

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 6 (1978/1979)

Številka 4

Strani 241-247

Janez Strnad:

## PREPROSTA FIZIKA LETENJA

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/6/372-Strnad.pdf>

© 1979 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.



## PREPROSTA FIZIKA LETENJA

Najbrž se kdaj pa kdaj kdo od številnih potnikov na letalu vpraša, kako to, da letalo sploh leti. Katera sila drži letalo v zraku? Učbeniki fizike govorijo o sili, ki deluje na letalska krila in uravnovesi težo letala, navadno v zvezi z *Bernoullijevo enačbo* (okvir 1).

Iz enačbe, ki velja le približno pri neprevelikih hitrostih, sledi, da je tlak na kraju z večjo hitrostjo manjši, na kraju z manjšo hitrostjo pa večji. Letalsko krilo ima takšno obliko, da je hitrost delov zraka na zgornji strani krila večja kot na

Okvir 1

Bernoullijeva enačba:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1$$

sledi iz izreka o kinetični in potencialni energiji, če ga uporabimo za del tekočine. Enačba pravi, da je skupna gostota energije in dela konstantna.  $(1/2)\rho v^2$  je gostota kinetične energije -  $\rho$  je gostota in  $v$  hitrost -  $\rho g z$  je gostota potencialne energije -  $g$  je težni pospešek in  $z$  višina nad izbrano ničelno vodoravno ravnino.

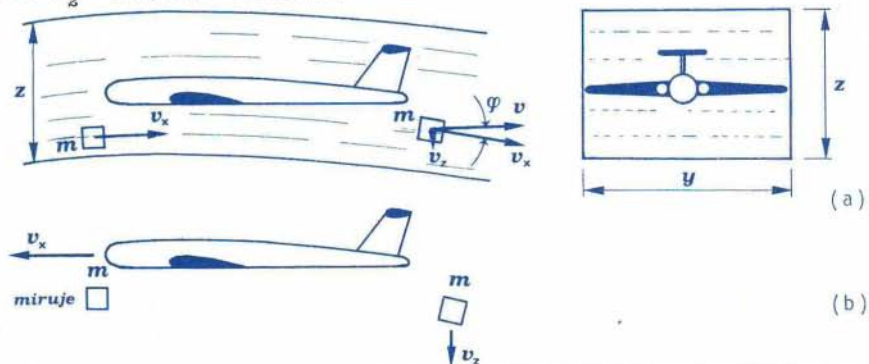
Tlak  $p$  je "negativna gostota dovedenega dela tlaka". ( $-p\Delta V$  je dovedeno delo, ko premaknemo del tekočine s prostornino  $\Delta V$  na kraju, kjer je tlak  $p$ .) Enačba se nanaša na točki 1 in 2 na izbrani tokovnici ali na dva prečna preseka cevi. (V drugem primeru je treba upoštevati povprečno hitrost in povprečni tlak po preseku.) Velja za tok nestisljive tekočine, če notranje sile ne opravijo nobenega dela. Nekoliko površno rečeno preneha veljati Bernoullijeva enačba pri majhnih hitrostih, ko postane odločilno notranje trenje, in pri velikih hitrostih, recimo nekako pri polovici hitrosti zvoka, ko ne moremo več zanemariti stisljivosti zraka.

spodnji. Zato je tlak na zgornji strani manjši kot na spodnji. Razlika tlakov da rezultanto, ki deluje navpično navzgor. To je *prečna sila* ali *dinamični vzgon*; *prečna sila*, ker deluje prečno na smer gibanja, in *dinamični vzgon*, da ga ločimo od statičnega vzgona iz Arhimedovega zakona ("tekočina deluje na mirujoče potopljeno telo s silo, ki ima smer navpično navzgor in velikost teže izpodrinjene tekočine").

Prečno silo je mogoče pojasniti preprosteje in prepričljiveje kot s približno Bernoullijevo enačbo. Namesto te enačbe uporabimo *izrek o gibalni količini* (okvir 2).

Naj leti letalo s konstantno hitrostjo  $v_x$  v vodoravni smeri. Ker je hitrost konstantna, je rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na letalo, enaka nič. V vodoravni smeri deluje "potiž na" *sila motorjev* in v nasprotni smeri enako velik *upor* (okvir ja 3 in 4). Navpično navzdol deluje teža letala  $Mg$  in navpično navzgor enako velika prečna sila. (Statični vzgon, ki je več kot tisočkrat manjši kot teža, zanemarimo.)

Prečno silo pojasnimo najboljše, če si mislimo, da smo v letalu (Sl. 1a). Opazujemo del zraka (to je naš sistem). Zrak pred letalom ima v navpični smeri komponento hitrosti nič. Zrak za letalom pa ima komponento hitrosti  $v_z$  navpično navzdol. Po izreku o gibalni količini mora delovati letalsko krilo na zrak s silo  $F_z^p$  navpično navzdol:



Sl. 1: Nastanek prečne sile v opazovalnem sistemu, v katerem miruje letalo (a), in v opazovalnem sistemu, ki miruje glede na Zemljo (b).

## Okvir 2

Izrek o gibalni količini:

$$F \cdot t = mv_2 - mv_1$$

pravi, da je skupni sunek vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem, enak spremembi gibalne količine.  $m$  je masa sistema,  $v_2$  hitrost po prenehanju konstantne sile  $F$ , ki deluje čas  $t$ , in  $v_1$  hitrost, preden je začela sila delovati. Izrek o gibalni količini izpeljemo iz drugega Newtonovega zakona in velja splošno.

## Okvir 3

Sila motorja. Opazujemo iz letala, ki leti s konstantno hitrostjo. Naš sistem je del zraka z maso  $m_1$ , ki ga zajame motor, in del goriva z maso  $m_2$ . Na začetku ima zrak hitrost  $v_x$ , gorivo pa miruje. Potem, ko gorivo zgori v zraku, zapustijo vroči izpušni plini z maso  $m_1+m_2$  s hitrostjo  $v_0$  šobo motorja. Iz izreka o gibalni količini sledi za silo  $F_x^s$ , s katero deluje motor na zrak in gorivo v smeri nazaj:

$$F_x^s \cdot t = (m_1 + m_2)v_0 - m_1v_x$$

Po zakonu o vzajemnem učinku je nasprotna ("reakcijska") sila vročih izpušnih plinov na motor, to je "potisna" sila motorja v smeri naprej

$$F_x = (m_1/t)(v_0 - v_x) + (m_2/t)v_0$$

$m_2/t$  je masa goriva, ki ga porabi motor na sekundo, in  $m_1/t$  masa zraka, ki ga motor zajame na sekundo. Večinoma smemo zanemariti drugi člen. Enačba

$$F_x = (m_1/t)(v_0 - v_x) \quad (2)$$

je po obliki enaka enačbi (1) za prečno silo.

Motor DC-9 rabi na sekundo okoli 0,4 kg goriva in zajame na sekundo okoli 150 kg zraka ter izpihava vroče pline s hitrostjo 500m/s. Za "potisno" silo motorja dobimo z enačbo (2)

$$F_x = 150 \text{ kgs}^{-1}(500 - 170) \text{ m/s} = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Masa goriva prispeva le  $(m_2/t)v_0 = 0,4 \text{ kgs}^{-1} \cdot 500 \text{ m/s} = 200 \text{ N}$ , kar je proti  $5 \cdot 10^4 \text{ N}$  zares zanemarljivo. Seveda pa iz šobe motorja ne bi iztekali vroči plini s hitrostjo, večjo od  $v_x$ , če v motorju ne bi zgorevalo gorivo.

Skupaj imata po našem računu oba motorja DC-9 "potisno" silo  $2F_x = 10^5 \text{ N}$ . V resnici je ta sila nekoliko večja:  $1,3 \cdot 10^5 \text{ N}$ . Najbrž je bilo napak, da smo vzeli  $v_x$  za hitrost zraka, ki ga zajame motor. Tolikšno hitrost ima zrak daleč od letala. Tik pred motorjem pa ima zrak glede na letalo manjšo hitrost in je zato sila motorja večja od izračunane.

Za razliko od "reakcijskega" letala nosi raketa s sabo gorivo in oksidacijsko snov in ne zajema zraka iz okolice. Zato je potisna sila raketnega motorja

$$F_x = [(m_1 + m_2)/t]v_0$$

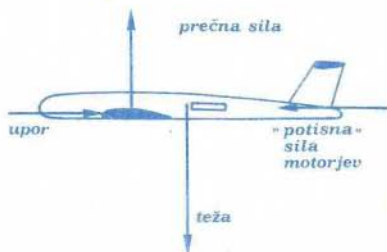
#### Okvir 4

Upor: Tlak v zastojni točki, v kateri tekočina pred oviro miruje, je po Bernoullijevi enačbi

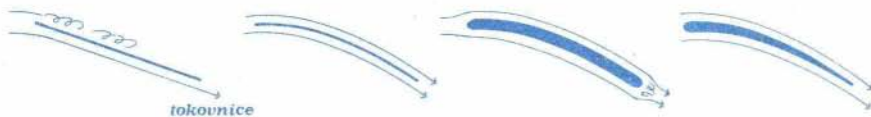
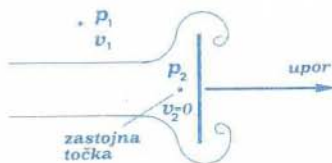
$$p_2 = p_1 + (1/2)\rho v_1^2$$

$v_1$  je hitrost tekočine v nemotenem toku glede na oviro (vseeno je, ali miruje tekočina in se giblje ovira ali pa miruje ovira in se giblje tekočina). Na sprednji strani ovire je tlak večji kot na zadnji strani. Rezultanta je sila, s katero deluje tekočina na oviro v smeri relativne hitrosti. Tako je upor približno sorazmeren z gostoto kinetične energije  $(1/2)\rho v_1^2$ . Odvisen je še od oblike telesa in je sorazmeren z njegovim čelnim presekom. Ta ugotovitev je vezana na veljavnost Bernoullijeve enačbe (glej okvir 1).

Sl. 2: Zunanje sile na letalo, ki enakomerno leti v vodoravni smeri.



Sl. 3: Upor zaradi zastojnega tlaka



Sl. 4: Letalsko krilo kot naprava, ki da zraku komponento hitrosti v smeri navpično navzdol. Oblika (a) povzroči zaradi nenadnih sprememb nastajanje vrtnincev, oblika (b) sicer ne povzroči vrtnincev, a ni dovolj trdna. Oblika (c) je dovolj trdna, a ima precejšen upor. Krilo (d) je trdno in ima majhen upor. Oblika (a) zadostuje za otroške zmaje, oblika (b) pa za zmaje, s katerimi se zmajarji spuščajo s hribov.

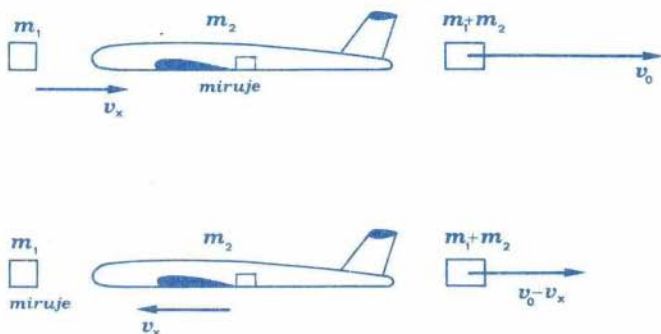
$$F_z^2 \cdot t = mv_z - 0$$

$m$  je masa zraka, na katerega deluje letalsko krilo. Po zakonu o vzajemnem učinku (3. Newtonovem zakonu: "če deluje prvo telo na drugo telo z dano silo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo") deluje zrak na krilo z nasprotno enako silo. Sila zraka na krilo

$$F_z = (m/t)v_z \quad (1)$$

deluje navpično navzgor.

Tako smo prečno silo pojasnili prepričljivo in preprosto. Razlaga ni omejena na majhne hitrosti. Njena šibka točka pa je v tem, da zrak, ki ga zajame letalsko krilo, nima ostre meje in vsi njegovi deli nimajo enako velike komponente hitrosti navpično navzdol. Zato je težko dobiti podatek za maso zraka, ki ga zajame krilo vsako sekundo. Za grobo oceno pa nismo v zadregi.



Sl. 5: Nastanek "potisne" sile v opazovalnem sistemu, v katerem miruje letalo (a), in v opazovalnem sistemu, ki miruje glede na Zemljo (b).

Vzemimo, da krilo pri vodoravnem letu letala preusmeri tok zraka za kot  $\varphi$  proti vodoravnici. Medtem ko priteče zrak na krilo z vodoravno hitrostjo  $v_x$ , odteče zrak s krila za kot  $\varphi$  odklonjen navzdol, tako da je komponenta hitrosti zraka navpično navzdol  $v_x \varphi$  (tangens in sinus sta enaka ločno merjenemu kotu, če je kot zelo majhen; pri približnem računu smemo vzeti, da je vodoravna komponenta hitrosti zraka še naprej  $v_x$ ). Krilo ni povsod enako nagnjeno proti vodoravnici, tako da je kot  $\varphi$  povprečni nagib krila in  $v_z = v_x \varphi$  povprečna navpična komponenta hitrosti zraka. Nagib meri navadno okoli  $4^\circ$ . Pri nas uporabljajo največ potniška letala DC-9, ki pogosto letijo s hitrostjo\* 600 km/h ali 170 m/s. Za ta primer dobimo za povprečno navpično komponento hitrosti zraka

$$v_z = v_x \varphi = 170 \text{ ms}^{-1} \cdot 4\pi/180 = 12 \text{ m/s}$$

Prečna sila (1) uravnovesi težo letala  $Mg$ , ki je pri DC-9 z maso okoli 50 ton okoli  $5 \cdot 10^5 \text{ N}$ . Iz enačbe  $Mg = (m/t)v_z$  lahko izračunamo maso zraka, ki ga zajame krilo na sekundo:

$$m/t = Mg/v_z = 5 \cdot 10^5 \text{ N}/12 \text{ ms}^{-1} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ kg/s}$$

Kot rečeno, je največja pomanjkljivost našega računa v tem, da zrak, ki ga zajame krilo, nima ostre meje in nima enake navpične komponente hitrosti. Zato smo dobili samo oceno, ki jo je treba sprejeti s kančkom nezaupanja.

Za zabavo pa računajmo še naprej. V višini\* 8,5 km, v kateri DC-9 pogosto letajo, je gostota zraka samo še približno  $0,4 \text{ kg/m}^3$  nasproti  $1,2 \text{ kg/m}^3$  pri tleh. Maso zraka, ki ga zajame krilo, izrazimo z gostoto  $\rho$  in s prostornino kvadra:

$$m/t = \rho x y z / t = \rho v_x y z$$

$x/t = v_x$  je hitrost letala,  $y$  približno ustreza razponu kril in  $z$  je ocena za višino plasti zraka, ki ga zajame krilo. DC-9 ima razpon kril nekaj več kot 28 m, tako da sledi za višino plasti

$$z = (m/t)/\rho v_x y = 4,2 \cdot 10^4 \text{ kg s}^{-1} / 0,4 \text{ kg m}^{-3} \cdot 170 \text{ ms}^{-1} \cdot 28 \text{ m} = 22 \text{ m}$$

Ta ocena je še bolj sporna kot prejšnja, a po velikostni stopnji ji najbrž smemo zaupati. Hitro potniško letalo v višino okoli 10 km preusmeri plast zraka, ki sega kakih deset metrov pod letalo in približno toliko nad letalo.

Prepričali smo se, da je krilo naprava, ki dá zraku komponento hitrosti navpično navzdol. Zaradi tega je upor krila večji, kot bi bil, če krilo pri enaki hitrosti  $v_x$  ne bi dalo zraku no bene komponente hitrosti navpično navzdol. (Tedaj pač letalo ne bi moglo leteti.) "Curek" zraka, ki ga krilo usmeri navzdol, dobi svojo energijo od motorjev. Ti morajo premagovati povečan upor in pri tem opravljati dodatno delo.

Prečno silo dobimo s podobnim računom kot "potisno" silo motor

\* S tema povprečnima podatkom računajo pri podjetju INEX-ADRIA, katerega letala letijo večinoma na srednjih progah. Podjetju INEX-ADRIA se zahvaljujemo za prijaznost.

jev. Reakcijski motor izpihava curek vročih plinov v vodoravni smeri nazaj, krila pa "oddajajo" "curek" zraka s komponento hitrosti navpično navzdol. Seveda zaradi notranjega trenja (viskoznosti) zraka dovolj daleč za letalom in dovolj pod njim ni mogoče zaznati ne vodoravnega curka ne navpičnega "curka".

Tudi *letalski vijak* izkorišča prečno silo. Vijak z vodoravno osjo zajema zrak in ga potiska v smeri nazaj. Nasprotna sila tega "curka" je "potisna" sila motorja. Helikopter izkorišča prečno silo na vijak z navpično osjo. Vijak zajema zrak in ga potiska navpično navzdol. Nasprotna sila tega "curka" uravnove si teži helikopterja.

Medtem ko smo tu obravnavali le vodoravni let letala s konstantno hitrostjo, bi bilo zanimivo premisliti, kaj vse se dogaja ob vzletu ali pristanku in ob zavijanju. Zanimivo bi bilo tudi premisliti, kako je z ravnovesjem navorov. Prečna sila prijemlje na krilu in na krilu na repu, "potisna" sila v motorjih, u upor na površini letala, za težo pa si lahko mislimo, da prijeme v težišču letala. Po površini porazdeljeni sili bi bilo treba približno nadomestiti s silama z danim prijemališčem: za upor v težišču čelnega preseka letala, za prečno silo pa v težiščih tlorisa krila in krila na repu. Ker mora biti navor vseh sil glede na težišče letala enak nič, bi lahko po tej poti okvirno pojasnili namestitev kril in motorjev.

Tukaj nam je šlo samo za fizikalne osnove. Zato smo se lahko zadovoljili z izrekom o gibalni količini. Načrtovalci letal pa morajo upoštevati vrsto drugih stvari, med njimi tudi porazdelitev tlaka po površini letala. V prvem približku si pri tem pomagajo z Bernoullijevo enačbo, podrobnejše podatke pa dobijo z merjenji na modelih v vetrovniku.

---

Janez Strnad

---

#### LITERATURA:

K. Weltner, *Der aerodynamische Auftrieb in didaktischer und physikalischer Sicht*, Naturwissenschaft im Unterricht, Physik-Chemie 26 (1978) 65.