

Merjenje majhnih sil v vakuumu

Measurement of Small Forces in Vacuum

Babič D¹, A. Čadež, FMF Oddelek za fiziko, Ljubljana

V sestavku sta predstavljena zgradba in delovanje aktivno stabiliziranega magnetnega levitatorja. Elektromagnet z zašiljeno konico je primeren za levitacijo železnih kroglic s premeri od 0.1 mm do 1 cm. Dvojna fotodioda, uporabljena v optičnem senzorju, omogoča natančno merjenje položaja kroglice. Inštrument je zato uporaben za merjenje majhnih sil, ki delujejo na kroglico.

Ključne besede: majhne sile, magnetna levitacija, osnovni naboj, povratna zanka

We present the design and operation of a servo stabilized magnetic levitator. A magnet with a conical tip is suitable for levitation of iron balls ranging in diameter from 0.1 mm to 1 cm. A dual photodiode provides a sensitive optical position sensor, which makes the levitator an interesting device for measuring small forces.

Key words: small forces, magnetic levitation, elementary charge, feed-back loop

1. Uvod

V eksperimentalni fiziki in tehnologiji vse pogosteje trčimo ob problem merjenja majhnih sil in pospeškov (npr. seizmologija, AFM, meritve gravitacijskih valov itd.). V uporabi je mnogo metod, prilagojenih različnim potrebam. Skupno vsem je, da silo merijo preko odmika testne mase, ki jo v nevtralni legi drži vzmet, pogosto pa vzmet nadomešča primerne elektromagnetno polje. V zadnjih dveh desetletjih se je kot posebno uspešna tehnika uveljavila magnetna levitacija^{1,2,3,4}.

Stabilno magnetno levitacijo je možno doseči na več načinov. Zelo uveljavljena je aktivno stabilizirana magnetna levitacija feromagnetnega delca². V sestavku bomo predstavili zgradbo in delovanje preprostega magnetnega levitatorja (2. razdelek). V 3. razdelku so predstavljene meritve in rezultati.

2. Zgradba in delovanje magnetnega levitatorja

Stabilne levitacije feromagnetnega delca v statičnem magnetnem polju ni možno doseči. Zato je potrebna aktivna stabilizacija s povratno zanko (servo), ki uravnava jakost magnetnega polja in s tem magnetno silo.

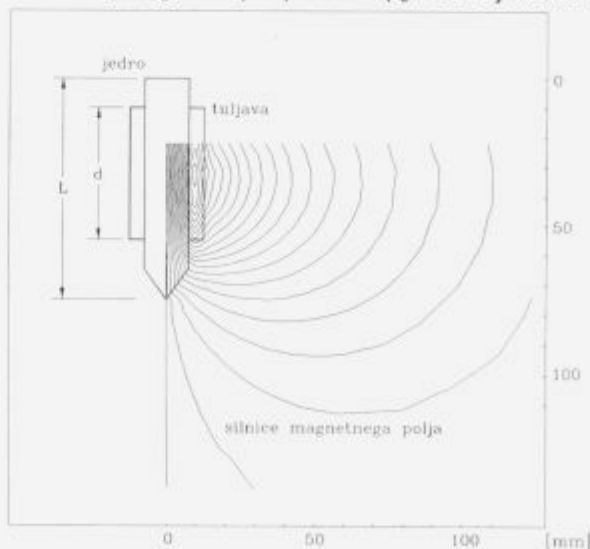
Glavna sestavna dela našega magnetnega levitatorja sta elektromagnet in optični senzor premikov.

Elektromagnet ustvarja magnetno silo, ki je potrebna za levitacijo feromagnetnega delca - v našem primeru drobne ($2R=0,1\text{ mm}$) železne kroglice. V levitatorju smo uporabili navpično orientiran elektromagnet s cilindričnim jedrom z zašiljeno konico. **Slika 1**

prikazuje elektromagnet z vrisanim magnetnim poljem, ki se ob konici močno zgosti. Magnetna sila na železno kroglico je zato v bližini konice vedno usmerjena proti njenemu koncu. Za stabilno levitacijo je torej potrebno kontrolirati le jakost magnetne sile oziroma tok skozi elektromagnet. Tok, pri katerem magnetna sila uravnoteži silo teže na feromagnetno kroglico z gostoto ρ , ki je z_b oddaljena od konice elektromagneta, lahko ocenimo iz izraza, ki velja za magnetno nenasičen paličasti magnet⁵:

$$I = \frac{2L}{Nd^2} \sqrt{\frac{2gp}{3\mu_0}} (z_b + z_m)^{5/2}$$

Tu sta d in L dimenziji tuljave in jedra (**slika 1**), N število ovojev, g težni pospešek in μ_0 induksijska kon-



Slika 1: Prerez elektromagneta
Figure 1: Cross-section of the electromagnet

¹ Dušan BABIČ, dipl. inž.
FMF Oddelek za fiziko
Ljubljana, Jadranska 19

stanta. Parameter z_m lahko izračunamo iz približnega izraza, dobljenega z numerično simulacijo⁶:

$$\frac{z_m}{L} \approx 5,4 \cdot 10^{-2} + 7,8 \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{2d}{L}\right)$$

V našem levitatorju smo uporabili elektromagnet z $L = 7,5$ cm dolgim jedrom in tuljavo z $N = 200$ ovoji in dolžino $d = 4,5$ cm. Izračunani levitacijski tok za železno kroglico, postavljeno $z_b = 3$ mm pod konico magneta, je $I = 0,32$ A. Meritve pa so pokazale, da je za levitacijo kroglic s premerom od 0,1 mm do 1 mm potreben tok $I = 0,4$ A(1+0,05), kar je v dobrem soglasju z izračunano vrednostjo.

Tok skozi elektromagnet uravnava povratna zanka s pomočjo optičnega senzorja, ki meri navpični odmik kroglice od ravnovesne lege. Snop svetlobe iz laserske diode simetrično osvetljuje dvojno fotodiodo (**slika 2**). Kroglica se v ravnovesni legi nahaja v sredini snopa, tako da sta fototokova iz obeh polovic fotodiode enaka. Premik kroglice v navpični smeri δ_z povzroči sorazmerno razliko fototokov - signal: $\delta I = \gamma \cdot \delta_z$. Z δ smo označili občutljivost senzorja, ki jo lahko ocenimo iz izraza⁷:

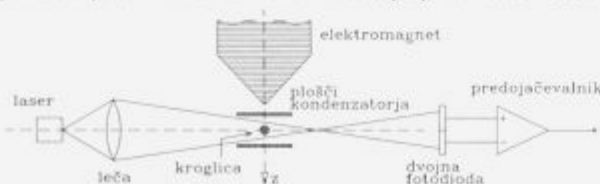
$$\gamma = \frac{8R}{\pi w^2} \eta P_1 e^{-\frac{2R^2}{w^2}}$$

Tukaj so: R - polmer kroglice, w - premer laserske pege na mestu kroglice, η - občutljivost fotodiod in P_1 - moč laserske diode. Za kroglice s premerom 0,1 mm je občutljivost našega senzorja: $\gamma = 10$ A/m ($w=0,2$ mm, $\eta=0,45$ A/W, $P_1=3$ mW).

Za stabilno levitacijo je potrebno signal iz senzorja ojačiti in filtrirati. Za to poskrbi kompenzacijski ojačevalnik. Teorija stabilnosti servo sistemov¹⁰ nam pove, katerim zahtevam mora ustrezati prenosna funkcija kompenzacijskega ojačevalnika. Zaradi enostavnosti in prilagodljivosti je ugodna izbira:

$$H(s) = k \frac{s/\omega_1 + 1}{s/\omega_2 + 1}$$

Ojačenje k ter mejni frekvenci ω_1 in ω_2 , ki določata frekvenčni interval, v katerem se ojačevalnik vede kot diferenciator, skupaj določajo hitrost odziva povratne zanke oziroma frekvenco ω_u , do katere povratna zanka kompenzira zunanje sile na lebdečo kroglico. Hitrost povratne zanke mora biti tolikšna, da zunanje motnje (tresenje tal, zračni tokovi itd.) kroglice ne premaknejo iz obsega optičnega senzorja (≈ 10 μ m). Z uporabo pasivne seizmične izolacije je levitator sta-



Slika 2: Optični senzor položaja
Figure 2: Optical position sensor

bilen, če povratna zanka kompenzira motnje do frekvence: $\omega_u = 2\pi 40$ Hz.

3. Meritve in rezultati

Levitator uporabljamo za merjenje statičnega električnega naboja na kroglici. Naboj q otipamo preko električne sile $F_e = qE$, s katero znano električno polje ($E = 500$ V/mm) znotraj ploščatega kondenzatorja (razmik med ploščama 2mm, $U = 1$ kV - **slika 2**) deluje na kroglico. Nihajoče električno polje ($\nu = 40$ Hz) povzroči nihanje kroglice, ki ga zazna optični senzor.

Najmanjša sila (oz. naboj), ki jo lahko merimo, je določena z nivojem šuma v inštrumentu. Glavni izviri šuma pri frekvencah od 10 Hz do 100 Hz so tresenje tal, brownovsko gibanje kroglice v zraku in šum v optičnem senzorju premikov. S primerno seizmično izolacijo postane tresenje tal nepomembno.

Šum zaradi brownovskega gibanja kroglice v zraku lahko ocenimo iz izraza za spektralno gostoto stohastične sile, ki deluja na harmonski oscilator v termičnem ravnovesju⁸:

$$S_T(\omega) = \sqrt{3\xi R k_B T} \approx 3,3 \cdot 10^{-15} \frac{N}{\sqrt{\text{Hz}}} \cdot \left(\frac{2R}{0,1\text{mm}}\right)^{1/2}$$

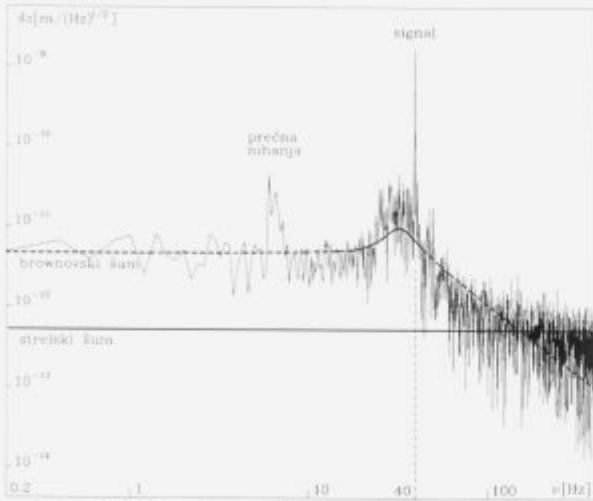
kjer so: ξ viskoznost zraka ($1,8 \cdot 10^{-5}$ kg/m s), T temperatura (sobna), k_B Boltzmanova konstanta in R polmer kroglice.

Šum senzorja ima dva glavna prispevka. Prvi je strelski šum laserja (shot-noise), ki je posledica kvantne narave svetlobe⁹. Drugi je šum elektronike, katerega nivo je možno s pazljivim načrtovanjem vezij spraviti pod nivo strelskega šuma. Strelski šum se preko povratne zanke prenaša do elektromagneta in s tem deluje na kroglico s stohastično silo, katere spektralno gostoto izračunamo iz izraza:

$$S_1(\omega) = \frac{1}{\gamma |Y(\omega)|} \sqrt{2e_0 P_1 \eta} \approx 3,0 \cdot 10^{-16} \frac{N}{\sqrt{\text{Hz}}} \cdot \left(\frac{2R}{0,1\text{mm}}\right)^3 \cdot \omega(\omega_u)$$

Z e_0 smo označili osnovni naboj, z $Y(\omega)$ pa frekvenčni odziv inštrumenta.

Frekvenčni spekter značilne meritve skupaj z izračunanimi vrednostmi za nivoje šumnih izvirov prikazuje **slika 3**. Pri frekvencah do ≈ 100 Hz prevladuje šum zaradi brownovskega gibanja kroglice, pri višjih frekvencah pa postane pomembnejši strelski šum. Na **sliki 3** so lepo vidni posamezni karakteristični vrhovi. Vrh pri 6 Hz je posledica prečnih nihanj kroglice v laserskem snopu, ki jih povratna zanka ne duši. Širok vrh pri ≈ 35 Hz je karakterističen za delovanje povratne zanke in predstavlja mejno frekvenco ω_u , do katere povratna zanka kompenzira zunanje vplive. Oster vrh pri 40 Hz pa je posledica vzbujanja nihanj kroglice z električnim poljem in kaže na prisotnost električnega naboja ($q \approx 11 e_0$ oz. $F_e \approx 10^{-12}$ N) na kroglici (količina naboja smo ocenili iz višine vrha in znane občutljivosti inštrumenta). Iz meritve in računskih ocen je razvidno, da pri frekvencah do ≈ 100 Hz najmanjšo silo, ki jo inštrument zazna, določa



Slika 3: FFT spekter značilne meritve z vrisanimi nivoji brownovskega in streškega šuma. Prikazana je spektralna gostota odmikov (δz) kroglice zaradi zunanjih sil

Figure 3: FFT spectrum of a typical measurement with theoretical predictions for the Brownian and photon shot-noise levels. Shown is the spectral density of the ball's displacements due to the external forces

brownovski šum. S postavitvijo inštrumenta v vakuumsko komoro ($p \approx 10^{-9}$ Pa) postane na celotnem frekvenčnem področju prevladujoč streški šum, kar omogoča merjenje periodičnih sil $\approx 10^{-15}$ N v opazovalnem času 1 s.

4. Literatura

- ¹ A. F. Hebard: A Superconducting Suspension with Variable Restoring Force and Low Damping; *Rev. Sci. Instrum.*, 44, 1973, 425
- ² G. Morigo, P. Bloch, P. Pavlopoulos in R. Klapisch: *Proc. of the 1st Course of the Int. School of Physics with Low-energy Anti-protons (Erice-Italy)* (Plenum, N.Y. 1973) poglavje ix, str. 362
- ³ N. N. Abdurakhmanov, E. V. Mezhburd in A. A. Senin: Rotary Viscometer with Magnetic Suspension; *Prib. Tekh. Eksp.*, 32, 1989, 206
- ⁴ E. T. Frantsuz, Y. D. Gorchakov in V. M. Khavinson: Measurements of the Magnetic Flux Quantum, Planck Constant and Elementary Charge; *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 41, 1992, 482
- ⁵ L. D. Landau, E. M. Lifshitz in L. P. Pitaevski, *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford, Pergamon Press, 1989)
- ⁶ O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method 3rd. ed.* (London, McGraw-Hill, 1977)
- ⁷ A. Yariv, *Quantum Electronics* (New York, Wiley, 1975)
- ⁸ V. B. Braginsky in A. B. Manukin, *Measurement of Weak Forces in Physics Experiments* (Chicago and London, The University of Chicago Press, 1977), str. 4
- ⁹ R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford, Calderon Press, 1973)
- ¹⁰ R. F. Stegel, *Stochastic Optimal Control: Theory and Application*, (New York, Wiley, 1986)