, so erhält man die Zahlen 102, 103, . . . 110. Bei der letzten Zahl kann man die 10 Kreuzer durch einen Zehner ersetzen; 110 besteht aus 1 H. und 1 Z.; das Hundert stellt der Gulden, den Zehner das Zehnkreuzerstück vor. Legt man weitere Kreuzer dazu, so hat man die Zahlen 111, 112, 113, . . . 120; bei 120 kann man wieder 10 Kreuzer durch ein Zehnkreuzerstück ersetzen, die Zahl besteht aus 1 H. und 2 Z., dargestellt durch 1 Gulden und 2 Zehnkreuzerstücke. Auf diese Art wird fortgefahren bis 199; wird hier noch ein Kreuzer hinzugefügt, so erhält man 1 Gulden, 9 Zehner und 10 Kreuzer; die 10 Kreuzer ersetzt man durch 1 Zehner und hat dann 1 Gulden und 10 Zehner; ersetzt man noch die 10 Zehner durch 1 Gulden, so hat man 2 Gulden, welche die Zahl 200 darstellen. Fährt man auf diese Weise fort, so kann die Zahlenreihe bis 999 fortgesetzt werden, welche Zahl durch 9 Gulden, 9 Zehner und 9 Kreuzer dargestellt wird; fügt man noch einen Kreuzer dazu, so hat man 9 Gulden, 9 Zehner und 10 Kreuzer; statt 10 Kreuzer 1 Zehner gesetzt, erhält man 9 Gulden und 10 Zehner; ersetzt man auch die 10 Zehner durch 1 Gulden, so hat man 10 Gulden, welche die Zahl 1000 darstellen. Man kann auch die 10 Gulden durch eine Zehngulden-Banknote ersetzen, welche daher die Zahl 1000 darstellt, wenn der Kreuzer die Zahl 1 vorstellt.

An der russischen Rechenmaschine wie auch mit dem Tillich-schen Apparate können die Zahlen über 100 hinaus nicht mehr dargestellt werden. Dagegen kann hier ein dem letzteren nachgebildetes Veranschaulichungsmittel, das auch bei der Erklärung der Cubikmaße gute Dienste leistet, sehr vortheilhaft angewendet werden. Man theilt an einem aus Holz verfertigten Würfel von 40 Centimeter Kantenlänge jede Kante in 10 gleiche Theile und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch eingeritzte Linien. Dieser Würfel wird parallel mit der Grundfläche in 10 gleiche Platten durchschnitten. Eine dieser Platten wird weiter in 10 gleiche Säulen, und eine dieser Säulen in 10 gleicht Würfel durchschnitten. Einer dieser kleinen Würfel soll nun einen Einer vorstellen. Stellt man zehn solcher kleiner Würfel aufeinander, so bilden sie eine Säule, welche uns daher einen Zehner vorstellt; legt man daran die übrigen 9 unzerschnittenen Säulen, so erhält man eine Platte, welche aus 10 Zehnern besteht und daher ein Hundert vorstellt; trägt man darüber auch die übrigen unzerlegten Platten auf, so erhält man wieder den ganzen großen Würfel, welcher aus 10 Hunderten besteht und daher 1 Tausend vorstellt. Mit Hilfe dieser Platten, Säulen und Würfel kann nun die Zahlenbildung bis tausend auf ganz analoge Weise, wie mit unseren Münzen, veranschaulicht werden.

Es ist von besonderer Wichtigkeit, dass sich die Schüler, bevor zur schriftlichen Darstellung der erweiterten Zahlenreihe geschritten wird, von jeder dieser Zahlen die dekadischen Bestandtheile klar vorzustellen im Stande sind. Der Lehrer frage zu diesem Ende bald nach der Zahl, welche gegebene Hunderte, Zehner und Einer enthält, bald umgekehrt nach den Bestandtheilen einer gegebenen Zahl; z. B.:

Wie heißt die Zahl, welche 7 H. 2 Z. und 9 E. enthält? Wie heißt die Zahl, welche 5 H. 6 Z. 1 E., — 3 H. 8 Z. 0 E., — 8 H. 0 Z. 5 E. u. s. w. enthält?

Wie viele Hunderte, Zehner und Einer enthält die Zahl 346? Aus wie vielen H., Z. und E. besteht die Zahl 812, 559, 940, 407 u. s. w.?

2. Schriftliche Darstellung.

Die Schüler wissen bereits, dass jede Ziffer in der ersten Stelle Einer, in der zweiten Zehner vorstellt; auch haben sie beim Anschreiben der Zahl 100 gegesehen, dass die Ziffer 1 in der dritten Stelle 1 Hundert bedeutet. Es wird nun beigefügt, dass auch jede andere Ziffer an der dritten Stelle eben so viele Hunderte bedeutet, als sie an der ersten Stelle Einer darstellt. Es bedeutet demnach 200 zweihundert, 300 dreihundert u. s. w.

In Bezug auf die Zahl tausend wird bemerkt: Sowie 1 Zehner 10mal so viel als 1 Einer, und 1 Hundert 10mal so viel als 1 Zehner ist, so ist auch 1 Tausend 10mal so viel als 1 Hundert. Sowie man daher die Ziffer 1, damit sie 1 Zehner bedeute, in die zweite, damit sie 1 Hundert bedeute, in die dritte Stelle setzt, ebenso muss man die Ziffer 1, damit sie 1 Tausend bedeute, wieder um eine Stelle weiter links, also in die vierte Stelle rücken. Es ist demnach

1 = eins, 10 = zehn, 100 = hundert, 1000 = tausend.

Den Rang der einzelnen Stellen kann der Lehrer durch folgendes Schema, das er auf der Schultafel entwirft und von den Schülern auf den Schiefertäfelchen nachbilden läßt, zur Anschauung bringen:

4. Stelle **Tausende**	3. Stelle **Hunderte**	2. Stelle **Zehner**	1. Stelle **Einer**		
1	0	0	0	= 1 T. 0 H. 0 Z. 0 E. =	1000
	7	0	0	= 7 H. 0 Z. 0 E. =	700
	4	6	0	= 4 H. 6 Z. 0 E. =	460
	3	9	8	= 3 H. 9 Z. 8 E. =	398
	2	0	5	= 2 H. 0 Z. 5 E. =	205

Um eine dreiziffrige Zahl zu lesen, darf man nur die Hunderte, Zehner und Einer derselben zu einer Zahl zusammenfassen; z. B. 571 bedeutet 5 H., 7 Z., 1 E., also fünf hundert ein und siebenzig.

Um eine gegebene dreistellige Zahl mit Ziffern anzuschreiben, braucht man dieselbe nur in Hunderte, Zehner und Einer aufzulösen und die Hunderte, in die dritte, die Zehner in die zweite, die Einer in die erste Stelle zu setzen. Z. B. fünfhundert acht und zwanzig besteht aus 5 H., 2 Z. und 8 E.; man schreibt daher 5 in die dritte, 2 in die zweite, und 8 in die erste Stelle, also 528. Siebenhundert drei besteht aus 7 H. u. 3 E., hat aber keine Zehner; man setzt darum 7 in dritte, 0 in die zweite, und 3 in die erste Stelle, nämlich 703.

Bei diesen Übungen muss so lange verweilt werden, bis alle Schüler jede dreistellige Zahl sicher und fertig lesen und schreiben können.

§. 55. Maße und Gewichte.

Nachdem der Zahlenraum bis 1000 erweitert wurde, wird der Lehrer nicht unterlassen, auch die Kenntnis der Maße und Gewichte entsprechend zu vervollständigen.

Zur Vervollständigung der Zeiteintheilung wird angeführt: ein gemeines Jahr hat 365 Tage, ein Schaltjahr hat 366 Tage; 10 Jahr bilden ein Jahrzehent, 100 Jahre ein Jahrhundert, 1000 Jahre ein Jahrtausend.

Die Eintheilung der Gewichte wird durch folgende Angaben vervollständiget: 1 Kilogramm = 1000 Gramm; 1 Tonne = 1000 Kilogramm; 1 Gramm = 10 Decigramm; 1 Decigramm = 10 Centigramm; 1 Centigramm = 10 Milligramm, also 1 Gramm = 1000 Milligramm.

Zu den Längenmaßen wird bemerkt: 1 Kilometer = 1000 Meter, 10 Kilometer = 1 Myriameter. 1 Centimeter = 10 Millimeter, also 1 Meter = 1000 Millimeter.

Behufs des Lesens und Anschreibens der reinen Zahlen wurden die Schüler geübt, deren dekadische Bestandtheile zu einer Zahl zusammenzufassen und umgekehrt die Zahlen wieder in diese Bestandtheile zu zerlegen. Es empfiehlt sich, zur besseren Auffassung der dekadischen Münzen, Maße und Gewichte auch bei diesen ähnliche Übungen vorzunehmen. Z. B.

Wie viel *cm* sind 7 *m* 6 *dm* 5 *cm*? — 7 *m* sind 700 *cm*, 6 *dm* sind 60 *cm*; 700 *cm* und 60 *cm* sind 760 *cm*, und 5 *cm* sind 765 *cm*; also 7 *m* 6 *dm* 5 *cm* = 765 *cm*.

Umgekehrt: Wie viel *kg* und *dkg* sind 283 *dkg*? — 200 *dkg* sind 2 *kg*; also 273 *dkg* = 2 *kg* 73 *dkg*.

2. Zusammenzählen oder Addieren.

§. 56. Zuzählen im Kopfe.

In den ersten zwei Schuljahren haben die Schüler mit den Zahlen von 1 bis 100 gerechnet. Wenn auch der Lehrer hiebei nach richtigen Grundsätzen und mit sicherer Gewandtheit zu Werke gegangen ist, so wird doch der erzielte Erfolg bei den einzelnen Kindern sehr verschieden sein. Um auch den schwächeren Schülern ein sicheres und erfolgreiches Fortschreiten möglich zu machen, ist es durchaus nothwendig, dass die bereits vorgenommenen Übungen der Hauptsache nach auch hier wiederholt und den in naturgemäßer Stufenfolge daran sich anschließenden neuen Aufgaben zu Grunde gelegt werden. Nur die öfters wiederkehrende Wiederholung kann das Gelernte fest erhalten und zum bleibenden Eigenthum machen.

a) **Zuzählen von Einern.**

Hier empfiehlt sich die Bildung von Reihen. Z. B. Fanget bei 1 an und zählet immer 2 zu; nämlich:

1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, . . . bis 99.

Ebenso:

$2 + 2 = 4,\ 4 + 2 = 6,\ 6 + 2 = 8, \ldots$ bis 100.

Ferner folgende Übungen:

$1 + 2 = 3, \quad 11 + 2 = 13, \quad 21 + 2 = 23, \ldots$
$2 + 2 = 4, \quad 12 + 2 = 14, \quad 22 + 2 = 24, \ldots$
$3 + 2 = 5, \quad 13 + 2 = 15, \quad 23 + 2 = 25, \ldots$

An diese Wiederholungen schließe sich das Zuzählen von 2 in den höheren Hunderten, als:

$101 + 2 = 103, \quad 103 + 2 = 105, \quad 105 + 2 = 107, \ldots$ bis 199;
$802 + 2 = 804, \quad 804 + 2 = 806, \quad 806 + 2 = 808, \ldots$ bis 900.

Dabei werden die Schüler ersehen, dass man 2 (die Einer) stets nur zu den Einern zu zählen braucht, die Hunderte aber ungeändert läßst.

Auf gleiche Weise wird sodann das Zuzählen von 3, 4, 5, . . . 9 vorgenommen.

Um die Übungen noch mannigfaltiger zu machen und zugleich das Vorangegangene zu wiederholen, lasse man auch abwechselnd zwei Zahlen zuzählen. Z. B. Fanget bei 2 an und zählet abwechselnd 3 und 4 zu; nämlich $4 + 3 = 7$, $7 + 4 = 11$, $11 + 3 = 14$, $14 + 4 = 18$, u. s. w.

Das Zuzählen der Grundzahlen muss zur vollsten Sicherheit geübt werden.

Die schriftlichen Übungen bestehen in Reihen, welche sich ganz an die Form des mündlichen Rechnens anlehnen.

b) **Zuzählen von Zehnern.**

Wie viel ist 50 und 20? Anfangs mit Zahlwerten: 50 sind 5 Z., 20 sind 2 Z., 5 Z. und 2 Z. sind 7 Z. oder 70; also 50 und 20 ist 70. Schließlich sogleich: 50 und 20 ist 70.

Ebenso: Wie viel ist 300 und 200? $300 = 3$ H., $200 = 2$ H.; 3 H. und 2 H. sind 5 H. oder 500; also 300 und 200 ist 500.

Besonders zu üben sind Aufgaben mit dem Übergange aus einem Hundert in das andere. Dabei ergänzt man zunächst die erste Zahl zum vollen Hundert, und zählt dann zum neuen Hundert das übrige dazu. Z. B.

Wie viel ist 80 und 70? 80 und 20 ist 100, und noch 50 dazu ist 150.

Wie viel ist 360 und 90? 360 und 40 ist 400, und 50 ist 450.

Wie viel ist 45 und 30? 45 ist $40 + 5$; $40 + 30 = 70$, $70 + 5 = 75$; also $45 + 30 = 75$.

Das Zerlegen in Zehner und Einer darf übrigens nur anfänglich stattfinden; ist die Einsicht erreicht, dann müssen die Schüler sogleich zu der unzerlegten ersten Zahl die zweite dazuzählen, also kurz: 45 und 30 ist 75. Fertigkeit verlangt Kürze.

Auch hier ist der Übergang von einem Handert in ein anderes sorgfältig zu üben. Z. B. Wie viel ist 97 und 40? 97 und 10 ist 107, und 30 ist 137.

Die Schüler überzeugen sich bei diesen Übungen, dass die Zehner zu den Zehnern gezählt werden, die Einer aber ungeändert bleiben.

Für die schriftlichen Übungen dienen auch hier vorzugsweise die Reihen.

c) **Zuzählen von Zehnern und Einern.**

Wie viel ist 25 und 43?

25 und 40 ist 65, und 3 ist 68. — Hier werden zu der unzerlegten ersten Zahl zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl zugezählt.

Oder: 25 = 2 Z. + 5 E., 43 = 4 Z. + 3 E.; 2 Z. + 4 Z. = 6 Z., 5 E. + 3 E. = 8 E.; 5 Z. + 8 E. = 68.

Die zweite Ausrechnungsweise ist weitläufiger, sie bereitet jedoch auf das Zifferrechnen vor, indem die Schüler daran klar ersehen, dass Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern zuzuzählen sind. Für das mündliche Rechnen verdient das erste kürzere Verfahren schon darum den Vorzug, weil es gegen das Vergessen einzelner Theile der Rechnung schützt, worauf beim Kopfrechnen immer ein besonderes Gewicht zu legen ist.

Wenn zu einer Zahl eine zweite, welche Hunderte, Zehner und Einer enthält, zugezählt werden soll, so zählt man zu der unzerlegten ersten Zahl zuerst die Hunderte, dann die Zehner und endlich die Einer der zweiten Zahl dazu. Z. B. Wie viel ist 473 und 216? 473 und 200 ist 673, und 10 ist 683, und 6 ist 689.

Da die Kinder zwei dreistellige Zahlen nicht leicht im Gedächtnisse behalten können, so wird der Lehrer bei den Aufgaben dieser Art nicht zu lange verweilen; befähigtere Schüler sollen jedenfalls auch solche Aufgaben im Kopfe zu lösen wissen.

Vortheile beim Zuzählen im Kopfe.

Bei der bisherigen Ausführung des Zuzählens haben wir überall das allgemeine Verfahren, welches sich bei allen Aufgaben derselben Art ohne Beschränkung anwenden lässt, angegeben. Es gibt aber auch Aufgaben von besonderer Beschaffenheit, welche häufig wesentliche Erleichterungen in der Ausrechnung gewährt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die eine Zahl nur wenig kleiner oder größer als ein voller Zehner oder ein volles Hundert ist. Dabei wird diese Zahl um so viel vermehrt oder vermindert, dass man gerade einen vollen Zehner oder ein volles Hundert erhält, und dann die andere Zahl um eben so viel vermindert oder vermehrt. Z. B.

$$45 + 29 = 44 + 30 = 74,$$
$$36 + 42 = 38 + 40 = 78,$$
$$58 + 64 = 60 + 62 = 122,$$
$$225 + 198 = 223 + 200 = 423,$$
$$402 + 367 = 400 + 369 = 769,$$
$$543 + 290 = 533 + 300 = 833.$$

Wie viel ist 38 + 29? 65 + 78? 37 + 81? 48 + 26? 98 + 114? 325 + 297? 502 + 435?

d) Die abgeleiteten Aufgaben haben die Bestimmung, neben dem Rechnen auch die klare Auffassung verschiedener Ausdrucksweisen und die sprachrichtige Darstellung zusammengesetzter Satzformen, also das Denken und Sprechen zu üben. Die Antwort muss immer in einem vollständigen Satze erfolgen.

e) Bei den angewandten Aufgaben hat der Lehrer unnachsichtlich darauf zu dringen, dass die Schüler vor der Ausrechnung immer die nöthigen Schlüsse bilden, und dabei hier, beim Zuzählen, das Wörtchen und betonen. Z. B.

Ein Landmann hat 70 Schafe, er kauft noch 60 dazu; wie viel Schafe hat er dann?

Der Landmann hat dann 70 und 60 Schafe, d. i. 130 Schafe.

§. 57. Schriftliches Addieren.

Die schriftlichen Übungen, die bisher über das Zuzählen vorgenommen wurden, unterscheiden sich in der Form nicht vom mündlichen Rechnen, sie lehnen sich durchgängig an das Verfahren des Kopfrechnens an. Hier soll nun das schriftliche Rechnen die bisherige Form verlassen und die ihm eigenthümliche Form annehmen, welche auf der Anordnung des Zehnersystems beruht und auch für die höheren Zahlenräume ihre Giltigkeit behält. Ein wichtiger Gegensatz zwischen diesen beiden Rechnungsweisen besteht darin, dass man bei dem eigentlichen Zifferrechnen bei den Einern beginnt und von unten hinauf arbeitet, während beim Kopfrechnen bei der höchsten Stelle angefangen und von oben nach unten gearbeitet wird.

Damit die Schüler eine klare Einsicht in den Gang des neuen schriftlichen Verfahrens gewinnen und den Grund desselben erkennen, müssen sie auf dieser Stufe angehalten werden, zu den einzelnen Ziffern stets auch die Benennung der dekadischen Ordnungen, als: Einer, Zehner, Hunderte beizufügen; erst bei den Operationen in den höheren Zahlenräumen, wo es sich zugleich um das Schnellrechnen handelt, werden diese Benennungen weggelassen werden.

a) Addieren ohne Übergang in höhere Ordnungen.

Die Schüler haben schon aus den Übungen im Kopfrechnen ersehen, dass nur gleichnamige Zahlen zu einander gefügt werden können, nämlich Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, u. s. w. Sie begreifen daher auch, dass es am zweckmäßigsten sei, wenn man, um die gleichnamigen Zahlen leichter überblicken und zusammenzählen zu können, dieselben gleich beim Anschreiben so stellt, dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, . . . zu stehen kommen.

Es seien die Zahlen 32 und 53 zusammenzuzählen.

Im Kopfe:

Wir lassen 32 unzerlegt, und zählen dazu zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl 53; also: 32 und 50 ist 82, und 3 ist 85.

Oder: Wir zerlegen beide Zahlen in Zehner und Einer, und zählen dann Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern; also: 32 = 3 Z. + 3 E., 53 = 5 Z. + 3 E., 3 Z. und 5 Z. sind 8 Z., 2 E. und 3 E. sind 5 E., 8 Z. und 5 E. sind 85.

Schriftlich.

32 Wir schreiben Einer unter Einer und Zehner unter Zehner und zählen
53 zuerst die Einer zusammen: 3 E. und 2 E. sind 5 E., und schreiben 5
85 unter die Einer, ziehen aber, damit die neue Zahl von den gegebenen Zahlen abgesondert werde, noch früher einen Querstrich. Dann zählen wir die Zehner zusammen: 5 Z. und 3 Z. sind 8 Z., und schreiben 8 unter die Zehner. Wir erhalten also 8 Z. und 5 E. d. ist 85.

Läßt man sodann das Zusammenzählen von oben herab vornehmen, hierauf zuerst die Zehner und dann die Einer zusammenzählen, so werden sich die Schüler überzeugen, daß man in jedem Falle dieselbe Zahl bekommt.

Nun werden die Schüler mit den technischen Ausdrücken bekannt gemacht. Ihr habet hier die Zahlen 32 und 53 zusammengezählt. Zwei oder mehrere Zahlen zusammenzählen, heißt auch addieren. Welche Zahlen habet ihr also hier addiert? Die Zahlen, welche zusammengezählt werden, heißen Posten oder Summanden. Aus wie vielen Posten besteht unsere Rechnung? Wie heißt der erste Posten, von oben nach unten gezählt? Wie heißt der zweite Posten? Welche Zahl habet ihr durch das Zusammenzählen gefunden? Diese Zahl heißt die Summe. Was ist mehr: 32 und 53, oder 85? Die Summe ist nur eine Zahl, und diese eine Zahl ist genau so groß, als die addierten Zahlen zusammengenommen.

Diese Ausdrücke werden, damit sie den Schülern recht geläufig werden, bei den folgenden Aufgaben wiederholt gebraucht.

b) **Addieren mit Übergang in höhere Ordnungen.**

68 + 24 = ?

Im Kopfe: 68 und 20 ist 88, und 4 ist 92.

Schriftlich.

68 Wir addieren zuerst die Einer: 4 E. und 8 E. sind 12 E., oder 1 Z.
24 und 2 E.; die 2 E. kommen an die Einerstelle, 1 Z. wird zu den vor-
92 handenen Zehnern gezählt. 1 Z. und 2 Z. sind 3 Z., und 6 Z. sind 9 Z.; die 9 setzen wir an die Zehnerstelle. Wie viel beträgt also die Summe? 9 Z. 2 E. = 92.

Dann lasse man die Addition bei den Zehnern beginnen. 2 Z. und 6 Z. sind 8 Z.; diese schreiben wir in die Zehnerstelle. Nun addieren wir die Einer: 4 E. und 8 E. sind 12 E. oder 1 Z. und 2 E.; die 2 E. setzen wir an die Einerstelle. Wohin kommt aber 1 Z. zu stehen? An die Zehnerstelle können wir ihn nicht setzen, weil dort schon 8 Z. stehen; wir werden daher 1 Z. zu den bereits erhaltenen 8 Z. zählen, also die schon angeschriebene Ziffer 8 weglöschen und dafür

9 setzen. Diese Verbesserung ist nicht nöthig, wenn man bei den Einern zu addieren anfängt.

Daraus ersehen die Schüler, dass es am zweckmäßigsten sei, die schriftliche Addition immer bei den Einern zu beginnen.

```
 245
 118
 207
 339
 ---
 909
```

Ebenso verfahren wir bei dreistelligen Zahlen. Z. B.

9 E. und 7 E. sind 16 E., und 8 E. sind 24 E., und 5 E. sind 29 E., oder 2 Z. und 9 E.; die 9 E. werden an die Einerstelle geschrieben, die 2 Z. zu den gegebenen Zehnern weiter gezählt.

2 Z. und 3 Z. sind 5 Z., und 1 Z. sind 6 Z., und 4 Z. sind 10 Z. = 1 H. 0 Z.; wir setzen an die Zehnerstelle eine Null und zählen 1 H. zu den vorhandenen Hunderten.

1 H. und 3 H. sind 4 H., und 2 H. sind 6 H., und 1 H. sind 7 H. und 2 H. sind 9 H.; 9 schreiben wir an die Stelle der Hunderte.

---

3. Wegzählen oder Subtrahieren.

§. 58. Wegzählen im Kopfe.

Der Stufengang, den wir hier befolgen, entspricht vollständig demjenigen beim Zuzählen im Kopfe.

a) **Wegzählen von Einern.**

Zur Einübung des Wegzählens von 2 und den folgenden Grundzahlen können auch hier sehr vortheilhaft die Reihen benutzt werden.

100 — 2 = 98, 98 — 2 = 96, 96 — 2 = 93. . . . bis 0;
99 — 2 = 97, 97 — 2 = 95, 95 — 2 = 94, . . . bis 1.

Ebenso in den höheren Hunderten:

200 — 2 = 198, 198 — 2 = 196, . . . bis 100;
799 — 2 = 797, 797 — 2 = 795, . . . bis 701.

Ferner:

3 — 2 = 1, 13 — 2 = 11, 23 — 2 = 21, . . .
7 — 2 = 5, 17 — 2 = 15, 27 — 2 = 25, . . .
u. s. w.

Ähnliche Übungen werden beim Wegzählen von 3, 4, 5, . . . 9 vorgenommen.

Zum Schlusse lasse man abwechselnd zwei Zahlen wegzählen, oder eine Zahl zuzählen und eine zweite wegzählen. Z. B.:

100 — 2 = 98	3 + 7 = 10	300 — 8 = 292
98 — 6 = 92	10 — 3 = 7	292 + 5 = 297
92 — 2 = 90	7 + 7 = 14	297 — 8 = 289
90 — 6 = 84	14 — 3 = 11	289 + 5 = 294
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Die mündlich vorgenommenen Übungen werden auch schriftlich wiederholt.

b) **Wegzählen der Zehner.**

$$60 - 20 = ?$$

Zuerst ausführlich: 60 sind 6 Z., 20 sind 2 Z.; 6 Z. weniger 2 Z. sind 4 Z. oder 40; also 60 weniger 20 ist 40.

Dann ohne Zahlwerte sogleich: 60 weniger 20 ist 40.

Ebenso mit Hunderten.

$$800 - 300 = ?$$

800 sind 8 H., 300 sind 3 H.; 8 H. weniger 3 H. sind 5 H. oder 500. — Dann kurz: 800 weniger 300 ist 500.

Wenn beim Wegzählen der Zehner der Übergang aus einem Hundert in das andere eintritt, zähle man von der ersten Zahl zuerst so viele Zehner weg, daſs man das reine Hundert erhält, und dann von diesem die noch übrigen Zehner. Z. B.

Wie viel ist 130 weniger 50? 130 weniger 30 ist 100, weniger 20 ist 80; also $130 - 50 = 80$.

Wie viel ist 76 weniger 40?

Anfangs: $76 = 70 + 6$; $70 - 40 = 30$, $30 + 6 = 36$, also $76 - 40 = 36$. Später läſst man die erste Zahl unzerlegt und zählt von ihr sogleich die Zehner der zweiten weg; nämlich: 76 weniger 40 ist 36.

Die Schüler überzeugen sich dabei, daſs die Zehner von den Zehnern weggezählt werden, die Einer aber unverändert bleiben.

Wie viel ist 187 — 50? 334 — 20? 768 — 60? 340 — 200? 775 — 400?

Nun werden auch Aufgaben vorgelegt, bei denen ein Durchgang durch das Hundert stattfindet. Z. B.

Wie viel ist 234 weniger 40? 234 weniger 30 ist 204, weniger 10 ist 194.

c) **Wegzählen der Zehner und Einer.**

Wie viel ist 65 weniger 41?

Wir lassen die Zahl 65 unzerlegt und zählen von ihr zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl weg; nämlich: 65 weniger 40 ist 25, weniger 1 ist 24.

Oder: 65 = 6 Z. + 5 E., 41 = 4 Z. + 1 E.; 6 Z. — 4 Z. = 2 Z., 5 E. — 1 E. = 4 E.; 2 Z. + 4 E. = 24.

Das erste Verfahren ist kürzer und für das Kopfrechnen vortheihafter, das zweite gewährt den Schülern die Einsicht, daſs Zehner von Zehnern, Einer von Einern weggezählt werden, und bereitet dadurch auf das Zifferrechnen vor.

Das gleiche Verfahren gilt beim Wegzählen dreistelliger Zahlen. Man läſst die erste Zahl unzerlegt, und zählt von ihr zuerst die Hunderte, dann die Zehner, endlich die Einer der zweiten Zahl weg. Z. B.:

Wie viel ist 791 weniger 548? 791 weniger 500 ist 291, weniger 40 ist 251, weniger 8 ist 243.

Die Übungen der letzteren Art sind schwierig und dürfen, damit sie nicht ermüden, nicht zu weit getrieben werden.

Vortheile beim Wegzählen im Kopfe.

Wie beim Zuzählen, ebenso läſst sich auch beim Wegzählen im Kopfe die Rechnung öfters dadurch vereinfachen, daſs man unbequeme Zahlen in andere, das Resultat nicht ändernde bequeme Zahlen verwandelt und sodann mit diesen rechnet. Hier ist vor allem nöthig, den Schülern den Satz zur Klarheit zu bringen, daſs sich der Unterschied ganz gleich bleibt, ob derselbe zwischen den gegebenen, oder zwischen den um gleichviel vergrößerten oder um gleichviel verkleinerten Zahlen bestimmt wird. Nehmen wir die Zahlen 85 und 65, so ist 85 — 65 = 20: vergrößern wir die beiden Zahlen um 5, so so ist auch 90 — 70 = 20; verkleinern wir die Zahlen um 5, so ist auch 80 — 60 = 20; der Unterschied ändert sich also nicht. Dasselbe ist an mehreren Beispielen zu zeigen. Durch die Anwendung dieses Satzes lassen sich nun die gegebenen Zahlen so verwandeln, daſs jedesmal nur reine Zehner wegzuzählen sind. Z. B.:

$$46 - 28 = 48 - 30 = 18,$$
$$95 - 32 = 93 - 30 = 63,$$
$$148 - 73 = 145 - 70 = 75,$$
$$853 - 298 = 855 - 300 = 555.$$

Wie viel ist 69 — 43? 86 — 68? 75 — 31? 82 — 66? 197 — 54? 208 — 85? 477 — 97? 632 — 303?

Auf diese vortheilhaftere Berechnung sind die Schüler, wenn sie nicht von selbst darauf kommen, durch entsprechende Fragen hinzuleiten, jedoch erst dann, wenn sie die allgemein anwendbare Rechnungsweise richtig erfaſst und vielseitig geübt haben.

d) Bei den angewandten Aufgaben sind die Schüler anzuhalten, die zur Auflösung erforderlichen Schlüsse klar und bündig auszusprechen. Z. B.:

Eine Kiste mit Feigen wiegt 84 *kg*, die Kiste allein wiegt 9 *kg*; wie viel wiegen die Feigen?

Auflösung. Die Feigen und die Kiste wiegen zusammen 84 *kg*; das Gewicht erhält man, wenn man von dem ganzen Gewichte, 84 *kg*, das Gewicht der Kiste, 9 *kg*, wegzählt. Die Feigen wiegen also 84 *kg*, weniger 9 *kg*, d. i. 75 *kg*.

§. 59. Schriftliches Subtrahieren.

Die schriftliche Subtraction kann auf zweierlei Art verrichtet werden. Um den Unterschied zweier Zahlen zu erhalten, kann man entweder die kleinere von der größeren wegzählen und angeben, wie viel noch übrig bleibt, oder man kann suchen, wie viel zu der kleineren Zahl zugezählt werden müsse, um die größere zu erhalten. In beiden Fällen erhält man dasselbe Resultat. So sei z. B. der Unterschied zwischen 9 und 4 zu bestimmen; entweder zählt man 4 von 9 weg, worauf noch 5 zurückbleibt, oder man sucht, wie viel noch zu 4 zugezählt werden müsse, um 9 zu erhalten, und findet ebenfalls 5.

Die zweite Art des Subtrahierens erscheint zwar für den weiter fortgeschrittenen Rechnungsunterricht sehr vortheilhaft, ihre Auffassung ist jedoch für den Anfänger etwas schwierig, auch bringt sie den Begriff des Subtrahierens als Wegzählen nicht zu so mittelbarer Anwendung, als die erste oben angedeutete Subtractionsweise. Darum halten wir es für zweckentsprechend, vorerst das schriftliche Subtrahieren auch in der Ausführung als eigentliches Wegzählen zu behandeln.

a) **Subtrahieren ohne Übergang in andere Ordnungen.**

Da die Schüler schon bei den Aufgaben über das Wegzählen im Kopfe eingesehen haben, dass Einer nur von Einern, Zehner nur von Zehnern, . . . weggezählt werden können, werden sie hier aufmerksam gemacht, dass dasselbe auch beim schriftlichen Wegzählen stattfindet, und dass daher wegen der leichteren Übersicht der gleichnamigen Zahlen am zweckmäßigsten ist, die Zahl, welche weggezählt werden soll, so unter die andere Zahl zu schreiben, dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen.

Es soll von 58 die Zahl 23 weggezählt werden.

Im Kopfe.

Wir lassen 58 unzerlegt, und zählen davon zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl 23 weg; nämlich: 58 weniger 20 ist 38, weniger 3 ist 35.

Oder: 58 = 5 Z. + 8 E., 23 = 2 Z. + 3 E.; 5 Z. — 2 Z. = 3 Z., 8 E. — 3 E. = 5 E.; 3 Z. + 5 E. = 35.

Schriftlich.

58 Wir schreiben Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, und zählen zuerst
23 die Einer, dann die Zehner weg. 3 E. von 8 E. bleiben 5 E.; 2 Z. von
35 5 Z. bleiben 3 Z. Wir erhalten also 3 Z. und 5 E. = 35.

Sollten die Schüler, wie sie es vom Kopfrechnen her gewohnt sind, zuerst die Zehner, dann die Einer wegzählen wollen, so lasse man es angehen; sie überzeugen sich, dass auch da dieselbe Zahl herauskommt.

Eine Zahl von einer andern wegzählen, heißt *subtrahieren*; hier wurde also 23 von 58 subtrahiert. Von welcher Zahl wurde hier weggezählt? Diese Zahl, 58, heißt *Minuend*. Welche Zahl wurde von 58 weggezählt? Diese Zahl, 23, heißt *Subtrahend*. Und welche Zahl ist übrig geblieben? Diese Zahl, 35, wird der *Rest* genannt. Da der Rest 35 anzeigt, um wie viel sich 58 und 23 von einander unterscheiden, so heißt er auch der *Unterschied* (die Differenz).

b) **Subtrahieren mit Übergang in andere Ordnungen.**

Um z. B. 37 von 82 wegzuzählen, setzen wir die gleichnamigen Stellen unter einander und beginnen bei den Einern zu subtrahieren. 7 E. können von
82 2 E. nicht weggezählt werden. Was würdet ihr thun, wenn ihr 7 Kr.
37 bezahlen solltet, und bloß 2 Kr., aber auch Zehnkreuzerstücke hättet? Ebenso
45 werdet ihr es hier machen; ihr werdet von den 8 Zehnern einen Zehner *entlehnen* oder *borgen*, und denselben in Einer verwandeln. Wie viele Zehner

waren im Minuend da? Und wenn ihr davon einen borget, wie viele Zehner bleiben noch? Im Minuend sind also jetzt nicht mehr 8, sondern nur 7 Zehner: um dieses anzuzeigen, setze man über 8 einen Punkt, den Borgepunkt. Nun kann subtrahiert werden. Wie viele Einer gibt der geborgte Zehner? Und die vorhandenen 2 Einer dazu, sind 12 Einer; von diesen 12 E. sind 7 E. wegzuzählen: 7 E. von 12 E. bleiben 5 E. Was bedeutet 8 mit dem Borgepunkte? Wir haben also: 3 Z. von 7 Z. bleiben 4 Z. Wie groß ist der ganze Rest?

Würden die Schüler das Wegzählen bei den Zehnern anfangen, so hätten sie: 3 Z. von 8 Z. bleiben 5 Z.; 7 E. kann man von 2 E. nicht wegnehmen, man muss von den übriggebliebenen 5 Z. einen Z. borgen; dann bleiben nur noch 4 Z., und man müsste die im Reste schon angeschriebenen 5 Zehner weglöschen und dafür 4 Z. setzen; u. s. w. Ein solches Verbessern schon geschriebener Ziffern würde, wenn man bei der höchsten Stelle zu subtrahieren beginnt, jedesmal eintreten, so oft man borgen muss; dagegen tritt es niemals ein, wenn man das Wegzählen bei den Einern anfängt. Die Schüler sehen daher ein, dass es beim Zifferrechnen zweckmäßiger sei, das Subtrahieren jedesmal bei den Einern anzufangen.

Ebenso verfährt man, wenn bei den Hunderten entlehnt wird. Z. B.

$\dot{3}59$ 7 E. von 9 E. bleiben 2 E., 6 Z. kann ich von 5 Z. nicht weg-
$\underline{167}$ nehmen, ich borge 1 H., dieses gibt 10 Z., und 5 Z. sind 15 Z., 6 Z.
192 von 15 Z. bleiben 9 Z.; 1 H. von 2 H. (3 mit dem Borgepunkte bedeutet nur 2) bleibt 1 H.

Eine besondere Berücksichtigung verdient noch der Fall, wenn die Stelle des Minuends, von welcher entlehnt werden soll, eine Null enthält. Z. B.

Wie viel ist 705 — 248?

$\dot{7}\dot{0}5$ 8 E. kann ich von 5 E. nicht wegnehmen, ich sollte 1 Z. entlehnen,
$\underline{248}$ aber es sind keine Zehner da; ich borge daher bei den 7 H. ein Hundert,
457 es bleiben dort noch 6 H., was ich durch einen Punkt über 7 andeute. Das geborgte Hundert gibt 10 Zehner, welche an die Stelle der 0 kommen; von diesen 10 Z. borge ich nun 1 Z., es bleiben noch 9 Z., und das deute ich durch einen Punkt über 0 (eigentlich 10) an. Der entlehnte Zehner hat 10 Einer, und die bereits vorhandenen 5 E. dazu, sind 15 Einer. Ich habe dann: 8 E. von 15 E. bleiben 7 E.; 4 Z. von 9 Z. bleiben 5 Z.; 2 H. von 6 H. bleiben 4 H. — Die Schüler gewinnen dabei die Einsicht, dass Null mit dem Borgepunkte ($\dot{0}$) 9 bedeutet.

---

4. Vervielfachen oder Multiplicieren.

§. 60. Vervielfachen im Kopfe.

a) **Vervielfachen von Einern mit Einern.**

Die Grundlage des Vervielfachens, das Einmaleins, ist schon in den einzelnen Zehnerräumen des ersten Hunderts zur Veranschaulichung und vielseitigen

Übung gelangt. Damit sich jedoch dasselbe unverlierbar dem Gedächtnisse der Schüler einpräge, wird hier eine Wiederholung um so zweckmäßiger erscheinen, als ja überhaupt das Neue an Bekanntes angeknüpft werden muss.

Die hier vorzunehmenden Übungen enthalten:

1) Das Vervielfachen einer und derselben Grundzahl mit allen Grundzahlen, als:

1mal 1 ist 1	1mal 2 ist 2	1mal 3 ist 3	u. s. w.
2mal 1 ist 2	2mal 2 ist 4	2mal 3 ist 6	
3mal 1 ist 3	3mal 2 ist 6	3mal 3 ist 9	
4mal 1 ist 4	4mal 2 ist 8	4mal 3 ist 12	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

2) Das Vervielfachen sämmtlicher Grundzahlen mit derselben Grundzahl, nämlich:

1mal 1 ist 1	2mal 1 ist 2	3mal 1 ist 3	u. s. w.
1mal 2 ist 2	2mal 2 ist 4	3mal 2 ist 6	
1mal 3 ist 3	2mal 3 ist 6	3mal 3 ist 9	
1mal 4 ist 4	2mal 4 ist 8	3mal 4 ist 12	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

Die Vielfachen jeder Gruppe werden zuerst in der Ordnung bald von einzelnen Schülern, bald im Chor durchgesprochen, dann außer der Reihenfolge angegeben und bis zur vollsten Geläufigkeit wiederholt.

Zu diesen Übungen können sogleich einfache Anwendungen dazutreten; z. B.:

1 Semmel kostet 2 Kr.; 2 Semmeln kosten 2 × 2 Kr. oder 4 Kr.;
3 „ „ 3 × 2 „ „ 6 „
4 „ „ 4 × 2 „ „ 8 „
u. s. w.

1 Woche hat 7 Tage; 2 Wochen haben 2 × 7 Tage oder 14 Tage;
3 „ „ 3 × 7 „ „ 21 „
4 „ „ 4 × 7 „ „ 28 „
u. s. w.

b) **Vervielfachen von reinen Zehnern oder reinen Hunderten mit Einern.**

Wie viel ist 2mal 30? Anfangs: 30 sind 3 Z., 2mal 3 Z. sind 6 Z. oder 60. Später sogleich: 2mal 30 ist 60.

Ebenso:

2 × 300 = 2 × 3 H. = 6 H. = 600.

Wie viel ist 4 × 200? 3 × 300? 2 × 500?

Auch hier empfehlen sich Anwendungen in Reihen; z. B.

1 Hektoliter kostet 40 fl.; 2 Hektoliter kosten 2 × 40 fl. oder 80 fl.;
3 „ „ 3 × 40 „ „ 120 „
4 „ „ 4 × 40 „ „ 160 „
u. s. w.

c) **Vervielfachen von Zehnern und Einern.**

Wie viel ist 2mal 34? 2mal 30 ist 60, 2mal 4 ist 8, 60 und 8 ist 68.

Es werden also zuerst die Zehner, dann die Einer 2mal genommen und dann die beiden Vielfachen zusammengezählt.

Ebenso bei dreistelligen Zahlen.

Wie viel ist 2mal 426? 2mal 400 ist 800; 2mal 20 ist 40, 80 und 40 ist 840; 2mal 6 ist 12, 840 und 12 ist 852.

Anwendungen:

1 Jahr hat 12 Monate; 2 Jahre = 2 × 12 Monate oder 24 Monate;
3 " = 3 × 12 " " 36 "
u. s. w.

d) **Vervielfachen mit reinen Zehnern.**

Hier ist zunächst das Vervielfachen mit 10 und mit 100 zu üben.

10 × 10 = 10 × 1 Z. = 10 Z. = 100,
10 × 20 = 10 × 2 Z. = 20 Z. = 200,
10 × 30 = 10 × 3 Z. = 30 Z. = 300, u. s. w.

Ist die Einsicht erreicht, so sprechen die Schüler kurz: 10 × 10 = 100, 10 × 20 = 200, 10 × 30 = 300 u. s. w.

Um das Vervielfachen mit 20 zum klaren Verständnis zu bringen, schicke man folgendes voraus: 20 ist 10mal so viel als 2. Wenn ich daher eine Zahl 20mal nehme, so habe ich 10mal so viel, als wenn ich sie 2mal nehme. Eine Zahl wird also 20mal genommen, wenn ich sie 2mal nehme und das Zweifache von ihr 10mal nehme.

Z. B. Wie viel ist 20mal 4? 2 × 4 = 8, 20 × 4 ist 10mal so viel, also 10 × 8 oder 80.

Ebenso verfährt man beim Vervielfachen mit 30, 40, 50, . . . 90.

Sind Einer mit reinen Hunderten, oder reine Zehner mit reinen Zehnern, oder endlich Zehner und Einer mit reinen Zehnern zu vervielfachen, so sind es dieselben Schlüsse, nach denen die Rechnung vollzogen wird. Z. B.

Wie viel ist 200mal 3? 2 × 3 = 6, 200 × 3 ist 100mal so viel, also 100 × 6 = 600.

Wie viel ist 30mal 20? 3 × 20 = 60; 30mal 20 ist 10mal so viel, also 10 × 60 = 600.

Wie viel ist 60mal 12? 6 × 12 = 72; 60mal 12 ist 10mal so viel, also 10 × 72 = 720.

Eine sorgfältige Behandlung dieser und ähnlicher Aufgaben wird das spätere Zifferrechnen vortheilhaft unterstützen. Man halte darauf, dass die Schüler ihre Schlüsse genau und bündig aussprechen.

e) **Vervielfachen mit Zehnern und Einern.**

Sind Einer mit Zehnern und Einern zu vervielfachen, so vervielfacht man sie zuerst mit den Zehnern, dann mit den Einern, und zählt die beiden Vielfachen zusammen. Z. B.

Wie viel ist 12mal 7? 10mal 7 ist 70, 2mal 7 ist 14, 70 und 14 ist 84.

Wenn eine zweistellige Zahl mit Zehnern und Einern zu vervielfachen ist, läſst man die erste Zahl unzerlegt, vervielfacht sie mit den Zehnern, dann mit den Einern, und zählt die gefundenen Zahlen zusammen. Z. B.

Wie viel ist 13mal 24? 10mal 24 ist 240, 3mal 24 ist 72, 240 und 72 ist 312.

Wenn die zweistellige Zahl, mit welcher vervielfacht werden soll, selbst ein Vielfaches einer andern Zahl ist, so kann das Vervielfachen oft erleichtert werden. Mit diesem Vortheile können hier die Schüler bekannt gemacht werden.

Wenn ich 6 3mal nehme, so erhalte ich 18. Wenn ich das 6fache einer Zahl 3mal nehme, so erhalte ich das 18fache dieser Zahl. Um also eine Zahl 18mal zu nehmen, nehme ich sie zuerst 6mal, und das 6fache von ihr noch 3mal. Z. B.

Wie viel ist 18mal 9? Das 18fache ist 3mal so viel als das 6fache; 6mal 9 ist 54, 3mal 54 ist 162.

Ebenso:

Das 12fache ist 3mal so viel als das 4fache.
" 15 " " 3 " " " " " 5 "
" 36 " " 4 " " " " " 9 "
" 49 " " 7 " " " " " 7 " u. s. w.

Wie viel ist 12 × 8? 21 × 4? 63 × 5? 81 × 6? 15 × 17? 32 × 23? 42 × 19?

f) **Angewandte Aufgaben.**

Dieselben sind hier sämmtlich Schluſsrechnungen, die durch das Vervielfachen gelöst werden. Über die Behandlung der Schluſsrechnungen enthält der Anhang zu der III. Abtheilung §§. 66—73 ausführlichere Bemerkungen.

An dieser Stelle sind insbesondere durchzuüben:

1. Aufgaben über die Verwandlung von Münzen, Maßen und Gewichten auf eine niedrigere Benennung (das Reducieren.)

2. Aufgaben, deren Lösung ein einfacher Schluſs von der Einheit auf die Mehrheit zu Grunde liegt. (§. 67, a.)

3. Aufgaben, welche durch Anwendung von Vortheilen gelöst werden. (§. 67, b.)

4. Aufgaben, bei denen die Rechnung durch Zerlegung der Kreuzer in Zehner und Kreuzer ausgeführt wird. (§. 67, c.)

5. Aufgaben, welche nach dem Schlusse von der Mehrheit auf ein Vielfaches derselben berechnet werden. (§. 68, a.)

6. Einige Aufgaben, welche auf umgekehrten Verhältnissen beruhen. (§. 68, d.)

§. 61. Schriftliches Multiplicieren.

a) **Multiplicieren mit Einern.**

Zuerst werden Aufgaben behandelt, wo kein Übergang in eine höhere Ordnung stattfindet. Z. B.

Wie viel ist 3mal 32?

32 Um an Bekanntes anzuknüpfen, betrachten wir das Multiplicieren
32 zunächst als ein wiederholtes Addieren, und schreiben die Zahl 32 3mal
32 unter einander; wir erhalten: 2 E. und 2 E. sind 4 E., und 2 E. sind
96 6 E.; 3 Z. und 3 Z. sind 6 Z., und 3 Z. sind 9 Z.

32 Durch das Vervielfachen kann die Rechnung abgekürzt werden. Wir
3 setzen die Zahl 32 nur einmal; daſs sie 3mal genommen werden soll,
96 zeigen wir dadurch an, daſs wir die Ziffer 3 darunter schreiben. Wir
sagen dann kürzer: 3mal 2 E. sind 6 E.; 3mal 3 Z. sind 9 Z.

Diese abgekürzte Art des Addierens nennt man das *Vervielfachen* oder *Multiplicieren*. 32 3mal nehmen heiſst also 32 mit 3 *multiplicieren*. Welche Zahl wurde hier mehrmal genommen? Diese Zahl heiſst der *Multiplicand*. Wie oftmal wurde 32 genommen? Diese Zahl, welche anzeigt, wie vielmal eine andere genommen wird, heiſst der *Multiplicator*. *Multiplicand* und *Multiplicator* heiſsen auch *Factoren*. Welche Zahl erhält man, wenn man 32 3mal nimmt, oder 32 mit 3 multipliciert? Diese Zahl heiſst das *Product*.

Da die Schüler auf diese Art die Multiplication als eine abgekürzte Addition kennen lernen, so sehen sie leicht ein, daſs man auch hier, wie beim schriftlichen Addieren, die Rechnung bei den Einern anfangen müsse.

Wenn man auch einen einstelligen Multiplicator gewöhnlich nicht anzuschreiben pflegt, so wird es Anfängern doch zu gestatten sein, daſs sie der unmittelbaren Anschauung wegen denselben unter den Multiplicand setzen.

Nun werden wir auch den Fall behandeln, wo ein Übergang in höhere Ordnungen stattfindet. Z. B.

Wie viel ist 5mal 127?

Im Kopfe: 5mal 100 ist 500, 5mal 20 ist 100, 500 und 100 ist 600; 5mal 7 ist 35, 600 und 35 ist 635.

127 Beim Zifferrechnen multiplicieren wir zuerst die Einer, dann die
5 Zehner, endlich die Hunderte. 5mal 7 E. sind 35 E. oder 3 Z. und
635 5 E.; die 5 E. schreiben wir unter die Einer, die 3 Z. aber vereinigen
wir mit den Zehnern des Productes. 5mal 2 Z. sind 10 Z., und die im Sinne behaltenen 3 Z. dazu, sind 13 Z. oder oder 1 H. und 3 Z.; 3 Z. schreiben wir unter die Zehner, 1 H. vereinigen wir mit den Hunderten. 5mal 1 H. sind 5 H., und 1 H. sind 6 H.

b) **Multiplicieren mit reinen Zehnern.**

Wie viel ist 10mol 54?

54
10
540

10mal 4 E. sind 40 E. oder 4 Z.; 10mal 5 Z. sind 50 Z. oder 5 H. Beim Multiplicieren mit 10 rückt also jede Ziffer in die nächst höhere Ordnung vor. (Wir finden dasselbe Verhältnis auch bei benannten Zahlen, z. B. 10mal 1 kr. ist 1 Zehner, 10mal 1 Zehner ist 1 Gulden.) Die Ziffern bleiben dieselben; nur muss die Ziffer 4, damit sie 4 Z. gelte, in die zweite, und die Ziffer 5, damit sie Hunderte gelte, in die dritte Stelle kommen. Dies alles geschieht einfach dadurch, dass man der Zahl rechts eine Null anhängt.

Wie viel ist 30mal 27?

27
30
810

Um eine Zahl 30mal zu nehmen, nehme ich sie zuerst 3mal, und das 3fache von ihr noch 10mal; ich multipliciere also die Zahl 27 mit 3 und rücke jede Ziffer des Productes 81 in die nächst höhere Stelle, welches dadurch geschieht, dass ich dem Producte zur Rechten eine Null anhänge.

c) **Multiplicieren mit Zehnern und Einern.**

Die Aufgaben können sich hier, da 1000 nicht überschritten werden darf, nur in einem beschränkten Kreise bewegen, sie reichen aber immerhin aus, um das Verfahren zu erläutern und einzuüben.

Wie viel ist 26mal 36?

36
26
216
72 .
936

Um 36 26mal zu nehmen, nehmen wir 36 zuerst 6mal, dann 20mal, und zählen beides zusammen. 6mal 36 ist 216; nämlich: 6mal 6 E. sind 36 E. oder 3 Z. und 6 E.; 6mal 3 Z. sind 18 Z., dazu 3 Z. sind 21 Z. oder 2 H. und 1 Z. Um 20mal 36 zu erhalten, nehmen wir 36 zuerst 2mal, und dann das 2fache noch 10mal; 2mal 36 ist 72; das zweifache 72 wird 10mal genommen, indem wir die Einer zu Zehnern und die Zehner zu Hunderten machen, also jede Ziffer um eine Stelle weiter gegen die Linke schreiben. Wir haben dann: 6 E.; 2 Z. und 1 Z. sind 3 Z.; 7 H. und 2 H. sind 9 H. Das Product ist also 936.

d) **Angewandte Aufgaben.**

In Beziehung auf diese müssen wir folgendes bemerken:

1. Der Lehrer dulde nicht, dass die Schüler in ihren Schlüssen die Zahlen der Aufgabe verwechseln. Auf die Frage: wie viel kosten 35 Hektoliter, wenn 1 Hektoliter 8 fl. kostet? antworten die Schüler häufig: 8mal 35 fl., während sie 35mal 8 fl. sagen sollten. Gestattet man den Schülern solche fehlerhafte Antworten, so hört alle unmittelbare Anschauung von der Richtigkeit der Schlüsse auf.

2. Der Lehrer achte ebenso darauf, dass sich die Schüler keiner sinnlosen Redensarten bedienen, dass sie z. B. in der vorigen Aufgabe nicht folgern, man müsse 8 fl. mit 35 Hektoliter multiplicieren, weil man 8 fl. wohl 35mal, aber nicht 35hektolitermal nehmen kann. Überhaupt sind die Schüler aufmerksam zu machen, dass beim Multiplicieren benannter Zahlen der Multiplicator stets eine unbenannte Zahl sein muss und das Product denselben Namen erhält, welchen der Multiplicand hat.

5. Messen und Theilen oder Dividieren.

§. 62. Das Messen im Kopfe.

Die Aufgaben des Messens und des Theilens im Kopfe müssen hier noch auseinander gehalten und jede auf ihre besondere Art behandelt werden, wenn Klarheit und Einsicht erreicht werden soll.

Durch das Messen soll gefunden werden, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist. Über die Ausführung dieser Operation sind schon auf den früheren Stufen zahlreiche Übungen vorgenommen worden. Hier handelt es sich um die Wiederholung und eine angemessene Erweiterung.

a) **Messen durch Einer, wenn auch im Resultate bloß Einer erscheinen.**

Die hierher gehörigen Übungen, nämlich

1 ist in 1 1mal enthalten	2 ist in 2 1mal enthalten	u. s. w.
1 „ „ 2 2 „ „	2 „ „ 4 2 „ „	
1 „ „ 3 3 „ „	2 „ „ 6 3 „ „	
1 „ „ 4 4 „ „	2 „ „ 8 4 „ „	
u. w. .	u. s w.	

beruhen auf der Umkehrung des Einmaleins. Z. B. Wie oft ist 2 in 12 enthalten? — 12 ist wie vielmal 2? Von 12 läßt sich also 2 6mal wegnehmen, oder 2 ist in 12 6mal enthalten.

Die oben angedeuteten Reihenfolgen können daher am zweckmäßigsten in Verbindung mit dem Einmaleins wiederholt werden. Z. B.

1mal 3 ist 3, also ist 3 in 3 1mal enthalten;
2 „ 3 „ 6, „ „ 3 „ 6 2 „ „
3 „ 3 „ 9, „ „ 3 „ 9 3 „ „
4 „ 3 „ 12, „ „ 3 „ 12 4 „ „
u. s. w.

Diese Übungen, welche die Grundlage für das schriftliche Dividieren bilden und darum bis zur größten Sicherheit zu wiederholen sind, umfassen die Fälle, wo beim Messen kein Rest übrig bleibt. Nun folgen Aufgaben, wo beim Messen ein Rest übrig bleibt.

Wie oft ist 5 in 23 enthalten? — Wie vielmal 5 ist 23? 23 ist 4mal 5 und 3. Wie oft läßt sich daher 5 von 23 wegnehmen? Und wie viel bleibt übrig.

Wie vielmal 6 ist 19? 19 ist 3mal 6 und 1; 6 ist also in 19 3mal enthalten, mit dem Reste 1.

Die schriftlichen Übungen schließen sich genau an die mündlichen an. In Beziehung auf die Bezeichnungsart des Messens erscheint es an der Zeit, anstatt der im Zahlenkreise bis 100 gebrauchten Ausdrucksweise: 4 in 20 = 5, welche gelesen wurde: 4 in 20 ist 5mal enthalten, weiterhin die richtigere Anschreibweise 20 : 4 = 5 einzuführen.

b) **Messen durch Einer, wenn das Resultat 10 oder mehr als 10 beträgt.**

Wie oft ist 2 in 20, 3 in 30, 4 in 40, . . . 9 in 90 enthalten?

Wie oft ist 2 in 200, 3 in 300, . . . 9 in 900 enthalten?

Wie oft ist 4 in 80 enthalten? — 4 ist in 8 E. 2mal, in 8 Z. 10mal so oft, also 20mal enthalten.

Wie oft ist 6 in 240 enthalten? — 6 ist in 24 E. 4mal, in 24 Z. 10mal so oft, also 40mal enthalten.

Nach mehreren solchen Übungen sprechen die Schüler kurz: 4 ist 80 20mal enthalten, 6 ist in 240 40mal enthalten, u. s. w.

Enthält die Zahl, welche gemessen werden soll, nicht bloß Zehner oder Hunderte, so muss sie in eine größere und eine kleinere Zahl so zerlegt werden, dass die größere reine Zehner enthält, die ein Vielfaches der Einer sind, durch welche man messen soll. Z. B.:

Wie oft ist 3 in 69 enthalten? — Wir zerlegen 69 in 60 und 9, und folgern: 3 ist in 60 20mal, in 9 3mal, in 6ſt also 23mal enhalten.

Wie oft ist 6 324 enthalten? — 324 wird zerlegt in 300 und 24; 6 ist in 300 50mal, in 24 4mal, in 324 also 54mal enthalten.

Die Reste machen keine Schwierigkeiten. Z. B.:

Wie oft ist 7 in 304 enthalten? — Wir zerlegen 304 in 280 und 24; 7 ist in 280 40mal, in 24 3mal enthalten, mit dem Reste 3; 7 ist also in 304 43mal enthalten und es bleibt 3 als Rest.

c) **Messen durch Zehner und Einer.**

Wie oft ist 10 in 20, in 30, 40, ... 90 enthalten?

Wie oft ist 20 in 160 enthalten? — 20 sind 2 Z., 160 sind 16 Z., 2 Z. sind in 16 Z. ebenso oft, als 2 E. in 16 E., also 8mal enthalten.

Wie oft ist 30 in 270 enthalten? — 3 Z. sind in 27 Z. eben so oft als 3 in 27, also 9mal enthalten.

Das Messen durch Zehner und Einer beschränken wir, da dasselbe eine sichere Kenntnis der Vielfachen der höheren Zahlen voraussetzt, auf das Messen durch die Zahlen 11 und 12, von denen die Vielfachen leicht zu merken sind.

Wie viel ist 2mal, 3mal, . . . 9mal 11? Wie oft ist daher 11 in 22, in 33, . . . 99 enthalten?

Wie viel ist 2mal, 3mal, . . . 9mal 12? Wie oft ist daher 12 in 24, 36, . . . 108 enthalten?

d) **Angewandte Aufgaben.**

Hierher gehören:

1. Übungen im Reducieren der Münzen, Maße und Gewichte.
2. Verschiedene praktische Anwendungen des Messens.
3. Schlussrechnungen, in denen eine Zerlegung der Kreuzer im Preise der Einheit in Guldentheile (Gulden) und Kreuzer eintritt. (§. 67, d.)

§. 63. Das Theilen im Kopfe.

Durch das Theilen soll eine Zahl in mehrere gleiche Theile zerlegt und die Größe eines solchen Theiles bestimmt werden.

a) **Theilen durch Einer, wenn auch im Resultate bloß Einer erscheinen.**

Zuerst werden die Begriffe „ein Halbes, ein Drittel, ein Viertel, ...“ wiederholungsweise veranschaulicht. Dann übt man nach der Reihe die folgenden Sätze durch:

$\frac{1}{2}$ v. 2 = 1	$\frac{1}{3}$ v. 3 = 1	u. s. w.
$\frac{1}{2}$ v. 4 = 2	$\frac{1}{3}$ v. 6 = 2	
$\frac{1}{2}$ v. 6 = 3	$\frac{1}{3}$ v. 9 = 3	
u. s. w.	u. s. w.	

Die Ableitung geschieht aus den Vielfachen der Zahlen durch Schlüsse. Z. B.

3mal	1	ist	3,	der	dritte	Theil	von	3	ist	also	1;
3 „	2	„	6,	„	„	„	„	6	„	„	2;
3 „	3	„	9,	„	„	„	„	9	„	„	3;
3 „	4	„	12,	„	„	„	„	12	„	„	4;

u. s. w.

Nun folgen Aufgaben, wo das Theilen auf einen Bruch führt. Z. B.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 25? — 25 ist 24 und 1; $\frac{1}{3}$ v. 24 ist 8, $\frac{1}{3}$ v. 1 ist $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ von 25 ist also $8\frac{1}{3}$.

Wie viel ist $\frac{1}{4}$ v. 39? — 39 ist 36 und 3; $\frac{1}{4}$ v. 36 ist 9, $\frac{1}{4}$ v. 3 ist $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ v. 39 ist also $9\frac{3}{4}$.

Zur Wiederholung kann hier auch das Theilen in Verbindung mit dem Vervielfachen vorgenommen werden. Z. B.

Wie viel ist 3mal der 4te Theil von 32, oder wie viel ist $\frac{3}{4}$ v. 32? — $\frac{1}{4}$ v. 32 ist 8, $\frac{3}{4}$ v. 32 ist also 3mal 8, d. i. 24.

b) **Theilen durch Einer, wenn das Resultat 10 oder mehr als 10 beträgt.**

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 20, $\frac{1}{3}$ von 30, $\frac{1}{4}$ von 40, ... $\frac{1}{9}$ von 90?

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 200, $\frac{1}{3}$ von 300, $\frac{1}{4}$ von 400, ... $\frac{1}{9}$ von 900?

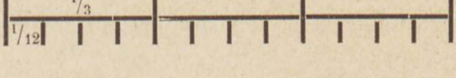
Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 60? — $\frac{1}{3}$ von 6 Z. sind 2 Z. oder 20.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 96? — $\frac{1}{3}$ v. 90 ist 30, $\frac{1}{3}$ v. 6 ist 2, $\frac{1}{3}$ v. 96 ist also 32.

Wie viel ist $\frac{1}{4}$ von 52? — 52 ist 40 und 12; $\frac{1}{4}$ v. 40 ist 10, $\frac{1}{4}$ v. 12 ist 3, $\frac{1}{4}$ v. 52 ist also 13.

c) **Theilen durch Zehner, durch Zehner und Einer.**

Im Kopfe lösbar ist hier im allgemeinen nur das Theilen durch reine Zehner (als Vielfache von 10) und das Theilen durch solche zweistellige Zahlen, welche im Einmaleins als Vielfache vorkommen. Wir beschränken uns daher auf Aufgaben dieser Art, schicken jedoch, da hier ein zweimaliges Theilen nothwendig ist, zur Begründung einige einleitende Übungen voraus.



Theile ich Ganzes (eine Linie, ein Stäbchen, einen Papierstreifen) in 3 gleiche Theile, so erhalte ich 3 Drittel. Theile ich jedes Drittel in 4 gleiche Theile, so erhalte ich 3mal 4 oder 12 gleiche Theile. Jeder solche Theil ist daher ein Zwölftel, Um also den 12ten Theil eines Ganzen zu erhalten, suche ich zuerst den dritten Theil, und von diesem Drittel den 4ten Theil. $\frac{1}{12}$ könnte ich auch erhalten, wenn ich zuerst $\frac{1}{4}$, und dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ bestimme.

Was für Theile einer Linie erhalte ich, wenn ich dieselbe zuerst in 5 gleiche Theile, und jeden solchen Theil noch in 3 gleiche Theile theile? Um also $\frac{1}{15}$ zu erhalten, suche ich zuerst $\frac{1}{5}$, und dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{5}$.

Ebenso wird den Schülern veranschaulicht, daſs $\frac{1}{25} = \frac{1}{5}$ von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{32} = \frac{1}{8}$ von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{50} = \frac{1}{5}$ von $\frac{1}{10}$ u. s. w. ist.

Durch ähnliche Schluſsfolgerungen wird den Schülern auch klar gemacht, daſs der 10te Theil von 1 Zehntel 1 Hundertel und der 10te Theil von 1 Hundertel 1 Tausendtel ist.

Ist dieses alles richtig aufgefaſst worden, so wird das Theilen der Zahlen in den oben angegebenen Fällen keine weitere Schwierigkeit bieten.

Wie viel ist $\frac{1}{10}$ von 10, 20, 40, 90, 100, 160, 250?

Wie viel ist $\frac{1}{20}$ von 160? — $\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$ v. 160 ist 16, $\frac{1}{2}$ v. 16 ist 8; $\frac{1}{20}$ v. 160 ist also 8.

Wie viel ist $\frac{1}{15}$ v. 135? — $\frac{1}{15}$ ist $\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ v. 135 ist 27, $\frac{1}{3}$ v. 27 ist 9; $\frac{1}{15}$ v. 135 ist also 9.

d) **Angewandte Aufgaben.**

1. Verwandlungen der Bruchzahlen von Münzen, Maßen und Gewichten.
2. Schluſsrechnungen, in denen ein einfacher Schluſs von der Mehrheit auf die Einheit zur Anwendung kommt. (§. 68, a.)
3. Aufgaben, welche durch Anwendung von Vortheilen gelöst werden. Die sich hier ergebenden Rechnungsvortheile sind bereits in der II. Abtheilung §. 50, b angeführt worden.
4. Aufgaben, bei denen die Rechnung durch eine passende Zerlegung des Preises in Zehner und Kreuzer ausgeführt wird. (§. 68, c.)
5. Aufgaben, welche a) durch den Schluſs von der Mehrheit auf einen Theil derselben, b) durch den Schluſs von der Mehrheit durch einen Theil derselben auf ein Vielfaches dieses Theiles, c) durch den Schluſs von der Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit aufgelöst werden. (§§. 70—72.)
6. Einfache Zinsrechnungen. (§. 73.)
7. Aufgaben, in welchen umgekehrte Verhältnisse vorkommen. (§. 68, e.)

§. 64. Schriftliches Dividieren.

Wir hielten bisher das Messen und Theilen strenge auseinander und konnten auch, um Klarheit und einsichtsvolle Beurtheilung zu ermöglichen, nicht anders vorgehen, da bei den beiden Operationen eine verschiedene Ausdrucksweise und wesentlich verschiedene Schlüsse in Anwendung kommen. Beim Zifferrechnen bezeichnen wir das Messen und das Theilen mit dem gemeinschaftlichen Namen *Dividieren*, das aber eben darum in einem zweifachen Sinne aufgefasst werden muss.

Ist z. B. 12 durch 4 zu dividieren, und ich fasse das Dividieren im Sinne des *Messens* auf, so habe ich zu suchen, wie oft 4 in 12 enthalten ist; ich muss also 12 in 4 + 4 + 4, also in 3mal 4 zerlegen und finde dadurch, dass 4 in 12 3mal enthalten ist.

Fasse ich aber die obige Division als *Theilung* auf, so muss ich suchen, wie viel der 4te Theil von 12 ist; ich zerlege also 12 in 4 gleiche Theile, d. i. in 3 + 3 + 3 + 3 oder 4mal 3, und schließe: der 4te Theil von 12 ist 3.

Die erste Aufgabe kann durch die Darstellung

● ● ● ●   ● ● ● ●   ● ● ● ●

die zweite dagegen durch

● ● ●   ● ● ●   ● ● ●   ● ● ●

anschaulich gemacht werden.

Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Divisionsarten an benannten Zahlen hervor.

Es sei z. B. die Aufgabe: „1 Meter Tuch kostet 4 fl.; wie viel Meter erhalte ich für 12 fl.?“ Dabei wird gefolgert: ich erhalte so vielmal 1 Meter, als 4 fl. in 12 fl. enthalten sind; 4 fl. sind in 12 fl. 3mal enhalten; ich erhalte also 3mal 1 Meter, oder 3 Meter. Hier werden 12 fl. durch 4 fl. *gemessen*, und man erhält zur Antwort: 3mal. Beim Messen benannter Zahlen sind also Dividend und Divisor benannt und zwar gleichnamig, der Quotient aber ist unbenannt.

Ist dagegen die Aufgabe: „4 Meter Tuch kostet 12 fl.; wie viel kostet 1 Meter?“ zu lösen, so wird geschlossen: 1 Meter ist der 4te Theil von 4 Meter, 1 Meter kostet daher nur den 4ten Theil von 12 fl., d. i. 3 fl. Hier werden 12 fl. in 4 gleiche Theile *getheilt*, wodurch man 3 fl. als einen Theil erhält. Beim Theilen benannter Zahlen sind also Dividend und Quotient benannt, und zwar gleichnamig, der Divisor aber muss immer eine unbenannte Zahl sein.

So verschieden übrigens die beiden Divisionsweisen in Bezug auf den Ausdruck und auf die Folgerungen sind, so kommen sie doch darin überein, dass beide für denselben Dividend 12 und für denselben Divisor 4 dieselbe Zahl 3 als Quotienten geben, was auch leicht erklärbar ist, weil sich das Theilen durch ganz einfache Schlüsse immer auf das Messen zurückführen lässt. Um den 4ten Theil von 12 zu erhalten, nehme ich von je 4, welche in 12 vorkommen, immer nur 1; ich erhalte also so vielmal 1, als 4 in 12 vorkommt, d. h. *der 4te Theil von 12 ist so viel, als 4 in 12 enthalten ist.*

Dieser innige Zusammenhang zwischen den Aufgaben des Messens und des Theilens macht es möglich, dass beim schriftlichen Dividieren dasselbe Zeichen und dasselbe Rechnungsverfahren angewendet wird. Der Ausdruck $12 : 4 = 3$ (12 dividiert durch 4 ist gleich 3) kann gelesen werden: 4 ist in 12 3mal enthalten, oder: der 4te Theil von 12 ist 3.

Der Stufengang in den Übungen entspricht dem bei der schriftlichen Multiplication eingehaltenen.

a) **Dividieren durch Einer.**

Das schriftliche Dividieren unterscheidet sich nur wenig von dem mündlichen Messen und Theilen. Man dividiert die einzelnen Stellen von der höchsten angefangen; dividiert man Hunderte, so erhält man Hunderte; dividiert man Zehner, so erhält man Zehner; dividiert man Einer, so erhält man Einer.

Wir behandeln zuerst Aufgaben, wo kein Übergang in eine andere Ordnung stattfindet. Z. B.

Es sei 96 durch 3 zu dividieren.

$$\begin{array}{l}
\overset{\text{Z.E.}}{96} : 3 = \overset{\text{Z.E.}}{32} \\
\underline{9\,.} \\
6 \\
\underline{6}
\end{array}$$

Man kann anfänglich wegen der leichteren Anschauung die dekadische Bedeutung der einzelnen Ziffern durch darübergestellte Buchstaben anzeigen lassen.

1. Im Sinne des Messens: Wie oft ist 3 in 96 enthalten?

3 ist in 9 Z. 3mal, in 9 Z. also 30mal enthalten; wir schreiben daher hinter dem Gleichheitszeichen 3 Z. an. Wir wollen auch sehen, ob 3 in 9 Z. genau 30mal enthalten ist; 30mal 3 ist 90 oder 9 Z., diese schreiben wir unter die 9 Z. und subtrahieren. Bleibt etwas übrig? Also ist 3 in 9 Z. genau 30mal enthalten. — Nun suchen wir, wie oft 3 in 6 E. enthalten ist; wir setzen daher die 6 E. herab. 3 ist in 6 E. 2mal enthalten; diese 2 Einer schreiben wir hinter die 3 Z.; 2mal 3 ist 6; werden diese 6 unter die 6 E. geschrieben und von diesen subtrahiert, so bleibt nichts übrig. 3 ist also in 96 30mal und 2mal, d. i. 32mal enthalten.

2. Im Sinne des Theilens: Wie viel ist der dritte Theil von 96?

Theilen wir 9 Z. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 3 Z.; diese schreiben wir rechts. Getheilt sind nun 3mal 3 Z. oder 9 Z.; diese setzen wir unter 9 Z. und subtrahieren. Es bleibt kein Zehner übrig. — Nun sind noch 6 E. zu theilen, wir setzen sie herunter. Theilen wir 6 E. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 2 E.; die setzen wir wieder rechts. Getheilt haben wir nun 3mal 2 E. oder 6 E.; 6 E. von 6 E. bleibt nichts. Der dritte Theil von 96 sind also 3 Z. und 2 E., d. i. 32.

Hier haben wir 96 durch 3 gemessen und getheilt. Eine Zahl durch eine andere messen oder theilen heißt *dividieren*. Die Zahl 96, welche gemessen oder getheilt wird, heißt der *Dividend*; die Zahl 3, durch welche gemessen oder getheilt wird, der *Divisor*; und die Zahl 32, welche beim Messen oder Theilen herauskommt, der *Quotient*.

Das gleiche Verfahren gilt auch beim Dividieren einer dreistelligen Zahl durch Einer. Z. B.

```
H.Z.E.     H.Z.E.
4 2 6 : 2 = 2 1 3
4 . .
-----
  2 .
  2 .
-----
    6
    6
-----
```

Welche Zahl ist hier der Dividend, welche der Divisor, und welche der Quotient?

Nun wollen wir auch solche Fälle behandeln, wo bei der Division der höheren Stellen Reste übrig bleiben, wo daher ein Übergang in niedrigere Ordnungen stattfindet.

Wie oft ist 2 in 78 enthalten?

```
Z.E.      Z.E.
78 : 2 = 39
6
----
18
18
----
```

2 ist in 7 E. 3mal, in 7 Z. also 30mal enthalten; wir schreiben daher 30 oder 3 Z. in den Quotienten. 30mal 2 ist 60 oder 6 Z.; 6 Z. von 7 Z. bleibt noch 1 Z. übrig. Nun ist noch zu suchen, wie oft 2 in 1 Z. und 8 E. enthalten ist. 1 Z. = 10 E.; 10 E. und 8 E., welche wir zu 1 herabsetzen, sind 18 E.; 2 ist in 18 E. 9mal enthalten; wir schreiben die Ziffer 9 hinter 3 Z. in die Einerstelle. 9mal 2 ist 18, von 18 weggenommen, bleibt nichts.

Wie viel ist der 4te Theil von 347?

```
H.Z.E.      Z.E.
3 4 7 : 4 = 8 6¾
3 2 .
-----
  2 7
  2 4
-----
    3
```

Zuerst sind 3 H. in 4 gleiche Theile zu theilen; da kann auf 1 Theil kein Hundert kommen; wir verwandeln daher die 3 H. in Zehner; 3 H. sind 30 Z., dazu die vorhandenen 4 Z. sind 34 Z. Der 4te Theil von 34 Z. sind 8 Z.; 4mal 8 Z. sind jedoch nur 32 Z., und es bleiben von den 34 Z. noch 2 Z. zur Vertheilung übrig. Es sind also noch 2 Z. und 7 E. zu theilen; 2 Z. = 20 E., 20 E. und 7 E. sind 27 E.; 4mal 6 E. sind 24 E., und es bleiben von den 27 E. noch 3 E. zu theilen übrig, Der Quotient ist also 86 mit dem Reste 3. — Man kann nun auch noch den Rest 3 in 4 gleiche Theile theilen; der 4te Theil von 1 ist $\frac{1}{4}$, der 4te Theil von 3 also $\frac{3}{4}$. Der vierte Theil von 347 ist demnach $86\frac{3}{4}$.

Die Schüler werden bald sehen, dass man über die einzelnen Ziffern des Quotienten ihre Bedeutung gar nicht zu setzen braucht, weil sie nach der Ordnung Hunderte, Zehner und Einer bedeuten, und weil dieselben, wenn man sie nur nach der Reihe hinschreibt, schon durch diese Anordnung selbst in ihrer wahren Bedeutung erscheinen. Es wird daher die bisher wegen der leichteren Übersicht vorgenommene Bezeichnung des Stellenwertes der Ziffern durch darübergesetzte Buchstaben allmählich wegfallen.

b) **Dividieren durch reine Zehner.**

Wir machen mit der Division durch 10 den Anfang.

Wie viel ist der 10te Theil von 730?

73‚0 : 1‚0 = 73

Der 10te Theil von 1 H. ist 1 Z., von 7 H. also 7 Z.; der 10te Theil von 3 Z. sind 3 E.; der 10te Theil von 730 sind also 7 Z. und 3 E. oder 73. Beim Dividieren durch 10 rückt daher jede Ziffer in die nächst niedrigere Ordnung zurück. Dieses geschieht einfach dadurch, dass man der Zahl rechts eine Ziffer abschneidet; die abgeschnittene Ziffer gibt, wenn sie nicht Null ist, den Rest. Z. B.

65‚5 : 1‚0 = 65
5 Rest.

Wie viel ist der 20ste Theil von 380?

38‚0 : 2‚0 = 19
2.
18
.18

$\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{10}$. Um also den 20sten Theil von 380 zu erhalten, nimmt man von 380 zuerst den 10ten Theil, indem man rechts eine Ziffer abschneidet, und dann von 38 noch die Hälfte.

c) **Dividieren durch Zehner und Einer.**

Bei der Division durch einen zweistelligen Divisor verfährt man auf dieselbe Art, wie bei der Division durch einen einstelligen; im allgemeinen werden dabei sogleich die zwei höchsten Stellen des Dividends ins Auge gefasst. Wir wählen für den Anfang solche zweistellige Divisoren, worin die Einer sehr klein sind, weil sich in diesem Falle die Ziffern des Quotienten leichter bestimmen lassen; z. B.

714 : 21 = 34
63.
84
84

Da hier nicht 21 H. vorhanden sind, so verwandle ich die 7 H. in Zehner; 7 H. = 70 Z.; 70 Z. und 1 Z. sind 71 Z. Ich suche nun zunächst, wie oft 21 E. in 71 E. enthalten sind, und schließe: 21 E. sind in 71 E. beiläufig so oft enthalten, als 20 E. in 70 E., oder 2 Z. in 7 Z., nämlich 3mal; es werden daher 21 E. in 71 Z. 10mal so oft, also 30mal enthalten sein. Ob das richtig ist, finde ich sogleich, wenn ich 30mal 21 nehme und untersuche, ob sie sich von 71 Z. wegnehmen lassen; 30mal 21 E. sind 630 E. oder 63 Z., welche sich von 71 Z. subtrahieren lassen; es bleiben 8 Z. übrig. 8 Z. $\doteq$ 80 E., und 4 E. sind 84 E.; 21 E. sind nun in 84 E. nahe so oft enthalten, als 20 E. in 80 E., oder 2 Z. in 8 Z., also 4mal. 4mal 21 E. sind 84 E., es bleibt also von 84 E. nichts abrig. Mithin ist 21 in 714 34mal enthalten.

Schwieriger gestaltet sich das Dividieren, wenn die Einer des Divisors groß sind, z. B. das Dividieren durch 19, 39, 69, oder durch 18, 48, 78. Man kann sich übrigens die Lösung dadurch erleichtern, dass man sich beim Suchen der Ziffern des Quotienten für den gegebenen Divisor die nächst höhere reine Zehnerzahl denkt. Z. B.

513 : 19 = 27	Anstatt 19 denke ich mir 20.
38.	So oft 20 in einer Zahl enthalten
133	ist, so oft ist jedenfalls auch 19
133	darin enthalten.

Ich rechne also: 19 ist in 51 E. nahe so oft, als 20 in 50, oder 2 Z. in 5 Z., mithin 2mal enthalten; 19 ist in 51 Z. 10mal so oft, daher 20mal enthalten; 2 Z. kommen in den Quotienten. 20mal 19 ist 38 Z.; werden diese von 51 Z. weggenommen, so bleiben noch 13 Z., welche als solche durch 19 nicht gemessen werden können; ich verwandle daher 13 Z. in Einer; 13 Z. sind 130 E., und 3 E. herab, sind 133 E. Ich schließe ferner: 19 ist in 133 nahe so oft als 20 in 130, oder 2 Z. in 13 Z., mithin 6mal enthalten. 6mal 19 ist 114; 114 von 133 bleibt 19. So viel darf aber nicht bleiben, weil 19 in dem Reste 19 noch 1mal enthalten ist; die Ziffer 6 des Quotienten ist also um 1 zu klein angenommen worden. Ich sage daher: 19 ist in 133 E. 7mal enthalten; 7mal 19 ist genau 133; es bleibt kein Rest übrig. Der Quotient ist 27.

Wenn der Divisor einstellig ist, so kann die jedesmalige Ziffer des Quotienten auf Grund des Einmaleins sogleich richtig bestimmt werden. Anders ist es bei der Division durch einen zweistelligen Divisor. Da man hier die einzelnen Ziffern des Quotienten dadurch bestimmt, dass man versuchsweise immer nur die höchste oder die zwei höchsten Stellen des Dividends durch die höchste Stelle des Divisors dividiert, so erscheinen dabei die Ziffern des Quotienten nicht immer sogleich richtig, sie müssen manchmal noch verbessert werden. Um sich zu überzeugen, ob die gefundene Ziffer des Quotienten richtig sei, multipliciert man damit den Divisor und subtrahiert das Product von dem Dividende. Bleibt kein Rest übrig, oder ein Rest, welcher kleiner als der Divisor ist, so ist die Ziffer des Quotienten richtig. Bleibt ein Rest, welcher so groß oder größer als der Divisor ist, so dass in diesem Reste der Divisor noch einmal enthalten ist, so ist die Ziffer des Quotienten zu klein angenommen worden, man muss eine größere Ziffer nehmen. Ist aber das Product aus dem Divisor und der Ziffer des Quotienten größer als der Dividend, so dass man nicht subtrahieren kann, so wurde die Ziffer des Quotienten zu groß angenommen, man muss sie durch eine kleinere ersetzen.

d) **Angewandte Aufgaben.**

Nachdem die Schüler die Grundoperationen in dem Zahlenraume bis 1000 tüchtig durchgeübt haben, lasse man sie nun von den gewonnenen Mitteln einen möglichst vielseitigen Gebrauch machen. Das erhöhet ihre geistige Gewandtheit und ihr Interesse für den Unterricht. Die Verbindung der verschiedenen Operationen macht es hier insbesondere möglich, leichtere Kaufs- und Verkaufsrechnungen, Dreisatz-, Gesellschafts- und Durchschnittsrechnungen zu lösen. Bei den zusammengesetzten Rechnungen ist nicht nur auf richtige Schlüsse, sondern auch auf eine genauere äußere Form und auf eine übersichtliche Darstellung zu sehen. Z. B.

Jemand kauft 3 Hektoliter Wein à 28 fl., 2 Hektoliter à 26 fl. und 7 Hektoliter à 20 fl.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 Hektoliter zu stehen?

Diese Aufgabe enthält eine Durchschnittsrechnung und führt auf folgenden Ansatz:

3 Hektoliter	à 28 fl.	kosten	84 fl.
2 „	à 26 fl.	„	52 fl.
7 „	à 20 fl.	„	140 fl.
12 Hektoliter	kosten	. . .	276 fl.

1 Hektoliter kostet 276 fl. : 12 = 23 fl.

Zweiter Abschnitt.

Das Rechnen mit Decimalzahlen.

(Zehntel, Hundertel und Tausendtel.)

§. 65.

Sowie wir dem Rechnen im Zahlenkreise bis 100 die Grundübungen im Rechnen mit einfachen gemeinen Brüchen anfügten, ebenso kann man unter günstigen Verhältnissen auf das Rechnen mit den Zahlen bis 1000 sogleich die ersten Elemente der Decimalbruchrechnung, nämlich das Rechnen mit Zehnteln, Hunderteln und Tausendteln, folgen lassen; man darf nur das dekadische Zahlensystem, welches bisher durch das Aufsteigen von den Einern zu den Zehnern, Hunderten und Tausenden aufgebaut wurde, von den Einern auch abwärts zu den Zehnteln, Hunderteln und Tausendteln zurückschreitend fortsetzen.

Die Auffassung der Decimalzahlen setzt in jedem Falle die Begriffe von Zehnteln, Hunderteln u. s. w. voraus. Diese Begriffe sind unseren Schülern nicht mehr fremd; sie haben auf anschaulichem Wege (II. Abth. §. 49) eine klare Vorstellung erlangt, dass der zehnte Theil von 1 Ganzen oder von 1 Einer 1 Zehntel, und dass 1 Einer = 10 Zehntel ist; sie haben sich ebenso überzeugt, dass der zehnte Theil von 1 Zehntel 1 Hundertel, der zehnte Theil von 1 Hundertel 1 Tausendtel ist, und dass daher 1 Zehntel 10 Hundertel, 1 Hundertel 10 Tausendtel hat. Diese Begriffe, deren Verständnis auch durch unsere Maße und Gewichte und Münzen wesentlich erleichtert wird, müssen hier wieder in das Bewusstsein der Schüler zurückgerufen und nach Bedürfnis vervollständiget werden.

Das unterrichtliche Verfahren, um die Schüler in das Wesen der Decimalbrüche und in die Operationen mit denselben einzuführen, bleibt sich gleich, ob man es mit Decimalzahlen überhaupt zu thun hat oder sich bloß auf dreistellige Decimalbrüche beschränkt. Um daher Wiederholungen zu vermeiden, weisen wir auf den zweiten Abschnitt der IV. Abtheilung hin, wo für die allgemeine Behandlung der Decimalbrüche das Lehrverfahren ausführlich dargelegt wird.

Anhang.

Schlussrechnungen.

§. 66. Allgemeine Bemerkungen.

Die Schlussrechnung kann überall angewendet werden, wo die beiden Arten von Größen, zu deren einer die gesuchte Zahl gehört, so von einander abhängen, dass dem 2-, 3-, 4fachen der einen Größe auch immer entweder das 2-, 3-, 4fache oder immer die Hälfte, der 3te, 4te Theil der andern Größe entspricht. (Gerades Verhältnis, umgekehrtes Verhältnis.)

Aufgaben dieser Art wurden als Preisberechnungen schon am Schlusse des Zahlenkreises bis 100 behandelt; sie traten dann im erweiterten Umfange auch innerhalb des Zahlenraumes bis 1000 bei der Multiplication und der Division auf. Um nun den Überblick über die einzelnen Schlussrechnungen zu erleichtern, wollen wir hier die bezüglichen Aufgaben im Zusammenhange nach den verschiedenen Schlussformen, welche ihrer Lösung zu Grunde liegen, auf einander folgen lassen. Diese Schlussformen müssen sich zuletzt dem Gedächtnisse, das auch eine Geisteskraft ist, unverlierbar einprägen, was nur möglich ist, wenn die Schüler, nachdem sie vom Lehrer angeleitet worden sind, an einigen gleichartigen Aufgaben die richtigen Schlüsse zur Auflösung zu bilden, sofort Gelegenheit erhalten, diese Schlüsse auf viele ähnliche Aufgaben anzuwenden. Die hier zu lösenden Aufgaben werden daher nach Verschiedenheit der erforderlichen Schlüsse in Gruppen geordnet und in dieser Anordnung tüchtig durchgeübt.

§. 67. Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit.

Diese Schlussform kommt im bürgerlichen Leben am häufigsten vor. Nach der Mannigfaltigkeit der hieher gehörigen Aufgaben wird auch die Ausrechnung auf verschiedene Art vollzogen.

a) Die Rechnung wird durch eine einfache Multiplication ausgeführt.

Die Schlussfolge bei solchen Aufgaben ist ganz einfach. Z. B.

1 *m* kostet 5 fl.; wie viel kosten 8 *m*?

So oft ich 1 *m* kaufe, so oft muss ich 5 fl. bezahlen; 8 *m* sind 8mal 1 *m*, also muss ich für 8 *m* 8mal 5 fl. bezahlen; 8mal 5 fl. sind 40 fl.; 8 *m* kosten also 40 fl. — Kürzer: 1 *m* kostet 5 fl., 8 *m* sind 8 × 1 *m*, 8 *m* kosten also 8 × 5 fl., d. i. 40 fl.

b) Die Rechnung wird durch Anwendung von Vortheilen ausgeführt.

Verständnis und Sicherheit im Rechnen ist vor allem und mehr anzustreben als Schnelligkeit. Wir legen darum auf die sogenannten Rechnungsvortheile keinen besonderen Wert und machen eine Ausnahme nur bezüglich jener eben so einfachen als wichtigen Vortheile, welche sich aus dem Zusammenhange, der zwischen den Eintheilungszahlen unserer Münzen, Maße und Gewichte besteht, unmittelbar ergeben. Diese Vortheile müssen übrigens aus den vorgelegten Aufgaben durch entsprechende Schlüsse von den Schülern selbst gefunden werden; am meisten Vortheil hat der Schüler von dem, was er durch eigenes Nachdenken gefunden hat. (Vergleiche II. Abtheilung §. 50, a. 2.)

c) Die Rechnung wird durch Zerlegung der Kreuzer in Zehner und Kreuzer ausgeführt.

Preisrechnungen dieser Art kommen im praktischen Leben täglich vor und erfordern daher eine besonders sorgfältige Durchübung. Man zerlegt dabei die Kreuzer im Preise der Einheit in Zehner und Kreuzer, berechnet den Preis der Mehrheit für die Zehner und für die Kreuzer und zählt dann beide zusammen. Kommen im Preise der Einheit neben den Kreuzern auch Gulden vor, so wird der Preis der Mehrheit zuerst für die Gulden berechnet, dann der Preis für die Zehner und endlich der Preis für die Kreuzer zugezählt.

Eine übersichtliche Darstellung wird das Verständnis wesentlich erleichtern; z. B.

1 *kg* Reis kostet 32 kr.; wie viel kosten 8 *kg*?

1 *kg* kostet 32 kr. = 3 Zehner + 2 kr.
8 *kg* kosten 8 × 3 Zehner + 8 × 2 kr.
8 × 3 Zehner sind 24 Zehner = 2 fl. 40 kr.
8 × 2 kr. sind 16 kr.
2 fl. 40 kr. + 16 kr. sind 2 fl. 56 kr.

In dieser Form sollen die Schüler anfänglich mehrere Aufgaben schriftlich durchführen, damit ihnen die Schlussfolge geläufiger wird. Später, wenn schon die nöthige Einsicht erzielt ist, kann bei den schriftlichen Übungen sogleich nur das Resultat angeschrieben werden.

Auch hier empfehlen sich Reihen, um den Schülern in Kürze Aufgaben für eine längere Beschäftigung zu geben; z. B.

1.		2.	
1 *l* kostet	43 kr.	1 *m* kostet	61 kr.
2 „ kosten	86 „	3 „ kosten	1 fl. 83 „
3 „ „	1 fl. 29 „	7 „ „	4 „ 27 „
4 „ „	1 „ 72 „	2 „ „	2 „ 22 „
5 „ „	2 „ 15 „	8 „ „	4 „ 88 „
6 „ „	2 „ 58 „	5 „ „	3 „ 5 „
7 „ „	3 „ 1 „	9 „ „	5 „ 49 „
8 „ „	3 „ 44 „	4 „ „	2 „ 44 „
9 „ „	3 „ 87 „	10 „ „	6 „ 10 „
10 „ „	4 „ 30 „	6 „ „	3 „ 66 „

Die Reihenfolge unter 1. ist nicht zweckentsprechend. Die Schüler werden bald merken, dass die auf einander folgenden Preise um den Einheitspreis wachsen; sie würden also, anstatt den Mehrheitspreis jedesmal besonders zu berechnen, nur zu dem vorhergehenden Mehrheitspreise immer den Preis der Einheit zuzählen, und so würde der hier beabsichtigte Übungszweck nicht erreicht werden. Um dem vorzubeugen, wähle man daher eine andere, von der natürlichen Zahlenreihe abweichende Reihe, z. B. 1, 3, 7, 2, 8, 5, 9, 4, 10, 6, wie solche unter 2. dargestellt ist, und behalte diese unabänderlich in allen folgenden Aufgaben bei.

d) Die Rechnung wird durch Zerlegung der Kreuzer in Guldentheile (Gulden) und Kreuzer ausgeführt.

Diese Zerlegung ist gegenüber der unter c) angeführten, allgemein anwendbaren Rechnungsweise nur dann von Vortheil, wenn die Zahl der Kreuzer von 20, 25, 50 oder 100 nicht bedeutend abweicht; z. B.

19 kr. = $^1/_5$ fl. — 1 kr.	48 kr. = $^1/_2$ fl. — 2 kr.
21 „ = $^1/_5$ „ + 1 „	51 „ = $^1/_2$ „ + 1 „
22 „ = $^1/_5$ „ + 2 „	53 „ = $^1/_2$ „ + 3 „
24 „ = $^1/_4$ „ — 1 „	97 „ = 1 „ — 3 „
26 „ = $^1/_4$ „ + 1 „	98 „ = 1 „ — 2 „
	99 „ = 1 „ — 1 „

Die Auflösung ist aus folgenden Beispielen ersichtlich:

1 *kg* kostet 52 kr.; wie viel kosten 17 *kg*?	1 *m* kostet 23 kr.; wie viel kosten 28 *m*?
1 *kg* . . . 52 kr. = $^1/_2$ fl. + 2 kr.	1 *m* . . . 23 kr. = $^1/_4$ fl. — 2 kr.
17 *kg* . . . $^{17}/_2$ fl. + 17 × 2 kr.	28 *m* . . . $^{28}/_4$ fl. — 28 × 2 kr.
$^{17}/_2$ fl. = 8 fl. 50 kr.	$^{28}/_4$ = 7 fl.
17 × 2 kr. = 34 kr.	28 × 2 kr. = 56 kr.
8 fl. 50 kr. + 34 kr. = 8 fl. 84 kr.	7 fl. — 56 kr. = 6 fl. 44 kr.

e) Die Rechnung wird durch eine einfache Division ausgeführt.

Dieser Fall tritt bei Aufgaben ein, welche auf umgekehrten Verhältnissen beruhen. Die Schlussfolge ersieht man aus folgendem Beispiele:

Eine Wiese wird von 1 Mäher in 36 Stunden abgemäht; in wie viel Stunden würde sie von 4 Mähern abgemäht werden?

1 Mäher mäht die Wiese in 36 Stunden ab; 4 Mäher leisten in derselben Zeit 4mal so viel als 1 Mäher, 4 Mäher brauchen daher zum Abmähen derselben Wiese nur den 4ten Theil der Zeit, welche 1 Mäher dazu braucht, also den 4ten Theil von 36 Stunden; der 4te Theil von 36 Stunden sind 9 Stunden; 4 Mährr mähen also die Wiese in 9 Stunden ab.

Man könnte auch so folgern: Denkt man sich die Wiese in 36 gleiche Theile getheilt, so stellt jeder Theil die Arbeit vor, welche 1 Mäher in 1 Stunde zu leisten hat. 1 Mäher wird also zu der ganzen Arbeit 36 Stunden brauchen. Werden nun 4 Mäher aufgenommen, so kommt auf jeden nur $^1/_4$ von den 36 Theilen, also 9 Theile; 4 Mäher werden also mit der Arbeit in 9 Stunden fertig.

§. 68. Schluss von der Mehrheit auf die Einheit.

a) Die Rechnung wird durch eine einfache Division ausgeführt.

Schlussfolge:

8 *m* Tuch kosten 56 fl.; wie viel kostet 1 *m*?

Um zu finden, wie viel 1 *m* kostet, muss man die 56 fl. auf die 8 *m* so vertheilen, dass auf ein *m* so viel kommt als auf das andere; man muss daher 56 fl. in 8 gleiche Theile zerlegen. Auf 1 *m* kommt also der 8te Theil von 56 fl., d. i. 7 fl. — Kürzer: 8 *m* kosten 56 fl.; 1 *m* ist der 8te Theil von 8 *m*, 1 *m* kostet daher den 8ten Theil von 56 fl., also 7 fl.

b) Die Rechnung wird durch Anwendung von Vortheilen ausgeführt.

Die sich hier ergebenden Rechnungsvortheile sind bereits in der II. Abtheilung, §. 50, b) angeführt worden.

c) Die Rechnung wird durch eine passende Zerlegung des Preises in Zehner und Kreuzer ausgeführt.

Hier müssen die Schüler zunächst angeleitet werden, den Preis der Mehrheit so in Zehner und Kreuzer zu zerlegen, dass die Zahl der Zehner ein Vielfaches von der Zahl wird, durch welche getheilt werden soll.

Ist z. B. 5 fl. 84 kr. durch 8 zu theilen, so hat man erstlich 5 fl. 84 kr. = 50 Zehner + 8 Zehner + 4 kr. Von den 58 Zehnern nimmt man nun so viele als den einen Bestandtheil, dass sie ein Vielfaches von 8 sind, also 56 Zehner; die übrigen 2 Zehner fasst man mit den 4 Kreuzern zu 24 Kreuzern zusammen und man erhält also 8 fl. 84 kr. = 56 Zehner + 24 kr. Sodann ist es leicht, davon den 8ten Theil zu nehmen.

Die Auflösung der Aufgaben selbst ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

7 m kosten 5 fl. 95 kr.; wie viel kostet 1 m?

7 m . . . 5 fl. 95 kr. = 56 Z. + 35 kr.
1 m . . . $^1/_7$ v. 56 Z. + $^1/_7$ v. 35 kr.
$^1/_7$ v. 56 Z. = 8 Z. = 80 kr.
$^1/_7$ v. 35 kr. = 5 kr.
80 kr. + 5 kr. = 85 kr.

d) Die Rechnung wird durch eine Multiplication ausgeführt.

Die hieher gehörigen Aufgaben beruhen auf umgekehrten Verhältnissen. Z. B.

6 Personen reichen mit einem Mehlvorrathe 15 Tage aus; wie lange reicht damit 1 Person aus?

Denkt man sich den Vorrath nach der Zahl der Tage in 15 gleiche Theile, und jeden Theil nach der Zahl der Personen wieder in 6, also den ganzen Vorrath in 6 × 15 oder 90 gleiche Theile getheilt, so ist jeder Theil die tägliche Portion für 1 Person und man hat 90 solche Portionen; mit diesen wird daher 1 Person durch 90 Tage ausreichen. — Kürzer: 1 Person ist der 6te Theil von 6 Personen; 1 Person kommt daher mit demselben Vorrathe 6mal so lange aus, als 6 Personen, also 6mal 15 Tage, oder 90 Tage.

§. 69. Schluss von der Mehrheit auf ein Vielfaches derselben.

a) Die Rechnung wird durch die Multiplication ausgeführt.

Schlussfolge:

1 Arbeiter verdient in 6 Tagen 11 fl.; wie viel in 42 Tagen?

So vielmal 6 Tage, eben so vielmal 11 fl. Verdienst; 42 Tage sind 7mal 6 Tage, in 42 Tagen verdient also der Arbeiter 7mal 11 fl., also 77 fl.

b) Die Rechnung wird durch die Division ausgeführt.

Z. B. A hat für 4 Pferde auf 9 Monate Hafer; wie lange würde dieser für 12 Pferde ausreichen?

12 Pferde sind 3 × 4 Pferde; 12 Pferde verzehren also 3mal so viel als 4 Pferde, daher reicht für sie derselbe Vorrath nur auf den dritten Theil von 9 Monaten, also auf 3 Monate aus.

15 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 12 Tagen; wie viel Tage brauchen dazu 30 Arbeiter?

30 Arbeiter sind 2mal 15 Arbeiter; doppelt so viele Arbeiter brauchen zu derselben Arbeit nur die halbe Zeit, also die Hälfte von 12 Tagen, d. i. 6 Tage.

§. 70. Schluss von der Mehrheit auf einen Theil derselben.

a) Die Rechnung wird durch die Division ausgeführt.

Schlussfolge:

72 l kosten 44 fl.; wie viel kosten 9 l?

9 l sind der 8te Theil von 72 l, 9 l kosten daher den 8ten Theil von 44 fl.; der 8te Theil von 40 fl. sind 5 fl., der 8te Theil von 4 fl. sind 50 kr.; der 8te Theil von 44 fl. also 5 fl. 50 kr; folglich kosten 9 l 5 fl. 50 kr.

b) Die Rechnung wird durch die Multiplication ausgeführt.

Z. B. Wenn jemand täglich 4 Zehner erspart, so muss er 9 Wochen sparen, um sich von den Ersparnissen einen Rock kaufen zu können; wie lange muss er sparen, wenn er täglich nur 2 Zehner erübrigt?

2 Zehner sind die Hälfte von 4 Zehnern; wer daher täglich nur 2 Zehner erspart, muss, um ein bestimmtes Ersparnis zu erzielen, 2mal so lange Zeit sparen, als derjenige, welcher täglich 4 Zehner erspart, also 2mal 9 Wochen, d. i. 18 Wochen. — Hier kann man die Schüler auch berechnen lassen, wie viel der Rock kostet.

§. 71. Schluss von der Mehrheit durch einen Theil derselben auf ein Vielfaches dieses Theiles.

a) Die Rechnung beruht auf geraden Verhältnissen und wird durch eine Division und eine Multiplication ausgeführt.

Die Schlussform ist zusammengesetzt. Z. B.

24 *kg* kosten 16 fl.; wie viel kosten 30 *kg*?

6 *kg* sind der 4te Theil von 24 *kg*, 30 *kg* sind aber 5mal 6 *kg*; 6 *kg* kosten daher den 4ten Theil von 16 fl. oder 4 fl.; 30 *kg* oder 5mal 6 *kg* aber kosten 5mal 4 fl. = 20 fl.

Die Rechnung erhält folgende übersichtliche Darstellung:

24 *kg*	kosten	16 fl.	
6 „	„	$\frac{1}{4}$ von 16 fl. =	4 fl.
30 „	„	5mal 4 fl. =	20 fl.

b) Die Rechnung beruhet auf umgekehrten Verhältnissen und wird durch eine Multiplication und eine Division ausgeführt.

Z. B. Jemand will von A nach B reisen; geht er täglich 60 *km* weit, so kommt er in 10 Tagen an; in welcher Zeit wird er nach B kommen, wenn er täglich nur 40 *km* zurücklegt?

20 *km* sind der dritte Theil von 60 *km*, 40 *km* aber sind 2mal 20 *km*; geht man daher täglich nur 20 *km* weit, so braucht man zur Reise 3mal so viel Zeit, als wenn man täglich nur 60 *km* weit gienge, also 3mal 10 Tage oder 30 Tage; legt man aber täglich 40 *km* oder 2mal 20 *km* zurück, so braucht man nur die Hälfte von 30 Tagen, also 15 Tage.

Übersichtliche Darstellung:

täglich	60 *km*,	so	braucht	man	10 Tage,	
„	20 „	„	„	„	3mal 10 Tage =	30 T.
„	40 „	„	„	„	$\frac{1}{2}$ v. 30 Tagen =	15 T.

Die Auflösung könnte auch so geschehen: Da man 10 Tage braucht, wenn man täglich 60 *km* macht, so ist die Entfernung von A nach B 10 × 60 *km* oder 600 *km*. Legt man nun täglich 40 *km* zurück, so dauert die Reise so viele Tage, als 40 *km* in 600 *km* enthalten sind, d. i. 15 Tage.

§. 72. Schluss von der Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit.

Schon bei den drei zuletzt angeführten Schlussformen wurde aus dem Betrage der Mehrheit der Betrag einer andern gleichartigen Mehrheit gesucht; jene Schlussformen lassen sich jedoch nur in solchen besonderen Fällen anwenden, in denen die Mehrheit, deren Betrag gesucht wird, entweder ein Vielfaches, oder ein Theil, oder endlich das Vielfache eines Theiles der Mehrheit ist, deren Betrag man kennt.

Dagegen ist die Schlussform, nach welcher von der Mehrheit zunächst auf die Einheit, und dann von dieser auf eine andere Mehrheit geschlossen wird, allgemein anwendbar.

Damit die Rechnungen für diese Stufe nicht zu verwickelt erscheinen, müssen die Aufgaben so gewählt werden, dass das Theilen und das Vervielfachen im Kopfe vollzogen werden kann.

a) Die Rechnung beruhet auf geraden Verhältnissen und wird durch eine Division und eine Multiplication ausgeführt.

Schlussfolge:

8 *m* kosten 24 fl.; wie viel kosten 5 *m*?

Wüsste ich, wie viel 1 *m* kostet, so würde ich leicht berechnen, wie viel 5 *m* kosten; der Preis von 1 *m* ist zwar nicht gegeben, aber er kann ohne Schwierigkeit gefunden werden. 8 *m* kosten 24 fl., 1 *m* ist der 8te Theil von 8 *m*, 1 *m* kostet daher den 8ten Theil von 24 fl. oder 3 fl. Wenn nun 1 *m* 3 fl. kostet, so kosten 5 *m* oder 5mal 1 *m* 5mal 3 fl., oder 15 fl. — Kürzer: Wenn 8 *m* 24 fl. kosten, so kostet 1 *m* den 8ten Theil von 24 fl., d. i. 3 fl.; 3 *m* kosten dann 5mal 3 fl., d. i. 15 fl.

Die Rechnung wird so dargestellt:

8 *m* kosten 24 fl.
1 „ kostet $\frac{1}{8}$ v. 24 fl. = 3 fl.
5 „ kosten 5 × 3 fl. = 15 fl.

b) Die Rechnung beruhet auf umgekehrten Verhältnissen und wird durch eine Multiplication und eine Division ausgeführt.

Schlussfolge:

14 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 9 Tagen; wie viele Tage brauchen dazu 9 Arbeiter?

Da 1 Arbeiter täglich nur den 14ten Theil von dem leistet, was 14 Arbeiter zustande bringen, so braucht er für die ganze Arbeit 14mal so viel Zeit als diese, also 14mal 9 Tage, d. i. 126 Tage. 9 Arbeiter sind 9mal 1 Arbeiter und leisten also 9mal so viel als 1 Arbeiter; 9 Arbeiter werden daher nur den 9ten Theil jener Zeit brauchen, in welcher 1 Arbeiter mit der Arbeit fertig würde, also den 9ten Theil von 126 Tagen, d. i. 14 Tage.

Die Rechnung läſst sich so darstellen:

14	Arbeiter	brauchen	9 Tage
1	„	braucht	14 × 9 Tage = 126 Tage
9	„	brauchen	$\frac{1}{9}$ v. 126 Tagen = 14 „

§. 73. Einfache Zinsrechnungen.

Wiewohl die Zinsrechnungen nach den bisher geübten Schlüssen ausgeführt werden können, so erscheint es doch angemessen, dieselben hier abgesondert folgen zu lassen, nicht nur wegen der hervorragenden Anwendung, welche sie im Leben finden, sondern auch wegen der besonderen praktischen Verhältnisse, auf denen sie beruhen, und deren Kenntnis den Schülern zum richtigen Verständnisse dieser Rechnungen unentbehrlich ist. In dieser Beziehung kann der Lehrer ungefähr folgende Bemerkungen vorausschicken.

Wenn einer kein eigenes Haus hat, muſs er sich eine Wohnung mieten und dem Hauseigenthümer für die Benützung derselben eine jährliche Entschädigung, welche man Zins nennt, bezahlen.

Ebenso muſs derjenige, welcher zu einem Geschäfte nicht genug eigenes Geld hat, dasselbe von einem andern ausleihen und diesem dafür bis zur Rückzahlung eine jährliche Vergütung, welche ebenfalls Zins heißt, bezahlen. Derjenige, welcher Geld entlehnt, heißt Schuldner, derjenige, welcher es darleiht, Gläubiger, und das dargeliehene Geld heißt Capital.

Der Zins wird dadurch bestimmt, daſs man angibt, wie viel jährlich von 100 fl. Capital als Entschädigung gezahlt werden muſs; das nennt man den Zinsfuß oder die Procente (%).

Z. B. Jemand entlehnt 500 fl. und muſs für jede 100 fl. jährlich 5 fl. Zins zahlen. Hier sagt man: er entlehnte das Capital zu 5 Procent.

Nach diesen Vorbemerkungen werden nun die diesbezüglichen Rechnungsübungen vorgenommen. Dabei beschränken wir uns hier auf den am häufigsten vorkommenden Fall, wo der Zins gesucht wird, und da auch nur auf die einfachsten Aufgaben.

Die Stufenfolge, in welcher die hier zu übenden Zinsrechnungen vorzunehmen sind, wie auch den bei ihrer Behandlung zu beobachtenden Vorgang ersieht man aus den folgenden Aufgaben:

a) Von 100 fl. erhält man 5 fl. Zins; wie viel von 600 fl.?

Hier wird von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben geschlossen. 600 fl. sind 6mal 100 fl.; 600 fl. geben daher 6mal 5 fl., d. i. 30 fl. Zins.

b) 100 fl. Capital geben jährlich 6 fl. Zins; wie viel Zins gibt 1 fl. Capital?

Hier wird von der Mehrheit auf die Einheit geschlossen. 1 fl. ist der 100ste Theil von 100 fl., 1 fl. Capital gibt also den 100sten Theil von 6 fl. Zins;

der 100ste Theil von 1 fl. ist 1 kr., der 100ste Theil von 6 fl. sind daher 6 kr.; 1 fl. Capital gibt also 6 kr. Zins.

Rechnungsvortheil: So viele Gulden jährlichen Zins von 100 fl. Capital, eben so viele Kreuzer Zins erhält man von 1 fl. Capital.

c) Ein Capital ist zu 4% angelegt; wie viel Zins erhält man jährlich von 32 fl. Capital?

Hier wird von der Mehrheit zuerst auf die Einheit, und dann von dieser auf eine andere Mehrheit geschlossen. 100 fl. Capital geben jährlich 4 fl. Zins, 1 fl. Capital gibt daher 4 kr. Zins, 32 fl. Capital geben 32mal 4 kr., d. i. 1 fl. 28 kr. Zins.

d) Ein Capital von 430 fl. ist zu 6% angelegt; wie groß ist der jährliche Zins?

Die Ausrechnung wird durch eine passende Zerlegung vorgenommen. 430 fl. sind 400 fl. + 30 fl.; 400 fl. geben 4mal 6 fl., d. i. 24 fl. Zins, 30 fl. geben 30mal 6 kr., d. i. 1 fl. 80 kr. Zins; 24 fl. und 1 fl. 80 kr. sind 25 fl. 80 kr.

Vierte Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **vierten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen mit ganzen Zahlen und Decimalbrüchen, mit mehrnamigen Zahlen und gemeinen Brüchen.

Einleitung.

---

§. 74. Anordnung der Übungen des vierten Rechenbuches.

1. In dem vierten Rechenbuche, welches das Rechnen mit ganzen Zahlen zum Abschluss bringen soll, erfolgt zunächst der weitere Ausbau des Zahlengebäudes mit stetem Hinblick auf das dekadische Zahlengesetz.

Sodann folgen Übungen in den vier Rechnungsoperationen. Das Zifferrechnen in den höheren Zahlenkreisen ist eine bloße Wiederholung des bereits an den kleineren Zahlen Geübten im erweiterten Zahlenumfange. Die Schüler haben das Wesen des Zifferrechnens bereits in dem Zahlenraume bis 1000 erkannt und in diesem das kürzere schriftliche Rechnungsverfahren anwenden gelernt. Die Anwendung auf größere Zahlen erfordert nur eine Erweiterung der Zahlenvorstellungen. Diese wird hier vermittelt. Da sonach die einzelnen Operationen im allgemeinen keine besondere Erläuterung mehr erheischen, so werden wir nähere Erklärungen nur dort beifügen, wo etwas Neues auftritt.

Neben dem Zifferrechnen soll auf jeder Stufe auch das Kopfrechnen sorgfältig fortgeübt werden. Da sich die höheren Zahlenkreise nur im beschränkten Maße für das Kopfrechnen eignen, so wird das letztere hier abgesondert zu betreiben sein. Man widme wöchentlich mindestens zwei halbe Stunden dem mündlichen Rechnen; als Übungsstoff empfehlen sich dabei am besten die Schlussrechnungen.

An ein- und zweiclassigen Volksschulen, an denen dem Zahlenkreise bis 1000 kein besonderer Cursus gewidmet wurde, ist hier das, was im ersten Abschnitte der III. Abtheilung über die Kenntnis der Zahlen bis 1000 und über die schriftliche Ausführung der Grundoperationen (§§. 53. 54. 55. 57. 59. 61 und 64) angeführt wurde, an den betreffenden Stellen möglichst vollständig nachzutragen.

2. Durch die bisher ausgeführten Übungen ist das Rechnen mit reinen und einnamigen ganzen Zahlen abgeschlossen. Wir nahmen die bezüglichen Übungen zunächst in dem ersten Zehnerraume, dann folgeweise in dem bis 20, 100, 1000

erweiterten Zahlenkreise, endlich im unbegrenzten Zahlenraume vor. Der Stufengang war durch die fortschreitende Entwicklung des Zahlengebietes selbst naturgemäß gegeben. Insofern bei dem Zahlenkreise bis 100 auch die Elemente der Bruchrechnung, und in dem Zahlenkreise bis 1000 auch Decimalrechnungen mit Zehnteln, Hunderteln und Tausendteln Berücksichtigung fanden, waren es nur Einschaltungen, die auf den betreffenden Stufen zur Ergänzung herangezogen wurden, die jedoch den Stufengang im großen und ganzen nicht berührten.

Nicht so bestimmt kann an und für sich der Gang des weiteren Rechenunterrichtes vorgezeichnet werden. Früher ließ man auf das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen Zahlen gewöhnlich das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen folgen und widmete dann eine oft unverhältnismäßig lange Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche, während die Decimalbrüche in vielen Volksschulen gar nicht, in anderen erst am Schlusse des Rechenunterrichtes als eine besondere Art der gemeinen Brüche, und zwar ohne erhebliche praktische Anwendung, indem die alten Maße, Gewichte und Münzen hiezu wenig Veranlassung boten, an die Reihe kamen.

Durch die decimale Eintheilung unserer Münzen, sowie der neuen metrischen Maße und Gewichte erhalten nun die eben angeführten Rechenstoffe eine wesentlich geänderte Bedeutung, die auch für ihre Anordnung maßgebend sein muss. Indem man gegenwärtig im gewöhnlichen Leben nur selten mit gemeinen Brüchen, und selbst da nur mit kleineren Bruchzahlen rechnet, haben dagegen allgemein die Decimalbrüche eine umso größere Wichtigkeit. Ohne Kenntnis des Decimalrechnens ist der Bau des metrischen Maß- und Gewichtssystems nicht einmal gut verständlich, noch weniger kann ohne sie eine geschickte und vortheilhafte Anwendung desselben stattfinden. Die Vergleichung der neuen und der alten Maße und Gewichte und die gegenseitige Umwandlung derselben ist mit Genauigkeit nur mit Hilfe der Decimalbrüche ausführbar. Der Volksschule erwächst daher die Aufgabe, ihre Schüler frühzeitig mit der Decimalrechnung vertraut zu machen, und zwar sobald dieses durch die natürliche Gliederung des Rechenunterrichtes zulässig erscheint. Die geeignetste Stelle erhalten nun die Decimalzahlen unmittelbar nach den ganzen Zahlen, da sie eben nur eine Erweiterung unseres dekadischen Zahlensystems sind und in den Operationen denselben Gesetzen folgen, welche die Schüler für ganze Zahlen kennen gelernt haben.

Wir nehmen daher, nachdem das Rechnen mit ganzen Zahlen bereits vollständig abgeschlossen ist, sogleich das Rechnen mit Decimalbrüchen vor. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, welches wir dann folgen lassen, gestaltet sich, wenn man die Zeit- und Bogenmaße ausnimmt, durchgängig als Decimalrechnen und findet in diesem seine natürliche Begründung. Den Schluss sollen die gemeinen Brüche bilden, bei denen wir jedoch vorläufig nur die Bedürfnisse des gewöhnlichen Lebens im Auge behalten werden.

Wir ordnen demnach den Übungsstoff des vierten Rechenbuches, wie folgt:

I. Das Rechnen in den höheren Zahlenräumen.

II. Das Rechnen mit Decimalzahlen.

III. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

IV. Das Rechnen mit den häufiger vorkommenden gemeinen Brüchen.

Erster Abschnitt.
Das Rechnen in den höheren Zahlenräumen.

---

§. 75. Bildung der höheren Zahlen.

(An den Schulen, an denen die Schüler den Zahlenraum bis 1000 nicht durchgearbeitet haben, ist hier nach den Andeutungen der §§. 53—55 zunächst der Zahlenkreis der Hunderte zu behandeln.)

a) Zahlenkreis der Tausende.

Die Schüler wissen bereits, dass 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner ein Hundert und 10 Hunderte ein Tausend bilden, dass ferner beim Anschreiben der Zahlen die Einer in die erste, die Zehner in die zweite, die Hunderte in die dritte Stelle gesetzt werden.

Nun werden die Tausende vorgeführt.

10 Hunderte sind 1 Tausend,
20 „ „ 2 Tausende,
30 „ „ 3 „ u. s. w.

Umgekehrt: Wie viel Hunderte sind 1, 2, 3, 4, . . . 9 Tausende?

Da 1 Tausend 10mal so groß ist als 1 Hundert, so wird es um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Hundert. Die Hunderte stehen an der dritten Stelle; die Tausende kommen daher in die vierte Stelle.

1 Tausend = 1000,
2 Tausende = 2000,
3 „ = 3000, u. s. w.

Durch die Verbindung der Tausende mit den Hunderten, Zehnern und Einern entstehen die einzelnen Zahlen des neuen Zahlenkreises. Das Zählen wird in jedem Tausend auf gleiche Weise vorgenommen, wie in dem Zahlenraume von 1 bis 1000; nämlich:

1001, 1002, . . . 1010, 1011. . . . 1099, 1100;
1101, 1102, . . . 1110, 1111, . . . 1199, 1200;
u. s. w.

Ebenso

2001, 2002, . . . 2010, 2011, . . . 2099, 2100;
2101, 2102, . . . 2110, 2111, . . . 2199, 2200;
u. s. w. bis 9999.

Die Übungen, welche hier unbedingt vorzunehmen sind, bestehen im Zusammenfassen und Zerlegen, beziehungsweise im Lesen und Schreiben der Zahlen. Z. B.

1. Fasse 5 T. 8 H. 2 Z. 6 E. in eine Zahl zusammen. 5 T. 8 H. 2 Z. 6 E. = fünftausend achthundert sechs und zwanzig.

2. Zerlege die Zahl 9357 a) in die einzelnen Zahlwerte, b) in Tausende und Einer.

9357 = 9 T. 3 H. 5 Z. 7 E. = 9 T. 357 E.

3. Lies die Zahl 8296.

8296 = 8 T. 296 E. = achttausend zweihundert sechs und neunzig.

Man spricht zuerst die Tausende, und dann die durch die drei niedrigeren Stellen ausgedrückte Zahl, als wenn sie allein stünde, aus.

4. Schreibe die Zahl: zweitausend dreihundert acht und vierzig.

Zweitausend dreihundert acht und vierzig = 2 T. 3 H. 4 Z. 8 E. = 2348.

Man schreibt zuerst die Tausende an, und setzt in die drei niedrigeren Stellen nach der Ordnung die Hunderte, Zehner und Einer. Nach den Tausenden müssen immer drei Stellen folgen; wird eine derselben nicht angegeben, so ist an jene Stelle eine Null zu setzen.

b) Zahlenkreis der Zehntausende.

10 Tausende sind 1 Zehntausend. Die Zehntausende werden in die fünfte Stelle geschrieben. So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Zehntausende bezeichnet sie in der fünften Stelle.

Vorgang und Übungen entsprechen denjenigen im Zahlenkreise der Tausende unter a).

c) Zahlenkreis der Hunderttausende.

10 Zehntausende sind 1 Hunderttausend. Die Hunderttausende setzt man an die sechste Stelle. So viel Einer also eine Ziffer an sich bezeichnet, eben so viel Hunderttausende bedeutet sie in der sechsten Stelle.

Vorgang und Übungen wie im Zahlenkreise der Tausende unter a).

d) Millionen und höhere Zahlen.

10 Hunderttausende sind 1 Million. Die Millionen werden in die siebente Stelle geschrieben.

Die bisherige Erweiterung des Zahlengebietes genügt, um den Schülern unser Zahlengesetz zum klaren Bewusstsein zu bringen.

10 E. = 1 Z.	10 T. = 1 Z. T.
10 Z. = 1 H.	10 Z. T. = 1 H. T.
10 H. = 1 T.	10 H. T. = 1 M.

Betrachten wir die geschriebene Zahl

2222222.

Hier steht die Ziffer 2 siebenmal. Was bedeutet diese Ziffer an jeder Stelle von der rechten Hand gegen die linke? Die 2 in der ersten Stelle gilt 2 Einer.

Die 2 in der zweiten Stelle gilt 2 Zehner, also 10mal 2 Einer. Die 2 in der dritten Stelle gilt 2 Hunderte, also 10mal 2 Zehner. Die 2 in der vierten Stelle gilt 2 Tausende, also 10mal 2 Hunderte; u. s. w.

Das Ergebnis läßt sich in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

1. Je zehn Einheiten einer Ordnung bilden immer eine Einheit der nächst höheren Ordnung; 10 Einer sind 1 Zehner, 10 Zehner sind 1 Hundert, 10 Hunderte sind 1 Tausend, u. s. f.

2. Jede Ziffer bedeutet in der folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel als in der nächst vorhergehenden, also in der ersten Stelle Einer, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende, u. s. w.

Man nennt darum diese Anordnung unserer Zahlen die Zehnerordnung oder das dekadische Zahlensystem (vom griechischen deka zehn).

Nachdem die Schüler auf diese Weise in das Verständnis unseres Zahlengesetzes eingeführt worden, kann der Bau des Zahlengebäudes ohne Schwierigkeit noch weiter fortgeführt und dabei auf die Unendlichkeit der Zahlen hingewiesen werden.

10 Millionen	=	1 Zehnmillion	=	10,000.000
10 Zehnmillionen	=	1 Hundertmillion	=	100,000.000
10 Hundertmillionen	=	1 Tausendmillion	=	1.000,000.000
10 Tausendmillionen	=	1 Zehntausendmillionen	=	10.000,000.000
10 Zehntausendmillionen	=	1 Hunderttausendmillion	=	100.000,000.000
10 Hunderttausendmillionen	=	1 Billion	=	1,,000.000,000.000

Wie bei den Zahlen unter tausend, ebenso wiederholen sich auch bei den höheren Zahlen die Einer, Zehner, Hunderte in fortschreitender Aufeinanderfolge. Je drei auf einander folgende Stellen der Einer, Zehner und Hunderte bilden eine eigene Classe von Einheiten; die drei niedrigsten Stellen heißen geradezu Einer, Zehner, Hunderte, die nächstfolgenden drei Stellen Einer, Zehner, Hunderte von Tausenden, die weiter folgenden Einer, Zehner, Hunderte von Millionen u. s. w.

Zur Erleichterung der Übersicht wird der Lehrer auf der Schultafel, der Schüler auf der Schiefertafel, folgendes Schema bilden:

u. s. w.	Hund.	Zehn.	Ein.	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer
	Tausend											
	Millionen						Tausend					
	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
						3	7	8	2	6	4	9

In diese Tabelle werden verschiedene Zahlen, nachdem sie früher in ihre Zahlenwerte zerlegt worden, eingetragen.

Die Eintheilung der Zahlen in Classen zu drei Stellen, welche nach der Ordnung Einer, Zehner und Hunderte enthalten, wird das Zahlenlesen und Zahlenschreiben wesentlich erleichtern.

Beim Lesen geschriebener Zahlen lasse man diese, von der Rechten angefangen, in Classen zu drei Ziffern abtheilen, und bei größeren Zahlen wegen der leichteren Übersicht nach der ersten Classe einen Punkt, nach der zweiten einen Strich, nach der dritten wieder einen Punkt setzen. Die Schüler merken bald, dass sie dann von der Linken anfangend, bloß jede einzelne Classe für sich, als stünde sie ganz allein, auszusprechen, und bei dem Punkte das Wort Tausend, bei dem Striche das Wort Million hinzuzusetzen haben.

Es soll z. B. die Zahl 15,408.063 ausgesprochen werden. Nachdem die Eintheilung in Classen gehörig bewerkstelliget wurde, frage der Lehrer: Welche Zahl kommt in der Classe der Millionen vor? Ihr habet also zuerst 15 Millionen. Wie viele Hunderte, Zehner und Einer enthält die Classe der Tausende? Ihr leset also 408 Tausend. Sprechet nun noch die niedrigste Classe aus. Was steht an der Stelle der Hunderte? Ihr werdet daher die Hunderte auch gar nicht nennen. Wie viel Zehner und Einer sind da? Wie werden diese ausgesprochen? Die ganze Zahl wird also gelesen: Fünfzehn Millionen, vierhundert acht tausend, drei und sechzig.

Eben so leicht erscheint auch das Anschreiben ausgesprochener Zahlen. Man lasse die Schüler jedesmal zuerst jene ein-, zwei- oder dreistellige Zahl anschreiben, nach welcher das erstemal der Beisatz Tausend oder Million gehört wird, und sodann gegen die Rechte hin die übrigen Bestandtheile nach der Ordnung, wie man sie in Abtheilungen nach Hunderten, Zehnern und Einern ausspricht, ebenso auch schriftlich in Classen von je drei Ziffern darstellen. Man mache sie ferner aufmerksam, dass dabei nicht immer Hunderte, Zehner und Einer genannt werden; dass sie, wenn in einer Classe nicht alle diese drei Bestandtheile vorkommen, das Fehlende durch Nullen ergänzen, und wenn beim Aussprechen eine ganze Classe nicht angegeben wird, alle drei Stellen mit Nullen ausfüllen müssen.

Es soll z. B. die Zahl: neun Millionen, sieben und fünfzig tausend, dreihundert und acht mit Ziffern angeschrieben werden. Wie viel Millionen werden hier angegeben? Ihr schreibet also zuerst die Ziffer 9, und machet nach derselben einen Strich. Wie viele Classen von Ziffern müssen noch folgen? Also wie viele Ziffern? Wenn außer den 9 Millionen nichts anderes angegeben würde, was müsstet ihr an die folgenden sechs Stellen setzen? Ich gebe aber zu den 9 Millionen noch an: sieben und fünfzig tausend; diese Classe muss also in die nächsten drei Stellen kommen. Höret ihr in dieser Classe Hunderte, Zehner oder Einer?

Da die Hunderte nicht angegeben werden, womit müsset ihr die Stelle derselben ausfüllen? Ihr setzet also in die zweite Classe 057, und machet nach derselben einen Punkt. Wieviele Ziffern müssen noch folgen, damit diese Classe Tausende bedeute? Was müsste an die Stelle derselben gesetzt werden, wenn nichts mehr ausgesprochen würde? Zu den 9 Millionen 57 tausend wird aber noch angegeben: dreihundert acht. Höret ihr Hunderte, Zehner und Einer aussprechen? Welche Benennung höret ihr nicht? Was muss daher an die Stelle der Zehner gesetzt werden? Ihr schreibet also 9,057.308.

Da sehr hohe Zahlen im wirklichen Leben nur selten vorkommen, so wäre es unpraktisch, auf das Lesen und Schreiben derselben viel Zeit zu verwenden.

§. 76. Römische Ziffern.

Hier ist der passendste Ort, die Schüler auch mit den römischen Ziffern bekannt zu machen.

Die Ziffern, welche die Schüler bisher kennen gelernt haben, nennen wir arabische, weil wir sie von den Arabern überkommen haben. An den Zifferblättern der Uhren, bei Aufschriften, bei den Abschnitten eines Buches, in Jahreszahlen sieht man häufig auch andere Zahlzeichen, welche man, da sie von den Römern herrühren, römische Ziffern nennt.

Die Römer hatten sieben Zahlzeichen

	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
für	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Sie drückten damit durch gehörige Zusammenstellung alle übrigen Zahlen nach folgenden Gesetzen aus:

1. Stehen mehrere gleiche Buchstaben nebeneinander, so bedeuten sie so viel, als ihre Werte zusammengenommen betragen; z. B.:

$II = 1 + 1 = 2,$

$XXX = 10 + 10 + 10 = 30.$

2. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen nach einem höheren, so wird der Wert des letzteren um so viel vermehrt, als das niedrigere bedeutet; z. B.

$VI = 5 + 1 = 6,$

$LX = 50 + 10 = 60,$

$CXV = 100 + 10 + 5 = 115.$

3. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermindert, als das niedrigere bedeutet; z. B.

$IV = 5 - 1 = 4,$

$XC = 100 - 10 = 90,$

$MDCCCLXIX = 1800 + 60 + 10 - 1 = 1869.$

Haben die Schüler diese Grundsätze richtig aufgefasst, so wird ihnen das Lesen und Anschreiben beliebiger römischer Zahlen keine Schwierigkeit machen.

§. 77. Addieren.

Man lasse zuerst zwei- und dreistellige Zahlen addieren. Der dabei zu befolgende Stufengang sowie das Unterrichtsverfahren wurden in der III. Abtheilung §. 57 angegeben.

Die Addition in den höheren Zahlenräumen bietet nichts Neues. Die Posten werden so unter einander geschrieben, dass die gleichnamigen Stellen gerade unter einander zu stehen kommen; dann addiert man nach der Reihe die Einer, die Zehner, Hunderte u. s. w. und bringt dabei stets das Zahlengesetz in Anwendung, dass je 10 Einheiten einer niedrigeren Ordnung eine Einheit der nächsthöheren Ordnung ausmachen. Auch hier können anfänglich, wie beim schriftlichen Addieren der Zahlen unter 1000, die Benennungen, welche die Ordnungen der Ziffern bezeichnen, beibehalten werden; später aber fallen sie weg. Die kürzere Form des Rechnens bildet sich, sobald die Sache klar erfasst ist, von selbst heraus.

3417 Anfangs: 4. E. und 6 E. sind 10 E., und 7 E. sind
1956 17 E. = 1 Z. und 7 E.; 7 E. werden angeschrieben, 1 Z.
2384 wird zu den Z. weiter gezählt. — 1 Z. und 8 Z. sind 9 Z.,
7757 und 5 Z. sind 14 Z., und 1 Z. sind 15 Z. = 1 H. und 5 Z.; 5 Z. werden angeschrieben, 1 H. wird weiter gezählt; u. s. w.

Später mit Weglassung der Benennungen: 4 und 6 ist 10, und 7 ist 17; 7 wird angeschrieben, 1 weiter gezählt. 1 und 8 ist 9, und 5 ist 14, und 1 ist 15; 5 wird angeschrieben, 1 weiter gezählt; u. s. w.

Um sich von der Richtigkeit der Summe zu überzeugen, nehme man die Addition noch einmal vor, und zwar von oben nach unten, wenn man zuerst von unten nach oben addiert hat; erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so kann man diese als richtig ansehen, weil wegen er veränderten Reihenfolge nicht leicht in beiden Fällen derselbe Fehler möglich ist. Ein solches Verfahren nennt man die Probe. Eine andere Probe für die Richtigkeit der Addition wird bei der Subtraction angeführt werden.

Bei den angewandten Aufgaben halte der Lehrer unausgesetzt auf die Bildung richtiger Schlüsse; z. B.

Die Kaiserin Maria Theresia war im Jahre 1717 geboren und lebte 63 Jahre; in welchem Jahre starb sie?

Auflösung. Als die Kaiserin geboren war, zählte man das Jahr 1717; als sie starb, zählte man 63 Jahre mehr, also 1717 und 63, d. i. 1780.

§. 78. Subtrahieren.

Das Verfahren beim schriftlichen Subtrahieren der Zahlen unter 1000 wurde in §. 59 der III. Abtheilung erläutert; dasselbe gilt auch für die höheren Zahlen. Man schreibt den Subtrahend so unter den Minuend, dass die gleichnammigen Stellen gerade unter einander zu stehen kommen, und subtrahiert dann nach der Reihe die Einer, die Zehner, Hunderte u. s. w. Wenn in einer Stelle der Minuend weniger Einheiten hat, als der Subtrahend, so muſs von der nächsthöheren Stelle geborgt werden; dabei wird das Zehnergesetz angewendet, wornach jede Einheit einer höheren Ordnung 10 Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung gibt. Die Benennung der Stellenwerte der Ziffern findet nur an den ersteren Aufgaben statt, später wird sie weggelassen.

5864	Anfangs: 3 E. von 4 E. bleibt 1 E. — 9 Z. kann ich
2793	von 6 Z. nicht wegnehmen, ich borge 1 H.; dieses gibt 10 Z.,
3071	und 6 Z. sind 16 Z.; 9 Z. von 16 Z. bleiben 7 Z. —

7 H. von 7 H. bleibt kein (0) Hundert. — 2 T. von 5 T. bleiben 4 T.

Später: 3 von 4 bleibt 1; 9 von 16 bleibt 7; 7 von 7 bleibt 0; 2 von 5 bleibt 3.

Das Subtrahieren mittels des Zuzählens.

Wir haben schon oben (III. Abtheilung §. 59) bemerkt, daſs das Subtrahieren auf zweifache Art vollzogen werden könne; entweder durch das wirkliche Wegzählen des Subtrahends vom Minuend, oder durch Auffindung einer Zahl, welche zu dem Subtrahend hinzugezählt, den Minuend gibt. Für die ersten Übungen haben wir das Subtrahieren mittels des Wegzählens als zweckentsprechender bezeichnet und auch die Gründe dafür angeführt. Bei dem weiter vorgeschrittenen Unterrichte werden jedoch die Schüler auch mit dem Subtrahieren mittels des Zuzählens, das sich für das praktische Rechnen jedenfalls bequemer herausstellt, vertraut gemacht.

Bei dieser Art des Subtrahierens wird vorausgesetzt, daſs man sogleich anzugeben wisse, wie viel zu einer Zahl addiert werden muſs, um eine andere Zahl zu erhalten, die höchstens um 9 gröſser ist als die erste Zahl. Der Lehrer wird daher zunächst folgende und ähnliche Übungen, wie sie schon im ersten Schuljahre vorkamen, mündlich wiederholen lassen:

$3 + . = 8$	$8 + . = 15$
$7 + . = 9$	$9 + . = 13$
$5 + . = 5$	$6 + . = 12$ u. s. w.

Es sei nun der Unterschied zwischen 5839 und 2715 zu bestimmen.

5839	Wie viel E. muſs man zu 5 E. zuzählen, um 9 E. zu be-
2715	kommen? Der Unterschied zwischen 5 E. und 9 E. ist daher 4 E.
3124	Wie viel Zehner muſs man zu 1 Z. zuzählen, um 3 Z. zu er-

halten? Diese 2 Z. sind also der Unterschied zwischen 1 Z. und 3 Z. Wie viel H. müssen zu 7 H. dazugezählt werden, damit man 8 H. bekomme? 1 H. ist also der Unterschied zwischen 7 H. und 8 H. Zu 2 T. muſs man endlich 3 T. zuzählen, um 5 T. zu erhalten. Der ganze Unterschied ist daher 3124.

Wie man sieht, wurde hier zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazugezählt, dass man die darüberstehende Ziffer des Minuends erhalten hat, und die hinzugezählte Zahl als Rest angeschrieben.

Man kann dabei kürzer so sprechen: 5 und **4** ist 9; 1 und **2** ist 3; 7 und **1** ist 8; 2 und **3** ist 5. Die Zahl, welche man jedesmal dazuzählen muss, und welche hier mit fetter Ziffer dargestellt ist, wird sogleich während des Aussprechens in den Rest geschrieben.

Es sei ferner 4926—2351 zu bestimmen.

$$\begin{array}{r} 4926 \\ \underline{2351} \\ 2575 \end{array}$$

Zu 1 E. muss man 5 E. zuzählen, um 6 E. zu erhalten; der Unterschied der Einer ist also 5; 5 wird in den Rest geschrieben. Hierauf subtrahiert man die Zehner: da 5 Z. größer sind als 2 Z., so kann man durch Hinzuzählen zu 5 Z. nicht 2 Z. erhalten, wohl aber kann man dadurch auf 12 Z. kommen; da nun der Unterschied zweier Zahlen nicht geändert wird, wenn man beide um gleichviel vermehrt, so kann man die 2 Z. des Minuends um 10 Z. vermehren; zu 5 Z. muß man nun 7 Z. addieren, um 12 Zehner zu erhalten; der Unterschied in den Zehnern ist also 7. Da aber der Minuend um 10 Z. vermehrt wurde, so muss man, damit der ganze Unterschied nicht geändert werde, auch den Subtrahend um 10 Z. oder um 1 H. vergrößern; man vermehrt also die 3 H. desselben um 1 H., wodurch man 4 H. bekommt, und subtrahiert hierauf die Hunderte; zu 4 H. muss man 5 H. zuzählen, um 9 H. zu erhalten; u. s. w.

Man spricht hier:

1 und **5** ist 6;
5 und **7** ist 12 (bleibt 1);
1 und 3 ist 4, und **5** ist 9;
2 und **2** ist 4.

Um daher die Subtraction mittels des Zuzählens zu verrichten, zählt man, bei den Einern anfangend, nach der Reihe zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazu, dass man die darüberstehende Ziffer des Minuends erhält, und setzt die jedesmal dazugezählte Zahl in den Rest. Ist eine Ziffer des Subtrahends größer als die darüberstehende des Minuends, so vermehre man diese letztere um 10, und subtrahiere; dagegen muss dann zugleich die Zahl in der nächsthöheren Stelle des Subtrahends um 1 vermehrt werden.

Wenn von einer gegebenen Zahl zwei oder mehrere Zahlen zu subtrahieren sind, so addiert man diese Zahlen und subtrahiert ihre Summe von der gegebenen Zahl. Man kann übrigens sehr leicht mit der Addition der Subtrahenden zugleich die Subtraction von dem gegebenen Minuend verbinden. Z. B.

830245 — 179376 — 95083 — 247969 =?

830245	Man addiert zuerst die Einer aller Subtrahenden und sucht, wie viel
179376	man zu ihrer Summe 18 noch zuzählen müsse, um die nächste höhere Zahl,
95083	welche an der Einerstelle die entsprechende Ziffer 5 des Minuends hat,
247969	d. i. 25, zu erhalten; 18 und 7 ist 25; die dazugezählten 7 Einer schreibt
307817	man sogleich während des Aussprechens in den Rest; die 2 Zehner aus der

erhaltenen Summe 25 addiert man zu den Zehnern der Subtrahenden und verfährt dann wie bei den Einern. Man spricht dabei:

9 und 3 ist 12, und 6 ist 18, und 7 ist 25, bleibt 2; 2 und 6 ist 8, und 8 ist 16, und 7 ist 23, und 1 ist 24, bleibt 2; u. s. w.

Da der Rest anzeigt, um wie viel der Subtrahend kleiner ist, als der Minuend, so muss der Subtrahend, um den Rest vermehrt, gleich sein dem Minuend. Darauf gründet sich die **Probe** für die Richtigkeit der Subtraction; wenn man nämlich den Rest zum Subtrahend addiert, so muss, wenn die Rechnung richtig ist, der Minuend zum Vorschein kommen.

Das Subtrahieren kann auch als Probe für die Richtigkeit der **Addition** angewendet werden. Wenn nämlich beim Addieren einer der gegebenen Posten weggelassen wird, so muss die Summe gerade um den gegebenen Posten kleiner werden, als die Summe aller Posten gewesen wäre. Um daher die Richtigkeit der Addition zu prüfen, streicht man einen Posten durch und zählt die übrigen noch einmal zusammen; zieht man dann die dadurch erhaltene Summe von der früheren Summe ab, so muss, wenn die Addition richtig war, der weggelassene Posten herauskommen.

Eine andere Probe für das Addieren, die zugleich eine zweckmäßige Übung für das wiederholte Subtrahieren bildet, besteht darin, dass man von der gefundenen Summe den ersten Summand, von dem Reste den zweiten Summand, u. s. w. subtrahiert. Bleibt zuletzt nichts übrig, so war die Summe richtig.

§. 79. Multiplicieren.

In den schriftlichen Übungen des Vervielfachens, bei denen wir dem Gedankengange des Kopfrechnens folgten, haben wir das Zeichen × als Abkürzungszeichen für das Wörtchen „mal“ gebraucht, so dass z. B. 8 × 2 so viel als 8mal 2 bedeutete. Dieser Vorgang, der von den Rechenlehrern allgemein beobachtet wird, erschien wegen der leichteren Auffassung für den Anfänger auch ganz zweckentsprechend. Bei dem eigentlichen Zifferrechnen aber muss das Zeichen × als **Operationszeichen** aufgefasst und gelesen werden „multipliciert mit“; z. B. 8 × 2 heißt: 8 multipliciert mit 2, also 2mal 8. Während früher der Multiplicator links vor dem Multiplicand stand, wird hier der Multiplicand links und der Multiplicator rechts gesetzt.

Wie das schriftliche Multiplicieren mit einem ein- oder zweistelligen Multiplicator ausgeführt wird, ist bei den Übungen im Zahlenkreise bis 1000 (§. 61) angegeben worden. Das Verfahren bleibt sich auch bei den höheren Zahlen gleich, nur der Zahlenumfang erweitert sich. Die Benennung der Stellenwerte, nämlich Einer, Zehner, u. s. w. tritt nur bei den ersten Aufgaben ein; sie unterbleibt, später, sobald die Einsicht erreicht ist.

Wir wählen sogleich einen dreistelligen Multiplicator. Es sei z. B. 503 mit 267 zu multiplicieren.

```
  503 × 267
 ----------
   3521
  3018
 1006
 ----------
 134301
```

Ich nehme den Mulipicand 503 zuerst 7mal, dann 60mal, endlich 200mal, und setze stets die gleichnamigen Stellen unter einander. Ich multipliciere also 503 zuerst mit 7; 7mal 503 ist 3521. Das Ergebnis wird so daruntergeschrieben, dass 1 E. unter 3 E. zu stehen kommt.

Nun multipliciere ich die Zahl 503 mit 60; ich nehme sie 6mal und das 6fache 10mal. 6mal 503 ist 3018, das 10fache davon sind 3018 Zehner. Ich schreibe also 8 Z. genau unter die 0 Z. des Multiplicands.

Endlich multipliciere ich die Zahl mit 200, indem ich sie 2mal, und das 2fache 100mal nehme. 2mal 503 ist 1006, das 100fache davon sind 1006 Hunderte. Ich setze daher die niedrigste Stelle 6 H. des Productes unter die 5 H. des Multiplicands.

Man spricht dabei: 7mal 3 ist 21, 1 wird in die Einerstelle angeschrieben, 2 weitergezählt; 7mal 0 ist 0, und 2 ist 2, wird angeschrieben; 7mal 5 ist 35, wird angeschrieben. — 6mal 3 ist 18, 8 wird unter die Zehner geschrieben, 1 weiter gezählt; 6mal 0 ist 0, und 1 ist 1, wird angeschrieben; 6mal 5 ist 30, wird angeschrieben. — 2mal 3 ist 6, 6 wird unter die Hunderte gesetzt; 2mal 0 ist 0; 2mal 5 ist 10.

Die Producte 3521, 3018, 1006 heißen, weil sie nur Theile des ganzen Productes sind, Theilproducte.

Die Schüler sehen, dass die niedrigste Ziffer eines jeden Theilproductes, wenn man mit Zehnern multipliciert, um eine Stelle, und wenn man mit Hunderten multipliciert, um zwei Stellen nach links gerückt werden müsse.

Haben die Schüler das Bisherige gut verstanden, so wird ihnen das Multiplicieren mit einem vier- oder mehrstelligen Multiplicator keine Schwierigkeiten machen. Nur einige besondere Fälle müssen hier noch näher erläutert werden.

Es enthalte der Multiplicator in einer Zwischenstelle Nullen; z. B. 9756 × 502.

```
   9756 × 502
  -----------
   19512
 48780
 ------------
 4897512
```

Wir multiplicieren 9756 zuerst mit 2. Wenn wir dann mit 0 Zehner multiplicieren, so erhalten wir im Theilproducte lauter Nullen. Da diese wertlos sind, so übergehen wir die Null im Multiplicator und multiplicieren sogleich mtt 5 H., schreiben aber die erste Ziffer des Theilproductes in die Stelle der Hunderte.

Ebenso werden sich die Schüler leicht überzeugen, dass man in den Fällen, wo die Factoren am Ende Nullen haben, diese weglassen kann, und nur die übrigbleibenden Zahlen zu multiplicieren braucht, dann aber dem Producte so viele Nullen anhängen muss, als in den Factoren weggelassen wurden. Z. B.

4800 × 12 96 48 57600	4800 sind 48 H. Werden diese 12mal genommen, so erhält man 576 H., welche durch Anhängung von 2 Nullen in Einer verwandelt werden.

Bei der Ausführung der Multiplication gestatte der Lehrer niemals, dass die Schüler während des Multiplicierens die Factoren verwechseln und z. B. bei der Multiplication 318 × 4 sprechen: 8mal 4, 1mal 4, 3mal 4, wo sie sagen sollen: 4mal 8, 4mal 1, 4mal 3.

§. 80. Dividieren.

Das Dividieren in den höheren Zahlenkreisen bietet nichts Neues; es wird das gleiche Verfahren angewendet, wie beim schriftlichen Dividieren der Zahlen unter 1000 (§. 64). Man schreibt den Divisor rechts nach dem Dividend und setzt zwischen beide zwei Punkte; dann werden die einzelnen Stellen des Dividends von der höchsten bis zur niedersten dividiert, wobei man die Reste der höheren Stellen stets mit der nächstniedrigeren Stelle vereinigt. Die Ziffern des Quotienten werden nach dem Gleichheitszeichen gesetzt. Z. B.

24867 : 81 = 307
243
 567
 567

1. Im Sinne des Messens: Wie oft ist 81 in 24867 enthalten?

81 ist in 2 nicht 1mal, also in 2 ZT. nicht 10000mal enthalten, auch nicht in 23 T. 1000mal; ich nehme daher sogleich die 3 ersten Stellen des Dividends, nämlich 248 Hunderte als ersten Theildividend an. 81 ist in 248 E. (versuchsweise 8 in 24) 3mal, in 248 H. also 300mal enthalten; in den Quotienten setzt man also 3 Hunderte. 300mal 81 gibt 3 × 81 H. = 243 H.; werden diese von 248 H. subtrahiert, so bleiben noch 5 H. übrig. 5 H. und 6 Z. herab sind 56 Z. 81 ist in 56 nicht 1mal enthalten, also in 56 Z. nicht 10mal; an die Stelle der Zehner kommt also im Quotienten eine Null, und ich setze zu den 56 Z. sogleich die 7 E. herab, wodurch ich 567 E. erhalte. 81 ist in 567 (versuchsweise 8 in 56) 7mal enthalten; die 7 E. kommen in den Quotienten; 7mal 81 ist genau 567 und es bleibt nichts übrig.

2. Im Sinne des Theilens: Wie viel ist der 81ste Theil von 24867?

Der 81ste Theil von 2 ZT. kann kein Zehntausend, von 24 T. kein Tausend sein; ich bilde also Hunderte. 2 ZT. 4. T. 8 H. sind 248 H. Nun kann ich theilen: der 81ste Theil von 248 H. (der 8te Theil von 24) sind 3 H.; diese setze ich in den Quotienten. Vertheilt sind nun 81mal 3 H. = 243 H.; 243 H. von 248 H. bleiben noch 5 H. zur Vertheilung übrig. 5 H. und die vorhandenen 6 Z. dazu sind 56 Z.; der 81ste Theil von 56 Z. ist kein Zehner; ich setze daher an die Stelle der Zehner im Quotienten eine Null und schreibe zu den übrigbleibenden 56 Z. sogleich die 7 E. herab. Der 81ste Theil von 567 E. (der 8te Theil von 56) sind 7 E.; diese setze ich in den Quotienten. Getheilt sind nun 81mal 7 E. = 567 E.; 567 E. von 567 E. bleibt nichts. Der 81ste Theil von 24867 ist also 307.

Aus dieser umständlich gehaltenen Entwicklung ersehen die Schüler erstlich, dass man, wenn der Divisor zweiziffrig ist, sogleich die zwei höchsten Stellen des Dividends in Rechnung ziehen müsse. Die Schüler überzeugen sich ferner, dass die Form des schriftlichen Dividierens dieselbe ist, mag dieses ein Messen oder ein Theilen sein, und dass es für das Resultat der Division gleichgiltig ist, ob man dabei die Schlussweise des Messens oder jene des Theilens in Anwendung bringt. Es wird ihnen nun bemerkt, dass man sich bei der Ausführung einer Divisionsrechnung, auch bei Theilungsaufgaben, gewöhnlich derjenigen Ausdrucksweise, welche sich auf das Messen bezieht, bedient, weil sie die einfachere und kürzere ist. Auch wird weiterhin beim Rechnen die Angabe der Stellenwerte weggelassen.

Die frühere Aufgabe wird demnach kürzer so gerechnet:

```
24867 : 81 = 307
243
  567
  567
```

81 in 248 (8 in 24) ist 3mal enthalten; 3mal 1 ist 3, 3mal 8 ist 24; 243 von 248 bleibt 5; 6 herab. 81 in 56 ist 0mal enthalten; 7 herab. 81 in 567 (8 in 56) ist 7mal enthalten; 7mal 1 ist 7, 7mal 8 ist 56; 567 von 567 bleibt nichts.

Die Vorschrift bleibt sich gleich, wenn der Divisor drei- oder mehrstellig ist.

Auch der Fall, wenn der Divisor rechts Nullen hat, wird keine Schwierigkeiten bieten. Z. B.

```
215,00 : 5,00 = 43
20
 15
 15
```

500 = 5 H., 21500 = 215 H.; 5 H. sind in 215 H. so oft enthalten, als 5 E. in 215 E., also 43mal.

Wenn also der Divisor rechts Nullen hat, so läßt man dieselben weg, schneidet aber auch im Dividend ebenso viele Ziffern rechts ab; zum letzten Reste setzt man dann diese Ziffern herab, wodurch man den Rest der ganzen Division erhält.

Kürzere Form des Dividierens.

Bisher haben wir bei der schriftlichen Ausführung der Division alle Theilproducte anschreiben und die Subtraction derselben immer schriftlich ausführen lassen. An dieser vollständigen Form muss anfänglich festgehalten werden, weil es da weniger auf Kürze und Anwendung von Vortheilen, als vielmehr auf Einsicht und Sicherheit ankommt. Nachdem aber die Schüler im Divisionsverfahren bereits Verständnis und Gewandtheit erlangt haben, können sie hier auch mit den einfacheren und kürzeren Darstellungen desselben vertraut gemacht werden.

Eine allgemein anwendbare Abkürzung besteht darin, dass man die Theilproducte nicht anschreibt, sondern sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und nur die Reste ansetzt. Da hiebei die Subtraction mittels des Hinzuzählens verrichtet wird, so werden hier als Vorübung zunächst folgende und ähnliche Aufgaben mündlich auszuführen sein:

14 + . = 17	2 × 4 + . = 13
25 + . = 25	5 × 7 + . = 40
36 + . = 41	9 × 5 + . = 49
54 + . = 62	3 × 9 + . = 34

u. s. w.

1. Wenn der Divisor einziffrig ist.

Ist z. B. 6846 durch 7 zu dividieren, so hat man:

vollständig	abgekürzt	noch kürzer
6846 : 7 = 978	6846 : 7 = 978	6846 : 7
63	54	978
54	56	
49		
56		
56		
= =		

Die erste vollständige Form wurde bisher in Anwendung gebracht.

Bei der zweiten Form werden die Theilproducte gleich im Kopfe subtrahiert und nur die Reste angeschrieben. Man spricht:

7 in 68 9mal; 9mal 7 ist 63, und **5** ist 68; 4 herab;

7 in 54 7mal; 7mal 7 ist 49, und **5** ist 54; 6 herab;

7 in 56 8mal; 8mal 7 ist 56, und **0** ist 56.

Die dritte Form ist die einfachste; man schreibt auch den jedesmaligen Rest nicht an, sondern behält denselben im Kopfe und denkt sich ihm die nächste Dividendziffer angehängt. Man spricht dabei:

7 in 68 9mal, bleibt 5;
7 in 54 7mal, bleibt 5;
7 in 56 8mal;

und schreibt die Ziffern des Quotienten unter die entsprechenden Stellen des Dividends.

Diese letztere Form soll vorzugsweise geübt werden.

2. Wenn der Divisor mehrziffrig ist, so kann auch da die Form der Division bedeutend vereinfacht werden, wenn man das Product aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und bloß den Rest anschreibt.

Es sei z. B. 34461 durch 63 zu dividieren.

Vollständige Form.	Abgekürzte Form.
34461 : 63 = 547	34461 : 63 = 547
315	296
296	441
252	= = =
441	
441	
= = =	

Erklärung der abgekürzten Form:

63 in 344, oder 6 in 34, ist 5mal enthalten. Nun wird der Divisor 63 mit 5 multipliciert. 5mal 3 ist 15, welche man sogleich an der Stelle der Hunderte von dem Theildividende mittels des Hinzuzählens subtrahiert; da man 15 von 4 nicht subtrahieren kann, so denkt man sich die 4 um 2 Zehner vermehrt, wodurch 24 entsteht, und sucht nun die Zahl, welche zu 15 zugezählt werden muss, um 24 zu erhalten; man spricht 15 und **9** ist 24, und schreibt die 9 an jener Stelle als Rest an. Weil aber hier die Ziffer 4 des Dividends um 2 Zehner vermehrt wurde, so muss man, um den wahren Rest zu erhalten, auch den Subtrahend an jener Stelle um 2 Zehner, oder was einerlei ist, in der höchst höheren Stelle um 2 Einheiten vermehren d. i. man muss diese 2 zu dem Producte aus dem Theilquotienten und der nächstfolgenden Ziffer des Divisors addieren. 5mal 6 ist 30, und jene 2 dazu, ist 32. Um diese von den gleichnamigen Stellen des Dividends, nämlich von 34, zu subtrahieren, sagt man: 32 und **2** ist 34, und schreibt die dazugezählte 2 in den Rest. — Zu dem Reste 29 wird die folgende Ziffer 6 des Dividends herabgesetzt. 63 in 296, oder 6 in 29, ist 4mal enthalten. 4mal 3 ist 12; in der Stelle des Theildividends, von welcher 12 zu subtrahieren ist, steht 6; man sucht daher, wie viel zu 12 addiert werden muss, um die nächste höhere Zahl, welche 6 Einer hat, d. i. um die Zahl 16 zu erhalten: 12 und **4** ist 16; die addierte 4 schreibt man sogleich als Rest an. Weil hier der Minuend um 1 Zehner vermehrt wurde, so muss

man auch den Subtrahend um 1 Zehner vermehren; man wird also zu der nächst höheren Stelle des Productes 1 addieren; 4mal 6 ist 24 und die von 16 im Sinne behaltene 1 dazu, ist 25, und **4** ist 29; die 4, welche man zu 25 addieren musste, um die darüberstehenden 29 zu erhalten, kommen in den Rest; u. s. w.

Man spricht während der Rechnung: 6 in 34 5mal; 5mal 3 ist 15, und **9** ist 24, bleibt 2; 5mal 6 ist 30, und 2 ist 32, und **2** ist 34; 6 herab; 6 in 29 4mal; 4mal 3 ist 12, und **4** ist 16, bleibt 1; 4mal 6 ist 24, und 1 ist 25, und **4** ist 29; u. s. w. Die mit fetter Letter dargestellte Ziffer wird jedesmal sogleich während des Aussprechens in den Rest geschrieben.

Das hier entwickelte kürzere Divisionsverfahren besteht demnach in folgendem:

Nachdem man die jedesmalige Ziffer des Quotienten auf die gewöhnliche Art bestimmt hat, multipliciert man damit nach der Ordnung die einzelnen Ziffern des Divisors, und zählt zu jedem einzelnen Producte so viel dazu, dass man die nächste höhere Zahl bekommt, welche in der Stelle der Einer die entsprechende Ziffer des Theildividends hat; die Zahl, welche man zu dem Producte addiert hat, wird sogleich in die gehörige Stelle des Restes angeschrieben. Enthält die Zahl, welche durch die Addition herauskommt, wie dieses meistens eintritt, auch Zehner, so werden diese zu dem Producte aus dem Theilquotienten und aus der nächst höheren Ziffer des Divisors dazugezählt.

Hier wird den Schülern auch die Probe der Division gezeigt werden. Wenn ein Ganzes in mehrere gleiche Theile getheilt wird, und man nimmt dann einen Theil so vielmal, als Theile gemacht wurden, so muss wieder das Ganze herauskommen. Um daher die Probe für die Richtigkeit der Division aufzustellen, darf man nur den Quotienten mit dem Divisor multiplicieren; ist richtig dividiert worden, so muss dadurch der Dividend zum Vorschein kommen. Theilt man z. B. 1542 durch 3, so ist

```
1542 : 3 = 514
15         × 3
 4        1542
 3
 12
 12
```

Es beträgt hier ein Theil 514. Wenn wir nun wieder alle drei Theile zusammensetzen, d. i. 514 3mal nehmen, also den Quotienten mit dem Divisor multiplicieren, so muss der Dividend 1542 als Product erscheinen, was hier wirklich der Fall ist; also ist richtig dividiert worden.

Bleibt beim Dividieren ein Rest, so muss zu dem Producte aus dem Quotienten und dem Divisor noch jener Rest dazu addiert werden.

Der Lehrer bemerke, dass die Division auch als Probe für die Multiplication dient. Wenn man nämlich das Product durch den Multiplicator dividiert, so muss der Multiplicand herauskommen. Z. B.

904 × 23		Probe:	20792 : 23 = 904
2712			207
1808			92
20792			92

Die Lösung angewandter Aufgaben führt hier auf eine einfache Division, oder auf eine Division in Verbindung mit der Addition, Subtraction oder Multiplication. Auf leichtere Aufgaben folgen schwierigere und zusammengesetzte, darunter Dreisatz-, Durchschnitts- und Gesellschaftsrechnungen.

Auf die Schlüsse, die dabei in Anwendung kommen, ist ein besonderes Gewicht zu legen. Z. B.

Drei Pferdehändler übernehmen eine Pferdelieferung für 2760 fl.; A liefert 4, B 5, C 6 Pferde von gleichem Werte; wie viel erhält jeder von der obigen Summe?

Auflösung. $4 + 5 + 6 = 15$

Für 15 Pferde . . 2760 fl.

„ 1 Pferd $\frac{1}{15}$ von 2760 fl. = 184 fl.

A	erhält für	4	Pferde	4mal 184 fl. =	736 fl.
B	„ „	5	„	5mal 184 „ =	920 „
C	„ „	6	„	6mal 184 „ =	1104 „
				alle drei erhalten	2760 fl.

Zweiter Abschnitt.

Das Rechnen mit Decimalzahlen.

§. 81. Allgemeine Bemerkungen.

Für die Decimalbrüche und ihre Behandlung gibt es eine zweifache Auffassungsweise. Man kann die Decimalbrüche als eine Erweiterung des Zehnersystems darstellen und dann mit ihnen nach den gleichen Gesetzen, wie mit ganzen Zahlen, rechnen; man kann aber die Decimalbrüche auch als eine besondere Art der gemeinen Brüche betrachten und die für diese entwickelten Gesetze auf das Rechnen mit Decimalbrüchen anwenden. Wir gehen hier von der ersten Darstellungsweise aus; wir müssen dieselbe schon aus dem Grunde wählen, weil das Rechnen mit gemeinen Brüchen erst später vorgenommen werden soll; wir wählen sie aber auch darum, weil sie natürlicher ist und den innigen Zusammenhang zwischen den ganzen und den Decimalzahlen schärfer hervortreten läſst, als dies bei der Zugrundelegung der gemeinen Brüche möglich wäre. Indem die

Schüler die Decimalrechnung aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen ableiten, lernen sie nicht nur einen neuen wichtigen Gegenstand kennen, sondern erhalten zugleich eine treffliche Gelegenheit, die Rechenübungen mit ganzen Zahlen nutzbringend zu wiederholen.

I. Auffassung der Decimalzahlen.

§. 82. Bildung und schriftliche Darstellung der Decimalbrüche.

Wir haben auf den vorhergehenden Stufen allmählich das dekadische Zahlensystem aufgebaut. Jede Einheit einer nächsthöheren Ordnung ist zehnmal so groß als eine Einheit der nächstniedrigeren Ordnung. Ebenso beim Zahlenschreiben; eine Ziffer bedeutet an jeder Stelle links zehnmal so viel als an der vorhergehenden Stelle rechts. Wir haben daher bei jeder Ziffer einen doppelten Wert unterschieden, den bleibenden Wert der Ziffer selbst, und den veränderlichen, der sich nach der Stelle, an welcher die Ziffer steht, richtet.

Der Lehrer schreibe eine Zahl an, welche gleiche Ziffern enthält, z. B. 33333, und entwickle daran mit den Schülern folgende Gesetze:

Die Ziffer 3 in der ersten Stelle rechts bedeutet 3 Einer. Die 3 in der zweiten Stelle bedeutet 3 Zehner, also 10mal 3 Einer. Die 3 in der dritten Stelle bedeutet 3 Hunderte, also 10mal 3 Zehner, u. s. w. Eine Ziffer bedeutet also an jeder folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel als an der nächstvorhergehenden rechts.

Anders verhält es sich, wenn wir von der Linken zur Rechten fortschreiten. Die Ziffer 3 in der fünften Stelle links bedeutet 3 Zehntausende. Die 3 in der vierten Stelle bedeutet 3 Tausende, also nur den 10ten Theil von 3 Zehntausenden. Die 3 in der dritten Stelle gilt 3 Hunderte, also nur nur den 10ten Theil von 3 Tausenden. Ebenso bedeutet die 3 in der zweiten Stelle den 10ten Theil von der 3 in der dritten Stelle, d. i. 3 Zehner, und die 3 in der ersten Stelle den 10ten Theil von 3 Zehnern, nämlich 3 Einer. Eine Ziffer bedeutet daher an jeder folgenden Stelle gegen die Rechte nur den zehnten Theil von dem, was sie an der nächstvorhergehenden Stelle links gilt.

Schreiten wir von den Einern aufwärts zu den Zehnern, Hunderten, u. s. w., so können wir die Zifferreihe ohne Ende fortsetzen. Gehen wir aber z. B. von den Zehntausenden abwärts zu den Tausenden, Hunderten, . . . zurück, so glaubten wir bisher bei den Einern, welche den ersten Platz rechts einnahmen, auf der niedrigsten Stelle angelangt zu sein. Und doch können wir noch tiefer unter die Einer hinabsteigen. Wenn wir der Zahl 33333 rechts noch eine 3 hinzufügen, was müsste diese Ziffer nach dem Gesetze unseres Zehnersystems bedeuten? Wie viel ist der 10te Theil von einem Einer, d. i. von einem Ganzen? Der 10te Theil von 3 Einern sind also 3 Zehntel. Da wir aber bis jetzt gewohnt waren, die erste Ziffer rechts immer als Einer anzusehen, so müssen wir, wenn die Zifferreihe unter die Einer hinab noch weiter rechts fortgesetzt wird, durch ein bestimmtes Zeichen andeuten, wo sich die Stelle der Einer befindet. Man hat dazu einen **Punkt** gewählt, welchen man nach den Einern rechts oben setzt. Leset nun die Zahl 33333·3. Würde man dieser Zahl rechts noch mehrere Ziffern anhängen, z. B. 33333·33333, so würde die zweite 3 nach dem Punkte den 10ten Theil von 3 Zehnteln bedeuten. Wie viel ist der 10te Theil von einem Zehntel? Die 3 an der zweiten Stelle nach dem Punkte bedeutet also 3 **Hundertel**. Wie viel ist der 10te Theil von einem Hundertel? An der dritten Stelle nach dem Punkte bedeutet also eine Ziffer so viele **Tausendtel**, als sie für sich Einer anzeigt. Ebenso kommen an der vierten Stelle nach dem Punkte **Zehntausendtel**, an der fünften **Hunderttausendtel** u. s. w. vor.

Sowie man also die Zahlenreihe von den Einern an **aufwärts** (gegen die Linke) bis in's Unendliche fortführen kann, so lässt sich dieselbe von den Einern an auch **abwärts** (gegen die Rechte) bis in's Unendliche fortbilden.

Da Zehntel, Hundertel, Tausendtel, . . . nicht ganze Einheiten vorstellen, sondern nur Theile, die man erhält, wenn man das Ganze und seine auf einander folgenden niedrigeren Theile immer wieder in zehn gleiche Theile theilt; so nennt man dieselben **Zehntheilchen** oder **Decimalen**, und eine Zahl, worin Decimalen vorkommen, eine **Decimalzahl** oder einen **Decimalbruch**.

Der Punkt, welcher zwischen der Stelle der Einer und jener der Zehntel steht, heißt der **Decimalpunkt**; er bildet die Scheidegrenze zwischen den Ganzen und den Decimalen; links vor demselben befinden sich die **Ganzen**, rechts nach demselben die **Decimalen**; und zwar bedeutet die erste Decimale nach dem Punkte Zehntel, die zweite Hundertel, u. s. w. Die Bedeutung der obigen Zahl 33333·33333 lässt sich daher durch folgende Darstellung veranschaulichen:

Ganze						Decimalien				
3	3	3	3	3	•	3	3	3	3	3
Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel

Die Decimalzahlen sind demnach eine **Erweiterung des dekadischen Zahlensystems** in der Art, dass die Reihe der Zahlenordnungen . . . Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrigere Einheit als der **zehnte Theil** einer Einheit der nächsthöheren Ordnung angenommen wird, noch unter die Einer hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendteln, . . . fortsetzt.

Nun folgen Übungen im Anschreiben und Lesen der Decimalzahlen.

Man schreibt zuerst die Ganzen an, setzt nach denselben den Decimalpunkt, und nach diesem folgeweise die Zehntel, Hundertel, u. s. w.

Enthält ein Decimalbruch bloß Decimalen, also keine Ganzen, so schreibt man links vor den Decimalpunkt eine Null. Z. B. 3 Zehntel wird angeschrieben 0·3

Fehlen in einem Decimalbruch die Zehntel, Hundertel, u. s. w., so werden diese Stellen mit Nullen ausgefüllt. Z. B. 3 Tausendtel 5 Zehntausendtel schreibt man 0·0035.

Man bemerke auch den Schülern, dass einige anstatt des Decimalpunktes einen Beistrich setzen, so dass z. B. 35,729 so viel als 35·729 bedeutet.

Beim Lesen eines Decimalbruches spricht man zuerst die Ganzen aus, und dann jede Decimale einzeln, mit oder ohne Hinzufügung der Benennung, oder auch alle Decimalen als Zahl mit Hinzufügung der letzten Benennung. Z. B. 86·705 wird gelesen:

86 Ganze, 7 Zehntel, keine Hundertel, 5 Tausendtel; oder
86 Ganze mit den Decimalen 7, 0, 5; oder
86 Ganze, 705 Tausendtel.

An das Lesen und Schreiben der Decimalbrüche können auch schon hier Übungen im Lesen der in Decimalbruchform geschriebenen Rechnungsmünzen und metrischen Maße und Gewichte, sowie über das Schreiben derselben in Decimalform angeschlossen werden. (Siehe §§. 91 und 92.)

§. 83. Stellenwert der Decimalzahlen.

Damit das Wesen der Decimalbrüche besser erfasst werde, soll hier auch der Einfluss, den die Stelle des Decimalpunktes auf den Wert eines Decimalbruches ausübt, näher betrachtet werden.

a) Man lasse einem gegebenen Decimalbruche z. B. 9·26 rechts eine oder mehrere Nullen anhängen und in den dadurch entstehenden Decimalbrüchen

9·26, 9·260, 9·2600, 9·26000

den Wert der einzelnen Ziffern angeben; die Schüler werden sich überzeugen, dass alle diese Zahlen, da der Decimalpunkt dieselbe Stelle behält, gleichen Wert haben.

Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts eine, zwei oder mehrere Nullen anhängt.

b) Man lasse die Werte der nachstehenden Decimalzahlen mit einander vergleichen:

4·567, 45·67, 456·7, 4567.

Aus der Zahl 4·567 ist 45·67 entstanden, indem man den Decimalpunkt um eine Stelle nach rechts rückte. Welche Veränderung ist dadurch mit dem

Werte der Decimalzahl vorgegangen? Aus 4 Einern sind 4 Zehner, aus 5 Zehnteln 5 Einer, aus 6 Hunderteln 6 Zehntel, aus 7 Tausendteln 7 Hundertel geworden, d. h. jede Ziffer bedeutet nun 10mal so viel als vorher, oder die ganze Decimalzahl ist 10mal so groß geworden. Setzt man den Decimalpunkt um 2 Stellen weiter nach rechts, so bedeutet ebenso jede Ziffer der neuen Decimalzahl 456·7, also auch diese selbst, 100mal so viel als früher; u. s. w. Wenn man daher in einer Decimalzahl den Punkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Rechte rückt, so wird ihr Wert 10mal, 100mal, 1000mal, . . . so groß. Daraus folgt:

Eine Decimalzahl wird mit 10, 100, 1000, . . . multipliciert, indem man den Decimalpunkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach rechts rückt.

Dieses Verfahren ist auch dann anwendbar, wenn der Multiplicand nicht so viele Decimalstellen hat, als zur Verrückung des Decimalpunktes erforderlich sind, da man durch Anhängung von Nullen dem Decimalbruche jede beliebige Anzahl von Decimalstellen geben kann. Z. B.

$$375{\cdot}2 \times 1000 = 375{\cdot}200 \times 1000 = 375200.$$

c) Man lasse nun auch die folgenden Decimalzahlen vergleichen:

46·29, 4·629, 0·4629, 0·04629.

Aus 46·29 wird 4·629, indem man den Decimalpunkt um eine Stelle weiter nach links rückt. Dabei werden aus 4 Zehnern 4 Einer, aus 6 Einern 6 Zehntel, aus 2 Zehnteln 2 Hundertel, aus 9 Hunderteln 9 Tausendtel; jede Ziffer der zweiten Zahl bedeutet also nur den 10ten Theil von dem, was sie in der ersten Zahl bedeutet, d. i. die Zahl 4·629 ist nur der 10te Theil von 46·29. Ebenso überzeugt man sich, dass 0·4629 den 100sten, 0·04629 den 1000sten Theil der gegebenen Zahl 46·29 bedeutet. Wenn man daher in einer Decimalzahl den Punkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Linke rückt, so sinkt der Wert derselben auf den 10ten, 100sten, 1000sten, . . . Theil herab. Daraus folgt:

Eine Decimalzahl wird durch 10, 100, 1000, . . . dividiert, indem man den Decimalpunkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach links rückt

---

II. Die Rechnungsoperationen mit Decimalzahlen.

§. 84. Addieren der Decimalzahlen.

Da die Decimalbrüche nach denselben Gesetzen, wie die ganzen Zahlen, gebildet sind, so weicht das Rechnen mit denselben von dem Rechnen mit ganzen Zahlen nur darin ab, dass während der Rechnung oder nach Vollendung derselben dem Punkte, wodurch die Ganzen von den Decimalen getrennt werden, die richtige Stelle gegeben werde.

Sowie man bei den ganzen Zahlen nur gleichnamige Stellen, Einer und Einer, Zehner und Zehner, u. s. w., addieren kann, ebenso können auch bei Decimalzahlen nur gleichnamige Decimalstellen, Zehntel und Zehntel, Hundertel und Hundertel, . . . zusammengezählt werden. Man muss daher darauf sehen, dass schon beim Anschreiben der Summanden nicht nur die gleichnamigen Stellen der Ganzen, sondern auch jene der Decimalen unter einander zu stehen kommen, nämlich Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w. Dieses wird dadurch bewirkt, dass die Decimalpunkte gerade unter einander gesetzt werden. Die Addition wird dann sowie bei ganzen Zahlen vollzogen.

Zuerst werden solche Decimalzahlen addiert, welche gleich viele Decimalstellen haben. Dabei kann man anfangs die Summanden in ihre dekadischen Bestandtheile zerlegen lassen.

3·789 =	3	Einer	7	Zehntel	8	Hundertel	9	Tausendtel
5·446 =	5	„	4	„	4	„	6	„
1·792 =	1	„	7	„	9	„	2	„
8·068 =	8	„	0	„	6	„	8	„
19·095 =	19	Einer	0	Zehntel	9	Hundertel	5	Tausendtel.

Als Summe der Tausendtel erhält man 25 Tausendtel = 2 Hundertel + 5 Tausendtel; die 5 Tausendtel werden unter die Tausendtel geschrieben, die 2 Hundertel zu den Hunderteln weitergezählt. Man erhält dann 29 Hundertel = 2 Zehntel + 9 Hundertel; 9 Hundertel schreibt man an, 2 Zehntel werden weitergezählt; u. s. f.

Hieraus ist ersichtlich, dass in der Summe der Decimalpunkt genau unter die Decimalpunkte der Summanden zu stehen kommt.

Werden später Zahlen angegeben, welche nicht gleich viele Decimalstellen haben, so bemerke der Lehrer, dass man hier den Summanden durch Anhängung von Nullen eine gleiche Anzahl von Decimalstellen geben, und dann die Addition, wie früher, verrichten könnte, dass man es aber vorzieht, diese Nullen nicht wirklich anzuschreiben, da sie ohnehin auf die Summe keinen Einfluss ausüben. Sind z. B. die Zahlen 0·72, 0·9, 0·43, 0·842 zu addieren, so hat man

0·720 oder	0·72	2 Tausendtel schreibt man sogleich in die Summe,
0·900	0·9	da in den übrigen Summanden keine Tausendtel
0·430	0·43	vorkommen. 4 Hundertel und 3 Hundertel sind
0·842	0·842	7 Hundertel, und 2 Hundertel sind 9 Hundertel,
2·892	2·892	welche man an die Stelle der Hundertel setzt.

8 Zehntel und 4 Zehntel sind 12 Zehntel, und 9 Zehntel sind 21 Zehntel, und 7 Zehntel sind 28 Zehntel, d. i. 2 Ganze und 8 Zehntel; man schreibt daher 8 an die Stelle der Zehntel, bringt den Decimalpunkt an, und setzt 2 an die Stelle der Ganzen.

§. 85. Subtrahieren der Decimalzahlen.

Man lasse zuerst Decimalbrüche von gleich vielen Decimalstellen, z. B. 41·62 von 96·35, subtrahieren. Dabei muss der Subtrahend so unter den Minuend gesetzt werden, dass die Ganzen unter die Ganzen, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel zu stehen kommen.

96·35 41·62 54·73	2 Hundertel und 3 Hundertel sind 5 Hundertel. — 6 Zehntel und 7 Zehntel sind 13 Zehntel, bleibt 1 Einer. — Da man jetzt zum Subtrahieren der

Ganzen fortschreiten und daher auch im Reste Ganze erhalten wird, so muss im Reste der Decimalpunkt gesetzt werden. 1 Einer (welcher übrig geblieben ist) und 1 Einer sind 2 Einer, und 4 Einer sind 6 Einer. — 4 Zehner und 5 Zehner sind 9 Zehner. — Der Rest ist also 54·73.

Haben die Decimalbrüche nicht gleich viele Decimalstellen, so muss man Minuend und Subtrahend auf eine gleiche Anzahl von Decimalstellen bringen, indem man die rechts fehlenden Stellen durch Nullen ausfüllt, oder, was meistens geschieht, sich diese Nullen bloß vorstellt, ohne sie wirklich anzuschreiben. Es sei z. B. 2·565 von 5·92 zu subtrahieren.

5·920 oder 2·565 3·355	5·92 2·565 3·355	5 Tausendtel und 5 Tausendtel sind 10 Tausendtel, bleibt 1 Hundertel; 1 Hundertel und 6 Hundertel sind 7 Hundertel, und 5 Hundertel sind 12 Hundertel,

bleibt 1 Zehntel; 1 Zehntel und 5 Zehntel sind 6 Zehntel, und 3 Zehntel sind 9 Zehntel; 2 Einer und 3 Einer sind 5 Einer.

Hier können die Schüler auch mit dem Abkürzen der Decimalbrüche vertraut gemacht werden.

Da es in den meisten Fällen nur auf die ersten Decimalstellen ankommt, so können die überflüssigen Stellen weggelassen werden. Bei dieser Abkürzung entsteht aber jederzeit ein Fehler, zu dessen möglichster Verminderung nicht selten eine Correctur der letzten beibehaltenen Decimale eintreten muss. Setzt man statt 2·3462 den Decimalbruch 2·346, so hat man 2·3462 — 2·346 = 0·0002 zu wenig. Wird ferner statt 8·3268 das einemal 8·326 und das anderemal 8·327 gesetzt, so erhält man im ersten Falle 0·0008 zu wenig, im zweiten 0·0002 zu viel; man begeht also im zweiten Falle, wo die letzte beibehaltene Decimale um 1 vergrößert wurde, einen kleineren Fehler, als im ersten Falle.

Die Schüler werden daraus leicht ersehen, dass bei der Abkürzung eines Decimalbruches die letzte beibehaltene Decimale um 1 vermehrt — corrigiert — werden müsse, wenn die nächstfolgende Decimale 5 oder größer als 5 ist; dass dagegen die überflüssigen Decimalen einfach weggelassen werden, wenn die höchste wegzulassende Decimale kleiner als 5 ist.

§. 86. Multiplicieren der Decimalzahlen.

1. Wenn eine Decimalzahl mit 10, 100, 1000, . . . zu multiplicieren ist.

Dieser Fall wurde schon oben (§. 83, b) betrachtet und ist hier an mehreren Übungen wiederholt vorzuführen.

2. Wenn eine Decimalzahl mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren ist.

$$\begin{array}{l} 7{\cdot}83 \times 9 \\ \hline 70{\cdot}47 \end{array}$$

9mal 3 Hundertel sind 27 Hundertel = 2 Zehntel und 7 Hundertel; 7 Hundertel schreibt man an, 2 Zehntel werden im Gedächtnisse behalten und dann zu dem Producte der Zehntel addiert. 9mal 8 Zehntel sind 72 Zehntel, und die früher gebliebenen 2 Zehntel sind 74 Zehntel, d. i. 7 Einer und 4 Zehntel; 4 Zehntel werden angeschrieben, 7 Einer weitergezählt. 9mal 7 Einer sind 63 Einer, und 7 Einer sind 70 Einer.

Oder: wenn man anstatt 7·83 das 100fache davon, nämlich 783, nimmt, und dieses mit 9 multipliciert, so wird auch das Product 7047 das 100fache des gesuchten wahren Productes sein; man findet also dieses, wenn man von 7047 den 100sten Theil nimmt, wodurch man 7047 Hundertel = 70·47 erhält.

Die Schüler folgern daraus die Regel:

Ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man ihn wie eine ganze Zahl damit multipliciert und im Producte so viele Decimalstellen abschneidet, als ihrer der Multiplicand enthält.

3. Wenn eine Decimalzahl mit einer Decimalzahl zu multiplicieren ist.

Es soll z. B. 28·237 mit 4·53 multipliciert werden. — Wie wird 28·237 mit der ganzen Zahl 453 multipliciert? Man erhält dadurch 12791·361, die Decimalzahl 4·53 ist aber nur der 100ste Theil von 453; wenn man nun 28·237 nur mit dem 100sten Theile von 453 multipliciert, so wird man auch nur den 100sten Theil von 12791·361 erhalten. Wie findet man den 100sten Theil von 12791·361? Es ist also

$$28{\cdot}237 \times 4{\cdot}53 = 127{\cdot}91361.$$

Wie wurden die Ziffern, mit welchen der Decimalbruch 127·91361 geschrieben wird, gefunden? Wie viele Decimalen enthalten die beiden Factoren zusammen? Und wie viele enthält das Product?

Ein Decimalbruch wird daher mit einem Decimalbruche multipliciert, indem man die Multiplication mit Weglassung der Decimalpunkte wie bei ganzen Zahlen verrichtet, und dann im Producte so viele Decimalstellen abschneidet, als ihrer beide Factoren zusammen haben.

§. 87. Dividieren der Decimalzahlen.

1. Wenn eine Decimalzahl durch 10, 100, 1000, . . zu dividieren ist.

Über diesen Fall, welcher schon oben (§. 83, c) behandelt wurde, sind hier wiederholte Übungen vorzunehmen.

2. Wenn eine Decimalzahl durch eine ganze Zahl zu dividieren ist.

Es sei 847·85 durch 31 zu dividieren.

847·85 : 31 = 27·35
227
 108
  155
   =

84 Zehner durch 31 dividiert geben 2 Zehner, und es bleiben noch 22 Zehner. 22 Zehner sind 220 Einer, und 7 Einer dazu, sind 227 Einer; diese durch 31 dividiert geben 7 Einer zum Quotienten und 10 Einer zum Reste. 10 Einer kann man als solche durch 31 nicht dividieren: man verwandelt sie in Zehntel; 10 Einer = 100 Zehntel, dazu die schon vorhandenen 8 Zehntel, sind 108 Zehntel; werden diese durch 31 dividiert, so beträgt ein Theil 3 Zehntel. Bevor aber diese in den Quotienten geschrieben werden, setzt man nach den Ganzen den Decimalpunkt. 31mal 3 Zehntel, oder 3mal 31 Zehntel sind 93 Zehntel, von 108 Zehnteln weg, bleiben noch 15 Zehntel. Diese enthalten 150 Hundertel, und 5 Hundertel dazu, sind 155 Hundertel, welche durch 31 dividiert genau 5 Hundertel geben.

Die Schüler sehen, dass man, um einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, denselben so wie eine ganze Zahl dividiert; nur wird im Quotienten der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Decimale des Dividends in Rechnung zieht.

Wenn bei der Division ein Rest übrig bleibt, so kann man demselben eine Null anhängen, und dann die Division fortsetzen; z. B.

2·03 : 28 = 0·0725
 70
 140
  =

Da 28 weder in 2 Einern, noch in 20 Zehnteln enthalten ist, so setzt man in die Stelle der Ganzen und der Zehntel Nullen. 203 Hundertel durch 28 dividiert geben 7 Hundertel, und es bleiben noch 7 Hundertel. Diese kann man durch Anhängung einer Null in Tausendtel verwandeln; 70 Tausendtel durch 28 dividiert geben 2 Tausendtel und es bleiben 14 Tausendtel übrig, u. s. w.

Ist der Divisor eine einziffrige Zahl, so schreibt man auch hier die Reste nicht an und setzt die Ziffern des Quotienten unmittelbar unter die gleichnamigen Stellen des Dividends. Der Decimalpunkt im Quotienten kommt dabei genau unter den Decimalpunkt im Dividend. Z. B.

$$\frac{13{\cdot}71_{0\,0} : 4}{3{\cdot}4275}$$

Hier kann den Schülern auch gezeigt werden, dass man in dem Falle, wo bei der Division zweier ganzer Zahlen ein Rest bleibt, den Quotienten in Decimalen entwickeln könne, indem man nach den Ganzen des Quotienten den Decimalpunkt anbringt, zu dem letzten wie auch zu jedem folgenden Reste eine 0 anhängt und die Division fortsetzt.

357 : 23 = 14·28
107
70
200
=

Ist z. B. 357 durch 25 zu dividieren, so erhält man zunächst 14 Ganze zum Quotienten, und 7 zum Reste. 7 Ganze sind 70 Zehntel; diese durch 25 dividiert geben 2 Zehntel, welche man in den Quotienten schreibt, nachdem man nach den 14 Ganzen den Decimalpunkt angebracht hat; es bleiben dann noch 20 Zehntel übrig, die durch 25 zu dividieren sind. 20 Zehntel sind 200 Hundertel, welche durch 25 dividiert 4 Hundertel zum Quotienten geben und keinen Rest übrig lassen.

Wenn bei fortgesetzter Division immer ein Rest übrig bleibt, so entwickelt man im Quotienten nur so viele Decimalen, als man ihrer braucht.

3. Wenn eine Decimalzahl durch eine Decimalzahl zu dividieren ist.

Der Lehrer lasse zunächst in irgend einer Division, z. B. 96 : 4, den Dividend und den Divisor mit 10, 100, 1000, . . . multiplicieren, um die Schüler zur Überzeugung zu führen, dass der Quotient ungeändert bleibt, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert.

Es sei nun 5·696 durch 0·32 zu dividieren.

5·696 : 0·32 = 569·6 : 32 = 17·8
249
256
=

Wie ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, ist den Schülern bekannt; allein hier ist auch der Divisor ein Decimalbruch. Kann man nicht diesen Divisor in eine ganze Zahl verwandeln? Womit muss man 0·32 multiplicieren, um eine ganze Zahl zu erhalten? Was muss aber dann auch mit dem Dividend 5·696 geschehen, damit der Quotient ungeändert bleibe? Anstatt 5·696 durch 0·32, wird man daher 569·6 durch 32 dividieren, da der Quotient in beiden Fällen derselbe ist.

Wenn also ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividieren ist, so multipliciert man Dividend und Divisor mit 10, 100, 1000, je nachdem der Divisor, 1, 2, 3 Decimalstellen enthält; dann hat man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren.

Man könnte in diesem Falle auch den beiden Decimalbrüchen gleich viele Decimalstellen geben, und sie dann mit Weglassung der Decimalpunkte als ganze Zahlen durch einander dividieren. Denn dadurch, dass man in dem Dividend und Divisor, welche gleich viele Decimalstellen haben, die Punkte weglässt, geschieht dasselbe, als wenn man beide mit 10, 100, 1000, . . . multipliciert hätte; dadurch aber wird der Quotient nicht geändert, und die Rechnung in eine Division ganzer Zahlen verwandelt. Z. B.

$$5{\cdot}696 : 0{\cdot}320 = 5{\cdot}696 \times 1000 : 0{\cdot}320 \times 1000$$
$$= 5696 : 320 = 17{\cdot}8$$

§. 88. Zinsrechnungen.

Einfache Zinsrechnungen wurden schon im Zahlenraume bis 1000 (III. Abth. §. 73) vorgenommen; sie konnten dort nur in beschränktem Umfange und vorzugsweise als Kopfrechnungen geübt werden. Diese Übungen werden hier wiederholt und angemessen erweitert, sie lassen nun, nachdem wir die Decimalrechnung kennen gelernt haben, eine viel einfachere und übersichtlichere Ausführung zu, durch welche zugleich der erste Grund für die allgemeine Procentrechnung gelegt wird. Wir beschränken uns auch hier noch auf den praktisch wichtigsten Fall, wo der Zins gesucht wird, und behalten die vollständige Behandlung der Zinsrechnung einer späteren Stufe vor.

Die einfachste Aufgabe, in welcher die Anwendung der Decimalrechnung auftritt, ist hier die Berechnung des Jahreszinses zu 1 %.

Z. B. Wie viel jährlichen Zins geben 381 fl. Capital à 1 %?

100 fl. Capital geben 1 fl. Zins,
1 „ „ gibt nur $\frac{1}{100}$ fl. Zins,
381 „ „ geben $\frac{381}{100}$ fl. = 3·81 fl. Zins.

Die Schüler ersehen daraus, daſs der Jahreszins zu 1% der 100ste Theil des Capitals ist und daher gefunden wird, indem man den Decimalpunkt um 2 Stellen nach links setzt.

Es sei nun der jährliche Zins von 761 fl. zu 6 % zu berechnen.

Im Kopfe:

700 fl. geben 7mal 6 fl. = 42 fl., 61 fl. geben 61mal 6 kr. = 366 kr. = 3 fl. 66 kr.; 42 fl. und 3 fl. 66 kr. sind 45 fl. 66 kr.

Schriftlich:

a) 100 fl. geben 6 fl.
1 „ gibt $\frac{1}{100}$ von 6 fl.
761 „ geben $\frac{1}{100}$ von 761mal 6 fl.
= $\frac{1}{100}$ von 4566 fl. = 45·66 fl. = 45 fl. 66 kr.

Oder:

b) 761 fl. geben à 1 % $\frac{1}{100}$ von 761 fl. = 7·61 fl.
à 6 % . . . . 6mal 7·61 fl. = 45·66 fl.
= 45 fl. 66 kr.

Die Lösung im Kopfe ist dieselbe, die schon auf den früheren Stufen geübt wurde.

Von den schriftlichen Lösungen beruht die Ausführung a) auf dem Normalverfahren der Dreisatzrechnung; sie läſst sich allgemein und mit Sicherheit, aber nicht immer bequem ausführen.

In der Ausführung b) wird zuerst der Zins à 1 % gesucht, indem man von dem Capitale den 100sten Theil nimmt; aus dem Zins à 1 % wird dann der Zins à 6 % durch die Multiplication gefunden. Diese Art der Lösung ist im allgemeinen die einfachste und bequemste und soll weiterhin ganz besonders geübt werden.

Aufgaben, welche, wie die vorhergehende, verschiedenartige Auflösungen zulassen, sind sehr geistbildend. Wird eine solche Aufgabe von mehreren Schülern auf verschiedene Art ausgerechnet, so lasse man jedesmal auch beurtheilen, welche von den verschiedenen Verfahrungsweisen im gegebenen Falle die einfachste und kürzeste sei. So erlangen die Schüler die Fertigkeit, bei jeder vorkommenden Aufgabe sogleich zu entscheiden, welcher Weg am vortheihaftesten zur Auflösung führt.

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

§. 89. Allgemeine Vorbemerkungen.

Eine Zahl, welche Einheiten einer bestimmten Art angibt, heißt eine benannte Zahl, im Gegensatze zu einer unbenannten oder reinen Zahl, welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt. 4 Gulden ist eine benannte, 4 eine unbenannte Zahl.

Eine benannte Zahl, welche nur Einheiten derselben Benennung angibt, heißt einnamig oder einfach benannt; eine benannte Zahl dagegen, welche zwar Einheiten von derselben Art, aber von verschiedener Benennung ausdrückt, mehrnamig oder mehrfach benannt. 4 Gulden ist eine einnamige, 4 Gulden 30 Kreuzer eine mehrnamige Zahl; in der letzteren ist Gulden die höhere, Kreuzer die niedrigere Benennung.

Beim Rechnen mit mehrnamigen Zahlen tritt sehr häufig die Nothwendigkeit ein, Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigeren Benennung, oder umgekehrt Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung zu verwandeln. Ersteres nennt man das Resolvieren (Auflösen), letzteres das Reducieren (Zurückführen). Die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt die Verwandlungszahl zwischen den beiden Benennungen.

Die Schüler sind auf allen früheren Stufen im Verwandeln der Münzen, Maße und Gewichte vielfältig geübt worden, auch haben sie schon einzelne Rechnungen mit mehrnamigen Zahlen ausgeführt. Alles das soll hier erweitert und im Zusammenhange vorgenommen werden.

Da die Vielfachen und Untertheilungen der neuen Maße und Gewichte nach dem Decimalsysteme gebildet sind, so gestaltet sich das Resolvieren und Reducieren, überhaupt das Rechnen mit denselben, vollständig als Decimalrechnen. Dasselbe gilt von unseren Münzen. Eine Ausnahme bilden nur die Zeit-, Bogen- und Zählmaße, da dieselben nicht nach dem Decimalsystem eingetheilt sind.

Vor allem ist hier eine genaue Kenntnis der Maße, Gewichte und Münzen und der zwischen ihnen bestehenden Verwandlungszahlen erforderlich. Was hierüber den Schülern bisher gelegentlich beigebracht wurde, muſs hier übersichtlich zusammengefaſst, nach Erfordernis erweitert und dem Gedächtnisse fest eingeprägt werden.

§. 90. Übersicht der Maße, Gewichte und Münzen.

a) Zeitmaße.

1 Jahr	hat	12 Monate,	1 Tag	hat	24 Stunden,
1 Monat	„	30 Tage,	1 Stunde	„	60 Minuten,
1 Woche	„	7 Tage,	1 Minute	„	60 Secunden.

In der Zinsrechnung wird gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen und daher das Jahr zu 360 Tagen angenommen; nach dem Kalender aber hat ein gemeines Jahr 365, ein Schaltjahr 366 Tage; ebenso haben die Monate eine ungleiche Anzahl von Tagen, und zwar:

Jänner	31	Tage	Juli	31	Tage
Februar	28	„	August	31	„
(im Schaltjahre	29	„)	September	30	„
März	31	„	October	31	„
April	30	„	November	30	„
Mai	31	„	December	31	„
Juni	30	„			

b) Bogen- und Winkelmaße.

Der Umfang eines Kreises wird in 360 gleiche Bogen, Grade, eingetheilt. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad (Winkelgrad) heißt. Sowohl bei den Bogen, als bei den Winkeln wird 1 Grad (°) in 60 Minuten (′), 1 Minute in 60 Secunden (″) eingetheilt.

c) Zählmaße.

1 Schock hat 60 Stück, 1 Dutzend 12 Stück.

1 Ballen Papier hat 10 Ries, 1 Ries 10 Buch, 1 Buch 10 Lagen, 1 Lage 10 Bogen.

d) Die neuen metrischen Maße und Gewichte.

In dem metrischen Maß- und Gewichtssysteme, das zuerst in Frankreich eingeführt wurde, bildet die Grundlage für alle Maße und Gewichte das Meter, welches französische Gelehrte als den zehnmillionsten Theil der Länge eines Erdmeridian-Quadranten annahmen.

1. Längenmaße.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter (m).

Die Vielfachen und Untertheilungen nicht nur der Längen-, sondern auch der daraus abgeleiteten Flächen-, Körper- und Gewichtsmaße werden nach dem Decimalsystem gebildet; alle Vielfachen sind 10fache, 100fache, 1000fache oder

10000fache, alle Untertheilungen 10tel, 100stel oder 1000stel der Grundeinheiten. Diese Vielfachen und Theile bekommen jedoch nicht, wie in den alten Systemen, besondere Eigennamen, sondern sie behalten den Namen der Grundeinheit, welchem zur näheren Bestimmung gewisse Wörter vorgesetzt werden, die man, damit sie für alle Völker gleich bleiben, aus der griechischen und lateinischen Sprache entlehnt hat.

Die Vielfachen werden durch Vorsetzung griechischer Zahlwörter bezeichnet, und zwar wird das 10fache der Einheit durch das vorgesetzte Wort Deka, das 100fache durch Hekto, das 1000fache durch Kilo und das 10000fache durch Myria ausgedrückt.

Die Untertheilungen bezeichnet man durch Vorsetzung lateinischer Zahlwörter, und zwar den 10ten Theil der Einheit durch Deci, den 100sten Theil durch Centi und den 1000sten Theil durch Milli.

Hiernach hat man für die metrischen Längenmaße.

10000	Meter	=	1 Myriameter (μm),
1000	„	=	1 Kilometer (km),
100	„	=	1 Hektometer,
10	„	=	1 Dekameter,
1	„	=	1 Meter (Einheit),
$^1/_{10}$	„	=	1 Decimeter (dm),
$^1/_{100}$	„	=	1 Centimeter (cm),
$^1/_{1000}$	„	=	1 Millimeter (mm).

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der Längenmaße enthält 10 Einheiten der nächstniedrigen Maßgröße.

Diese Gliederung der Längenmaße kann man, um ihren innigen Zusammenhang mit unserem Zahlensysteme besser zu ersehen, auch so darstellen:

Vielfache				Einheit	Untertheilungen		
Myria	**Kilo**	**Hekto**	**Deka**	**Meter**	**Deci**	**Centi**	**Milli**
10000	1000	100	10	1	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$

Von diesen Maßgliedern sind jedoch das Hektometer und das Dekameter, da sie für das praktische Leben entbehrlich erscheinen, in die österreichische Maß- und Gewichtsordnung nicht aufgenommen worden; für diese besteht daher folgende Eintheilung der Längenmaße:

$$1\ \mu m = 10\ km = 10000\ m,$$
$$1\ km = 1000\ m.$$
$$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 1000\ mm,$$
$$1\ dm = 10\ cm = 100\ mm,$$
$$1\ cm = 10\ mm.$$

2. Flächenmaße.

Die allgemeinen Flächenmaße sind die Quadrate der Längenmaße.

Ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein Quadratmeter (m^2). Theilt man jede Seite eines Quadratmeters in 10 gleiche Theile und verbindet die gegenüber liegenden Theilungspunkte durch gerade Linie, so entstehen 100 Quadrate, deren jedes ein Decimeter zur Seite hat, also ein Quadratdecimeter (dm^2) ist; 1 m^2 hat demnach 100 dm^2. Verfährt man auf ähnliche Art mit dem Quadratdecimeter, so erhält man 100 Quadratcentimeter (cm^2); und ebenso ergibt sich 1 cm^2 = 100 mm^2, ferner 1 Quadratmyriameter = 100 km^2.

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der Flächenmaße hat also 100 Einheiten der nächstniedrigeren Maßgröße.

Für die neuen österreichischen Flächenmaße, welche das Quadrathektometer und das Quadratdekameter nicht enthalten, hat man demnach:

$$
\begin{aligned}
1\ \mu m^2 = 100\ km^2 &= 100000000\ m^2,\\
1\ km^2 &= 1000000\ m^2.\\
1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 &= 1000000\ mm^2,\\
1\ dm^2 = 100\ cm^2 &= 10000\ mm^2,\\
1\ cm^2 &= 100\ mm^2.
\end{aligned}
$$

Die Einheit des Bodenflächenmaßes bildet das Ar (a), d. i. ein Quadrat, dessen Seite 10 Meter lang ist. Vielfaches: das Hektar (ha) = 100 Ar. Es ist demnach:

$$
\begin{aligned}
1\ ha = 100\ a &= 10000\ m^2,\\
1\ a &= 100\ \mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$

3. Körpermaße.

Die allgemeinen Körpermaße sind die Würfel der Längenmaße.

Ein Würfel, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein Cubikmeter (m^3). Jede Fläche des Cubikmeters ist ein Quadratmeter und enthält 100 Quadratdecimeter. Denkt man sich das Cubikmeter hohl, die Grundfläche desselben in 100 dm^2 und die Höhe in 10 dm getheilt, so kann man zunächst auf die Grundfläche 100 Würfel auflegen, deren jeder 1 dm zur Seite hat und daher ein Cubikdecimeter (dm^3) heißt. Diese 100 Cubikdecimeter bilden eine Schichte von 1 dm Höhe. Da aber das Cubikmeter 10 dm hoch ist, so fasst es 10 solche Schichten von je 100 Cubikdecimeter, daher im ganzen 1000 Cubikdecimeter; also 1 m^3 = 1000 dm^3. Ebenso folgt, dass 1 dm^3 = 1000 cm^3, 1 cm^3 = 1000 mm^3, dass ferner 1 Cubikmyriameter = 1000 km^3 ist.

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der allgemeinen Körpermaße enthält also 1000 Einheiten der nächstniedrigeren Maßgröße.

In der österreichischen Maß- und Gewichtsordnung, welche das Cubikhektometer und Cubikdekameter nicht enthält, ist:

$$
\begin{aligned}
\mu m^3 = 1000\ km^3 &= 1000000000000\ m^3,\\
1\ km^3 &= 1000000000\ m^3.\\
1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 &= 1000000000\ mm^3,\\
1\ dm^3 = 1000\ cm^3 &= 1000000\ mm^3,\\
1\ cm^3 &= 1000\ mm^3.
\end{aligned}
$$

Die Grundeinheit des Hohlmaßes bildet ein Maßglied der allgemeinen Körpermaße selbst, das Cubikdecimeter, unter dem besondern Namen Liter (l).

Das Liter ist also gleich dem Inhalte eines Würfels, dessen Seitenlänge ein Decimeter ist. Vielfaches: Das Hektoliter (hl) = 100 Liter; Untertheilungen: das Deciliter (dl) = $^1/_{10}$ Liter, das Centiliter (cl) = $^1/_{100}$ Liter. Es ist demnach:

$$
\begin{aligned}
1\,hl = 100\,l = 1000\,dl &= 10000\,cl,\\
1\,l = 10\,dl &= 100\,cl,\\
1\,dl &= 10\,cl.
\end{aligned}
$$

Da das Liter unmittelbar aus dem Körpermaße abgeleitet ist, so ist es sehr einfach, das Hohlmaß in Körpermaß, und umgekehrt, zu verwandeln. Hat man z. B. den Cubikinhalt eines Gefäßes in Cubikdecimeter berechnet, so drückt die Anzahl derselben zugleich den Inhalt in Liter aus.

4. Gewichte.

Die Gewichte werden aus den Körpermaßen hergeleitet. Die Grundeinheit der Gewichte ist in dem französischen metrischen Systeme das Gramm (g), d. i. das Gewicht eines Cubikcentimeters destillierten Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit. Da jedoch eine so kleine Wassermenge, wie sie ein Cubikcentimeter faſst, nicht leicht genau gemessen und gewogen werden kann, füllte man, um das Urgewicht zu bestimmen, das 1000fache dieses Rauminhaltes, d. i. ein Cubikdecimeter, mit reinem Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit, welche bei 4 Grad Wärme des 100theiligen Thermometers vorhanden ist, und wog dasselbe im luftleeren Raume ab. Das so gefundene Gewicht war das 1000fache eines Gramms, also ein Kilogramm.

Die österreichische Maß- und Gewichtsordnung nimmt das Kilogramm (kg) selbst, also das Gewicht eines Cubikdecimeters Wasser, als Einheit der Gewichte an, legt jedoch bei der Bildung der Benennungen das Gramm zu Grunde.

Vielfache:	der metrische Centner (q)	=	100 kg,
	die Tonne (t)	=	1000 kg.
Untertheilungen:	das Dekagramm (dkg)	=	$^1/_{100}$ kg,
	das Gramm (g)	=	$^1/_{1000}$ kg,
	das Decigramm (dg)	=	$^1/_{10}$ g,
	das Centigramm (cg)	=	$^1/_{100}$ g,
	das Milligramm (mg)	=	$^1/_{1000}$ g.

Es ist demnach:

$$
\begin{aligned}
1\,t = 10\,q = 1000\,kg = 100000\,dkg &= 1000000\,g,\\
1\,q = 100\,kg = 10000\,dkg &= 100000\,g,\\
1\,kg = 100\,dkg &= 1000\,g,\\
1\,dkg &= 10\,g,\\
1\,g = 10\,dg = 100\,cg &= 1000\,mg,\\
1\,dg = 10\,cg &= 100\,mg,\\
1\,cg &= 10\,mg.
\end{aligned}
$$

Aus allen diesen Bestimmungen geht hervor, daſs die neue österreichische Maß- und Gewichtsordnung, welche aus der Grundeinheit des Längenmaßes das

Flächen- und Körpermaß, aus letzterem das Gewicht herleitet, ein in allen seinen Theilen nach einfachen Verhältnissen zusammenhängendes und in sich selbst abgeschlossenes Ganzes bildet. Vier Grundbenennungen — Meter, Ar, Liter, Gramm — und sieben Zahlwörter genügen, um durch entsprechende Zusammensetzungen alle Maßglieder des metrischen Systems unzweideutig zu bestimmen.

e) Münzen.

1. In Österreich-Ungarn rechnet man in österreichischer Währung, wornach aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden. 1 Gulden ö. W. hat 100 Kreuzer.

Vor dem Jahre 1858 rechnete man in Conventionsmünze. 1 Gulden C. M. hatte 60 Kreuzer à 4 Pfenige. 100 fl. C. M. = 105 fl. ö. W.

2. Geprägte Münzen:

Aus Gold: Achtguldenstücke, Vierguldenstücke und Ducaten. Diese dienen nur als Handelsmünzen und haben keinen festgesetzten Wert. Bei den k. k. Cassen werden die Achtguldenstücke zu 8 fl. 10 kr. in Silber, die Vierguldenstücke zu 4 fl. 5 kr. in Silber angenommen; darnach gilt ein Ducaten 4 fl. 80 kr. in Silber.

Aus Silber: 2-, 1- und $\frac{1}{4}$-Guldenstücke. Als Silber-Scheidemünze werden Stücke zu 20, 10 und 5 Kreuzer geprägt.

Aus Kupfer: Stücke zu 4, 1 und $\frac{1}{2}$ Kreuzer.

3. Papiergeld:

Banknoten zu 10, 100 und 1000 Gulden und Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden.

§. 91. Verwandeln höherer Einheiten in niedrigere.
(Resolvieren.)

Wir behandeln hier, wie auch in den folgenden Rechnungen, überall zuerst die nichtdecimalen Maße und entwickeln an denselben das allgemeine Verfahren, dann erst lassen wir die Maße, Gewichte und Münzen mit decimaler Eintheilung folgen, für welche das allgemeine Verfahren eine kürzere und ganz einfache Form annimmt.

Man lasse die Schüler zuerst im Kopfe höhere Benennungen in niedrigere verwandeln. Sehr gut ist es, wenn diese Verwandlungen anfänglich in Reihenfolgen vorgenommen werden, z. B.

1 Jahr = 12 Monate,
2 Jahre = 2mal 12 Monate = 24 Monate,
3 „ = 3mal 12 „ = 36 „
u. s. w.

Dadurch werden die Schüler auf den Begriff des Resolvierens geleitet und überzeugen sich, dass dabei die Multiplication angewendet werden müsse.

Dieselben Schlüsse können auch beim schriftlichen Resolvieren gebildet werden. Häufig ist es jedoch für das schriftliche Rechnen vortheilhafter, die Schlussfolgerungen in einer andern Fassung zu bilden. Z. B. Wie viel kr. sind 38 fl.? Man kann schließen: 1 fl. hat 100 kr.; 38 fl. sind daher 38mal 100 kr. Man könnte aber auch so folgern: 1 fl. ist 100mal 1 kr.; 38 fl. sind also 100mal 38 kr. In beiden Fällen erhält man 3800 kr. Dort hat man 100 kr. mit 38, hier 38 kr. mit 100 multipliciert. Die erste Schlussweise ist natürlicher und beim Kopfrechnen vorzugsweise anzuwenden; die zweite gestattet dagegen eine bequemere schriftliche Ausrechnung. Wir werden weiterhin von beiden Arten der angedeuteten Schlüsse Gebrauch machen. Bei den hier vorzunehmenden Übungen lasse der Lehrer

a) eine einnamige Zahl in Einheiten einer niedrigeren Benennung,

b) eine mehrnamige Zahl in die niedrigste darin vorkommende Benennung,

c) die Decimalen einer Benennung in Ganze der niedrigeren Benennung auflösen.

a) Wie viel Stunden sind 8 Tage?

$$\begin{array}{l} 8 \times 24 \\ \hline 192 \text{ Stunden.} \end{array}$$

1 Tag hat 24 Stunden, 8 Tage sind 8mal 24 Stunden, d. i. 192 Stunden.

b) Wie viel Monate sind 9 Jahre 8 Monate?

$$\begin{array}{r} 9 \times 12 \\ \hline 108 \text{ Mon.} \\ + \;\; 8 \;\; \text{„} \\ \hline 116 \text{ Mon.} \end{array} \qquad \text{oder: } \begin{array}{l} 9 \text{ J. } 8 \text{ Mon.} \\ \hline 116 \text{ M.} \end{array}$$

Bei der zweiten Berechnungsweise werden, was in der Regel geschehen soll, die gegebenen niedrigeren Einheiten zu den gleichnamigen Einheiten, welche durch die Auflösung der höheren Benennung herauskommen, sogleich während der Multiplication im Kopfe dazugezählt.

c) Verwandle 5·45 Tage in Tage, Stunden und Minuten.

$$\begin{array}{r} 5{\cdot}45 \text{ Tage} \\ \times\ 24 \\ 180 \\ 90 \\ \hline 10{\cdot}80 \text{ Stunden} \\ \times\ 60 \\ 48 \text{ Minuten.} \end{array} \qquad 5{\cdot}45 \text{ Tage} = 5 \text{ T. } 10 \text{ St. } 48 \text{ Min.}$$

Hier verwandelt man zuerst 0·45 Tage in Stunden, man erhält nebst 10 ganzen Stunden noch 0·8 Stunden; die letzteren werden weiter in Minuten verwandelt.

Ganz einfach gestaltet sich das Resolvieren einer mehrnamigen Zahl in die niedrigste Benennung, wenn die Benennungen dem Decimalsysteme angehören. Z. B.

Verwandle 5 *m* 3 *dm* 8 *cm* in Centimeter.

5 *m* sind 50 *dm* und 3 *dm* sind 53 *dm*; 53 *dm* sind 530 *cm*, und 8 *cm* sind 538 *cm*; also

5 *m* 3 *dm* 8 *cm* = 538 *cm*.

Verwandle 4 fl. 9 kr. in Kreuzer.

4 fl. sind 400 kr., und 9 kr. sind 409 kr.; also

4 fl. 9 kr. = 409 kr.

Die Schüler ersehen daraus, dass man die Einheiten der verschiedenen decimalen Benennungen nur in ihrer natürlichen Reihenfolge neben einander zu stellen, die etwa fehlenden Ziffern durch Nullen zu ersetzen und der dadurch gebildeten Zahl die niedrigste Benennung zu geben braucht.

Eben so einfach ist für die decimalen Maße, Gewichte und Münzen das Verfahren, die Decimalen einer Benennung in Ganze der niedrigeren Benennung zu verwandeln. Z. B.

Verwandle 0·378 *m* in Decimeter, Centimeter und Millimeter.

$^{3}/_{10}$ *m* sind 3 *dm*, $^{7}/_{100}$ *m* sind 7 *cm*, $^{8}/_{1000}$ *m* sind 8 *mm*; also

0·378 *m* = 3 *dm* 7 *cm* 8 *mm*.

Verwandle 3·986 *hl* in eine mehrnamige Zahl.

$^{98}/_{100}$ *hl* sind sind 98 *l*; $^{6}/_{1000}$ *hl* sind $^{1}/_{10}$ von $^{6}/_{100}$ *hl*, also $^{1}/_{10}$ von 6 *l*, d. i. 6 *dl*; folglich

3·986 *hl* = 3 *hl* 98 *l* 6 *dl*.

Aus diesen und ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler, dass hier immer eine, zwei oder drei Decimalziffern nach rechts die Ganzen der nächstniedrigeren Benennung bilden, je nachdem die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000 ist.

Die Aufgaben dieser letzteren Art, welche eigentlich das Lesen der in Decimalbruchform geschriebenen Münzen und neuen Maße und Gewichte enthalten, sind bis zur größten Gewandtheit zu üben, anfangs mit Beifügung der Schlüsse, später mit unmittelbarer Angabe des Resultates.

§. 92. Verwandeln niedrigerer Einheiten in höhere. (Reducieren.)

Auch hier läßt der Lehrer zunächst im Kopfe niedrigere Benennungen in höhere verwandeln, und dann erst das schriftliche Reducieren eintreten.

Schon bei den mündlichen Übungen überzeugen sich die Schüler, dass man beim Reducieren die Zahl der niedrigeren Einheiten durch die entsprechende Verwandlungszahl dividieren müsse, und dass der Rest, wenn ein solcher bei der Division übrig bleibt, Einheiten derjenigen Benennung bedeutet, welche man reduciert hat.

Beim Reducieren kommen zwei Hauptfälle vor; es werden

a) Einheiten einer niedrigeren Benennung in eine mehrnamige Zahl, worin auch höhere Benennungen vorkommen, oder es wird

b) eine mehrnamige Zahl in einen Decimalbruch der höchsten Benennung verwandelt.

Man lasse z. B. 897 Stunden in Tage und Stunden verwandeln.

1 Tag hat 24 Stunden, 1 Stunde ist also der 24ste Theil von 1 Tag; 897 Stunden sind daher der 24 Theil von 897 Tagen.

897 : 24 = 37 Tage 9 Stunden.
177
9 Stunden.

Es seien ferner 7 Tage 11 Stunden 24 Minuten in einen Decimalbruch von Tagen zu verwandeln.

24 (Min.) : 60 = 0·4 Stunden,
11·4 (Stund.) : 24 = 0·475 Tage;
also 7 Tage 11 Stunden 24 Minuten = 7·475 Tage.

Sehr einfach ist die Verwandlung niedrigerer Einheiten in Ganze der höheren Benennungen, wenn diese nach dem Decimalsystem eingetheilt sind, indem sie mittels der Division durch 10, 100 oder 1000, also durch Abschneiden von einer, zwei oder drei niedrigsten Stellen erfolgt; jede solche Abtheilung bildet eine Benennung für sich. Z. B.

7368 *mm* = 7 *m* 3 *dm* 6 *cm* 8 *mm*;
1906 *l* = 19 *hl* 6 *l*;
73255 kr. = 732 fl. 55 kr.;

Eben so leicht ist in diesem Falle das Verwandeln einer mehrnamigen Zahl in einen Decimalbruch der höchsten Benennung, indem ihre Bestandtheile in der durch das System gebotenen Aufeinanderfolge unmittelbar die verlangten Decimalen geben; nur müssen dabei die etwa fehlenden Benennungen oder Ziffern durch Nullen ersetzt werden. Z. B.

Verwandle 4 *m* 3 *dm* 7 *cm* in einen Meter-Decimalbruch.

3 *dm* sind $^{3}/_{10}$ *m*, 7 *cm* sind $^{7}/_{100}$ *m*; folglich
4 *m* 3 *dm* 7 *cm* = 4·37 *m*.

Wie viel *kg* sind 13 *kg* 38 *dkg* 4 *g*?

38 *dkg* sind $^{38}/_{100}$ *kg*, 4 *g* sind $^{4}/_{1000}$ *kg*; folglich
13 *kg* 38 *dkg* 4 *g* = 13·384 *kg*.

Die letzten Aufgaben sind zugleich Übungen für das Schreiben unserer Rechnungsmünzen, sowie der neuen Maße und Gewichte in Form von Decimalbrüchen; sie sind als solche für das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen von besonderer Wichtigkeit und müssen darum sehr tüchtig durchgearbeitet werden.

§. 93. Addieren mehrnamiger Zahlen.

Zuerst Kopfrechnen in Reihenfolgen und außer der Reihe, z. B.

5 fl. 64 kr. + 58 kr. = 6 fl. 22 kr.,
6 „ 22 „ + 58 „ = 6 „ 80 „
6 „ 80 „ + 58 „ = 7 „ 38 „
u. s. w.

8 *ha* 23 *a* + 2 *ha* 35 *a* = 10 *ha* 58 *a*,
10 „ 58 „ + 2 „ 35 „ = 12 „ 93 „
u. s. w.

Da nur gleichnamige Bestandtheile zusammengezählt werden können, ist es beim schriftlichen Addieren am zweckmäßigsten, die gleichnamigen Zahlen sogleich im Ansatze unter einander zu schreiben. Z. B.

37 Tage 19 Stunden.	19 St. + 14 St. = 33 St.
21 „ 14 „	= 1 Tag 9 St.
59 Tage 9 Stunden.	

Man addiert also zuerst die Zahlen der niedrigsten Benennung und verwandelt ihre Summe in die nächsthöhere; bleibt ein Rest, so schreibt man ihn unter die addierte Reihe, die erhaltene Zahl der höheren Benennung aber addiert man zu den Zahlen dieser höheren Benennung; u. s. w.

Die Reductionen sollen dabei in der Regel im Kopfe ausgeführt werden.

Die Addition solcher mehrnamiger Zahlen, die nach dem Decimalsysteme gebildet sind, geschieht am einfachsten, indem man die mehrnamigen Zahlen auf dieselbe höchste oder niedrigste Benennung bringt und die dadurch erhaltenen einnamigen Zahlen addiert. Z. B.

7 *m* 5 *dm* 5 *cm*	oder	755 *cm*	oder	7·55 *m*
6 *m* 7 *dm* 2 *cm*		672 *cm*		6·72 *m*
8 *m* 9 *dm* 7 *cm*		897 *cm*		8·97 *m*
23 *m* 2 *dm* 4 *cm*		2324 *cm*		23·24 *m*
		= 23 *m* 2 *dm* 4 *cm*		= 23 *m* 2 *dm* 4 *cm*.

Am vortheilhaftesten ist es, die mehrnamigen Zahlen als Decimalbrüche der höchsten Benennung darzustellen und sie als solche zu addieren.

§. 94. Subtrahieren mehrnamiger Zahlen.

Der Stufengang entspricht demjenigen beim Addieren mehrnamiger Zahlen. Zuerst Kopfrechnen, dann schriftliches Rechnen; letzteres zuerst mit mehrnamigen Zahlen, die keine decimale Eintheilung haben, dann mit solchen, welche dem Decimalsystem angehören.

Aufgaben, bei denen keine Zahl des Subtrahends größer ist als die gleichnamige Zahl des Minuends, bieten dem Schüler keine Schwierigkeit dar.

Nach einigen Aufgaben dieser Art gehe der Lehrer zu Beispielen über, bei denen sich eine Zahl des Subtrahends von der gleichnamigen Zahl des Minuends nicht subtrahieren läßt. Z. B.

1882 Jahre 3 Mon. 25 T.	oder	1882 Jahre 15 Mon. 25 T.
1798 „ 7 „ 12 „		1799 „ 7 „ 12 „
83 Jahre 8 Mon. 13 T.		83 Jahre 8 Mon. 13 T.

Damit man hier die Monate subtrahieren könne, zählt man, wie in der zweiten Hilfsrechnung angedeutet wird, zu den Monaten im Minuend so viel Einheiten dazu, als deren nächsthöhere Einheit enthält, also 12 Monate, und subtrahiert dann 7 Mon. von 15 Mon.; damit aber der Unterschied nicht geändert werde, muss man auch die Zahl des Subtrahends in der nächsthöheren Benennung um 1 Einheit vermehren.

Die Hilfsrechnung wird übrigens nicht schriftlich ausgeführt, indem die erforderlichen Veränderungen nur in Gedanken vollzogen werden.

Bei mehrnamigen Zahlen, welche nach dem Decimalsysteme eingetheilt sind, wird die Subtraction am bequemsten ausgeführt, indem man dieselben als Decimalbrüche derselben Benennung darstellt und als solche subtrahiert.

26 *m* 5 *dm* 8 *cm* 2 *mm*	oder	26582 *mm*	oder	26·582 *m*
18 *m* 6 *dm* 4 *cm* 7 *mm*		18647 *mm*		18·647 *m*
7 *m* 9 *dm* 3 *cm* 5 *mm*		7935 *mm*		7·935 *m*

§. 95. Die Zeitrechnung.

Die **Zeitrechnung** bietet dem Anfänger mehrfache Schwierigkeit. Bevor wir daher die hieher gehörigen Aufgaben näher besprechen, wird es nöthig sein, einige Bemerkungen über unsere Zeitrechnung vorauszuschicken.

Die Zeit wird nach Jahren, Monaten und Tagen bestimmt. Diese Maße hat uns die Natur selbst in der Bewegung der für uns wichtigsten Weltkörper an die Hand gegeben. Ein **Jahr** ist nämlich die Zeit, in welcher unsere Erde ihre Bahn um die Sonne durchläuft; ein **Tag** die Zeit, in welcher sich die Erde um ihre Achse dreht; ein **Monat** der Zeitraum, welcher ungefähr mit der Zeit des Umlaufes des Mondes um die Erde übereinstimmt.

Die Christen zählen die Jahre von der Geburt **Jesu Christi** an. Von dieser Zeit angefangen, schrieb man zunächst das Jahr 1, nach Ablauf dieses ersten Jahres das Jahr 2, u. s. w. Das Jahr, welches durch die Jahreszahl bezeichnet wird, ist daher erst im Laufe begriffen, und noch nicht verflossen. Wenn wir z. B. das Jahr 1884 schreiben, so sind seit der Geburt Christi erst 1883 Jahre vollständig verflossen.

Dieses ist auch der Fall, wenn wir von Monaten und Tagen reden. Wenn wir z. B. den 15. April schreiben, so bezeichnen wir zwar dadurch den 15ten Tag des 4ten Monates; allein es ist weder der 4te Monat dieses Jahres, noch der 15te Tag jenes Monates abgelaufen; es sind von diesem Jahre erst 3 Monate und 14 Tage verflossen. Am 27. Juli 1880 waren 1879 Jahre 6 Monate 26 Tage nach Christi Geburt verflossen.

Der Tag hat 24 Stunden, welche von Mitternacht an gerechnet werden. Um 1 Uhr morgens ist die erste, um 5 Uhr morgens die 5te, um 10 Uhr vormittags die 10te, um 12 Uhr mittags die 12te, um 1 Uhr nachmittags die 13te um 8 Uhr abends die 20ste, um 11 Uhr nachts die 23ste Stunde des Tages verflossen. Wenn wir daher schreiben: 1875 den 4. Februar 3 Uhr nachmittags, so sind bis zu diesem Augenblicke von Chr. G. an verflossen: 1874 Jahre 1 Monat 3 Tage 15 Stunden.

Die Zeit (Jahreszahl, Monat und Tag), wann etwas geschieht oder geschehen ist, nennt man das Datum.

Nach den vorhergehenden Erklärungen kann jedes Datum in verflossene Zeit verwandelt werden, indem man die Jahreszahl, die Ordnungszahl des Monats und Tages je um 1 vermindert.

Umgekehrt kann man, wenn für eine Begebenheit der seit Chr. G. verflossene Zeitraum als eine durch Jahre, Monate, Tage, . . . ausgedrückte benannte Zahl gegeben ist, daraus ohne Schwierigkeit das Datum dieser Begebenheit bestimmen. Z. B.

Als eine gewisse Begebenheit eintrat, waren 1864 Jahre 7 Monate 20 Tage seit Chr. G verflossen; wann fand diese Begebenheit statt? — Als 1864 Jahre nach Chr. G. verflossen waren, schrieb man 1865; nach Ablauf von 7 Monaten war man im 8ten Monate, also im August; und nach Verlauf von 20 Tagen in diesem Monate schrieb man den 21sten. Die Begebenheit fand also statt im Jahre 1865 am 21sten August.

Welches Datum schrieb man 1873 Jahre 2 Monate 8 Tage 9 Stunden nach Chr. G.? — 1873 Jahre nach Chr. G. schrieb man die Jahreszahl 1874; als von diesem Jahre 2 Monate verflossen waren, befand man sich im dritten Monate, also im März; mit dem Verlauf von 8 Tagen im März begann der 9te März. Man schrieb also 1874 den 9ten März 9 Uhr vormittags.

Bei den Aufgaben über die Zeitrechnung ist auch noch der Umstand, daſs nicht alle Monate gleich viele Tage haben, und daſs einige Jahre gemeine, andere Schaltjahre sind, gehörig zu beachten. Ein gemeines Jahr wird zu 365 Tagen gerechnet. Die wirkliche Zeit des Umlaufes der Erde um die Sonne beträgt aber 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden. Wenn daher ein Jahr zu 365 Tagen angenommen wird, so begeht man jährlich einen Fehler von 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden, also von beinahe 6 Stunden, folglich in 4 Jahren ungefähr einen Fehler von 24 Stunden oder einem ganzen Tage. Um dieses wieder auszugleichen, rechnet man jedes vierte Jahr zu 366 Tagen, und nennt ein solches ein Schaltjahr. Den Schalttag fügt man dem Monate Februar ein. Um zu erfahren, ob ein Jahr ein gemeines oder ein Schaltjahr ist, untersuche man, ob die Jahreszahl durch 4 ohne Rest dividiert werden könne; ist dieses der Fall, so ist das Jahr ein Schaltjahr; bleibt ein Rest, so ist dasselbe ein gemeines Jahr. Die Jahre 1892 und 1896, werden Schaltjahre sein. Wenn man übrigens jedes vierte Jahr als ein Schaltjahr ansieht, so wird zu viel eingeschaltet, da der jährliche Überschuſs nicht ganze 6 Stunden beträgt. Um auch diesen Fehler möglichst auszugleichen, werden alle 400 Jahre 3 Jahre, welche nach der gewöhnlichen Berechnung Schaltjahre sein sollten, als gemeine Jahre angenommen. Man hat dazu die Jahre bestimmt, mit welchen die Jahrhunderte endigen. So sollten die Jahre 1700, 1800, 1900 eigentlich Schaltjahre sein; sie werden aber als gemeine Jahre angenommen.

Bei der Zeitrechnung kommen dreierlei Hauptaufgaben vor; es ist entweder das Ende eines Zeitraumes, oder die Dauer, oder der Anfang desselben zu berechnen.

a) Das Ende eines Zeitraumes wird aus dem Anfange und der Dauer desselben berechnet, indem man zur Zeit des Anfanges die Dauer des Zeitraumes addiert.

Man kann die Rechnung auch dadurch ausführen, dass man, ohne die verflossene Zeit zu suchen, sogleich das Anfangsdatum der Reihe nach um die Jahre, Monate, Tage, . . . der Dauer des Zeitraumes vermehrt. Z. B.

Ein Mann, der am 5. Jänner 1829 geboren wurde, starb in einem Alter von 35 Jahren 6 Monaten und 12 Tagen; an welchem Tage war dieses?

Erstes Verfahren:

1828 J.	— M.	4 T.
35 „	6 „	12 „
1863 J.	6 M.	16 T.

Am 5. Jänner 1829, als dieser Mann geboren wurde, waren von Chr. G. an 1828 Jahre und 4 Tage verflossen. Als er starb, war mehr Zeit verflossen, und zwar um so viel mehr, als das Alter des Verstorbenen beträgt, man muss also noch dieses zu 1828 Jahren 4 Tagen addieren. Man bekommt dadurch 1863 Jahre 6 Monate und 16 Tage als die bei seinem Tode nach Chr. G. verflossene Zeit; somit starb er am 17. Juli 1864.

Zweites Verfahren:

35 Jahre nach dem 5. Jänner 1829 war der 5. Jänner 1864,
6 Mon. „ „ 5. Jänner 1864 „ „ 5. Juli 1864,
12 Tage „ „ 5. Juli 1864 „ „ 17. Juli 1864.

Dieses zweite Verfahren ist einfacher und eignet sich besonders für das Kopfrechnen, während das erste Verfahren meistens beim Zifferrechnen angewendet wird.

Kaiser Franz I. war am 12. Februar 1768 geboren, und starb in einem Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann starb er?

1767 J.	1 M.	11 T.
67 „	— „	18 „
1834 J.	1 „	29 T.
1834 J.	2 M.	1 T.

Man setzt auch hier die Zahl der Jahre, Monate und Tage an, welche bei der Geburt dieses Monarchen verflossen waren, und addiert dazu das Alter desselben; die Summe gibt uns die Zeit an, welche bei dessen Tode verflossen ist, und welche hierauf so zu übertragen ist, wie man das Datum gewöhnlich schreibt. Hier kommen 29 Tage heraus; diese kann man nicht eher in Rechnung ziehen, bis man weiß, welchem Monate sie angehören, da die Monate verschiedene Dauer haben. Bei der Addition der Monate erhält man 1 Monat; jene 29 Tage sind also nach Verlauf von 1 Monat eingetreten, also gehören sie dem Februar an. Da aber dieser Monat bald 28, bald 29 Tage hat, so muss man noch die Jahre addieren, um zu sehen, ob man es mit einem gemeinen oder mit einem Schaltjahr zu thun hat; man bekommt 1834 Jahre; Kaiser Franz I. starb also im Jahre 1835, dieses war ein gemeines Jahr und hatte im Monate Februar 28 Tage; wir zählen also von obigen 29 Tagen 28 Tage zu einem Monate, wornach wir 2 Monate haben, den übrigbleibenden Tag aber schreiben wir unter die Tage. Als Kaiser Franz I. starb, waren also 1834 Jahre 2 Monate 1 Tag seit Chr. G. verflossen; somit starb er im Jahre 1835 am 2. März.

Kürzer stellt sich die Lösung dieser Aufgabe nach dem zweiten oben angeführten Verfahren heraus:

67 Jahre nach dem 12. Februar 1768 war der 12. Februar 1835,
18 Tage „ „ 12. Februar 1835 „ „ 2. März 1835.

b) Um die **Dauer eines Zeitraumes** zu erhalten, muss man die am Anfang desselben verflossene Zeit von der am Ende verflossenen Zeit **subtrahieren**. Man kann übrigens auch vom Anfangsdatum schrittweise zum Datum des Endes übergehend, nach der Reihe die Jahre, Monate und Tage der Zeitdauer bestimmen. Z. B.:

Jemand war am 2. April 1787 geboren, und starb am 3. October 1865; wie alt ist er geworden?

Hier ist eigentlich die Frage: wie viel Jahre, Monate und Tage liegen zwischen dem 2. April 1787 und dem 3. October 1865?

1864	J.	9	M.	2	T.
1786	„	3	„	1	„
78	J.	6	M.	1	T.

Am 3. October 1865 waren seit Chr. G. 1864 Jahre 9 Monate 2 Tage verflossen, am 2. April 1787 aber 1786 Jahre 3 Monate 1 Tag. So viel Zeit also am ersten Tage mehr verflossen war als am letzten, so alt war der Verstorbene; man muss daher die zweite Zahl von der ersten abziehen; der Rest 78 Jahre 6 Monate 1 Tag zeigt die Dauer des Lebens jener Person an.

Zweites Verfahren:

Vom 2. April 1787 bis 2. April 1865 sind 78 Jahre,
„ 2. April 1865 „ 2. Oct. 1865 „ 6 Monate,
„ 2. Oct. 1865 „ 3. Oct. 1865 ist 1 Tag,
also gesuchte Lebensdauer = 78 Jahre 6 Mon. 1 Tag.

c) Um den Anfang eines Zeitraumes zu finden, wird die Zeitdauer von dem Ende desselben subtrahiert. Man kann auch von Datum zu Datum zurückgehend, der Reihe nach die Tage, Monate und Jahre des Zeitraumes von dem Datum des Endes in Abrechnung bringen. Z. B.

Unser Kaiser Franz Josef I. trat am 2. December 1848 die Regierung an und war damals 18 Jahre 3 Monate 14 Tage alt; wann wurde er geboren?

Regierungsantritt:	1847 J.	11 M.	1 T.	nach Chr. G.
Damaliges Alter:	18 „	3 „	14 „	„ „ „
Zeit der Geburt:	1829 J.	7 M,	17 T.	nach Chr. G.

also Datum der Geburt 18. August 1830.

Oder:

14 Tage vor dem 2. December 1848 war der 18. November 1848,
3 Mon. „ „ 18. November 1848 „ „ 18. August 1848,
18 Jahre „ „ 18. August 1848 „ „ 18. August 1830.

§. 96. Multiplicieren mehrnamiger Zahlen.

Wie viel ist 6mal 9 Jahre 7 Monate?

Mündlich: 6mal 9 Jahre sind 54 Jahre; 6mal 7 Monate sind 42 Monate, d. i. 3 Jahre 6 Monate, und die früheren 54 Jahre dazu, sind 57 Jahre 6 Monate.

Beim schriftlichen Multiplicieren muss man, weil in dem Producte der Monate Jahre enthalten sind, und diese zu dem Producte der Jahre gezählt werden müssen, bei den Monaten zu rechnen anfangen, damit man nicht nöthig habe, die im Producte schon angeschriebene Zahl der Jahre wieder auszubessern.

9 J. 7 Mon. × 6 7 Mon. × 6 = 42 Mon.
57 J. 6 Mon. = 3 J. 6 Mon.

Hier erhält man zuerst 42 Monate, d. i. 3 Jahre 6 Monate; 6 Monate schreibt man an, 3 Jahre zählt man zu dem Producte der Jahre.

Die Reductionen werden möglichst im Kopfe ausgeführt.

Ist eine mehrnamige Zahl mit decimaler Eintheilung zu multiplicieren, so verwandelt man sie in die niedrigste Benennung, oder, was im allgemeinen vortheilhafter ist, in einen Decimalbruch der höchsten Benennung. Z. B.

Multipliciere 38 fl. 62 kr. mit 27

3862 kr. × 27 oder 38·62 fl. × 27
27034 27034
7724 7724
104274 kr. = 1042 fl. 74 kr. 1042·74 fl.

Die hier vorzunehmenden angewandten Aufgaben sind Schlussrechnungen. (§§. 67 und 69.)

§. 97. Dividieren mehrnamiger Zahlen.

a) Wenn die Division als **Messen** angewendet wird.

In diesem Falle sind Dividend und Divisor benannte Zahlen; der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

Wie oft sind 8 kr. in 6 fl. enthalten?

Mündlich: 6 fl. sind 600 kr.; 8 kr. sind in 6 fl. eben so oft enthalten als in 600 kr.; 600 kr. sind 560 kr. + 40 kr.; 8 kr. sind in 560 kr. 70mal, in 40 kr. 5mal, in 600 kr. also 75mal enthalten.

Schriftlich: 600 kr. : 8 kr. = 75.
40

Man bringt also Dividend und Divisor auf gleiche, am besten auf die niedrigste Benennung und vollzieht dann die Division.

Wie oft sind 2 *m* 9 *dm* 1 *cm* in 151 *m* 3 *dm* 2 *cm* enthalten?

2 *m* 9 *dm* 1 *cm* = 291 *cm* 15132 : 291 = 52
151 *m* 3 *dm* 2 *cm* = 15132 *cm*

b) Wenn die Division als **Theilen** angewendet wird.

Hier ist nur der Dividend benannt, der Divisor aber muss eine unbenannte Zahl sein; der Quotient erhält denselben Namen, den der Dividend hat.

Es seien 41 fl. 22 kr. unter 9 Personen zu gleichen Theilen zu theilen; wie viel erhält 1 Person?

Man muss hier sowohl 41 fl. als 22 kr. durch 9 dividieren.

Mündlich: Der 9te Theil von 41 fl. sind 4 fl., und es bleiben noch 5 fl. zur Vertheilung übrig; diese werden in Kreuzer aufgelöst, 5 fl. = 500 kr., und die bereits vorhandenen 22 kr. dazu, sind 522 kr. = 450 kr. + 72 kr.; $\frac{1}{9}$ von 450 kr. sind 50 kr., $\frac{1}{9}$ von 72 kr. sind 8 kr., von 522 kr. also 58 kr.; 1 Person erhält also 4 fl. 58 kr.

Schriftlich:

41 fl. 22 kr. = 41·22 fl. 41·22 fl. : 9
4·58 fl. = 4 fl. 58 kr.

Man dividiert zuerst die Zahl der höchsten Benennung, verwandelt den etwa verbleibenden Rest in die nächstniedrigere Benennung, addiert dazu die im Dividend bereits vorhandenen Einheiten dieser Benennung und dividiert die dadurch erhaltene Summe; oder, was im allgemeinen bequemer ist: man verwandelt den mehrnamigen Dividend in eine einnamige Zahl und dividiert diese.

Obwohl bei mehrnamigen Zahlen das Divisionsverfahren, je nachdem man eine Aufgabe des Theilens oder des Enthaltenseins zu lösen hat, wesentlich verschieden ausfällt; so erscheint es doch rathsam, dass die angewandten Aufgaben nicht nach diesen beiden Arten gesondert, sondern unter einander abwechselnd vorgenommen werden, weil es dem Schüler mehr Übung bringt, wenn er nicht schon vorhinein weiß, zu welcher Art eine Aufgabe gehört, sondern dieses bei jeder einzelnen Aufgabe erst durch Nachdenken zu untersuchen genöthigt ist.

Unter den angewandten Aufgaben können hier außer den Schlussrechnungen (§§. 65, 67—69) auch leichte Durchschnitts- und Gesellschaftsrechnungen geübt werden.

Vierter Abschnitt.

Das Rechnen mit den häufiger vorkommenden gemeinen Brüchen.

§. 98.

Schon im Anschlusse an den Zahlenraum bis 100 ließen wir die Schüler die einfachsten Brüche kennen lernen und führten sie unmerklich in die Operationen mit denselben ein.

Gleichwohl werden wir hier noch nicht zur allgemeinen Behandlung der Brüche übergehen. Mit der Einführung der metrischen Maße und Gewichte kommen im gewöhnlichen Leben vorzugsweise nur noch einfachere gemeine Brüche vor. Schulen, denen die Zeit sehr karg zugemessen ist, werden daher ihre Aufgabe erfüllen, wenn sich die Schüler im Operieren mit solchen Bruchzahlen, welche im praktischen Leben am häufigsten auftreten, volle Geläufigkeit erwerben. An mehrclassigen Volksschulen aber, welche die Rechenstoffe allseitiger durchzuarbeiten in der Lage sind, kann die vollständige Lehre der gemeinen Brüche immerhin einer späteren Stufe vorbehalten werden. Wir beschränken uns darum hier auf die häufiger vorkommenden Brüche und brauchen nur in dem bereits geübten Lehrstoffe eine entsprechende Erweiterung eintreten zu lassen.

Die äußere Anschauung bleibt auch hier noch vorherrschend. Als Veranschaulichungsmittel bedienen wir uns der getheilten Linien.

Der Lehrer wird zunächst die nöthigen Bemerkungen über das Wesen und die Eintheilung der gemeinen Brüche vorausschicken.

a) Nehme ich die ganze Einheit einmal oder mehrmal, so erhalte ich eine ganze Zahl. Nehme ich nur einen Theil der Einheit einmal oder mehrmal, so erhalte ich eine gebrochene Zahl oder einen Bruch. Wie erhältst du 3? Wie erhältst du $\frac{3}{4}$?

Mit jeder ganzen Zahl läſst sich jeder Bruch verbinden. Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruche besteht, heißt eine gemischte Zahl, z. B. $3\frac{2}{5}$.

Um sich von einem Bruche eine richtige Vorstellung zu machen, muſs man erstlich wissen, in wie viel gleiche Theile 1 Ganzes getheilt wurde, und dann, wie viele solche Theile zu nehmen sind; man muſs also wissen, was für Theile der Bruch enthält, und wie viele solche Theile er enthält. Zur Bestimmung eines Bruches sind also zwei Zahlen erforderlich; die eine zeigt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, sie gibt somit die Art der Theile an, d. h. sie nennt oder benennt die Theile und heißt darum der Nenner; die andere zeigt an, wie viele solche Theile zu nehmen sind, sie zählt die Theile und heißt darum der Zähler. Der Nenner eines Bruches ist also der Name der Theile, der Zähler die Anzahl derselben. Man schreibt den Nenner unter den Zähler und setzt zwischen beide einen Strich.

Der Lehrer lasse verschiedene ausgesprochene Brüche anschreiben, und umgekehrt angeschriebene Brüche aussprechen, bei jedem solchen Bruche aber auch die Entstehung und Bedeutung desselben angeben.

b) Wird ein Ganzes in mehrere gleiche Theile getheilt und nimmt man weniger Theile, als zum Ganzen gehören, so ist der Bruch, der dadurch entsteht, kleiner als ein Ganzes; enthält der Bruch gerade so viele Theile, als zum Ganzen gehören, so ist er dem Werte nach dem Ganzen gleich; enthält der Bruch mehr Theile, als zum Ganzen gehören, so ist er größer als ein Ganzes. Hierauf beruht die Eintheilung der Brüche in echte und unechte.

Brüche, welche weniger als ein Ganzes betragen, heißen echte Brüche. Der Zähler eines echten Bruches ist kleiner als der Nenner.

Brüche, welche ein Ganzes oder mehr als ein Ganzes betragen, heißen unechte Brüche. Der Zähler eines unechten Bruches ist eben so groß oder größer als der Nenner.

Zum besseren Verständnisse kann der Lehrer auch echte und unechte Guldenbrüche durch Kreuzer ausdrücken und untersuchen lassen, ob sie kleiner, gleich oder größer als ein ganzer Gulden sind. Z. B. $\frac{3}{4}$ fl. $=$ 75 Kr.; $\frac{4}{4}$ fl. $=$ 100 Kr.; $\frac{5}{4}$ fl. $=$ 125 Kr.

Schließlich wird den Schülern noch gesagt, welche Brüche gleichnamig, und welche ungleichnamig heißen.

§. 99. Rechnungsoperationen mit gemeinen Brüchen.

Die im Leben am häufigsten vorkommenden Bruchzahlen sind:

1. Halbe, Viertel und Achtel;
2. Drittel, Sechstel und Zwölftel;
3. Fünftel und Zehntel;
4. Zwanzigstel, Fünfundzwanzigstel, Fünfzigstel und Hundertel.

Bei jeder dieser Gruppen von Bruchzahlen nehmen wir nach der Reihe das Resolvieren und Reducieren, das Addieren und Subtrahieren, das Multiplicieren, das Dividieren als Messen und Theilen vor und fügen diesen Übungen noch angewandte Aufgaben bei.

Das unterrichtliche Verfahren bleibt im allgemeinen dasselbe, wie bei dem früheren Anschauungsunterrichte im Bruchrechnen (II. Abth. §. 48).

Nachdem die Schüler auf dem Wege der äußeren Anschauung die Bedeutung der einfacheren Bruchzahlen kennen und mit ihnen rechnen gelernt haben, werden sie befähigt sein, sich auch ohne äußere Versinnlichung durch ihre innere Anschauungskraft von jedem beliebigen Bruche eine klare Vorstellung zu machen und das für die anschaulich dargestellten Bruchzahlen abgeleitete Rechnungsverfahren ohne besondere Schwierigkeit auch auf andere Brüche anzuwenden. Den oben bezeichneten Übungen können daher hier auch einige leichtere Rechnungen mit Brüchen, deren Nenner beliebige Zahlen sind, angeschlossen werden.

Fünfte Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **fünften** Rechenbuches für Volksschulen.)

Rechnungsübungen für die oberen Schulclassen.

Einleitung.

§. 100. Übungsstoffe des fünften Rechenbuches.

Die ersten vier Rechenbücher für Volksschulen enthalten die Grundoperationen mit ganzen Zahlen, Decimal- und gemeinen Brüchen, mit einnamigen und mehrfach benannten Zahlen und bieten mit diesen Übungsstoffen ein abgeschlossenes Ganzes, das den Schülern auch schon hinreichende Mittel an die Hand gibt, um bei sorgfältiger Beurtheilung alle Rechnungsaufgaben des gewöhnlichen Lebens, so mannigfaltig sie auch sein mögen, mit Einsicht und Sicherheit lösen zu können. In dem weiteren Rechenunterrichte kann es sich nur darum handeln, das Gelernte durch Wiederholungsübungen zu befestigen und nach Bedürfnis zu erweitern, insbesondere aber die Überleitung von dem eigentlichen Schulrechnen zum Rechnen, wie es im Leben geübt wird, zu bewerkstelligen, indem die verschiedenen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, welche sich der Rechnung unterziehen lassen, nach und nach vorgeführt und die bekannten Operationen auf diese Verhältnisse recht vielseitig zur Anwendung gebracht werden.

Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen werden unter angemessener Erweiterung des früher Gelernten den Ausgangspunkt bilden. Sodann folgt die vollständige Behandlung der gemeinen Brüche, welcher die wichtigsten Lehren über die Theilbarkeit der Zahlen vorausgeschickt werden. Neu treten auf: das Ausziehen der Quadratwurzel und der Cubikwurzel, das vorzugsweise bei geometrischen Rechnungen Anwendung findet; ferner die Verhältnisse und Proportionen nebst Anwendungen. Von den Verhältnisrechnungen sind die Procent-, Zins- und Theilungsrechnungen, bei denen möglichst der Charakter der Schlussrechnungen festgehalten wird, unter allen Umständen, in besseren Schulen auch die Discont- und Termin-, die Mischungs- und Kettenrechnung zu üben. Einige Kenntnis über die Rechnung mit Münzen, Wechseln, Staatspapieren und Actien erscheint bei dem gegenwärtigen Aufschwunge des Verkehres für keine Classe von Menschen mehr ganz entbehrlich; darum sollen auch die diesbezüglichen Rechnungsübungen, wenn auch in beschränktem Umfange, in keiner gehobenen Volksschule unberücksichtigt bleiben. Den Übungsstoff des letzten Schuljahres, als

Abschluss des Schulunterrichtes im Rechnen, bilden Aufgaben, welche aus den verschiedenen Berufszweigen hergenommen und nach ihrem sachlichen Inhalte zusammengestellt sind; für Mädchen sind insbesondere hauswirtschaftliche Rechenaufgaben am Platze, in Dorfschulen werden landwirtschaftliche, in Stadt- und Marktschulen vorwiegend gewerbliche und einfache kaufmännische Rechnungen ihre angemessene Berücksichtigung finden. Die Berechtigung des Auftretens einzelner Abschnitte wird, wo es nöthig erscheint, an den betreffenden Orten ausführlicher nachgewiesen.

Eine genaue Abgrenzung und Austheilung der eben angedeuteten Übungsstoffe für jede einzelne der oberen Schulclassen, wie sie in den ersten vier Rechenbüchern für die unteren Classen stattfindet, erscheint bei der großen Verschiedenheit der Volksschulen in Beziehung auf die Classenanzahl und auf den künftigen Beruf ihrer Schüler nicht wohl möglich; es muss dem Ermessen des Lehrers überlassen werden, aus den Uebungsaufgaben durch verständiges Abwägen der größeren oder geringeren Wichtigkeit derselben und mit Rücksichtnahme auf die Bestimmungen des Lehrplanes die rechte Auswahl zu treffen.

Die Aufgaben über die Raumgrößenrechnungen sind mit der geometrischen Formenlehre an den geeigneten Orten und in den dafür bestimmten Schuljahren in Verbindung zu setzen.

Erster Abschnitt.

Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen.

§. 101.

Wir haben bisher auf jeder neuen Stufe des Unterrichtes zunächst eine passende Wiederholung der bereits vorgenommenen Übungen vorausgeschickt, weil nur dadurch erreicht werden kann, dass die Grundlagen des Rechnens schließlich ein unverlierbares Eigenthum aller Schüler werden. Wir bleiben auch hier diesem Grundsatze treu und nehmen, ehe wir an die Behandlung neuer Stoffe gehen, zuerst Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen und Decimalzahlen, mit ein- und mehrnamigen Zahlen vor,

Eine Erweiterung erhalten diese Wiederholungsübungen in den Multiplications- und Divisionsvortheilen, mit denen hier die Schüler bekannt gemacht werden können. Dabei beschränken wir uns jedoch auf jene wenigen Rechnungsvortheile, die sich sehr leicht ausführen und auch leicht im Gedächtnisse behalten lassen, während wir Vortheile, die eine große Gewandtheit im Rechnen voraussetzen, und bei deren Anwendung schwächere Schüler Irrungen ausgesetzt wären, unberücksichtigt lassen. Ferner kann hier die abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche vorgenommen werden.

Multiplicationsvortheile.

1. Wenn der Multiplicator 11 ist.

$$\begin{array}{r} 75216 \times 11 \\ 75216 \\ \hline 827376 \end{array} \qquad \text{kürzer:} \quad \begin{array}{r} 75216 \times 11 \\ \hline 827376 \end{array}$$

Man sieht, dass sich bei der Multiplication mit 11 das Product unmittelbar aus dem Multiplicand ableiten läßt, indem man nämlich die erste Ziffer rechts unverändert anschreibt, dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, und überhaupt zu jeder Stelle die nächst höhere addiert.

Man spricht dabei: 6 ist 6; 6 und 1 ist 7; 1 und 2 ist 3; 2 und 5 ist 7; 5 und 7 ist 12, 2 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 7 ist 8.

2. Wenn im Multiplicator die Ziffer 1 vorkommt.

$$\text{Statt:} \quad \begin{array}{r} 46037 \times 31 \\ \hline 46037 \\ 138111 \\ \hline 1427147 \end{array} \qquad \text{und} \quad \begin{array}{r} 195807 \times 148 \\ \hline 195807 \\ 783228 \\ 1566456 \\ \hline 28979436 \end{array}$$

kann man mit Vermeidung alles unnöthigen Wiederholens auch schreiben:

$$\begin{array}{r} 46037 \times 31 \\ 138111 \\ \hline 1427147 \end{array} \qquad \text{und} \quad \begin{array}{r} 195807 \times 148 \\ 783228 \\ 1566456 \\ \hline 28979436. \end{array}$$

Wenn daher der Miltiplicator die Ziffer 1 enthält, so läßt man den Multiplicand ungeändert als das erste Theilproduct stehen, multipliciert ihn dann mit den übrigen geltenden Ziffern des Multiplicators und schreibt die dadurch erhaltenen Theilproducte richtig darunter.

3. Wenn sich der Multiplicator in zwei Factoren zerlegen läßt, mit denen man leicht multiplicieren kann, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor des Multiplicators und dann das Product noch mit dem andern Factor.

Z. B. Es sei 49172 mit 32 zu multiplicieren. Da 32 = 8 × 4 ist, so erhält man das 32fache einer Zahl, wenn man von ihr zuerst das 8fache, und von diesem das 4fache sucht, d. h. wenn man die gegebene Zahl zuerst mit 8, und das Product noch mit 4 multipliciert; man hat daher

$$\begin{array}{rl} 49172 & \times\ 32 \\ \hline & \times\ 8 \\ 393376 & \\ \hline & \times\ 4 \\ 1573504 & \end{array}$$

Durch die Anwendung dieses Vortheils wird eine Addition erspart.

Abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche.

Sehr oft erfordert die Genauigkeit der Rechnung im Resultate nicht so viele Decimalstellen, als man bei vollständiger Entwicklung des Productes erhalten würde.

Um jede überflüssige Rechnung zu vermeiden und im Producte sogleich nur so viele Decimalen, als zur Genauigkeit erforderlich sind, zu erhalten, bedient man sich der abgekürzten Multiplication.

Es sei z. B. das Product 8·5432 × 7·961 in 3 Decimalen zu entwickeln. Nach der gewöhnlichen Multiplicationsweise hat man:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{8{\cdot}5432 \times 7{\cdot}961} \\
\hline
59{\cdot}802 & 4 \\
7{\cdot}688 & 88 \\
512 & 592 \\
8 & 5432 \\
\hline
68{\cdot}012 & 4152
\end{array}$$

Die hier rechts des Striches dargestellte Rechnung ist überflüssig. Um sie zu vermeiden, wird man mit jeder Ziffer des Multiplicators nur jene höheren Ziffern des Multiplicands multiplicieren, deren Producte auf die Stellen Einfluss haben, die im Producte verlangt werden. — Wenn man mit 7 Einern multipliciert, so wird man, um Tausendtel zu erhalten, bei der Ziffer 3 des Multiplicands, welche Tausendtel bedeutet, zu multiplicieren anfangen; denn 0·003 × 7 = 0·021. Das Product aus 7 mit der niedrigsten Ziffer 2 gibt 14 Zehntausendtel, welche man nicht braucht; da jedoch in dem Producte 14 nur die Einer 4 Zehntausendtel, die Zehner 1 aber Tausendtel vorstellen, so darf man von diesem Producte auch nur 4 vernachlässigen, 1 aber muss zu dem Producte aus 7 und · 3, welches Tausendtel gibt, als Correctur addiert werden. — Mit 9 Zehnteln muss man bei der Ziffer 4 des Multiplicands zu multiplicieren beginnen, um Tausendtel zu erhalten; denn 0·04 × 0·9 = 0·036. Ebenso muss man mit 6 Hunderteln bei der Ziffer 5, und mit 1 Tausendtel bei der Ziffer 8 des Multiplicands zu multiplicieren anfangen, um Tausendtel zu erhalten.

Setzen wir nun jede Ziffer des Multiplicators unter diejenige Stelle des Multiplicands, bei der wir zu multiplicieren beginnen müssen, so erhalten wir folgende Anordnung:

$$\begin{array}{l}
8{\cdot}5432 \times 7{\cdot}961 \\
\;\;1697 \\
\hline
\end{array}$$

Aus dieser Anschreibweise ersehen wir, dass die Ziffer der Einer des Multiplicators, nämlich 7, unter der dritten Decimale 3, also unter derjenigen Decimalstelle des Multiplicands steht, mit welcher das Product abbrechen soll, und dass die übrigen Ziffern des Multiplicators daneben in umgekehrter Ordnung erscheinen. Ferner geht daraus hervor, dass man, wenn mit einer Ziffer des umgekehrten Multiplicators die ober ihr stehende Ziffer des Multiplicands multipliciert wird, stets dieselbe Decimalstelle (hier Tausendtel) erhält, und dass man demnach die Theilproducte nicht, wie bei der gewöhnlichen Multiplication hinein oder heraus rücken, sondern wie Summanden unter einander anschreiben müsse.

Bei der abgekürzten Multiplication der Decimalbrüche verfahre man daher nach folgenden Regeln:

1. Man setze die Einer des Multiplicators unter die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands, welche noch im Producte vorkommen soll und schreibe daneben die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung.

2. Man multipliciere mit der ersten rechts vorkommenden Ziffer des umgekehrten Multlplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, schreibe jedoch dieses Product nicht an, sondern merke sich davon nur die nächsten Zehner, welche die Correctur bilden; dann multipliciert man die gerade darüberstehende Ziffer des Multiplicands, addiere zu dem Producte die Correctur, und fange hier das abgekürzte Theilproduct zu schreiben an; nun werden nach der Reihe auch die weiter aufwärts folgenden Ziffern des Multiplicands multipliciert. Ebenso multipliciert man dann mit der zweiten, dritten, ... Ziffer des umgekehrten Multiplicators und schreibt die einzelnen dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte als Summanden unter einander.

3. Man addiere die abgekürzten Theilproducte und schneide in der Summe die verlangte Anzahl Decimalen ab.

Die obige Rechnung stellt sich so:

$$\begin{array}{r} 8{\cdot}5432 \\ 1_{‚}6_{‚}9_{‚}7 \\ \hline 59802 \\ 7689 \\ 512 \\ 9 \\ \hline 68{\cdot}012 \end{array}$$

7mal 2 ist 14, gibt 1 zur Correctur; 7mal 3 ist 21, und 1 (Correctur) ist **22**; hier fängt man das Theilproduct zu schreiben an, und multipliciert dann mit 7 die weiteren Ziffern 4, 5, 8 des Multiplicands.

9mal 3 ist 27, gibt 3 zur Correctur (weil 27 näher an 3 Zehnern als an 2 Zehnern liegt); 9mal 4 ist 36, und 3 ist **39**; man schreibt 9 unter die niedrigste Ziffer 2 des ersten abgekürzten Theilproductes und multipliciert dann die weiteren Stellen des Multiplicands.

6mal 4 ist 24, gibt 2 zur Correctur; 6mal 5 ist 30, und 2 ist **32**; u. s. w.

1mal 5 ist 5, gibt 1 zur Correctur; 1mal 8 ist 8, und 1 ist **9**.

Wäre das Product 123·45 × 0·00678 in 4 Decimalstellen zu bestimmen, so hätte man:

$$\begin{array}{r} 123{\cdot}45_{0\,0} \times 0{\cdot}00678 \\ 8_{‚}7_{‚}6000 \\ \hline 7407 \\ 864 \\ 98 \\ \hline 0{\cdot}8369 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 0{\cdot}00678_{0} \times 123{\cdot}45 \\ 5_{‚}4_{‚}3_{‚}2_{‚}1 \\ \hline 6780 \\ 1356 \\ 203 \\ 27 \\ 3 \\ \hline 0{\cdot}8369 \end{array}$$

Hier kommen die Einer des Multiplicators unter die vierte Decimalstelle des Multiplicands die fehlenden Decimalen rechts im Multiplicand werden mit Nullen ersetzt.

Soll die letzte Stelle im Producte genau gefunden werden, so entwickle man um eine Decimale mehr, als verlangt wird.

Divisions- und nachträgliche Multiplicationsvortheile.

1. Wenn sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen läſst, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend durch den einen Factor des Divisors und den erhaltenen Quotienten noch durch den andern Factor.

Es sei z. B. 2688 durch 32 zu dividieren. $32 = 8 \times 4$; theilt man eine Zahl in 8 gleiche Theile, und jeden solchen Theil wieder in 4 gleiche Theile, so erhält man 32 gleiche Theile; um daher die Zahl 2688 durch 32 zu dividieren, dividiert man sie durch 8, und den Quotienten durch 4; also

$$\begin{array}{l} 2688 : 32 \\ \overline{} : 8 \\ 336 \\ \overline{} : 4 \\ 84 \end{array}$$

2. Division durch 25.

$25 \times 4 = 100$; der 4fache Divisor ist also 100; damit der Quotient ungeändert bleibe, muſs man auch den Dividend 4mal nehmen.

Eine Zahl wird demnach durch 25 dividiert, indem man sie mit 4 multipliciert und das Product durch 100 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{l} 9325 : 25 \\ \overline{} \times 4 \\ 37300 : 100 = 373 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 9325 : 25 \\ \overline{373{\cdot}00} \; (\times 4, : 100) \end{array}$$

3. Division durch 125.

$125 \times 8 = 1000$. Eine Zahl wird also durch 125 dividiert, indem man sie mit 8 multipliciert und das Product durch 1000 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{l} 72375 : 125 \\ \overline{} \times 8 \\ 579000 : 1000 = 579 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 72375 : 125 \\ \overline{579{\cdot}000} \; (\times 8, : 1000) \end{array}$$

4. Multiplication mit 25.

$25 = 100 : 4$. Wenn man also von dem 100fachen einer Zahl den 4ten Theil nimmt, so erhält man das 25fache dieser Zahl. Eine Zahl wird demnach mit 25 multipliciert, indem man sie mit 100 multipliciert und das Product durch 4 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{l} 7214_{00} \times 25 \\ \overline{\phantom{7214_{00} \times 2}} : 4 \\ 180350 \end{array}$$

5. Multiplication mit 125.

$125 = 1000 : 8$. Eine Zahl wird also mit 125 multipliciert, indem man sie mit 1000 multipliciert und das Product durch 8 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{l} 5938_{000} \times 125 \\ \overline{\phantom{5938_{000} \times 12}} : 8 \\ 742250 \end{array}$$

Abgekürzte Division der Decimalbrüche.

Soll der Quotient nur auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen entwickelt werden, so bedient man sich der abgekürzten Division. Dabei wende man folgendes Verfahren an:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und bestimme ihren Stellenwert. Da der Quotient eine bestimmte Anzahl Decimalen enthalten soll, so ist aus dem Stellenwerte der ersten Ziffer auch bekannt, wie viele Ziffern der verlangte Quotient im ganzen haben soll.

2. Man schneide im Divisor von der Linken angefangen so viele Ziffern ab, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll; diese bilden den abgekürzten Divisor. Hat der Divisor nicht so viele Ziffern, als ihrer abgeschnitten werden sollen, so tritt die abgekürzte Division erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

3. Man behalte auch im Dividend nur so viele Ziffern von der höchsten angefangen, als ihrer der Quotient haben soll, oder um eine mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividends nicht enthalten ist; jene beibehaltenen Ziffern sind der abgekürzte Dividend.

4. Man dividiere nach der gewöhnlichen Divisionsweise so lange fort, bis die letzte Ziffer des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde; hierauf schneide man bei jeder folgenden Division die niedrigste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab; die jedesmal gefundene Ziffer des Quotienten multipliciere man dann zuerst mit der höchsten im Divisor weggelassenen Ziffer und zähle die aus diesem Producte erhaltenen Zehner als Correctur zu dem ersten eigentlichen Producte dazu.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

Zur näheren Beleuchtung dieses Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen:

1) Der Quotient 19·339 : 8·1534 soll in 3 Decimalstellen bestimmt werden.

19·339 : 8·1,5,3|4 = 2·372
3032
586
15

Die erste Ziffer 2 des Quotienten bedeutet Einer, daher wird der Quotient im ganzen 4 Ziffern enthalten; der abgekürzte Divisor ist also 8153, und der abgekürzte Dividend 19339. Man multipliciert nun mit 2 den abgekürzten Divisor: 2mal 4 ist 8, gibt 1 zur Correctur; 2mal 3 ist 6, und 1 ist 7, und 2 ist 9; u. s. f. Dann schneidet man, anstatt dem Reste 3032 eine Null anzuhängen, im Divisor die niedrigste Ziffer 3 weg und dividiert 3032 durch 815, wodurch man 3 erhält; 3mal 3 ist 9, gibt 1 zur Correctur; 3mal 5 ist 15, und 1 ist 16, und 6 ist 22; u. s. w.

Die auf einander folgenden abgekürzten Dividende und Divisoren sind

19339 : 8153
3032 : 815
586 : 81
15 : 8

2) Es soll der Quotient 3·79357 : 13·8594 in 3 Decimalen gesucht werden.

3·79,357 : 1,3·,8,594 = 0·274
 102
   5

Da hier die erste Ziffer 2 des Quotienten Zehntel bedeutet, so muſs man im Quotienten 3 Ziffern entwickeln; man behält daher im Dividend und im Divisor nur die drei höchsten Stellen bei und dividiert dann abgekürzt.

Zweiter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 102.

Die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen kommt bei der Bruchrechnung vielseitig in Anwendung. Manche Lehrer pflegen darum das Wichtigste derselben an den geeigneten Orten bei den Brüchen selbst einzuschalten. Da aber dadurch der Zusammenhang der letzteren Lehre in störender Weise unterbrochen wird, so erscheint es angemessener, der Bruchrechnung die Theilbarkeit der Zahlen als einen besonderen Abschnitt vorauszuschicken.

Läſst sich eine Zahl durch eine andere Zahl ohne Rest dividieren, so sagt man, sie sei durch diese andere Zahl theilbar; man nennt dann die letztere Zahl ein Maß der ersteren und die erstere ein Vielfaches der letzteren. Z. B. 21 ist durch 3 theilbar, weil 3 in 21 genau 7mal enthalten ist und kein Rest übrig bleibt; 3 ist ein Maß von 21, und 21 ein Vielfaches (nämlich das 7fache) von 3.

Jede Zahl ist durch sich selbst und durch 1 theilbar.

Jene Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind, heißen Primzahlen; z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, u. s. w.

Welche sind die Primzahlen von 1 bis 100?

Zahlen, welche nicht nur durch sich selbst und durch 1, sondern auch noch durch eine andere Zahl theilbar sind, heißen zusammengesetzte Zahlen; z. B. 8 läſst sich durch 8 und 1, aber auch durch 2 und 4 ohne Rest dividieren, 8 ist also eine zusammengesetzte Zahl.

1. Wenn zwei Zahlen 24 und 18 ein gemeinschaftliches Maß 6 haben, so muſs auch ihre Summe 24 + 18 = 42 dadurch theilbar sein. Denn 6 ist in 24 4mal, in 18 3mal, in 24 + 18 also 4mal und 3mal d. i. 7mal enthalten.

2. Haben zwei Zahlen 24 und 15 ein gemeinschaftliches Maß, so muſs auch ihr Unterschied 24 — 15 = 9 dadurch theilbar sein. Denn 3 ist in 24 8mal, in 15 5mal, daher in 24 — 15 8mal weniger 5mal, d. i. 3mal enthalten.

3. Ist eine Zahl 24 durch eine andere 6 theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben, z. B. $24 \times 5 = 120$, durch dieselbe Zahl theilbar. Es ist nämlich 6 in 24 4mal, daher in 5mal 24 5mal so oft, also 20mal enthalten.

§. 103. Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen und Zerlegung in Primfactoren.

Bei kleineren Zahlen werden die Schüler sogleich anzugeben wissen, durch welche Zahlen sie theilbar sind. Für größere Zahlen gibt es besondere Kennzeichen, an denen man erkennen kann, ob sich dieselben durch eine bestimmte andere Zahl ohne Rest theilen lassen.

Wir lassen diese Kennzeichen, mit denen die Schüler hier bekannt gemacht werden sollen, nachstehend folgen und fügen denselben auch eine kurze Begründung bei.

1) 2 ist in 10 ohne Rest enthalten, daher auch in allen Vielfachen von 10, also in 20, 30, 40, . . ., in 100, 200, 300, . . ., in 1000, 2000, 3000, u. s. w. Wenn also eine Zahl bloß aus Zehnern, Hunderten, Tausenden, . . . zusammengesetzt ist, so ist sie gewiss durch 2 theilbar. Wenn nun von einer Zahl, welche man durch 2 dividiert, etwas übrig bleibt, so kann dieses nur von den Einern herkommen. Daher darf man, um zu erfahren, ob eine Zahl durch 2 theilbar sei, nur die Ziffer der Einer berücksichtigen; steht an der Stelle der Einer 0 oder eine durch 2 theilbare Zahl, nämlich 2, 4, 6 oder 8, so muss auch die ganze Zahl durch 2 theilbar sein.

2) Durch 3 ist eine Zahl theilbar wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist. Jede Zahl ist nämlich ein Vielfaches von 9, also auch von 3, vermehrt um die Ziffersumme dieser Zahl. Die Zahl 2475 z. B. besteht aus folgenden Theilen.

$$\begin{aligned} 2000 &= 2 \times 1000 = 2 \times 999 + 2 \\ 400 &= 4 \times 100 = 4 \times 99 + 4 \\ 70 &= 7 \times 10 = 7 \times 9 + 7 \\ 5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 5 \end{aligned}$$

In 999 ist nun 3 ohne Rest enthalten, daher auch in 2×999; ebenso geht 3 in 99, folglich auch in 4×99 ohne Rest auf; ferner ist 9 durch 3 theilbar, daher 7×9. Es bleibt daher noch die Ziffernsumme $2 + 4 + 7 + 5 = 18$ übrig, und da diese durch 3 theilbar ist, so ist es auch die ganze Zahl 2475.

Man bemerke noch den Schülern, dass sie bei der Addition der Ziffern die Ziffern 3, 6, 9 ganz übergehen können.

3) 4 ist in 100 ohne Rest enthalten, daher auch in den Vielfachen von 100, also in 200, . . ., in 1000, 2000, 3000 u. s. f. Es sind also die Hun-

derte, Tausende . . . einer Zahl jedesmal durch 4 theilbar. Sind nun auch die Zehner und Einer, d. i. die zwei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 4 theilbar, so muss auch die ganze Zahl durch 4 theilbar sein.

4) Durch 5 sind die Zehner, Hunderte, Tausende, . . . einer jeden Zahl theilbar. Es kommt also nur noch auf die Einer an; sind entweder 0 Einer da, oder 5 Einer, so ist die ganze Zahl durch 5 theilbar; sonst nicht.

5) Wenn eine Zahl nicht nur durch 2, sondern auch durch 3 theilbar ist, so muss sie auch durch 2×3, d. i. durch 6, theilbar sein. Welche Zahlen sind aber durch 2 und welche durch 3 theilbar? Durch 6 sind also alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

6) Durch 9 ist jede Zahl theilbar, deren Ziffernsumme durch 9 theilbar ist. Denn jede Zahl ist ein Vielfaches von 9, vermehrt um die Ziffernsumme dieser Zahl.

7) 10 ist in allen Zehnern, Hunderten, Tausenden, . . . ohne Rest enthalten. Sind nun in einer Zahl keine Einheiten vorhanden, so ist dieselbe durch 10 theilbar.

Die Kennzeichen für die Theilbarkeit durch andere, als die bisher betrachteten Zahlen sind minder einfach, und erfordern mehr Zeit zum Erklären, als sie deren in der praktischen Anwendung ersparen.

Jede zusammengesetzte Zahl kann in Primfactoren zerlegt, d. i. als ein Product von lauter Primzahlen dargestellt werden.

Um eine Zahl in Primfactoren zu zerlegen, dividiere man sie durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die gesuchten Primfactoren.

Sind z. B. die Primfactoren von 630 zu suchen, so hat man

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 = 315 & \text{oder} & 630 \mid 2 \\ 315 : 3 = 105 & & 315 \mid 2 \\ 105 : 3 = 35 & & 105 \mid 3 \\ 35 : 5 = 7 & & 35 \mid 5 \\ & & 7 \mid 7 \end{array}$$

Die nach und nach angewendeten Divisoren 2, 3, 3, 5 und der letzte Quotient 7 sind die Primfactoren, aus denen die zusammengesetzte Zahl 630 besteht; denn

$$630 = 2 \times 315 = 2 \times 3 \times 105 = 2 \times 3 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

§. 104. Größtes gemeinschaftliches Maß.

Ist eine Zahl in zwei oder mehreren Zahlen ohne Rest enthalten, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maß derselben; z. B. 5 ist ein gemeinschaftliches Maß von 15, 40 und 60. Die größte Zahl, welche in mehreren anderen Zahlen ohne Rest enthalten ist, wird das größte gemeinschaftliche Maß derselben genannt. So haben die Zahlen 36 und 60 die Zahlen, 2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinschaftlichen Maßen; 12 aber ist unter diesen die größte.

Haben zwei Zahlen außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maß, so heißen sie Primzahlen unter sich oder relative Primzahlen.

1. Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, zerlege man dieselben in Primfactoren, und suche unter diesen diejenigen heraus, welche in allen gegeben Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Product dieser Factoren ist gewiss ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen andern Factor hinzufügen würde, dieses Product nicht mehr in allen gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten wäre.

Ist z. B. das größte gemeinschaftliche Maß von 180 und 270 zu suchen, so hat man

180	2	270	2	
90	2	135	3	
45	3	45	3	gr. g. Maß $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$.
15	3	15	3	
5	5	5	5	

2. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Factoren gefunden werden.

Es sei das gr. g. Maß zwischen den beiden Zahlen 115 und 1495 zu suchen. Da dieses nicht größer sein kann, als die kleinere der beiden Zahlen, so versuchen wir zuerst, ob 115 in 1495 ohne Rest enthalten ist; wäre dieses der Fall, so ist 115 selbst das gesuchte gr. g. Maß.

$1495 : 115 = 13$	Die Division geht wirklich ohne Rest auf;
345	also ist 115 die größte Zahl, durch welche 115
	und 1495 gemeinschaftlich theilbar sind.

Dieser Fall wird jedoch nur selten vorkommen; meistens bleibt ein Divisionsrest übrig. Das Verfahren, durch welches in diesem letzteren Falle das gr. g. Maß der beiden Zahlen gefunden wird, gründet sich auf den Satz: Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest übrig bleibt, so ist das gr. g. Maß zwischen Divisor und Rest zugleich das gr. g. Maß zwischen Dividend und Divisor.

Man dividiere z. B. 1110 durch 481.

1110 : 481 = 2 daher a) 1110 — 481 × 2 = 148,
962 . . . 481 × 2 b) 481 × 2 + 148 = 1110.
148 Rest.

Haben hier der Dividend 1110 und der Divisor 481 ein gemeinschaftliches Maß, so ist dadurch nicht nur 1110 und 481 × 2, sondern auch der Rest 1110 — 481 × 2 d. i. nach a) der Rest 148 theilbar. Es ist also auch jene Zahl ein gemeinschaftliches Maß zwischen dem Divisor 481 und dem Reste 148.

Wenn umgekehrt der Divisor 481 und der Rest 148 irgend ein gemeinschaftliches Maß haben, so muss dadurch nicht nur 481 × 2 und 148, sondern auch die Summe 481 × 2 + 148, welche nach b) eben der Dividend 1110 ist, theilbar sein. Jene Zahl ist daher auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen dem Dividend 1110 und dem Divisor 481.

Der Dividend und der Divisor haben also immer dieselben gemeinschaftlichen Maße, wie der Divisor und der Rest; daher muss auch das gr. g. Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das gr. g. Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor sein.

Es sei nun das gr. g. Maß zwischen 481 und 1110 zu finden.

1110 : 481 = 2
148 Rest
481 : 148 = 3
37 Rest
148 : **37** = 4
0

oder

481	1110	2
37	148	3
	0	4

Dividiert man 1110 durch 481, so bleibt der Rest 143. Man weiß nun, dass der Dividend 1110 und der Divisor 481 dasselbe gr. g. Maß haben, wie der Divisor 481 und der Rest 148; man sucht also das gr. g. Maß zwischen 481 und 148. Zu diesem Ende dividiert man 481 durch 148, dabei erhält man wieder einen Rest 37, und es muss das gr. g. Maß zwischen dem Divisor 148 und dem Reste 37 zugleich das gr. g. Maß zwischen dem Dividend 481 und dem Divisor 148, daher auch zwischen 1110 und 481 sein. Man sucht daher das gr. g. Maß zwischen 148 und 37, indem man 148 durch 37 dividiert. Da diese Division ohne Rest aufgeht, so ist der Divisor 37 selbst das gr. g. Maß zwischen 148 und 37, daher auch zwischen 481 und 148, und somit auch zwischen 1110 und 481.

Aus dieser Entwicklung ergibt sich zur Auffindung des gr. g. Maßes zweier Zahlen nachstehendes Verfahren: Man dividiere die größere Zahl durch die kleinere; geht die Division ohne Rest auf, so ist die kleinere Zahl selbst das gr. g. Maß beider Zahlen. Bleibt aber ein Rest, so dividiert man den früheren Divisor durch diesen Rest. Bleibt noch ein Rest übrig, so dividiert man wieder den letzten Divisor durch den neuen Rest, und so fort immer den vorhergehenden

Divisor durch den neuen Rest, bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht. Der letzte Divisor ist dann das gr. g. Maß. Ist dieser letzte Divisor 1, so haben die beiden Zahlen außer 1 kein gemeinschaftliches Maß und sind demnach Primzahlen unter einander.

Das hier abgeleitete Verfahren ist unter dem Namen der Kettendivision bekannt.

§. 105. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

Wenn eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar ist, so heißt sie ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; z. B. 24 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Wenn die Schüler mehrere Zahlen mit einander multiplicieren und dann das Product durch jede dieser Zahlen dividieren, so gelangen sie zu der Überzeugung, dass das Product mehrerer Zahlen durch jede derselben theilbar ist. Das Product zweier oder mehrerer Zahlen ist jedoch nicht immer das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben. Sind z. B. die Zahlen 8 und 12 gegeben, so ist sicher das Product $8 \times 12 = 96$ durch 8 und durch 12 theilbar; allein es haben auch die kleineren Zahlen 72, 48 und 24 die Eigenschaft, dass sie sowohl durch 8 als durch 12 theilbar sind; 24 ist die kleinste dieser Zahlen.

Um die Rechnungen möglichst einfach durchzuführen, ist es oft von Wichtigkeit, zu gegebenen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, d. i. die kleinste Zahl zu finden, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist. Bei der Entwicklung des Verfahrens, nach welchem diese Aufgabe gelöst wird, beobachte man folgenden Stufengang:

1. Wenn von den gegebenen Zahlen alle kleineren in der größten ohne Rest enthalten sind, z. B. zwischen 2, 3, 5, 6, 15, 30. In diesem Falle ist die größte unter den Zahlen, hier 30, zugleich das kl. g. Vielfache derselben. Da nämlich alle gegebenen Zahlen in 30 ohne Rest enthalten sind, so ist 30 offenbar ein gemeinschaftliches Vielfaches jener Zahlen; 30 ist aber auch das kl. g. Vielfache dieser Zahlen, weil keine Zahl, die auch durch 30 theilbar sein soll, kleiner als 30 sein kann.

2. Wenn die gegebenen Zahlen kein gemeinschaftliches Maß haben, z. B. 5 und 7, oder 3, 8 und 25. In diesem Falle ist das Product der Zahlen selbst auch ihr kl. g. Vielfaches.

3. Wenn die gegebenen Zahlen sämmtlich oder theilweise ein gemeinschaftliches Maß haben.

Es sei z. B. zwischen 6 und 10 das k. g. Vielfache zu suchen. $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$. Das Product $2 \times 3 \times 2 \times 5 = 60$ ist gewiss ein gemeinschaftliches Vielfaches von 6 und 10. Allein man erhält eine noch kleinere, durch 6 und durch 10 theilbare Zahl, wenn man den gemeinschaftlichen Factor beider Zahlen, nämlich 2, einmal weglässt; denn das Product $2 \times 3 \times 5 = 30$ enthält die Factoren 2 × 3, ist also durch 6 theilbar; es enthält aber auch die Factoren 2 × 5, und ist folglich auch durch 10 theilbar. Wir wollen nun sehen, ob es noch eine kleinere Zahl geben kann, welche durch 6 und durch 10 theilbar wäre; lässt man in dem Producte 2 × 3 × 5 den Factor 2 weg, so enthält das Product der übrigbleibenden Factoren weder die Factoren von 6, noch jene von 10, dasselbe ist also weder durch 6 noch durch 10 theilbar; lässt man den Factor 3 weg, so ist das Product nicht mehr durch 6, lässt man 5 weg, so ist dasselbe nicht mehr durch 10 theilbar. Damit also die neue Zahl durch 6 und durch 10 theilbar sei, muss sie nothwendig die Factoren 2, 3 und 5 enthalten: folglich ist das Product 2 × 3 × 5 das kl. g. Vielfache von 6 und 10. — Die Factoren, welche dieses kl. g. Vielfache enthält, sind das gemeinschaftliche Maß 2 der beiden vorgelegten Zahlen, und zwar nur einmal, und die Quotienten 3 und 5, welche man erhält, wenn man die gegebenen Zahlen durch ihr gemeinschaftliches Maß 2 dividiert.

Ist ferner das kl. g. Vielfache der Zahlen 18, 20, 25 zu suchen, so lassen sich erstlich 18 und 20 durch 2 dividieren; für das kl. g. Vielfache zwischen 18 und 20 erhält man also die Factoren 2, 9 und 10, zu welchen man, damit die neue Zahl auch durch 25 theilbar sei, noch den Factor 25 dazusetzen muss. Das Product 2 × 9 × 10 × 25 ist nun ein gemeinschaftliches Vielfaches von 18, 20 und 25, aber nicht das kleinste; denn 10 und 25 haben noch den gemeinschaftlichen Factor 5, den man daher einmal weglassen kann; man dividiert also 10 und 25 noch durch 5, wodurch man die Quotienten 2, 5 und den gemeinschaftlichen Factor 5 erhält. Der frühere Quotient 9 wird, da er durch 5 nicht theilbar ist, ungeändert beibehalten. Die Factoren, aus denen das kl. g. Vielfache der Zahlen 18, 20 und 25 besteht, sind daher die beiden gemeinschaftlichen Maße 2 und 5, durch welche dividiert wurde, und die Quotienten 9, 2, 5; das gesuchte kl. g. Vielfache ist also 2 × 5 × 9 × 2 × 5 = 900.

18,	20,	25	
9,	10,	25	2
9,	2,	5	5

Sind die gebenen Zahlen so beschaffen, dass einige kleinere Zahlen in den größeren ohne Rest enthalten sind, z. B. 2, 3, 4, 5, 8, 18, 20; so kann man bei der Auffindung des kl. g. Vielfachen jene kleineren Zahlen sogleich weglassen; denn die Zahl, welche z. B. durch 20 theilbar ist, wird gewiss auch durch 2, 4 und 5 theilbar sein; eben so ist jedes Vielfache von 18 gewiss auch ein Vielfaches von 3. Man braucht daher hier nur das kl. g. Vielfache zwischen 8, 18 und 20 zu suchen, da dieses zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen ist.

~~2~~,	~~3~~,	~~4~~,	~~5~~,	8,	18,	20	
				4,	9,	10	2
				2,	9,	5	2

2 × 9 × 5 × 2 × 2 = 360

Aus mehreren solchen Beispielen werden die Schüler folgendes *allgemeine Verfahren zur Auffindung des kl. g. Vielfachen mehrerer Zahlen abstrahieren:*

Man schreibt die gegebenen Zahlen in eine Reihe, streicht die kleineren, welche in anderen größeren ohne Rest enthalten sind, durch, und dividiert die übrigen, wenn mehrere von ihnen ein gemeinschaftliches Maß haben, durch dasselbe. Jene Zahlen, welche durch dieses Maß nicht theilbar sind, werden unverändert heruntergesetzt; von den übrigen kommen nur die Quotienten herab. Wenn von den erhaltenen neuen Zahlen zwei oder mehrere durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind, so werden sie wieder dadurch dividiert. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, als noch zwei Zahlen durch dieselbe Zahl theilbar sind. Endlich multipliciert man die zuletzt erhaltenen Zahlen und die Maße, durch welche dividiert wurde, und die man rechts neben den einzelnen Zahlenreihen angeschrieben hat, mit einander; das Product ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

---

§. 106. Allgemeine Bemerkungen.

Durch die auf den früheren Stufen vorgenommenen Übungen im Rechnen mit einfacheren Brüchen ist eine feste Grundlage für die nun folgende allgemeine Behandlung der gemeinen Brüche geschaffen worden. Die Schüler haben durch unmittelbare Anschauung die Bedeutung der gewöhnlichsten Brüche erkannt und mit denselben rechnen gelernt. Die Gesetze, die sie dort für einfachere Brüche aus der Anschauung abgeleitet haben, sollen nun auf alle möglichen Brüche übertragen werden. Die Beschränkung in den Nennern fällt weg, die Anschauung tritt mehr in den Hintergrund. Auch wird den Eintheilungsgrund der Übungen nicht der Nenner, sondern die Operation bilden.

Wenn auch hier alle möglichen Nenner zulässig sind, werden wir im allgemeinen dennoch kleinere Nenner wählen, weil Brüche mit sehr großen Nennern keinen praktischen Wert haben. Überhaupt soll sich der Lehrer in Beziehung auf die Ausdehnung dieser Unterrichtsstufe stets gegenwärtig halten, dass durch die Einführung der metrischen Maße und Gewichte die gemeinen Brüche, wiewohl sie ein vorzügliches formales Bildungsmittel bleiben, von geringerer praktischer Bedeutung erscheinen, dass dagegen an ihrer Stelle die Decimalbrüche an Wichtigkeit gewinnen. Es wird sich darum empfehlen, bei der Behandlung der gemeinen Brüche überall auch die Beziehungen derselben zu den Decimalbrüchen entsprechend hervorzuheben, weil dadurch das deutlichere Verständnis beider gefördert wird, und in vielen praktischen Rechnungen gemeine und Decimalbrüche gleichzeitig zur Anwendung kommen.

Beim schriftlichen Rechnen halte der Lehrer auf feststehende Formen, um die Rechnungen übersichtlich zu machen und die Schüler an Ordnung in der Darstellung zu gewöhnen.

An ein-, zwei- und dreiclassigen Volksschulen wird hier von dem Übungsstoffe über die gemeinen Brüche nur dasjenige herauszuheben sein, was bereits auf den früheren Stufen geübt wurde.

§. 107. Wesen und Arten der Brüche.

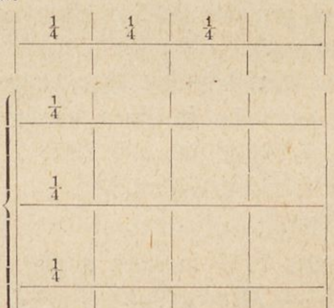
Bei der bisherigen Auffassung des Bruches sind wir immer von einem Ganzen ausgegangen, indem wir dasselbe in mehrere gleiche Theile theilten und einen oder mehrere solche Theile nahmen. Die Brüche lassen jedoch auch noch eine andere Auffassung zu, indem man sie unmittelbar aus mehreren Ganzen durch Theilung entstehen lässt. Bisher haben wir uns z. B. unter dem Bruche $\frac{3}{4}$ 3mal den 4ten Theil von 1 Ganzen vorgestellt; $\frac{3}{4}$ kann aber auch als der 4te Theil von 3 Ganzen, oder als der angezeigte Quotient 3 : 4 angesehen werden.

Diese zweite Auffassung, welche für viele Fälle von Wichtigkeit ist, ergibt sich durch ganz einfache Schlüsse unmittelbar aus der ersten Vorstellungsweise. Wie viel ist der 4te Theil von 3 Ganzen? Der 3te Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{4}$; der 4te Theil von 3 Ganzen ist 3mal so viel, also 3mal $\frac{1}{4}$, d. i. $\frac{3}{4}$; es ist somit $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

Die doppelte Auffassung eines Bruches kann den Schülern auch durch getheilte Linien anschaulich gemacht werden.

$^3/_4$ = 3mal der 4te Theil von 1

$^3/_4$ = der 4te Theil von 3



Ich erhalte den Bruch $\frac{3}{4}$, wenn ich von 1 Ganzen den 4ten Theil 3mal nehme; ich erhalte aber $\frac{3}{4}$ auch dadurch, dass ich von 3 Ganzen den 4ten Theil einmal nehme.

Jeder Bruch kann demnach als eine angezeigte Division angesehen werden, worin der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor erscheint.

Nun werden die Schüler auch den Grund einsehen, warum man bei der Division ganzer Zahlen, wenn ein Rest übrig bleibt, unter diesen den Divisior schreibt, und den dadurch gebildeten Bruch zu dem ganzen Quotienten hinzufügt.

Mit der Eintheilung der Brüche in echte und unechte, in gleichnamige und ungleichnamige sind die Schüler bereits bekannt gemacht worden.

§. 108. Verwandlung unechter Brüche in ganze oder gemischte Zahlen, und umgekehrt.

a) Unechte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln.

Nachdem die Schüler eingesehen haben, dass jeder unechte Bruch ein oder mehrere Ganze in sich enthält, liegt die Frage nahe, wie man bei jedem vorgelegten unechten Bruche sogleich bestimmen könne, wie viele Ganze in demselben vorkommen.

Dass Brüche, worin Zähler und Nenner gleich sind, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{15}$ u. s. w., gerade ein Ganzes enthalten, geht unmittelbar aus dem Begriffe eines Bruches hervor.

Man lasse nun untersuchen, wie viel Ganze z. B. in $\frac{38}{5}$ enthalten sind.

Im Kopfe: 5 Fünftel sind 1 Ganzes: $\frac{38}{5}$ sind daher so vielmal 1 Ganzes, als $\frac{5}{5}$ in $\frac{38}{5}$ enthalten sind; $\frac{5}{5}$ sind in $\frac{38}{5}$, wie 5 in 38, 7mal enthalten und $\frac{3}{5}$ bleiben übrig; also sind $\frac{38}{5} = 7$mal 1 Ganzes, d. i. 7 Ganze und noch $\frac{3}{5}$.

Schriftlich: Entweder mittels derselben Schlüsse, wie beim mündlichen Rechnen, oder aus der Auffassung des Bruches als angezeigter Quotient, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

$$\frac{38}{5} = 38 : 5 = 7\frac{3}{5}.$$

b) Ganze und gemischte Zahlen in unechte Brüche zu verwandeln.

Mündlich:

Verwandle 5 Ganze in Viertel. — 1 Ganzes = 4 Viertel, 5 Ganze sind daher 5mal 4 Viertel = 20 Viertel; also $5 = \frac{20}{4}$.

Ist eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch zu verwandeln, so verwandelt man zuerst die Ganzen in solche Bruchtheile, wie sie der gegebene Bruch enthält, und addiert dazu die schon vorhandenen Bruchtheile.

Es sei z. B. $7\frac{3}{8}$ in einen unechten Bruch zu verwandeln. — 1 Ganzes = 8 Achtel, 7 Ganze sind also 7mal 8 Achtel = 56 Achtel, und 3 Achtel dazu, sind 59 Achtel; folglich $7\frac{3}{8} = \frac{59}{8}$.

Schriftlich:

Verwandle $71\frac{17}{32}$ in einen unechten Bruch.

$$\begin{array}{r} 71 \\ 32 \\ \hline 142 \\ 213 \\ \hline 2272 \\ +\ 17 \\ \hline 2289 \end{array} \qquad 71\frac{17}{32} = \frac{2289}{32}.$$

§. 109. Vergleichung des Wertes der Brüche von gleichem Nenner oder von gleichem Zähler.

Die hier folgenden Übungen sind für die ganze Bruchrechnung von großer Wichtigkeit, und daher mit besonderer Sorgfalt durchzuarbeiten.

a) Vergleichung von Brüchen mit gleichem Nenner.

Der Lehrer lege zuerst gleichnamige Brüche von beliebigem Zähler vor, und lasse ihre Bedeutung angeben; z. B. $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{11}$.

Von zwei Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist derjenige der größere, welcher den größeren Zähler hat.

Hierauf lasse man an einem gegebenen Bruche, z. B. $\frac{2}{5}$, den Zähler mit 2, 3, 4, 5, 6 . . . multiplicieren und die Werte der dadurch gebildeten Brüche, näher untersuchen:

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{10}{5}, \frac{12}{5}, \ldots$$

In $\frac{4}{5}$ ist der Zähler 2mal so groß als in $\frac{2}{5}$; der Wert des Bruches $\frac{4}{5}$ ist auch 2mal so groß als der Wert von $\frac{2}{5}$. In $\frac{6}{5}$ ist der Zähler 3mal so groß, als in $\frac{2}{5}$; der Bruch $\frac{6}{5}$ hat ebenfalls den 3fachen Wert von $\frac{2}{5}$; u. s. w. Multipliciert man also den Zähler eines Bruches mit 2, 3, 4, . . ., so wird auch der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliciert. Um daher einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, darf man nur seinen Zähler mit dieser Zahl multiplicieren.

Umgekehrt lasse man den Zähler eines Bruches, z. B. $\frac{60}{7}$, durch 2, 3, 4, 5 . . . dividieren und die erhaltenen Brüche vergleichen:

$$\frac{60}{7}, \frac{30}{7}, \frac{20}{7}, \frac{15}{7}, \frac{12}{7}, \ldots$$

In $\frac{30}{7}$ ist der Zähler die Hälfte des Zählers in $\frac{60}{7}$; der Wert des Bruches $\frac{30}{7}$ ist auch nur die Hälfte von $\frac{60}{7}$. In $\frac{20}{7}$ ist der Zähler der dritte Theil des Zählers in $\frac{60}{7}$; der Bruch $\frac{20}{7}$ hat auch nur den dritten Theil des Wertes von $\frac{60}{7}$; u. s. w. Dividiert man daher den Zähler eines Bruches durch 2, 3, 4, . . ., so wird auch der Wert des Bruches durch dieselbe Zahl dividiert. Um also einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, braucht man nur den Zähler dadurch zu dividieren.

Diese Art der Division ist jedoch nicht immer anwendbar.

b) Vergleichung von Brüchen mit gleichem Zähler.

Was ist mehr: $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{5}$?

Je weniger Theile wir aus einem Ganzen machen, desto größer werden die Theile; in je mehr Theile wir das Ganze theilen, desto kleiner werden die Theile. $\frac{1}{4}$ ist also mehr als $\frac{1}{5}$, darum sind auch $\frac{3}{4}$ mehr als $\frac{3}{5}$.

Von zwei Brüchen, welche gleiche Zähler haben, ist derjenige der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

Der Lehrer lasse nun an einem Bruche, z. B. $\frac{5}{6}$, den Nenner mit 2, 3, 4, 5, 6, . . . multiplicieren, und die Bedeutung der entstehenden neuen Brüche näher betrachten:

$$\frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{5}{24}, \frac{5}{30}, \frac{5}{36}, \ldots$$

In $\frac{5}{12}$ ist der Nenner 2mal so groß als in $\frac{5}{6}$; der Bruch $\frac{1}{12}$ ist aber nur die Hälfte von $\frac{1}{6}$, daher auch $\frac{5}{12}$ die Hälfte von $\frac{5}{6}$. In $\frac{5}{18}$ ist der Nenner 3mal so groß als in $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{18}$ ist jedoch nur der dritte Theil von $\frac{1}{6}$, daher auch $\frac{5}{18}$ der dritte Theil von $\frac{5}{6}$ u. s. w. Multipliciert man also den Nenner eines Bruches mit 2, 3, 4, . . . so wird der Wert des Bruches durch diese Zahl dividiert. Um daher einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, braucht man nur den Nenner mit dieser Zahl zu multiplicieren.

Läſst man endlich an einem Bruche, z. B. $\frac{13}{60}$, den Nenner durch 2, 3, 4, 5, . . . dividieren, und den Wert der Brüche

$$\frac{13}{60}, \frac{13}{30}, \frac{13}{20}, \frac{13}{15}, \frac{13}{12}, \frac{13}{10}, \ldots$$

näher untersuchen, so ergibt sich durch ähnliche Schlüsse folgendes:

Dividiert man den Nenner eines Bruches durch 2, 3, 4, . . . so wird der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliciert. Um daher einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, darf man nur den Nenner durch diese Zahl dividieren.

Diese Art der Multiplication kann übrigens nur in selteneren Fällen angewendet werden.

Nachdem die voranstehenden Ergebnisse wiederholt werden, faſst man dieselben in folgende, dem Gedächtnisse leicht einzuprägende zwei Sätze zusammen:

Multiplication oder Division des Zählers ist dieselbe Rechnung an dem Bruche.

Multiplication oder Division des Nenners ist die entgegengesetzte Rechnung an dem Bruche.

§. 110. Erweitern der Brüche.

In dem Vorstehenden wurde gezeigt, welche Wertveränderung ein Bruch durch die Änderung seines Zählers oder Nenners erleidet; nun soll auch die Formveränderung, welche mit einem Bruche ohne Änderung seines Wertes vorgenommen werden kann, in Betrachtung gezogen werden. Hierher gehört das Erweitern und Gleichnamigmachen, das Abkürzen der Brüche, endlich das Verwandeln gemeiner Brüche in Decimalbrüche, und umgekehrt.

Wir beginnen mit dem Erweitern der Brüche.

Die Schüler haben schon bei den Vorübungen an den getheilten Linien gesehen, daſs z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12},$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

ist. Diese Ergebnisse wird man hier wiederholen und aus denselben folgern lassen, daſs der Wert der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ nicht geändert wird, wenn man Zähler und Nenner mit 2, oder mit 3, oder mit 4, u. s. w. multipliciert, daſs ferner die Nenner der gleichwertigen Brüche immer Vielfache der ursprünglichen Nenner sind.

Um z. B. $\frac{2}{3}$ in Zwölftel zu verwandeln, mache ich aus jedem Drittel 4 Zwölftel; da aber die neuen Theile 4mal kleiner sind, muſs ich, um $\frac{2}{3}$ in den neuen Theilen darzustellen, 4mal so viele Theile, also $\frac{8}{12}$ nehmen.

Dieselben Schlüsse lassen sich auf Brüche von beliebigen Nennern ausdehnen. Z. B. $\frac{7}{12}$ enthält 7mal den 12. Theil eines Ganzen. Zerlege ich nun jedes Zwölftel in 5 gleiche Theile, so zerfällt das Ganze in 60 gleiche Theile und ist daher jeder derselben $\frac{1}{60}$. Da aber die neuen Theile nur $\frac{1}{5}$ der früheren Theile sind, so muss ich, um den Wert von $\frac{7}{12}$ zu erhalten, 5mal so viele neue Theile nehmen, als deren $\frac{1}{12}$ hat, also 5mal $7 = 35$ Sechzigstel; folglich $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$. Die Vergleichung dieser Brüche zeigt, dass der zweite den 5fachen Zähler und den 5fachen Nenner des ersten hat. **Der Wert eines Bruches wird daher nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.**

Dieser Satz kann auch so begründet werden: Multipliciere ich in $\frac{7}{12}$ den Zähler mit 5, so erhalte ich den 5fachen Wert des Bruches; multipliciere ich den Nenner mit 5, so erhalte ich nur den 5ten Theil des Wertes des Bruches; multipliciere ich nun Zähler und Nenner mit 5, so erhalte ich vom 5fachen Werte den 5ten Theil, d. i. den einfachen Wert des Bruches selbst.

Zur noch größeren Überzeugung kann man auch folgende Guldenbrüche

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{5}{10},\ \frac{10}{20},\ \frac{25}{50}$$

betrachten lassen, die alle aus dem ersten entstehen, indem man darin Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert. Drückt man jeden dieser Brüche durch Kreuzer aus, so findet man, dass sie alle gleichviel bedeuten.

Durch die Multiplication des Zählers und des Nenners eines Bruches wird der Bruch mit größeren Zahlen ausgedrückt; er ändert seine Form, der Wert desselben aber bleibt unverändert. Diese Formveränderung nennt man das **Erweitern** des Bruches.

Nachdem die Schüler mehrere Brüche mit beliebigen **gegebenen** Zahlen erweitert, und die Überzeugung erlangt haben, dass man dadurch jeden Bruch ohne Veränderung seines Wertes mit sehr verschiedenen Nennern darstellen könne, welche jedoch alle ein Vielfaches ihres ursprünglichen Nenners sind, werden sie nun angeleitet, jeden vorgelegten Bruch in einen andern mit einem bestimmten Nenner zu verwandeln, und zu diesem Zwecke erst die Erweiterungszahl zu suchen.

Es soll z. B. der Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Bruch, dessen Nenner 72 ist, verwandelt werden.

Mündlich: 1 Ganzes $= \frac{72}{72}$, 1 Achtel hat nur den 8ten Theil von 72, also 9 Zweiundsiebzigstel, 5 Achtel sind 5mal $9 = 45$ Zweiundsiebzigstel; folglich $\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$.

Schriftlich: Entweder durch gleiche Schlüsse, wie beim mündlichen Rechnen. Oder:

Mit welcher Zahl muss man den Nenner des Bruches $\frac{5}{8}$ multiplicieren, damit man im Nenner 72 bekomme? Wie vielmal 8 ist 72, oder, wie oft ist 8 in 72 enthalten? Damit man also den Nenner 72 bekomme, muss der frühere

Nenner 8 mit 9 multipliciert werden; was muſs dann auch mit dem Zähler geschehen, damit der Wert des Bruches unverändert werde? Man hat also

$1 = \frac{72}{72}$. Oder: $72 : 8 = 9$

$\frac{1}{8} = \frac{9}{72}$; $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{45}{72}$.

$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$.

Der erste Ansatz schließt sich an den Gedankengang des mündlichen Rechnens an.

§. 111. Gleichnamigmachen der Brüche.

Um Brüche rücksichtlich ihres Wertes vergleichen, um sie addieren und subtrahieren zu können, müssen sie gleiche Nenner haben. Ist dies noch nicht der Fall, so müssen sie gleichnamig gemacht werden.

Das Gleichnamigmachen der Brüche ist eine Anwendung des Erweiterns derselben; schon bei diesem wurde den Schülern gezeigt, wie ein Bruch mit einem andern *gegebenen* Nenner, der ein Vielfaches des früheren ist, dargestellt werden könne. Der Lehrer schicke daher auch hier zunächst einige Aufgaben voraus, in denen er selbst den gemeinschaftlichen Nenner angibt, auf den zwei oder mehrere Brüche gebracht werden sollen.

Hierauf lasse er von den Schülern selbst den *gemeinschaftlichen Nenner*, d. i. eine Zahl *suchen*, welche ein *gemeinschaftliches Vielfaches* aller gegebenen Nenner, welche also durch alle gegebenen Nenner ohne Rest theilbar ist.

Um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, pflegt man die Brüche immer mit dem *kleinsten* gemeinschaftlichen Nenner darzustellen. Bei der Aufsuchung desselben sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. *Wenn alle kleineren Nenner in dem größten ohne Rest enthalten sind.*

In diesem Falle ist der *größte Nenner* selbst der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Es seien z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{12}$ gleichnamig zu machen.

Mündlich: Drittel und Viertel lassen sich in Zwölftel verwandeln. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, also $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, also $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Statt der Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{12}$ haben wir daher $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ und $\frac{5}{12}$.

Schriftlich:

$1 = \frac{12}{12}$.

$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$;

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$;

$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$.

Oder:

	12		
$\frac{2}{3}$	4	8	$\frac{8}{12}$
$\frac{3}{4}$	3	9	$\frac{9}{12}$
$\frac{5}{12}$	1	5	$\frac{5}{12}$

Die erste Darstellungsweise entspricht dem Gedankengange des mündlichen Rechnens.

2. *Wenn die Nenner durch keine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind.*

Dann ist das **Product der Nenner** zugleich der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$.

Viertel und Fünftel lassen sich in Zwanzigstel verwandeln; $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, also $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

Schriftlich: $4 \times 5 = 20$.

$1 = \frac{20}{20}$.

$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$;

$\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

Oder:

	20		
$\frac{3}{4}$	5	15	$\frac{15}{20}$
$\frac{2}{5}$	4	8	$\frac{8}{20}$

3. **Wenn alle oder einige Nenner durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind.**

Es seien z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{20}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Man sucht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner; dieses ist dann der kleinste gemeinschaftliche Nenner der gegebenen Brüche.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3},\ 6,\ 15,\ 20 & \\ \hline \cancel{3},\ 15,\ 10 & 2 \\ \hline 3,\ 2 & 5 \end{array}$$

der kl. gemeinsch. Nenner ist $3 \times 2 \times 2 \times 5 = 60$.

$1 = \frac{60}{60}$.

$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$, $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$;

$\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$;

$\frac{1}{15} = \frac{4}{60}$, $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$;

$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$, $\frac{13}{20} = \frac{39}{60}$.

Oder:

	60		
$\frac{2}{3}$	20	40	$\frac{40}{60}$
$\frac{5}{6}$	10	50	$\frac{50}{60}$
$\frac{7}{15}$	4	28	$\frac{28}{60}$
$\frac{13}{20}$	3	39	$\frac{39}{60}$

Nachdem die Schüler im Gleichnamigmachen der Brüche geübt wurden, sollen sie diese Kenntnis sofort verwerten, indem man sie die Werte von Brüchen, welche verschiedene Nenner haben und daher gleichnamig gemacht werden müssen, vergleichen läszt.

§. 112. Abkürzen der Brüche.

Dasz **der Wert eines Bruches ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert**, dasz z. B. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ist, wird den Schülern an Linien und Guldentheilen eben so anschaulich gemacht, wie dies bei der Erweiterung der Brüche in Bezug auf die Multiplication angedeutet wurde.

Die Formveränderung eines Bruches mittels der Division des Zählers und des Nenners durch dieselbe Zahl wird das **Abkürzen** des Bruches genannt. Durch das Abkürzen wird ein Bruch in kleineren Zahlen dargestellt.

Die Form eines Bruches kann demnach, mit Beibehaltung seines Wertes, auf zweifache Art verändert werden, indem man entweder Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert, oder indem man beide durch dieselbe Zahl dividiert, also durch die Erweiterung oder durch das Abkürzen. Dabei ändern sich zwar die Zahlen, durch welche Zähler und Nenner ausgedrückt sind; der Wert des Bruches bleibt jedoch ungeändert, der Bruch erhält nur eine andere Form. Es kann dadurch der Wert eines jeden Bruches auf unendlich vielfache Art dargestellt werden. Wozu dient das Erweitern der Brüche? Wozu das Abkürzen?

Man bemerke noch, dass zwar ein Bruch mit jeder beliebigen Zahl erweitert, aber nicht durch jede beliebige Zahl abgekürzt werden könne, da der dadurch entstehende Bruch ganze Zahlen zum Zähler und zum Nenner haben soll. Das Abkürzen kann nur durch solche Zahlen vorgenommen werden, durch welche Zähler und Nenner theilbar sind.

Die Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen (§. 103) sind hier zu wiederholen.

§. 113. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

Hier werden die Schüler zunächst auf den Unterschied und die Beziehung zwischen den Decimal- und gemeinen Brüchen aufmerksam gemacht. Die gemeinen Brüche können was immer für eine ganze Zahl zum Nenner haben, der Nenner der Decimalbrüche kann nur 10, 100, 1000 . . . überhaupt 1 mit darauffolgenden Nullen sein. Bei den gemeinen Brüchen wird der Nenner unter den Zähler angeschrieben und zwischen beide ein Strich gesetzt; bei den Decimalbrüchen fällt dieser Strich, sowie der Nenner weg, es wird nur der Zähler angeschrieben, und der Nenner bloß dadurch angezeigt, dass man in dem Zähler von der Rechten angefangen durch einen Punkt so viel Ziffern als Decimalen abschneidet, als im Nenner Nullen neben der Einheit vorkommen.

a) Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Jeder gemeine Bruch kann in einen Decimalbruch verwandelt, d. h. durch Ganze, Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. ausgedrückt werden.

Bei einigen Brüchen ist diese Verwandlung ganz einfach. Es sei z. B. $\frac{1}{2}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln. Wie viel Zehntel hat ein Ganzes? Wie viel Zehntel hat daher ein Halbes? Es ist also

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{\cdot}5.$$

Verwandle $\frac{3}{4}$ in Hundertel. Ein Ganzes hat 100 Hundertel, $\frac{1}{4}$ hat 25 Hundertel, $\frac{3}{4}$ sind 75 Hundertel; folglich $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{\cdot}75$.

Bei anderen Brüchen, welche sich nicht so einfach in Decimalbrüche verwandeln lassen, darf man nur das ausführen, was der Bruch in der Auffassung als Quotient anzeigt, nämlich den Zähler durch den Nenner wirklich dividieren; dadurch erhält man nebst den Ganzen folgeweise die Zehntel, Hundertel, . . ., wenn man nur den jedesmaligen Rest entsprechend resolviert, was beim schriftlichen Rechnen durch Anhängen einer Null geschieht. Es sei z. B. $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

$\frac{5}{8} = 5_0 : 8 = 0{\cdot}625$
20
40
=

Der 8te Theil von 5 Ganzen sind 0 Ganze; man schreibt in den Quotienten die 0 und setzt den Decimalpunkt dazu. 5 Ganze = 50 Zehntel; der 8te Theil von 50 Zehnteln sind 6 Zehntel, Rest 2 Zehntel. 2 Zehntel = 20 Hundertel; der 8te Theil von 20 Hunderteln sind 2 Hundertel, Rest 4 Hundertel. 4 Hundertel = 40 Tausendtel; der 8te Theil von 40 Tausendteln sind genau 5 Tausendtel. Der 8te Theil von 5 ist also = 0·625.

Es soll nun der unechte Bruch $\frac{357}{25}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden. Dividiert man 357 durch 25, so erhält man zunächst 14 Ganze zum Quotienten und 7 Ganze zum Reste.

$\frac{357}{25} = 357 : 25 = 14{\cdot}28$
107
70
200
=

7 Ganze sind 70 Zehntel; diese durch 25 dividiert geben 2 Zehntel, welche man in den Quotienten schreibt, nachdem man nach den 14 Ganzen den Decimalpunkt angebracht hat, und es bleiben noch 20 Zehntel durch 25 zu dividieren übrig. 20 Zehntel sind 200 Hundertel, welche durch 25 dividiert 8 Hundertel zum Quotienten geben und keinen Rest zurücklassen. Es ist daher $\frac{357}{25} = 14{\cdot}28$.

Bisher sind solche Beispiele gewählt worden, wo die Division zuletzt ohne Rest aufgeht, was nur dann eintritt, wenn der Nenner des gemeinen Bruches 2 oder 5 oder ein Product ist, das keinen von 2 oder 5 verschiedenen Factor enthält. Nun lege man auch Brüche vor, bei denen dieses nicht stattfindet, und die sich daher nicht ganz genau in Decimalbrüche verwandeln lassen. Die Schüler werden bald bemerken, dass in diesem Falle bei fortgesetzter Division in dem daraus hervorgehenden Decimalbruche dieselben Ziffern wiederkehren. Es wird ihnen auch gesagt, dass solche Decimalbrüche periodische Decimalbrüche heißen, und dass die Periode entweder gleich mit der ersten oder auch erst mit einer späteren Decimalstelle beginnt.

Eine nähere Untersuchung über die Beschaffenheit der periodischen Decimalbrüche erscheint übrigens weder der Bildungsstufe, noch dem Bedürfnisse der Schüler angemessen; es genügt zu bemerken, dass wenn auch solche Decimalbrüche den Wert der gemeinen Brüche nur annäherungsweise bestimmen, sie darum doch nicht minder brauchbar sind, indem für die gewöhnlichen praktischen Aufgaben meistens schon einige wenige Decimalstellen hinreichen, und die weiter folgenden, da sie auf das Ergebnis der Rechnung von keinem bedeutenden Einflusse sind, weggelassen werden können; nur müsse man in solchen abgekürzten Decimalbrüchen die niedrigste noch beibehaltene Decimale um 1 vergrößern, wenn die nächstfolgende Decimale, die man weglässt, 5 oder größer als 5 ist (§. 85, Schlussbemerkung).

b) Decimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln.

Wir unterscheiden zwei Hauptfälle.

1. Wenn der Decimalbruch ein geschlossener, also kein periodischer ist.

Die Verwandlung in einen gemeinen Bruch ist hier ganz einfach. Man braucht nur den Decimalbruch mit Angabe der Benennung seiner letzten Decimalstelle auszusprechen und den so ausgesprochenen Decimalbruch in Form eines gemeinen Bruches anzuschreiben, welcher dann, wenn es möglich ist, abgekürzt wird. Z. B.

Der Decimalbruch 0·48 wird ausgesprochen: 48 Hundertel; wird dieses angeschrieben, so hat man

$$0{\cdot}48 = \tfrac{48}{100} = \tfrac{12}{25}$$

$$4{\cdot}325 = 4\tfrac{325}{1000} = 4\tfrac{65}{200} = 4\tfrac{13}{40}.$$

2. Wenn der Decimalbruch ein periodischer ist.

Ist der Decimalbruch rein periodisch, d. h. beginnt die Periode mit der ersten Decimalstelle, so multipliciert man den Decimalbruch mit 10, 100, 1000, . . ., je nachdem die Periode 1, 2, 3, . . . Ziffern hat, und subtrahiert von dem Producte den gegebenen Decimalbruch; dadurch erhält man den 9fachen, 99fachen, 999fachen . . . Wert des Decimalbruches, und daraus durch die Division den einfachen Wert, d. i. den gesuchten gemeinen Wert.

Ist z. B. 0·696969 . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so hat man

	100facher Wert	=	69·6969 . .
davon	1facher „	=	0·6969 . .
bleibt	99facher Wert	=	69
also	1facher Wert	=	$\frac{69}{99} = \frac{23}{33}$.

Aus mehreren solchen Beispielen ersehen die Schüler, dass der Zähler des gemeinen Bruches die Periode ist, der Nenner aber aus so vielen 9 besteht, als die Periode Ziffern hat.

Ist dagegen der Decimalbruch gemischt periodisch, d. h. gehen der Periode noch andere Decimalen voran, so multipliciert man den Decimalbruch zuerst mit 100, 1000, 10000, je nachdem die Periode und die ihr vorangehenden Decimalen zusammen 2, 3, 4, . . . Ziffern enthalten, dann noch mit 10, 100, 1000, . . ., je nachdem der Periode 1, 2, 3, . . . Ziffern vorangehen, und subtrahiert das zweite Product von dem ersten; dadurch erhält man ein Vielfaches von dem Werte des Decimalbruches, und daraus durch die Division den einfachen Wert.

Es sei z. B. 0·3545454 . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

	1000facher Wert	=	354·54 . .
davon	10facher „	=	3·54 . .
bleibt	990facher Wert	=	351
also	1facher Wert	=	$\frac{351}{990} = \frac{39}{110}$.

§. 114. Addieren der Brüche.

Ist das Bisherige gründlich aufgefasst worden, so bieten nun die vier Rechnungsarten mit Brüchen keine Schwierigkeit mehr.

a) Bei der Addition wählt man zuerst solche Brüche, welche gleiche Nenner haben. Der Nenner ist der Name der Bruchtheile. Sowie 3 Gulden und 2 Gulden zusammen 5 Gulden betragen, so geben auch 3 Siebentel und 2 Siebentel zusammengenommen 5 Siebentel, oder schriftlich $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Gleichnamige Brüche werden also addiert, indem ihre Zähler addiert und die erhaltene Summe als Zähler annimmt, als Nenner aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

Wenn die Summe ein unechter Bruch ist, verwandelt man ihn in eine gemischte Zahl.

Sind gemischte Zahlen zu addieren, so wird man im Kopfe zuerst die Ganzen und dann die Brüche zusammenzählen, beim Zifferrechnen aber früher die Addition der Brüche verrichten, und dann erst die Ganzen addieren, zu denen auch die in der Summe der Brüche etwa erhaltenen Ganzen dazuzuzählen sind.

b) Um ungleichnamige Brüche addieren zu können, muss man sie früher auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen. Z. B.

Wie viel ist $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$?

Mündlich: Fünftel und Achtel kann man als solche nicht zusammenzählen; man muss sie in gleiche Bruchtheile verwandeln. Fünftel und Achtel lassen sich in Vierzigstel verwandeln. $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$, $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$, $\frac{1}{8} = \frac{5}{40}$, $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$; $\frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$.

Schriftlich:

$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40},\quad \frac{7}{8} = \frac{35}{40},\quad \frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}.$$

Oder:

$$\begin{array}{c|c|l} & 40 & \\ \hline \frac{3}{5} & 8 & 24 \\ \frac{7}{8} & 5 & 35 \\ \hline & & 59 : 40 = 1\frac{19}{40}. \\ & & 19 \end{array}$$

Man kann auch die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandeln und dann diese addieren.

$\frac{3}{5} = 0{\cdot}6$, $\frac{7}{8} = 0{\cdot}875$; $0{\cdot}6 + 0{\cdot}875 = 1{\cdot}475$.

Addiere die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{9}{10}$.

$$\begin{array}{ccc|c} 3, & 8, & 10 & \\ \hline 3, & 4, & 5 & 2 \end{array}$$

Der kl. g. Nenner ist

$3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$

$$\begin{array}{c|c|l} & 120 & \\ \hline \frac{2}{3} & 40 & 80 \\ \frac{5}{3} & 15 & 75 \\ \frac{9}{10} & 12 & 108 \\ \hline 2\frac{23}{100} & & 263 : 120 = 2 \\ & & 23 \end{array}$$

Sind gemeine und Decimalbrüche zu addieren, so verwandelt man entweder die Decimalbrüche in gemeine, oder, was meistens zweckmäßiger ist, die gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und verrichtet dann die Addition.

Das Zusammenzählen von mehrnamigen Zahlen, in denen die niedrigste Benennung auch Brüche enthält, bietet nichts Neues.

§. 115. Subtrahieren der Brüche.

Auch beim Subtrahieren wird nur das, was die Schüler an den gewöhnlichen Brüchen schon im Vorbereitungscursus geübt haben, wiederholt und auf die Brüche mit beliebigen Nennern ausgedehnt.

a) Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert, und den Rest als Zähler annimmt, als Nenner aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

$$\tfrac{6}{7} - \tfrac{4}{7} = \tfrac{2}{7}.$$

Ist ein Bruch oder eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl zu subtrahieren, so nimmt man von der letzteren ein Ganzes und löst es in einen Bruch, von dem im Subtrahend gegebenen Nenner auf, worauf die Subtraction vollzogen werden kann.

Z. B. Wie viel ist $8 - \tfrac{13}{20}$?

$8 = 7\tfrac{20}{20}$

$7\tfrac{20}{20} - \tfrac{13}{20} = 7\tfrac{7}{20}$

Oder:

8	20
$\tfrac{13}{20}$	13
$7\tfrac{7}{20}$	7

Es kann auch folgendes Verfahren angewendet werden: Man ergänzt den Bruch des Subtrahends zu 1 Ganzen, setzt die hinzugefügte Ergänzung in den Rest und vermehrt den Subtrahend um 1 Ganzes, worauf die Ganzen subtrahiert werden.

Z. B. Wie viel ist $15 - 6\tfrac{11}{16}$?

15	$\tfrac{11}{16}$ und $\tfrac{5}{16}$ ist 1 Ganzes, $\tfrac{5}{16}$ wird in den Rest geschrieben; 1 und 6 ist 7, und 8 ist 15. Der Unterschied bleibt
$6\tfrac{11}{16}$	
$8\tfrac{5}{16}$	nämlich ungeändert, wenn man den Minuend und den Subtrahend um dieselbe Zahl (hier $\tfrac{5}{16}$) vermehrt: $15 - 6\tfrac{11}{16} = 15\tfrac{5}{16} - 7 = 8\tfrac{5}{16}$.

Sind Minuend und Subtrahend gemischte Zahlen, so subtrahiert man im Kopfe zuerst die Ganzen, dann den Bruch des Subtrahend; beim schriftlichen Rechnen werden früher die Brüche und dann erst die ganzen Zahlen subtrahiert.

Z. B. Wie viel ist $70\tfrac{5}{16} - 25\tfrac{11}{16}$?

Im Kopfe: Von $70\tfrac{5}{16}$ zuerst 25 weg, bleiben $45\tfrac{5}{16}$, oder $44\tfrac{21}{16}$; davon $\tfrac{11}{16}$ weg, bleiben $44\tfrac{10}{16} = 44\tfrac{5}{8}$.

Schriftlich:

$70\tfrac{5}{16}$	$\overset{16}{5}$ 21
$25\tfrac{11}{16}$	11
$44\tfrac{5}{8}$	$\tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8}$.

b) Ungleichnamige Brüche müssen, um sie subtrahieren zu können, früher gleichnamig gemacht werden. Z. B.

1) $\frac{17}{24} - \frac{11}{18} = ?$

$$\begin{array}{l} 24,\ 18 \\ \hline 4,\ \ 3 \mid 6 \end{array}$$

$4 \times 3 \times 6 = 72$

	72	
$\frac{17}{24}$	3	51
$\frac{11}{18}$	4	45
$\frac{7}{72}$		7

2) $125\frac{13}{20} - 31\frac{5}{6}$?

$$\begin{array}{l} 20,\ 6 \\ \hline 10,\ 3 \mid 2 \end{array}$$

$10 \times 3 \times 2 = 60$

	60	
$125\frac{13}{20}$	3	$\overset{60}{39}$
		99
$31\frac{5}{6}$	10	50
$93\frac{49}{60}$		49

§. 116. Multiplicieren der Brüche.

a) Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Den Schülern ist schon oben (§. 109) gezeigt worden, dass ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciert wird, indem man entweder den Zähler mit derselben multipliciert, oder den Nenner durch dieselbe dividiert, und dass das zweite Verfahren nur in seltenen Fällen anwendbar ist. Hier sind darüber Wiederholungsübungen vorzunehmen, in denen auch hervorzuheben ist, dass ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert den Zähler zum Producte gibt.

Ist eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, so multipliciert man im Kopfe zuerst die Ganzen, dann den Bruch der gemischten Zahl, und zählt, wenn bei der Multiplication des Bruches auch Ganze herauskommen, diese zu dem Producte der Ganzen dazu. Beim Zifferrechnen multipliciert man früher den Bruch und dann die Ganzen, oder man verwandelt die gemischte Zahl in einen unechten Bruch und multipliciert diesen mit der ganzen Zahl. Z. B.

Mündlich: Wie viel ist 9mal $8\frac{3}{4}$?

9mal 8 ist 72, 9mal $\frac{3}{4}$ ist $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$; 72 und $6\frac{3}{4}$ ist $78\frac{3}{4}$.

Schriftlich: Wie viel ist 39mal $23\frac{13}{22}$?

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{23\frac{13}{22} \times 39} \\ \hline 23 & 13 \\ \times 39 & \times 39 \\ \hline 207 & 117 \\ 69 & 39 \\ \hline 897 & 507 : 22 = 23\frac{1}{22} \\ +23\frac{1}{22} & 67 \\ \hline 920\frac{1}{22} & 1 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{23\frac{13}{22} = \frac{519}{22}} \\ \times 22 & 519 \\ \hline 46 & \times 39 \\ 46 & 4671 \\ \hline 506 & 1557 \\ +13 & 20241 : 22 = 920\frac{1}{22} \\ \hline 519 & 44 \\ & 1 \end{array}$$

b) Multiplication einer Zahl mit einem Bruche.

Viele Lehrer pflegen über diesen Fall ganz leicht hinwegzugehen, indem sie z. B. bei der Bestimmung des Productes $4 \times \frac{2}{3}$, auf die Vertauschbarkeit der Factoren hinweisend, ihren Schülern sagen: ihr wisset, wie der Bruch $\frac{2}{3}$ mit der ganzen Zahl 4 multipliciert wird; nun ist aber $4 \times \frac{3}{5}$ eben so viel als $\frac{3}{5} \times 4$; also könnet ihr nun auch eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicieren. Dagegen wäre nichts einzuwenden, wenn die Schüler wirklich überzeugt wären, dass $4 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 4$ ist; allein eben um diese Gleichheit einzusehen, müssen die Schüler nicht nur die Beschaffenheit des Productes $\frac{3}{5} \times 4$, sondern auch jene des Productes $4 \times \frac{3}{5}$ bereits kennen. Es ist also nothwendig, dass auch dieser letztere Fall der Multiplication besonders betrachtet werde.

Die richtige Bedeutung der Multiplication mit einem Bruche lässt sich am besten an Aufgaben mit benannten Zahlen auffassen.

1 Meter kostet 48 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Meter? — Wenn ihr erfahren wollet, wie viel 3 Meter kosten, wie oft müsstet ihr 48 Kr. nehmen? Ihr müsstet also 48 Kr. mit 3 multiplicieren. Um nun den Preis für $\frac{1}{2}$ Meter zu erhalten, müsset ihr 48 Kr. mit $\frac{1}{2}$ multiplicieren. Was bedeutet aber das Product 48 Kr. $\times \frac{1}{2}$? Das ersehet ihr sogleich aus der wirklichen Lösung der Aufgabe. $\frac{1}{2}$ Meter ist die Hälfte von 1 Meter; $\frac{1}{2}$ Meter kostet daher nur die Hälfte von 48 Kr. Wie findet ihr aber die Hälfte von 48 Kr.? Es ist also

$$48 \text{ Kr.} \times \tfrac{1}{2} = 48 \text{ Kr.} : 2 = 24 \text{ Kr.}$$

Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$ multiplicieren bedeutet also so viel, als diese Zahl durch 2 dividieren.

An ähnlichen Aufgaben wird ersichtlich gemacht, dass eine Zahl mit $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, . . . multiplicieren so viel heißt, als dieselbe durch 3, 4, 5, . . . dividieren.

1 Kilogramm kostet 72 Kr.; wie viel kosten $\frac{3}{4}$ Kilogramm? — Wenn 1 Kilogramm 72 Kr. kostet, so kosten $\frac{3}{4}$ Kilogramm 72 Kr. $\times \frac{3}{4}$. Was dieses Product bedeutet, ersieht man, wenn man die Aufgabe auf die gewöhnliche Weise auflöst, nämlich:

$\frac{1}{4}$ Kil. kostet den 4ten Theil von 72 Kr., also $\frac{72}{4}$ Kr.;

$\frac{3}{4}$ Kil. kosten 3mal so viel als $\frac{1}{4}$ Kil., also $\frac{72}{4}$ Kr. $\times$ 3;

folglich ist 72 Kr. $\times \frac{3}{4} = \frac{72}{4}$ Kr. $\times 3 = 18$ Kr. $\times 3 = 45$ Kr.

Eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ multiplicieren heißt also, den 4ten Theil dieser Zahl 3mal nehmen.

Nach einigen derartigen Beispielen sehen die Schüler ein, dass eine Zahl mit einem Bruche multipliciert wird, indem man sie durch seinen Nenner dividiert und mit seinem Zähler multipliciert.

Anfängern, die sich unter dem Multiplicieren immer ein Vermehren vorstellen, kommt es befremdend vor, dass eine Zahl durch das Multiplicieren mit einem echten Bruche verkleinert wird. Der Grund davon ist jedoch sehr einfach. Wenn man eine Zahl 1mal, d. i. ganz nimmt, so erhält man die Zahl selbst. Wird aber eine Zahl mit einem echten Bruche, z. B. mit $^3/_4$ multipliciert, so hat man nur den 4ten Theil derselben 3mal zu nehmen. Wie vielmal den 4ten Theil einer Zahl müsste man nehmen, um die Zahl ganz zu erhalten? Wenn man aber den 4ten Theil nur 3mal nimmt, wird man auch da die Zahl ganz erhalten? Offenbar nicht, sondern weniger.

Es soll ferner ein Bruch mit einem Bruche, z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{8}$ multipliciert, d. h. es soll von $\frac{3}{4}$ der achte Theil 5mal genommen werden. Man muſs hier zuerst den 8ten Theil von $\frac{3}{4}$ suchen. Der 8te Theil von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{32}$, von $\frac{3}{4}$ also $\frac{3}{32}$. $\frac{3}{32}$ 5mal genommen gibt $\frac{15}{32}$; also ist $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{15}{32}$. Vergleicht man dieses Product mit den beiden gegebenen Brüchen, so sieht man, daſs der Zähler des ersten mit dem Zähler des zweiten multipliciert wurde, und dieses Product als Zähler des gesuchten Productes erscheint; und daſs ebenso das Product aus den Nennern der beiden Brüche den Nenner des Bruches, welcher das Product vorstellt, bildet.

Ein Bruch wird daher mit einem Bruche multipliciert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert; das Product der Zähler wird als Zähler, das Product der Nenner als Nenner des gesuchten Productes angenommen.

Da in vielen Fällen die Zähler und die Nenner der beiden Brüche sich gegenseitig abkürzen lassen, so ist es gut, das Product aus den Zählern und jenes aus den Nennern zuerst bloß anzuzeigen, und dann die Abkürzungen noch vor der Multiplication vorzunehmen; z. B.

$$\frac{4}{9} \times \frac{15}{42} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \underset{21}{\cancel{42}}} = \frac{10}{63}.$$

Solche Abkürzungen stellen sich besonders vortheilhaft heraus, wenn mehr als zwei Brüche mit einander zu multiplicieren sind; z. B.

$$\frac{3}{4} \times \frac{10}{27} \times \frac{12}{25} = \frac{\cancel{3} \times \overset{2}{\cancel{10}} \times \overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{4} \times \underset{\underset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{27}} \times \underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{2}{15}.$$

Ist endlich eine gemischte Zahl mit einem Bruche oder einer gemischten Zahl zu multiplicieren, so lasse man die Schüler zuerst die gemischte Zahl zu einem unechten Bruche einrichten, und dann die Multiplication verrichten.

§. 117. Dividieren der Brüche.

a) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Dieser Fall wurde schon oben (§. 109) betrachtet; die Schüler wissen bereits, daſs ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, indem man entweder den Zähler durch dieselbe dividiert, oder den Nenner mit derselben multipliciert; daſs jedoch das erste Verfahren nur selten zur Anwendung kommt.

Indem dieser Fall hier an mehreren Beispielen wiederholt zu üben ist, wird den Schülern auch bemerkt, daſs man bei der Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl entweder die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann die Division vollzieht, oder unmittelbar zuerst die

Ganzen und dann den Bruch der gemischten Zahl dividiert; der Rest, der sich etwa bei der Division der Ganzen ergibt, wird mit dem angehängten Bruche als eine gemischte Zahl zu einem unechten Bruche eingerichtet, den man dann durch die ganze Zahl dividiert.

Ist z. B. $89\frac{5}{6}$ durch 12 zu dividieren, so hat man:

$$89\tfrac{5}{6} : 12 = \tfrac{539}{6} : 12 = \tfrac{539}{72} = 539 : 72 = 7\tfrac{35}{72}.$$

Oder:

$$89\tfrac{5}{6} : 12 = 7\tfrac{35}{72}.$$
$$5\tfrac{5}{6}$$
$$\tfrac{35}{6} : 12 = \tfrac{35}{72}.$$

b) Division einer Zahl durch einen Bruch.

Ganz einfach und leicht verständlich ist in diesem Falle die Division im Sinne des Messens. Dividend und Divisor müssen, wenn sie nicht schon gleichnamige Brüche sind, mit einem gemeinschaftlichen Nenner dargestellt werden. Z. B.

Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten? — Man bringt hier die ganze Zahl 8 auf Drittel, dadurch erhält man $\frac{24}{3}$; 2 Drittel sind nun in 24 Dritteln so oft enthalten, als 2 in 24, also 12mal, folglich

$$8 : \tfrac{2}{3} = \tfrac{24}{3} : \tfrac{2}{3} = 24 : 2 = 12.$$

Wie oft sind $\frac{7}{9}$ in $32\frac{2}{3}$ enthalten? — Werden die Brüche gleichnamig gemacht, so erhält man $\frac{7}{9}$ und $\frac{294}{9}$; 7 Neuntel sind in 294 Neunteln so oft, als 7 in 294, also 42mal enthalten; somit

$$32\tfrac{2}{3} : \tfrac{7}{9} = \tfrac{98}{3} : \tfrac{7}{9} = \tfrac{294}{9} : \tfrac{7}{9} = 42.$$

Man darf also nur Dividend und Divisor zuerst gleichnamig machen und dann die Zähler dividieren, indem gleichnamige Brüche so oft in einander enthalten sind als ihre Zähler.

Schwieriger ist die Auffassung der Division durch einen Bruch im Sinne des Theilens. Die Bedeutung einer solchen Division kann am besten aus der Lösung angewandter Aufgaben hergeleitet werden. Z. B.

$\frac{1}{4}$ Meter kostet 16 Kr.; wie viel kostet 1 Meter? — Wenn 4 Meter 16 Kr. kosteten, so würde ein Meter den 4ten Theil von 16 Kr. kosten, man müsste also 16 Kr. durch 4 dividieren; kostet nun $\frac{1}{4}$ Meter 16 Kr., so wird man, um den Preis für 1 Meter zu erhalten, 16 Kr. durch $\frac{1}{4}$ dividieren; 1 Meter kostet also 16 Kr. : $\frac{1}{4}$.

Was diese Division bedeutet, ergibt sich sogleich, wenn man die Aufgabe auf die gewöhnliche Weise auflöst. Kostet $\frac{1}{4}$ Meter 16 Kr., so kostet 1 Meter 4mal so viel, man muss daher 16 Kr. mit 4 multiplicieren; also ist

$$16 \text{ Kr.} : \tfrac{1}{4} = 16 \text{ Kr.} \times 4 = 64 \text{ Kr.}$$

Aus ähnlichen Aufgaben folgern die Schüler, dass eine Zahl durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . dividieren so viel bedeutet, als sie mit 2, 3, 4, . . . multiplicieren.

$\frac{5}{8}$ Kilogramm kosten 45 Kr.; wie hoch kommt 1 Kilogramm? — Man muss 45 Kr. durch $\frac{5}{8}$ dividieren, also kostet 1 Kilogramm 45 Kr. : $\frac{5}{8}$. Andererseits rechnet man:

$\frac{1}{8}$ Kilogr. kostet den 5ten Theil von 45 Kr. $= \frac{45}{5}$ Kr.

1 Kilogr. kostet 8mal so viel, daher $\frac{45}{5} \times 8$; also ist

45 Kr. : $\frac{5}{8} = \frac{45}{5}$ Kr. $\times 8 = 9$ Kr. $\times 8 = 72$ Kr.

Aus mehreren solchen Aufgaben werden die Schüler ersehen, dass von dem Dividende der sovielte Theil, als der Zähler des Divisors anzeigt, so vielmal genommen werden müsse, als der Nenner angibt; dass man also den Dividend durch den Zähler des Divisors zu dividieren, und den Quotienten mit dem Nenner zu multiplicieren habe.

Die eben begründete Regel führt nun auf ein ganz einfaches mechanisches Verfahren, eine Zahl durch einen Bruch zu dividieren. Durch einen Bruch dividieren heißt durch seinen Zähler dividieren, und den Quotienten mit seinem Nenner multiplicieren. Mit einem Bruche multiplicieren heißt aber, durch den Nenner dividieren, und den Quotienten mit dem Zähler multiplicieren. Wird daher bei der Division der Divisor umgekehrt, d. i. der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler gemacht, und dann die Regel des Multiplicierens befolgt, so wird mit jeder von diesen beiden Zahlen das gethan, was man zu thun hat, um durch den Bruch zu dividieren. **Eine Zahl wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.**

Um dieses an Beispielen ersichtlich zu machen hat man:

$$7 : \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{3} \times 4,$$

$$\tfrac{5}{7} : \tfrac{3}{4} = \frac{5}{7 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}.$$

Nach den Regeln für die Multiplication der Brüche findet man aber auch

$$7 \times \tfrac{4}{3} = \tfrac{7}{3} \times 4,$$

$$\tfrac{5}{7} \times \tfrac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}.$$

Es ist also

$$7 : \tfrac{3}{4} = 7 \times \tfrac{4}{3},$$

$$\tfrac{5}{7} : \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{7} \times \tfrac{4}{3}.$$

Die Division durch einen Bruch kann daher in eine Multiplication mit dem umgekehrten Bruche verwandelt werden.

Von diesem mechanischen Divisionsverfahren lasse man übrigens nur **ausnahmsweise** Gebrauch machen, damit sich die Schüler nicht ein gedankenloses Rechnen angewöhnen; es ist weit geistbildender, wenn man die bei der Division der Brüche vorzunehmende Operation jedesmal ausführlich erläutern und genau nachweisen läßt, und die Schüler ununterbrochen zum klaren Denken und Begründen nöthigt.

Da sich die Schüler beim Rechnen mit ganzen Zahlen unter dem Dividieren immer ein Verkleinern dachten, so wird es ihnen hier anfänglich auffallen, dass eine Zahl, welche man durch einen echten Bruch dividiert, dadurch vergrößert wird. Der Grund ist jedoch leicht einzusehen. 1 ist in einer Zahl so oft enthalten, als die Zahl selbst es anzeigt; ein echter Bruch ist aber kleiner als 1, also wird er in jener Zahl öfters enthalten sein, als 1, somit öfters, als die Zahl es anzeigt. Oder: beim Dividieren durch einen Bruch hat man den Dividend zuerst in so viele Theile zu theilen, als der Zähler angibt, und einen solchen Theil so vielmal zu nehmen, als der Nenner anzeigt; da man nun auf diese Art bei der Division durch einen echten Bruch einen Theil öfters nehmen muss, als die Zahl der vorher gemachten Theile angibt, so muss man dadurch mehr bekommen, als anfangs da war.

Kommt im Dividend, oder im Divisor, oder in beiden eine gemischte Zahl vor, so verwandelt man sie in einen unechten Bruch und verrichtet sodann die Division.

Vierter Abschnitt.

Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und der Cubikwurzel.

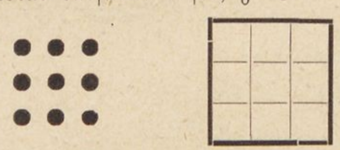
I. Quadrieren.

§. 118.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliciert, so heißt das Product das Quadrat oder die zweite Potenz jener Zahl. Z. B. 36 ist das Quadrat von 6, $\frac{9}{16}$ das Quadrat von $\frac{3}{4}$.

Die Benennung Quadrat kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer Quadratzahl durch ein Quadrat darstellen läßt; z. B.

$3 \times 3 = 9$



Eine Zahl quadrieren oder aufs Quadrat erheben heißt demnach, die Zahl mit sich selbst multiplicieren. Um anzuzeigen, dass eine Zahl mit sich selbst multipliciert werden soll, schreibt man oben rechts neben dieselbe die Ziffer 2. Es ist daher

$$37^2 = 37 \times 37 = 1369,$$
$$2{\cdot}34^2 = 2{\cdot}34 \times 2{\cdot}34 = 5{\cdot}4756.$$

Das Quadrieren ist hiernach eine bloße Multiplication und bedarf insofern keiner weiteren Erläuterung. Um jedoch später das Ausziehen der Quadratwurzel begründen zu können, soll hier noch ein anderes Verfahren, eine Zahl zum Quadrat zu erheben, entwickelt werden.

Es sei eine zweiziffrige Zahl, z. B. 43 zum Quadrat zu erheben. Zerlegt man die Zahl in Zehner und Einer und multipliciert sie mit sich selbst, so hat man:

$$\begin{array}{l} 43 = 40 + 3 \\ 43 = 40 + 3 \\ \hline 43 \times 43 = 40 \times 40 + 40 \times 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 40 \times 3 + 3 \times 3 \\ \hline 43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 \\ \qquad\qquad\qquad = 1600 + 240 + 9 = 1849. \end{array}$$

Das Quadrat einer in zwei Theile zerlegten Zahl besteht also aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem Producte des doppelten ersten Theiles mit dem zweiten, und dem Quadrate des zweiten Theiles.

Um eine dreiziffrige Zahl, z. B. 638 zu quadrieren, zerlegt man sie ebenfalls in zwei Theile 630 + 8, und man hat:

$638^2 = (630 + 8)^2 = 630^2 + 2 \times 630 \times 8 + 8^2$; nun ist

$630^2 = (600 + 30)^2 = 600^2 + 2 \times 600 \times 30 + 30^2$, daher, wenn oben statt 630^2 dieser Wert gesetzt wird,

$638^2 = 600^2 + 2 \times 600 \times 30 + 30^2 + 2 \times 630 \times 8 + 8^2$,

oder, wenn man diese Bestandtheile untereinander setzt,

$$\begin{array}{lr} 638^2 = 600^2 \;\ldots\ldots & 360000 \\ 2 \times 600 \times 30 \;\ldots & 36000 \\ 30^2 \;\ldots\ldots & 900 \\ 2 \times 630 \times 8 \;\ldots & 10080 \\ 8^2 \;\ldots\ldots & 64 \\ \hline & = 407044 \end{array}$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$\begin{array}{lr} 6384^2 = 6000^2 \;\ldots\ldots\ldots & 36000000 \\ 2 \times 6000 \times 300 \;\ldots & 3600000 \\ 300^2 \;\ldots\ldots & 90000 \\ 2 \times 6300 \times 80 \;\ldots & 1008000 \\ 80^2 \;\ldots\ldots & 6400 \\ 2 \times 6380 \times 4 \;\ldots & 51040 \\ 4^2 \;\ldots\ldots\ldots & 16 \\ \hline & = 40752456 \end{array}$$

Berücksichtigt man die Stellung der Ziffern in den Bestandtheilen des Quadrates, so können die rechts stehenden Nullen auch weggelassen werden; man braucht nur jeden folgenden Bestandtheil, da er eine Null weniger enthält, um eine Stelle rechts hinaus zu rücken. Mit Weglassung der Nullen würden die letzten zwei Rechnungen so stehen:

$638^2 =$		$6384^2 =$	
6^2	36	6^2	36
$2 \times 6 \times 3$ . .	36	$2 \times 6 \times 3$ . . .	36
3^2	9	3^2	9
$2 \times 63 \times 8$ . .	1008	$2 \times 63 \times 8$ . . .	1008
8^2	64	8^2	64
	$= 407044$	$2 \times 638 \times 4$ . .	5104
		4^2	16
			$= 40755456$

Hiernach ergibt sich für die Bildung eines Quadrates einer mehrziffrigen Zahl folgendes Verfahren:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrate.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile: das Product aus der doppelten ihr vorangehenden Zahl und dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.

3. Die berechneten Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint und dann, so wie sie stehen, addiert.

Endigt eine Zahl auf Nullen, so braucht man nur die ihnen vorangehenden Ziffern zum Quadrat zu erheben und diesem doppelt so viele Nullen anzuhängen. Z. B.

$$700^2 = 490000.$$

Ein Decimalbruch wird so wie eine ganze Zahl zum Quadrat erhoben; nur muss man von dem erhaltenen Quadrat doppelt so viele Decimalstellen abschneiden, als der gegebene Decimalbruch hat. Z. B.

$$3{\cdot}5^2 = 12{\cdot}25 \qquad 2{\cdot}438^2 = 5{\cdot}943844.$$

In einer Decimalzahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, müssen daher die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen.

II. Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 119.

Eine Zahl, welche mit sich selbst multipliciert eine gegebene Zahl zum Producte gibt, heißt die Quadratwurzel von dieser Zahl. Z. B. 7 ist die Quadratwurzel von 49, $\frac{5}{8}$ die Quadratwurzel von $\frac{25}{64}$.

Aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert die gegebene Zahl zum Producte gibt. Um anzuzeigen, dass aus einer Zahl die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, setzt man vor dieselbe das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$. Es ist demnach

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{81} = 9$

Diese Quadratwurzeln müssen gedächtnismäßig eingeprägt werden.

Das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel sind entgegengesetzte Operationen, wie das Addieren und das Subtrahieren, das Multiplicieren und Dividieren. So wie beim Quadrieren die aus den Wurzelziffern gebildeten Bestandtheile des Quadrates in diesem zusammengesetzt wurden, eben so müssen dieselben beim Ausziehen der Quadratwurzel wieder auseinander genommen werden.

Es sei z. B. 467 zum Quadrate zu erheben, und dann aus dem gefundenen Quadrate die Quadratwurzel zu ziehen.

Wir stellen, um die Vergleichung zu erleichtern, das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel neben einander.

467^2					$\sqrt{21}$	80	89 $= 467$
4^2 . . .	16			. . . .	16		
					5	80	: 8 . . . 2 . 4
2 . 4 . 6 . . .	4	8		. . . .	4	8	
6^2		36		. . . .		36	
						64	89 : 92 . . . 2 . 46
2 . 46 . 7		64	4	. . . . . .		64	4
7^2			49	. . . . . .			49
	21	80	89			= =	= =

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate ein oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Wenn man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern theilt, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat. Im vorliegenden Falle hat das Quadrat 218089, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; man findet daher die erste Ziffer der Quadratwurzel, wenn man die Zahl sucht, deren Quadrat der Zahl in der ersten Abtheilung am nächsten kommt, ohne größer als sie zu sein; diese Zahl ist 4. Wird ihr Quadrat $4^2 = 16$ von der ersten Abtheilung subtrahiert, so bleibt 5 als Rest.

Setzt man zu dem Reste 5 die zweite Abtheilung 80 hinzu, so müssen in der so entstehenden Zahl 580 die Bestandtheile vorkommen, welche die zweite Wurzelziffer im Quadrate hervorbringt, nämlich das Product aus ihr und der doppelten ersten Ziffer und ihr Quadrat, und zwar erstreckt sich jenes Product nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Abtheilung, ist also in 58 enthalten. Divi=

diert man daher die Zahl 580 mit Ausschluss der letzten Ziffer, nämlich 58, durch das doppelte der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 8, so erhält man die zweite Wurzelziffer 6. Wenn man dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Wurzelziffer entstehen, nämlich $2 . 4 . = 48$ und $6^2 = 36$ an den gehörigen Stellen von 580 subtrahiert, so bleibt 64 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die dritte Abtheilung 89 hinzu, so enthält die dadurch entstehende Zahl 6489 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Product aus dieser Wurzelziffer und der doppelten ihr vorangehenden bereits gefundenen Zahl in der Zahl 6489 mit Ausschluss der letzten Ziffer, also in 648 vor. Dividiert man daher 648 durch das doppelte der bereits gefundenen Wurzel, d. i. durch 92, so erhält man die dritte Wurzelziffer 7; u. s. w.

Hieraus ergibt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel folgendes Verfahren:

1. Man theile die gegebene Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann.

2. Man suche die größte Zahl, deren Quadrat in der ersten Abtheilung enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Das Quadrat dieser ersten Wurzelziffer wird von der ersten Abtheilung subtrahiert.

3. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung herab, dividiere die dadurch entstehende Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch die doppelte bereits gefundene Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel. Dann bilde man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzel im Quadrate hervorbringt, nämlich das Product aus der neuen Ziffer und dem ihr vorangehenden Wurzeltheile und das Quadrat der neuen Ziffer, schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, den zweiten um eine Stelle weiter rechts, und subtrahiere die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen der gegebenen Zahl in Rechnung gezogen hat.

Da die Schüler von dem Ausziehen der Quadratwurzel nicht so häufige Anwendung machen werden, genügt es, wenn sie sich mit dem hier angegebenen Normalverfahren recht vertraut machen, und kann daher von den hiebei üblichen Abkürzungsformen Umgang genommen werden.

Bei Decimalbrüchen geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpunkte gegen die Linke, die Eintheilung der Decimalen gegen die Rechte; in der Quadratwurzel wird der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Abtheilung der Decimalen in Rechnung zieht. Z. B.

$\sqrt{13{\cdot}54|24} = 3{\cdot}68$
9
454 : 6
36
36
5824 : 72
576
64

Bleibt beim Wurzelausziehen aus einer Zahl am Ende ein Rest, so ist die vorgelegte Zahl kein vollständiges Quadrat, und daher die Quadratwurzel nicht ganz genau; dieselbe kann jedoch annäherungsweise in Decimalen mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man dem zuletzt erhaltenen und jedem folgenden Reste eine Abtheilung von zwei Nullen anhängt, übrigens aber wie vorhin verfährt. Wenn die gegebene Zahl ein Decimalbruch ist und die letzte Abtheilung rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird derselben sogleich eine Null angehängt. Z. B.

$\sqrt{14} = 3{\cdot}74\,..$
9
500 : 6
42
49
3100 : 74
286
16
224

$\sqrt{13{\cdot}79|4_0} = 3{\cdot}714\,...$
9
479 : 6
42
49
1040 : 74
74
1
29900 : 742
2968
16
204

Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszuziehen, kann man entweder die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen, oder den Bruch in einen Decimalbruch verwandeln und dann aus diesem die Quadratwurzel ausziehen. Z. B.

$$\sqrt{\tfrac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9} \qquad \sqrt{\tfrac{3}{25}} = \sqrt{0{\cdot}12} = 0{\cdot}346.$$

III. Cubieren.

§. 120.

Wird eine Zahl dreimal als Factor gesetzt, so heißt das Product der Cubus oder die dritte Potenz jener Zahl. Z. B. $5 \times 5 \times 5 = 125$; 125 ist der Cubus von 5. Man schreibt $5^3 = 125$ und liest: 5 der dritten (Potenz), oder 5 zum Cubus ist gleich 125.

Der Name Cubus kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer Cubikzahl in Form eines Cubus oder Würfels darstellen läſst.

Eine Zahl cubieren oder auf den Cubus erheben heißt demnach, die Zahl dreimal als Factor setzen. Es ist daher

$$319^3 = 319 \cdot 319 \cdot 319 = 32461759,$$
$$1{\cdot}28^3 = 1{\cdot}28 \cdot 1{\cdot}28 \cdot 1{\cdot}28 = 2{\cdot}097152.$$

Zur leichteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Cubikwurzel soll auch hier ein zweites Verfahren, eine Zahl auf den Cubus zu erheben, abgeleitet werden.

Ist z. B. die zweiziffrige Zahl $59 = 50 + 9$ auf den Cubus zu erheben, so wird man ihr Quadrat $50 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \cdot 9 + 9 \cdot 9$ noch mit $50 + 9$ multiplicieren; man erhält:

$$\begin{array}{rrrr}
 & 50 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \cdot 9 + 9 \cdot 9 & & \\
 & 50 + 9 & & \\
\hline
50 \cdot 50 \cdot 50 + & 2 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 9 + & 50 \cdot 9 \cdot 9 & \\
+ & 50 \cdot 50 \cdot 9 + & 2 \cdot 50 \cdot 9 \cdot 9 + & 9 \cdot 9 \cdot 9 \\
\hline
\end{array}$$
$$(50 + 9)^3 = 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 9 + 3 \cdot 50 \cdot 9^2 + 9^3.$$

Der Cubus einer zweigliedrigen Zahl besteht demnach aus dem Cubus des ersten Gliedes, aus dem Producte des dreifachen Quadrates des ersten Gliedes mit dem zweiten, aus dem Producte des dreifachen ersten Gliedes mit dem Quadrate des zweiten, und aus dem Cubus diesen zweiten Gliedes.

Um eine dreiziffrige Zahl, z. B. $423 = 420 + 3$ auf den Cubus zu erheben, hat man zunächst

$$423^3 = (420 + 3)^3 = 420^3 + 3 \cdot 420^2 \cdot 3 \cdot 420 \cdot 3^2 + 3^3;$$

aber

$$420 = (400 + 20)^3 = 400^3 + 3 \cdot 400^2 \cdot 20 + 3 \cdot 400 \cdot 20^2 + 20^3,$$

daher, wenn oben statt 420^3 dieser Wert gesetzt wird,

$$423^3 = 400^3 + 3 \cdot 400^2 \cdot 20 + 3 \cdot 400 \cdot 20^2 + 20^3$$
$$+ 3 \cdot 420^2 \cdot 3 + 3 \cdot 420 \cdot 3^2 + 3^3.$$

Werden die Bestandtheile unter einander geschrieben und wirklich berechnet, so ist

$$\begin{array}{lr}
423^3 = (400 + 20 + 3)^3 & \\
= 400^3 \ldots\ldots & 64000000 \\
+ 3 \cdot 400^2 \cdot 20 \ldots & 9600000 \\
+ 3 \cdot 400 \cdot 20^2 \ldots & 480000 \\
+ 20^3 \ldots & 8000 \\
+ 3 \cdot 420^2 \cdot 3 \ldots & 1587600 \\
+ 3 \cdot 420 \cdot 3^2 \ldots & 11340 \\
+ 3^3 \ldots & 27 \\
\hline
 & = 75686967,
\end{array}$$

oder mit Weglassung der Nullen:

$$
\begin{array}{lr}
423^3 = & \\
\hline
4^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & 64\,. \\
3\,.\,4^2\,.\,2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & 96\,. \\
3\,.\,4\,\,.\,2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & 48\,. \\
2^3 \quad . \quad . \quad . \quad . & 8\,. \\
3\,.\,42^2\,\,3\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & 15876\,. \\
3\,.\,42\,.\,3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & 1134\,. \\
3^3 \quad . \quad . \quad . \quad . & 27\,. \\
\hline
 & = 75686967\,.
\end{array}
$$

Für den Cubus einer mehrziffrigen Zahl ergibt sich hieraus folgendes **Bildungsgesetz**:

1. Die erste Ziffer links gibt ihren eigenen Cubus.
2. Jede folgende Wurzelziffer gibt drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, endlich ihren eigenen Cubus.
3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daſs jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, sowie sie stehen, addiert.

IV. Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 121.

Aus einer Zahl die **Cubikwurzel ausziehen** heißt, eine Zahl finden, welche dreimal als Factor gesetzt die gegebene Zahl gibt. Um die Cubikwurzel aus einer Zahl anzuzeigen, setzt man vor diese das Wurzelzeichen und in dessen Öffnung die Ziffer 3.

Z. B. Aus 216 die Cubikwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche dreimal als Factor gesetzt 216 zum Producte gibt; diese Zahl ist 6, denn $6 \times 6 \times 6 = 216$. Man schreibt $\sqrt[3]{216} = 6$ und liest: Cubikwurzel aus 216 ist gleich 6.

Die einziffrigen Cubikwurzeln sind:

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt[3]{1} = 1, & \sqrt[3]{64} = 4, & \sqrt[3]{343} = 7, \\
\sqrt[3]{8} = 2, & \sqrt[3]{125} = 5, & \sqrt[3]{512} = 8, \\
\sqrt[3]{27} = 3, & \sqrt[3]{216} = 6, & \sqrt[3]{729} = 9.
\end{array}
$$

Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die **Cubikwurzel ausgezogen** wird, läſst sich aus dem Gesetze ableiten, nach welchem die Bestandtheile der Cubikwurzel in dem Cubus zusammengestellt erscheinen.

Erhebt man z. B. 537 zum Cubus, und ist dann aus dem gefundenen Cubus die Cubikwurzel zu ziehen, so hat man

537^3					$\sqrt[3]{154}$	854	153	$= 537$
5^3 . .	125			. . . . . .	125			
					29	854		: 75 . . 3 . 5^2
3 . 5^2 . 3 . .	22	5		. . . . . .	22	5		
3 . 5 . 3^2 . .	1	35		. . . . . .	1	35		
3^3 . .		27		. . . . . .		27		
					5	977	153	: 8427 . . 3 . 53^2
3 . 53^2 . 7 . .	5	898	9	. . . .	5	898	9	
3 . 53 . 7^2 . .		77	91	. . . .		77	91	
7^3 . .			343	. . . .			343	
	154	854	153				0	

Da die erste Wurzelziffer im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal soviel Ziffern, als deren die Cubikwurzel hat, oder um zwei oder eine weniger. Theilt man daher den Cubus von der Rechten gegen die Linke in Abtheiluugen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Wurzel Ziffern enthält. Im vorliegenden Falle hat der Cubus 154854153, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Der Cubus der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; die erste Ziffer der Cubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die größte Zahl nimmt, deren Cubus in der ersten Abtheilung enthalten ist; in 154 ist der Cubus von 5, nämlich 125, enthalten; die erste Wurzelziffer ist also 5. Wird $5^3 = 125$ von der ersten Abtheilung subtrahiert, so bleibt 29 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die zweite Abtheilung hinzu, so enthält die so entstehende Zahl 29854 die Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer hervorgehen, nämlich das Product aus dem dreifachen Quadrate der ersten Wurzelziffer mit der zweiten, das Product aus der dreifachen ersten Ziffer mit dem Quadrate der zweiten, und den Cubus der zweiten Wurzelziffer, und zwar erstreckt sich das erste Product nur bis auf die erste Ziffer der zweiten Abtheilung. Wird daher die Zahl 29854 mit Ausschluss der letzten zwei Ziffern, nämlich 298, durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 75, dividiert, so erhält man die zweite Wurzelziffer 3. Entwickelt man dann die drei Bestandtheile, welche die neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich $3 . 5^2 . 3 = 225$, $3 . 5 . 3^2 = 135$ und $3^3 = 27$, rückt jeden derselben um eine Stelle weiter nach rechts und subtrahiert dann diese Zahlen von 29854, so erhält man 5977 als Rest.

Setzt man zu diesem Reste die dritte Abtheilung dazu, so enthält die so gebildete Zahl 5977153 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer im Cubus hervorbringt, und zwar kommt das Product aus dieser Wurzelziffer und dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl in der Zahl 5977153 mit Ausschluss der letzten zwei Ziffern, also in 59771, vor. Dividiert man daher 59771 durch $3 \,.\, 53^2 = 8427$, so erhält man die dritte Wurzelziffer 7; u. s. w.

Beim Ausziehen der Cubikwurzel ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theilt die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern; die links stehende Abtheilung kann auch bloß eine oder zwei Ziffern enthalten. Sodann sucht man die größte Zahl, deren Cubus in der ersten Abtheilung zur Linken enthalten ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer in die Wurzel, und zieht ihren Cubus von der ersten Abtheilung ab.

2. Die folgenden Ziffern der Cubikwurzel werden durch die Division gefunden. Man setzt nämlich zu dem jedesmaligen Reste die nächstfolgende Abtheilung herab, und betrachtet die dadurch entstehende Zahl mit Ausschluss der zwei letzten Ziffern rechts als Dividend, das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Wurzel aber als Divisor. Der Quotient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

3. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl, multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl, multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren eigenen Cubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter, und subtrahiert die Summe der so gesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel nicht genau; sie kann aber mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man jedem Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

Kommen in der gegebenen Zahl auch Decimalen vor, so werden diese vom Decimalpunkte angefangen gegen die Rechte hin in Abtheilungen eingetheilt; hat die letzte Decimalabtheilung rechts weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ersetzt. In der Wurzel setzt man den Decimalpunkt, bevor man die erste Decimalabtheilung in Rechnung zieht.

Fünfter Abschnitt.
Verhältnisse und Proportionen.

§. 122.

Die Dreisatz- oder Regeldetri-Aufgaben wurden in früherer Zeit allgemein nur mit Hilfe der Proportionen aufgelöst, welche daher auch im Rechenunterrichte der Volksschulen eine sehr wichtige Rolle spielten. Nachdem jedoch die fortschreitende Entwicklung eines rationellen elementaren Unterrichtes dahin geführt hat, dass man die Regeldetri-Aufgaben durch kunstlose Schlüsse, und zwar vorzugsweise durch das sogenannte Zurückführen auf die Einheit, weit einfacher, mit mehr Einsicht und unmittelbarem Verständnis auflöst, als dies durch Bildung eines Proportionsansatzes möglich ist, haben sich bedeutende Schulmänner für die gänzliche Ausscheidung der Proportionslehre aus dem Unterrichtsstoffe der Volksschule ausgesprochen.

Die Vorzüge der Schlussrechnung sind auch in der That nicht zu verkennen. Indem der Schüler dabei die Lösung jeder Aufgabe durch einfache Schlüsse unmittelbar aus der genauen Beachtung aller Umstände ableitet, und sich der Richtigkeit seines Verfahrens bei jedem Schritte bewusst bleibt, gewinnt er eine weit größere Sicherheit in seinen Operationen, als wenn die Lösung mittelbar auf dem Umwege der Proportion bewerkstelligt wird. Die Schlussrechnung verdient daher in der Volksschule unbedingt die vorzüglichste Berücksichtigung, ja sie soll in den Landschulen die allein vorherrschende Auflösungsmethode für Regeldetri-Aufgaben bilden. Daraus folgt aber keineswegs, dass auch in gehobenen Volksschulen, die weitergreifende Zwecke zu verfolgen haben, die Proportionsrechnung völlig übergangen werden soll. Abgesehen davon, dass die geistige Gewandtheit des Schülers mächtig gefördert wird, wenn man ihn anleitet, die Lösung einer und derselben Aufgabe auf verschiedene Arten in Angriff zu nehmen, wird durch die Lehre von den Verhältnissen auch die gründliche Auffassung der späteren Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, in denen es sich um Zahlenverhältnisse handelt, besser vorbereitet, ohne dass jedoch die Lösung dieser Rechnungen selbst von der Proportionslehre abhängig gemacht würde.

I. Verhältnisse.

§. 123.

a) Um den Schülern von dem Wesen der Verhältnisse eine klare Vorstellung zu verschaffen, wird man sie sowohl reine als benannte Zahlen, und insbesondere auch Linien paarweise vergleichen und jedesmal beurtheilen lassen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, oder wie vielmal so groß die eine ist als die andere. Die Schüler werden dann folgende Erklärungen leicht und richtig auffassen:

Die Vergleichung zweier Zahlen oder zweier gleichartiger Größen, um zu sehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, heißt ein Verhältnis. Z. B. unter dem Verhältnisse von 12 zu 3 versteht man die Angabe, wie oft 3 in 12 enthalten ist, also den angezeigten Quotienten 12 : 3. Jedes Verhältnis enthält zwei Zahlen, welche Glieder heißen; das erste Glied der (Dividend) heißt das Vorderglied, das zweite Glied (der Divisor) das Hinterglied. Wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied wirklich dividiert, so heißt der Quotient der Exponent des Verhältnisses; der Exponent des Verhältnisses 12 : 3 ist 4.

Sowie die Division als Theilung zur Entstehung der Brüche Anlass gibt, so führt die Division als Messung auf den Begriff des Verhältnisses.

Aus diesen Erklärungen folgt auch:

1. In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten.

b) Nachdem die Schüler an dem einzelnen Verhältnisse die beiden Glieder mit einander verglichen haben, lasse man sie auch zwei oder mehrere Verhältnisse hinsichtlich ihrer Größe, welche durch den Exponenten ausgedrückt wird, in Vergleichung ziehen.

Zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, heißen gleich, z. B. 12 : 3 und 8 : 2.

Man kann ein Verhältnis in größeren oder kleineren Zahlen ausdrücken, d. i. seine Form ändern; der Wert desselben wird nicht geändert, so lange der Exponent ungeändert bleibt.

Daraus folgt:

1. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man ein Veehältnis, worin Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen darstellen, indem man beide Glieder mit dem wegzuschaffenden Nenner multipliciert.

Z. B. Aus dem Verhältnisse $5 : 2\frac{2}{3}$ erhält man, wenn man beide Glieder mit 3 multipliciert, das in ganzen Zahlen ausgedrückte Verhältnis 15 : 8, das mit dem gegebenen denselben Exponenten $1\frac{7}{8}$, also auch denselben Wert hat.

2. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied durch dieselbe Zahl dividiert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann jedes Verhältnis, dessen beide Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, abgekürzt werden, indem man beide Glieder durch jene Zahl dividiert.

Z. B. Statt des Verhältnisses 16 : 24 kann man, wenn beide Glieder durch 8 dividiert werden, das einfachere Verhältnis 2 : 3 setzen.

Durch die Verbindung der beiden vorhergehenden Übungen kann jedes Verhältnis auf die einfachste Form gebracht werden, indem man es, wenn darin Brüche vorkommen, zuerst in ganzen Zahlen darstellt, und dann, wenn es angeht, abkürzt.

c) Damit die von den Schülern gewonnenen Begriffe befestiget und zu noch größerer Klarheit erhoben werden, wendet man dieselben sogleich auf mannigfaltige praktische Beispiele an. Eine Schwierigkeit werden hiebei anfänglich nur die umgekehrten Verhältnisse bieten.

Sollte z. B. bei der Aufgabe: A geht in 3 Stunden so weit als B in 4 Stunden, wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten? der gedankenlose Schüler die Antwort geben: wie 3 : 4; so wird derselbe die Unrichtigkeit seiner Antwort sogleich einsehen, wenn man ihn fragt: wenn A schon in 3 Stunden einen Weg zurücklegt, welchen B erst in 4 Stunden macht; geht A geschwinder oder langsamer als B? Wenn aber die Geschwindigkeit des A größer ist als jene des B, kann sich die erste zu der zweiten so wie 3 : 4 verhalten? Nun ist der Schüler noch zu überzeugen, dass hier eben das umgekehrte Verhältnis 4 : 3 stattfindet. Wenn A einen Weg in 3 Stunden zurücklegt, den wievielten Theil dieses Weges legt er in 1 Stunde zurück? Wenn B denselben Weg in 4 Stunden zurücklegt, den wievielten Theil dieses Weges legt er in 1 Stunde zurück? Man kann daher die obige Aufgabe auch so ausdrücken: A legt in einer Stunde $\frac{1}{3}$ eines bestimmten Weges, B nur $\frac{1}{4}$ desselben Weges zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten? Offenbar wie $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, oder wie 4 : 3.

d) Wenn man von zwei zu vergleichenden Größen solche Theile zusammenstellt, welche an Wert, oder Größe, oder Gewicht u. s. w. gleich sind, so nennt man diese Gleichstellung eine Gleichung; z. B. 14 *kg* = 25 Wiener Pfund.

Jede Gleichung zwischen zwei benannten Zahlen läſst sich auf die Form eines Verhältnisses bringen. Es sei z. B. die Gleichung 14 *kg* = 25 Wiener Pfund gegeben und hieraus das Verhältnis zwischen dem Kilogramm und dem W. Pfund herzuleiten. Sind 14 *kg* = 25 W. Pfund, so ist 1 *kg* = $\frac{25}{14}$ Wiener Pfund; da nun 1 W. Pfund = $\frac{14}{14}$ W. Pfund, so verhält sich 1 *kg* zu 1 W. Pfund wie $\frac{25}{14} : \frac{14}{14}$. d. i. wie 25 : 14.

Um daher eine Gleichung zwischen zwei benannten Größen in ein Verhältnis zu verwandeln, muſs man die Zahlen der Gleichung so umstellen, dass sich die größere auf die mehrwertige Größe, die kleinere auf die geringere Größe bezieht.

Umgekehrt ergibt sich durch Umstellung der Zahlen, welche das Verhältnis zwischen zwei Größen ausdrücken, sofort eine Gleichung.

Verhält sich z. B. 1 *l* zu 1 W. Maß wie 5 : 7, so hat 1 *l* 5 Theile, wie 1 W. Maß deren 7 hat; also ist $\frac{1}{5}$ *l* = $\frac{1}{7}$ W. Maß, oder 1 *l* = $\frac{5}{7}$ W. Maß, und 8 *l* = 5 W. Maß.

II. Proportionen.

§. 124.

Wenn man zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben und somit gleich sind, durch das Gleichheitszeichen verbindet, so heißt ein solcher Ausdruck **Proportion**. Z. B. $12 : 3 = 8 : 2$ ist eine Proportion, welche gelesen wird: 12 verhält sich zu 3, wie sich 8 zu 2 verhält, oder kürzer: 12 zu 3 wie 8 zu 2. Das erste und vierte Glied (12 und 2) werden **äußere**, das zweite und dritte (3 und 8) **innere** Glieder der Proportion genannt.

Setzt man in einer beliebigen Proportion $12 : 3 = 8 : 2$ statt eines jeden Vordergliedes das Product aus dem Hintergliede und dem Exponenten, so erhält man

$$3 \times 4 : 3 = 2 \times 4 : 2.$$

Daraus ist ersichtlich, dass sowohl die äußeren als die inneren Glieder mit einander multipliciert, dieselben drei Factoren 3, 4 und 2 enthalten, daher auch dasselbe Product geben.

In jeder Proportion ist also das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die **Proportion auflösen**. Das unbekannte Glied wird gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet.

Eine Proportion kann aufgelöst werden, wenn man aus dem bekannten Verhältnisse den Exponenten sucht und mittels desselben das unbekannte Glied des zweiten Verhältnisses bestimmt.

Es sei z. B. die Proportion $27 : 9 = x : 2$ aufzulösen. Da hier der Exponent des ersten Verhältnisses 3 ist, so muss auch der Exponent des zweiten Verhältnisses 3, und daher das Vorderglied desselben $x = 2 \times 3 = 6$ sein. Die Proportion ist daher $27 : 9 = 6 : 2$.

Die Auflösung einer Proportion kann auch nach einem der folgenden zwei Sätze geschehen:

1. **Ein äußeres Glied der Proportion wird gefunden**, indem man die beiden inneren Glieder mit einander multipliciert und das Product durch das bekannte äußere dividiert.

Es sei sei z. B. die Proportion $8 : 5 = 16 : x$ aufzulösen. Das Product der inneren Glieder ist $5 \times 16 = 80$, also muss auch das Product der äußeren Glieder 80 sein; eines dieser Glieder, also einer der beiden Factoren, ist 8; um den anderen Factor zu finden, darf man nur das Product 80 durch den einen Factor, nämlich durch das bekannte äußere Glied 8 dividieren; folglich $x = \frac{5 \times 16}{8} = \frac{80}{8} = 10$. Die Proportion ist also $8 : 5 = 16 : 10$.

2. Ein inneres Glied der Proportion wird gefunden, indem man die beiden äußeren Glieder mit einander multipliciert und das Product durch das bekannte innere dividiert.

Ist z. B. die Proportion $8 : x = 24 : 9$ aufzulösen, so erhält man daraus $8 \times 9 = 72$ als das Product der äußeren Glieder, es muss daher auch das Product der inneren Glieder 72 sein; hier ist also aus dem Producte 72 zweier Zahlen und aus einer derselben, nämlich 24, die andere zu suchen, d. h. 72 durch 24 zu dividieren; folglich $x = \frac{8 \times 9}{24} = \frac{72}{24} = 3$, und die Proportion heißt $8 : 3 = 24 : 9$.

III. Anwendung der Proportionen mit besonderer Rücksichtnahme auf die Schlussrechnung.

§. 125.

Hier ist zunächst die Unterscheidung der angewandten Verhältnisse in gerade und verkehrte zu erläutern, wobei der Lehrer die nachstehenden Betrachtungen zu Grunde legen kann.

Kostet 1 *m* Tuch 6 fl., so kosten

2 *m* 2mal 6, also 12 fl.
3 „ 3 „ 6, „ 18 „
4 „ 4 „ 6, „ 24 „

Es kosten daher

die doppelte Ware das doppelte Geld
„ dreifache „ „ dreifache „
„ vierfache „ „ vierfache „

und es finden folgende Proportionen statt:

2 *m* : 3 *m* = 12 fl. : 18 fl. oder 2 : 3 = 12 : 18,
2 *m* : 4 *m* = 12 fl. : 24 fl. „ 2 : 4 = 12 : 24,
u. s. w.

Die Zahlen, welche die Menge einer Ware und den Geldbetrag derselben anzeigen, hängen also so zusammen, dass zu einer 2mal, 3mal, 4mal so großen Zahl der einen Art auch eine 2mal, 3mal, 4mal so große Zahl der andern Art gehört. Von zwei solchen Arten von Zahlen sagt man, dass sie gerade proportioniert sind, oder in einem geraden Verhältnisse stehen. Ware und Preis sind also gerade proportioniert. Es wird nicht überflüssig sein, den Schülern zu bemerken, dass diese letzte Behauptung nicht unbedingt richtig sei, sondern nur unter der Voraussetzung gelte, dass jede Einheit der Ware den gleichen Wert behält. Die Folgerung: wenn 1 *m* Tuch 6 fl. kostet, so werden 2 *m* 2mal 6 fl. kosten, ist nur dann richtig, wenn vorausgesetzt wird, dass man auch im zweiten Falle dieselbe Sorte Tuch kauft, und dass jeder Meter zu dem nämlichen Preise angerechnet wird, wie im ersten Falle. Würde man im zweiten Falle eine anderre Sorte Tuch kaufen, oder würde der Preis eines Meters zu- oder abgenommen haben, so würde auch nicht gefolgert werden können, dass man für 2mal so viele Meter 2mal so viel Geld bezahlen müsse. Man könnte daher den obigen Satz richtiger so ausdrücken: **Ware und Preis sind bei übrigens gleichen Umständen gerade proportioniert.**

Aus der voranstehenden Darstellung folgt auch:

Wenn zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art in der nämlichen Ordnung genommen.

In einem geraden Verhältnisse stehen auch: die Zeit der Arbeit und der Lohn, die Weite des Weges und der Frachtlohn, — das Gewicht der Last und der Frachtlohn, — die Zeit und der zurückgelegte Raum, — Capital und Zins, u. dgl.

Nun wird auch der Begriff von verkehrt proportionierten Größen entwickelt.

Wenn man einen Taglöhner aufnimmt, um einen Garten umzugraben, so braucht er dazu eine bestimmte Zeit. Bestellt man nun statt des einen, zwei eben so fleißige Arbeiter, so brauchen diese offenbar nur halb so viel Zeit, als der eine Arbeiter. Nimmt man drei Arbeiter auf, so brauchen sie nur den dritten Theil der Zeit, die 1 Arbeiter braucht, u. s. w.

Braucht z. B. 1 Arbeiter für eine Arbeit 60 Tage,
so brauchen 2 Arbeiter nur die Hälfte von 60, also 30 Tage,
" " 3 " " den 3. Theil " 60, " 20 "
" " 4 " " " 4. " " 60, " 15 "
u. s. w.

daher:

doppelte Zahl der Arbeiter, Hälfte der Zeit,
dreifache " " " Drittel " "
vierfache " " " Viertel " "

und es finden folgende Proportionen statt:

2 Arb. : 3 Arb. = 20 T. : 30 T. oder 2 : 3 = 20 : 30.
1 " : 4 " = 15 " : 15 " " 1 : 4 = 15 : 60,

Die Zahl der Arbeiter und die Zahl der Arbeitstage sind also zwei solche Arten von Zahlen, dass zu einer 2mal, 3mal, 4mal so großen Zahl der einen Art nur die Hälfte, der dritte, vierte Theil von der Zahl der andern Art gehört. Man sagt von solchen Arten von Zahlen, dass sie verkehrt proportioniert sind, oder in einem **verkehrten Verhältnisse stehen.** Die Zahl der Arbeiter und die Arbeitszeit sind demnach verkehrt proportioniert.

Auch hier wird vorausgesetzt, dass die Arbeiter jedesmal eine gleich große Arbeit zu vollenden haben, und dass sie mit gleichem Fleiße arbeiten.

Aus dem Obigen folgt auch:

Sind zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, jedoch in umgekehrter Ordnung genommen.

In umgekehrtem Verhältnisse stehen auch: die Zahl der zu Nährenden und die Zeit, während welcher die Lebensmittel ausreichen sollen, — das Gewicht der Last und die Weite des Weges bei gleichem Frachtlohne, — die Länge und die Breite eines Stoffes bei gleichem Inhalte, u. dgl.

Jede praktische Rechnungsaufgabe besteht aus einem Bedingungssatze und einem Fragesatze. Z. B. in der Aufgabe : 4 *m* kosten 15 fl.; wie viel kosten 9 *m*? drückt der erste Satz eine Bedingung, der zweite eine Frage aus.

Schriftlich stellt man die Aufgabe gewöhnlich so dar, dass man zuerst den Bedingungs- und darunter den Fragesatz ansetzt, und dabei die gesuchte Zahl durch x ausdrückt. Z. B. die obige Aufgabe wird so angeschrieben:

4 *m* 15 fl.
9 „ x „

Die Auflösung der Aufgaben mittels der Proportion beruht auf den oben entwickelten Sätzen, nach denen sich aus 2 Paaren zusammengehöriger Zahlen von zwei Arten, welche gerade oder verkehrt proportioniert sind, immer eine Proportion bilden läßt.

Man setzt das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der andern Art in der nämlichen Ordnung genommen, wenn beide Arten gerade, und in umgekehrter Ordnung, wenn sie verkehrt proportioniert sind. Die so angesetzte Proportion wird dann aufgelöst.

Es ist dabei gleichgiltig, in welches Glied der Proportion die unbekannte Zahl zu stehen kommt; am zweckmäßigsten erscheint es, dieselbe sogleich in das erste Glied zu setzen. Soll die Proportion dadurch aufgelöst werden, dass man das Product der inneren Glieder durch das bekannte äußere dividiert, so können höchstens die Glieder desjenigen Verhältnisses, worin x vorkommt, als benannte Zahlen angesetzt werden. Am einfachsten ist es, alle Glieder der Proportion als unbenannt hinzustellen, da über den Namen der gefundenen Zahl x, welche jedesmal mit der damit gleichartigen Zahl gleichbenannt sein muss, ohnehin kein Zweifel obwalten kann.

Zur näheren Erläuterung des hier angegebenen Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen:

1) 5 *m* Tuch kosten 18 fl.; wie viel fl. kosten 15 *m*?

Da 2-, 3-, 4mal so viel Meter auch 2-, 3-, 4mal so viel Gulden kosten, somit die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so setzt man das Verhältnis der Gulden x : 18 gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Meter in der nämlichen Ordnung genommen, nämlich 15 : 5, und löst dann die dadurch erhaltene Proportion auf.

Die Rechnung steht:

5 *m* 18 fl.		$x : 18 = \cancel{15}^{3} : \cancel{5}$
15 „ x „		
		$x = 18 \times 3 = 54$ fl.

2) 8 Arbeiter können ein Werk in 30 Tagen vollenden; in wie viel Tagen werden 15 Arbeiter damit fertig?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert, da 2-, 3-, 4mal so viel Arbeiter zur Vollendung desselben Werkes nur die Hälfte, den dritten, vierten Theil der Zeit brauchen; man setzt daher das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art x : 30 gleich dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen, nämlich 8 : 15.

8 Arb. 30 Tage		$x : \cancel{30}^{2} = 8 : \cancel{15}$
15 „ x „		
		$x = 2 \times 8 = 16$ Tage.

Mit der Lösung dieser Aufgaben nach der Proportion ist überall auch die Lösung nach der Schlussrechnung zu verbinden.

IV. Zusammengesetzter Dreisatz.

§. 126.

Eine zusammengesetzte Dreisatzaufgabe entsteht, wenn ein Verhältnis (das Verhältnis mit der Fragezahl) durch mehrere Verhältnisse, welche gleichzeitig auf die Größe der Fragezahl einwirken, bestimmt werden soll. Jede solche Aufgabe kann daher in mehrere einfache zerlegt werden.

Der dabei zu befolgende Rechnungsgang ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

15 Arbeiter erhalten für 5 Tage 65 fl. Arbeitslohn; wie viel erhalten 10 Arbeiter für 6 Tage?

Ansatz: 15 Arb. verdienen in 5 Tagen 65 fl.
10 „ „ „ 6 „ x „

Ohne Rücksicht auf die Zeit löst man zuerst die folgende Aufgabe: 15 Arbeiter verdienen 65 fl.; wie viel verdienen 10 Arbeiter?

15 Arb. 65 fl.	$x : 65 = 10 : 15$
10 „ x „	$x = 43\frac{1}{3}$ fl.

Wenn man nun weiß, dass 10 Arbeiter in 5 Tagen $43\frac{1}{3}$ fl. verdienen, so ist weiter zu bestimmen, wie viel sie in 6 Tagen verdienen.

Man hat dabei die Aufgabe zu lösen: Eine gewisse Anzahl Arbeiter verdienen in 5 Tagen $43\frac{1}{3}$ fl.; wie viel verdienen sie in 6 Tagen?

5 Tage	$43\frac{1}{3}$ fl.	$x : 43\frac{1}{3} = 6 : 5$
6 „	x „	$x = 52$ fl.

Wenn also 15 Arbeiter in 5 Tagen 65 fl. verdienen, so verdienen 15 Arbeiter in 6 Tagen unter übrigens gleichen Umständen 52 fl.

Einfacher und durchsichtiger gestaltet sich die Lösung nach der Schlussrechnung. Dabei muss in dem Ansatze, um die Schlüsse leichter bilden zu können, jedesmal diejenige Art von Zahlen, zu welcher die unbekannte gehört, auf die letzte Stelle gebracht werden, wie es auch oben geschah.

15 Arb. verdienen in 5 Tagen 65 fl.
10 „ „ „ 6 „ ? „

1 Arb. verdient in 5 Tagen den 15. Theil,
10 „ verdienen „ 5 „ 10mal so viel,
10 „ „ „ **1** Tage den 5. Theil,
10 „ „ „ **6** Tagen 6mal so viel;

$$\text{also } \frac{65 \text{ fl.} \times 10 \times 6}{15 \times 5} = 52 \text{ fl.}$$

Die Erklärung dieser Schlussrechnung liegt in der Darstellung selbst.

Sechster Abschnitt.

Besondere Verhältnisrechnungen.

I. Procentrechnung.

§. 127. Procentrechnung von Hundert.

Die Procentrechnung hat in der neuesten Zeit in allen Berufskreisen eine erhöhete Bedeutung erhalten.

Sowie man den Wert der Schnittwaren per Meter, den Wert der Flüssigkeiten per Liter oder Hektoliter angibt, ebenso wird bei der Bestimmung vieler anderer Dinge, z. B. der Zinsen, des Gewinnes oder Verlustes u. dgl. der Betrag von Hundert, das Procent, als Maßstab zu Grunde gelegt. Unter Procent versteht man im allgemeinen eine Zahl, welche sich auf 100 Einheiten derselben Art bezieht. Z. B. 5 Procent (5%) bedeutet, dass von je 100 Einheiten einer Art 5 Einheiten derselben Art, von 100 fl. also 5 fl., von 100 *kg* 5 *kg*, zu nehmen sind. Die Zahl 100 erscheint für verschiedene Wertbestimmungen darum als besonders geeignete Grundlage, weil mit ihr sehr leicht zu rechnen ist.

Das Procent lässt noch eine zweite Auffassungsweise zu, die übrigens aus dem obigen ursprünglichen Begriffe als unmittelbare Folgerung abgeleitet werden kann. Hat man z. B. von 543 fl. 1% zu nehmen, so heißt dies nach der obigen Erklärung des Procentes so viel als: von je 100 fl., die in 543 fl. enthalten sind, 1 fl. nehmen, somit von 1 fl. immer nur den 100sten Theil von 1 fl., von 543 fl. also den 100sten Theil von 543 fl. nehmen. 1% von 543 fl. bedeutet demnach $\frac{1}{100}$ von 543 fl. Ebenso folgt, dass 2% einer Zahl $\frac{2}{100}$ derselben, 3% einer Zahl $\frac{3}{100}$ derselben, 4% $\frac{4}{100}$ der Zahl u. s. w. bedeutet. Diese zweite Auffassung des Procentbegriffes ist für das Rechnen selbst meistens vortheilhafter, als die ursprüngliche Erklärung.

Bei jeder Procentrechnung kommen drei Bestimmungen vor: der Procentsatz, d. i. der auf 100 entfallende Antheil, der Betrag, von welchem das Procent gerechnet wird, und der auf diesen Betrag entfallende Procentantheil oder die Procente. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte bestimmt werden.

Die Procentrechnungen gehören zu den Dreisatzaufgaben und werden wie diese am einfachsten durch die Schlussrechnung ausgeführt.

a) **Berechnung des Procentertrages.**

Die Einrichtungsstücke eines Hauses kosten 448 fl.; man rechnet für die Abnützung derselben jährlich $8\frac{1}{2}$%; wie viel beträgt dieses?

$$\begin{aligned} &100 \text{ fl. geben } 8\tfrac{1}{2} = 8{\cdot}5 \text{ fl.} \\ &1 \text{ „ gibt den 100sten Theil} = \frac{8{\cdot}5}{100} \text{ fl.} \\ &448 \text{ „ geben 448mal so viel} = \frac{448 \times 8{\cdot}5}{100} \\ &\qquad = 38{\cdot}08 \text{ fl.} \end{aligned}$$

Oder kürzer:

1% d. i. $\frac{1}{100}$ von 448 fl. sind 4·48 fl.

$8\frac{1}{2}$% sind $8\frac{1}{2}$mal so viel $= 4{\cdot}48 \times 8\frac{1}{4} = 38{\cdot}08$ fl.

Die Procente eines Betrages von Hundert werden demnach berechnet, indem man den 100sten Theil dieses Betrages mit dem Procentsatze multipliciert.

Die Rechnung würde hiernach kurz so stehen:

$$\begin{array}{l} 4{\cdot}48 \times 8\frac{1}{2} \\ \hline 35{\cdot}84\ .\ .\ 8 \\ 2{\cdot}24\ .\ .\ \frac{1}{2} \\ \hline 38{\cdot}08 \text{ fl.} \end{array}$$

Um Procentangaben in kleinen Brüchen zu vermeiden, wird für manche Größen der Ertrag nach Tausend, das Promille (‰) berechnet. Z. B. 1‰ heißt, von je 1000 einer Zahl ist 1, oder es ist der 1000ste Theil einer Zahl zu berechnen.

Wie viel beträgt $\frac{1}{2}$‰ von 3580 fl.?

$$\begin{array}{l} 3{\cdot}580 \times \frac{1}{2} \\ \hline 1{\cdot}79 \text{ fl.} \end{array}$$

b) **Berechnung des Procentsatzes.**

Ein Haus, das 18300 fl. gekostet hat, trägt jährlich 732 fl. reinen Zins; zu wie viel % verzinset es sich?

18300 fl. geben jährlich 732 fl. Zins,

100 „ „ „ $\frac{732}{183} = 4$ fl. Zins;

das Haus verzinset sich also mit 4 %.

Oder:

1 % von 18300 fl. sind 183 fl.; 732 fl. sind daher so viel % von 18300 fl., als wie oft 183 fl. in 732 fl. enthalten sind;

$732 : 183 = 4$ %.

c) **Berechnung des Betrages, von welchem die Procente bestimmt werden.**

In einer Stadt starben in einem Jahre 324 Personen, es sind dies 2 % von der ganzen Einwohnerzahl; wie groß ist diese?

2 Sterbefälle auf 100 Einwohner

1 Sterbefall „ 50 „

324 Sterbefälle „ $324 \times 50 = 16200$ Einw.

Oder:

2 % d. i. $\frac{2}{100}$ von der Einwohnerzahl $= 324$

$\frac{1}{100}$ „ „ „ $= 162$

daher die Einwohnerzahl selbst $= 162 \times 100$

$= 16200$.

d) **Tara und Gutgewicht.**

Das Gewicht einer Ware mit Inbegriff des Behältnisses, worin sie verpackt ist, nennt man das Bruttogewicht, das Gewicht des Behältnisses die Tara, und das Gewicht der Ware an und für sich d. i. ohne Verpackung das Nettogewicht. Die Tara wird entweder stückweise pr. Sack, Ballen, Fass, Kiste, u. s. w., oder nach Procenten vom Bruttogewichte bestimmt.

Wenn man vom Bruttogewichte die Tara subtrahiert, so bleibt als Rest das Nettogewicht übrig, nach welchem dann die Zahlung zu berechnen kommt.

e) **Warendiscont oder Sconto.**

Beim Warenverkaufe im großen wird dem Käufer gewöhnlich eine bestimmte Zahlungsfrist gewährt, und darum der Preis etwas höher gestellt. Zieht nun der Käufer die bare Zahlung vor, so muss ihm wegen der baren Bezahlung vom Warenpreise ein Abzug, welcher Warendiscont, Sconto, auch Rabatt heißt, und nach Procenten berechnet wird, gestattet werden.

Unter Rabatt versteht man häufig auch den Abzug, welcher vom Preise solcher Waren, bei denen der Erzeuger den Preis für den Einzelnverkauf festgestellt hat, dem Kleinhändler als Ersatz für die Bezugskosten und zur Ermöglichung eines Gewinnes gewährt wird. Von dieser Art ist der Buchhändlerrabatt.

f) **Assecuranz.**

Gesellschaften, welche gegen eine bestimmte Gebür den Schadenersatz für eingetretene Unglücksfälle und Verluste übernehmen, heißen Versicherungs- oder Assecuranz-Gesellschaften. Es gibt Lebens-, Feuer-, Hagel-, Seeschaden-Versicherungs-Anstalten. Die Gebür, welche für die Übernahme der Schadenvergütung an die Gesellschaft bezahlt wird, heißt Prämie und wird nach Procenten oder Promille berechnet.

g) **Sensarie und Provision.**

Zur Abschließung von Geschäften desselben Handelsplatzes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe heißt Sensarie; sie wird nach Procenten oder Promille bestimmt.

Wenn jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waren, einem andern aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Commissionär, und die Vergütung, welche dieser für seine Bemühung erhält, Provision. Die Provision wird nach Procenten berechnet und beim Einkaufe zu dem Warenpreise addiert, beim Verkaufe von demselben subtrahiert.

h) **Gewinn und Verlust.**

Wenn man für eine Ware beim Verkaufe mehr einnimmt, als man dafür beim Einkaufe ausgelegt hat, so hat man Gewinn; wenn man dagegen beim Verkaufe weniger einnehmen würde, als man beim Einkaufe ausgelegt hat, so hätte man Verlust. Gewinn und Verlust sind demnach der Unterschied zwischen der Ausgabe beim Einkaufe und der Einnahme beim Verkaufe.

Geschäftsleute geben den Gewinn oder Verlust gewöhnlich in Procenten an. Z. B. 8 % gewinnen heißt, statt je 100 fl., die man beim Einkaufe ausgelegt hat, beim Verkauf 8 fl. mehr als 100 fl., also 108 fl. einnehmen; und 8 % verlieren bedeutet, statt 100 fl., die man beim Einkaufe ausgegeben hat, beim Verkaufe 8 fl. weniger als 100 fl., also nur 92 fl. einnehmen.

§. 128. Procentrechnung auf und in Hundert.

In den vorhergehenden Aufgaben war der Betrag, von welchem die Procente berechnet wurden, durchgängig mit der Grundzahl 100 selbst gleichartig. Die Procentrechnung ist in diesem Falle eine Rechnung von Hundert, zum Unterschiede von der Rechnung auf Hundert und in Hundert, welche angewendet wird, wenn der Betrag, von welchem die Procente berechnet werden, nicht mit der Grundzahl 100 selbst, sondern bezüglich mit der um den Procentsatz vermehrten oder verminderten Grundzahl 100 gleichartig ist.

1. Von einer Zahl 1%, 2%, 3% . . . auf Hundert rechnen, heißt von je 101, 102, 103 . . . Einheiten bezüglich 1, 2, 3 . . . Einheiten nehmen.

Die Rechnung auf Hundert wird angewendet, wenn in einer Aufgabe nicht der ursprüngliche, sondern der um die Procente vermehrte Betrag gegeben ist.

Z. B. Eine Ware kostet mit Einrechnung von 2 % Provision 500 fl.; wie viel beträgt die Provision?

Die Summe 500 fl. enthält den reinen Warenpreis bereits um die Provision vermehrt; sie ist entstanden, indem man je 100 fl. des reinen Warenpreises um die Provision von 2 fl. vermehrt, aus je 100 fl. also 102 fl. gebildet hat. Man hat daher:

In 102 fl.	Warenpreis	2 fl. Provision
„ 1 „	mit Provision	$\frac{2}{102}$ „ „
„ 500 „	sind enthalten	$\frac{500 \times 2}{102}$ „

$= 9{\cdot}8$ fl. Provision.

Hier ist der Betrag 500 nicht mit 100, sondern mit $100 + 2 = 102$ gleichartig; die 2 % werden nicht von je 100, sondern von je 102, die in 500 enthalten sind, gerechnet. Dies ist also eine Procentrechnung auf Hundert.

2. Von einer Zahl 1 %, 2 %, 3 % . . . in Hundert rechnen heißt von je 99, 98, 97 . . . Einheiten bezüglich 1, 2, 3 . . . Einheiten nehmen.

Die Rechnung in Hundert wird angewendet, wenn nicht der ursprüngliche, sondern der um die Procente verminderte Betrag gegeben ist.

Z. B. Der Verkaufspreis einer Ware nach Abzug von 2 % Provision ist 500 fl.; wie viel beträgt die Provision?

Die Summe 500 fl., in welcher von dem reinen Warenpreise die Provision bereits abgezogen ist, wurde erhalten, indem man von je 100 fl. Warenpreis 2 fl. Provision in Abzug gebracht, also statt je 100 fl. nur 98 fl. angenommen hat. Man hat demnach:

Zu 98 fl.	Warenpreis nach	2 fl. Provision
„ 1 „	Abzug der	$\frac{2}{98}$ „ „
„ 500 „	Provision gehören	$\frac{500 \times 2}{98}$ „

$= 10{\cdot}2$ fl. Provision.

Dies ist eine Procentrechnung in Hundert, da der gegebene Betrag 500 mit $100 - 2 = 98$ gleichartig ist, und die 2 % nicht von je 100, sondern von je 98, die in 500 vorkommen, zu rechnen sind.

II. Die Zins- und Discontrechnung.

A. Einfache Zinsen.

§. 129. Berechnung der Zinsen.

Wenn A dem B Geld leihet, so ist A der Gläubiger, B der Schuldner; die geliehene Geldsumme heißt Capital und die Vergütung, welcher der Schuldner dem Gläubiger für die Benützung des Capitals zahlen muss, Zins oder Interessen. Der Zins wird nach Procenten bestimmt, welche sich gewöhnlich auf 1 Jahr beziehen und der Zinsfuß genannt werden. Bei der Zinsrechnung nimmt man den Monat zu 30 Tagen an.

In der Zinsrechnung kommen vier Größen vor: 1. das Capital, 2. der Procentsatz oder Zinsfuß, 3. die Zeit, durch welche das Capital ausgeliehen bleibt und 4. der Zins. Wenn drei von diesen Größen gegeben sind, so kann aus denselben die vierte bestimmt werden.

Die Zinsrechnung kann als eine Procentrechnung angesehen werden, in welcher das Capital dem Betrage, der Zinsfuß dem Procentsatze und der Zins den Procenten entspricht, zu welchen Größen jedoch noch eine vierte Größe, die Zeit, hinzutritt.

a) **Zinsen für ein Jahr.**

Wie viel Zins geben jährlich 485 fl. Capital zu 6%?

100 fl. Cap. . . 6 fl. Zins

1 " " . . $\frac{6}{100}$ " "

485 " " . . $\frac{485 \times 6}{100} = 29{\cdot}1$ fl. Zins.

Oder:

1% d. i. $\frac{1}{100}$ von 485 . . $4{\cdot}85$ fl. Zins.

6% vo 485 . . . . $4{\cdot}85 \times 6 = 29{\cdot}1$ fl. Zins.

Der Zins für ein Jahr wird daher berechnet, indem man den 100sten Theil des Capitals mit dem Zinsfuß multipliciert.

Leichtere derlei Aufgaben sollen von den Schülern im Kopfe aufgelöst werden. Dabei berechnet man den Zins für die Hunderte des Capitals durch eine einfache Multiplication, für die Zehner und Einer durch Anwendung des Schlusses: So viele Gulden jährlichen Zins 100 fl. Capital geben, eben so viele Kreuzer gibt 1 fl. Capital. Für das obige Beispiel hätte man: 400 fl. Capital geben 4mal 6 fl., d. i. 24 fl. Zins; 85 fl. Capital geben 85mal 6 Kr. = 5 fl. 10 Kr.; zusammen 29 fl. 10 Kr.

b) **Zinsen für Jahre, Monate und Tage.**

Bei der Berechnung der Zinsen für irgend eine gegebene Zeit verfährt man auf folgende Art:

1. Die Zinsen für mehrere Jahre findet man, indem man zuerst die Zinsen für ein Jahr berechnet und diese mit der Anzahl der Jahre multipliciert.

2. Sind auch Monate und Tage gegeben, so bedient man sich der Zerfällungsmethode; man zerlegt die Monate in bequeme Theile eines Jahres und nimmt von den einjährigen Zinsen eben solche Theile; die Tage zerlegt man in Theile eines Monates und nimmt eben solche Theile von den monatlichen Zinsen. Alle diese Beträge werden sodann zu den Zinsen für Jahre addiert.

Z. B. Wie viel Zinsen geben 3060 fl. Capital zu $5\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren 2 Mon. 22 Tagen?

```
 30·60 × 5½
153·00
 15·30
168·30 fl. für 1 Jahr
504·90 fl. für 3 Jahre
 28·05   „  „  2 Mon. = 1/6 Jahr
  4·678  „  „ 10 Tage = 1/6 v. 2 Mon.
  4·678  „  „ 10  „
  0·936  „  „  2  „   = 1/5 v. 10 Tagen
543·242 fl. Zins.
```

c) **Zinsen für eine bestimmte Anzahl Tage.**

Im Geschäftsleben kommt es häufig vor, dass die Zinsen für eine gegebene Anzahl von Tagen zu bestimmen sind.

Z. B. Wie viel beträgt der Zins von 2518 fl. zu 6% in 45 Tagen?

```
 100 fl. Cap. geben in 1 Jahr 6       fl. Zins
 100  „   „    „   „  1 Mon. 1/2       „   „
 100  „   „    „   „  1 Tage 1/60      „   „
   1  „   „   gibt „  1  „  1/6000     „   „
2518  „   „  geben „  1  „  2518/6000  „   „
2518  „   „    „   „ 45  „  (2518 × 45)/6000 fl. Zins.
```

Der Zins für eine bestimmte Anzahl von Tagen zu 6% wird daher berechnet, indem man das Capital mit der Zahl der Tage multipliciert und das Product durch 6000 dividiert.

Ist der Zins zu mehr oder weniger als 6% zu berechnen, so sucht man zuerst den Zins zu 6% und leitet daraus mittelst Zerfällung den Zins für das gegebene Procent ab.

Z. B. Wie viel beträgt der Zins von 1820 fl. zu 5% vom 1. Mai bis 16. September?

```
Vom 1. Mai bis 1. Sept. sind 4 Mon. = 120 Tage
 „  1. Sept. „ 16.  „    „             15  „
                                       135 Tage
   1820 × 135
    5460
     9100
   245700 : 6000
    40·950 fl. à 6%
ab   6·825  „ 1% = 1/6 von 6%
    34·125 fl. à 5%.
```

§. 130. Berechnung des Zinsfußes, des Capitals oder der Zeit.

Für die Volksschule empfiehlt sich auch zur Lösung der hierher gehörigen Aufgaben am besten die Schlussrechnung.

1) 805 fl. Capital geben in 3 Jahren 144·9 fl. Zins; zu wie viel % ist das Capital angelegt, d. h. wie viel fl. Zins geben 100 fl. Capital in 1 Jahre?

805 fl. Cap. in 3 Jahren 144·9 fl. Zins

805 „ „ „ 1 Jahre $\frac{144{\cdot}9}{3}$ „ „

1 „ „ „ 1 „ $\frac{144{\cdot}9}{805 \times 3}$ fl. Zins

100 „ „ „ 1 „ $\frac{144{\cdot}9 \times 100}{805 \times 3}$ fl. Zins

$= 6$ fl. Zins.

Das Capital ist also zu 6% angelegt.

2) Welches Capital gibt zu 4% in 2 Jahren 70 fl. Zins?

4% des Capitals in 2 Jahren = 70 fl.
4% „ „ „ 1 Jahre = 35 „
1% „ „ „ 1 „ = 8·75 „
daher das Capital selbst 8·75 fl. × 100 = 875 „

3) Wie lange müssen 350 fl. anliegen, damit der Zins à 5% dem Capitale gleich werde?

350 fl. Capital geben zu 5% in 1 Jahre 3·5 × 5 = 17·5 fl.; 350 fl. Zinsen gibt also dasselbe Capital in so viel Jahren, als wie oft 17·5 fl. in 350 fl. enthalten sind, somit in

350 : 17·5 = 20 Jahren.

§. 131. Künftiger und gegenwärtiger Wert einer Geldsumme nach einfachen Zinsen.

a) Wert einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

(Vereinigung des Capitals und der Zinsen in eine Summe.)

Wenn jemand einen Geldbetrag später zahlt, als er ihn zahlen sollte, so wird er nicht nur diesen Betrag, sondern auch die Zinsen davon für die Zeit, um welche er später zahlt, zu entrichten haben.

Um daher den künftigen Wert einer Geldsumme, d. i. den Wert derselben nach einer bestimmten Zeit zu finden, berechnet man die Zinsen davon für diese Zeit und addiert sie zu der gegebenen Geldsumme. Z. B.

Welchen Wert haben 1250 fl. bei 6% Zins nach 4 Jahren?

12·50 × 6		Capital	1250 fl.
74·00 fl. für 1 Jahr.		Zins für 4 Jahre	300 „
300 fl. für 4 Jahre		Wert nach 4 Jahren	1550 fl.

Oder:

100 fl. sammt Zinsen nach 4 Jahren $= 124$ fl.
1 „ „ „ „ 4 „ $= \frac{124}{100}$ „
1250 „ „ „ „ 4 „ $= \frac{1250 \times 124}{100}$ fl.
$= 1550$ fl.

b) **Wert einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.**
(Zerlegung einer Summe in Capital und Zins; Discont.)

Wenn jemand eine unverzinsliche Geldsumme früher zahlt, als er sie zahlen sollte, so wird er nicht die volle Geldsumme, sondern nur einen so großen Betrag zahlen, dass dieser vermehrt um die Zinsen, die er bis zum Zahlungstermine tragen würde, der Schuldsumme gleich wird. Dem Schuldner muss in diesem Falle ein bestimmter Abzug gewährt werden, welcher Discont heißt und nach Procenten berechnet wird. Wenn man den Discont von dem Schuldcapitale subtrahiert, so heißt der Rest der gegenwärtige oder bare Wert des Capitals.

Z. B. Jemand will eine unverzinsliche Schuld von 400 fl., die er nach 1 Jahre zu zahlen verpflichtet ist, sogleich bezahlen; wie viel beträgt der Discont à 5%, und wie groß ist die bare Bezahlung?

Eine bare Summe von 100 fl. beträgt bei 5% Zins nach 1 Jahre 105 fl.; also sind 105 fl., nach 1 Jahre zahlbar, gegenwärtig nur 100 fl. wert, oder: von je 105 fl. werden, wenn man sie 1 Jahr früher bezahlt, 5 fl. als Discont in Abzug gebracht. Man hat daher

105 fl. Cap. 5 fl. Disc.
1 „ „ $\frac{5}{105}$ „ „
400 „ „ $\frac{400 \times 5}{105}$ fl. Disc.
$= 19{\cdot}05$ Discont.

Schuldcap.	400 fl.
ab Discont	19·05 „
Barzahlung	380·95 fl.

Probe:

380·95 fl. à 5 %
19·0475 fl. Zins

Barzahlung	380·95 fl.
Zins für 1 Jahr	19·05 „
Cap. nach 1 Jahre	400 fl.

Aus dieser Darstellung geht klar hervor, daß der Discont auf Hundert (§. 128) gerechnet werden müsse.

Würde man den Discont von Hundert rechnen, so hätte man:

400 fl. à 5%
20 fl. Discont

Capital	400 fl.
ab Discont	20 „
Barzahlung	380 fl.

Eine Barzahlung von 380 fl. würde aber mit den Zinsen à 5% nach 1 Jahre nicht das Schuldcapital 400 fl., sondern nur 399 fl. geben.

Da übrigens der Unterschied zwischen den Discontbeträgen auf und von 100 für kleinere Zeitabschnitte nur unbedeutend, die Rechnung von 100 aber viel bequemer ist, so rechnen Geschäftsleute den Discont bei Warenbeträgen und bei Wechseln, da es dabei gewöhnlich nur auf eine kurze Frist ankommt, allgemein von 100. Da, wo es sich um längere Zeiträume handelt, würde jedoch dieses Verfahren zu sonderbaren Consequenzen führen. Gesetzt, jemand wünschte eine Schuld von 100 fl., die er nach 20 Jahren zu berichtigen hat, mit 5% Discont sogleich zu zahlen; der Discont würde dann ebenfalls 100 fl. betragen, und der Schuldner hätte also gar nichts zu zahlen. Wären die 100 fl. erst nach 40 Jahren zahlbar gewesen, so betrüge der Discont sogar 200 fl. und der Schuldner müsste noch 100 fl. herausbekommen. Richtig aber würde man die erstere Aufgabe so rechnen: 100 fl. geben in 20 Jahren zu 5% 100 fl. Zinsen, wachsen also mit diesen auf 200 fl. an; wenn nun umgekehrt 200 fl. nach 20 Jahren zahlbar, gegenwärtig 100 fl. wert sind, so ist der gegenwärtige Wert von 100 fl. gleich $^{100}/_{2}$ fl. = 50 fl.

B. Zinseszinsen.

§. 132. Künftiger und gegenwärtiger Wert einer Geldsumme bei Berechnung von Zinseszinsen.

Bei Verzinsung von Capitalien geschieht es häufig, dass die Zinsen am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Capitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Capital ist auf Zins von Zins oder auf Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen heißen auch zusammengesetzte Zinsen, zum Unterschiede von den einfachen, welche zu den gewöhnlichen Terminen bezahlt, oder wenn sie rückständig bleiben, doch nicht wieder verzinst werden.

Berechnung des Wertes einer Summe nach einer bestimmten Zeit.

Um den Wert eines Geldbetrages nach einer gegebenen Zeit, während welcher die Zinsen nach einer bestimmten Periode wieder zum Capitale geschlagen und mit diesem verzinst werden, zu erhalten, könnte man die Zinsen für jede einzelne Periode berechnen und jedesmal zu dem Anfangscapital jener Periode addieren.

Z. B. Wie hoch werden 2000 fl. Capital nach 4 Jahren anwachsen, wenn man die Zinsen à 5% am Ende eines jeden Jahres zum Capitale schlägt und von neuem verzinset?

Anfangscapital	2000 fl.
Zins des 1. Jahres	100 „
Capital zu Ende des 1. Jahres	2100 fl.
Zins des 2. Jahres	105 „
Capital zu Ende des 2. Jahres	2205 fl.
Zins des 3. Jahres	110·25 fl.
Capital zu Ende des 3. Jahres	2315·25 fl.
Zins des 4. Jahres	115·7620 fl.
Capital zu Ende des 4. Jahres	2431·0125 fl.

Nach der einfachen Verzinsung wäre der Zins in 1 Jahre 100 fl., also in 4 Jahren 400 fl., während das Erträgnis nach Zinseszinsen 431 fl. 1 kr. ist; der Unterschied von 31 fl. 1 kr. geht also aus den Zinseszinsen hervor.

Da die vorhergehende Rechnung sehr weitläufig ist, so soll hier ein anderes kürzeres Verfahren entwickelt werden, nach welchem man das Anwachsen eines Capitals mittels Zinseszinsen berechnen kann.

100 fl. am Anfange eines Jahres sind zu 5 % verzinset am Ende desselben Jahres 105 fl., also 1 fl. den 100sten Theil von 105 fl., nämlich 1·05 fl. wert. Man hat daher für das frühere Beispiel folgende Rechnung:

2000 fl. am Anfange des 1. Jahres geben
am Ende des 1. Jahres 2000 × 1·05 fl.;
2000 × 1·05 fl. am Anfange des 2. Jahres geben
am Ende des 2. Jahres 2000 × 1·05 × 1·05 fl.;
2000 × 1·05 × 1·05 fl. am Anfange des 3. Jahres geben
am Ende des 3. Jahres 2000 × 1·05 × 1·05 × 1·05 fl.;
2000 × 1·05 × 1·05 × 1·05 fl. am Anfang des 4. Jahres geben
am Ende des 4. Jahres 2000 × 1·05 × 1·05 × 1·05 × 1·05 fl.

Das Endcapital nach 4 Jahren ist also

2000 × 1·05 × 1·05 × 1·05 × 1·05 fl.

```
1·05 × 1·05                    2000 × 1·215506
  525                                 2431·01 fl.
1·1025  × 1·05
  55125
1·157625 × 1·05
  57881
1·215506
```

Man muss also 1·05, d. i. die Zahl, welche gefunden wird, wenn man zu 100 den Zinsfuss 5 addiert, und diese Summe 105 durch 100 dividiert, 4mal, d. i. so oftmal als Jahre da sind, als Factor setzen und dann das Anfangscapital damit multiplicieren.

Die Zahl 1·05 × 1·05 × 1·05 × 1·05 = 1·215506, mit welcher das Anfangscapital multipliciert werden muss, um den nach Zinseszinsen angewachsenen Endwert zu erhalten, kann man die Zinseszinszahl (hier für 5 % und 4 Jahre) nennen.

Würde man die Zinsen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale schlagen, so erhielte man da 100 fl. nach einem Halbjahre 102·5 fl. wert sind, 1 fl. also den Wert von 1·025 fl. bekommt, durch ähnliche Schlüsse, wie oben, als Endcapital nach 4 Jahren oder 8 Halbjahren

2000 × 1·025 × 1·025 × 1·025 × 1·025 × 1·025 × 1·025 × 1·025 × 1·025 fl. = 2000 × 1·218403 fl. = 2436·81 fl.

Hier ist 1·218403 die Zinseszinszahl für $2\frac{1}{2}$ % und 8 Halbjahre.

Es gibt besondere Tabellen, welche die bereits ausgerechneten Zinseszinszahlen für verschiedene Procente und Zeitperioden enthalten, deren Benützung daher die Rechnung sehr vereinfacht.

b) **Berechnung des Wertes einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.**

Da der künftige Wert eines Capitals gleich ist dem gegenwärtigen Anfangscapitale multipliciert mit der entsprechenden Zinseszinszahl, so folgt, dass umgekehrt das Anfangscapital gleich ist dem künftigen Werte dividiert durch dieselbe Zinseszinszahl.

Z. B. Wie viel sind 3000 fl., welche nach 4 Jahren zahlbar sind, bei 5 % Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 4 Jahre früher wert?

Die Zinseszinszahl für 5 % und 4 Jahre ist 1·215506; man hat daher 3000 fl. : 1·215506 = 2468·108 fl. gegenwärtiger Wert.

Statt 3000 fl. : 1·215506 kann man auch 3000 fl. $\times \frac{1}{1{\cdot}215506}$ setzen. Kennt man daher den Quotienten $\frac{1}{1{\cdot}215506}$, so darf man nur den Endwert des Capitals damit multiplicieren. Man hat nun die Quotienten, die man erhält, wenn 1 durch die Zinseszinszahl dividiert wird, für verschiedene Procente und Zeitperioden ausgerechnet und in Tabellen zusammengestellt, durch deren Benützung die Rechnung wesentlich erleichtert wird.

III. Terminrechnung.

§. 133. Berechnung des mittleren Zahlungstermins.

Häufig werden unverzinsliche Geldsummen, die nach und nach in bestimmten Zeitfristen (Terminen) gezahlt werden sollen, auf einmal, oder unverzinsliche Geldsummen, die zu bestimmten Terminen zahlbar sind, zu anderen als den festgesetzten Terminen abgetragen. Die Bestimmung der Zeitpunkte, zu denen dies ohne Nachtheil sowohl des Schuldners als des Gläubigers geschehen kann, lehrt die Terminrechnung.

Bei dieser Rechnung werden einfache Zinsen vorausgesetzt, so dass man schließen kann: 300 fl. geben in 4 Jahren eben so viel Zins, als 4mal 300 fl. in 1 Jahre: oder 500 fl. geben in 3 Monaten eben so viel Zins, als 3mal 500 fl, in 1 Monate.

Wenn mehrere Theilzahlungen, welche in verschiedenen Zeitfristen zahlbar sind, auf einmal gezahlt werden sollen, so heißt der Zeitpunkt, zu welchem die Gesammtzahlung zu leisten ist, der mittlere Zahlungstermin.

Wie der mittlere Termin gefunden wird, soll an folgendem Beispiele gezeigt werden.

A hat an B 400 fl. nach 4, und 800 fl. nach 8 Monaten zu zahlen; wenn nun die ganze Summe von 1200 fl. auf einmal abgetragen werden soll, wann muss dieses geschehen?

Bei der bedungenen Zahlungsweise genießt der Schuldner die Zinsen von 400 fl. durch 4, und von 800 fl. durch 8 Monate.

Der Schuldner erhält von	eben so viel Zinsen als von
400 fl. in 4 Mon.	1600 fl. in 1 Mon.
800 „ „ 8 „	6400 „ „ 1 „
1200 fl. in ? Mon.	8000 fl. in 1 Mon.

8000 fl. geben einen bestimmten Zins in 1 Mon.
1 „ gibt denselben „ „ 8000 „
1200 „ geben „ „ „ $\frac{8000}{1200} = 6\frac{2}{3}$ Mon.

Die Gesammtzahlung wird also nach $6\frac{2}{3}$ Mon. zu erfolgen haben.

Man erhält daher den **mittleren Zahlungstermin**, indem man jede Theilzahlung mit der dazu gehörigen Zeit multipliciert und die Summe dieser Producte durch die Summe der Theilzahlungen dividiert.

§. 134. Verwandlung gegebener Zahlungstermine in andere.

A hat nach 3 Jahren 300 fl., nach 4 Jahren 500 fl. und nach 5 Jahren 600 fl. zu zahlen; er zahlt jedoch schon nach 2 Jahren 400 fl. und nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 500 fl.; wann wird der Rest fällig sein?

A darf benutzen:	300 fl. 3 Jahre	=	900 fl. 1 Jahr
	500 „ 4 „	=	2000 „ 1 „
	600 „ 5 „	=	3000 „ 1 „
zusammen:	1400 fl.		5900 fl. 1 Jahr
er benutzt:	400 fl. 2 Jahre	=	800 fl. 1 Jahr
	400 „ $2\frac{1}{2}$ „	=	1250 „ 1 „
zusammen:	900	=	2050 fl. 1 Jahr
hat noch zu benutzen:	500 fl. ? Jahre	=	3850 fl. 1 Jahr

3850 : 500 fl. = 7·7 Jahre.

Der Rest von 500 fl. wird also 7·7 Jahre, vom Beginne an gerechnet, zu zahlen sein.

IV. Die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung.

§. 135.

Eine Zahl kann in gleiche oder ungleiche Theile zerlegt werden. Die Zerlegung einer Zahl in gleiche Theile lehret die Division. Soll eine Zahl in ungleiche Theile zerlegt werden, so muss außer der Zahl der Theile auch angegeben sein, wie groß die Theile im Vergleiche miteinander werden, oder wie sie sich zu einander verhalten sollen. Die Rechnung, durch welche eine Zahl nach einem gegebenen Verhältnisse, d. h. so getheilt wird, dass sich die Theile wie gegebene Zahlen zu einander verhalten, heißt die **Theilregel** oder **Gesellschaftsrechnung**. Die Zahlen, welche jenes Verhältnis ausdrücken, heißen die **Verhältniszahlen**.

Die Gesellschaftsrechnung findet Anwendung bei Compagniegeschäften, Erbschaften, Concursen, Steuervertheilungen, Schiffsantheilen und Seeschäden, bei Herstellung von Mischungen u. s. w.

Wenn in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben ist, von denen die Größe der Theile abhängt, so heißt die Theilregel die einfache; dagegen die zusammengesetzte, wenn die Vertheilung von mehreren Bestimmungen abhängt, und daher mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben sind.

a) **Einfache Theilregel.**

Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen; A gibt 2800 fl., B 3600 fl. und C 4000 fl.; sie gewinnen damit 1300 fl.; wie viel vom Gewinn gebürt einem jeden?

Die Antheile am Gewinn müssen sich so wie die Einlagen verhalten, also wie die Zahlen 2800, 3600 und 4000, oder indem man durch 100 und 4 abkürzt, wie die Zahlen 7, 9 und 10. Der ganze Gewinn von 1300 fl. ist demnach so zu vertheilen, dass auf A 7, auf B 9, auf C 10, also auf alle zusammen 7 + 9 + 10 = 26 Theile von gleicher Größe entfallen. Dividiert man daher die zu vertheilende Zahl 1300 fl. durch die Summe 26 der Verhältniszahlen, so zeigt der Quotient 50 fl. einen solchen Theil an. Da aber A 7, B 9, C 10 solche Theile erhalten soll, so muss man 50 fl. noch mit den einzelnen Verhältniszahlen multiplicieren. Die Rechnung steht:

A 28~~00~~	7	50 fl. × 7 = 350 fl. gewinnt A
B 36~~00~~	9	50 „ × 9 = 450 „ „ B
C 40~~00~~	10	50 „ × 10 = 500 „ „ C
1300 fl. : 26 = 50 fl.		1300 fl. zusammen.

Bei der einfachen Gesellschaftsrechnung dividiert man daher die zu theilende Zahl durch die Summe der auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen und multipliciert den Quotienten mit jeder Verhältniszahl.

b) **Zusammengesetzte Theilregel.**

Drei Kaufleute sind miteinander in Gesellschaft getreten und haben zusammen 2300 fl. gewonnen; wenn nun A 2000 fl. durch 8 Monate, B 4000 fl. durch 6 Monate, C 8000 fl. durch 5 Monate in dem Geschäftsfonde liegen ließ, wie viel von dem Gewinne wird jeder erhalten?

Hier hängen die Antheile am Gewinne nicht bloß von der Einlage, sondern auch von der Zeit ab. Es ist jedoch gleichviel,

ob A 2000 fl. 8 Monate oder 16000 fl. 1 Monat
„ B 4000 „ 6 „ „ 24000 „ 1 „
„ C 8000 „ 5 „ „ 40000 „ 1 „

in dem Fonde liegen lässt. Da nun im zweiten Falle die Zeit für alle drei Antheile gleich ist, so hängen dieselben nur von den zu dieser Zeit gehörigen Einlagen, nämlich den Producten 16000 fl., 24000 fl. und 40000 fl. ab, welche daher als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet werden. Die Rechnung steht:

A 2000 fl. 8 Mon. = 16000 fl.	2	230 fl. × 2 =	460 fl.
B 4000 „ 6 „ = 24000 „	3	230 „ × 3 =	690 „
C 8000 „ 5 „ = 40000 „	5	230 „ × 5 =	1150 „
2300 fl. :	10 =	230 „	2300 fl.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung multipliciert man daher die Verhältniszahlen, welche auf denselben Theil Bezug haben, mit einander und betrachtet die Producte als die Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung, nach welcher dann die weitere Rechnung ausgeführt wird.

V. Die Alligationsrechnung.

§. 136.

Häufig werden gleichartige Stoffe, die jedoch an Wert oder Gehalt verschieden sind, miteinander gemischt (gemengt), um eine Mischungssorte von mittlerem Werte zu erhalten. Dabei kommen folgende Größen zur Betrachtung: 1. die Menge der einzelnen Bestandtheile, 2. der Wert derselben und 3. der Wert der Mischung.

Die Rechnung, welche diese Größen aus einander herleitet, wird im allgemeinen die Mischungsrechnung genannt. Sie enthält sehr mannigfache Aufgaben, von denen die zwei folgenden von besonderer praktischer Wichtigkeit sind:

1. Es ist der Wert der Einheit einer Mischung zu suchen, welche aus gleichartigen Stoffen von verschiedenem Werte hergestellt wird. Die Rechnung heißt die Durchschnittsrechnung.

2. Es ist das Verhältnis zu finden, in welchem zwei gleichartige Stoffe von verschiedenem Werte mit einander verbunden werden müssen, um eine Mischung von bestimmtem Mittelwerte zu erhalten. Die Mischungsrechnung heißt in diesem Falle eine Alligationsrechnung.

Die Durchschnittsrechnung beruht auf ganz einfachen Schlüssen; sie wurde schon auf den früheren Unterrichtsstufen wiederholt angewendet (siehe III. Abtheilung §. 65, e. angewandte Aufgaben).

Dagegen tritt bei der Alligationsrechnung eine besondere Art von Schlüssen auf, die wir an der folgenden Aufgabe näher erläutern wollen.

Ein Wirt will zweierlei Weine, das *l* zu 50 kr. und zu 36 kr. so mischen, dass 1 *l* der Mischung 42 kr. wert sei; in welchem Verhältnisse muss er die beiden Gattungen mischen?

1 *l* der besseren Sorte kostet 50 kr. — 42 kr. = 8 kr. mehr, 1 *l* der geringeren Sorte 42 kr. — 36 kr. = 6 kr. weniger, als 1 *l* der Mischung kosten soll. Es geben also 6 *l* der besseren Sorte einen Überschuss von 6mal 8 kr. = 48 kr.

und 8 l der geringeren Sorte einen Abgang von 8mal 6 kr. = 48 kr.; damit sich also der Überschuss und der Abgang ausgleichen, muss man auf je 6 l der besseren Sorte 8 l der geringeren zur Mischung verwenden, d. h. die bessere und geringere Sorte müssen in dem Verhältnisse 6 : 8, wofür man auch 3 : 4 setzen kann, gemischt werden.

Daraus folgt, dass der Überschuss oder Abgang bei der einen Sorte die Zahl der gleichen Theile anzeigt, welche von der andern Sorte zu nehmen sind.

Die voranstehenden Schlüsse lassen sich übersichtlich so darstellen:

Bessere Sorte à l	50 kr.	Geringere Sorte à l	36 kr.
Mischung à l	42 „	Mischung à l	42 „
Überschuss an 1 l	8 kr.	Abgang an 1 l	6 kr.
„ „ 6 l	48 „	„ „ 8 l	48 „

Die Rechnung selbst stellt sich wie folgt:

	50	8 Übersch.	6 Theile	3
42 —				
	36	6 Abgang	8 Theile	4

In der Praxis kommt die Alligationsrechnung meistens in Verbindung mit der Gesellschaftsrechnung vor. Z. B. Zwei Gattungen Kaffee, das kg zu 162 kr. und zu 152 kr., sollen so gemischt werden, dass man 100 kg à 156 kr. erhalte; wie viel kg von jeder Gattung wird man zur Mischung verwenden?

Zuerst wird nach der Alligationsrechnung das Mischungsverhältnis gesucht:

	126	6 Übersch.	4 Theile	2
156 —				
	152	4 Abgang	6 Theile	3

Die Menge von 100 kg ist also nach dem Verhältnisse 2 : 3 zu theilen; dieses geschieht nach der Gesellschaftsrechnung:

2	20 kg × 2 = 40 kg à 162 kr.
3	20 kg × 3 = 60 kg à 152 kr.

100 kg : 5 = 20 kg

Die Probe wird nach der Durchschnittsrechnung verrichtet:

40 kg à 162 kr.	kosten	6480 kr.
60 kg à 152 kr.	„	9120 kr.
100 kg Mischung	kosten	15600 kr.
1 kg „	kostet	156 kr.

VI. Die Kettenrechnung.

§. 137.

Die Kettenrechnung, auch Kettensatz genannt, hat ihren Namen von der eigenthümlichen Beschaffenheit des Ansatzes, dessen Zahlen wie die Glieder einer Kette mit einander verbunden werden. Sie wird angewendet, wenn aus einer bekannten Zahl einer Art die zugehörige unbekannte Zahl einer andern Art durch Hilfe mehrerer zusammenhängender Mittelbestimmungen gefunden werden soll.

Z. B. Wie viel Kreuzer ö. W. kosten 4 *dkg* einer Ware, von welcher $7\frac{1}{2}$ *kg* auf 75 Franken kommen?

Um hier den zu 4 *dkg* gehörigen Preis in kr. ö. W. zu finden, muss man nebst der Angabe, dass $7\frac{1}{2}$ *kg* 75 Franken kosten, noch folgende Mittelbestimmungen zu Hilfe nehmen: 1 *kg* hat 100 *dkg*, $2\frac{1}{2}$ Franken gelten 100 kr. ö. W.; und die vollständige Aufgabe läſst sich dann in folgende Kettenverbindung bringen:

? kr. ö. W. kosten . . 4 *dkg*
wenn 100 *dkg* . . 1 *kg* machen,
wenn $7\frac{1}{2}$ *kg* . . . 75 Franken kosten,
und wenn $2\frac{1}{2}$ Franken 100 kr. ö. W. gelten?

In diesem Ansatze hat jede Zahl auf der rechten Seite mit der links stehenden gleichen Wert; jede Zahl auf der linken Seite ist mit der nächstvorhergehenden auf der rechten Seite gleichnamig, und die letzte Zahl rechts ist mit der ersten Zahl links d. i. mit x gleichnamig. Auf diese Art hängen alle Zahlen des Ansatzes wie die Glieder einer Kette zusammen. Jede Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der Schlussrechnung ausgeführt werden. Für das frühere Beispiel hätte man folgenden Rechnungsgang:

a) Zuerst verwandelt man 4 *dkg* in *kg*:

$$\begin{array}{lcl} 100\ dkg & . . & 1\ kg: \\ 1\ \text{„} & . . & \frac{1}{100}\ \text{„} \\ 4\ \text{„} & . . & \frac{4 \times 1}{100}\ \text{„} \end{array}$$

b) Dann sucht man den Preis von $\frac{4 \times 1}{100}$ *kg* in Franken:

$$\begin{array}{lcl} 7\frac{1}{2}\ kg & . . & 75\ \text{Franken} \\ 1\ \text{„} & . . & \frac{75}{7\frac{1}{2}}\ \text{„} \\ \frac{4 \times 1}{100}\ \text{„} & . . & \frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}}\ \text{„} \end{array}$$

c) Endlich werden $\frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}}$ Franken in kr. ö. W. verwandelt.

$$\begin{array}{lcl} 2\frac{1}{2}\ \text{Franken} & . . & 100\ \text{kr. ö. W.} \\ 1\ \text{Frank} & . . . & \frac{100}{2\frac{1}{2}}\ \text{„ „ „} \\ \frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}}\ \text{„} & & \frac{4 \times 1 \times 75 \times 100}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}} = 16\ \text{kr. ö. W.} \end{array}$$

Es ist nun nicht nöthig, bei diesen Aufgaben alle diese weitläufigen Schlussrechnungen durchzuführen. Vergleicht man nämlich den gefundenen Ausdruck $\frac{4 \times 1 \times 75 \times 100}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}}$ mit der oben in die Kettenverbindung gebrachten Aufgabe, so sieht man sogleich, dass die gesuchte Zahl gleich ist dem Producte aller rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Product aller links erscheinenden Zahlen. Bei der Ausführung werden noch vor der Division, wenn es angeht, zu beiden Seiten Abkürzungen vorgenommen.

Bei der Kettenrechnung verfährt man daher auf folgende Art:

1. Man zieht einen senkrechten Strich und setzt links oben die gesuchte Zahl, rechts daneben aber die gegebene Größe, deren Wert gesucht wird.

2. Darunter setzt man alle Mittelbestimmungen und zwar fängt man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden Größe rechts gleichnamig ist, und setzt rechts daneben diejenige Größe, welche mit ihr gleichen Wert hat. Das letzte Glied rechts in der Kette muss mit der Fragezahl links oben gleichnamig sein.

3. Die gemischten Zahlen werden zu unechten Brüchen eingerichtet, die Nenner auf die entgegengesetzte Seite als Factoren übertragen, und dann die Zahlen zu beiden Seiten, wenn es möglich ist, abgekürzt.

4. Wird das Product aller rechts stehenden Zahlen durch das Product der links stehenden dividiert, so gibt der Quotient die gesuchte Zahl.

Es sei noch folgende Aufgabe zu lösen:

1000 *kg* Weizen kosten in Berlin 190 Mark; wie hoch stellt sich hiernach der Preis von 1 *hl* Weizen im Gewichte von 77 *kg* in ö. W., wenn 100 Mark = 58 fl. ö. W. gerechnet werden?

? fl. ö. W.	1 *hl*
1	77 *kg*
1000	19~~0~~ Mark
10~~0~~	58 fl. W.

$$\frac{77 \times 19 \times 58}{10000} = 8{\cdot}4854 \text{ fl. ö. W.}$$

Man beginnt die Kette mit der Frage: wie viel fl. ö. W. kostet 1 *hl*? Da man mit *hl* aufhört, so muss die folgende Mittelbestimmung mit *hl* anfangen; dies geschieht, indem man auf das Gewicht übergeht und sagt: wenn ein *hl* 77 *kg* wiegt. Hier hört man rechts mit *kg* auf, daher muss man wieder links mit *kg* anfangen; man bildet den Übergang von der Ware zum Preise dadurch, dass man sagt: wenn 1000 *kg* 190 Mark kosten. Man hört hier mit Mark auf; da aber die gesuchte Zahl fl. ö. W. bedeutet, so muss man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe nehmen: wenn 100 Mark 58 fl. ö. W. geben. Der Aufsatz ist nun fertig und folgt dann die Auflösung.

VII. Berechnung der Münzen und Wertpapiere.

§. 138.

Die Übungsstoffe dieses Abschnittes umfassen die Münzrechnung, die Berechnung der Wechsel, Staatspapiere und Actien. Wenn auch diese Gegenstände eigentlich in die kaufmännische Arithmetik gehören, so muss doch einige Kenntnis derselben bei der gegenwärtigen Entwicklung des bürgerlichen Verkehrs als ein Gegenstand der allgemeinen Bildung auch für jene, die nicht dem kaufmännischen Stande angehören, angesehen werden. Selbstverständlich wird man sich hier auf das wesentlich Nothwendige beschränken müssen und den einzelnen Abtheilungen kurze theoretische Belehrungen vorausschicken, die den Schüler mit dem darin behandelten Stoffe so weit bekannt machen, als es zum Verständnis der Aufgaben nöthig ist. Nur in gewöhnlichen Landschulen, welche auch anderweitig eine weise Beschränkung des Lehrstoffes verlangen, kann dieser Abschnitt gänzlich weggelassen werden.

1. Die Münzrechnung.

§. 139.

Der allgemeine Wertmesser für die verschiedenen Güter ist das Geld. Dasselbe ist entweder gemünztes Metall oder Papiergeld, letzteres hat nur einen eingebildeten Wert, den es auch sofort verliert; wenn es nicht gegen gemünztes Metall eingewechselt werden kann. Münzen sind geprägte Metallstücke, die mit einer Inschrift, dem Wappen oder einem Stempel des Prägherrn versehen sind. Die Metalle, aus denen man Münzen prägt, sind Gold, Silber und Kupfer; Gold und Silber werden jedoch, damit sie wegen ihrer Weichheit nicht zu schnell abgenützt werden, legiert, d. h. sie erhalten einen Zusatz von härteren Metallen, gewöhnlich von Kupfer.

An einer Münze unterscheidet man 1. das Schrot, d. i. das ganze Gewicht derselben, 2. das Korn, d. i. das Gewicht des in der Münze enthaltenen feinen Metalls, und 3. die Feinheit, d. i. das Verhältnis des Kornes zum Schrot.

Die gesetzlichen Bestimmungen über das Gewicht und die Feinheit der Münzen in einem Lande bilden den Münzfuß oder die Währung. Münzen, welche nach dem festgesetzten Münzfuße eines Staates ausgeprägt sind, heißen Courantgeld; jene Münzen dagegen, welche die kleineren Unterschiede in Zahlungen auszugleichen bestimmt sind, nennt man Scheidemünzen.

Als Münzgewicht dient in Österreich-Ungarn, Frankreich, Italien, in der Schweiz und in noch anderen Staaten das Kilogramm, in Deutschland das Pfund = 500 g, in England und Nordamerika das Troypfund = 373·242 g, in Russland das Handelspfund = 409·512 g.

Früher wurde in Österreich und Deutschland die kölnische Mark, welche in Österreich = 233·87 g, in Deutschland = 233·855 g angenommen wurde, als Münzgewicht gebraucht.

Die Feinheit einer Münze wird in den meisten Staaten in Tausendtheilen des Schrotgewichtes bestimmt. Z. B. die österreichischen Guldenstücke sind $\frac{900}{1000}$ fein, heißt: in 1000 Theilen eines Guldens sind 900 Theile feines Silber und 100 Theile Zusatz enthalten; man sagt auch kürzer: die Gulden sind $\frac{9}{10}$ fein. In England ist das Münzgold $\frac{11}{12}$ fein, d. h. in 12 Theilen Schrot sind 11 Theile Korn; das Münzsilber ist $\frac{37}{40}$ fein. In Russland ist das Münzgold $\frac{11}{12}$, das Münzsilber $\frac{125}{144}$ fein.

Früher wurde in Österreich und Deutschland die Feinheit bei Silbermünzen in Loth, bei Goldmünzen in Karat angegeben, wobei man die Mark bei Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Golde in 24 Karat à 12 Grän eintheilte. Z. B. die alten österreichischen Zwanziger enthielten $9^1/_3$ löthiges Silber d. i. in 16 Theilen derselben waren $9^1/_3$ Theile feinen Silbers und $6^2/_3$ Theile Kupfer. Die kais. Ducaten sind $23^2/_3$ Karat fein, d. i. unter 24 Theilen derselben sind $23^2/_3$ Theile feinen Goldes.

Die vorzüglichsten Silbermünzfuße sind:

1. Der Fünfundvierzig-Guldenfuß oder die österreichische Währung; aus dem halben Kilogramm feinen Silbers werden 45 Gulden, $\frac{900}{1000}$ fein, geprägt. — Bis 1857 bestand in Österreich der Zwanzig-Guldenfuß oder Conventions-Münzfuß, nach welchem aus einer kölnischen Mark = 233·87 Gramm feinen Silbers 20 fl. Conventions-Münze à 60 Kreuzer geprägt wurden.

2. Der Frankenfuß (in Frankreich, Belgien, Italien und in der Schweiz), nach welchem aus 1 *kg* Silber, das 0·9 fein ist, 200 Franken (Lire, Franken) geprägt werden.

3. Der Silberrubelfuß in Russland; die Feinheit ist $\frac{125}{144}$, das Korn eines Stückes 17·9961 *g*.

Die wichtigsten Goldmünzen sind:

1. Die österr.-ung. Achtguldenstücke, von denen aus 1 *kg* $\frac{900}{1000}$ feinen Goldes 155 Stücke ausgeprägt werden. Nach Verhältnis werden auch Vierguldenstücke geprägt.

2. Die Zwanzigfrankstücke in Frankreich, Belgien und in der Schweiz, und die Zwanziglirestücke in Italien; sie sind gleich den österr. Achtguldenstücken; ebenso stimmen die Zehnfrankstücke und Zehnlirestücke mit den österr. Vierguldenstücken überein.

3. Die kais. österr. Ducaten; 67 Stück wiegen eine kölnische Mark = 233·87 *g* und enthalten $\frac{71}{72}$ feines Gold.

4. Die deutschen Reichsgoldmünzen, und zwar Fünf-, Zehn- und Zwanzigmarkstücke; von den Zehnmarkstücken werden aus dem Pfund = 500 *g* feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ ausgebracht. Die Feinheit ist $\frac{900}{1000}$.

5. Die englischen Sovereigns (Pfund Sterling); 1 Sovereign ist $\frac{11}{12}$ fein und hat 7·3223 *g* Korn.

6. Die russischen Halbimperalen mit $\frac{11}{12}$ Feinheit und 5·9987 *g* Korn.

Bei den Gold- und Silbermünzen wird ein dreifacher Wert unterschieden: der innere Wert, d. i. der Wert des in der Münze enthaltenen feinen Metalls; der gesetzliche, d. i. der von der Regierung bestimmte Wert, zu dem sie im Lande allgemein angenommen werden soll; der Handelswert, auch Curswert, d. i. der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat. Steht dieser veränderliche Preis, der Curs einer Münze höher, als der gesetzliche Wert derselben, so heißt der Mehrbetrag das Agio.

Sowie bei den Gold- und Silbermünzen wird die Feinheit und der innere Wert auch bei ungemünztem Golde und Silber bestimmt; nur bedient man sich dabei statt der Ausdrücke „Schrot" und „Korn" der Bezeichnungen Rauhgewicht und Feingewicht.

a) **Berechnung der Feinheit, des Kornes oder Schrotes der Münzen.**

1. Die Feinheit wird durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler das Korn, dessen Nenner das Schrot ist. Soll die Feinheit die Bezeichnung Tausendtheile erhalten, so bringt man jenen Bruch auf den Nenner 1000, indem man Zähler und Nenner mit 1000 multipliciert und dann durch den früheren Nenner dividiert. Z. B.

Die englischen Goldmünzen sind $\frac{11}{12}$ fein; wie viel beträgt ihre Feinheit in Tausendtheilen?

$$\tfrac{11}{12} = \frac{11000}{12 \times 1000} = \frac{11000 : 12}{1000} = \frac{916\frac{2}{3}}{1000}$$

Die englischen Goldmünzen sind also $916\frac{2}{3}$ Tausendtheile fein.

Der russische Silberrubel wiegt 20·7315 g und enthält 17·9951 g feinen Silbers; wie groß ist seine Feinheit?

$$\text{Feinheit} = \frac{17{\cdot}9951}{20{\cdot}7315} = \frac{17995{\cdot}1}{20{\cdot}7315 \times 1000} =$$
$$\frac{17995{\cdot}1 : 20{\cdot}7315}{1000} = \frac{868{\cdot}056}{1000}$$

2. Das Korn ist gleich dem Producte aus dem Schrot und der Feinheit. Z. B.

Ein neues Frankenstück wiegt 5·38922 g und ist $\frac{835}{1000}$ fein; wie viel Korn hat es?

$$5{\cdot}38922 \times 0{\cdot}835 = 4{\cdot}5\ g \text{ Korn}.$$

Aus 1 kg $\frac{9}{10}$ feinen Goldes werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel feines Gold enthält 1 Achtguldenstück?

$$\text{Schrot} = \tfrac{1000}{155}\ g,$$
$$\text{Feinheit} = \tfrac{9}{10},$$
$$\text{Korn} = \tfrac{1000}{155} \times \tfrac{9}{10} = 5{\cdot}80645\ g.$$

Wie viel Korn hat 1 kais. Ducaten, da 67 Ducaten 233·87 g Gold, $23\frac{2}{3}$ Karat fein, enthalten?

$$\text{Schrot} = \frac{233{\cdot}87}{67}\ g$$

$$\text{Feinheit} = \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72};$$

$$\text{Korn} = \frac{233{\cdot}87}{67} \times \frac{71}{72} = 3{\cdot}4421\ g.$$

3. Das Schrot erhält man, indem man das Korn durch die Feinheit dividiert. Z. B.

Ein neuer österr. Zwanziger enthält bei $\frac{5}{10}$ Feingehalt $1\frac{1}{3}$ *g* feinen Silbers; wie viel wiegt 1 Zwanziger?

$$1\tfrac{1}{3} : \tfrac{5}{10} = 2\tfrac{2}{3}\ g \text{ Schrot.}$$

b) **Berechnung der Münzen nach ihrem inneren Werte.**

Nach Verschiedenheit der Angaben des Münzfußes gestaltet sich auch die Lösung der hierher gehörigen Aufgaben verschieden. Ist der Wert einer Münze in ö. W. zu bestimmen, so ist es am einfachsten, zunächst den Wert eines Grammes feinen Silbers oder Goldes in ö. W. zu suchen, und daraus den Wert der betreffenden Silber- oder Goldmünze, nachdem ihr Korn in Gramm ausgedrückt wurde, durch die Multiplication zu berechnen. Z. B.

Wie viel ist 1 *g* feinen Silbers wert, da 45 fl. ö. W. 500 *g* feinen Silbers enthalten?

45 fl. : 500 = 0·09 fl. = 9 kr.

1 *g* feinen Silbers ist also 9 kr. ö. W. wert.

Wie viel fl. ö. W. sind 100 Franken wert?

1 Frank hat 4·5 *g* fein Silber,
100 Franken haben 450 *g* fein Silber,
9 kr. × 450 = 4050 kr. = 40·5 fl. ö. W.

Wie viel ist 1 *g* feinen Goldes wert, wenn das Wertverhältnis zwischen Gold und Silber $15\frac{1}{2} : 1$ ist?

9 kr. × $15\frac{1}{2}$ = $139\frac{1}{2}$ kr. = 1·395 fl. ö. W. in Silber.

Welchen Wert in österr. Silbergulden hat 1 Achtguldenstück, dessen Korn 5·80645 *g* beträgt?

1·395 fl. × 5·80645 = 8·1 fl. ö. W. in Silber.

c) **Berechnung der Münzen nach dem Curse.**

Jemand kauft an der Wiener Börse 17 Stück kais. Ducaten zum Curse à 5 fl. 61 kr.; wie viel muss er dafür zahlen?

```
5·61  × 17
3 927
---------
9·537 fl.
```

Wie viel fl. in Silber erhält man für 345 fl. in Gold, wenn die Goldmünzen gegen Silbergeld 18% Agio haben?

```
345 fl. Gold à 18%              345 fl.
2760                   Agio . .  62 „ 10 kr.
-----                  --------------------
62·10                      407 fl. 10 kr.
```

2. Die Wechselrechnung.

§. 140.

Eine Urkunde, in welcher sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine bestimmte Geldsumme an eine bestimmte Person zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen oder durch eine dritte Person zahlen zu lassen, heißt Wechsel.

Rücksichtlich des Zahlers unterscheidet man eigene und fremde Wechsel. Eigene Wechsel sind solche, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme selbst zu bezahlen. Z. B. A in Wien kauft am 7. August von B daselbst für 1000 fl. Waren, zahlbar nach 2 Monaten; er stellt ihm nun darüber folgenden Wechsel aus:

Wien am 7. August 1883. pr. fl. 1000 ö. W.

Zwei Monate von heute ab zahle ich gegen diesen meinen Wechsel an den Herrn B die Summe von eintausend Gulden ö. W. Den Wert habe ich in Waren erhalten.

An mich selbst
in Wien.
Josef A.

A ist dann nach Wechselstrenge verpflichtet, nach zwei Monaten dem Inhaber dieses Wechsels die darin genannte Summe zu zahlen.

Bei einem eigenen Wechsel kommen wenigstens zwei Personen vor: 1. der Aussteller A, welcher sich zur Zahlung der Wechselsumme verpflichtet; 2. der Remittent B, d. i. der erste Inhaber des Wechsels, dem sich der Aussteller die Zahlung zu leisten verpflichtet.

Fremde, auch gezogene oder trassierte Wechsel sind solche, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme durch eine dritte Person zahlen zu lassen. Z. B. A in Wien erhält Waren von B in Amsterdam im Betrage von 2400 fl. holländischer Währung, zahlbar nach 3 Monaten. Es wäre nun unbequem, die Schuld mit barem Gelde zu begleichen; die nöthige Menge holländ. Geld kann man in Wien nicht leicht aufbringen; das österr. Geld hat wieder in Amsterdam nur den inneren Metallwert; überdies würde die Versendung von barem Gelde mit Kosten verbunden sein und mancherlei Gefahren unterliegen. In Wien ist aber C, welcher mit dem Kaufmanne D in Amsterdam in Geschäftsverbindung und Rechnung steht. A in Wien begibt sich daher zu C, erlegt ihm eine Summe in österr. Währung, welche denselben Wert hat als 2400 fl. holländ. und erhält dafür von C folgenden Wechsel:

Wien am 18. Jänner 1884. pr. fl. 2400 holl.

Drei Monate a dato zahlen Sie gegen diesen Prima-Wechsel an den Herrn B die Summe von zweitausendvierhundert Gulden holländisch. Wert empfangen. Sie stellen solche auf Rechnung laut Bericht von

Prima. An Herrn D
in Amsterdam.
Karl C.

Diesen Wechsel übersendet der Wiener A an B in Amsterdam, welcher denselben dem D dortselbst zur Zahlungserklärung vorweiset oder präsentiert. Wenn sich D auf dem Wechsel schriftlich zur Zahlung bereit erklärt, d. i. wenn er den Wechsel acceptiert, und dann zur bestimmten Zeit die Zahlung an B leistet, so hat A seine Zahlung nach Amsterdam auf eine sehr einfache Art berichtigt. Würde aber D den Wechsel nicht acceptiren, so wäre der Aussteller C des Wechsels unter wechselrechtlicher Haftung gebunden, für die Wechselsumme und für die Auslagen Ersatz zu leisten.

Bei einem fremden Wechsel kommen im allgemeinen vier Personen in Beziehung: 1. der Aussteller C oder Trassant, welcher den Wechsel ausstellt, zieht, oder trassiert; 2. der Bezogene D oder Trassat, welcher die Wechselsumme zu zahlen beauftragt wird; er heißt, wenn er den Wechsel acceptiert hat, auch Acceptant; 3. der Remittent A, welcher den Wechsel kauft, um ihn an seinen Gläubiger B zu übermachen, zu remittieren; 4. der Präsentant B, welcher den Wechsel dem D zur Annahme und späteren Zahlung vorweiset, präsentiert.

Ein Wechsel heißt in Beziehung auf den Trassanten und Trassaten eine Tratte, in Beziehung auf den Remittenten und Präsentanten eine Rimesse.

Die im Wechsel bestimmte Zeit zur Zahlung der Wechselsumme, d. i. die Verfallzeit, kann auf vier Arten festgesetzt werden: 1. Auf einen bestimmten Tag, z. B. 18. Juni dieses Jahres, medio Mai d. J. (unter medio versteht man immer den 15. des Monates), ultimo Juni d. J. (30. Juni). 2. Nach Sicht, und zwar a) unmittelbar nach Sicht (auf Verlangen a vista, a piacere), wenn der Wechsel noch am Tage der Vorweisung zu zahlen ist, und b) auf eine bestimmte Zeit (8 Tage, 3 Wochen, 31 Tage) nach Sicht, wenn die Zahlung in der angegebenen Zeit nach der Präsentation zur Annahme zu leisten ist; bei den Sichtwechseln der zweiten Art wird von dem Acceptanten der Acceptation auch das Datum derselben beigefügt. 3. Auf eine bestimmte Zeit nach dem Tage der Ausstellung, z. B. 2 Monate a dato, 3 Wochen nach heute. 4. Auf eine Messe oder einen Markt; Messwechsel sind, wenn der Markt nur einen Tag dauert, an diesem Tage, wenn der Markt mehrere, jedoch nicht über 8 Tage dauert, am Tage vor dem gesetzlichen Schlusse des Marktes, und wenn der Markt mehr als 8 Tage dauert, am dritten Tage vor dem Schlusse des Marktes fällig.

Bei fremden Wechseln hat der Aussteller die Pflicht, auf Verlangen des Übernehmers mehrere gleichlautende Exemplare des Wechsels auszufolgen, welche darin als Prima, Secunda, Tertia . . . bezeichnet werden. Von diesen wird zuerst die Prima versendet, und wenn diese verloren gienge, die Secunda u. s. w. Diese Vervielfältigung findet nicht statt bei eigenen Wechseln, welche darum auch Sola-Wechsel heißen.

Damit der Wechsel als kaufmännisches Zahlungsmittel im ausgedehnten Umfange verwendet werden könne, ist der Remittent berechtigt, den Wechsel sammt dem ihm daraus zustehenden Rechte einem anderen abzutreten. Das Übertragen der Rechte des Wechselinhabers an einen andern heißt indossieren, oder girieren; es geschieht durch eine schriftliche Erklärung auf dem Wechsel, der Rückseite oder einer Copie desselben, Indossament oder Giro genannt.

a) **Wechseldiscont.**

Wechsel, welche auf die Währung des eigenen Handelsplatzes lauten und daselbst zahlbar sind, heißen Platzwechsel. Wenn ein Platzwechsel vor dem Verfalltage verkauft wird, so muss sich der Verkäufer wegen der früheren Zahlung einen Abzug gefallen lassen, welcher von der Zeit abhängt, die der Wechsel noch zu laufen hat. Dieser Abzug heißt Discont oder Escompt. Wenn man den Discont von der Wechselsumme subtrahiert, so heißt der Rest der discontierte Wert des Wechsels. Der Wechseldiscont wird in Procenten für ein Jahr angegeben und sollte richtig auf Hundert gerechnet werden (§. 127 und 131, b); er wird jedoch thatsächlich immer nach der bequemeren Procentrechnung von Hundert bestimmt, weil die sich ergebende Differenz mit Rücksicht auf die kurze Laufzeit der Wechsel sehr gering ist. Man berechnet daher den Discont sowie die Zinsen auf Tage, und zwar vom Tage des Verkaufes bis zum Verfalltage, zählt jedoch den Kauftag oder den Verfalltag nicht und rechnet jeden Monat zu so viel Tagen, als er deren wirklich hat. Z. B.

Ein Wechsel von 3456 fl., am 15. August fällig, wird am 23. Juni mit 5% Discont verkauft; wie groß ist a) der Discont, b) der discontierte Wert?

Verkauftag 23. Juni
Verfalltag 15. August
Juni 7 Tage
Juli 31 „
Aug. 15 „
53 Disconttage

$$\begin{array}{r} 3456 \times 53 \\ \hline 10368 \\ 17280 \\ \hline 183168 : 6000 \\ \hline 30\cdot528 \text{ à } 6\% \\ -\ 5\cdot088 \text{ à } 1\% \\ \hline \text{Discont } 25\cdot44 \text{ fl. à } 5\% \end{array}$$

Wechselsumme 3456 fl.
ab 5% Discont für 53 Tage 25 „ 44 kr.
discontierter Wert 3430 fl. 56 kr.

Ein Wechsel pr. 960 fl., zahlbar 31 Tage nach Sicht, acceptiert am 18. Juni, wird am 27. Juni mit 4% discontiert; wie viel nimmt man dafür ein?

Accepttag 18. Juni
Verfalltag 19. Juli
Verkauftag 27. Juni
Juni 3 Tage
Juli 19 „
22 Tage

Wechselsumme 960 fl.
4% Disc. für 22 T. 2 „ 35 kr.
discontiereer Wert 957 fl. 65 kr.

b) **Wechselreduction.**

Wechsel, welche auf die Währung eines fremden Handelsplatzes lauten, heißen ausländische Wechsel oder Devisen. Beim Ein- oder Verkaufe von Devisen muss nach einem gegebenen Wechselcurse der Betrag des fremden Geldes (die Wechselvaluta) in die eigene Währung oder umgekehrt umgerechnet werden. Diese Rechnung nennt man die Wechselreduction.

Der Wechselcurs hängt von dem inneren Werte des fremden Geldbetrages, von der Laufzeit des Wechsels, sowie von der Nachfrage und dem Anbote solcher Wechsel ab und bezieht sich immer auf zwei Geldwährungen, die des eigenen und die des fremden Handelsplatzes; es wird nämlich angegeben, dass für eine unveränderliche oder feste Summe der einen Valuta eine veränderliche, bald größere, bald geringere Summe in der andern Valuta geleistet wird. An den österr. Börsen bilden immer 100 (für London 10) Einheiten des fremden Geldes die feste Valuta und gibt der notierte Curs an, wie viel fl. ö. W. Bankvaluta dafür gezahlt oder empfangen werden. Wenn z. B. der Curs auf Paris mit 47 notiert ist, so heißt dies: für 100 Franken zahlt man 47 fl. ö. W. in Banknoten.

Die Wechselreduction wird meist nach der Procent- oder nach der Schlussrechnung ausgeführt. Z. B.

Ein Wiener hat in Amsterdam eine Zahlung von 2360 fl. holl. zu leisten; er will diese durch Übersendung eines Wechsels begleichen, den er zum Curse 98·50 einkauft; wie viel muss er für diesen Wechsel bezahlen?

$$
\begin{array}{r}
2350 \text{ à } 98\tfrac{1}{2} \\
\hline
188\,80 \\
2124\,0 \\
11\,80 \\
\hline
2384{\cdot}60 \text{ fl. ö. W.}
\end{array}
$$

Ein Wiener hat für seine Rechnung in Paris 2485 fl. ö. W. zu fordern; welchen Betrag in Franken wird er trassieren, wenn der Curs auf Paris 47 steht?

$$
\begin{array}{lcl}
47 \text{ fl. ö. W.} & \ldots & 100 \text{ Franken} \\
1 \;\text{"}\;\text{"}\;\text{"} & \ldots & \tfrac{100}{47} \;\text{"} \\
2485 \;\text{"}\;\text{"}\;\text{"} & \ldots & \dfrac{2485 \times 100}{47} = 5287{\cdot}23 \text{ Franken.}
\end{array}
$$

3. Berechnung der Effecten.

§. 141.

Wenn ein Staat genöthigt ist, ein Anlehen aufzunehmen, so theilt er, damit sich daran auch kleinere Capitalisten betheiligen können, die ganze Anlehenssumme in viele kleinere Beträge und stellt darüber den Darlehern Schuldverschreibungen aus, welche Staatspapiere, auch Staatsobligationen oder öffentliche Fondspapiere heißen. Der Capitalsbetrag, auf welchen ein Staatspapier lautet, wird der Nominalwert desselben genannt.

Die Staatspapiere sind entweder verzinsliche Obligationen, für welche in bestimmten Terminen die Zinsen nach einem bestimmten Zinsfuße, und zwar gewöhnlich gegen gedruckte Zinsanweisungen, Coupons, ausgezahlt werden, oder Lose, deren Erträgnis in bestimmten Gewinnsten besteht, die in festgesetzten Ziehungen entfallen. Einige Lose gewähren außer der Möglichkeit, einen großen Gewinn zu machen, auch regelmäßige Zinsen.

Für großartige Unternehmungen, welche sehr hohe Capitalien erfordern, z. B. Eisenbahnbauten, Creditcassen, Berg- und Hüttenwerke, bilden sich Gesellschaften, welche das benöthigte Capital, in kleinere gleiche Theile vertheilt, von vielen Geldbesitzern aufnehmen. Die Urkunde, welche dem Geldgeber für jede einzelne Geldeinlage ausgestellt wird, nennt man eine Actie, und die Gesellschaft selbst eine Actiengesellschaft. Das Erträgnis der Actien, die Dividende, besteht entweder in bestimmten Zinsen oder in einem Antheile am Gewinne der Unternehmung, oder meistens in beiden zugleich. Die ordentliche Dividende gilt für die Zinsem, die außerordentliche vertheilt den Mehrgewinn.

Außer den Actien werden von den Actiengesellschaften häufig auch verzinsliche Schuldverschreibungen hinausgegeben, welche zwar zu keinem Antheile am Gewinne, dagegen zu dem Anspruche auf die Zahlung der Zinsen noch vor den Actien berechtigen und darum Prioritäts-Obligationen oder Prioritäten heißen.

Schuldscheine, welche von Banken und Creditvereinen ausgestellt werden, und durch welche dem Inhaber für seine Forderung die darin ausgedrückte Hypotheken-Sicherheit geboten wird, heißen Pfandbriefe.

Die Actien, Prioritäten, Pfandbriefe und die öffentlichen Fonds werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Effecten bezeichnet.

Die Effecten haben einen veränderlichen Wert, welcher Curs heißt und nicht bloß von dem Nominalwerte, sondern auch von der Höhe des Zinsfußes und des Gewinnes, von der Nachfrage und dem Anbote abhängt. Der Curs wird entweder in Procenten d. i. für 100 Einheiten des Nominalwertes, oder per Stück angrgeben. An den österreichischen Börsen werden die Curse in Gulden ö. W. Bankvaluta, und zwar bei sämmtlichen Actien sowie bei Privatlosen pr. Stück, dagegen bei den Staatspapieren, Grundentlastungs-Obligationen, Pfandbriefen und den meisten Prioritäts-Obligationen für 100 fl. des Nominalwertes notiert.

Beim Kaufe zinstragender Effecten müssen dem Verkäufer nebst dem Capitalswerte auch die nicht behobenen Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Tage des Kaufes vergütet werden. Bei den Actien ist die außerordentliche Dividende in dem Curse mitbegriffen, die ordentliche Dividende aber ist als laufender Zins vom letzten Verfallstage bis zum Kauftage gleichfalls dem Verkäufer zu vergüten.

Bei der Berechnung des Einkaufs- oder Verkaufswertes der Effecten verfährt man auf folgende Art:

1. Man bestimme den Curswert der Effecten d. i. den Wert derselben mit Rücksicht auf den Curs. Ist der Curs in Procenten gegeben, so multipliciert man den Nominalwert mit dem Curse und dividiert das Product durch 100. Ist dagegen der Curs pr. Stück gegeben, so multipliciert man den Curs mit der Anzahl der Stücke.

2. Bei verzinslichen Effecten berechne man die Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Kauftage und addiere sie zu dem früher gefundenen Curswerte. Der Monat wird dabei zu 30 Tagen angenommen und der Kauftag nicht mitgezählt.

Die Zinsen der Effecten werden immer von dem Nominalwerte berechnet.

Bezüglich der in Silber und Gold verzinslichen Effecten besteht an den österreichischen Börsen die Übung, dass die laufenden Zinsen in Papiergeld ohne Zuschlag des Agio berechnet werden. Z. B.

Wie viel kosten 12 Stück Wiener Communallose à $145\frac{3}{4}$?

$$145\tfrac{3}{4} \times 12 = 1749 \text{ fl.}$$

Am 28. September werden 1400 fl. einheitliche Staatsschuld in Noten zum Curse 85·80 gekauft; wie viel ist dafür zu zahlen? (Zinsen zu $4\frac{1}{5}$% seit 1. August.)

1400 fl. à 85·80	1201·20 fl.
Zinsen seit 1. August, 57 Tage, à $4\frac{1}{5}$% .	9·31 „
	1210·51 fl.

Siebenter Abschnitt.
Angewandte Rechnungen mit Rücksicht auf besondere Berufszweige.

§. 142.

Den Abschluss des Rechenunterrichtes in der Volksschule bildet die Lösung von Aufgaben, welche sich auf besondere Berufszweige beziehen und daher nicht nach der Rechnungsmethode, sondern nach dem sachlichen Inhalte gruppenweise geordnet sind. Wenn zugegeben werden muss, dass bei der Wahl und Behandlung der Lehrstoffe in den oberen Classen, welche die frühere Fortbildungsschule vertreten, auch der muthmaßliche Beruf der Schüler in die Wagschale zu fallen hat, so folgt von selbst, dass auch der Rechenunterricht in diesen Classen für die Schüler um so fruchtbarer sein werde, je mehr er sich an den künftigen Beruf derselben anlehnt. Je mehr die eigentliche Fertigkeit im Rechnen zunimmt, desto mehr soll der zu berechnende Stoff in den Vordergrund treten, und schließlich soll er unter Berücksichtigung des Lebenskreises der Schüler der Faden sein, an welchem sich die einzelnen Aufgaben Schritt für Schritt anreihen. Es werden daher beim Rechenunterrichte des letzten Schuljahres in den Landschulen vorwiegend die ländlichen Verhältnisse, in den Stadtschulen gewerbliche und kaufmännische, in Mädchenschulen vorzüglich hauswirtschaftliche Aufgaben in's Auge zu fassen sein. Derartige Rechenübungen werden die Schüler zur Erkenntnis führen, wie vielseitig die Verhältnisse des Lebens sind, die sich in den Kreis der Berechnung ziehen lassen, und wie vortheilhaft und nothwendig sich solche Rechnungen für jeden Berufszweig herausstellen; sie werden den Anstoß geben, dass künftig auch der Dorfbewohner und Handwerker Dinge der Rechnung unterziehen wird, über die er bisher aus Mangel an Einsicht zu seinem Nachtheile nicht rechnen konnte. Indem die Schüler bei solchen angewandten Rechnungen die Verhältnisse ihrer Umgebung denkend beobachten und beurtheilen müssen, üben und schärfen sie zugleich ihre Verstandeskraft und lernen, die gewonnene Kraft wieder im Leben anzuwenden. Die Rechenübungen über besondere Berufszweige haben daher einen materialen und formalen Wert, indem sie bewirken, dass die Schüler nicht nur praktisch besser vorbereitet in's Leben treten, sondern auch in Bezug auf geistige Entwicklung einen höheren Standpunkt erreichen.

Die Behandlung solcher Aufgaben ist dieselbe, wie die der angewandten Aufgaben überhaupt; die Ausrechnung bietet nichts Neues und bereitet keine Schwierigkeit, sobald die sachlichen Verhältnisse, auf deren Erklärung besondere Sorgfalt zu verwenden ist, richtig aufgefasst wurden.

Es kann nur zweckförderlich sein, wenn die Schüler bei den einzelnen sachlich gegliederten Abtheilungen dieser Stufe auch einige Andeutungen über die bezügliche Buchführung erhalten. Damit sich der Kaufmann oder der Gewerbsmann über sein Geschäftsvermögen und die darin vorgehenden Veränderungen zu jeder Zeit eine klare Übersicht verschaffen könne, ist es unbedingt nothwendig, dass er in dazu bestimmten Büchern genau aufzeichne, worin das anfängliche Vermögen bestand, wie theuer diese oder jene Ware eingekauft, zu welchem Preise dieselbe oder die daraus verfertigte Sache verkauft wurde, welche Kosten damit verbunden waren, wer ihm schuldig sei oder an ihn zu fordern habe, und wie viel und wann er die Zahlung zu empfangen oder zu leisten habe u. dgl. Ebenso wichtig ist es für den Landwirt, dass alles, was auf den Betrieb seiner Wirtschaft, auf die Vorräthe, Arbeitskosten und Erzeugnisse Bezug hat, gehörig aufgeschrieben werde. Auch für jede Hausfrau empfiehlt sich die Führung eines Haushaltungsbuches, in das sie nicht nur die täglichen Ausgaben, sondern auch den Bestand der Einrichtung und Wäsche, den Abgang und Zuwachs derselben sorgfältig einträgt. Wenn es auch nicht Sache der Volksschule sein kann, ihren Schülern eine vollständige Lehre der Buchhaltung für jeden dieser Berufszweige vorzutragen, so geht es doch recht gut an, daraus einzelne Bruchstücke als Rechenbeispiele zu wählen und an dieselben kurze Andeutungen über die Buchführung zu knüpfen.

Es erübriget uns nur noch, zu den einzelnen hieher gehörigen Abtheilungen einige specielle Bemerkungen beizufügen.

I. Hauswirtschaftliche Rechnungen.

§. 143.

Die denkende, auf Ersparnis bedachte Hausfrau wird über alles, was im Haushalt erforderlich ist, vergleichende Berechnungen anstellen, um zu sehen, wie groß der Bedarf ist, und wie derselbe am billigsten gedeckt werden kann. In dieser Richtung empfehlen sich für das letzte Schuljahr insbesondere:

a) Allgemeine Aufgaben aus der Hauswirtschaft;
b) Aufgaben über die Nahrungsmittel;
c) Aufgaben über die Kleidung;
d) Aufgaben über die Beleuchtungs- und Brennmateralien; und
e) Beispiele aus den Haushaltungsbüchern.

Nebenher sind auch einfache Preisberechnungen, wie sie in jeder Hauswirtschaft fast täglich vorkommen, als Kopfrechnen recht fleißig zu üben.

II. Landwirtschaftliche Rechnungen.

§. 144.

Die erweiterte Einsicht in das Wesen des Ackerbaues und der Viehzucht machen auch für den Landwirt eine Anwendung der Rechenkunst auf Gebiete nothwendig, die ihm früher ferne lagen. Soll die landwirtschaftliche Production gehoben werden, so reicht dazu der regsame Körper, die starke und rührige Hand des Landmannes allein nicht aus; der Landwirt muss, damit seine Thätigkeit lohnend werde, die Wirtschaft mit klarer Durchschauung aller ihrer Verhältnisse denkend und rechnend betreiben. An der Hand der Berechnung muss er bezüglich der Viehzucht die Nahrhaftigkeit der Futterstoffe, die darzureichende Menge und deren Erfolg für Milcherzeugung und Mästung, bezüglich der Feldwirtschaft den Bedarf an Dünger und Aussaat, die Leistungsfähigkeit der Arbeiter und Zugthiere genau kennen; er muss sich an der Hand der Berechnung genau sagen können, wie hoch ihm 1 Liter Milch, 1 Kilogramm Rindfleisch, 1 Hektoliter Korn zu stehen kommt, welchen Reinertrag ein Hektar des bebauten Bodens liefert, u. dgl.

Die gewöhnliche Landschule kann es erreichen, dass derartige Berechnungen selbst von dem Landmanne, der keine weitere Bildungsanstalt besucht, angestellt werden können, wenn sie schon ihre Schüler darin übt. Dies kann durch folgende Rechnungsübungen erreicht werden:

a) Allgemeine Aufgaben aus der Landwirtschaft;

b) Aufgaben über die verschiedenen Futterstoffe;

c) Aufgaben über den Futterbedarf und die Nutzbarkeit des Rindes;

d) Aufgaben über die Fütterung und Nutzbarkeit der Pferde, Schweine und Schafe;

e) Aufgaben über die Streu- und Düngermenge;

f) Aufgaben über den Wiesen- und Ackerbau;

g) Beispiele aus der Buchführung des Landwirtes.

Diese Aufgaben werden dem Lehrer auch Anlass zu mancherlei lehrreichen Bemerkungen über den rationellen Betrieb der Landwirtschaft bieten.

III. Gewerbliche Rechnungen.

§. 145.

Unsere Zeit, in welcher sich die industrielle Thätigkeit so großartig entfaltet, stellt an den Gewerbsmann, insbesondere auch in Beziehung auf das Rechnungswesen, viel höhere Anforderungen, als sie früher waren. Es genügt nicht mehr, dass derselbe nur Conti oder Rechnungen zu fertigen wisse. Will er den Preis seiner Erzeugnisse so bestimmen, dass er bei dem Verkaufe seinen bürgerlichen Gewinn und sein Auskommen findet, ohne die Abnehmer zu überhalten, so muss er gar vieles in den Kreis seiner Berechnung ziehen; er muss den Preis der Rohstoffe, die Frachtauslagen, die Zinsen des in den Waren und in der Einrichtung der Werkstätte steckenden Capitals, die Ausgaben für die Beleuchtung und Beheizung, den Lohn für die Gesellen, wie auch seine eigene Arbeit in Anschlag bringen.

Einfachere Calculationen dieser Art, wie die folgenden, werden in der obersten Classe der Volksschule für Schüler, die sich dem gewerblichen Berufe widmen wollen, einen sehr zweckmäßigen Übungsstoff bilden.

a) Allgemeine Aufgaben aus dem Gewerbsleben;

Aufgaben aus dem Geschäftskreise nachbenannter Gewerbsleute:

b) Müller, Bäcker, Zuckerbäcker, Branntweinbrenner, Wirte;

c) Fleischhauer, Seifensieder, Gerber, Schuhmacher, Kürschner, Handschuhmacher, Bürstenbinder, Hutmacher;

d) Weber, Färber, Tuchmacher, Schneider, Kappenmacher, Seiler;

e) Buchbinder;

f) Drechsler, Tischler, Wagner, Glaser, Zimmermann, Maurermeister, Steinmetz;

g) Schlosser, Schmied, Kupferschmied, Messerschmied, Klempner, Gelbgießer und Silberarbeiter;

h) Schließlich einige Beispiele aus der gewerblichen Buchführung.

IV. Kaufmännische Rechnungen.

§. 146.

Für die kaufmännischen Geschäfte haben sich unter dem Namen der „kaufmännischen Arithmetik“ besondere Rechnungsweisen herausgebildet, die sich mitunter ganz einfach, manchmal aber auch sehr zusammengesetzt gestalten. Dieses specifisch kaufmannännische Rechnen gehört selbstverständlich nicht in die Volksschule, sondern muss den Handelsschulen überlassen bleiben. In den Volksschulen der Städte und Märkte kann es sich nur darum handeln, den Schülern durch Lösung leichterer, hieher gehöriger Aufgaben zu zeigen, wie sie die gewonnene Rechenfertigkeit auch auf diesem Gebiete verwerten können, und sie dadurch für den späteren kaufmännischen Beruf anzuregen und vorzubereiten. Während dabei die Übungsstoffe aus dem kaufmännischen Leben hergenommen werden, gelangen bei der Auflösung nur bereits bekannte Rechnungen zur Wiederholung.

Die hieher gehörigen Übungen können nach folgenden Gruppen geordnet werden.

a) Allgemeine Aufgaben aus dem kaufmännischen Leben;

b) Wiederholungsaufgaben über Tara, Sconto, Sensarie und Provision;

c) Aufgaben über Gewinn und Verlust;

d) Einfache Aufgaben über Münzen, Wechsel, Staatspapiere und Actien;

e) Kaufmännische Anwendungen der Gesellschafts-, Mischungs- und Kettenrechnung.

f) Leichtere Einkaufs- und Verkaufsrechnungen;

g) Beispiele aus der kaufmännischen Buchführung.