BROWNOVO GIBANJE Z ELASTIČNIMI TRKI

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 05.40.Jc, 05.40.-a

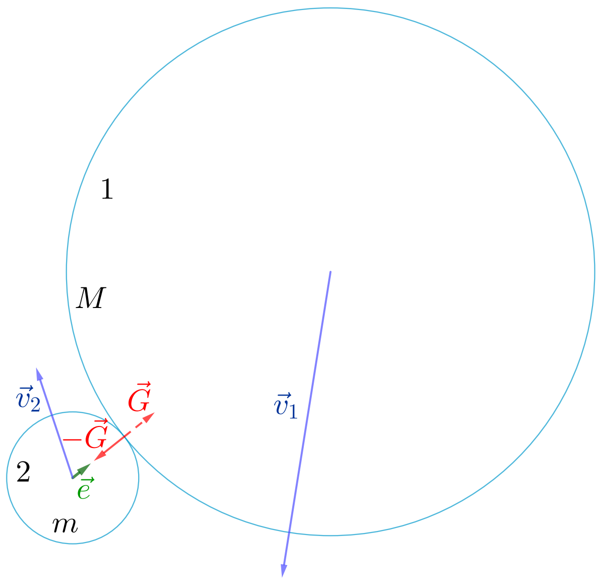
Znamenito Brownovo gibanje, ki je dalo fiziki številne pomembne istočnice, obravnavamo zgolj z elastičnimi trki med delci v mediju in masivnim Brownovim delcem. Za izgubljanje energije Brownovega delca ne potrebujemo Stokesovega izraza za upor kroglice v viskoznem sredstvu, ki velja le za enakomerno gibajoče se kroglice z velikostjo, kjer veljajo hidrodinamične enačbe.

BROWNIAN MOTION WITH ELASTIC COLLISIONS

Famous Brownian motion, which gives physics a lot of important clues, is treated with elastic collisions between spherical particles of the medium and those with the massive Brownian particle. For energy dissipation we do not need Stokes force on spherical particle in viscous medium, which is valid only for uniform motion and sizes of particles where hydrodynamic equations are valid.

V prejšnjem članku [3] smo ugotovili, da lahko le z elastičnimi trki med ploščicami, ki brez trenja drsijo po gladki podlagi, presenetljivo dobro opišemo vodni tok v različnih okoliščinah. S povprečevanjem njihovih hitrosti se izoblikuje hitrostno polje, ki je zelo podobno polju v tekočini. V članku v Preseku smo pokazali, da na tak način lahko rešimo tudi naloge iz prevajanja toplote [2]. V tem prispevku pa bomo pokazali, da lahko z elastičnimi trki dobro ponazorimo Brownovo gibanje drobnih delcev v mediju. To pot si bomo pomagali z enakimi kroglicami v prostoru, ki elastično trkajo med seboj in s stenami. Te naj predstavljajo medij, v katerem je Brownov delec. Da bo razprava kar se da preprosta, bo imel Brownov delec enake lastnosti kot kroglice medija, trkal bo torej z njimi elastično, le njegova masa bo zelo velika v primerjavi z maso posamezne kroglice.

Najprej si oglejmo elastični trk kroglice medija z maso m z Brownovim delcem z maso M. Na sliki 1 sta kroglici v stiku, enotski vektor $\vec{e}$ povezuje njuni središči. Po trku se obema kroglicama spremeni gibalna količina, pri eni za $G\vec{e}$, pri drugi pa za $-G\vec{e}$. Sili delujeta vzdolž vektorja $\vec{e}$, ker se kroglici pri trku vdata le pravokotno na obod. Da določimo velikost G gibalne količine $G\vec{e}$ upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri elastičnem trku



Slika 1. Razmere pri elastičnem trku.

ohrani, torej

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}M\left(\vec{v}_1 + \frac{G}{M}\vec{e}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_2 - \frac{G}{m}\vec{e}\right)^2 .$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo kroglic pred trkom, na desni pa po njem. Po krajšem računu dobimo, seveda pri pogoju, da se je trk res zgodil ($G > 0$):

$$G = \frac{2Mm}{m+M}\,\vec{e}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\,,$$

iz tega pa sledita hitrosti kroglic po trku. Enotski vektor $\vec{e}$ lahko kaže v poljubno smer. Kinetično energijo Brownovega delca po trku lahko hitro izračunamo:

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{2Mm}{(m+M)^2}[m(\vec{v}_2\cdot\vec{e})^2 - M(\vec{v}_1\cdot\vec{e})^2]\,,$$

prav tako njegovo hitrost po trku:

$$\vec{v}_1^{po} = \vec{v}_1 + \frac{2m}{m+M}(\vec{e}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1))\vec{e}.$$

Ker je število trkov ob Brownov delec zelo veliko, preden se le-ta znatno premakne, vektorji $\vec{e}$ pa so v vseh mogočih smereh, moramo zgornja izraza po teh smereh povprečiti. Privzeli bomo, da so vse smeri zastopane enakomerno, ker je hitrost Brownovega delca zelo majhna v primeri s hitrostmi kroglic, pač zaradi zelo velike razlike v njihovi masi ($M \gg m$). Izračunati moramo torej povprečja $\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2}$, $\overline{(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2}$, $\overline{(\vec{e} \cdot \vec{v}_1)(\vec{e} \cdot \vec{v}_2)}$ in $\overline{\vec{e}\,[\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]}$. Pri računanju zgornjih povprečij upoštevamo, da v poljubnem koordinatnem sistemu s sferičnimi koordinatami velja:

$$\vec{e} = [\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta]^T \,.$$

Ker je $\vec{e}$ enakomerno posejan po porostorskem kotu, dobimo povprečje $\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2}$ takole:

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega\, (\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 \,.$$

Zapisano eksplicitno je to

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\pi}^{0} d\cos\vartheta \int_{0}^{2\pi} d\varphi\, (\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 \,,$$

kar da:

$$\overline{(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2} = \frac{1}{3} v_1^2 \,.$$

Podobno dobimo

$$\overline{(\vec{e} \cdot \vec{v}_1)(\vec{e} \cdot \vec{v}_2)} = \frac{1}{3} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

in za povprečje $\overline{\vec{e}\,[\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]}$:

$$\overline{\vec{e}\,[\vec{e} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]} = \frac{1}{3} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \,.$$

Tako dobimo za energijo Brownovega delca po trku, povprečeno po smeri trka $\vec{e}$:

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(E_2 - E_1) + \frac{4Mm(M-m)}{3(M+m)^2} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \qquad (1)$$

in za njegovo povprečeno hitrost po trku:

$$\vec{v}_1^{\,po} = \vec{v}_1 + \frac{2m}{3(M+m)} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \,.$$

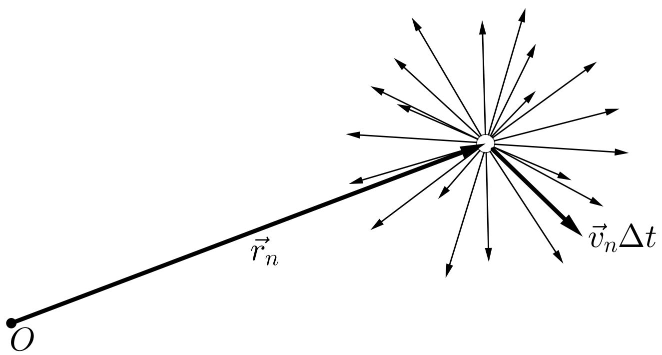
Povprečenje še po smereh hitrosti $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ odpravi zadnji člen v enačbi (1), da imamo:

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(E_2 - E_1)\,.$$

Povprečenje po času da končno obliko enačbe:

$$\overline{E_1^{po}} = \overline{E_1} + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(\overline{E_2} - \overline{E_1})\,. \tag{2}$$

Energija Brownovega delca se po več trkih v povprečju bliža povprečni energiji kroglic. To je pomemben rezultat, ki ga poznamo pod imenom ekviparticijski izrek. Brownov delec ima, ko doseže ravnovesje z okolico, v povprečju enako energijo kot kroglice medija. Odmik od povprečne energije se s trki zmanjšuje.



Slika 2. Sprememba vektorja $\vec{r}_n$ pri trku. Možni vektorji $\vec{v}$ so lahko v različnih smereh.

Zaradi velike mase M Brownovega delca v primerjavi z maso kroglic m je njegova ravnovesna hitrost zelo majhna. Kinetično energijo $\frac{M}{2}\overline{\vec{v}_1^2}$ ima sicer enako kot kroglice $\frac{m}{2}\overline{\vec{v}_2^2}$, hitrost v_1 pa je precej manjša od v_2:

$$v_1 = \sqrt{\frac{m}{M}}\, v_2\,.$$

Opazovanje Brownovega delca je pred kakimi 100 leti dalo neodvisno oceno Avogadrovega števila in precej utrdilo prepričanje, da molekule res obstajajo. Merjenje njegove hitrosti je težavno še danes, ker je hitrost po eni strani majhna, poleg tega pa se zelo hitro spreminja. Pač pa je mogoče opazovati njegovo oddaljevanje od vnaprej izbrane točke na njegovem tiru. Slika 2 povzema njegovo neurejeno gibanje. Delec je pred časom bil v točki s krajevnim vektorjem $\vec{r}_n$, trenutno je v točki $\vec{r}_{n+1}$, od koder se lahko premakne kamorkoli v prostoru za $\vec{v}_n \Delta t$, kjer je $\vec{v}_n$ njegova trenutna hitrost, Δt pa povprečni čas med zaporednima trkoma s kroglico. Pri tem se njegova oddaljenost od izhodiščne točke O spremeni. Za krajevni vektor $\vec{r}_{n+1}$ velja:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t\,.$$

Kvadrat razdalje od stare do nove lege je potem:

$$r_{n+1}^2 = (\vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t)^2 = r_n^2 + 2\vec{r}_n \vec{v}_n \Delta t + (\vec{v}_n)^2 \Delta t^2\,.$$

Opazujemo le spreminjaje komponente x:

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2x_n v_{xn} \Delta t + (v_{xn})^2 \Delta t^2\,.$$

V povprečju, ko opazujemo potovanje delca iz točke O mnogokrat, kvadrat koordinate x narašča linearno s časom, če je le $\overline{xv_x}$ konstanten. Da je to res, hitro pokažemo. Za gibanje Brownovega delca veljata enačbi:

$$x_{n+1} = x_n + v_{xn} \Delta t \tag{3}$$

$$v_{xn+1} = v_{xn} + \frac{2m}{3(M+m)}(v_{2x} - v_{xn})\,. \tag{4}$$

Ko med seboj zmnožimo levi in desni strani zgornjih enačb, dobimo

$$x_{n+1} v_{xn+1} = (1-\alpha) x_n v_{xn} + (1-\alpha) v_{xn}^2 \Delta t + \alpha x_n v_{2xn} + \alpha v_n v_{2xn}\,.$$

Pisali smo

$$\alpha = \frac{2m}{3(M+m)}\,.$$

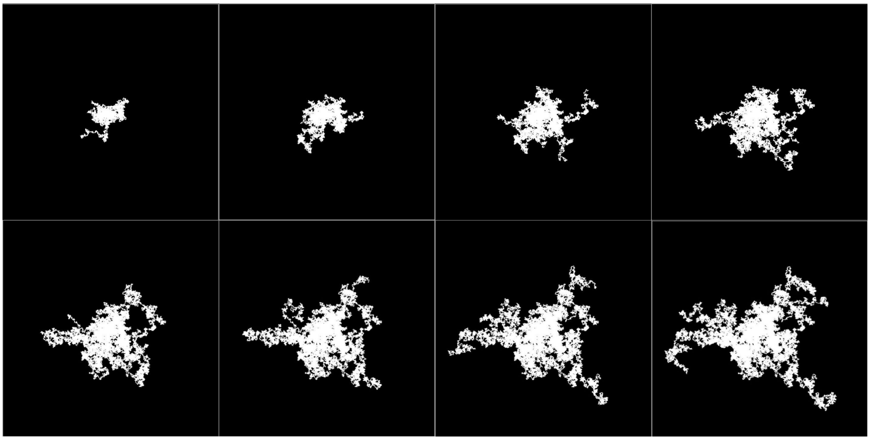
Povprečje za veliko število Brownovih delcev je potem:

$$\overline{x_{n+1} v_{xn+1}} = (1-\alpha)\overline{x_n v_{xn}} + (1-\alpha)\overline{v_{xn}^2} \Delta t\,.$$

Člena z v_{2xn} v povprečju ne prispevata, ker so trki s kroglicami povsem nepovezani z lego Brownovih delcev. Ker je $\overline{v_{xn}^2}$ sorazmeren s povprečno kinetično energijo kroglic, ki je konstantna, je po daljšem času konstanten tudi $\overline{xv_{xn}}$. Zaradi pozitivnega α je namreč $(1-\alpha) < 1$, zato se zaporedni $\overline{xv}_{xn}$ po absolutni vrednosti zmanjšujejo in ustalijo pri

$$\overline{xv_x} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Delta t\, \overline{v_x^2}\,. \tag{5}$$

Vidimo, da z opazovanjem lezenja Brownovega delca stran od izhodišča pridemo do povprečne kinetične energije delca, ta pa je povezana s temperaturo krogličnega, torej molekularnega gibanja in, kot bomo videli, z Avogadrovim številom. Odločilno misel v tej smeri je naredil Albert Einstein leta 1905. Njegovo razmišljanje najde bralec v prispevku J. Strnada, objavljenem v Preseku [3].



Slika 3. Sledi desetih Brownovih delcev v enakomernih zaporednih trenutkih.

Sedaj dokončajmo enačbo (5). Da določimo Δt, moramo vedeti, koliko trkov v sekundi doživi Brownov delec. Številska gostota kroglic oziroma molekul naj bo n, le-ta pove, koliko kroglic je v dani prostornini naše tekočine. Na Brownov delec se z vseh strani vsipajo kroglice, zato je gostota toka kroglic nanj podana z znano zvezo:

$$j = \frac{1}{4} n \overline{v_2}\,.$$

Gostota toka pove, koliko kroglic zadene kvadratni meter veliko ploskev v sekundi ne glede na njihovo smer. Torej bo v sekundi Brownov delec zadelo $\dot{\mathcal{N}}$ kroglic medija

$$\dot{\mathcal{N}} = 4\pi R^2 j = \pi R^2 n \overline{v_2}\,.$$

Iz tega je povprečni čas med zaporednima trkoma:

$$\Delta t = \frac{1}{\dot{\mathcal{N}}} = \frac{1}{\pi R^2 n \overline{v_2}}\,.$$

Enačba (5) je potem

$$\overline{xv} = \frac{3}{2}\frac{M}{m}\frac{\overline{v^2}}{\pi R^2 n \overline{v_2}}\,.$$

Ker je $\frac{M}{2}\overline{v^2}$ kinetična energija Brownovega delca, ta pa je v termodinamičnem ravnovesju enaka $3\frac{kT}{2}$, povprečna hitrost $\overline{v_2}$ pa je $\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, imamo končno:

$$\overline{xv} = \frac{9}{2\sqrt{8}R^2 n}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}\,.$$

Sam rezultat ne bi bil pomemben, če ga zapišemo drugače, pa nas pouči o pomembni povezavi med neurejenim gibanjem delca in približevanjem povprečne kinetične energije Brownovega delca proti ravnovesni energiji $3\frac{kT}{2}$. Enačbo (4) zapišimo drugače:

$$\frac{v_{xn+1} - v_{xn}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta t}(v_{2x} - v_{xn})\,.$$

Pri dovolj majhnem Δt je to zelo blizu diferencialni enačbi:

$$\dot{v_x} = -\frac{1}{\tau}v_x + \frac{1}{\tau}v_{2x}\,.$$

Hitrost Brownovega delca se torej eksponentno bliža ravnovesni hitrosti v_{2x} s časovno konstanto $\tau = \frac{\Delta t}{\alpha}$. Rezultat za $\overline{xv}$ sedaj pregledneje zapišemo takole:

$$\overline{xv} = \tau\overline{v^2} = \frac{2\tau}{M}\frac{M\overline{v^2}}{2} = \frac{2\tau}{M}\frac{3kT}{2}\,.$$

Pri naših izvajanjih smo privzeli elastične trke med molekulami in med Brownovim delcem in molekulami. Taki obravnavi laže sledimo, kot če bi študirali standardno pot, ki jo ubira večina učbenikov statistične termodinamike. O tem se hitro prepričamo, če skušamo razumeti originalne Einsteinove korake. Večina učbenikov se temu izogne in začnejo razpravo z Langevenovo enačbo, ki pa terja kar nekaj predznanja. Seveda pa naš pristop, če je še tako transparenten, ni življenjski, ker trki molekul z Brownovim delcem niso elastični. Molekule ob stiku prevzamejo hitrost delca, kar korenito spremeni končni rezultat obravnave. Einstein je privzel, da je zaviralna sila, ki Brownovemu delcu z radijem R jemlje energijo, kar Stokesova viskozna sila tekočine na kroglo: $F_v = 6\pi\eta Rv$, kjer je η viskoznost tekočine [1]. Enačbi, ki opisujeta gibanje Brownovega delca, sta potem takile:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_{xn}\Delta t && (6)\\ v_{xn+1} &= v_{xn} - \frac{6\pi\eta R}{M}\Delta t v_{xn} + \frac{F_{x,naklj}}{M}\Delta t\,. && (7)\end{aligned}$$

Za Brownove delce v kapljevini je tak nastavek gotovo bolj pravilen kot naš privzetek o elastičnih trkih molekul z delcem. Zadnji člen druge enačbe predstavlja vpliv nemirnih molekul, ki z naključno silo delcu ves čas dovajajo energijo, ki jo delec izgublja z viskoznim trenjem, mu pa energije v povprečju ne jemljejo. Taka slika dogajanja je gotovo precej poenostavljena prav tako kot privzetek Stokesove zaviralne sile.

Brownovo gibanje je lep primer fluktuacijsko-disipacijskega izreka, ki pravi, da je pri vsakem pojavu, kjer se energija pretvarja v toploto, prisoten tudi nasprotni pojav, ki je povezan s termičnimi kolebanji. V našem primeru smo videli, da se pri gibanju v tekočini kinetična energija delca izgublja na račun segrevanja tekočine. V plinu se to dogaja z elastičnimi trki z molekulami plina, v kapljevini pa zaradi viskoznega trenja. Bodi tako ali drugače, nasprotni pojav je Brownovo gibanje delca. To nazorno razberemo iz enačbe (2), ki povezuje povprečno kinetično energijo Brownovega delca po trku z manjšo kroglico:

$$\overline{E_1^{po}} = \overline{E_1} + \frac{8Mm}{3(M+m)^2}(\overline{E_2} - \overline{E_1})\,.$$

Ko je kinetična energija Brownovega delca $\overline{E_1}$ pred trkom veliko večja od kinetične energije kroglic $\overline{E_2}$, se po trkih $\overline{E_1}$ postopoma zmanjšuje. V ravnovesju pa kroglice s trki ves čas skrbijo, da ima Brownov delec v povprečju enako kinetično energijo kot kroglice, njegovo gibanje pa je povsem kaotično.

Navedimo še dva vsem znana primera.

Pri prvem se tok skozi upornik v tokovni zanki hitro zmanjša in pade na nič, ko ga vir napetosti ne poganja več, tokokrog pa je še vedno sklenjen. Pri tem se upornik segreje. Nasprotni pojav je kolebanje napetosti na uporniku ali, kot temu pravimo, termični šum. Pri natančnih merjenjih ali pri merjenjih zelo majhnih količin le-ta moti. Pri sobni temperaturi je na uporniku z uporom 1 MΩ amplituda teh kolebanj 70 μV.

Pri drugem se svetloba, ki pade na površino črnega telesa, absorbira in tako telo segreje. Nasprotni pojav je termično sevanje telesa z značilnim svetlobnim spektrom, ki je Plancku nakazal kvantizacijo svetlobe.

LITERATURA

[1] I. Kuščer in S. Žumer, *Toplota*, DMFA – založništvo, 1987.
[2] A. Likar, *Elastični trki in prevajanje toplote*, Presek **48** (2020/2021), 6, 10–13.
[3] A. Likar, *Navier-Stokesova enačba in elastični trki*, Obzornik mat. fiz. **67** (2020), 5, 177–186.
[4] J. Strnad, *Brownovo gibanje*, Presek **29** (2001/2002), 4, 204.