Herrengasse 29. GRAZ, Herrengasse 29.

Paul Cieslar's
Buchhandlung & Antiquariat.

Grösstes Lager antiquarischer und auch neuer Schulbücher.
Lexica in allen Sprachen, sowie Special-Wörterbücher zu den latein. & griechischen Autoren stets in grosser Auswahl und zu billigen Preisen vorräthig. Brauchbare Schulbücher werden stets gekauft oder auch eingetauscht. Lager-Cataloge stehen jederzeit ☛ gratis ☚ zu Diensten.

Lehr- und Uebungsbuch

der

Arithmetik

für

Unterrealschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Sechzehnte verbesserte Auflage.

Das Recht der Uebersetzung wird vorbehalten.

Prag, 1877.

Verlag von F. Tempsky.

a I 737099

a

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

20161098 I

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Vorwort zur zwölften Auflage.

Das vorliegende Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unterrealschulen, welches bisher von dem k. k. Schulbücherverlage in Wien unter dem Titel „Anleitung zum Rechnen für die I. und II. Classe der Unterrealschulen" herausgegeben wurde, nun aber in den Verlag der durch ihre Schulbücherliteratur vortheilhaft bekannten Firma F. Tempsky in Prag übergieng, weiset gegen die früheren Ausgaben in Bezug auf Inhalt und Darstellung wesentliche Veränderungen nach, die größtentheils durch die freundlichen Mittheilungen achtbarer Fachmänner angeregt, dem Buche eine größere praktische Brauchbarkeit sichern dürften.

Manches wurde kürzer und bündiger gefasst, dagegen anderes dem Bedürfnisse der Realschule gemäß erweitert und neu aufgenommen.

Die Hunderttheilung unseres neuen Guldens, sowie die bevorstehende Einführung der metrischen Maße und Gewichte machen es wünschenswert, dass sich die Schüler sobald als möglich die Sicherheit im Decimalrechnen aneignen. Ich habe darum hier die Decimalzahlen nicht als Brüche von einer besonderen Form hingestellt und, wie es in der früheren Ausgabe geschah, erst nach der Lehre von den gemeinen Brüchen eingereiht, sondern dieselben als bloße Erweiterung unseres Zahlensystems behandelt und das Rechnen in Decimalzahlen sogleich mit dem Rechnen in ganzen Zahlen in entsprechende Verbindung gebracht, wodurch neben dem leichteren Verständnis auch eine bedeutende Zeitersparnis erzielt wird.

Durch die Aufnahme der Elemente der allgemeinen Arithmetik hoffe ich einem vielseitig ausgesprochenen Wunsche begegnet zu haben. Die bezüglichen Lehren sind hier möglichst leichtfaslich, zugleich aber in genauem Einklange mit dem gegenwärtigen Standpunkte ihrer wissenschaftlichen Behandlung gegeben.

Besondere Aufmerksamkeit ist der zweckmäßigen Auswahl der Aufgaben gewidmet worden, so dass diese nicht nur durch Reichhaltigkeit die gründliche Einübung der theoretischen Lehren zu sichern geeignet sind, sondern auch durch die Rücksichtnahme auf die mannigfaltigsten Rechnungsfälle des praktischen Lebens anregend erscheinen.

Möge sich das Buch auch in dieser neuen Ausgabe bei Fachgenossen einer wohlwollenden Aufnahme erfreuen!

Graz, im December 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur fünfzehnten Auflage.

Das Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unterrealschulen hat in seiner vorliegenden Auflage eine gänzliche Umarbeitung erfahren. War diese schon im Hinblick auf die neue österreichische Maß- und Gewichtsordnung, welche in dem arithmetischen Unterrichte mehrseitig nicht unbedeutende Aenderungen im Gefolge hat, nothwendig geworden, so erschien sie durch die Einführung eines neuen Lehrplanes für Realschulen, der von dem früheren in vielen Punkten wesentlich abweicht, in noch höherem Grade geboten. Ob und in wie weit ich den hieraus erwachsenen Anforderungen gerecht wurde, werden sachkundige Leser aus dem Buche selbst ersehen. Nur einige scheinbare Abweichungen desselben von dem neuen Lehrplane erlaube ich mir hier näher zu beleuchten.

Nach dem Lehrplane soll in der II. Classe die einfache Zinsrechnung vorgenommen werden, während die zusammengesetzten Verhältnisse der III. Classe zugewiesen sind. Insofern nun die einfache Zinsrechnung auf zusammengesetzten Verhältnissen beruht und ohne Verständnis dieser nicht klar aufgefasst werden kann, hielt ich es für angemessen, mit der Lehre von den einfachen Verhältnissen sogleich

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

I. Das dekadische Zahlensystem 3
II. Das Addieren 6
III. Das Subtrahieren 11
IV. Das Multiplicieren 15
V. Das Dividieren 25
VI. Abgekürzte Rechnung mit Decimalzahlen 35
Wiederholungsaufgaben 42

Zweiter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen 45

1. Kennzeichen der Theilbarkeit 45
2. Zerlegung in Primfactoren 47
3. Größtes gemeinschaftliches Maß 48
4. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches 51
Wiederholungsaufgaben 53

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen 55

I. Wertveränderung der Brüche 56
II. Formveränderung der Brüche 58
III. Das Addieren und Subtrahieren der Brüche 63
IV. Das Multiplicieren und Dividieren der Brüche 66
Wiederholungsaufgaben 71

Vierter Abschnitt.

Das Rechnen mit mehrnamig benannten Zahlen.

I. Maße, Gewichte und Münzen 7
II. Das Resolvieren und Reducieren . . . . .
III. Rechnungsoperationen mit mehrnamigen Zahlen . . . . .
Wiederholungsaufgaben . . . . .

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

Seite

I. Verhältnisse 105
II. Proportionen 109
III. Anwendung der Proportionen und Schlussrechnung 113
1. Lösung von Aufgaben mit einfachen Verhältnissen 115
2. Die Procentrechnung 125
3. Lösung von Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen 137
4. Die Kettenrechnung 142
5. Einfache Zinsrechnung 145
6. Discontrechnung 154
7. Die Terminrechnung 157
8. Die Gesellschaftsrechnung (Theilregel) 160
9. Die Mischungsrechnungen 165
Wiederholungsaufgaben 177

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Arithmetik auf die Berechnung der Münzen und Wertpapiere.

I. Die Münzrechnung 172
II. Die Wechselrechnung 184
III. Berechnung der Staatspapiere und Actien 192
Wiederholungsaufgaben 196

Siebenter Abschnitt.

Das Rechnen mit algebraischen und allgemeinen Zahlen.

I. Algebraische Zahlen 199
II. Allgemeine Zahlen 206
Wiederholungsaufgaben 222

Achter Abschnitt.

Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel

. . . . 227

I. Erheben auf das Quadrat und Ausziehen der Quadratwurzel 228
II. Erheben auf den Cubus und Ausziehen der Cubikwurzel 236
Wiederholungsaufgaben 243

Einleitung.

Jedes einzelne Ding heißt eine Einheit. Kommen mehrere gleiche Dinge vor, so wird die Angabe, wie viele es sind, Zahl genannt.

Eine Zahl, welche bloß die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten ausdrückt, heißt eine unbenannte Zahl; eine Zahl dagegen, welche nicht nur die Menge, sondern auch die Art der Einheiten angibt, eine benannte Zahl. Fünf ist eine unbenannte, fünf Gulden eine benannte Zahl.

Eine benannte Zahl, welche Einheiten einer einzigen Benennung enthält, heißt einnamig; z. B. 4 Gulden. Eine benannte Zahl, welche Einheiten verschiedener Benennungen enthält, die jedoch zu derselben Art gehören, heißt mehrnamig; z. B. 4 Gulden 20 Kreuzer.

Jede Einheit kann man in gleiche Theile theilen, oder sich doch in gleiche Theile getheilt vorstellen. Eine Zahl, welche die Einheit selbst ein- oder mehrmal enthält, heißt eine ganze Zahl; eine Zahl, welche nur einen Theil oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Eins, drei sind ganze Zahlen; ein Viertel, drei Viertel sind Brüche.

Aus der Einheit durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit neue Zahlen bilden, heißt zählen. Die dadurch entstehenden Zahlen eins, zwei, drei, vier, fünf, ... nennt man die natürliche Zahlenreihe.

Die Zahlen werden mündlich durch Zahlwörter ausgedrückt, schriftlich durch besondere Zeichen, Ziffern, dargestellt.

Eine übersichtliche Anordnung aller verschiedenen Zahlen, welche den Zweck hat, mit wenigen Namen und Ziffern jede beliebig große Zahl darzustellen, heißt ein Zahlensystem.

Aus gegebenen Zahlen mittelst vorgeschriebener Veränderungen andere neue Zahlen bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, welche durch die Rechnung gefunden wird, nennt man das Resultat der Rechnung.

Die Lehre vom Rechnen heißt Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

I. Das dekadische Zahlensystem.

Dekadische ganze Zahlen.

§. 1. Das dekadische Zahlensystem beruhet auf dem Grundsatze, daß je zehn niedrigere Einheiten als eine neue höhere Einheit angenommen und als solche mündlich und schriftlich dargestellt werden.

Man zählt dabei, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlwörtern: eins, zwei, . . . bis zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten, auch Einer genannt, betrachtet man als eine neue höhere Einheit und nennt sie einen Zehner. Zehn Zehner bilden eben so eine Einheit der nächst höheren Ordnung, ein Hundert; zehn Hunderte bilden ein Tausend, u. s. w. Jede Zahl ist nun aus Einern, Zehnern, Hunderten, . . . zusammengesetzt und wird vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einer, Zehner, Hunderte, . . . sie enthält.

Zur schriftlichen Darstellung der Zahlen genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die 0 (Null), welche anzeigt, dass von einer bestimmten Ordnung keine Einheiten vorhanden sind. Man nimmt nämlich an, dass jede Ziffer, wenn man von der Rechten an zählt, an der ersten Stelle Einer, an der zweiten Zehner, an der dritten Hunderte, an der vierten Tausende u. s. w. bedeutet, überhaupt an jeder folgenden Stelle nach links zehnmal so viel gilt, als an der nächstvorhergehenden

Stelle nach rechts. Z. B. die Zahl dreißigtausend einhundert fünf und neunzig enthält 3 Zehntausende, 0 Tausende, 1 Hundert, 9 Zehner und 5 Einer, sie wird demnach geschrieben: 30195.

Lies folgende Zahlen:

1. 300, 450, 728, 616, 395, 861, 209, 512, 987.
2. 6000, 3280, 9123, 4054, 47311, 90768, 51402.
3. 274136, 237084, 943550, 693792, 543021, 880617.
4. 8642135, 9007925, 87093142, 13000827, 640922548.

Schreibe mit Ziffern folgende Zahlen:

1. siebenhundert fünf, vierhundert zwanzig, zweitausend achthundert zwölf, neuntausend vier und achtzig.

2. Zwölftausend siebenhundert fünf und fünfzig, zweihundert achtzehntausend sechshundert ein und neunzig.

3. Vierzehn Millionen eilftausend acht und dreißig.

Decimalzahlen.

§. 2. Wenn man in einer nach dem dekadischen Gesetze geschriebenen Zahl von der Linken gegen die Rechte zurückschreitet, so bedeutet jede folgende Ziffer nach rechts nur den zehnten Theil von dem, was sie an der vorhergehenden Stelle nach links gilt, und man kommt schließlich auf die Einer herab. Es ist nun nicht nöthig, die Einer als die niedrigste Ordnung von Einheiten anzunehmen; man kann einen Einer in zehn gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil, ein Zehntel, als eine noch niedrigere Einheit betrachten, ferner den zehnten Theil von einem Zehntel, d. i. ein Hundertel, als die Einheit einer noch niedrigeren Ordnung ansehen, und so durch fortgesetzte Theilung zu beliebig kleinen Zahleneinheiten hinabsteigen.

Uebereinstimmend damit kann man nach dem dekadischen Gesetze auch die Ziffernreihe von den Einern noch weiter rechts fortsetzen, so dass eine Ziffer an der ersten Stelle nach den Einern Zehntel, an der zweiten Hundertel, an der dritten Tausendtel, . . . bedeutet; nur muß dabei die Stelle der Einer durch ein bestimmtes Zeichen kenntlich gemacht werden. Dieses Zeichen ist ein Punkt, welcher nach den Einern rechts oben gesetzt wird und der Decimalpunkt heißt. Die Ziffern links vor dem Decimalpunkte bedeuten Ganze, die

Ziffern rechts nach demselben heißen Decimalen. Es bedeutet sonach 7777777·777777 folgendes:

Ganze							Decimalen						
7	7	7	7	7	7	7·	7	7	7	7	7	7	
Millionen	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	**Einer**	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Millionteltel	

Zahlen, welche Decimalen enthalten, werden Decimalzahlen oder Decimalbrüche genannt.

Eine Decimalzahl wird ausgesprochen, wenn man zuerst die Ganzen und dann entweder jede einzelne Decimale mit oder ohne Angabe ihres Stellenwertes, oder alle Decimalen in ihrer Gesammtheit ausspricht; z. B. 59·234 wird gelesen: 59 Ganze, 2 Zehntel, 3 Hundertel, 4 Tausendtel; oder 59 Ganze mit den Decimalen 2, 3, 4; oder 59 Ganze, 234 Tausendtel. Die zweite Leseart wird am häufigsten angewendet.

Lies folgende Decimalbrüche: 3·14159, 13·9085, 37·008, 17·0137, 0·8193, 0·70103, 0·00036, 0·0020805.

Beim Anschreiben der Decimalzahlen schreibt man zuerst die Ganzen an, setzt den Decimalpunkt und dann die einzelnen Decimalen nach der Ordnung ihres Stellenwertes. Wenn einzelne Decimalstellen fehlen, so werden dieselben durch Nullen ausgefüllt, z. B. 48 Ganze, 8 Tausendtel, 9 Zehntausendtel schreibt man an: 48·0089. Enthält eine Zahl bloß Decimalen, so schreibt man an die Stelle der Ganzen links vor dem Decimalpunkte eine Null, z. B. 8 Zehntel wird geschrieben: 0 8.

Schreibe folgende Decimalbrüche an: a) 3 Ganze, 9 Zehntel; b) 20 Ganze, 4 Zehntel, 3 Hundertel, 7 Tausendtel; c) 35 Ganze, 208 Tausendtel; d) 4 Ganze, 17 Zehntausendtel; e) 83tausend 5 Ganze, 7 Hundertel, 9 Milliontel; f) 8 Tausendtel; g) 71 Zehntausendtel; h) 2tausend 13 Milliontel.

Folgesätze. 1. Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts eine oder mehrere Nullen anhängt, weil dabei die einzelnen Ziffern ihren früheren Stellenwert beibehalten. Es ist also: $5{\cdot}3 = 5{\cdot}30 = 5{\cdot}300 = 5{\cdot}30000$.

2. Wenn man in einem Decimalbruche den Decimalpunkt 1, 2 3, . . . Stellen weiter gegen die Rechte rückt, so erhält dadurch jede einzelne Ziffer, also auch der ganze Bruch, bezüglich den 10fachen, 100fachen, 1000fachen, . . . Wert.

Vergleiche die Werte der Decimalzahlen 3·856, 38·56, 385·6, 3856.

3. Wenn man in einem Decimalbruche den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Linke rückt, so erhält dadurch jede Ziffer desselben, also auch der ganze Bruch, bezüglich nur den 10ten, 100sten, 1000sten, . . . Theil des früheren Wertes.

Vergleiche die Werte der Decimalzahlen 976·2, 97·62, 9·762, 0·9762, 0·09762.

Zusatz. Die hier angeführten Ziffern heißen arabische. Nebst diesen werden manchmal auch die römischen Ziffern gebraucht. Die Römer hatten nur sieben Zahlzeichen: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, und M = 1000, und drückten mit denselben durch gehörige Nebeneinanderstellung alle Zahlen nach folgenden Grundsätzen aus:

1. Steht nach einem Zahlzeichen ein gleiches oder ein niedrigeres, so werden ihre Werte zusammengezählt; z. B. XX = 20, VI = 6, LXXVIII = 78.

2. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um den Wert des niedrigeren vermindert; z. B. IV = 4, XL = 40, XCIX = 99.

II. Das Addieren.

§. 3. Addieren heißt eine Zahl suchen, welche zwei oder mehreren gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden, auch Posten; die Zahl, welche man durch die Addition findet, wird Summe genannt.

Um zu einer Zahl 5 eine zweite 3 zu addieren, schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe von 5 aus um 3 Einheiten vorwärts; die Zahl 8, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Das Zeichen der Addition ist + (mehr); z. B. 5 + 3 = 8 bedeutet: 5 mehr 3 ist gleich 8, oder: 5 und 3 ist 8.

Addition mit ganzen Zahlen.

§. 4. Da nur gleichartige Einheiten zusammengezählt werden können, so wird die Addition mehrerer Summanden verrichtet, indem man die Einer zu den Einern, die Zehner zu den Zehnern u. s. w.

addiert und die Summe, wenn sie einziffrig ist, unter dieselbe Stelle setzt; wenn sie aber zweiziffrig ist, nur die Einer davon unter jene Stelle schreibt, die Zehner dagegen zu den Einheiten der nächst höheren Ordnung hinzuzählt. Z. B.

Summanden { 315 | 691 | 582 } — 1588

2 E. + 1 E. + 5 E. = 8 Einer.
8 Z. + 9 Z. + 1 Z. = 18 Z. = 1 H. + 8 Z.
1 H. + 5 H. + 6 H. + 3 H. = 15 Hundert.

Bei mündlichem Addieren zweier Zahlen zählt man gewöhnlich zu der unzerlegten ersten Zahl zuerst die höheren, dann die niedrigeren Einheiten der zweiten Zahl dazu. Z. B.: Wie viel ist 65 und 27? 65 und 20 ist 85, und 7 ist 92.

Aufgaben.*)

1.* Zähle in der natürlichen Zahlenreihe von 4 aus um 3 Einheiten, und dann von 3 aus um 4 Einheiten vorwärts; zu welcher Zahl gelangst du in jedem Falle? Was folgt daraus?

2.* $37 + 9 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 + 3 + 5 = ?$

3.* Addiere die folgenden Zahlen a) in wagrechter, b) in senkrechter Richtung

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 8 + 6 + 4$
$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
$5 + 9 + 3 + 7 + 1 + 5 + 9 + 3$
$7 + 4 + 1 + 8 + 5 + 2 + 9 + 6$
$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$

4.* a) $30 + 20 = ?$ b) $48 + 30 = ?$ c) $87 + 50 = ?$

5.* a) $53 + 24 = ?$ b) $64 + 25 = ?$ c) $148 + 52 = ?$

6.* a) $500 + 300 = ?$ b) $230 + 500 = ?$ c) $759 + 200 = ?$

7.* a) $346 + 230 = ?$ b) $268 + 517 = ?$ c) $618 + 272 = ?$

8.* a) $37 + 42 + 59 = ?$ b) $68 + 45 + 73 = ?$

9.* a) $135 + 316 + 508 = ?$ b) $410 + 728 + 105 = ?$

10.* $345 + 73 + 27 = 345 + 100 = ?$

Anstatt zu einer Zahl nach und nach mehrere Zahlen zu addieren, kann man zu ihr auf einmal die Summe dieser Zahlen addieren.

11.* a) $455 + 208 + 92 = ?$ b) $123 + 116 + 84 = ?$

---

*) Die hier und weiterhin mit einem Sternchen (*) bezeichneten Aufgaben sind im Kopfe auszuführen.

12. a) 1715 b) 2818 c) 12345 d) 53609
5283 3207 3672 2196
2174 4539 5070 13248
992

Es ist vortheilhaft, beim Addieren größerer Zahlen weder das Wörtchen **und**, noch die einzelnen zu addierenden Ziffern auszusprechen, sondern sogleich nur die jedesmalige Summe zu nennen. So wäre bei der letzten Aufgabe zu sprechen: 2, 10, 16, 25; 2, 11, 15, 24; 2, 11, 13, 14, 20; u. s. w.

13. 420985 + 373612 + 90708 + 123071 = ?

14. 10924 + 5108 + 37124 + 915 + 30924 = ?

15. 35784 + 9876 + 8765 + 7654 + 1234 + 35197 = ?

16. 378459 + 2091358 + 1708205 + 197850 + 9387193 = ?

17. Addiere die Zahlen 7954261, 3087, 19343780, 24793, 5400738, 3507901, 8979800, 57934207.

18. a) 2944928 b) 3157842 c) 9358930 d) 63593065
2772676 1308215 7514398 468208
4620616 93084 15813477 1234567
6468431 17521938 460045 9876543
2621567 743150 1293714 980
5236308 9807 82389659 749309

19. Addiere folgende Zahlen a) in wagrechter, b) in senkrechter Richtung:

793458 + 1237924 + 9321 + 9851367 + 705231
85371 + 805186 + 572913 + 82190 + 860409
134513 + 9083 + 74528 + 62804 + 19375
618727 + 129158 + 193409 + 708356 + 937248
9369 + 72578 + 385396 + 2503124 + 56409

Addition mit Decimalzahlen.

§. 5. Man schreibt die gleichnamigen Stellen unter einander, nämlich Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w., und verrichtet die Addition wie bei ganzen Zahlen von der niedrigsten Stelle angefangen; der Decimalpunkt erscheint in der Summe gerade unter den Decimalpunkten der Summanden. Z. B.

1.
45·36 4 + 9 + 6 = 19 Hund. = 1 Zehnt. 9 Hund.
13·59 1 + 7 + 5 + 3 = 16 Zehnt. = 1 Ganz. 6 Zehnt.
28·74 1 + 8 + 3 + 5 = 17 Einer = 1 Zehner 7 Einer.
87·69 1 + 2 + 1 + 4 = 8 Zehner.

2. 0·5 Hier denkt man sich die leeren Stellen in den Summanden
0·25 mit Nullen besetzt.
0·125
0·0625
0·9375

Aufgaben.

1. a) 5·6 b) 65·3 c) 0·83 d) 18·25
3·7 29·9 0·59 17·9
12·9 77·7 0·66 0·086

2. 749·574 + 76 856 + 9·237 = ?
3. 224·57 + 395·086 + 17·8 + 9·76 = ?
4. 4·3125 + 2·13567 + 7·0084 + 51·383 + 12·1567 = ?
5. 35·148 + 13·856 + 25·377 + 33 209 + 28·185 = ?
6. 0·3784 + 0·4785 + 16 + 0·2345 + 24 + 1·475 = ?
7. Welche Zahl ist um 127·75 größer als 293·125?
8. Addiere drei Zahlen, von denen die erste 17·834, die zweite um 4·83 größer als die erste, und die dritte um 5·712 größer als die zweite ist.
9. Die Summe 3·123 + 4 234 + 5·345 + 6·456 soll um 7·567 vermehrt werden.
10. 5·347 + 12·84156 + 37·19584 + 0·937856 = ?
11. 29·3456 + 35·98765 + 213·8485 + 38·456 = ?
12. Verrichte die Addition folgender Zahlen in senkrechter und wagrechter Richtung:

35·246 + 13·73593 + 8·74612 + 0.513678 + 277·63
8·37947 + 35·1236 + 10·57809 + 5·21936 + 9·1578
40·897654 + 87·930857 + 9 269 + 7·843976 + 844 5
39·0784 + 9·764318 + 14·79345 + 2·653339 + 83·427
0·246937 + 5·665524 + 7·83156 + 0·97 + 12·139

Addition einnamig benannter Zahlen.

§. 6. Die Summanden müssen gleichen Namen haben, welchen dann auch die Summe erhält.

Aufgaben.

1.* Jemand hat zwei Fässer Wein; das eine enthält 785 Liter, das zweite 130 Liter mehr; wie viel Wein ist in dem zweiten Fasse?

2. Jemand hat folgende Beträge eingenommen: im Jänner 1345 fl., im Februar 810 fl., im März 98 fl., im April 635 fl., im Mai 1082 fl., im Juni 217 fl.; wie viel im Ganzen?

3. Ein Besitzer erzeugte in 10 auf einander folgenden Jahren 714, 635, 837, 512, 538, 693, 810, 855, 719, 688 Hektoliter Wein; wie viel während des ganzen Decenniums?

4. Der wie vielte Tag eines gemeinen Jahres ist der 5. März, der 17. Mai, der 29. Juli, der 10. August, der 15. October, der 30. November?

5. Kaiser Franz I. wurde geboren zu Florenz im Jahre 1768, bestieg in einem Alter von 24 Jahren den Thron und starb nach einer 43jährigen Regierung. Wann trat er die Regierung an, wann starb er und welches Alter erreichte er?

6. Jemand schuldet an A 3268 fl., an B 4550 fl., an C 1880 fl., an D 2736 fl.; wie viel an alle zusammen?

7. Ein Kaufmann erhält 6 Fässer mit Oel; in dem ersten sind 240, in dem zweiten 215, in dem dritten 210, in dem vierten 220, in dem fünften 224, in dem sechsten 225 Kilogr.; wie viel Kilogr. zusammen?

8. Böhmen hat 372 Städte, 226 Märkte und 12551 Dörfer; wie viel Wohnorte zusammen?

9. Vier Capitalien tragen einzeln 112·35 fl., 87·5 fl., 53·125 fl., 188·75 fl. jährlichen Zins; wie viel zusammen?

10. Die Seiten eines Fünfeckes sind $25{\cdot}124^m$, $32{\cdot}315^m$, $20{\cdot}25^m$, $17{\cdot}136^m$, $15{\cdot}248^m$; wie groß ist der Umfang?

11. Ein Silberarbeiter hat 2·3125, 1·872, 4·1785, 2·794 Kilogramm Silber verarbeitet; wie viel beträgt dieses zusammen?

12. Der Bau einer Eisenbahn verursachte folgende Kosten:

für die Grundeinlösung	1808457 fl.	wie hoch belaufen sich die sämmtlichen Anlagekosten?
„ den Unterbau	19344605 „	
„ den Oberbau	8074726 „	
„ Gebäude	2317990 „	
„ Verschiedenes	456082 „	

III. Das Subtrahieren.

§. 7. Subtrahieren heißt, aus der Summe zweier Zahlen und einem der beiden Summanden den andern suchen. Die gegebene

Summe als die Zahl, von welcher subtrahiert werden soll, heißt Minuend, der gegebene Summand als die Zahl, welche subtrahiert werden soll, heißt Subtrahend; die Zahl, die man als Resultat erhält, heißt Differenz oder Rest.

Die Aufgaben der Subtraction sind zweierlei; es ist 1. zu bestimmen, wie viel von der größeren Zahl noch bleibt, wenn die kleinere weggenommen wird (Rest); oder 2. wie viel zu der kleineren hinzugezählt werden muß, um die größere zu erhalten (Ergänzung).

Die Subtraction kann daher auf zweifache Art ausgeführt werden. Um z. B. von der Zahl 7 die Zahl 4 zu subtrahieren, kann man in der natürlichen Zahlenreihe von 7 aus um 4 Einheiten zurückschreiten; die Zahl 3, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz; man spricht: 4 von 7 bleibt 3. Man kann aber auch von 4 aus um so viele Einheiten vorwärts schreiten, bis man zu 7 gelangt; die Zahl 3 der zurückgelegten Einheiten stellt die Differenz vor; man spricht hier: 4 und 3 ist 7. Man erhält also in beiden Fällen dasselbe Resultat. Gewöhnlich wird das zweite Verfahren angewendet.

Das Zeichen der Subtraction ist — (weniger); z. B. $7 - 4 = 3$ wird gelesen: 7 weniger 4 ist gleich 3, oder: 4 von 7 bleibt 3.

Subtraction mit ganzen Zahlen.

§. 8. Da nur gleichartige Einheiten subtrahiert werden können, so subtrahiert man die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern u. s. w., indem man zu der jedesmaligen Ziffer des Subtrahends so viel addiert, dass man die darüber stehende Ziffer des Minuends, oder wenn diese kleiner ist, die nächste höhere Zahl erhält, welche an der Stelle der Einer jene Ziffer hat; die dazu addierte Zahl wird an der betreffenden Stelle als Rest angeschrieben. Z. B.

1.	2.
785	4045
613	338
172	3707

Man spricht hier im ersten Beispiele: 3 und **2** ist 5, 1 und **7** ist 8, 6 und **1** ist 7, und schreibt die jedesmal addierte Ziffer unter die subtrahierten Stellen. — Im zweiten Beispiele spricht oder denkt man: 8 und **7** ist 15, bleibt 1; 1 und 3 ist 4, und **0** ist 4; 3 und **7** ist 10, bleibt 1; 1 und **3** ist 4.

Beim Kopfrechnen werden von dem unzerlegten Minuend zuerst die höheren, dann die niedrigeren Einheiten des Subtrahends subtrahiert.

Z. B. Wie viel ist 284 — 65? 284 weniger 60 ist 224, davon noch 5 weg, bleibt 219.

Aufgaben.

1.* Zähle von 12 weg 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2.* Wie viel muß man zu 6, 7, 8, 9 zuzählen, um 15 zu erhalten?

3.* Bestimme folgende Differenzen:

a) 13 — 4, 21 — 3, 32 — 5, 43 — 6, 51 — 2;
b) 18 — 5, 35 — 7, 54 — 6, 71 — 3, 93 — 4;
c) 47 — 8, 39 — 4, 65 — 9, 82 — 7, 33 — 6.

4.* a) 50 — 20 = ? b) 43 — 10 = ? c) 67 — 40 = ?

5.* a) 46 — 15 = ? b) 73 — 38 = ? c) 123 — 95 = ?

6.* a) 600 — 200 = ? b) 910 — 500 = ? c) 758 — 400 = ?

7.* a) 835 — 320 = ? b) 673 — 428 = ? c) 928 — 541 = ?

8.

a)	b)	c)	d)
5738	3156	7910	6093
1325	917	2578	5465

9. a) 53162 — 4875 = ? b) 90084 — 71085 = ?

10. a) 932413 — 18975 = ? b) 123456 — 34567 = ?

11. 234578 + 309875 + 198756 — 381409 = ?

12. Um wie viel ist 8345097 + 1920784 + 764883 größer als 976342 + 2398745 + 139038?

13. Bestimme den Unterschied zwischen 78903456 — 62987491 und 33557799 — 11446688.

14. Subtrahiere von den bei den Additionsaufgaben 12. bis 18. in §. 4 erhaltenen Summen nach und nach die einzelnen Summanden.

15.* 375 — 68 — 32 = 375 — 100 = ?

Anstatt von einer Zahl nach und nach zwei oder mehrere Zahlen zu subtrahieren, kann man auf einmal ihre Summe subtrahieren.

16.* a) 234 — 57 — 43 = ? b) 781 — 225 — 75 = ?

17. Von der Zahl 731542

sind zu subtrahieren die Zahlen { 82591, 72859, 127986, 231578

Rest 216528

Anstatt hier zuerst die zu subtrahierenden Zahlen zu addieren und sodann ihre Summe von dem gegebenen Minuend zu subtrahieren, kann man mit der Addition der zu subtrahierenden Zahlen unmittelbar auch die Subtraction von dem gegebenen Minuend verbinden. Man addiert nämlich zuerst die Einer aller zu subtrahierenden Zahlen, und sucht, wie viel man zu ihrer Summe 24 noch addieren müße, um die nächste höhere Zahl zu bekommen, welche an der Stelle der Einer 2 hat, d. i. um 32 zu erhalten; dann verfährt man ebenso mit den Zehnern, Hunderten u. s. w.

Dabei spricht man: 8, 14, 23, 24 und 8 ist 32, bleibt 3; 3, 10, 18, 23, 32 und 2 ist 34, bleibt 3; u. s. f.

18. 94789384 — (12356938 + 39279 + 64082641) = ?
19. 13902080 — (4809376 + 23219 + 907456 + 193) =?
20. 8341709 — (763583 + 937846 + 293588) = ?
21. 98765432 — (1234567 + 8901234 + 5678901 + 2345678 + 3084415) = ?

Subtraction mit Decimalzahlen.

§. 9. Beim Subtrahieren der Decimalbrüche schreibt man den Subtrahend so unter den Minuend, dass Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w. zu stehen kommen, und verrichtet dann die Subtraction wie bei ganzen Zahlen von den niedrigsten Stellen angefangen; der Decimalpunkt erscheint in dem Reste genau unter den übrigen Decimalpunkten. Z. B.

1)	2)	3)
27·442	218·746	5·85
18·568	0·85	5·2356
8·874	217·896	0·6144

Aufgaben.

1. a) 0·735 — 0·274 =? b) 25·78 — 19·9 =? c) 7·346 — 4 =?
2. a) 72·4 — 9·88 = ? b) 10 — 6·75 = ? c) 1 — 0·384 =?
3. a) 37·784 — 15·384 = ? b) 67·857 — 28·3 = ?
4. a) 55·3124 — 13·8751 = ? b) 12·9472 — 8·315 = ?
5. a) 333·78 — 108·333 = ? b) 7·3 — 0·3589 = ?
6. a) 0·673042 — 0·374998 =? b) 36 — 0·00795 = ?
7. 823·25463 — 788·9357 = ?
8. 3·9527 — 2·8973176 = ?
9. Um wie viel ist 7·8939 größer als 6·935?
10. Um wie viel ist 37·485 kleiner als 40?
11. Welche Zahl ist um 3·3333 kleiner als 12·8333?
12. Um wie viel ist die Summe 3·149 + 8·71938 + 10·08 größer als 9·79345 + 1·859559?
13. 371·756 — (58·3475 + 108·99 + 73·8055) = ?
14. (5·34562 + 9·07834) — (4·30855 + 2·19931 + 0·86603 + 3·14159) = ?

Subtraction einnamig benannter Zahlen.

§. 10. Minuend und Subtrahend müssen gleichen Namen haben, welchen dann auch der Rest bekommt.

Aufgaben.

1.* Jemand nimmt in einem Jahre 1800 fl. ein, und gibt 1348 fl. aus; wie viel erspart er?

2.* Ein Vater ist 60 Jahre alt, sein Sohn 32 Jahre jünger; wie alt ist der Sohn?

3. Welches Datum schreibt man am 35sten, 87sten, 104ten, 233sten, 281sten, 307ten, 360sten Tage eines Schaltjahres?

4.* An einem Gebäude findet man die Aufschrift 1639; wie alt ist dieses Gebäude?

5.* Zwei Fässer Kaffee wiegen 630 Kilogr.; die Fässer für sich wiegen 22 Kilogr.; wie viel Kilogr. Kaffee enthalten die beiden Fässer?

6. Ein Haus, auf welchem 3580 fl., 2300 fl., 1860 fl. und 1525 fl. Schulden lasten, wird um 10000 fl. verkauft; wie viel bleibt dem Eigenthümer nach der Tilgung aller Schulden übrig?

7. Wien zählte im Jahre 1840 357815 Einwohner, im Jahre 1870 622087; um wie viel hat die Bevölkerung Wiens während der Zwischenzeit zugenommen?

8. Jemand kauft eine Waare um 685·16 fl. nach 3 Monaten zahlbar; wie viel hat er dafür sogleich zu bezahlen, wenn ihm wegen der früheren Bezahlung 17·12 fl. nachgelassen werden?

9. Jemand schuldet 1382·47 fl., darauf zahlt er 785·64 fl.; wie viel bleibt er noch schuldig?

10. Eine Waare wurde um 138·35 fl. eingekauft, und um 177·38 fl. verkauft; wie viel hat man dabei gewonnen?

11. Von einem Acker, welcher 328 Hektar misst, werden 85·25 Hektar verkauft; wie viel bleibt noch übrig?

12. Der längste Tag in Wien ist 15·967 Stunden, der kürzeste 8·583 Stunden; wie groß ist der Unterschied beider?

13. Ein Fass enthält 37·75 Hektoliter Wein; wenn nun daraus drei kleinere Fässer, von denen das erste 4·5 Hektoliter, das zweite 5·25 Hektoliter, das dritte 5·85 Hektoliter fasst, gefüllt werden, wie viel bleibt noch im großen Fasse übrig?

14. Jemand nimmt in einem Monate folgende Summen ein: 388 fl., 295 fl., 57 fl., 167 fl., 315 fl.; dagegen gibt er aus: 237 fl.

410 fl., 117 fl.; wie groß ist der Ueberschuss der Einnahme über die Ausgabe?

15. Ein Londoner Pfund hat 0·4536, ein deutsches Pfund 0·5, ein russisches Pf. 0·7313 Kilogr.; wie groß ist der Unterschied zwischen je zweien dieser Gewichte?

16. Unsere Erde hat eine Oberfläche von 9261203 geogr. □Meilen; davon entfallen auf jede kalte Zone 384062 □Meilen, auf jede gemäßigte Zone 2400040 □Meilen; wie viel □Meilen umfaßt die heiße Zone?

IV. Das Multiplicieren.

§. 11. Multiplicieren heißt eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine zweite Zahl anzeigt. Die Zahl, welche öfters als Summand gesetzt werden soll, heißt Multiplicand; die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplicand zu setzen ist, heißt Multiplicator; das Resultat der Multiplication wird Product genannt. Multiplicand und Multiplicator werden beide auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Factoren bezeichnet.

Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder . (multipliciert mit, mal): z. B. $5 \times 3 = 15$ oder $5 . 3 = 15$ wird gelesen: 5 multipliciert mit 3 ist gleich 15, oder: 3mal 5 ist 15.

Eine Zahl kann auch mit mehreren anderen Zahlen multipliciert werden, indem man dieselbe zunächst mit einer dieser Zahlen, das erhaltene Product mit einer zweiten, u. s. w. multipliciert.

Es ist für das Product gleichgiltig, in welcher Ordnung man die Factoren mit einander multipliciert.

$5 \times 3 = 3 \times 5 = 15;$
$2.3.4 = 2.4.3 = 3.2.4 = 3.4.2 = 4.2.3 = 4.3.2 = 24.$

Multiplication mit ganzen Zahlen.

§. 12. I. Wenn der Multiplicator einziffrig ist, so wird die Multiplication verrichtet, indem man jeden Bestandtheil des Multiplicands so oft nimmt, als der Multiplicator Einheiten enthält,

d. i. wenn man zuerst die Einer, dann die Zehner, . . . des Multiplicands mit dem einziffrigen Multiplicator multipliciert. Z. B.

$$\frac{437 \times 5}{2185}$$

5mal 7 E. sind 35 E. = 3 Z. + 5 E.
5mal 3 Z. sind 15 Z., und 3 Z. sind 18 Z. = 1 H. + 8 Z.
5mal 4 H. sind 20 H. und 1 H. sind 21 H.

Beim Kopfrechnen beginnt man bei den höheren Einheiten zu multiplicieren an. Z. B. Wie viel ist 3mal 84? 3mal 80 ist 240, 3mal 4 ist 12, 240 und 12 ist 252.

Aufgaben.

1.* Nimm jede der Zahlen 1, 2, 3, . . . 8, 9 folgeweise 1mal, 2mal, 3mal, . . . 8mal, 9mal, und präge diese Producte dem Gedächtnisse ein (das Einmaleins).

2.* a) $8 \times 2 + 9 \times 5 = ?$ b) $9 \times 8 - 6 \times 7 = ?$

3.* $5 \times 6 + 8 \times 1 - 7 \times 3 = ?$

4.* $7 \times 7 - 8 \times 3 + 4 \times 6 = ?$

5.* Wie viel ist 1mal 10, 2mal 10, 3mal 10, . . . 9mal 10?

6.* Wie viel ist 2mal 100, 3mal 100, . . . 9mal 100?

7.* Wie viel ist 2mal 40, 3mal 20, 5 mal 60?

8.* Wie viel ist 3mal 200, 2mal 500, 6mal 300?

9.* a) $72 \times 4 = ?$ b) $56 \times 3 = ?$ c) $68 \times 7 = ?$

10.* Nimm jede der Zahlen: 16, 25, 37, 48, 51, 69, 88 a) 2mal, b) 3mal, c) 8mal, d) 5mal, e) 7mal, f) 4mal, g) 6mal.

11.* a) $603 \times 8 = ?$ b) $281 \times 9 = ?$ c) $765 \times 6 = ?$

12. a) $1823 \times 3 = ?$ b) $8035 \times 6 = ?$

13. a) $8085 \times 8 = ?$ b) $91072 \times 5 = ?$

14. a) $134793 \times 2 = ?$ b) $35709 \times 7 = ?$

15. a) $218354 \times 6 = ?$ b) $836214 \times 4 = ?$

16. Multipliciere 93876432 nach der Reihe mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

17. Die Zahl 70859164 soll mit 2, das Product wieder mit 2, das neue Product noch mit 2, und das erhaltene Product wieder mit 2 multipliciert werden.

18. Multipliciere ebenso 1936787 8mal nach einander mit 3, eben so oft mit 4, 5, 6, 7, 8, 9.

19. Multipliciere jede der Zahlen a) 9170854, b) 5891303, c) 77026539, d) 4789155 mit jeder der Zahlen p) 5, q) 6, r) 8, s) 9.

II. Wenn der Multiplicator 10, 100, 1000 . . . ist, so wird die Multiplication verrichtet, indem man jeder Ziffer des Multiplicands einen 10mal, 100mal, 1000mal, . . . so großen Wert ertheilt,

welches geschieht, indem man der Zahl rechts 1, 2, 3, . . . Nullen anhängt. Z. B.

1) $\underline{346 \times 10}$ 3460 2) $\underline{584 \times 100}$ 58400 3) $\underline{870 \times 1000}$ 870000

Aufgaben.

1. a) $3165 \times 10 = ?$ b) $8279 \times 10 = ?$
2. a) $7843 \times 100 = ?$ b) $38100 \times 100 = ?$
3. a) $319 \times 10000 = ?$ b) $5700 \times 1000 = ?$
4. Multipliciere 39572 mit 10, 100, 1000, 10000, 100000.
5. $93572 \times 1000 + 7845 \times 100 + 134790 \times 10 = ?$
6. $27483 \times 10000 + 93586 \times 10 - 96583 \times 100 = ?$

III. Wenn der Multiplicator irgend eine mehrziffrige Zahl ist, so muß man den Multiplicand so oftmal nehmen, als alle einzelnen Bestandtheile des Multiplicators Einheiten enthalten; man muß also den Multiplicand mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multiplicieren, und der niedrigsten Ziffer jedes erhaltenen Theilproductes denjenigen Stellenwert geben, welchen die Ziffer des Multiplicators hat, mit welcher multipliciert wurde. Dieses letztere wird durch gehöriges Anschreiben der Theilproducte erreicht, wenn man nämlich jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte oder gegen die Linke zu schreiben beginnt, je nachdem man mit der höchsten oder mit der niedersten Ziffer des Multiplicators zu multiplicieren anfängt.

Es ist gleichgiltig, in welcher Ordnung man mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multipliciert, wenn nur die Theilproducte in der gehörigen Stellung unter einander geschrieben werden.

Z. B. $\underline{538 \times 247}$

107600 . . . 200mal . . . 1076
21520 . . . 40mal . . . 2152
3766 . . . 7mal . . . 3766
132886 132886

oder $\underline{538 \times 247}$

Im Kopfe. Wie viel ist 12mal 34? 10mal 34 ist 340, 2mal 34 ist 68; 340 und 68 ist 408.

Aufgaben.

1.* Wie viel ist 13mal 20, 14mal 51, 23mal 32, 22mal 340?
2. a) $73 \times 23 = ?$ b) $87 \times 36 = ?$ c) $185 \times 19 = ?$

3. a) $7013 \times 84 = ?$ b) $12345 \times 69 = ?$
4. a) $35482 \times 98 = ?$ b) $345 \times 123 = ?$
5. a) $5290 \times 617 = ?$ b) $9204 \times 729 = ?$
6. a) $78431 \times 924 = ?$ b) $12345 \times 678 = ?$
7. a) $109207 \times 3014 = ?$ b) $75074 \times 2395 = ?$
8. a) $398594 \times 57396 = ?$ b) $381475 \times 873589 = ?$
9. a) $\begin{array}{r} 347 \times \\ 800 \\ \hline 277600 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 4560 \times \\ 29 \\ \hline 4104 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 80500 \times \\ 650 \\ \hline 4025 \\ 4830 \\ \hline 52325000 \end{array}$
$\begin{array}{r} 912 \\ \hline 132240 \end{array}$

10. a) $91234 \times 7800 = ?$ b) $70800 \times 371 = ?$
11. a) $35800 \times 978000 = ?$ b) $83109000 \times 93857 = ?$
12. Multipliciere 617385 a) mit 67, b) mit 386, c) mit 7083.
13. Wie viel iſt 31416mal a) 29905, b) 83442, c) 179355?
14. Multipliciere jede der Zahlen
a) 63335, b) 129370, c) 768904, d) 570123 mit jeder der Zahlen
p) 987, q) 6130, r) 34048, s) 786231.
15. $91347845 \times 1235709 \times 3248193 = ?$
16. $56789 \times 12345 \times 67890 \times 45678 = ?$
17. $780523 \times 935386 + 238719 \times 3709300 = ?$
18. $468029 \times 783507 - 389785 \times 690528 = ?$

Multiplication mit Decimalzahlen.

§. 13. I. Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, . . multipliciert, indem man jeder Ziffer desſelben einen 10, 100, 1000 . . . mal ſo großen Wert gibt, d. i. indem man den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach rechts rückt (§. 2, Folgeſatz 2). Z. B.

$\begin{array}{r} 4{\cdot}567 \times \\ 10 \\ \hline 45{\cdot}67 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1{\cdot}23 \times \\ 100 \\ \hline 123 \end{array}$ $\begin{array}{r} 0{\cdot}08 \times \\ 1000 \\ \hline 80 \end{array}$

II. Ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man ihn wie eine ganze Zahl damit multipliciert und im Producte von der Rechten gegen die Linke ſo viele Decimalſtellen abſchneidet, als deren der Multiplicand hat. Z. B.

$\begin{array}{r} 4{\cdot}56 \times \\ 7 \\ \hline 31{\cdot}92 \end{array}$

7mal 6 Hundertel ſind 42 Hundertel = 4 Zehntel und 2 Hundertel.
7mal 5 Zehntel ſind 35 Zehntel, und 4 Zehntel ſind 39 Zehntel = 3 Einer und 9 Zehntel.
7mal 4 Einer ſind 28 Einer, und 3 Einer ſind 31 Einer.

III. Ein Decimalbruch wird mit einem Decimalbruche multipliciert, indem man die Multiplication ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie bei ganzen Zahlen verrichtet und dann im Producte so viele Decimalstellen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind. Z. B.

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}234 \times 5{\cdot}67 \\ \hline 46170 \\ 55404 \\ 64638 \\ \hline 52{\cdot}35678 \end{array}$$

Multipliciert man 9·234 mit der ganzen Zahl 567, so erhält man (nach II.) 5235·678. Nun ist aber 9·234 nur mit 5·67 d. i. mit dem 100sten Theile von 567 zu multiplicieren; es wird daher auch das Product nur der 100ste Theil von 5235·678, d. i. 52·35678 (§. 2, Folgesatz 3) sein. In dem Ziffernproducte 5235678 werden also mit Rücksicht auf den Multiplicand 3, und mit Rücksicht auf den Multiplicator noch 2, zusammen 5 Decimalstellen abgeschnitten.

Aufgaben.

1. a) $17{\cdot}085 \times 10 = ?$ b) $3{\cdot}14159 \times 100 = ?$
2. a) $7{\cdot}4105 \times 1000 = ?$ b) $0{\cdot}956 \times 100000 = ?$
3. a) $8{\cdot}9456 \times 3 = ?$ b) $0{\cdot}9876 \times 90 = ?$
4. a) $17{\cdot}345 \times 9 = ?$ b) $7{\cdot}157 \times 800 = ?$
5. Die Zahl 15·893 soll mit 10, 100, 1000, 10000, 100000 multipliciert werden.
6. a) $0{\cdot}1284 \times 87 = ?$ b) $129{\cdot}23 \times 58 = ?$
7. a) $33{\cdot}841 \times 37 = ?$ b) $13{\cdot}937 \times 531 = ?$
8. a) $0{\cdot}128 \times 625 = ?$ b) $3{\cdot}1567 \times 950 = ?$
9. a) $5{\cdot}19635 \times 225 = ?$ b) $13{\cdot}9078 \times 609 = ?$
10. a) $783 \times 0{\cdot}09 = ?$ b) $35{\cdot}27 \times 0{\cdot}4 = ?$
11. a) $7{\cdot}8413 \times 1{\cdot}7 = ?$ b) $5{\cdot}462 \times 2{\cdot}36 = ?$
12. a) $3{\cdot}5 \times 1{\cdot}72 = ?$ b) $7125 \times 0{\cdot}03 = ?$
13. a) $783 \times 2{\cdot}83 = ?$ b) $17{\cdot}835 \times 0{\cdot}71 = ?$
14. a) $7{\cdot}314 \times 3{\cdot}25 = ?$ b) $41{\cdot}23 \times 0{\cdot}52 = ?$
15. a) $0{\cdot}315 \times 0{\cdot}017 = ?$ b) $6\,521 \times 0{\cdot}082 = ?$
16. a) $23{\cdot}915 \times 9{\cdot}93 = ?$ b) $345{\cdot}123 \times 0{\cdot}617 = ?$
17. a) $6{\cdot}451 \times 80{\cdot}01 = ?$ b) $0{\cdot}4992 \times 0{\cdot}327 = ?$
18. a) $2{\cdot}3456 \times 6{\cdot}789 = ?$ b) $0{\cdot}3561 \times 0{\cdot}1375 = ?$
19. a) $15{\cdot}3287 \times 57{\cdot}89 = ?$ b) $6{\cdot}21046 \times 0{\cdot}01753 = ?$
20. Wie viel beträgt $3{\cdot}125 \times 1{\cdot}09 + 7{\cdot}378 \times 0\,037$?
21. Um wie viel ist $37 \times 3\,957$ größer als $12{\cdot}935 \times 7{\cdot}108$?
22. a) $840\,244 \times 0{\cdot}09573 = ?$ b) $3{\cdot}444593 \times 785{\cdot}72 = ?$
23. a) $781642 \times 0{\cdot}81593 = ?$ b) $399{\cdot}1345 \times 14{\cdot}8875 = ?$
24. a) $9{\cdot}51643 \times 29857 = ?$ b) $0{\cdot}28719 \times 0{\cdot}53644 = ?$

25. Das Product zweier gleicher Factoren wird Quadrat genannt. Bestimme das Quadrat von a) 2·14, b) 42·58, c) 0·17345, d) 5·8078.

26. Das Product dreier gleicher Factoren wird Cubus genannt. Bestimme den Cubus von a) 0·15, b) 6·34, c) 15·38, d) 0·7925.

27. a) $0{\cdot}0000956 \times 27851 = ?$ b) $95{\cdot}281 \times 0{\cdot}0119 = ?$

28. a) $8{\cdot}236755 \times 193{\cdot}57 = ?$ b) $23{\cdot}8945 \times 97513 = ?$

29. a) $24{\cdot}94407 \times 285{\cdot}263 = ?$ b) $1{\cdot}37938 \times 248571 = ?$

Rechnungsvortheile bei der Multiplication.

§. 14. 1. Wenn der Multiplicator die Ziffer 1 enthält.

Anstatt:	3421×41	$56073 \times 1{\cdot}08$	$43{\cdot}12 \times 123$
	3421	56073	43 12
	13684	4485 84	8 62 4
	140261	60558·84	1 29 36
			53 03·76

kann man mit Vermeidung alles unnützen Wiederholens auch schreiben

3421×41	$56073 \times 1{\cdot}08$	$43{\cdot}12 \times 123$
13684	4485 84	8 62 4
140261	60558·84	1 29 36
		53 03·76

Wenn daher im Multiplicator die Ziffer 1 vorkommt, so läßt man den Multiplicand ungeändert als das erste Theilproduct stehen, multipliciert ihn dann nur mit den andern geltenden Ziffern des Multiplicators, und schreibt die dadurch erhaltenen Theilproducte gehörig darunter.

2. Wenn der Multiplicator 11 ist.

Nach dem eben angeführten Vortheile hat man

$$381307{\cdot}924 \times 11$$

3813079 24
4194387·164

woraus hervorgeht, daſs man bei der Multiplication mit 11 das Product unmittelbar aus dem Multiplicand ableiten kann, indem man

die erste Ziffer rechts ungeändert anschreibt, dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, und überhaupt zu jeder Stelle die nächst höhere addiert. Z. B.

1) 178423×11 = 1962653

2) 3840·72×11 = 42247·92

3) 907865×110 = 99865150

Man spricht im ersten Beispiele: 3 ist 3, 3 und 2 ist 5; 2 und 4 ist 6, 4 und 8 ist 12, bleibt 1; 1 und 8 ist 9, und 7 ist 16, bleibt 1; 1 und 7 ist 8, und 1 ist 9; 1 ist 1.

3. Wenn sich der Multiplicator in zwei Factoren zerlegen läßt, mit denen man leicht multiplicieren kann, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor, und dann das Ergebnis noch mit dem andern Factor. Z. B.

1) 9206 × 49 = 64442 × 7.7 = 451094

2) 219·56 × 33 = 658·68 × 3.11 = 7245·48

3) 12345 × 270 = 111105 × 9.30 = 3333150

4. Wenn der Multiplicator lauter 9 enthält, mit Ausnahme der Einer, welche auch eine andere Ziffer sein können.

Hat man eine Zahl z. B. mit 992 zu multiplicieren, so multipliciert man mit 1000; dadurch bekommt man um das 8fache zu viel, man muß daher die Zahl noch mit 8 multiplicieren, und die 8fache Zahl von der 1000fachen subtrahieren.

Wenn also der Multiplicator bis auf die Einer lauter 9 enthält, so addiert man zu den Einern so viel, dass man 100, 1000, . . . bekommt; hierauf multipliciert man den Multiplicand zuerst mit 100, 1000, . . . dann mit der zu den Einern hinzuaddierten Zahl und subtrahiert das zweite Product von dem ersten. Z. B.

1) 7·534 67$_{000}$ × 994 = 45 20802 × 1000—6 = 7 489·46198

2) 150234$_{0000}$ × 9997 = 450702 × 10000—3 = 1501889298

5. Wenn der Multiplicator lauter 9 enthält, mit Ausnahme der höchsten Ziffer, welche nicht nothwendig 9 sein muß.

Vermehrt man einen solchen Multiplicator um 1, so erhält man eine Zahl, welche aus einer einzigen geltenden Ziffer mit rechts folgenden Nullen besteht. Wenn man nun den Multiplicand mit dieser Zahl multipliciert, so ist das Product um das 1fache des Multiplicands,

d. i. um den Multiplicand selbst zu groß; man muß daher von jenem Producte noch den Multiplicand subtrahieren. Z. B.

1) $\begin{array}{r} 5682 \\ \times\ 399 \\ \hline 2272800 \\ \hline 2267118 \end{array}$ $\begin{array}{l} \\ \\ \\ 400-1 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7{\cdot}296 \\ \times\ 5999 \\ \hline 43776\,000 \\ \hline 43768{\cdot}704 \end{array}$ $\begin{array}{l} \\ \\ \\ 6000-1 \end{array}$

Hier wird der oben stehende Multiplicand von dem darunter gesetzten 400fachen oder 6000fachen desselben subtrahiert.

Aufgaben.

Berechne mit Anwendung der Vortheile:

1. a) 52189 × 17, b) 87061 × 81, c) 30·786 × 5·01,
   d) 84·218 × 6·1, e) 35·018 × 1·09, f) 241578 × 731,
   g) 1·23456×7·19, h) 8·306 × 3921, i) 397568 × 4·125.
2. a) 35897 × 11, b) 791·805×11, c) 3·15679 × 1·1,
   d) 975875 × 11 × 11, e) 397506 × 11 × 11 × 11,
   f) 13·04516 × 1·1 × 1·1 × 1·1 × 1·1 × 1·1.
3. a) 78054 × 36, b) 70694×560, c) 513·94 × 6·3,
   d) 871·4637×24, e) 219530×72, f) 384·29 × 54,
   g) 1345693 × 35 — 722034 × 49.
4. a) 321459 × 98, b) 170375×996, c) 3·7281 × 0 94,
   d) 516·6547 × 995, e) 8356139 × 9·993,
   f) 955146 × 9992 — 782819 × 9900.
5. a) 543168 × 59, b) 408916×799, c) 13·496 × 4·99,
   d) 9173046 × 8990, e) 99·3798 × 99·99,
   f) 5344266 × 199 + 954680 × 6999.
6. 437819 × 56 + 5907738 × 11.
7. 4082635 × 970 — 246897 × 81.
8. 39246817 × 19 + 27410333 × 25.
9. 6072554 × 9991 — 8526631 × 599.
10. 67890·123 × 499 — 9237·567 × 130.

Multiplication einnamig benannter Zahlen.

§. 15. Bei der Multiplication kann bloß der Multiplicand eine benannte Zahl, der Multiplicator aber muß unbenannt sein; das Product erhält den Namen des Multiplicands.

Aufgaben.

1.* Ein Hektoliter Wein kostet 45 fl.; wie viel kosten 8 Hektoliter?

8 Hektol. sind 8mal 1 Hektol., sie kosten also 8mal 45 fl.; man hat daher

$$45 \text{ fl.} \times 8 = 360 \text{ fl.}$$

2.* Ein Ar Gartengrund kostet 27 fl.; wie viel kostet ein Hektar?

3.* Ein Beamter hat monatlich 126 fl. Gehalt; wie hoch ist sein Jahresgehalt?

4. Der Umfang eines Wagenrades ist 3^m; wie viel Meter legt das Rad nach 2345 Umdrehungen zurück?

5. Wie viel Weizen erzeugt eine Bodenfläche von 728 Hektar, wenn der Ertrag eines Hektar zu 15 Hektoliter angenommen wird?

6. In Oesterreich-Ungarn werden jährlich im Durchschnitte 40963 Kilogramm Silber gewonnen; welchen Geldwerth hat dieses, wenn man ein Kilogramm zu 90 fl. rechnet?

7. Wie viele Meter geben 15 Kilogramm Leinengarn, wenn auf 1 Kilogr. 30 Sträne gehen, und wenn ein Strän 2250 Meter enthält?

8. Mähren umfaßt 222·3 □Myriameter und hat durchschnittlich 9075 Einwohner auf jedem $\square^{Mm}$; wie groß ist die Bevölkerung von Mähren?

9. Ein Pendel braucht zu einer Schwingung 0·87 Secunden, in wie viel Zeit wird es 20, 60, 87, 1000 Schwingungen machen?

10. Ein Kilogramm kostet 2·35 fl.; wie hoch kommen 9, 27, 58, 106, 238, 1118 Kilogramm?

11. Ein Meter Tuch kostet 4·22 fl.; wie viel kosten 5, 9, 4·5, 12·25 Meter?

12. Ein Dampfwagen legt stündlich 30·2 Kilometer zurück; wie viel in 7, 10, 3·7, 13·75 Stunden?

13. Von einem Capitale bezieht man jährlich 65·78 fl. Zins; wie viel ~~in 0·25,~~ in 2·125 Jahren?

14. Ein Garten, welcher die Form eines Rechteckes hat, ist 20^m lang und 12^m breit; wie groß ist seine Fläche?

Wie viele $\square^m$ lassen sich nach der Länge auftragen? Wie viele solche Streifen kommen nach der Breite neben einander zu liegen? Wie viele $\square^m$ enthält also die ganze Fläche?

15. Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen Seite 18^{dm} ist?

Man multipliciere die Länge einer Seite mit sich selbst.

16. Die Seite eines Quadrates ist $3{\cdot}42^m$, die Seite eines zweiten Quadrates $1{\cdot}75^m$; um wie viel $\square^m$ ist der Flächeninhalt des ersten Quadrates größer als der des zweiten?

17. Ein Hof von 15·35^{m} Länge und 10·83^{m} Breite soll mit Platten belegt werden, wovon das Quadratmeter zu 6·48 fl. gerechnet wird; wie hoch belaufen sich die Kosten?

18. Eine Mauer hat 272^{dm} Länge, 91^{dm} Höhe und 7^{dm} Dicke; wie viel Cub.^{dm} enthält sie?

Wie viele □^{dm} enthält die Grundfläche der Mauer? Wie viele Cub.^{dm} lassen sich also auf der Grundfläche auftragen? Wie viele solche Schichten kann man nach der ganzen Höhe über einander legen? Wie viele Cub.^{dm} enthält demnach die Mauer?

19. Ein Zimmer ist 15^{m} lang, 9^{m} breit und 4^{m} hoch; wie groß ist der Raum dieses Zimmers?

20. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite 26^{cm} beträgt?

Man setze die Länge einer Seite 3mal als Factor.

21. Wie viel Liter fasst ein würfelförmiges Gefäß, dessen Seite 2·2^{dm} ist?

22. Wie viel wiegt eine vierkantige Eisenstange, welche 195^{cm} lang, 11^{cm} breit und 2^{cm} dick ist, wenn das Cub.^{cm} Eisen 0·0078 Kilogramm wiegt?

23. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 5^{dm}, wie groß ist der Umfang?

Der Umfang eines Kreises wird berechnet, indem man den Durchmesser mit 3·14, genauer mit 3·14159 multipliciert.

24. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser a) 4·2^{m}, b) 2·815^{m}, c) 11·75^{dm} beträgt?

25. Ein Rad hat 0·735^{m} im Halbmesser; wie groß ist der Umfang desselben, und wie viele Umläufe wird es machen müßen, um 1 Kilometer zurückzulegen?

26. Der Halbmesser eines Kreises ist 4·5^{m}; wie groß ist der Flächeninhalt?

Um die Fläche eines Kreises zu erhalten, multipliciert man das Quadrat des Halbmessers mit 3·14, genauer mit 3·14159.

27. Wie groß ist die Bodenfläche eines kreisrunden Sales, dessen Durchmesser 11·25^{m} ist?

28. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 4·3^{dm} ist?

Die Kugeloberfläche wird berechnet, indem man das 4fache Quadrat des Halbmessers mit 3·14159 multipliciert.

29. Eine Kugel hat a) 1·24^{m}, b) 5·15^{dm} im Durchmesser; wie groß ist ihre Oberfläche?

30. Ein kugelrunder Turmknopf, welcher $1{\cdot}1^{m}$ im Durchmesser hat, soll vergoldet werden; wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für das $\square^{m}$ 17 fl. gezahlt wird?

31. Wie groß ist der Cubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser $7{\cdot}5^{dm}$ ist?

Der Cubikinhalt einer Kugel wird gefunden, indem man entweder a) die Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers, oder b) indem man $^{4}/_{3}$ des Cubus des Halbmessers mit 3·14159 multipliciert.

32. Wie viel wiegt eine eiserne Kugel von $2{\cdot}4^{dm}$ Durchmesser, wenn ein Cub.^{dm} Eisen 7·8 Kilogramm wiegt?

V. Das Dividieren.

§. 16. Dividieren heißt, aus dem Producte zweier Zahlen und aus einem der beiden Factoren den andern suchen. Das gegebene Product als die Zahl, welche dividiert werden soll, heißt Dividend, der gegebene Factor als die Zahl, durch welche dividiert wird, heißt Divisor; die Zahl, welche man durch die Division erhält, heißt Quotient.

Die Division läßt eine zweifache Auffassung zu, je nachdem der bekannte Factor (Divisor) als Multiplicand oder als Multiplicator gegeben ist. Da nämlich das Product ein aus mehreren gleichen Theilen bestehendes Ganzes ist, so zeigt der Multiplicand die Größe eines Theiles, der Multiplicator die Anzahl der Theile an.

Wenn nun das Product und der Multiplicator, also das Ganze und die Anzahl der Theile gegeben ist, so läst sich mittelst der Division der Multiplicand, also die Größe eines Theiles berechnen. Ist z. B. 20 als das aus gleichen Theilen bestehende Ganze und 5 als die Anzahl dieser Theile gegeben, so lautet die Frage: wie groß ist 1 Theil, wenn 20 aus 5 gleichen Theilen besteht? oder: wie groß ist der 5te Theil von 20? Die Zahl 20 durch 5 dividieren heißt in diesem Falle, 20 in 5 gleiche Theile theilen. Die Division ist hier als Theilung zu betrachten, wovon sie auch den Namen führt.

Ist aber das Product (das Ganze) und mit ihm der Multiplicand (die Größe eines Theiles) gegeben, so sucht man mittelst der Division den Multiplicator (die Anzahl der Theile). Es entsteht, wenn z. B. 20

als das Ganze und 5 als die Größe eines Theiles gegeben ist, die Frage: wie viele gleiche Theile gibt 20, wenn ein solcher Theil 5 ist? oder: wie oft ist 5 in 20 enthalten? 20 durch 5 dividieren heißt in diesem Falle, untersuchen, wie oft 5 in 20 enthalten ist. Die Division bedeutet hier ein Enthaltensein, eine Messung.

Das Zeichen der Division ist : (dividiert durch); z. B. 20 : 5 = 4 wird gelesen: 20 dividiert durch 5 ist gleich 4, oder: 5 ist in 20 4mal enthalten. Ein Quotient wird manchmal auch dadurch angezeigt, dass man den Divisor unter den Dividend, und zwischen beide einen Strich setzt, z. B. $\frac{3}{5}$ wird gelesen: 3 dividiert (gebrochen) durch 5, oder 3 5tel. Diese Form des Quotienten wird die Bruchform genannt.

Division mit ganzen Zahlen.

§. 17. Das Dividieren wird bei der höchsten Stelle des Dividends begonnen. Man nimmt im Dividend so viele höchste Ziffern, als ihrer der Divisor hat, oder um eine mehr, wenn die mit jenen Ziffern gebildete Zahl kleiner als der Divisor ist, als ersten Theildividend an, und dividiert diesen durch den Divisor, wodurch man die erste und höchste Ziffer des Quotienten erhält. Multipliciert man dann mit dieser Ziffer des Quotienten den Divisor, subtrahiert das Product von dem ersten Theildividende und setzt zu dem Reste die nächste niedrigere Ziffer des Dividends dazu, so bildet diese Zahl den zweiten Theildividend, welcher durch den Divisor dividiert, die zweite Ziffer des Quotienten gibt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen hat. Z. B.

1) 936 : 3 = 312

9 H. : 3 = 3 H.; 3 Z. : 3 = 1 Z.
6 E. : 3 = 2 E.

2) 4579 : 8 = $572\frac{3}{8}$

Man spricht oder denkt: 8 in 45 5mal, bleibt 5; 8 in 57 7mal, bleibt 1; 8 in 19 2mal, bleibt 3. Man erhält also 572 als Quotienten und 3 als Rest, welcher noch durch 8 zu dividieren ist: 1 in 8 gleiche Theile getheilt, gibt 1 Achtel, 3 in 8 gleiche Theile getheilt, gibt also 3 Achtel = $\frac{3}{8}$; man muß daher im Quotienten zu der ganzen Zahl 572 noch den Bruch $\frac{3}{8}$ hinzufügen.

3) 4731 : 83 = 57

415

581

581

= = =

Da 83 in 47 nicht enthalten ist, so nimmt man 473 als ersten Theildividend. 83 in 473 (versuchsweise 8 in 47) ist 5mal enthalten; 5mal 83 ist 415, von 473 subtrahiert, bleibt 58; 58 Z. = 580 E. und 1 E. dazu, sind 581 E.; 83 in 581 (8 in 58) ist 7mal enthalten; 7mal 83 ist genau 581.

4) 98648 : 418 = 236

1504

2508

= = =

Die Theilproducte aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten werden gewöhnlich sogleich während des Multiplicierens von den betreffenden Theildividenden subtrahiert und bloß die Reste angeschrieben. Man spricht: 418 in 986 (4 in 9) ist 2mal enthalten; 2mal 8 ist 16, und **0** ist 16, bleibt 1; 2mal 1 ist 2, und 1 ist 3, und **5** ist 8; 2mal 4 ist 8, und **1** ist 9. Zum Reste 150 kommt 4 herab; 418 in 1504 (4 in 15) ist 3mal enthalten: 3mal 8 ist 24, und **0** ist 24, bleibt 2; 3mal 1 ist 3, und 2 ist 5 und **5** ist 10, bleibt 1; 3mal 4 ist 12, und 1 ist 13, und **2** ist 15; u. s. f.

Wenn der Divisor 10, 100, 1000, . . . ist, so wird die Division verrichtet, indem man vom Dividend rechts 1, 2, 3, . . . Ziffern abschneidet; die links bleibenden Ziffern bilden den Quotienten, die rechts abgeschnittenen den Rest, welcher noch durch den Divisor zu dividieren ist. Z. B.

98,0 : 10	15,00 : 100	24,637 : 1000
98	15	$24\frac{637}{1000}$.

Aufgaben.

1.* Gib folgende Quotienten an:

a) 24 : 4, b) 45 : 9, c) 35 : 5, d) 56 : 8,
e) 20 : 6, f) 63 : 8, g) 44 : 7, h) 32 : 5.

2.* Bestimme

a) 108 : 2, b) 318 : 3, c) 174 : 4, d) 615 : 5,
e) 416 : 6, f) 448 : 7, g) 912 : 8, h) 588 : 9.

3. Dividiere durch 8 jede der Zahlen 750, 1284, 1707, 3520, 9185.

4. a) 57933 : 9 = ? b) 170924 : 4 = ?

5. a) 915278 : 3 = ? b) 378238 : 7 = ?

6. a) 1957351 : 6 = ? b) 577306 : 8 = ?

7. a) 3420 : 10 = ? b) 1235 : 100 = ?

8. a) 13579 : 1000 = ? b) 708459 : 10000 = ?

9. Bestimme folgende Quotienten:

a) 684 : 12, b) 4399 : 83, c) 7577 : 62,
d) 15766 : 49, e) 7840 : 20, f) 25238 : 500,
g) 34463 : 370, h) 451094 : 4900, i) 32768 : 128.

10. Suche die Quotienten:

a) 5639712 : 624, b) 2823150 : 1298,
c) 1861704 : 3510, d) 21345738 : 72100,
e) 68703705 : 105, f) 20857384 : 3004,
g) 98765432 : 12345, h) 8642013570 : 56789.

11. Bestimme:

a) 70370088 : 25986, b) 1292671490 : 42086,
c) 34639215 : 39783, d) 12345678 : 57095,
e) 264808461 : 264803, f) 70251807402 : 79863.

12. Dividiere jede der Zahlen a) 78422960, b) 41065515, c) 151466112 durch jede der Zahlen p) 616, q) 2979, r) 43827.

Division mit Decimalzahlen.

§. 18. I. Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000, . . . dividiert, indem man den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach links rückt, weil dadurch jede Ziffer den 10ten, 100sten, 1000sten, . . . Theil des früheren Wertes erhält. (§. 2, Folgesatz 3). Z. B.

124·85 : 10	5·74 : 1000	83574 : 100
12·475	0·00574	835·74

II. Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividiert, und in den Quotienten den Decimalpunkt setzt, bevor man die Zehntel des Dividends in Rechnung zieht. Bleibt bei der Division ein Rest übrig, so kann man, da der Wert eines Decimalbruches durch Hinzufügen von Nullen nicht geändert wird, diesem so wie jedem folgenden Reste eine Null anhängen, und die Division fortsetzen. Z. B.

29·24 : 16 = 1·8275

13 2
44
120
80

29 Ganze dividiert durch 16 geben 1 Ganzes, und es bleiben noch 13 Ganze = 130 Zehntel; 130 + 2 = 132 Zehntel. Diese durch 16 dividiert geben 8 Zehntel, worauf noch 4 Zehntel = 40 Hundertel bleiben; 40 + 4 = 44 Hundertel. Diese durch 16 dividiert geben 2 Hundertel, und es bleiben noch 12 Hundertel = 120 Tausendtel; diese durch 16 dividiert geben 7 Tausendtel mit dem Reste 8; u. s. w.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch bei der Division zweier ganzer Zahlen, wenn am Ende ein Rest bleibt, in Anwendung bringen. Z. B.

$$\frac{2783_{00} : 4}{695{\cdot}75} \qquad 1238 : 29 = 42{\cdot}689 \ldots$$

78
200
260
280
19

Geht die Division zuletzt ohne Rest auf, so ist der Quotient vollkommen genau. Geht die Division nicht ohne Rest auf, so ist der Quotient nur angenähert und zwar um so genauer, je mehrere Decimalen man entwickelt. Wie viele Decimalen man zu suchen hat, hängt von der Beschaffenheit der Aufgabe ab.

Bedeutet der Decimalbruch z. B. Gulden, und ist er das Endergebnis der ganzen Rechnung, so reicht es hin, drei Decimalen zu entwickeln; wenn aber der Quotient nicht das Endresultat der Rechnung ist, sondern es wäre damit noch eine Multiplication vorzunehmen, so müßte er in mehreren Decimalen bestimmt werden.

Wenn die Division nicht ohne Rest aufgeht, so muß bei fortgesetzter Rechnung einer der schon einmal übriggebliebenen Reste nothwendig wieder erscheinen, und es werden daher auch im Quotienten Ziffern, die schon einmal da gewesen sind, in derselben Ordnung wiederkehren. Z. B.

307 : 3 = 102·33 . . .

07
10
10
1

3 : 22 = 0·13636 . . .

30
80
140
80
140
8

Ein Decimalbruch, in welchem eine Ziffer oder eine Reihenfolge von Ziffern immer wiederkehrt, heißt ein periodischer, und die Reihe der sich wiederholenden Ziffern die Periode. In dem ersten der obigen zwei Beispiele besteht die Periode aus einer Ziffer (3), im zweiten aus 2 Ziffern (36).

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und die letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen. Es ist demnach

307 : 3 = 102·3̇, 3 : 22 = 0·1̇3̇6̇.

III. Die Division durch einen Decimalbruch kann in eine Division durch eine ganze Zahl verwandelt werden, indem

man Dividend und Divisor mit 10, 100, 1000, . . . multipliciert, je nachdem der Divisor 1, 2, 3, . . . Decimalen hat. Z. B.

$126 : 0{\cdot}9 = 1260 : 9 = 140$

$5{\cdot}696 : 3{\cdot}2 = 56{\cdot}96 : 32 = 1{\cdot}78$

$2{\cdot}5415 : 0{\cdot}037 = 2541{\cdot}5 : 37 = 68{\cdot}689.$

IV. Ein anderes allgemeines Verfahren für die Division der Decimalbrüche beruhet auf folgenden Betrachtungen: Die Ziffernreihe des Quotienten hängt bloß von der Ziffernreihe des Dividends und jener des Divisors ab; man bekommt daher die auf einander folgenden Ziffern des Quotienten, wenn man im Dividend und im Divisor die Decimalpunkte ganz unberücksichtigt läßt, und die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Der Stellenwert der Ziffern ist sodann vollkommen bestimmt, wenn man den Wert der ersten oder höchsten Ziffer kennt, da der Stellenwert jeder folgenden Ziffer der 10te Theil jenes der vorhergehenden ist. Bei der Division ganzer Zahlen hat bekanntlich die erste Ziffer im Quotienten denselben Stellenwert, wie die niedrigste Ziffer im ersten Theildividend, oder was einerlei ist, wie diejenige Ziffer, von welcher das Product aus der ersten Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert wird. Kommen nun im Divisor nebst den Ganzen auch Decimalen vor, so ändert dieses an dem Stellenwerte der ersten Ziffer im Quotienten nichts; es wird also auch da die erste Ziffer des Quotienten gleichen Stellenwert mit derjenigen Ziffer des Dividends haben, von welcher das Product aus der ersten Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert werden muß.

Es ergibt sich daher für das Dividieren der Decimalbrüche folgendes allgemeine Verfahren:

Man bestimme die erste Ziffer des Quotienten, ohne auf die Decimalpunkte Rücksicht zu nehmen. Sodann multipliciere man mit dieser Ziffer den Divisor, subtrahiere das Product von dem ersten Theildividende, und sehe, von welcher Stelle des Dividends das Product aus jener Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert wird, oder, wenn der Divisor keine Einer hat, von welcher Stelle jenes Product subtrahiert werden müßte, wenn die Einer vorhanden wären. Die erste Ziffer des Quotienten bedeutet nun Einheiten derselben Ordnung, wie die Ziffer des Dividends, von welcher das genannte Product zu subtrahieren ist. Die weitere Division wird wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Z. B.

1) $15687{\cdot}707 : 32{\cdot}9 = 476{\cdot}83$

2527
224 7
27 30
987
0

Da hier das Product aus der ersten Ziffer 4 des Quotienten mit den Einern 2 des Divisors von der Ziffer 6 des Dividends, welche den Wert Hunderte hat, subtrahiert wird, so bedeutet die 4 im Quotienten Hunderte, und es müßen noch zwei ganze Stellen, Zehner und Einer, folgen, deren Stellen man vor der wirklichen Bestimmung der dahin kommenden Ziffern punktiert; die Rechnung steht daher im Anfange:

$15687{\cdot}707 : 32{\cdot}9 = 4\ . \ .$

252

Hierauf wird, ohne weiter auf die Decimalpunkte Rücksicht zu nehmen, die Division wie bei ganzen Zahlen fortgesetzt.

2) $3{\cdot}4156 : 82{\cdot}7 = 0{\cdot}0413\ . \ . \ .$

1076
2490
9

Das Product aus der ersten Ziffer 4 des Quotienten und den Einern 2 des Divisors wird hier von der Ziffer 1 des Dividends, also von den Hunderteln, subtrahiert; 4 kommt daher an die Stelle der Hundertel.

3) $2{\cdot}5882 : 0{\cdot}123 = 21{\cdot}042\ . \ . \ .$

125
520
280
34

Hier wird das Product aus der ersten Ziffer 2 des Quotienten mit den Zehnteln 1 des Divisors von den Einern 2 des Dividends subtrahiert; wenn daher der Divisor auch Einer enthielte, so müßte das Product derselben mit 2 von den Zehnern des Dividends subtrahiert werden; darum bedeutet die erste Ziffer 2 des Quotienten Zehner.

Aufgaben.

1. a) $785{\cdot}34 : 100 = ?$ b) $23{\cdot}7 : 1000 = ?$

2. Dividiere die Zahlen $3{\cdot}085$, $317{\cdot}91$, $0{\cdot}87$ durch 10, 100, 1000, 10000.

3. a) $135{\cdot}873 : 9 = ?$ b) $2{\cdot}7835 : 5 = ?$

4. a) $195{\cdot}935 : 26 = ?$ b) $0{\cdot}73 : 25 = ?$

5. a) $9{\cdot}1415 : 16 = ?$ b) $121{\cdot}78 : 400 = ?$

6. a) $168 : 3{\cdot}5 = ?$ b) $0{\cdot}589 : 0{\cdot}57 = ?$

7. a) $12{\cdot}345 : 0{\cdot}0047 = ?$ b) $48{\cdot}45 : 0{\cdot}089 = ?$

8. a) $8 : 0{\cdot}123 = ?$ b) $346{\cdot}25 : 64{\cdot}8 = ?$

9. a) $1792{\cdot}325 : 25 = ?$ b) $0{\cdot}9537 : 29 = ?$

10. a) $1739 : 48 = ?$ b) $1784 : 2957 = ?$

11. a) $38{\cdot}9008 : 5{\cdot}23 = ?$ b) $83{\cdot}087 : 5{\cdot}37 = ?$

12. a) $123{\cdot}5 : 3{\cdot}84 = ?$ b) $9{\cdot}1342 : 208{\cdot}3 = ?$

13. a) $0{\cdot}3126 : 0{\cdot}0134 = ?$ b) $343{\cdot}71 : 1{\cdot}127 = ?$

14. a) 0·8756 : 4·322 = ? b) 137·84 : 7·91 = ?
15. a) 15·3678 : 0·9125 = ? b) 0·81074 : 0·009157 = ?
16. a) 39562·478 : 4279 = ? b) 5701·7926 : 3935 = ?
17. a) 0·2368 : 72369 = ? b) 3781 : 287·453 = ?
18. a) 348 : 2·9156 = ? b) 1000 : 3·45016 = ?
19. a) 0·0494 : 2·5786 = ? b) 781·4 : 27 9847 = ?

Rechnungsvortheile bei der Division und Multiplication.

§. 19. 1. Durch 25 wird dividiert, indem man das 4fache des Dividends durch 100 dividiert. Z. B.

1) 34625 : 25 = 1385·00

2) 153723 : 25 = 6148·92

2. Durch 125 wird dividiert, indem man das 8fache des Dividends durch 1000 dividiert. Z. B.

1) 579 625 : 125 = 4637·000

2) 21 579 : 125 = 172 632

3. Wenn sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen läßt, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend zuerst durch den einen Factor, und das Ergebnis noch durch den andern Factor. Z. B.

1) 466320 : 48 = 6) 77720 8) 9715

2) 330579 : 45 = 5) 66115·8 9) 7346·2

4. Mit Hilfe der Division läßt sich auch die Multiplication mit 25 oder 125 sehr vortheilhaft verrichten. Statt mit 25 zu multiplicieren, multipliciert man mit 100, und dividiert das Product durch 4; statt mit 125 zu multiplicieren, wird mit 1000 multipliciert, und das Product durch 8 dividiert. Z. B.

1) $5986_{00} \times 25 = 149650$

2) $3795_{000} \times 125 = 474375$

Aufgaben.

Berechne mit Hilfe der Vortheile:

1. a) 930450 : 25, b) 2369575 : 25, c) 379420 : 25,
d) 7823·76 : 25, e) 92·7518 : 25, f) 7·8835 : 0·25.

2. a) 524625 : 125, b) 317890 : 125,
c) 379·8125 : 125, d) 80·74425 : 12·5,
3. a) 49320 : 72, b) 784345 : 35, c) 100800 : 28,
d) 8872472 : 56, e) 62222 202 : 6·3, f) 29861·286 : 0·42.
4. a) 123456 × 25, b) 7903·124 × 1·25,
c) 494232 × 125, d) 137·057 × 0·125.
5. 47273394 : 54 + 811475 : 25.
6. 2373750 : 12·5 — 217580·976 : 0·72.
7. 783400 : 25 + 6·377 × 125.
8. 43782·695 × 25 — 73458213·375 : 125.

Division einnamig benannter Zahlen.

§. 20. Bei der Division, wenn sie als Theilung angewendet wird, kann bloß der Dividend benannt, der Divisor aber muß unbenannt sein, und der Quotient erhält den Namen des Dividends. Wird die Division als Vergleichung angewendet, so sind Dividend und Divisor benannt, und zwar müßen sie gleichnamig sein; als Quotienten erhält man eine unbenannte Zahl.

Aufgaben.

1.* 9 Hektoliter kosten 216 fl.; wie viel kostet 1 Hektol.?

1 Hektol. ist der 9te Theil von 9 Hektol.; daher kostet 1 Hektol. nur den 9ten Theil von 216 fl.; man hat also:

216 fl. : 9 = 24 fl.

2.* 8 Hektoliter Wein kosten a) 112 fl., b) 136 fl., c) 176 fl., d) 232 fl.; wie hoch kommt 1 Hektoliter zu stehen?

3.* Ein Beamter hat einen Jahresgehalt von 1890 fl.; wie viel bezieht er monatlich?

4. Eine Summe von 4560 fl. ist unter 19 Personen zu gleichen Theilen zu vertheilen; wie viel bekommt jede Person?

5. Für ein Unternehmen sind 1204 fl. erforderlich; wie viel Personen müßen daran theilnehmen, damit auf eine Person die Auslage von 14 fl. komme?

So viele Personen, als wie oft 14 fl. in 1204 fl., oder 14 in 1204 enthalten ist, also 1204 : 14 = 86 Personen.

6.* Der Umfang eines Locomotivrades ist 2^m; wie viele Umdrehungen muß dasselbe machen, um ein Kilometer zurückzulegen?

7. Eine Handlungsgesellschaft gewinnt 5184 fl.; wenn nun davon auf jeden Theilnehmer 324 fl. entfallen, wie viele Personen waren in der Gesellschaft?

8. Ein Capital trägt jährlich 658·35 fl. Zins; wie viel Zins trägt es monatlich, wie viel täglich?

9. 45 österr. Gulden enthalten 500 Gramm feinen Silbers; wie viel ist 1 Gramm feinen Silbers wert?

10. 25 Ar kosten 304·37 fl., wie hoch kommt ein Ar?

11. 67 Hektoliter Wein kosten 2278 fl.; wie viel kostet 1 Hektoliter, wie viel 1 Liter?

12. 5800 Kilogr. einer Waare kosten 728·2 fl.; wie viel kostet 1 Kilogr.?

13. 5·135 Ctr. einer Waare kosten in Berlin 215·26 Mark; wie hoch kommt 1 Ctr.?

14. Die Anlagekosten einer Eisenbahn, welche 56·84 Kilometer lang ist, betragen 4256000 fl.; wie groß ist das Anlagecapital für ein Kilometer?

15. Eine Locomotive legte in 3·28 Stunden 100·275 Kilometer zurück; wie viel Kilometer legte sie bei gleichförmiger Bewegung stündlich zurück?

16.* 12 Meter Tuch kosten 48 fl., wie viel kosten 19 Meter?

12 Meter kost. 48 fl.
1 „ „ 48 fl. : 12 = 4 fl.
19 „ „ 4 fl. × 19 = 76 fl.

17. 32 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; in wie viel Tagen werden 24 Arbeiter mit der Arbeit fertig?

32 Arbeiter 6 Tage,
1 „ 6 Tage × 32 = 192 Tage.
24 „ 192 Tage : 24 = 8 Tage.

18. 75 Kilogr. Reis werden mit 21 fl. bezahlt; wie viel Reis bekommt man für 9 fl.?

19. 15 Pferde kommen mit einem gewissen Vorrathe an Futter 28 Wochen lang aus; wie lang kommen 21 Pferde mit demselben Vorrathe aus?

20. Wie viel kosten 27 Hektoliter Wein, wenn 28 Hektoliter mit 655·2 fl. bezahlt werden?

21. Jemand kauft 8 Hektoliter Wein à 15 fl., 10 Hektoliter à 18 fl., und 15 Hektoliter à 24 fl.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 Hektoliter zu stehen?

22. Eine Halle, welche 805^{cm} lang und 624^{cm} breit ist, soll mit Platten von 23^{cm} Länge und 20^{cm} Breite belegt werden; wie viele solcher Platten sind erforderlich?

23. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang 15^{dm} beträgt? (§. 15, Aufg. 23.)

24. Der Umfang eines Kreises ist a) $1{\cdot}2^{m}$, b) $5{\cdot}18^{m}$, c) $58{\cdot}935^{cm}$; wie groß ist der Halbmesser?

25. Ein runder Tisch hat für 8 Personen Platz; wie groß ist sein Durchmesser, wenn auf eine Person 8^{dm} des Umfanges gerechnet wird?

26. Nach der letzten Volkszählung hat die österreichisch-ungarische Monarchie 35943592 Einwohner, von denen im Durchschnitte 5774 auf 1 $\square^{Mm}$ kommen; wie viel $\square^{Mm}$ beträgt der Flächeninhalt der ganzen Monarchie?

V. Abgekürzte Rechnung mit Decimalzahlen.

§. 21. Ein Decimalbruch, welcher einen bestimmten Wert nicht völlig genau, sondern bloß *näherungsweise* darstellt, heißt ein *unvollständiger* Decimalbruch, im Gegensatze zu einem *vollständigen*, dessen Bruchstellen einen bestimmten Wert vollkommen genau ausdrücken.

Sowohl bei vollständigen als unvollständigen Decimalbrüchen begnügt man sich, die Rechnungsresultate bis auf eine bestimmte Decimalstelle genau anzugeben. Den Fehler, den man dabei durch die Weglassung der überflüssigen Decimalen begeht, pflegt man dadurch so klein als möglich zu machen, dass man die letzte beibehaltene Decimalziffer um 1 erhöht, *corrigiert*, wenn die erste wegzulassende Ziffer 5 oder größer als 5 ist, dagegen die letzte Decimalziffer unverändert läßt, wenn die erste wegzulassende Ziffer kleiner als 5 ist. So setzt man, wenn auf 3 Decimalstellen abgekürzt wird, 9·873 stat 9·87294 . . ., und 4·016 statt 4·01641 . . .

Bei Rechnungen mit *periodischen* Decimalbrüchen werden so viele Ziffern der Periode in Anspruch genommen, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt.

Abgekürzte Addition und Subtraction.

§. 22. Um die Summe oder die Differenz gegebener Decimalbrüche auf weniger Stellen, als diese Brüche enthalten, anzugeben, reicht es hin, eine Stelle mehr zu berechnen, als verlangt werden, und dann

die letzte Ziffer wegzulassen, nachdem darnach die vorhergehende Ziffer richtig gestellt wurde. Z. B.

Auf 3 Stellen		Auf 4 Stellen	
5·178	4239	3·9742	634
7·342	1361	1·0583	9148
8·574	3076	2·9158	7 . . .
21·094	8 . . .	Rest = 2·9159.	

Summe = 21·095.

Abgekürzte Multiplication.

§. 23. Wird z. B. 5·97031 mit 24·68 multipliciert, so hat man nach der gewöhnlichen Multiplicationsmethode

5·97031 × 24·68	
119406	2
23881	24
3582	186
477	6248
147·347	2508

Soll nun das Product bloß in drei Decimalen, also bis auf die Tausendtel herab, entwickelt werden, so ist die hier rechts des Striches dargestellte Rechnung überflüssig, und man wird, um dieselbe zu ersparen, mit jeder Ziffer des Multiplicators nur jene höheren Ziffern des Multiplicands multiplicieren, deren Producte auf die Stellen Einfluss haben, die im Producte verlangt werden. — Wenn man mit 2 Zehnern multipliciert, so wird man, um Tausendtel zu erhalten, offenbar bei der Ziffer 3 des Multiplicands, welche Zehntausendtel bedeutet, zu multiplicieren anfangen; denn 0·0003 × 20 = 0·006. Die Ziffer 2 des Multiplicators, mit welcher der Multiplicand von der Ziffer 3 aufwärts multipliciert wird, wollen wir daher unter jene Ziffer 3 setzen. — Wird mit 4 Einern multipliciert, so muß man, um Tausendtel zu erhalten, bei der Ziffer 0 des Multiplicands, welche den Wert Tausendtel hat, zu multiplicieren anfangen; man setzt daher 4 unter die Ziffer 0 des Multiplicands. Die Producte aus 4 mit den zwei niedrigsten Ziffern 1 und 3 des Multiplicands enthalten Hundertausendtel und Zehntausendtel, welche man nicht braucht; da jedoch in dem letztern Producte 12 nur die Einer 2 Zehntausendtel, die Zehner 1 aber Tausendtel vorstellen, so darf man von diesem Producte auch nur 2 vernachlässigen, 1 aber muß zu dem Producte aus 0 und 4, welches Tausendtel gibt, als Correctur addiert werden. —

5·97031
8642
119406
23881
3582
478
147·347

Mit 6 Zehnteln muß man bei der Ziffer 7 des Multiplicands zu multiplicieren beginnen, um Tausendtel zu erhalten; denn $0{\cdot}07 \times 0{\cdot}6 = 0{\cdot}042$; 6 wird daher unter die Ziffer 7 des Multiplicands geschrieben. — Hat man endlich mit 8 Hundertel zu multiplicieren, so wird man, um Tausendtel zu bekommen, bei der Ziffer 9 des Multiplicands zu multiplicieren anfangen; es ist nämlich $0{\cdot}9 \times 0{\cdot}080 = 0{\cdot}072$; die 8 schreibt man daher unter die Ziffer 9 des Multiplicands. Die niedrigeren Ziffern 7, 0, 3 und 1 des Multiplicands haben auf die im Producte verlangten Decimalen keinen Einfluss, nur das Product aus 7 und 8 muß rücksichtlich der sich ergebenden Zehner berücksichtiget werden; da nämlich in 56 die Zehner 5 Tausendtel bedeuten, so muß man diese 5 Zehner, oder weil 56 näher an 60 als 50 liegt, richtiger 6 Zehner als Tausendtel zu dem Producte aus 9 und 8 als Correctur addieren.

Betrachtet man die Stellung der Ziffern des Multiplicators bei der obigen zweiten Anschreibweise, so sieht man, dass die Ziffer der Einer des Multiplicators, nämlich 4, unter der dritten Decimale 0, also unter derjenigen Decimalstelle des Multiplicands steht, mit welcher das Product abbrechen soll, und dass die übrigen Ziffern des Multiplicators daneben in umgekehrter Ordnung erscheinen.

Bei der abgekürzten Multiplication der Decimalbrüche verfahre man daher nach folgenden Regeln:

1. Man setze die Einer des Multiplicators unter die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands, welche noch im Producte vorkommen soll, und schreibe daneben die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung.

2. Man multipliciere mit der ersten rechts vorkommenden Ziffer des Multiplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, schreibe jedoch dieses Product nicht an, sondern merke sich davon nur die nächsten Zehner, welche die Correctur bilden; dann multipliciere man die gerade darüberstehende Ziffer des Multiplicands, addiere zu dem Producte die Correctur, und fange hier das abgekürzte Theilproduct zu schreiben an; nun werden nach der Reihe auch die weiter aufwärts folgenden Ziffern des Multiplicands multipliciert. Eben so multipliciert man dann mit der zweiten, dritten, . . . Ziffer des umgekehrten Multiplicators, und schreibt die einzelnen dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte als Summanden unter einander.

3. Man addiere die abgekürzten Theilproducte, und schneide in der Summe die verlangte Anzahl Decimalen ab.

Soll die letzte Decimale im Producte vollkommen richtig sein, so entwickele man um eine Decimale mehr, als ihrer genau sein sollen.

Beispiele.

1. Entwickle das Product aus 5·21567 und 23·785 in 3 Decimalen.

5·21567 × 23·785
5 8732
10 4313
1 5647
3651
417
26
124·054

Man setzt die Einer 3 des Multiplicators unter die dritte Decimale 5 des Multiplicands, schreibt die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung und multipliciert:

2mal 7 ist 14, bleibt 1 zur Correctur; 2mal 6 ist 12, und 1 ist 13, 3 angeschrieben, bleibt 1; 2mal 5 ist 10, und 1 ist 11 u. s. w.

3mal 6 ist 18, bleibt 2 zur Correctur; 3mal 5 ist 15, und 2 ist 17, 7 angeschrieben, bleibt 1; u. s. w.

7mal 5 ist 35, bleibt 4 zur Correctur; 7mal 1 ist 7, und 4 ist 11, 1 angeschrieben, bleibt 1; u. s. w.

2. Multipliciere 245·31 mit 0·00956 so, dass im Producte 4 Decimalen erscheinen.

$245{\cdot}31_{00} \times 0{\cdot}00956$
65 9000
2207 8
122 7
14 7
2·345 2

Hier kommen die Einer 0 des Multiplicators unter die vierte Decimalstelle des Multiplicands; die fehlenden Decimalen rechts im Multiplicand denkt man sich mit Nullen ersetzt.

Aufgaben.

Bestimme abgekürzt folgende Producte:

1. 0·08245 × 13·708 in 3 Decimalen;
2. 69·432 × 3·004 „ 4 „
3. 39·208 × 5·647 „ 2 „
4. 34·56 × 0·00207 „ 2 „
5. 23·8047 × 3·2 „ 3 „
6. 0·59884 × 0·753 „ 3 „
7. 6·70145 × 0·87 „ 4 „
8. 975·12378 × 39·13908 „ 4 „
9. 7·5319 × 0·4052 × 6·8312 „ 4 „
10. 1·05 × 1·05 × 1·05 × 1·05 „ 5 „
11. Es soll 1·04 6mal als Factor gesetzt und das Product in 6 Decimalen entwickelt werden.

12. Setze 1·02 10mal als Factor und bestimme das Product in 6 Decimalen.

13. Die Zahl 1·045 soll 2mal, 3mal, 4, 5, . . . 9, 10mal als Factor gesetzt, und das jedesmalige Product in 5 Decimalen entwickelt werden.

14. Welche Producte in 6 Decimalen erhält man, wenn 1·06 8mal, 1·055 12mal, 1·0275 15mal als Factor gesetzt wird?

15. Suche die Ganzen des Productes

$$124{\cdot}256 \times 308{\cdot}492 \times 98{\cdot}073.$$

16. Wie viel kosten 37·3456 Hektar, wenn ein Hektar 941·34 fl. kostet? (3 Decimalen.)

17. Ein Capital gibt jährlich 43·578 fl. Interessen; wie viel in 2·862 Jahren? (3 Dec.)

18. Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, welches 13·175^{m} lang und 8·192^{m} breit ist? (3 Dec.)

19. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 2·1345^{m} ist? (3 Dec.)

20. Es soll a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt einer Kugel gefunden werden, deren Halbmesser 4·123^{dm} ist. (3 Dec.)

21. Eine englische Silberkrone wiegt 28·276 Gramm (Schrot) und enthält 0·925 feines Silbers; wie groß ist das Gewicht des darin enthaltenen feinen Silbers (Korn)? (3 Dec.)

22. Eine Toise = 1·949036 Meter, die Länge einer geographischen Meile beträgt nach Bessel 3807·235 Toisen; wie viel Meter hat eine geographische Meile? (2 Dec.)

23. Der Flächeninhalt der österreichisch-ungarischen Monarchie beträgt 10816·94 österr. □Meilen; wie viel sind dieß □Myriameter, da 1 österreichische □Meile = 0·5754642 □^{Mm} ist? (2 Dec.)

Abgekürzte Division.

§. 24. Bei der abgekürzten Division der Decimalbrüche wird folgendes Verfahren angewendet:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und bestimme ihren Stellenwert. Da der Quotient eine bestimmte Anzahl Decimalen enthalten soll, so ist aus dem Stellenwerte der ersten Ziffer auch bekannt, wie viele Ziffern der verlangte Quotient im Ganzen haben soll.

2. Man schneide im Divisor von der Linken angefangen so viele Ziffern ab, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll; diese bilden den abgekürzten Divisor. Hat der Divisor nicht so viele Ziffern, als

ihrer abgeschnitten werden sollen, so tritt die abgekürzte Division erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

3. Man behalte auch im Dividend nur so viele Ziffern von der höchsten angefangen, als ihrer der Quotient haben soll, oder um eine mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividends nicht enthalten ist; jene beibehaltenen Ziffern sind der abgekürzte Dividend.

4. Man dividiere nach der gewöhnlichen Divisionsweise so lange fort, bis die letzte Ziffer des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde; hierauf schneide man bei jeder folgenden Division die niederste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab; die jedesmal gefundene Ziffer des Quotienten multipliciere man dann zuerst mit der höchsten im Divisor weggelassenen Ziffer und zähle die aus diesem Producte erhaltenen Zehner als Correctur zu dem ersten eigentlichen Producte dazu.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

Beispiele.

1) Der Quotient 83·423 : 31·586 soll in 4 Decimalen bestimmt werden.

83·423 : 3,1·,5,8,6 = 2·6411

20 251
1 299
36
4

Die erste Ziffer 2 des Quotienten bedeutet Einer; daher wird der Quotient im ganzen 5 Ziffern enthalten; es werden daher der Dividend und der Divisor, sowie sie gegeben sind, auch schon als abgekürzt zu betrachten sein. Nachdem das Product aus 2 und dem Divisor von dem Dividende subtrahiert wurde, schneidet man, anstatt dem Reste 20251 eine Null anzuhängen, im Divisor die niederste Ziffer 6 weg, und dividiert 20251 durch 1538; sodann multipliciert man: 6mal 6 ist 36, bleibt 4 zur Correctur; 6mal 8 ist 48, und 4 (Correctur) ist 52 und **9** ist 61, u. s. f.

2) Es soll der Quotient 3·79357 : 13·8594 in 3 Decimalen gesucht werden.

3·79,357 : 1,3·,8,594 = 0·274

102
5

Da hier die erste Ziffer 2 des Quotienten Zehntel bedeutet, so muß man im Quotienten 3 Ziffern entwickeln; man behält daher im Dividend und im Divisor nur die drei höchsten Stellen bei und dividiert dann abgekürzt.

3) Der Quotient 12345·6352 : 0·789 soll in 3 Decimalen entwickelt werden.

12345·635,2 : 0·7,8,9 = 1564·719

4455
510 6
37 23
5 675
152
73

Die erste Ziffer 1 im Quotienten bedeutet Tausende; der Quotient wird daher 4 Ganze und 3 Decimalstellen, zusammen 7 Ziffern enthalten; es soll also der abgekürzte Divisor 7, und der abgekürzte Dividend 8 Ziffern haben; da aber der Divisor 3ziffrig ist, so tritt die abgekürzte Division erst dann ein, nachdem die niederste beibehaltene Ziffer 5 des abgekürzten Dividends in Rechnung gezogen wurde.

Aufgaben.

Bestimme abgekürzt nachstehende Quotienten:

1. 12·37 : 3·0945 in 3 Decimalen
2. 0·8912 : 2·59 „ 2 „
3. 372·934 : 18·7 „ 4 „
4. 44·1937 : 0·8536 „ 3 „
5. 748 : 9·13457 „ 5 „
6. 0·9275 : 0·31 „ 4 „
7. 39·644 : 417 „ 4 „
8. 1 : 3·14159 „ 5 „
9. 309·27 : 0·0987 „ 2 „

10. Der höchste Berg in Asien, der Everest, erstreckt sich 27212 Wiener Fuß über den Meeresspiegel; wie groß ist seine Höhe a) im Metermaße, b) im englischen Maße? (2 Decim.)

11. Jemand ist einen Betrag von 2000 fl. nach 15 Jahren zu bezahlen schuldig; wenn er nun mit jedem Gulden, den er jetzt zahlt, 2·078928 fl. jener Schuld berichtiget, wie viel muß er sogleich zahlen, um die obige Schuld zu tilgen? (3 Dec.)

12. Aus einem halben Kilogramm feinen Goldes werden 86·1111 Achtguldenstücke oder auch 68·2831 englische Sovereigns geprägt; wie viel Achtguldenstücke ist ein Sovereign wert? (3 Dec.).

13. Der Umfang des Erdäquators beträgt 5400 geogr. Meilen; wie groß ist der Durchmesser des Aequators? (2 Dec.)

Wiederholungsaufgaben.

1.* 88 + 20; 124 + 70; 359 + 50; 785 + 200.
2.* 76 — 40; 371 — 50; 939 — 70; 644 — 300.

3.* 68 + 57; 144 + 56; 477 + 38; 759 + 63.
4.* 124 — 45; 362 — 85; 531 — 83; 746 — 99.
5.* 3mal 95, 124, 213, 226, 312, 434, 518.
6.* 7mal 43, 75, 137, 214, 338, 509, 723.
7.* 12mal 18, 23, 37, 45, 57, 73, 84, 92.
8. a) 12138 : 51 = ? b) 284385 : 83 = ?
9. a) 218560 : 53 = ? b) 259695 : 87 = ?

10. Multipliciere mit 2, 3, 4, . . 8, 9 jede der Zahlen:
a) 2407, 39281, 57964, 448756, 628039, 1084658;
b) 3948, 28056, 65547, 125347, 741852, 1826051.

11. Ein Cub.^{m} Bauholz kostet 37·84 fl.; wie viel kosten 7·53, 17·24, 33·135, 0·247 Cub.^{m}?

12. Ein cylinderförmiger Kessel ist 18^{dm} tief, seine Grundfläche beträgt 50□^{dm}; wie groß ist der Inhalt des Kessels?

13. Jemand, der bereits 27·345 Hektar Ackergrund besitzt, kauft noch zwei Aecker von 2·378 Hektar und 3·134 Hektar; wie viel Ackergrund besitzt er nun?

14. Die Erfindung des Papiers fällt in das Jahr 1240, jene des Schießpulvers in das Jahr 1356, jene des Fernrohres in das Jahr 1608, und die Erfindung der Dampfmaschinen in das Jahr 1699; wie lange ist es seit jeder dieser Erfindungen?

15. Böhmen hat an Ackerland 2496997·476 Hektar, an Weingärten 1069·205 Hektar, an Wiesen und Gärten 627840·096 Hektar, an Weiden 400406·792 Hektar, an Waldungen 1508785·914 Hektar, und an nicht productiver Bodenfläche 160479·515 Hektar; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Kronlandes?

16. Multipliciere mit Anwendung von Vortheilen:
a) 1237, 5229, 13·894, 98785, 792·487 mit 11;
b) 82256, 54225, 173·48, 9·32537 mit 25.

17. Bestimme ebenso folgende Producte:
a) 57108 × 19, 47834 × 301, 239673 × 193;
b) 67279 × 35, 554437 × 54, 12·7546 × 6·4;
c) 48182 × 198, 376·45 × 397, 0·92705 × 9992.

18. Bestimme mit Anwendung von Vortheilen folgende Quotienten:
a) 17725 : 25, 378·75 : 2·5, 598125 : 125;
b) 85608 : 24, 125·86 : 35, 4727·3394 : 5·4.

19. A liegt 7·825^{m} höher als B, B 12·15^{m} höher als C, C 9·023^{m} höher als D; um wie viel liegt A höher als D?

20. Wenn 1 Hektar Ackergrund durchschnittlich 13 Hektoliter Getreide liefert, wie groß ist das Erträgnis von a) 9 Hektar? b) 15 Hektar? c) 20 Hektar? d) 78 Hektar?

21. Eine Gasflamme verbraucht in 210 Stunden 35 Cub.^{m} Gas; 1 Cub.^{m} Gas kostet 18 Kr. a) Wie viel Gas braucht eine Gasflamme in einer Stunde, b) wie viel kostet sie?

22. Wie groß ist der Umfang einer kreisrunden Tischplatte, wenn der Durchmesser derselben $1{\cdot}76^{m}$ ist?

23. Ein rechteckiger Kasten hat $2{\cdot}36^{m}$ Länge, $1{\cdot}25^{m}$ Breite und $0{\cdot}985^{m}$ Höhe und ist mit Steinkohlen gefüllt; wenn nun 1 Cubikmeter Steinkohlen 12·8 metr. Ctr. und der Kasten allein 0·59 Ctr. wiegt, wie groß ist das ganze Gewicht?

24.* $214 + 325$; $407 + 279$; $652 + 264$; $576 + 168$.

25.* $269 - 127$; $385 - 241$; $727 - 452$; $901 - 783$.

26.* Wie groß ist der 5te, 7te, 9te Theil von 126, 315, 405, 245, 343, 576, 315, 945?

27.* Nimm 15, 24, 32mal 51, 52, 53, . . bis 60.

28. Wie viel ist $78945621 \times 8 + 3109207 \times 9$?

29. Um wie viel ist 35701924×7 größer als 40189370×6?

30. $355{\cdot}35924 \times 31{\cdot}579 + 85{\cdot}2056 \times 24{\cdot}806 = ?$

31. $93{\cdot}62853 \times 6450 - 82{\cdot}517425 \times 5349 = ?$

32. Dividiere die Zahl 4865·88 a) durch 66, b) durch 4·62, c) durch 0·516.

33. Dividiere durch 4·18 die Zahlen a) 340753, b) 9864·8, c) 58·1248.

34. Eine Kanonenkugel legt in 1 Secunde 0·174 Meilen, die Erde in ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne in 1 Secunde 4·113 Meilen zurück; wie vielmal ist die letztere Geschwindigkeit so groß als die erstere?

35. Ein vierkantiges, durchaus gleich weites Gefäß enthält 2·25 Cub.^{m}; wenn nun die Höhe $0{\cdot}5^{m}$ beträgt, wie groß ist die Bodenfläche?

36. Addiere folgende Zahlen zuerst in senkrechter, dann in wagrechter Richtung:

$12345 + 23456 + 34567 + 45678 + 56789$
$32408 + 18297 + 73582 + 15965 + 81425$
$43962 + 73582 + 15964 + 37891 + 42167$
$86431 + 29505 + 23568 + 53156 + 83118$
$64536 + 78327 + 76874 + 87654 + 25936$
$38697 + 68979 + 28949 + 89638 + 96587$

37. a) 34785 — 23957 =? b) 104670 — 30574 =?

38. a) 8315639 — 2434856 =? b) 20635121 — 845915 =?

39. In einem Fasse befinden sich 228·5 Liter Oel; wie viel beträgt dessen Gewicht, wenn das Oel 0·913mal so schwer ist als das Wasser und wenn 1 Liter Wasser 1 Kilogramm wiegt?

40. Ein freifallender Körper legt in der 1. Secunde 4·9^{m}, in jeder folgenden Secunde 9·8^{m} mehr als in der vorhergehenden zurück; welche Strecke legt er a) in der 2., 3., 4. Secunde, b) in allen vier Secunden zurück?

41. Suche nach der abgekürzten Multiplication:

a) 9·057 × 2·876, 27·39 × 3·1416 (3 Decim.);

b) 13·4794 × 5·93, 304·279 × 0·053 (2 Decim.);

c) 6·9754 × 0·2844, 7·961 × 8·5432 (4 Decim.).

42. Suche nach der abgekürzten Division:

a) 83·423 : 31·586, 549·0021 : 48·5 (3 Decim.)

b) 0·9275 : 0·3702, 3·79357 : 23 8594 (4 Decim.);

c) 100 : 3·1416, 0·84637 : 0·00163 (2 Decim.).

43. Die im Wiener Reichsrath vertretenen Länder haben 3001·91 □^{Mm}, die Länder der ungarischen Krone 3222·85□^{Mm} Flächeninhalt; um wie viel sind die letzteren Länder größer als die ersteren?

44. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gab A 2956·6 fl., B um 532·2 fl. mehr als A, und C um 463·2 mehr als B. Der Gewinn aus diesem Geschäfte wurde so vertheilt, daß A 739·15 fl. B um 133·05 fl. mehr als A, und C um 116·05 fl. mehr als B bekam. Wie viel haben alle zusammen eingelegt, und wie groß ist der ganze Gewinn gewesen?

Zweiter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 25. Wenn eine Zahl durch eine andere dividiert, eine ganze Zahl zum Quotienten gibt, so heißt die erste Zahl durch die zweite theilbar. Z. B. 18 ist durch 3 theilbar, weil 18 durch 3 dividiert die ganze Zahl 6 zum Quotienten gibt, und kein Rest übrigbleibt; 18 ist nicht theilbar durch 5, weil 5 in 18 nicht ohne Rest enthalten ist.

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so heißt die erstere Zahl ein Vielfaches von der zweiten, und diese ein Maß von jener. So ist 18 ein Vielfaches von 3, und 3 ein Maß von 18.

Es gibt Zahlen, welche durch keine andere Zahl theilbar sind, als durch sich selbst und durch die Einheit; z. B. 1, 3, 13, 37. Solche Zahlen heißen einfache oder Primzahlen, zum Unterschiede von den zusammengesetzten Zahlen, welche außer durch 1 und durch sich selbst auch noch durch andere Zahlen theilbar sind. So ist 18 eine zusammengesetzte Zahl, weil sie außer durch 1 und 18 auch durch 2, 3, 6, 9 theilbar ist.

1. Kennzeichen der Theilbarkeit.

§. 26. 1. Jede Zahl, welche am Ende 1, 2, 3 . . . Nullen hat, ist ein Vielfaches von 10, 100, 1000, . . . und daher durch 10, 100, 1000, . . . theilbar.

2. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, deren einer ein Vielfaches von 10, der andere die Ziffer der Einer enthält; z. B. $57876 = 57870 + 6$; $21335 = 21330 + 5$.

Da jedes Vielfache von 10 durch 10, somit auch durch 2 und durch 5 theilbar ist, so hängt es nur von der Ziffer der Einer ab, ob die ganze Zahl durch 2 oder 5 theilbar ist.

Ist die Ziffer der Einer durch 2 theilbar, d. i. eine der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl selbst durch 2 theilbar. Man nennt die Zahlen, welche Vielfache von 2 sind, gerade Zahlen, während die übrigen, als 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, . . . ungerade Zahlen heißen.

Ist die Ziffer der Einer durch 5 theilbar, d. i. stehet an der niedrigsten Stelle 0 oder 5, so ist die Zahl selbst durch 5 theilbar.

3. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, der andere die zwei niedersten Ziffern enthält; z. B.

$$2548 = 2500 + 48; \quad 375375 = 375300 + 75.$$

Das Vielfache von 100 ist durch 4 und durch 25 theilbar; es kommt daher nur auf die zwei niedersten Stellen an, ob auch die ganze Zahl selbst durch 4 oder 25 theilbar ist.

Eine Zahl ist demnach durch 4 theilbar, wenn die zwei niedersten Stellen als Zahl betrachtet durch 4 theilbar sind; und durch 25, wenn die zwei niedersten Stellen durch 25 theilbar sind.

4. Jede Zahl kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine lauter Vielfache von 9, der andere die Summe aller Ziffern der Zahl enthält; z. B.

$$\begin{aligned} 75624 &= 7.10000 + 5.1000 + 6.100 + 2.10 + 4 \\ &= 7.(9999 + 1) + 5.(999 + 1) + 6.(99 + 1) + 2.(9 + 1) + 4 \\ &= 7.9999 + 7 + 5.999 + 5 + 6.99 + 6 + 2.9 + 2 + 4 \\ &= 7.9999 + 5.999 + 6.99 + 2.9 \\ &\quad + 7 + 5 + 6 + 2 + 4. \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 9 enthält, ist nun durch 3 theilbar; ist auch der zweite Bestandtheil, nämlich die Ziffernsumme, durch 4 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl. Die eben zerlegte Zahl 75624 ist also durch 3 theilbar, weil die Ziffernsumme $7 + 5 + 6 + 2 + 4 = 24$ durch 3 theilbar ist.

Ebenso folgt auch:

Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 theilbar ist.

Aufgaben.

1. Welche von den Zahlen 16, 44, 53, 3094, 7821, 13457, 28431, 33556, 132580 sind durch 2 theilbar, welche nicht?

2. Welche von den Zahlen 318, 127, 5234, 13725, 321891, 283514, 4909231, 1378920 sind durch 3 theilbar, welche nicht?

3. Gib von den nachfolgenden Zahlen diejenigen an, welche durch 4 theilbar sind: 152, 372, 574, 1380, 2324, 198760, 293456, 135731.

4. Welche von den Zahlen 108, 327, 5436, 13578, 23456, 536463, 2937330 sind durch 9 theilbar?

5. Welche von den Zahlen 35, 750, 380, 574, 3100, 21348000 sind durch 5, 10, 100, 1000 theilbar?

6. Welche von den Zahlen 5148, 375, 1234, 8109, 2700, 617310, 34560, 192432 sind durch 2, welche durch 3, 4, 5, 9, 10, 100 theilbar?

7. Durch welche Zahlen ist 2520 theilbar?

8. Gib an, durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 9, 10 die nachfolgenden Zahlen theilbar sind: 112, 5040, 18480, 23400, 50280, 38124, 354240.

2. Zerlegung einer Zahl in Primfactoren.

§. 27. Jede zusammengesetzte Zahl kann in Primfactoren zerlegt, d. i. als ein Product von lauter Primzahlen dargestellt werden.

Um eine Zahl in Primfactoren zu zerlegen, dividiere man sie durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die gesuchten Primfactoren.

Sind z. B. die Primfactoren von 660 zu suchen, so hat man

660 : 2 = 330	oder	660	2	
330 : 2 = 165		330	2	
165 : 3 = 55		165	3	
55 : 5 = 11		55	5	
		11	11	

also $660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$.

Aufgaben.

Zerlege in einfache Factoren:

1. a) 240, b) 270, c) 300, d) 420.
2. a) 360, b) 356, c) 540, d) 936.
3. a) 1000, b) 1050, c) 1536, d) 1440.
4. a) 3075, b) 4158, c) 5250. d) 13832.

3. Größtes gemeinschaftliches Maß.

§. 28. Ist eine Zahl in zwei oder mehreren Zahlen ohne Rest enthalten, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maß derselben; z. B. 3 ist ein gemeinschaftliches Maß von 9 und 15, ebenso ist 5 ein gemeinschaftliches Maß von 15, 40 und 60. Die größte Zahl, welche in mehreren anderen Zahlen ohne Rest enthalten ist, wird das größte gemeinschaftliche Maß derselben genannt. So haben die Zahlen 36 und 60 die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinschaftlichen Maßen, 12 aber ist unter diesen das größte.

Haben zwei Zahlen außer der Einheit kein anderes gemeinschaftliches Maß, so nennt man sie relative Primzahlen; z. B. 8 und 15.

1. Haben zwei Zahlen 24 und 18 ein gemeinschaftliches Maß 6, so ist auch ihre Summe $24 + 18 = 42$ dadurch theilbar. Denn 6 ist in 24 4mal, in 18 3mal, in $24 + 18$ also 4mal und 3mal, d. i. 7mal enthalten.

2. Haben zwei Zahlen 24 und 15 ein gemeinschaftliches Maß, so ist auch ihr Unterschied $24 - 15 = 9$ dadurch theilbar. Denn 3 ist in 24 8mal, in 15 5mal, daher in 24—15 8mal weniger 5mal d. i. 3mal enthalten.

3. Ist eine Zahl 24 durch eine andere 6 theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben, z. B. $24 \times 5 = 120$ durch dieselbe Zahl theilbar. Es ist nämlich 6 in 24 4mal, daher in 5mal 24 5mal so oft, also 20mal enthalten.

4. Geht die Division zweier Zahlen ohne Rest auf, so ist der Divisor selbst das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen. Z. B. $48 : 12 = 4$; hier ist 12 ein gemeinschaftliches Maß von 48 und 12, weil es in beiden Zahlen ohne Rest enthalten ist; es ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß, da 12 offenbar durch keine größere Zahl als durch sich selbst theilbar sein kann.

5. Bleibt bei der Division zweier Zahlen ein Rest übrig, so ist das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor.

Ist z. B. 84 durch 24 zu dividieren, so hat man

$$84 : 24 = 3 \text{ mit dem Reste } 12,$$

also

$$84 = 24 \times 3 + 12, \text{ und}$$
$$12 = 84 - 24 \times 3.$$

Der Divisor 24 und der Rest 12 haben offenbar 12 zum gr. g. Maß; dasselbe gr. g. Maß müssen auch der Dividend 84 und der Divisor 24 haben. Es ist nämlich 12 gewiss ein gemeinschaftliches Maß von 84 und 24, da dadurch 24, daher auch $24 \times 3 + 12 = 84$ theilbar ist; 12 ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß von 84 und 24, denn hätten diese zwei Zahlen noch ein größeres gemeinschaftliches Maß als 12, so müßte durch dasselbe auch $84 - 24 \times 3 = 12$ theilbar sein, was jedoch nicht sein kann, da 12 durch keine Zahl theilbar sein kann, die größer als 12 ist. Das gr. g. Maß 12 zwischen dem Divisor 24 und dem Reste 12 muß also auch das gr. g. Maß zwischen dem Dividende 84 und dem Divisor 24 sein.

§. 29. 1. Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, zerlege man dieselben in Primfactoren, und suche unter diesen diejenigen heraus, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Product dieser Factoren ist gewiss ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen anderen Factor hinzufügen würde, dieses Product nicht mehr in allen gegebenen Zahlen enthalten wäre.

Ist z. B. das gr. g. Maß von 180 und 270 zu suchen, so hat man

180	2	270	2
90	2	135	3
45	3	45	3
15	3	15	3
5	5	5	5

gr. g. M. $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$.

Aufgaben.

Suche das gr. g. Maß von

1.* a) 8 und 12; b) 15 und 36; c) 24 und 60;
2.* a) 420 und 630; b) 400 und 680; c) 320 und 450;
3. a) 540 und 756; b) 448 und 576; c) 360 und 1024;
4. a) 300, 360 und 840; b) 740, 925 und 2035;
5. a) 104, 525 und 712; b) 312, 468 und 624.

2. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Factoren gefunden werden.

Es sei z. B. das gr. g. Maß von 252 und 63 zu suchen.

$$252 : 63 = 4.$$

Da hier die Division ohne Rest aufgeht, so ist 63 selbst das gesuchte gr. g. Maß.

Man suche ferner das gr. g. Maß zwischen 4277 und 637.

$$4277 : 637 = 6 \text{ mit dem Reste } 455.$$

Da bei dieser Division ein Rest übrig bleibt, so weiß man, dass der Dividend 4277 und der Divisor 637 dasselbe gr. g. Maß haben, wie der Divisor 637 und der Rest 455; anstatt zwischen den ersteren zwei Zahlen, wird man daher zwischen den kleineren Zahlen 637 und 455 das gr. g. Maß suchen.

$$637 : 455 = 1 \text{ mit dem Reste } 182.$$

Man wird nun wieder, anstatt zwischen 637 und 455, das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 suchen.

$$455 : 182 = 2 \text{ mit dem Reste } 91.$$

Da das gr. g. Maß zwischen 182 und 91 auch das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 sein muß, so hat man ferner

$$182 : 91 = 2.$$

Es ist also 91 das gr. g. Maß zwischen 182 und 91, folglich auch zwischen 455 und 182, daher auch zwischen 637 und 455, und somit auch zwischen 4277 und 637.

Man kann die Rechnung so stellen:

637	7477	6
182	455	1
0	**91**	2
		2

91 das gr. g. Maß.

Zur Auffindung des gr. g. Maßes zweier Zahlen führt daher folgendes Verfahren:

Man dividiert die größere Zahl durch die kleinere; bleibt ein Rest, so dividiert man sodann den Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest u. s. w., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das gr. g. Maß der zwei gegebenen Zahlen. Ist der letzte Divisor 1, so sind die beiden Zahlen relative Primzahlen.

Muß man bei diesem Rechnungsgange endlich auf eine Division kommen, welche ohne Rest aufgeht? Warum?

Um das gr. g. Maß zwischen drei oder mehreren Zahlen zu finden, sucht man zuerst das gr. g. Maß zweier Zahlen, dann das gr. g. Maß zwischen dem gefundenen Maße und der dritten Zahl u. s. f. Das zuletzt gefundene Maß ist zugleich das gr. g. Maß aller gegebenen Zahlen.

Soll z. B. das gr. g. Maß von 32, 48 und 116 gefunden werden, so hat man zunächst

32	48	1	also ist 16 das gr. g. Maß
0	**16**	2	von 32 und 48.

Da 16 als gr. g. Maß zwischen 32 und 48 alle gemeinschaftlichen Maße dieser zwei Zahlen enthält, so können die Zahlen 32, 48 und 116 kein gemeinschaftliches Maß haben, das nicht zugleich in 16 enthalten wäre; man braucht daher nur noch zwischen 16 und 116 das gr. g. Maß zu suchen, welches dann auch das gr. g. Maß zwischen 32, 48 und 116 sein muß.

16	116	7	4 ist also das gr. g. Maß von 16 und 116, daher
0	**4**	4	auch von 32, 48 und 116.

Aufgaben.

Suche das gr. g. Maß von:

1. a) 143 und 171; b) 396 und 660; c) 323 und 289;
2. a) 153 und 389; b) 713 und 837; c) 437 und 1035;
3. a) 1292 und 2812; b) 1519 und 2793; c) 3718 und 7774;
4. a) 112, 372 und 516; b) 1554, 3552 und 5143.

4. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§. 30. Ist eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar, so heißt sie ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; z. B. 24 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Da das Product stets durch seine Factoren theilbar sein muß, so ist jedes Product ein gemeinschaftliches Vielfaches seiner Factoren.

Um die Rechnungen möglichst einfach durchzuführen, ist es oft von Wichtigkeit, zu gegebenen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache d. i. die kleinste Zahl zu finden, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Kommt unter den Zahlen, deren Vielfaches gesucht wird, kein Paar vor, welches ein gemeinschaftliches Maß hat, so ist ihr Product selbst zugleich ihr kleinstes gemeinschaftliches Viel-

faches; denn wie man eine Zahl oder auch nur einen Factor derselben weglassen würde, wäre das Product der übriggebliebenen Zahlen und deren Factoren nicht mehr durch alle gegebenen Zahlen theilbar.

Wenn eine oder mehrere unter den gegebenen Zahlen in einer andern ohne Rest enthalten sind, so kann man dieselben weglassen, und das Vielfache der übrigen wird auch durch die weggelassenen theilbar sein.

Haben zwei oder mehrere Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kann man bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Vielfachen statt jener Zahlen das gemeinschaftliche Maß nur einmal und die Quotienten nehmen, welche jene Zahlen durch dieses Maß dividiert geben. Z. B. die Zahlen 14 und 18 haben das gemeinschaftliche Maß 2, und geben dadurch dividiert 7 und 9; die Zahl nun, welche durch 2, 7 und 9 theilbar ist, wird gewiss auch durch $2 \times 7 = 14$ und durch $2 \times 9 = 18$ theilbar sein.

Auf diesen Grundsätzen beruhet das nachstehende Verfahren zur Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe, und lasse diejenigen weg, welche in andern größeren ohne Rest enthalten sind.

2. Kommen unter den übriggebliebenen Zahlen zwei oder mehrere vor, die eine Primzahl zum gemeinschaftlichen Maße haben, so hebe man dieses Maß heraus, dividiere dadurch und setze in eine neue Reihe die Zahlen, welche dadurch nicht theilbar sind, ungeändert herab, von den übrigen schreibe man nur die Quotienten hin.

3. Mit der auf diese Art erhaltenen Reihe verfahre man wieder auf dieselbe Weise, und setze dieses so lange fort, bis kein Paar der letzten Reihe mehr ein gemeinschaftliches Maß hat.

4. Die Zahlen der letzten Reihe und die als Maße herausgehobenen Zahlen werden mit einander multipliciert; das Product ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen. Z. B.

1) Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu den Zahlen 5, 8, 9, 11.

Da von diesen Zahlen kein Paar ein gemeinschaftliches Maß hat, so ist ihr kl. g. Vielfaches $5 . 8 . 9 . 11 = 3960$.

2) Suche das kl. g. Vielfache zwischen 2, 3, 5, 8, 15, 60, 120.

Hier sind alle Zahlen in 120 ohne Rest enthalten, daher ist 120 selbst das kl. g. Vielfache.

3) Es soll das kl. g. Vielfache zu den Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 28, 36 gefunden worden.

Man hat folgende Rechnung:

2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 28, 36

4, 5, 15, 14, 18	2
2, 15, 7, 9	2
2, 5, 7, 3	3

Das kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen ist also

$$2 . 5 . 7 . 3 . 2 . 2 . 3 = 2520.$$

Aufgaben.

Suche das kl. g. Vielfache von

1.* a) 3 und 5; b) 2 und 10; c) 6 und 20;
2.* a) 8 und 12; b) 2, 5 und 7; c) 3, 9 und 18;
3.* a) 3, 5 und 10; b) 6, 8 und 12; c) 10, 12 und 15;
4. a) 3, 5, 8 und 11; b) 2, 3, 5 und 20;
5. 3, 5, 9, 14, 18, 21 und 30;
6. 3, 5, 6, 18, 20, 21 und 25;
7. 2, 3, 5, 8, 11, 15, 21 und 36;
8. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 33, 35, 60;
9. 12, 15, 27, 60, 72, 90, 128, 396.

Wiederholungsaufgaben.

1.* Gib alle Primzahlen zwischen 1 und 100 an.

2.* Durch welche Zahlen sind folgende Zahlen theilbar: 10, 18, 24, 30, 45, 56, 72, 80, 100, 136?

3.* 663 + 125; 346 + 459; 788 + 165; 563 + 297?

4.* 960 — 324; 724 — 548; 938 — 678; 805 — 598?

5.* Welche von folgenden Jahreszahlen bezeichnen Schaltjahre: 1876, 1840, 1870, 1784, 1832, 1866, 1756, 1868?

Suche das größte gemeinschaftliche Maß von:

6.* a) 24 und 32; b) 48 und 72; c) 72 und 120;
7. a) 168 und 216; b) 135 und 450; c) 900 und 1025;
8. a) 351 und 767; b) 731 und 918; c) 581 und 830;
9. a) 1988 und 2345; b) 7006 und 3565.

10. Eine Schüssel, welche 2·387 Kilogr. wiegt, enthält 1·902 Kilogr. feines Silber; wie viel ist dabei Zusatz?

11. In der Bahn, welche die Erde jährlich um die Sonne beschreibt, durchläuft dieselbe in 3 Stunden nahe 43866 geogr. Meilen; wie viel Meilen legt sie in 1 Minute zurück?

12. Wie viel beträgt der Inhalt eines Gefäßes von $3·245^{dm}$ Länge, $1·78^{dm}$ Breite und 1·208 Tiefe? (3 Dec.)

13. Ein Gulden Capital wächst bei einem gewissen Zinsfuße in 20 Jahren auf 2·653298 fl. an; wie hoch wächst bei der nämlichen Verzinsungsweise und in derselben Zeite ein Capital von 2315 fl. an? (3 Dec.)

14. a) 1728 : 36 =? b) 54201 : 89 =? c) 233410 : 85 =?

15. a) 8323 : 29 =? b) 59500 : 68 =? c) 721872 : 48 =?

16. a) 8004 : 87 =? b) 80012 : 39 =? c) 145426 : 19 =?

17. (17·45 + 48·3549 + 0 098 − 57·2759) × 3·25 = ?

18. Zerlege in Primfactoren: 270, 680, 924, 990, 1728, 5400, 2310, 2928, 13860.

Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von:

19.* a) 6 und 8; b) 16 und 20; c) 30 und 48;

20.* a) 2, 6, 30; b) 2, 4, 10; c) 3, 5, 12;

21. a) 5, 12, 8, 10, 21, 28, 30; b) 5, 12, 7, 9, 21, 45, 57;

22. a) 16, 12, 9, 8, 25, 15, 24; b) 12, 27, 36, 28, 35, 54;

23. a) 77, 35, 42, 91, 126, 26; b) 105, 126, 168, 210, 231.

24. Wie viele Ziegelsteine von $2·8^{dm}$ Länge, $1·6^{dm}$ Breite und $0·4^{dm}$ Dicke braucht man zu einer Mauer, welche 2832^{dm} lang, 105^{dm} breit (hoch) und $0·8^{dm}$ dick ist?

25. Unter allen österreichischen Ländern hat das Herzogthum Schlesien, in welchem 513352 Einwohner auf $51·47 \square^{Mm}$ leben, die dichteste Bevölkerung; am dünnsten bevölkert ist Salzburg, welches $71·66 \square^{Mm}$ mit 153159 Einwohnern umfasst. Wie viele Einwohner kommen auf ein $\square^{Mm}$ in dem erstern, wie viele in dem letztern Lande?

26. Für eine Eisenbahnstrecke kostet eine Fahrkarte der 1. Classe 3·48 fl., der 2. Classe 2·61 fl., der 3. Classe 1·74 fl.; wenn nun für eine Fahrt auf dieser Strecke 36 Fahrkarten der 1. Classe, 98 Fahrkarten der 2. Classe und 217 Fahrkarten der 3. Classe ausgegeben wurden, wie groß war die Einnahme?

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

§. 31. Eine Zahl, welche einen Theil der Einheit ein- oder mehrmal enthält, wird eine gebrochene Zahl oder ein Bruch genannt. Zur Darstellung eines Bruches sind zwei Zahlen erforderlich: der Nenner, welcher angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt wurde, und der Zähler, welcher anzeigt, wie viele solcher Theile man genommen hat.

Z. B. In dem Bruche $\frac{3}{8}$ (drei Achtel) ist 8 der Nenner, und zeigt an, dass die Einheit in 8 gleiche Theile getheilt wurde; 3 ist der Zähler, und gibt an, dass man einen solchen Theil, nämlich $\frac{1}{8}$, 3mal genommen hat.

Jeder Bruch kann als ein angezeigter Quotient betrachtet werden, worin der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor erscheint. Der 8te Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{8}$, 3 solche Theile geben den Bruch $\frac{3}{8}$; der 8te Theil von 3 Ganzen, d. i. der Quotient 3 : 8, ist offenbar 3mal so viel als der 8te Theil von 1 Ganzen, also 3mal $\frac{1}{8}$ d. i. $\frac{3}{8}$. Es ist somit

$$\frac{3}{8} = 3 : 8.$$

Unter dem Bruche $\frac{3}{8}$ kann man sich demnach entweder 3mal den 8ten Theil von 1 Ganzen, oder auch den 8ten Theil von 3 Ganzen vorstellen.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, heißt echt; z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{20}$. Ein echter Bruch ist kleiner als 1.

Ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt unecht; z. B. $\frac{2}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{217}{50}$. Ein unechter Bruch ist entweder gleich 1, oder größer als 1.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem angehängten Bruche besteht, wird eine gemischte Zahl genannt; z. B. $1\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{6}$, $915\frac{11}{19}$. So oft bei der Division ganzer Zahlen ein Rest übrig bleibt, ist der Quotient immer eine gemischte Zahl.

§. 32. a) Jede gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch verwandelt werden; man darf nur die ganze Zahl mit dem Nenner multiplicieren und zum Producte den Zähler addieren; diese Summe ist der Zähler, der Nenner wird ungeändert beibehalten. Z. B.

$$5\frac{3}{8} = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8}$$

Denn 1 Ganzes = 8 Achtel, 5 Ganze sind also 5mal 8 = 40 Achtel, und die 3 Achtel dazu, sind $\frac{43}{8}$.

3. Jeder unechte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden; man braucht nur den Zähler durch den Nenner zu dividieren. Z. B.

$$\frac{27}{4} = 27 : 4 = 6\frac{3}{4}.$$

Denn: 4 Viertel sind 1 Ganzes, 27 Viertel sind also so viel Ganze, als wie oft 4 in 27 enthalten ist; man muß somit 27 durch 4 dividieren.

Aufgaben:

1. Richte folgende gemischte Zahlen zu unechten Brüchen ein:

$1\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{8}$, $3\frac{8}{15}$, $12\frac{2}{3}$, $27\frac{4}{5}$, $128\frac{1}{20}$, $102\frac{7}{12}$, $207\frac{13}{19}$, $1234\frac{47}{51}$, $5728\frac{1}{2}$, $217\frac{11}{18}$, $69\frac{67}{69}$, $300\frac{17}{40}$, $298\frac{10}{27}$, $39\frac{243}{625}$.

2. Ziehe aus folgenden unechten Brüchen die Ganzen heraus:

$\frac{5}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{42}{6}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{34}{7}$, $\frac{51}{10}$, $\frac{123}{16}$, $\frac{715}{32}$, $\frac{10008}{64}$, $\frac{215677}{125}$, $\frac{1253333}{400}$.

I. Wertveränderung der Brüche.

§. 33. a) Je größer der Zähler ist, desto größer ist die Anzahl der gleichen Theile, desto größer also auch der Wert des Bruches. Wenn daher zwei oder mehrere Brüche gleiche Nenner haben, so ist jener unter ihnen der größere, welcher den größeren Zähler hat. Z. B. $\frac{7}{10}$ ist größer als $\frac{3}{10}$, was man so schreibt: $\frac{7}{10} > \frac{3}{10}$.

Welcher unter den Brüchen $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ ist der größte, welcher der kleinste, und warum?

Wenn der Nenner ungeändert bleibt, der Zähler aber 2mal, 3mal, 4mal . . . so groß wird, so erhält man 2mal, 3mal, 4mal . . . so viele eben so große Theile, daher wird auch der Wert des neuen Bruches 2, 3, 4 . . . mal so groß, als der Wert des früheren Bruches; oder: wenn man den Zähler eines Bruches mit einer

Zahl multipliciert, so wird auch der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliciert.

Läßt man den Nenner ungeändert und nimmt dagegen den Zähler 2, 3, 4 . . . mal kleiner an, so erhält man 2, 3, 4mal weniger eben so große Theile, also wird auch der neue Bruch nur der 2te, 3te, 4te . . . Theil von dem früheren Bruche sein. Wenn man daher den Zähler eines Bruches durch eine Zahl dividiert, so wird der Wert des Bruches durch dieselbe Zahl dividiert.

b) In je mehrere Theile die Einheit getheilt wird, desto kleiner sind die einzelnen Theile; je größer daher der Nenner ist, desto kleiner ist der Wert des Bruches. Wenn also zwei oder mehrere Brüche gleiche Zähler haben, so ist derjenige unter ihnen der kleinste, welcher den größten Nenner hat. So ist $\frac{3}{8}$ kleiner als $\frac{3}{5}$, oder $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$.

Welcher unter den Brüchen $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{5}{26}$ ist der kleinste, welcher der größte, und warum?

Bleibt der Zähler eines Bruches ungeändert und wird dabei der Nenner 2, 3, 4 . . . mal größer, so werden, weil das ganze in mehrere Theile getheilt wird, die einzelnen Theile kleiner ausfallen; man erhält ebenso viele, aber 2, 3, 4 . . . mal kleinere Theile; somit wird auch der neue Bruch nur der 2te, 3te, 4te . . . Theil des früheren sein. Wenn man also den Nenner eines Bruches mit einer Zahl multipliciert, so wird der Wert des Bruches durch dieselbe Zahl dividiert.

Läßt man den Zähler eines Bruches ungeändert, und nimmt den Nenner 2mal, 3mal, 4mal . . . kleiner an, so werden, weil das ganze in weniger Theile getheilt wird, die einzelnen Theile größer ausfallen, und man erhält somit eben so viele, aber 2, 3, 4 . . . mal größere Theile, folglich wird auch der Wert des neuen Bruches 2, 3, 4 . . . mal so groß, als der Wert des früheren Bruches. Wenn man also den Nenner eines Bruches durch eine Zahl dividiert, so wird der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliciert.

Die voranstehenden Ergebnisse lassen sich in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

1. Multiplication oder Division des Zählers ist dieselbe Rechnung an dem Bruche.

2. Multiplication oder Division des Nenners ist die entgegengesetzte Rechnung an dem Bruche.

II. Formveränderung der Brüche.

Erweiterung der Brüche.

§. 34. Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multipliciert, so bleibt der Wert des Bruches ungeändert; z. B.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$$

Denn: multipliciert man den Zähler mit 6, so erhält man den 6fachen Wert des Bruches; multipliciert man den Nenner mit 6, so erhält man den 6ten Theil des früheren Wertes; der 6te Theil vom 6fachen gibt wieder den ursprünglichen Wert. Der Bruch $\frac{3}{5}$ hat also die Form, aber nicht den Wert geändert. Man nennt die Formveränderung durch die Multiplication des Zählers und des Nenners die Erweiterung des Bruches.

So erhält man durch Erweiterung:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{15}{30} = \frac{52}{106} = \ldots$
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{24}{36} = \frac{60}{90} = \ldots$
$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \frac{30}{80} = \frac{375}{1000} = \ldots$

Durch die Erweiterung kann man jeden Bruch ohne Aenderung seines Wertes in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem früheren Nenner ist. Um z. B. $\frac{7}{8}$ in einen Bruch, dessen Nenner 40 ist, zu verwandeln, darf man $\frac{7}{8}$ nur mit 40 : 8 d. i. mit 5 erweitern, wodurch man $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ erhält. Um daher einen Bruch in einen andern Bruch von gegebenem Nenner zu erweitern, darf man nur den neuen Nenner durch den früheren dividieren, und mit dem Quotienten den früheren Zähler multiplicieren; das Product ist der neue Zähler.

Z. B. $\frac{7}{9}$ soll in einen Bruch vom Nenner 108 erweitert werden; man hat

$1 = \frac{108}{108}$. Oder: $108 : 9 = 12$

$\frac{1}{9} = \frac{12}{108}$, $\frac{7}{9} = \frac{84}{108}$. $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 12}{9 \times 12} = \frac{84}{108}$.

Die erste Darstellungsweise schließt sich an den Gedankengang des mündlichen Rechnens an.

Durch dieses Verfahren kann man auch mehrere Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, sobald dieser durch

alle Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist. Sind z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{20}$ auf den Nenner 120 zu bringen, so hat man

120 : 3 = 40, 2 × 40 = 80, somit $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}$;
120 : 4 = 30, 3 × 30 = 90, „ $\frac{3}{4} = \frac{90}{120}$;
120 : 20 = 6, 7 × 6 = 42, „ $\frac{7}{20} = \frac{42}{120}$.

Um die Rechnungen so einfach als möglich zu führen, pflegt man die Brüche allezeit auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen; dieser ist offenbar die kleinste Zahl, welche durch alle gegebenen Nenner theilbar ist, somit ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. Z. B.

Es sollen die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 4, 5, 9, somit der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 180 und man hat

$1 = \frac{180}{180}$.

$\frac{1}{4} = \frac{45}{180}$, $\frac{3}{4} = \frac{135}{180}$;
$\frac{1}{5} = \frac{36}{180}$, $\frac{2}{5} = \frac{72}{180}$;
$\frac{1}{9} = \frac{20}{180}$, $\frac{4}{9} = \frac{80}{180}$.

Oder:

180

$\frac{3}{4}$	45	135
$\frac{2}{5}$	36	72
$\frac{4}{9}$	20	80

Mittelst der Erweiterung der Brüche ist man im Stande, auch Brüche von ungleichen Nennern hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen; man darf sie nur mit einem gemeinschaftlichen Nenner darstellen, und dann auf die neuen Zähler Rücksicht nehmen. Um z. B. zu sehen, welcher von den zwei Brüchen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{18}$ der größere ist, hat man

$\frac{3}{8} = \frac{27}{72}$, $\frac{7}{18} = \frac{28}{72}$; daher $\frac{7}{18}$ größer als $\frac{3}{8}$.

Aufgaben:

Bringe

1*. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ auf den Nenner 6;
2.* „ „ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ „ „ „ 12;
3.* „ „ $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$ „ „ „ 30;
4.* „ „ $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{8}$ „ „ „ 72;
5.* „ „ $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ „ „ „ 240;
6. „ „ $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{18}$ auf den Nenner 720;
7. „ „ $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{3}{14}$ „ „ „ 78540;
8. „ „ $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{125}$, $\frac{46}{50}$, $\frac{113}{625}$ „ „ „ 10000.

Bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

9.* a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{15}$; c) $\frac{7}{8}$ und $\frac{11}{20}$;
10.* a) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{10}$; c) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$;

11. a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{32}, \frac{9}{40}, \frac{13}{60}$; b) $\frac{13}{21}, \frac{35}{39}, \frac{7}{12}, \frac{10}{52}$;

12. a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{5}{8}, \frac{13}{18}$; b) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{7}, \frac{8}{21}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}$;

13. $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{9}{25}, \frac{4}{5}, \frac{11}{15}, \frac{8}{9}, \frac{17}{20}$;

14. a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$; b) $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{8}{25}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{11}{12}, \frac{13}{18}$;

15. $\frac{17}{30}, \frac{5}{32}, \frac{23}{25}, \frac{19}{24}, \frac{38}{75}, \frac{29}{36}, \frac{3}{35}$;

16. $\frac{17}{54}, \frac{11}{48}, \frac{16}{64}, \frac{7}{18}, \frac{31}{50}, \frac{29}{32}, \frac{23}{45}$.

17. Welcher von den Brüchen $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{11}{21}, \frac{16}{31}, \frac{29}{60}$ ist der größte, und welcher der kleinste?

18. Ordne folgende Brüche nach ihrer Größe, und zwar von dem kleinsten angefangen: $\frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{2}{3}, \frac{23}{35}, \frac{63}{95}, \frac{13}{19}$.

Abkürzen der Brüche.

§. 35. Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividiert, so bleibt der Wert des Bruches ungeändert; z. B.

$$\frac{35}{80} = \frac{35 : 5}{80 : 5} = \frac{7}{16}$$

Dividiert man nämlich den Zähler durch 5, so erhält man den 5ten Theil des früheren Wertes; dividiert man den Nenner durch 5, so erhält man den 5fachen Wert; das 5fache des 5ten Theiles gibt aber wieder den ursprünglichen Wert. Die Formveränderung durch die Division des Zählers und des Nenners wird das Abkürzen des Bruches genannt; sie kann natürlich nur dann statthaben, wenn Zähler und Nenner des gegebenen Bruches ein gemeinschaftliches Maß haben; ist dieses nicht der Fall, so hat der Bruch bereits die einfachste Form, und kann nicht ohne Aenderung des Wertes durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden. So findet man

$$1)\ \frac{36}{57} = \frac{12}{19} \qquad 2)\ \frac{200}{240} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

Aufgabe.

Kürze folgende Brüche so weit als möglich ab:

$\frac{22}{50}, \frac{25}{40}, \frac{24}{48}, \frac{21}{30}, \frac{102}{141}, \frac{1512}{1644}, \frac{192}{240}, \frac{420}{2520}, \frac{676}{1092}, \frac{625}{1000}, \frac{273}{1239}, \frac{1824}{2040}$.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

§. 36. Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, darf man nur den Zähler durch den Nenner dividieren. Z. B.

1) $\frac{25}{4} = 25 : 4 = 6{\cdot}25$ 2) $\frac{37}{8} = 37 : 8 = 4{\cdot}625$
3) $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{\cdot}5$ 4) $\frac{7}{3} = 7 : 3 = 2{\cdot}3333 \ldots$
5) $\frac{17}{25} = 17 : 25 = 0{\cdot}68$ 6) $\frac{3}{11} = 3 : 11 = 0{\cdot}2727 \ldots$

Wenn bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches die Division zuletzt ohne Rest aufgeht, so ist der erhaltene Decimalbruch dem gegebenen gemeinen vollkommen gleich, und heißt ein vollständiger oder endlicher Decimalbruch.

Geht die Division nicht ohne Rest auf, so ist der erhaltene Decimalbruch nur angenähert, und drückt den Wert des gemeinen Bruches um so genauer aus, je mehrere Decimalen man entwickelt; er heißt ein unvollständiger oder unendlicher Decimalbruch. Bei solchen Decimalbrüchen reichen für die Berechnung der meisten Aufgaben 3 oder 4 Decimalstellen hin.

Jeder unendliche Decimalbruch, welcher aus einem gemeinen Bruche hervorgeht, ist (nach §. 18, II) ein periodischer Decimalbruch.

Aufgaben.

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

1. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{11}{20}, 2\frac{16}{25}, \frac{5}{8}, \frac{37}{16}, 12\frac{53}{125}, \frac{23}{32}, 43\frac{17}{80}, 63\frac{61}{64}$;
2. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{11}, 2\frac{13}{22}, \frac{9}{14}, 8\frac{8}{13}, \frac{37}{41}, 6\frac{23}{66}, \frac{37}{230}$.
3. Ein Meter ist gleich 3·16375 Wiener Fuß; diesen Wert drücken annäherungsweise die Brüche $\frac{19}{6}, \frac{174}{55}, \frac{367}{116}, \frac{541}{171}, \frac{5236}{1655}, \frac{5777}{1826}$ aus; wie groß ist der Unterschied zwischen dem wahren und jedem dieser Näherungswerte in 5 Decimalen?

Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

§. 37. Um einen endlichen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln, darf man ihn nur mit Angabe seines Nenners anschreiben. Z. B.

$0{\cdot}7 = \frac{7}{10}$, $0{\cdot}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $3{\cdot}64 = 3\frac{64}{100} = 3\frac{16}{25}$.

Zusammengesetzter erscheint häufig die Verwandlung eines periodischen Decimalbruches in einen gemeinen Bruch. Ist z. B. der

periodische Decimalbruch $0{\cdot}\dot{5}$ durch einen gemeinen Bruch darzustellen, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{10facher Bruch} & = 5{\cdot}5555\ldots \\ \text{1facher} \quad " & = 0{\cdot}5555\ldots \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$

$$\text{9facher Bruch} = 5$$

daher der einfache Bruch $= \frac{5}{9}$.

Für den periodischen Decimalbruch $0{\cdot}\dot{1}0\dot{8}$ hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{1000facher Bruch} & = 108{\cdot}108108\ldots \\ \text{1facher} \quad " & = 0{\cdot}108108\ldots \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$

$$\text{999facher Bruch} = 108$$

daher der einfache Bruch $= \frac{108}{999} = \frac{12}{111} = \frac{4}{37}$.

Ebenso würde man finden:

$$0{\cdot}\dot{7} = \tfrac{7}{9},\quad 0{\cdot}\dot{3}\dot{1} = \tfrac{31}{99},\quad 0{\cdot}\dot{3}5\dot{9} = \tfrac{359}{999}.$$

Ein periodischer Decimalbruch, worin die Periode gleich mit der ersten Decimalstelle beginnt, wird daher in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Periode zum Zähler, und so viele 9, als die Periode Ziffern hat, zum Nenner annimmt.

Beginnt die Periode nicht gleich mit der ersten Decimale, wie in $0{\cdot}73\dot{5}1\dot{7} = 0{\cdot}73517517\ldots$, so hat man

$$\left.\begin{array}{rl} \text{100000facher Bruch} & = 73517{\cdot}517517\ldots \\ \text{100facher} \quad " & = 73{\cdot}516517\ldots \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$

$$\text{99900facher Bruch} = 73517 - 73$$

daher der einfache Bruch $= \frac{73517-73}{99900}$.

Hier nimmt man also die Periode sammt den ihr vorangehenden Decimalen, subtrahiert davon diese letzteren, der Rest ist der Zähler des gesuchten Bruches; als Nenner nimmt man so viele 9 an, als die Periode Ziffern hat, mit so vielen Nullen rechts, als ihr Decimalen vorangehen.

Aufgaben.

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche:

1. 0·4, 2·12, 0·025, 36·16, 38·75, 0·245, 6·0675;
2. 3·15, 35·005, 0·48, 0·175, 12·064 33·1225;
3. $0{\cdot}\dot{5}$, $0{\cdot}3\dot{6}$, $2{\cdot}4\dot{2}$, $0{\cdot}0\dot{3}$, $0{\cdot}\dot{5}0\dot{4}$, $2{\cdot}2\dot{4}1\dot{8}$;
4. $0{\cdot}8\dot{3}$, $0\,426\dot{6}$, $17{\cdot}105\dot{2}$, $4{\cdot}19\dot{6}$, $0{\cdot}57\dot{2}\dot{3}$, $4{\cdot}1529\dot{6}$.

III. Das Addieren und Subtrahieren der Brüche.

Addition der Brüche.

§. 38. 2 Neuntel und 5 Neuntel sind 7 Neuntel, oder

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}.$$

Brüche von gleichen Nennern werden also addiert, indem man ihre Zähler addiert und als Nenner den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, und dann addiert.

Z. B. 1) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2)

	12	
$\frac{1}{2}$	6	6
$\frac{1}{3}$	4	4
$\frac{1}{12}$	1	1
		$\frac{11}{12}$

3)

	30	
$\frac{3}{5}$	6	18
$\frac{5}{6}$	5	25
$\frac{7}{10}$	3	21
		$\frac{64}{30} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$.

4) $3\frac{7}{8} + 2{\cdot}5 = 3\frac{7}{8} + 2\frac{1}{2} = 6\frac{3}{8}$.

Beim mündlichen Addieren zweier gemischten Zahlen zählt man zu der ersten Zahl zuerst die Ganzen, dann den Bruch der zweiten Zahl dazu. Z. B. $8\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} = ?$ $8\frac{3}{4}$ und 5 ist $13\frac{3}{4}$, und $\frac{1}{2}$ ist $13\frac{5}{4}$, d. i. $14\frac{1}{4}$.

Aufgaben.

1.* a) $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = ?$ b) $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = ?$ c) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = ?$

2.* a) $7\frac{5}{6} + 8 = ?$ b) $18\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = ?$ c) $32\frac{11}{20} + 15\frac{13}{20} = ?$

3.* a) $\frac{1}{2}\frac{3}{5} + \frac{17}{25} + \frac{9}{25} = ?$ b) $48\frac{19}{32} + 7\frac{5}{32} + 6\frac{15}{32} = ?$

4.* a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = ?$ b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ?$ c) $\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = ?$

5.* a) $7\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = ?$ b) $8\frac{5}{6} + 2\frac{3}{15} = ?$ c) $17\frac{11}{12} + 5\frac{7}{15} = ?$

Verrichte folgende Additionen:

6. a) $\frac{7}{45} + \frac{13}{18}$; b) $\frac{11}{15} + \frac{17}{24}$; c) $\frac{19}{24} + \frac{27}{32}$;

7. a) $29\frac{3}{10} + 45 + 16\frac{4}{15}$; b) $45\frac{1}{2} + 127\frac{3}{5} + \frac{8}{15}$;

8. a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{9}$; b) $8 + 3\frac{5}{6} + 7\frac{3}{4} + 0{\cdot}3$;

9. $1\frac{1}{2} + 5\frac{3}{8} + 13\frac{5}{12} + 8\frac{2}{3} + 19\frac{5}{9}$;

10. $128\frac{3}{4} + 245\frac{3}{5} + 208\frac{1}{2} + 199\frac{1}{3} + 206\frac{7}{10}$;

11. $2\frac{1}{3} + 20 + 3\frac{3}{4} + \frac{5}{12} + 17\frac{2}{3} + 3\frac{11}{12} + 5\frac{7}{8} + \frac{1}{2}$.

12. $0{\cdot}7 + 2{\cdot}31 + 81{\cdot}35 + 15{\cdot}36$;

13. $35708\frac{7}{32} + 10985\frac{9}{16} + 78659\frac{11}{80} + 340795\frac{17}{24}$.

14. $759\frac{59}{120} + 1813\frac{41}{48} + 3879\frac{131}{180} + \frac{37}{72} + 538\frac{55}{64} = ?$

15. Ein Landmann erzeugt $58\frac{3}{8}$ Hektoliter Weizen, $38\frac{1}{4}$ Hektoliter Korn, $43\frac{1}{2}$ Hektoliter Gerste und $70\frac{5}{8}$ Hektoliter Hafer; wie viel Hektoliter Getraide macht dieses?

16. Ein Leinwandhändler kauft 4 Stück Leinwand, im ersten sind $49\frac{1}{2}$ Meter, im zweiten $42\frac{1}{2}$, im dritten $54\frac{3}{4}$, im vierten $40\frac{3}{5}$ Meter; wie viel Meter enthalten alle 4 Stück?

17. Jemand hat $8\frac{3}{10}$ fl., $37\frac{3}{4}$ fl., $28\frac{4}{5}$ fl., $9\frac{9}{20}$ fl,, $19\frac{1}{2}$ fl. zu zahlen; wie viel zusammen?

18. Ein Handelsmann findet beim Jahresabschlusse folgenden Vorrath an Kaffee:

$2156\frac{1}{2}$	Kilogr.	Mocca	im Werte von	$3019\frac{1}{10}$ fl.
$5175\frac{3}{4}$	"	Martinique	" " "	$6210\frac{9}{10}$ "
$1512\frac{3}{5}$	"	Havanna	" " "	$1739\frac{49}{100}$ "

wie groß ist der ganze Vorrath, und wie groß dessen Gesammtwert?

19. Die Seiten eines Dreieckes betragen $72\frac{3}{4}^{m}$, $46\frac{4}{5}^{m}$, $40\frac{7}{10}^{m}$; wie groß ist der Umfang?

20. Die Winkel eines Viereckes betragen einzeln $78\frac{7}{20}^{0}$, $108\frac{5}{12}^{0}$, $57\frac{3}{5}^{0}$ und $115\frac{19}{30}^{0}$; wie groß ist ihre Summe?

21. Ein Wasserbehälter wird durch 3 Röhren gefüllt, und zwar durch die erste Röhre allein in 4 Stunden, durch die zweite in 5, durch die dritte in 6 Stunden. Der wie vielte Theil des Behälters wird in einer Stunde gefüllt, wenn man das Wasser a) bloß aus der ersten, b) aus der zweiten, c) aus der dritten, d) aus allen drei Röhren zugleich fließen läßt?

22. Das Ausgraben eines Brunnens kostet für das erste Meter $2\frac{1}{5}$ fl. und für jedes folgende Meter $1\frac{3}{4}$ fl. mehr als für das vorhergehende; wie viel wird das Ausgraben des Brunnens kosten, wenn derselbe 8 Meter tief ist?

Subtraction der Brüche.

§. 39. 7 Neuntel weniger 4 Neuntel sind 3 Neuntel, oder

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Brüche von gleichen Nennern werden also subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner schreibt.

Haben die zu subtrahierenden Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, und dann subtrahiert. Z. B.

1) $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$.

2)
$$\begin{array}{r|c|c} & 8 & \\ \hline \frac{5}{8} & 1 & 5 \\ -\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \hline & & \frac{3}{8} \end{array}$$

3) $4\frac{3}{4} - 2 = 2\frac{3}{4}$.

4) $49 - 15\frac{3}{5} = 33\frac{2}{5}$.

Im letzten Beispiele addiert man zu dem Bruche des Subtrahends so viel dazu, dass man ein Ganzes erhält; was man dazu addiert, wird sogleich in den Rest geschrieben, dann vermehrt man den Subtrahend um ein Ganzes und subtrahiert die Ganzen.

5) $4\frac{3}{4} - 1{\cdot}16 = 4\frac{3}{4} - 1\frac{16}{100} = 3\frac{59}{100}$.

Beim mündlichen Subtrahieren zweier gemischter Zahlen subtrahiert man vom Minuend zuerst die Ganzen, dann den Bruch des Subtrahends.

Aufgaben.

1.* a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = ?$ b) $\frac{9}{16} - \frac{7}{16} = ?$ c) $\frac{19}{20} - \frac{11}{20} = ?$

2.* a) $5\frac{17}{36} - \frac{13}{36} = ?$ b) $3\frac{7}{10} - 1\frac{9}{10} = ?$ c) $10 - \frac{3}{4} = ?$

3.* a) $\frac{2}{5} - \frac{4}{15} = ?$ b) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = ?$ c) $\frac{13}{16} - \frac{5}{12} = ?$

4.* a) $4\frac{8}{9} - 3\frac{2}{3} = ?$ b) $9\frac{4}{5} - 8\frac{7}{10} = ?$ c) $10\frac{3}{8} - 5\frac{7}{12} = ?$

Verrichte folgende Subtractionen:

5. a) $85\frac{12}{35} - 17$; b) $108\frac{7}{10} - 59$; c) $415\frac{12}{25} - 199$;

6. a) $57 - 33\frac{23}{60}$; b) $123 - 48\frac{5}{9}$; c) $83\frac{1}{2} - 15\frac{7}{8}$;

7. a) $\frac{7}{8} - 0{\cdot}3$; b) $37{\cdot}75 - 18\frac{5}{6}$; c) $14{\cdot}6 - 9\frac{9}{11}$;

8. a) $37945\frac{107}{120} - 29086\frac{43}{56}$; b) $7358\frac{223}{625} - 997\frac{59}{75}$;

9. a) $23985\frac{17}{84} - 10845\frac{23}{40}$; b) $30912\frac{511}{12} - 30905\frac{17}{96}$;

10. a) $8765\frac{431}{560} - 5678\frac{97}{120}$; b) $3746\frac{158}{243} - 950\frac{131}{162}$;

11. a) $12345\frac{67}{68} - 6082\frac{50}{51}$; b) $57830\frac{91}{112} - 37921\frac{123}{136}$.

12. Jemand nimmt $125\frac{3}{4}$ fl. ein, und gibt $83\frac{1}{4}$ fl. aus; wie viel bleibt ihm noch übrig?

13. Um wie viel sind $\frac{17}{20}$ fl. mehr als $\frac{4}{5}$ fl.?

14. A ist $25\frac{3}{4}$ Jahre alt, B 17 Jahre; um wie viel ist A älter als B?

15. Jemand besitzt 27 Hektar Ackergrund; wie viel behält er noch, wenn er $7\frac{3}{16}$ Hektar verkauft?

16. Um wie viel verändert sich der Bruch $\frac{17}{25}$, wenn man a) zum Zähler und Nenner 3 addiert, b) vom Zähler und Nenner 4 subtrahiert?

17. Von einer Schuld von 200 fl. werden nach und nach 30 fl., $35\frac{1}{2}$ fl., $41\frac{3}{5}$ fl., $18\frac{3}{25}$ fl. abgezahlt; wie groß ist noch der Schuldrest?

18. Sechs Kisten wiegen mit dem darin enthaltenen Kandiszucker $56\frac{1}{4}$, 49, $43\frac{1}{2}$, $52\frac{3}{8}$, $42\frac{3}{4}$, $40\frac{9}{10}$ Kilogr.; die leeren Kisten wiegen $5\frac{3}{4}$, $5\frac{5}{8}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{4}$, $4\frac{11}{20}$, $4\frac{1}{2}$ Kilogr.; wie viel Kandis ist in allen 6 Kisten?

19. Man hat vier Zahlen: die erste ist $8\frac{5}{12}$, die zweite um $2\frac{3}{4}$ größer als die erste, die dritte um $3\frac{5}{8}$ kleiner als die zweite, die vierte so groß als der Unterschied zwischen der ersten und dritten; wie groß ist die Summe aller vier Zahlen?

IV. Das Multiplicieren und Dividieren der Brüche.

Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

§. 40. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert oder den Nenner durch dieselbe dividiert (§. 33). Z. B.

$$1)\quad \frac{7}{12} \times 3 = \frac{7 \times 3}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4},$$

$$\text{oder } \frac{7}{12} \times 3 = \frac{7}{12 : 3} = \frac{7}{4}.$$

Das zweite Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn der Nenner des gegebenen Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

$$2)\quad 9\frac{3}{10} \times 5 = \frac{93}{10} \times 5 = \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}.$$

Im Kopfe: 5mal 9 ist 45; 5mal $\frac{3}{10}$ ist $\frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; 45 und $1\frac{1}{2}$ ist $46\frac{1}{2}$.

$$3)\quad \frac{4}{7} \times 7 = 4. \qquad 4)\quad \frac{11}{12} \times 12 = 11.$$

Aus den letzten zwei Beispielen folgt: Ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert gibt den Zähler zum Producte.

$$5)\quad \frac{7}{12} \times 9 = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4} \text{ oder}$$

$$\frac{7}{\cancel{12}_{4}} \times \overset{3}{\cancel{9}} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}.$$

Wenn der Nenner des Bruches und die ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maß haben, so wird die Multiplication vereinfacht,

wenn man dieselben noch vor dem Multiplicieren durch jenes Maß dividiert.

Aufgaben.

1.* a) $\frac{5}{8} \times 7 = ?$ b) $\frac{3}{10} \times 2 = ?$ c) $\frac{7}{8} \times 12 = ?$

2.* a) $\frac{17}{30} \times 15 = ?$ b) $4\frac{3}{4} \times 8 = ?$ c) $25\frac{4}{5} \times 10 = ?$

Verrichte folgende Multiplicationen:

3. a) $\frac{19}{35} \times 11$; b) $\frac{8}{15} \times 21$; c) $\frac{41}{50} \times 35$;

4. a) $108\frac{3}{8} \times 24$; b) $73\frac{2}{9} \times 42$;

5. a) $7\frac{35}{48} \times 99$; b) $33\frac{12}{37} \times 125$;

6. a) $157\frac{7}{12} \times 63$; b) $3752\frac{37}{40} \times 8314$;

7. a) $15934\frac{117}{216} \times 3092$; b) $9540\frac{380}{633} \times 19350$;

8. a) $8642\frac{132}{725} \times 7865$; b) $256934\frac{59}{85} \times 13845$;

9. a) $20783\frac{12}{56}\frac{34}{79} \times 36453$; b) $83253\frac{229}{309} \times 57264$.

10. Auf ein Hemd braucht man $3\frac{3}{4}$ Meter Leinwand; wie viel auf ein Dutzend Hemden?

11. Wenn ein Kilogramm $\frac{18}{25}$ fl. kostet, wie hoch kommen 2, 3, 7, 12, 85, 235, 3014 Kilogramm?

12. In einem gleichseitigen Vierecke beträgt jede Seite $3\frac{7}{10}$ dm; wie groß ist der ganze Umfang?

13. Wenn ein Hektoliter Weizen $6\frac{7}{12}$ fl. kostet, wie viel kosten 4, 8, 13, 38, 87, 108 Hektoliter?

14. Ein Pferd braucht täglich $\frac{2}{25}$ Hektoliter Hafer; wie viel brauchen 15 Pferde in 52 Tagen?

15. Ein freifallender Körper legt in der 1. Secunde $4\frac{19}{21}$ m zurück, in der 2. Secunde 3mal, in der 3. Secunde 5mal, in den 4. Secunde 7mal so viel; a) wie groß sind die Fallräume für die 2., 3., 4. Secunde, b) wie groß der Fallraum für alle vier Secunden?

16. Ein Holzhändler kauft 80 Cub.m Holz à $4\frac{3}{4}$ fl., 47 Cub.m à $5\frac{1}{20}$ fl., 66 Cub.m à $5\frac{2}{5}$ fl., und verkauft 1 Cub.m durchschnittlich um $6\frac{3}{4}$ fl.; wie viel gewinnt er, wenn er $14\frac{9}{25}$ fl. Nebenauslagen hat?

Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

§. 41. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit derselben multipliciert (§. 33). Z. B.

1) $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9}$ oder

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Das erste Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn der Zähler durch die ganze Zahl theilbar ist.

2) $13\frac{1}{2} : 9 = \frac{27}{2} : 9 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

3) $8\frac{7}{8} : 10 = \frac{71}{8} : 10 = \frac{71}{80}$.

4) $\frac{12}{25} : 8 = \frac{12}{200} = \frac{3}{50}$ oder kürzer $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{2}{25}} : 8 = \frac{3}{50}$.

Aufgaben.

1.* a) $\frac{10}{11} : 5 = ?$ b) $\frac{9}{10} : 3 = ?$ c) $\frac{8}{15} : 4 = ?$

2.* a) $\frac{3}{4} : 2 = ?$ b) $\frac{7}{9} : 3 = ?$ c) $\frac{5}{6} : 10 = ?$

3.* a) $12\frac{6}{7} : 3 = ?$ b) $9\frac{1}{6} : 5 = ?$ c) $13\frac{1}{2} : 6 = ?$

4.* a) $\frac{9}{28} : 12 = ?$ b) $\frac{15}{16} : 20 = ?$ c) $\frac{14}{17} : 21 = ?$

5.* a) $3\frac{5}{6} : 5 = ?$ b) $2\frac{3}{4} : 4 = ?$ c) $12\frac{3}{5} : 7 = ?$

6. a) $37\frac{11}{12} : 15 = ?$ b) $128\frac{13}{48} : 25 = ?$

7. a) $78934\frac{37}{40} : 378 = ?$ b) $50831\frac{131}{200} : 703 = ?$

8. a) $17908\frac{283}{445} : 137 = ?$ b) $24170\frac{391}{533} : 865 = ?$

9. Wie viel ist der 12. Theil von $\frac{3}{4}$, von $1\frac{1}{2}$, $3\frac{7}{8}$, $15\frac{3}{5}$, $1224\frac{3}{10}$?

10. Addiere den 4ten, 5ten und 6ten Theil von $23\frac{2}{3}$.

11. Wie groß ist der Unterschied zwischen dem 10ten und 12ten Theile von $108\frac{6}{25}$?

12. 100 Kilogr. kosten $58\frac{3}{4}$ fl.; wie hoch kommt ein Kilogr.?

13. Jemand kauft das Dutzend Seidentücher um $17\frac{2}{5}$ fl.; wie hoch kommt ein Stück?

14. 48 Meter kosten $158\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet 1 Meter? wie hoch kommen 2, 7, 13, 41 Meter?

15. Ein Dampfwagen legt in 5 Stunden $159\frac{9}{10}$ Kilometer zurück; wie viel in einer Stunde?

16. Wenn 1 Hektoliter Wein 24 fl. kostet, wie viel Hektoliter bekommt man für $63\frac{1}{2}$ fl., wie viel für $90\frac{2}{5}$ fl., für $290\frac{9}{20}$ fl.?

Multiplication mit einem Bruche.

§. 42. Es sei 4 mit $\frac{3}{5}$ zu multiplicieren. Nach der allgemeinen Erklärung der Multiplication sollte man 4 $\frac{3}{5}$mal als Summand setzen, was jedoch keinen Sinn hat. Man ist daher genöthigt, die Erklärung des Multiplicierens so zu erweitern, daß sie auch für die Brüche anwendbar wird.

Um 4 mit 3 zu multiplicieren, muß man 4 3mal als Summand setzen; um 4 mit dem 5ten Theile von 3 zu multiplicieren, wird man nicht 4 selbst, sondern nur den 5ten Theil von 4 3mal als Summand nehmen; somit

$$4 \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{4}{5} \times 3 = \tfrac{12}{5}.$$

Eine Zahl mit einem Bruche multiplicieren heißt also, sie durch den Nenner des Bruches dividieren und den Quotienten mit dem Zähler multiplicieren.

Die Multiplication mit einem Bruche schließt demnach zwei Rechnungen in sich, eine Division und eine Multiplication.

Diese Bedeutung der Multiplication mit einem Bruche läßt sich am besten an Aufgaben mit benannten Zahlen auffassen. Z. B. 1 Meter kostet 4 fl., wie viel kosten $\frac{3}{5}$ Meter? — $\frac{3}{5}$ Meter kosten 4 fl. $\times \frac{3}{5}$. Was dieses Product bedeutet, ersieht man, wenn man die Aufgabe auf die gewöhnliche Weise auflöst, nämlich:

1 Meter kostet 4 fl.;

$\frac{1}{5}$ Meter kostet den 5ten Theil von 4 fl., also $\frac{4 \text{ fl.}}{5}$;

$\frac{3}{5}$ Meter kosten 3mal so viel als $\frac{1}{5}$ Meter, also $\frac{4 \text{ fl.}}{5} \times 3$;

folglich ist $4 \text{ fl.} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \text{ fl.}}{5} \times 3.$

Ist der Zähler des Multiplicators 1, so reduciert sich die Rechnung auf eine Division; z. B.

$$7 \times \tfrac{1}{2} = 7 : 2; \quad 8 \times \tfrac{1}{3} = 8 : 3;$$
$$11 \times \tfrac{1}{4} = 11 : 4.$$

Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . multiplicieren, heißt daher so viel, als: die Zahl durch 2, 3, 4 . . . dividieren.

Hat man einen Bruch, z. B. $\frac{4}{5}$ mit einem Bruche $\frac{7}{9}$ zu multiplicieren, so ist

der 9te Theil von $\frac{4}{5} \cdot \cdot \cdot \frac{4}{5 \times 9}$

und das 7fache von $\frac{4}{5 \times 9} \cdot \cdot \frac{4 \times 7}{5 \times 9}$

also $\frac{4}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{4 \times 7}{5 \times 9} = \frac{28}{45}$;

d. h. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, indem man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliciert und das erste Product als Zähler, das zweite als Nenner annimmt.

Aufgaben.

1.* a) $8 \times \frac{3}{4} = ?$ b) $14 \times \frac{4}{5} = ?$ c) $7 \times \frac{5}{8} = ?$

2.* a) $23 \times \frac{1}{2} = ?$ b) $85 \times \frac{1}{6} = ?$ c) $43\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = ?$

3.* a) $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = ?$ b) $\frac{11}{12} \times \frac{5}{6} = ?$ c) $\frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = ?$

4. a) $\frac{37}{40} \times \frac{21}{25} = ?$ b) $\frac{32}{45} \times \frac{16}{75} = ?$

5. $\frac{7}{8} \times \frac{12}{25} = \frac{84}{200} = \frac{21}{50}$ oder $\frac{\overset{3}{7}}{8} \times \frac{\overset{2}{12}}{25} = \frac{21}{50}$.

6. a) $\frac{18}{25} \times \frac{3}{8} = ?$ b) $\frac{12}{35} \times \frac{14}{15} = ?$

7. a) $\frac{5}{12} \times 0{\cdot}36 = ?$ b) $\frac{35}{64} \times 0{\cdot}7 = ?$

8. $5\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{23}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{69}{20} = 3\frac{9}{20}$.

9. $17\frac{3}{4} \times 12\frac{3}{7} = \frac{71}{4} \times \frac{87}{7} = \frac{6177}{28} = 220\frac{17}{28}$.

10. a) $3\frac{17}{18} \times \frac{5}{8} = ?$ b) $\frac{13}{18} \times 27\frac{3}{7} = ?$

11. a) $2\frac{4}{15} \times 3{\cdot}85 = ?$ b) $4{\cdot}15 \times 7\frac{3}{40} = ?$

12. a) $\begin{array}{r} 715 \times \frac{5}{8} \\ \hline 357\frac{1}{2} \,..\, \frac{1}{2} \\ 89\frac{3}{8} \,..\, \frac{1}{8} \\ \hline 446\frac{7}{8} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 536 \times 5\frac{3}{4} \\ \hline 3216 \,..\, 6 \\ \text{ab}\ \ 134 \,..\, \frac{1}{4} \\ \hline 3082 \end{array}$

13. a) $2476 \times 1\frac{3}{8} = ?$ b) $1505 \times 3\frac{5}{8} = ?$

14. a) $3014 \times 8\frac{5}{6} = ?$ b) $5932 \times 19\frac{7}{8} = ?$

15. a) $1892\frac{58}{75} \times 295\frac{4}{5} = ?$ b) $97403\frac{87}{128} \times \frac{2345}{3337} = ?$

16. a) $564\frac{3917}{4075} \times 37\frac{219}{572} = ?$ b) $6295 \times 2134\frac{719}{5375} = ?$

17. $9807\frac{2378}{4559} \times 8796\frac{1267}{3448} = ?$

18. $8138\frac{1324}{3999} \times 4925\frac{2423}{9993} = ?$

19. Wie viel ist $\frac{2}{3}$, wie viel $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ von $68\frac{7}{10}$?

20. Wie viel ist $\frac{7}{8}$ des Unterschiedes $19\frac{7}{10} - 8\frac{3}{4}$?

21. Wie viel beträgt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ von $13\frac{4}{5}$ zusammengenommen?

$13\frac{4}{5} = \frac{69}{5}$

$\frac{69}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{69}{10}$ | $\overset{20}{}$ | 2 | 138

$\frac{69}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{46}{5}$ | | 4 | 184

$\frac{69}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{207}{20}$ | | 1 | 207

$\frac{529}{20} = 26\frac{9}{20}$

kürzer: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12}$; $\frac{69}{5} \times \frac{23}{12} = \frac{529}{20} = 26\frac{9}{20}$.

22. Um wie viel ist $\frac{7}{8}$ von $65\frac{3}{5}$ größer als $\frac{3}{4}$ von $55\frac{5}{6}$?

23. Ein Hektoliter Weizen wiegt 76 Kilogr.; wie viel wiegen $6\frac{1}{4}$ Hektoliter, wie viel $7\frac{3}{8}$, $10\frac{1}{2}$, $17\frac{7}{16}$ Hektoliter?

24. Der Flächenraum von Niederösterreich ist $198\frac{1}{4}\square^{Mm}$, $\frac{17}{50}$ davon betragen die Waldungen; wie viel Flächenraum nehmen diese ein?

25. Wie viel Meter betragen $115\frac{3}{8}$ Yards à $\frac{32}{35}$ Meter?

26. Wenn ein Meter $5\frac{2}{5}$ fl. kostet, wie viel kosten $2\frac{1}{2}$, $3\frac{5}{8}$, $6\frac{3}{4}$ Meter?

27. Vier Personen theilen eine Summe von $745\frac{3}{5}$ fl. so unter einander, dass A $\frac{1}{4}$, B $\frac{3}{8}$, C $\frac{1}{5}$, und D den Rest bekommt; wie viel kommt auf jeden?

28. Es werden $136\frac{1}{2}$ Hektoliter Wein à $23\frac{2}{5}$ fl. gekauft, A erhält davon $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{5}$, C $\frac{1}{6}$, D $\frac{1}{10}$; wie viel muß jeder bezahlen?

29. Wie viel wiegen 23 vierkantige Eisenstangen von $25\frac{1}{4}^{dm}$ Länge, $2\frac{16}{25}^{dm}$ Breite, $\frac{3}{10}^{dm}$ Dicke, wenn 1 Cub.^{dm} Eisen $7\frac{4}{5}$ Kilogr. wiegt?

30. Ein Rechteck ist $36\frac{3}{4}^{m}$ lang und $28\frac{1}{5}^{m}$ breit; wie groß ist seine Fläche?

31. Wie hoch wird ein Garten, welcher $62\frac{3}{4}^{m}$ lang und $23\frac{7}{10}^{m}$ breit ist, zu stehen kommen, wenn das $\square^{m}$ mit $2\frac{3}{4}$ fl. bezahlt wird?

32. Ein rechtwinkliges Gefäß hat $1\frac{5}{8}^{m}$ Länge, $1\frac{1}{5}^{m}$ Breite und $\frac{9}{16}^{m}$ Tiefe; wie groß ist der Inhalt?

Division durch einen Bruch.

§. 43. Im Sinne des Messens. Wie oft ist $\frac{4}{5}$ in 12 enthalten? — Entweder: $12 = \frac{60}{5}$; $\frac{4}{5}$ ist in $\frac{60}{5}$ so oft enthalten, als 4 in 60, man hat also:

$$12 : \tfrac{4}{5} = \tfrac{60}{5} : \tfrac{4}{5} = 60 : 4 = 15.$$

Oder: $\frac{4}{5}$ ist der 5te Theil von 4; daher wird $\frac{4}{5}$ in 12 5mal so oft enthalten sein als 4. Um daher zu erfahren, wie oft $\frac{4}{5}$ in 12 enthalten ist, untersucht man zuerst, wie oft 4 darin enthalten ist, d. i. man dividiert 12 durch den Zähler 4, und nimmt den erhaltenen Quotienten 5mal, d. i. multipliciert ihn mit dem Nenner 5. Es ist daher auch

$$12 : \tfrac{4}{5} = \tfrac{12}{4} \times 5 = 15.$$

Im Sinne des Theilens. Die Aufgabe, 12 in $\frac{4}{5}$ gleiche Theile zu theilen, hat keinen Sinn; man ist daher genöthiget, den ursprünglichen Begriff des Theilens so zu erweitern, daß er auch für Brüche anwendbar wird. Wird 12 in 4 gleiche Theile getheilt, so muß ein solcher Theil 4mal genommen 12 geben; 12 in 4 gleiche Theile theilen, heißt daher auch so viel als: eine Zahl suchen, welche 4mal genommen 12 gibt. Ist nun 12 durch $\frac{4}{5}$ zu dividieren, so kann man zwar nicht sagen, 12 soll in $\frac{4}{5}$ gleiche Theile getheilt werden;

wohl aber: es soll eine Zahl gesucht werden, welche $\frac{4}{5}$mal genommen, d. i. von welcher der 5te Theil 4mal genommen, 12 gibt. Die Zahl, welche 4mal genommen 12 gibt, ist $\frac{12}{4}$; die Zahl aber, von welcher schon der 5te Theil 4mal genommen 12 gibt, ist 5mal so groß, also $\frac{12}{4} \times 5$. Man hat daher

$$12 : \tfrac{4}{5} = \tfrac{12}{4} \times 5 = 15.$$

Mag daher die Division als Messung oder als Theilung aufgefaßt werden, so gilt die Erklärung:

Eine Zahl durch einen Bruch dividieren heißt, die Zahl durch den Zähler des Bruches dividieren und den Quotienten mit dem Nenner multiplicieren.

Man hat z. B.

$$8 : \tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{3} \times 5 = \frac{8 \times 5}{3}$$

$$\tfrac{4}{7} : \tfrac{3}{5} = \frac{4}{7 \times 3} \times 5 = \frac{4 \times 5}{7 \times 3}$$

Es ist aber auch

$$8 \times \tfrac{5}{3} = \frac{8 \times 5}{3},$$

$$\tfrac{4}{7} \times \tfrac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{7 \times 3}.$$

Es gibt also

$8 : \frac{3}{5}$ dieselbe Zahl wie $8 \times \frac{5}{3}$.

und $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$ " " " $\frac{4}{7} \times \frac{5}{3}$.

Man kann daher auch sagen:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.

Insbesondere ist

$7 : \frac{1}{2} = 7 \times 2$, $8 : \frac{1}{3} = 8 \times 3$, $\frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \times 4$.

Eine Zahl durch $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ . . . dividieren, heißt also so viel, als: die Zahl mit 2, 3, 4 . . . multiplicieren.

Häufig treten die Multiplication und die Division der Brüche mit einander in Verbindung auf.

Es sei z. B. $\frac{7}{10} \times \frac{3}{8}$ durch $\frac{11}{15}$ zu dividieren. Man hat

$$\frac{\frac{7}{10} \times \frac{3}{8}}{\frac{11}{15}} = \frac{7 \times 3 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \times 8 \times 11} = \frac{63}{176}.$$

Der Quotient wird nicht geändert, wenn man den Didibend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert. Multipliciert man hier Dividend und Divisor mit 10, so fällt 10 als Nenner im Dividend weg, kommt dagegen als Factor in den Divisor. Eben so wird durch die Multiplication mit 8 der Nenner 8 des Dividends als Factor in den Divisor, und durch die Multiplication mit 11 der Nenner 11 des Divisors als Factor in den Dividend gebracht. Der dadurch entstandene Bruch wird sodann durch 5 (wodurch 10 und 15 theilbar sind) abgekürzt.

Wenn gemischte Zahlen vorkommen, so werden sie zu unechten Brüchen eingerichtet; z. B.

$$\frac{2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{5}}{1\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{18}{5}}{\frac{7}{4}} = \frac{\cancel{5} \times 18 \times \overset{2}{\cancel{4}}}{2 \times \cancel{5} \times 7} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}.$$

Aufgaben.

1. a) $\frac{3}{16} : \frac{1}{5} = ?$ b) $10 : \frac{3}{7} = ?$ c) $15 : \frac{5}{8} = ?$
2. $\frac{7}{10} : \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$
3. a) $\frac{13}{18} : \frac{11}{17} = ?$ b) $\frac{9}{16} : \frac{3}{20} = ?$ c) $\frac{57}{64} : \frac{21}{32} = ?$
4. $3 : 2\frac{1}{2} = 3 : \frac{5}{2} = 3 \times \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}.$
5. $7\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{23}{3} \times 2 = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}.$
6. a) $138\frac{7}{15} : \frac{1}{10} = ?$ b) $17\frac{16}{21} : \frac{11}{12} = ?$
7. a) $18\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3} = ?$ b) $7\frac{3}{8} : 32\frac{3}{10} = ?$
8. a) $0{\cdot}52 : 3\frac{2}{5} = ?$ b) $37\frac{5}{8} : 0235 = ?$
9. a) $25\frac{7}{9} : 15\frac{1}{18} = ?$ b) $32587\frac{23}{50} : \frac{127}{130} = ?$
10. a) $29607 : 1202\frac{55}{128} = ?$ b) $1728\frac{325}{626\,8} : 57\frac{13}{25}\frac{7}{0} = ?$
11. a) $20 \times \frac{3}{4} : \frac{7}{8} = ?$ b) $7\frac{5}{13} \times 2\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} = ?$
12. a) $25\frac{5}{8} \times 214\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = ?$ b) $319\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} : 7\frac{1}{4} = ?$
13. a) $\dfrac{1814\frac{1}{2} \times 100}{5\frac{1}{2} \times 5737\frac{11}{20}} = ?$ b) $\dfrac{43\frac{3}{4} \times 32 \times 12\frac{1}{2}}{28\frac{3}{4} \times 28} = ?$
14. Von welcher Zahl betragen $\frac{5}{8}$ genau 100?
15. Welches ist die Zahl, von welcher $\frac{3}{5}$ gerade so viel ist als $\frac{4}{9}$ von $23\frac{1}{2}$?
16. Von welcher Zahl betragen $\frac{27}{32}$ um $72\frac{5}{8}$ mehr als $\frac{13}{16}$ von $588\frac{17}{85}$?
17. Welches ist die Zahl, von welcher $\frac{23}{40}$ um $15\frac{3}{25}$ weniger betragen als $\frac{31}{48}$ von $2358\frac{17}{30}$?
18. Jemand verdient täglich $\frac{3}{4}$ fl.; wie lange wird er arbeiten müßen, um $19\frac{1}{2}$ fl. zu verdienen?
19. Wenn $\frac{7}{8}$ Meter $4\frac{1}{5}$ fl. kosten, wie hoch kommt 1 Meter?

$\frac{7}{8}$ Meter kost. $\frac{21}{5}$ fl.
$\frac{1}{8}$ " " $\frac{3}{5}$ "
1 " " $\frac{24}{5}$ fl. $= 4\frac{4}{5}$ fl.

20. Ein Acker, welcher $5\frac{4}{4}$ Hektar enthält, wird um 1820 fl. verkauft; wie viel kostet 1 Hektar?

21. Wenn ein Dampfwagen in $5\frac{7}{15}$ Stunden $228\frac{4}{5}$ Kilometer zurücklegt, wie viel Kilometer legt er in einer Stunde zurück?

22. $4\frac{1}{2}$ Kilogr. Legierung enthalten $3\frac{321}{400}$ Kil. feines Gold; wie viel tausendtheilig ist die Legierung?

23. Ein Hektoliter nimmt $\frac{1}{10}$ Cub.^{m} Raum ein; wie viel Hektoliter fasst ein Fass von $2\frac{17}{20}$ Cub^{m} Inhalt?

24. Ein Rechteck hat $222\frac{3}{4}\square^{m}$ Fläche; wie breit ist dasselbe, wenn die Länge $16\frac{1}{5}^{m}$ beträgt?

25. Wie viel kosten $8\frac{3}{4}$ Hektoliter, wenn $2\frac{3}{8}$ Hektoliter $47\frac{1}{2}$ fl. kosten?

26. Wenn $6\frac{5}{8}$ Meter $28\frac{1}{5}$ fl. kosten, wie hoch kommen $9\frac{1}{4}$ Meter?

27. Eine Dose, welche $4\frac{1}{2}$ Dekagramm schwer ist und 750 Tausendtheile feines Silber enthält, kostet $15\frac{7}{25}$ fl.; wie theuer wird ein Dekagramm feines Silber gerechnet?

28. Jemand kauft $45\frac{2}{5}$ Meter Tuch, das Meter zu $5\frac{3}{4}$ fl.; wie theuer muß er ein Meter verkaufen, um im Ganzen $29\frac{51}{100}$ fl. zu gewinnen?

29. Wie hoch kommt eine Mauer von $78\frac{3}{4}^{m}$ Länge, $\frac{7}{10}^{m}$ Dicke und $11\frac{2}{5}^{m}$ Höhe, wenn 20 Cub.^{m} mit $163\frac{2}{5}$ fl. bezahlt werden?

Wiederholungsaufgaben.

§. 44. 1.* Bringe folgende Brüche auf den kleinsten Ausdruck:

$\frac{8}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{15}{25}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{35}{50}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{75}{100}$.

2.* $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$; $\frac{2}{5} + \frac{9}{10}$; $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$; $\frac{1}{3} + \frac{11}{12}$.

3.* $2\frac{1}{3} + \frac{5}{4}$; $18\frac{1}{2} + 5\frac{5}{6}$; $7\frac{1}{2} + 9\frac{7}{10}$; $42\frac{2}{3} + 19\frac{7}{15}$.

4.* $\frac{1}{4}$ von 240, 360, 128, 76, 192, 276, 104, 332.

5.* $\frac{1}{6}$ von 420, 246, 348, 150, 204, 357, $511\frac{1}{2}$.

6.* $\frac{3}{5}$ von 150, 205, 350, 78, 112, $47\frac{1}{3}$, $108\frac{5}{6}$.

7. Dividiere 179820 durch jede der Zahlen:

a) 12, b) 18, c) 23, d) 37, e) 45, f) 89.

8. Dividiere durch 68 jede der Zahlen:

a) 30590, b) 122604, c) 378935, d) 790264.

9. Der Wasserspiegel eines Flusses liegt bei A 2478^{m}, bei B 1938^{m} über der Meeresfläche; wie groß ist sein Gefälle von A bis B?

10. Ein Kaufmann erhält 6 Fässer Kaffee; das Fass A enthält $124\frac{1}{2}$ Kilogr., B $126\frac{3}{5}$ Kil., C $120\frac{7}{10}$ Kil., D $118\frac{5}{8}$ Kil., E $117\frac{7}{8}$ Kil., F $119\frac{3}{4}$ Kil.; wie viel Kilogr. sind es im Ganzen?

11. Auf einer Eisenbahn wurden im Jahre 1875 1250855 Personen befördert; wie viel kamen durchschnittlich auf einen Tag?

12. Mache folgende Brüche gleichnamig:

a) $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{2}{9}, \frac{3}{4}$;
b) $\frac{5}{18}, \frac{11}{16}, \frac{17}{24}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{19}{36}$;
c) $\frac{9}{70}, \frac{7}{25}, \frac{11}{60}, \frac{3}{80}, \frac{37}{56}$;
d) $\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{30}, \frac{13}{80}, \frac{71}{100}$.

13. $102\frac{3}{16}$ — $27\frac{17}{20}$; $171\frac{8}{13}$ — $37\frac{6}{7}$; $251\frac{8}{21}$ — $94\frac{17}{35}$;

14. $755\frac{19}{36}$ — $283\frac{25}{27}$; $2015\frac{4}{9}$ — $739\frac{13}{16}$; $1234\frac{13}{24}$ — $807\frac{23}{64}$.

15. Verwandle in Decimalbrüche:

a) $\frac{3}{5}, 2\frac{7}{8}, \frac{17}{20}, \frac{21}{25}, 18\frac{9}{16}, \frac{31}{40}, 75\frac{31}{125}, 9\frac{13}{32}, \frac{57}{64}$;
b) $\frac{5}{11}, 8\frac{18}{37}, \frac{40}{41}, 7\frac{6}{7}, 10\frac{11}{13}, 5\frac{1}{6}, \frac{29}{33}, \frac{39}{74}, 6\frac{211}{440}$.

16. Ein Goldarbeiter legiert feines Gold, Gold von 800 und 540 Tausendtheilen Gehalt zu gleichen Theilen; welchen Feingehalt enthält die Legierung?

17. Man legiert 3 Kilogr. Gold, das 125 Tausendtheile Kupfer enthält, mit 5 Kil. Silber, das 164 Tausendtheile Kupfer enthält; wie viel Kupfer ist in jedem Kilogr. der Legierung?

18. Was ist vortheilhafter, $8\frac{9}{64}$ Kilogr. einer Waare für $16\frac{4}{5}$ fl., oder $10\frac{3}{4}$ Kil. derselben Waare für $22\frac{7}{12}$ fl. einzukaufen?

19. A nimmt täglich $4\frac{9}{20}$ fl., B $3\frac{17}{25}$ fl. ein; wie viel nimmt jeder von ihnen in 25 Tagen ein, um wie viel A mehr als B, und wie viel nehmen beide zusammen ein?

20. A gibt den 4ten Theil von $1135\frac{2}{3}$ fl. aus, B den 5ten Theil von $1731\frac{3}{4}$ fl.; wie viel legen beide zusammen aus?

21. 1 Liter Wein wiegt $\frac{24}{25}$ Kilogramm; wie viel wiegt ein Fass, das 204 Liter Wein enthält, wenn das leere Fass $33\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegt?

22.* Mache folgende Brüche gleichnamig;

a) $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{8}$; b) $\frac{3}{4}$ und $\frac{11}{16}$; c) $\frac{13}{15}$ und $\frac{17}{20}$;
d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$; e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$; f) $\frac{9}{10}, \frac{7}{12}, \frac{11}{20}$.

23.* $\frac{3}{4}$ — $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ — $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{10}$ — $\frac{1}{4}$; 4 — $\frac{3}{8}$; 10 — $8\frac{3}{4}$.

24.* $3\frac{1}{2}$ — $1\frac{3}{4}$; 43 — $27\frac{9}{10}$; $64\frac{1}{6}$ — $55\frac{1}{3}$; $87\frac{3}{5}$ — $68\frac{7}{10}$.

25. a) $30627 \times 30695 = ?$ b) $84091 \times 35709 = ?$

26. a) $71904 \times 47081 = ?$ b) $37925 \times 85026 = ?$

27. a) $31062 \times 90704 = ?$ b) $24831 \times 39506 = ?$

28. Berechne abgekürzt in 3 Decimalen:

a) $8{\cdot}073 \times 0{\cdot}6504$; b) $0{\cdot}578 \times 97{\cdot}65$;
c) $5{\cdot}0793 \times 0{\cdot}0849$; d) $0{\cdot}6087 \times 0\,6087$;
e) $25{\cdot}3418 \times 12{\cdot}0972$; f) $1{\cdot}045 \times 1{\cdot}045 \times 1{\cdot}045$.

29. Bestimme mit Anwendung von Vortheilen:

a) 13725 : 25; b) 2971625 : 125;
c) 78286 : $33\frac{1}{3}$; d) 595486 : $12\frac{1}{2}$.

30.* Ein Wirth zapft ein Fäßchen Wein von 75 Liter in Flaschen ab, deren jede $\frac{3}{4}$ Liter faßt; wie viel Flaschen Wein erhält er?

31. Das Licht legt den Weg von der Sonne zur Erde, d. i. eine Entfernung von 20657700 geogr. Meilen, in 493·22 Secunden zurück; wie viele Meilen in 1 Secunde?

32. Von zwei Gärten ist der eine $47{\cdot}34^m$ lang und $10\,32^m$ breit, der andere $30{\cdot}56^m$ lang und $9\,65^m$ breit; a) wie groß sind beide Gärten zusammen? b) um wie viel ist der erste größer als der zweite?

33. Suche das größte gemeinschaftliche Maß von

a) 372 und 1032; b) 3276 und 9867;
c) 11968 und 23744; d) 80219 und 172843;
e) 435, 522, 667; f) 3828, 5858, 8845.

34. a) $50\frac{3}{5} \times 25$; $125\frac{9}{32} \times 48$; $348\frac{17}{20} \times 824$;
b) $39 \times 8\frac{3}{4}$; $209 \times 17\frac{9}{16}$; $368{\cdot}32 \times 19\frac{23}{40}$.

35. $38\frac{17}{20} \times 45\frac{12}{25}$; $49\frac{16}{25} \times 57\frac{10}{27}$; $87\frac{23}{32} \times 91\frac{31}{50}$.

36. Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche:

a) 0·8, 0·15, 3·45, 0·05, 7·35, 16 16, 0·125;
b) 4·725, 0·075, 31·696, 0·256, 0·0325, 8·1375.

37. Wie groß ist die Summe von fünf Zahlen, von denen die erste $731\frac{11}{12}$ und jede folgende um [illegible]$_5$ größer als die vorhergehende ist?

38. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist 20657700 geogr. Meilen, der Venus von der Sonne 14942334, und des Merkur von der Sonne 7996596 Meilen; um wie viel Meilen sind die Planeten Venus und Merkur der Sonne näher, als unsere Erde?

39. Jemand hat $18\frac{53}{80}$ Hektar Ackergründe, $19\frac{9}{64}$ Hektar Wiesen, $13\frac{9}{25}$ Hektar Waldungen und $1\frac{341}{500}$ Hektar Gartenland; wie groß ist sein ganzer Besitzstand?

40. Ein Acker ist 185^m lang und 137^m breit; um wie viel vergrößert sich sein Flächenraum, wenn die Länge um 18^m und die Breite um 24^m vermehrt wird?

41. Ein Wasserbehälter ist $2{\cdot}52^m$ lang, $0{\cdot}75^m$ breit und $0\,39^m$ tief; wie viel Hektoliter fasst er, da 1 Hektoliter 0·1 Kub.^{m} enthält?

42.* Welches gemeinschaftliche Maß haben folgende Zahlen:
a) 24 und 32; b) 28 und 35; c) 60 und 90?
d) 26 und 39; e) 60 und 84; f) 120 und 144?

43.* a) 5mal $3\frac{7}{10}$, $4\frac{5}{12}$, $4\frac{5}{12}$; b) 4mal $5\frac{7}{9}$, $6\frac{5}{8}$, $7\frac{11}{12}$.

44.* a) 6mal $4\frac{13}{18}$, $3\frac{7}{10}$, $8\frac{17}{24}$; b) 7mal $2\frac{10}{21}$, $3\frac{8}{15}$, $9\frac{9}{14}$.

45.* Wie viel gibt das 8fache des Unterschiedes zwischen $10\frac{3}{8}$ und $3\frac{3}{4}$?

46.* Um wie viel ist der 5te Theil von $36\frac{3}{4}$ größer als 3mal $1\frac{7}{10}$?

47. $17084\frac{134}{625} + 56014\frac{73}{250} + 739\frac{85}{112} + 3956\frac{31}{80} = ?$

48. $69374\frac{82}{185} + 8315\frac{97}{180} + 35717\frac{19}{150} + 39090\frac{53}{80} = ?$

49. $13789\frac{177}{572} + 24890\frac{109}{156} + 35901\frac{43}{390} + 46012\frac{191}{195} = ?$

50. Der Halbmesser eines Kreises ist $4{\cdot}157^{dm}$; wie groß ist a) sein Umfang, b) sein Flächeninhalt? (3 Dec.).

51. Ein Baugrund wird um $728\frac{7}{20}$ fl. verkauft; wie viel $\square^m$ enthält er, wenn das $\square^m$ mit $15\frac{3}{4}$ fl. bezahlt wird?

52. Zwei Stück Leinwand haben zusammen $73\frac{1}{4}$ Meter; ein Stück hat um $3\frac{3}{4}$ Meter mehr als das andere und kostet deshalb um $2\frac{1}{4}$ fl. mehr; wie viel Meter hat jedes Stück und wie viel kostet jedes?

53. Berechne mit Anwendung von Vortheilen:
a) 370226×11; $142{\cdot}528 \times 13$; 93609×701;
b) 601482×25; 276385×49; $0{\cdot}67118 \times 56$;
c) 59163×96; $4{\cdot}13928 \times 799$; $863{\cdot}71 \times 9{\cdot}99$.

54. Berechne auf 3 Decimalen:
a) $245{\cdot}4257 : 1{\cdot}728$; b) $20{\cdot}6031 : 0{\cdot}7092$;
c) $2{\cdot}135 : 0{\cdot}0625$; d) $19{\cdot}339 : 8{\cdot}1534$.

55. Zerlege in Primfactoren: 1260, 1694, 2025, 2268, 3075, 3828, 5376, 10528.

56. Um wie viel verändert sich der Bruch $\frac{37}{48}$, wenn man a) zum Zähler und zum Nenner 8 addiert; b) wenn man vom Zähler und vom Nenner 8 subtrahiert?

57. Um wie viel wird der Bruch $\frac{54087}{72099}$ größer oder kleiner, wenn man im Zähler und Nenner a) die letzte, b) die zwei letzten Ziffern rechts wegläßt?

58. Ein Ballen Baumwolle wog $104\frac{1}{4}$ Kilogr., der Ballen für sich wog $8\frac{3}{8}$ Kilogr.; wie hoch kommt ein Kilogramm davon, wenn die ganze Baumwolle 268·83 fl. kostete?

59. Jemand kauft ein Dutzend Hemden für $35\frac{2}{5}$ fl.; wie hoch kommt ein Hemd?

60. a) $2184\frac{1}{6} : 75 = ?$ b) $16009\frac{1}{7} : 412 = ?$

61. a) $726 : 3\frac{7}{10} = ?$ b) $351\frac{17}{20} : 33\frac{1}{3} = ?$

62. a) $\frac{350 \times 120 \times 175}{360 \times 125} = ?$ b) $\frac{144 \times 84 \times 560}{210 \times 70} = ?$

63. Drücke durch möglichst kleine Zahlen aus:

a) $\frac{296}{836}$, $\frac{168}{216}$, $\frac{575}{750}$, $\frac{384}{864}$, $\frac{300}{468}$, $\frac{560}{896}$, $\frac{684}{900}$, $\frac{704}{960}$;

b) $\frac{900}{1025}$, $\frac{2106}{4482}$, $\frac{3055}{4625}$, $\frac{1831}{3450}$, $\frac{7125}{7800}$, $\frac{8325}{9450}$.

64. Um wie viel ist der Unterschied $37\frac{5}{16} - 11\frac{3}{5}$ größer als der Unterschied $28\frac{7}{15} - 19\frac{7}{12}$?

65. Dividiere a) 89990166, b) 2149·09526 durch jede der Zahlen m) 599, n) 25·039, o) 364·13.

66. Eine Wasserpumpe kann das in einer Grube enthaltene Wasser in 15 Tagen, eine andere in 12 Tagen herausschaffen; welcher Theil des Wassers wird von beiden Maschinen zusammen in einem Tage herausgepumpt?

67. Ein $35\frac{1}{2}$ m langer und $17\frac{3}{4}$ m breiter Garten wird verkauft; wie viel nimmt man dafür ein, wenn das Ar mit $16\frac{4}{5}$ fl. bezahlt wird?

68. Eine Summe von 2952 fl. soll unter vier Personen so getheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{3}{10}$, C $\frac{7}{30}$ und D den Rest erhält; wie viel kommt auf jede Person?

69. Von folgenden Metallen wiegt 1 Cub.^{dm} in Kilogrammen: Platina $22\frac{9}{10}$, Gold $19\frac{9}{25}$, Blei $11\frac{4}{5}$, Silber $10\frac{1}{2}$, Kupfer $8\frac{8}{9}$; um wie viel ist 1 Cub.^{dm} jedes der vorangehenden Metalle schwerer, als eine Cub.^{dm} jedes der folgenden?

70. Jemand mischt $2\frac{1}{2}$ Hektoliter Wein, wovon das Liter $\frac{9}{25}$ fl. kostet, mit $4\frac{7}{10}$ Hektoliter, wovon das Liter $\frac{27}{100}$ fl. kostet; wie viel ist a) die ganze Mischung, b) jedes Liter der Mischung wert?

Vierter Abschnitt.

Das Rechnen mit mehrnamig benannten Zahlen.

I. Maße, Gewichte und Münzen.

§. 45. Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung bilden, heißt die Verwandlungszahl. Zwischen Gulden und Kreuzern ist 100 die Verwandlungszahl.

Die wichtigsten Maße, Gewichte und Münzen sammt ihren Verwandlungszahlen enthält die folgende Zusammenstellung.

1. Zeit- und Winkelmaße.

§. 46. Die Einheiten zur Zeitbestimmung sind Jahre, Monate, Wochen, Tage u. s. f.

Ein Jahr hat 12 Monate, 1 Monat wird in der Zinsrechnung gewöhnlich zu 30 Tagen, somit das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Nach dem Kalender hat der Februar 28 oder 29 Tage, April, Juni, September, November haben je 30 und die übrigen Monate haben je 31 Tage, so daß auf ein gemeines Jahr 365, auf ein Schaltjahr 366 Tage kommen. Eine Woche hat 7 Tage, 1 Tag 24 Stunden, 1 Stunde 60 Minuten, 1 Minute 60 Secunden.

Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 Grade eingetheilt. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher gleichfalls ein Grad genannt wird. Ein Grad (°) hat 60 Minuten, 1 Minute (′) 60 Secunden (″).

2. Zählmaße.

§. 47. Ein Schock hat 60, ein Schilling 30, ein Mandel 15, ein Dutzend 12 Stück.

Ein Bund Federn sind 25 Stück.

Ein Ballen Papier hat 10 Rieß, 1 Rieß 20 Buch, 1 Buch 24 Schreibbogen oder 25 Druckbogen. Außerdem besteht auch folgende decimale Eintheilung: 1 Rieß hat 10 Buch, 1 Buch 10 Hefte, 1 Heft 10 Bogen.

3. Das französische metrische Maßsystem.

§. 48. Die Grundeinheit des metrischen Systems ist das Meter, welches man als den zehnmillionsten Theil der Länge eines Erdmeridian-Quadranten angenommen hat.

Das Meter ist die Einheit des Längenmaßes; die Einheit für das allgemeine Flächenmaß ist das Quadratmeter, für das Bodenflächenmaß das Ar = 100 Quadratmeter; die Einheit für das allgemeine Körpermaß ist das Cubikmeter, und für das Getreide- und Flüssigkeitsmaß das Liter = $\frac{1}{1000}$ Cubikmeter. Die Einheit des Gewichtsmaßes ist das Gramm, d. i. das Gewicht des in $\frac{1}{1000}$ Liter enthaltenen destillierten Wassers bei 4° des 100theiligen Thermometers.

Die Vielfachen und Untertheilungen der Längen-, Flächen-, Körper- und Gewichtsmaße werden nach dem Decimalsystem gebildet, indem man vor den Namen der Einheit bei den Vielfachen griechische, bei den Untertheilungen lateinische Zahlwörter setzt. Es wird nämlich das 10fache der Einheit durch das vorgesetzte Wort Deka, das 100fache durch Hekto, das 1000fache durch Kilo und das 10000fache durch Myria, dagegen der 10te Theil der Einheit der das vorgesetzte Wort Deci, der 100ste Theil durch Centi, durch 1000ste Theil durch Milli ausgedrückt. Hiernach baut sich das metrische System auf folgende Weise auf:

Vielfache				Einheit	Untertheilungen		
Myria	Kilo	Hekto	Deka	Meter, Ar, Liter, Gramm	Deci	Centi	Milli
10000	1000	100	10		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Insbesondere hat man für das Längenmaß:

1 Myriameter (Mm) = 10000 Meter,
1 Kilometer (Km) = 1000 „
1 Hektometer (Hm) = 100 „
1 Dekameter (Dm) = 10 „
1 Meter (Einheit) (m) = 1 „
1 Decimeter (dm) = 0·1 „
1 Centimeter (cm) = 0·01 „
1 Millimeter (mm) = 0·001 „

Für das allgemeine Flächenmaß ist

1 □Mm	= 100000000 □m	1 □m (Einheit)	= 1 □m
1 □Km	= 1000000 „	1 □dm	= 0·01 „
1 □Hm	= 10000 „	1 □cm	= 0·0001 „
1 □Dm	= 100 „	1 □mm	= 0·000001 „

Für das Bodenflächenmaß hat man

1 Myriar (Ma) = 1000000 □m
1 Hektar (Ha) = 10000 „
1 Ar (Einheit) (a) = 100 „
1 Centiar (ca) = 1 „

Für das allgemeine Körpermaß ist

1 ⊠Mm = 1000000000000 ⊠m
1 ⊠Km = 1000000000 „
1 ⊠Hm = 1000000 „
1 ⊠Dm = 1000 „
1 ⊠m (Einheit) = 1 „
1 ⊠dm = 0·001 „
1 ⊠cm = 0·000001 „
1 ⊠mm = 0·000000001 „

Als Hohlmaß hat man

1 Kiloliter (Kl)	= 1000 ⊠dm	1 Liter (Einheit) (l)	= 1 ⊠dm
1 Hektoliter (Hl)	= 100 „	1 Deciliter (dl)	= 0·1 „
1 Dekaliter (Dl)	= 10 „	1 Centiliter (cl)	= 0·01 „

Für das Gewichtsmaß ist

1 Myriagramm (Mg) = 10000 Gramm
1 Kilogramm (Kg) = 1000 „
1 Hektogramm (Hg) = 100 „
1 Dekagramm (Dg) = 10 „
1 Gramm (Einheit) (g) = 1 „

1 Decigramm (dg)	=	0·1 Gramm
1 Centigramm (cg)	=	0·01 „
1 Milligramm (mg)	=	0·001 „

4. Maße, Gewichte und Münzen der österreichisch-ungarischen Monarchie.

§. 49. Die neuen österreichischen Maße und Gewichte sind die metrischen, nur mit dem Unterschiede, daß jene Maßglieder des französischen Systems, welche für das praktische Leben und für die Wissenschaft entbehrlich erscheinen, in die österreichische Maß- und Gewichtsordnung nicht aufgenommen wurden, und daß in dieser bei den Gewichten das für die Praxis wichtigste Glied, das Kilogramm, die Einheit bildet.

Längenmaße.

a. Neue Längenmaße.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter. Untertheilungen: das Decimeter = $\frac{1}{10}$ Meter, das Centimeter = $\frac{1}{100}$ Meter und das Millimeter = $\frac{1}{1000}$ Meter. Vielfache: das Kilometer = 1000 Meter und das Myriameter = 10000 Meter.

b. Frühere Längenmaße.

Die Einheit war der Fuß oder Schuh.

Der Fuß (') wird in 12 Zoll (") und der Zoll in 12 Linien (''') eingetheilt; 6 Fuß nennt man eine Klafter (°).

4000 Wiener Klafter machen eine österreichische Postmeile; 1 österr. Meile = 1·022302 geographische Meilen; 1 geogr. Meile = 0·978184 österr. Meilen.

Als Schnittwaarenmaß diente die Elle, welche in Halbe, Viertel, Achtel, oder in Drittel eingetheilt wird. Die Wiener Elle ist = 2·46 Wiener Fuß.

c. Verhältnis zwischen den früheren und den neuen Längenmaßen.

1 Meter	= 3·16375 Fuß	1 Fuß	= 0·31608 Meter
1 Meter	= 1·28608 Ellen	1 Elle	= 0·77756 Meter
1 Kilomet.	= 0·13182 öst. Meil.	1 ö. Meile.	= 7·58594 Kilom.

Flächenmaße.

a) Neue Flächenmaße.

Die allgemeinen Flächenmaße sind die Quadrate der Längenmaße. 1 $\square^{Mm}$ hat 100 $\square^{Km}$ à 1000000 $\square^{m}$; 1 $\square^{m}$ hat 100 $\square^{dm}$ à 100 $\square^{cm}$ à 100 $\square^{mm}$.

Die Einheit des Bodenflächenmaßes ist das Ar = 100□m. Vielfaches: das Hektar = 100 Ar.

b. Frühere Längenmaße.

1 Quadratklafter (□°) hat 36 Quadratfuß (□'), 1 Quadratfuß 144 Quadratzoll (□"), und 1 Quadratzoll 144 Quadratlinien (□"'); 1 Quadratmeile enthält 16000000 □°; 1 österr. □Meile = 1·045102 geogr. □Meilen; 1 geogr. □ Meile = 0·956844 österr. □ Meilen.

Das Joch zu 3 Metzen Aussaat hat 1600□°.

c. Verhältnis zwischen den alten und den neuen Flächenmaßen.

1 □m	= 10·00931 □ Fuß	1 □ Fuß	= 0·09991 □m
1 □Mm	= 1·73773 ö. □ Meilen	1 ö. □ Meile	= 0·57546 □Mm
1 Hektar	= 1·73773 Joch	1 Joch	= 0 57546 Hektar.

Körpermaße.

a) Neue Körpermaße.

Die allgemeinen Körpermaße sind die Würfel der Längenmaße. 1⊠Mm = 1000⊠Km à 1000000000⊠m; 1⊠m = 1000⊠dm à 1000⊠cm à 1000⊠mm.

Die Einheit des Hohlmaßes ist das Liter = 1⊠dm Unterabtheilungen: Das Deciliter = $\frac{1}{10}$ Liter und das Centiliter = $\frac{1}{100}$ Liter. Vielfaches: Das Hektoliter = 100 Liter.

b. Frühere Körpermaße.

1 Cubikklafter = 216 Cubikfuß, 1 Cub.' = 1728 Cubikzoll, 1 Cub." = 1728 Cubiklinien.

Beim Getreidemaße hatte man folgende Eintheilung:

1 Mut hat 30 Metzen, 1 Metzen 2 Halbe, 4 Viertel oder 8 Achtel; 1 Achtel = 2 Müllermaßel oder 8 Futtermaßel zu 2 Becher; 1 Metzen hat 1·9471 Cubikfuß.

Das Flüssigkeitsmaß hatte nachstehende Verwandlungszahlen:

1 Fuder Wein = 32 Eimer; 1 Fass Wein hat 10, und 1 Fass Bier 4 Eimer; 1 Eimer = 40 Maß zu 4 Seidel; 1 Eimer hat 1·792 Cubikfuß.

c. Verhältnis zwischen den alten und den neuen Körpermaßen.

1 Cub.m	= 31·66695 Cub. Fuß.	1 Cub. Fuß	= 0·03158 Cub.m
1 Hektolit.	= 1·62637 Metzen	1 Metzen	= 0·61487 Hektol.
1 Hektolit.	= 1·76713 Eimer	1 Eimer	= 0·56589 Hektol.
1 Liter	= 0·70685 Maß	1 Maß	= 1·41472 Liter.

Gewichte.

a) Neue Gewichte.

Die Einheit des Gewichtes bildet das Kilogramm, gleich dem Gewichte eines Cubikdecimeters (Liters) destillierten Wassers im luftleeren Raume bei der Temperatur von 4 Grad des 100theiligen Thermometers. Untertheilungen: Das Dekagramm = $\frac{1}{100}$ Kg, das Gramm = $\frac{1}{1000}$ Kg, das Decigramm = $\frac{1}{10}$ Gramm, das Centigramm = $\frac{1}{100}$ Gramm und das Milligramm = $\frac{1}{1000}$ Gramm. Vielfaches: die Tonne = 1000 Kg.

Außer diesen Gewichten hat als Gewichtseinheit für den allgemeinen Verkehr der metrische Centner = 100 Kilogramm zu gelten.

b. Frühere Gewichte.

Das Handelsgewicht. Ein Centner hat 100 Wiener Pfund (℔), 1 Pfund 32 Loth, 1 Loth 4 Quentchen.

Das Markgewicht, dessen man sich beim Abwägen des Silbers und der daraus verfertigten Sachen bediente. Die Einheit desselben ist die Wiener Mark; sie hat 16 Loth, 1 Loth 4 Quentchen, 1 Quentchen 4 Pfennige oder Denar, 1 Pfennig 2 Heller, 1 Heller 128 Richtpfennige, so dass auf eine Mark 65536 Richtpfennige kommen. Ein Loth des Markgewichtes ist etwas schwerer als 1 Loth Handelsgewicht.

Beim Münzwesen bediente man sich früher in Deutschland meistens der kölnischen Mark, welche etwas leichter ist als die Wiener Mark; es gehen nämlich 6 köln. Mark auf 5 Wiener Mark. Später wurde bei der Ausmünzung das Zollpfund, welches 500 Gramm oder nahe 28$\frac{1}{7}$ Loth des Wiener Handelsgewichtes beträgt, zu Grunde gelegt. Dieses Pfund wurde als Münzgewicht in 1000 Tausendtheile und jeder solche Theil wieder in 10 gleiche Theile, welche Asse heißen, eingetheilt.

Das Zollpfund à 30 Zolloth wurde auch bei Postsendungen angewendet.

Das Juwelengewicht. 1 Karat = 4 Juwelengran = 48$\frac{1}{8}$ W. Richtpfennige.

Das Apothekergewicht. 1 Pfund = 12 Unzen, 1 Unze = 8 Drachmen, 1 Drachme = 3 Skrupel, 1 Skrupel = 20 Apothekergran. Ein Apothekerpfund enthält 24, daher eine Unze 2 Loth des Handelsgewichtes.

Das symbolische Gewicht zur Prüfung des Goldes und des Silbers. Die Einheit war die verjüngte Mark, welche einen Pfennig des Mark- und

Silbergewichtes enthält. Beim Gold wird die Mark in 24 Karat zu 12 Grän eingetheilt, und es heißt z. B. 23karatig solches Gold, welches 23 Gewichtstheile feines Gold und 1 Gewichtstheil Zusatz enthält. Beim Silber theilt man die Mark in 16 Loth zu 18 Grän, und nennt z. B. 13löthig solches Silber, in welchem 13 Gewichtstheile feines Silber und 3 Theile Zusatz vorkommen.

Der Feingehalt der Gold- und Silbermünzen der neuen Währung wird in Tausendtheilen ausgedrückt. So z. B. enthält der neue österr. Gulden 900 Tausendtheile feines Silber und 100 Tausendtheile Kupfer; sein Feingehalt ist also $\frac{900}{1000}$ oder $\frac{9}{10}$.

c. Verhältnis zwischen den alten und den neuen Gewichten.

1 Kilogr.	= 1·78552 W. Pfd.	1 W. Pfund	= 0·56006 Kilogr.
1 Dekagr.	= 0·57137 W. Lth.	1 W. Loth	= 1 75019 Dekagr.
1 Kilogr.	= 3·56293 W. Mark	1 W. Mark	= 0·28067 Kilogr.
1 Gramm	= 4 85510 W. Karat	1 W. Karat	= 0·20597 Gramm
1 Dekagr.	= 0·6 Postloth	1 Postloth	= 1·66667 Dekagr.
1 Kilogr.	= 2·38070 Apoth. Pfd.	1 Apoth. Pfd.	= 0·42005 Kilogr.

Geld und Münzen.

In Oesterreich rechnete man früher nach Gulden, Kreuzern und Pfennigen Conventions-Münze, wornach aus einer kölnischen Mark feinen Silbers 20 Gulden ausgeprägt wurden. 1 Gulden (fl.) hatte 60 Kreuzer, 1 Kreuzer 4 Pfennige.

Seit 1. November 1858 ist die österreichische Währung, in welcher aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden, das alleinige gesetzliche Geld der ganzen Monarchie. Ein neuer Gulden wird in 100 Neukreuzer (kr.) eingetheilt. 100 fl. C. M. = 105 fl. ö. W.

Die gegenwärtig geprägten Münzen sind theils Landes-, theils Scheide-, theils Handelsmünzen.

Landesmünzen werden in Silber ausgeprägt und sind: Zweiguldenstücke zu $22\frac{1}{2}$, Eingulden stücke zu 45, und Viertelguldenstücke zu 180 aus einem halben Kilogramm feinen Silbers.

Scheidemünzen dienen nur zur Ausgleichung von Beträgen, die kleiner sind als 25 kr. Sie werden theils in Silber theils in Kupfer ausgeprägt; jedoch haben die Silberscheidemünzen einen geringeren Feingehalt, als sie verhältnismäßig zu den Landesmünzen haben sollten. In Silber werden Stücke zu 20, 10 und 5 kr, in Kupfer Stücke zu 4, 1 und $\frac{1}{2}$ kr. ausgeprägt.

Handelsmünzen endlich haben die Eigenschaft eines allgemeinen Zahlungsmittels; ihr Wert gegen die Landeswährung bleibt deshalb auch nicht unveränderlich, sondern richtet sich nach den Bedürfnissen des Handels. Als Handelsmünzen werden ausgeprägt:

1) Achtguldenstücke und Vierguldenstücke; von den ersteren gehen $77\frac{1}{2}$ Stücke, von den letzteren 155 Stücke auf ein halbes Kilogramm Gold, das $\frac{9}{10}$ fein ist.

2) Die kais. Ducaten, 67 Stück auf eine köln. Mark Gold, welches $23\frac{2}{3}$ Karat fein ist.

3) In Silber die sogenannten Levantiner-Thaler mit dem Bildnis der Kaiserin Maria Theresia und der Jahreszahl 1780, 10 Stück aus einer köln. Mark feinen Silbers.

Außerdem hat man in Oesterreich als Papiergeld die Banknoten à 10, 100, 1000 Gulden, und Staatsnoten à 1, 5 und 50 Gulden.

In den meisten österreichischen Provinzen rechnete man früher auch noch in Scheinen oder Wiener Währung. 100 fl. W. W. = 40 fl. C. M. = 42 fl. ö. W. Dieses Geld ist jedoch seit 1. Juli 1858 außer Umlauf gesetzt.

5. Die wichtigsten ausländischen Maße, Gewichte und Münzen.

§. 50. Uebersichtliche Zusammenstellung derselben:

a. Längenmaße.

Deutschland. 1 Stab (Meter) = 100 Neuzoll (Centimeter) à 100 Strich (Millimeter), 10 Stab = 1 Kette (Dekameter).

England. 1 Yard à 3 Fuß = 0·9144 Met.

Frankreich. Das Meter, wie oben unter 3.
1 alte Toise hat 6 Pariser Fuß à 12 Zoll à 12 Linien.
1 Pariser Fuß = 0·32484 Met.

Italien. Der Metro, wie in Frankreich.

Rußland. 1 Saschen = 3 Arschin = 7 Fuß. 1 russ. Fuß = 0·3048 Met. 1 Arschin = 0·7112 Met.

Schweiz. 1 Klafter hat 6 Fuß à 10 Zoll à 10 Linien; 1 Ruthe = 10 Fuß. 1 schweiz Fuß = 0·3 Met. 1 schweiz. Elle = 0·6 Met.

b. Getreidemaße.

Aegypten. 1 Ardeb von Cairo = 2·71 Hektol.
Deutschland. 1 Cubikstab hat 1000, 1 Scheffel 50 Kannen (Liter).
England. 1 Quarter hat 8 Bushels à 8 Gallons. 1 Quarter = 2·9078 Hektol.
Frankreich. Das Hektoliter, wie oben unter 3.
Italien, wie Frankreich.
Rußland. 1 Tschetwert hat 8 Tschetwerik à 4 Tschetwerka. 1 Tschetwert = 2·099 Hektol.
Schweiz. 1 Malter hat 10 Viertel à 10 Immi oder 16 Mäßlein. 1 Malter = 1·5 Hektol.

c. Flüssigkeitsmaße.

Deutschland. 1 Faß (Hektoliter) hat 100 Kannen (Liter) à 2 Schoppen.
England. Die Tonne für Wein hat 252, für Ale 192 Gallons. 1 Gallon = 4·5435 Lit.
Frankreich. Das Liter, wie unter 3.
Italien, wie Frankreich.
Rußland. 1 Faß hat 40 Wedro à 10 Kruschke. 1 Kruschka = 1·2299 Lit.
Schweiz. 1 Ohm hat 100 Maß. 1 schweiz. Maß = 1·5 Lit.

d. Gewichte.

Deutschland. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 50 Neuloth à 10 Gramm à 10 Decigramm à 10 Centigramm à 10 Milligramm. 2 Pfund sind 1 Kilogramm, 1000 Kilogr. = 20 Centner = 1 Tonne.
England. Das Handels- oder Avoir-du-poids-Gewicht (adp.): die Tonne hat 20 Centner zu 4 Quarters oder 8 Stein oder 112 Pfund à 16 Unzen à 16 Drachmen. 1 Pfd. adp. = 0·4536 Kilogr. — Das Troy-Pfund von 12 Unzen à 20 Pennyweights à 24 Grains = 0·3733 Kilogr.
Frankreich. Das Kilogramm, wie oben unter 3.
Italien, wie Frankreich.
Rußland. 1 Pud hat 40 Pfund à 96 Solotnik à 96 Doli. 1 russ. Pfund = 0·4095 Kilogr.

Schweiz. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 32 Loth à 4 Quentchen.

e. Rechnungsmünzen.

Belgien, wie Frankreich.

Dänemark rechnet nach Reichsthalern à 6 Mark à 16 Schillinge 1 Reichsthl. = 1·1377 fl. ö. W.

Deutschland rechnet in der Goldwährung nach Reichsmark à 100 Pfennige. 1 Zehnmarkstück = 5 fl. ö. W., daher 1 Mark = $\frac{1}{2}$ fl. und 1 Pfennig = $\frac{1}{2}$ Kr. ö. W.

England rechnet nach Pfund oder Livres Sterling à 20 Schilling à 12 Pence oder Deniers. 1 Pfund Sterling = 10·1051 fl. ö. W. in Silber.

Frankreich rechnet nach Francs à 100 Centimes. 1 Franc = 0·405 fl. ö. W.

Griechenland rechnet nach Drachmen à 100 Lepta. 1 neue Drachme = 0·405 fl. ö. W.

Holland rechnet nach Gulden à 100 Cents. 1 fl. holl. = 0·8505 fl. ö. W.

Italien rechnet nach Lire nuove à 100 Centesimi. 1 Lire nuova = 1 Franc = 0·405 fl. ö. W.

Nordamerikanische Freistaaten rechnen nach Dollars à 100 Cents. 1 Dollar = 2·0155 fl. ö. W. in Silber.

Portugal rechnet nach Millereis à 1000 Reis. 1 Millereis = 2·2435 fl. ö. W. in Silber.

Rußland rechnet nach Rubeln à 100 Kopeken. 1 Silberrubel = 1·6192 fl. ö. W.

Schweden rechnet nach Reichsthalern Reichsmünze à 100 Oere 1 Reichsthaler = 0·5739 fl. ö. W.

Schweiz rechnet nach Franken à 100 Rappen. 1 Frank = 0·405 fl. ö. W.

Spanien rechnet nach Duros (Piaster) à 20 Reales. 1 Duro = 2·1298 fl. ö. W.

Türkei rechnet nach Piastern à 40 Para. Der Wert eines Piasters ist schwankend und kann nahe = 0·09 fl. ö. W. angenommen werden.

II. Das Resolvieren und Reducieren.

Das Resolvieren.

§. 51. Die Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigeren Benennung verwandeln, heißt jene resolvieren oder auflösen.

1. Eine einnamige Zahl wird in eine niedrigere Benennung resolviert, indem man sie mit der entsprechenden Verwandlungszahl multipliciert. Z. B.

Wie viel Minuten sind 15 Stunden? — 1 Stunde hat 60 Minuten; 15 Stunden haben also 15mal 60 Minuten; folglich 15 Stunden $= 15 \times 60 = 900$ Minuten.

2. Eine mehrnamige Zahl wird in die niedrigste Benennung resolviert, indem man die Einheiten der höchsten Benennung mit der Verwandlungszahl für die nächst niedrigere multipliciert, zu dem Producte die gegebenen Einheiten dieser niedrigeren Benennung addiert, und dieses Verfahren fortsetzt, bis man die niedrigste Benennung erhält. Z. B.

Wie viel Tage sind 35 Jahre 7 Monate 15 Tage?

		kürzer	
	35 × 12		35 Jahre
	70		70
	420 Mon.		427 Mon.
	+7 "		12825 "
	427 × 30		
	12810 Tage		
	+15 "		
	12825 Tage.		

Ganz einfach gestaltet sich das Resolvieren, wenn die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000 ist; man darf nur die Einheiten der auf einander folgenden Benennungen einfach neben einander stellen, und die etwa fehlenden Ziffern durch Nullen ersetzen. Z. B.

65 fl. 73 kr. = 6573 kr., 198 fl. 8 kr. = 19808 kr.

$5^{m}\ 7^{dm}\ 8^{cm}\ 3^{mm} = 5783^{mm}$ 8 Kilogr. 35 Dek. = 835 Dek.

$2\boxtimes^{m}\ 813\boxtimes^{dm}\ 75\boxtimes^{cm} = 2813075\boxtimes^{cm}$.

3. Die Decimalen einer einnamigen Zahl werden in Ganze der niedrigeren Benennungen resolviert, indem

man sie zuerst mit der Verwandlungszahl für die nächst niedrigere Benennung multipliciert, und mit den im Producte erhaltenen Decimalen auf gleiche Weise weiter verfährt. Z. B.

7·625 Grad = 7° 37′ 30″.

———— × 60

37·500

———— × 60

30·0″

Gehören die Benennungen dem Decimalsystem an, d. i. sind die Verwandlungszahlen 10, 100 oder 1000, so bilden bezüglich immer eine, zwei oder drei Decimalziffern nach rechts die nächst niedrigere Benennung. Z. B.

37·58 fl. = 37 fl. 58 kr.; 6·05 fl. = 6 fl. 5 kr.

$25{\cdot}236^{m} = 25^{m}\ 2^{dm}\ 3^{cm}\ 6^{mm}$

3·6708 Hektar = 3 Hektar 67 Ar 8 $\square^{m}$

Auf dieselbe Art wird auch ein benannter gemeiner Bruch in Ganze der niedrigeren Benennungen verwandelt. Z. B.

$\frac{1}{6}\frac{3}{0}$ Jahre = 2 Mon. 18 Tage.

$\frac{1}{6}\frac{3}{0} \times 12 = \frac{1}{5}\frac{3}{} = 2\frac{3}{5}$ Mon.

$\frac{3}{5} \times 30 = 18$ Tage.

Aufgaben.

1. Wie viel Centimeter sind
   a) 45^{dm}, b) 13^{m}, c) $28^{dm}\ 7^{cm}$, d) $4^{m}\ 8^{dm}\ 5^{cm}$?
2. Wie viel Meter, Decimeter, Centim. und Millim. sind
   a) $5{\cdot}047^{m}$, b) $0{\cdot}568^{m}$, c) $7\frac{5}{8}^{m}$?
3. Verwandle in $\square^{m}$, $\square^{dm}$ und $\square^{cm}$
   a) $15{\cdot}6614\square^{m}$, b) $0{\cdot}8904\square^{m}$, c) $7\frac{5}{1}\frac{9}{2}\frac{}{5}\square^{m}$.
4. Wie viel $\square^{m}$ sind
   a) 28 Ar, b) 7 Hektar, c) 3 Hektar 8 Ar $36\square^{m}$?
5. Wie viel $\boxtimes^{cm}$ sind
   a) $35\boxtimes^{dm}$, b) $6\ \boxtimes^{m}\ 317\ \boxtimes^{dm}\ 61\ \boxtimes^{cm}$?
6. Verwandle in Hektoliter, Liter und Deciliter
   a) 23·456, b) 5·086, c) $12\frac{6}{1}\frac{4}{2}\frac{}{5}$ Hektoliter.
7. Wie viel Milligramm sind
   a) 64 Centigr., b) 31 Gramm, c) 3 Gramm 85 Milligr.?
8. Wie viel Gramm sind
   a) 18 Dekagr., b) 7 Kilogr., c) 2 Kilogr. 73 Dekagr. 5 Gr.?
9. Wie viel Kilogr., Dekagr. und Gramm sind
   a) 390·358, b) 12·076, c) 0·125 Kilogramm?

10. Wie viel Kreuzer sind
a) 8 fl., b) 53 fl., c) 12 fl. 75 kr., d) 5 fl. 5 kr.?
11. Wie viel Kreuzer beträgt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$ fl.?
12. Wie viel Kreuzer sind $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{37}{50}$ fl.?
13. Wie viel Gulden und Kreuzer sind
a) 735·98 fl., b) 19·03, c) 0·688 fl., d) $57\frac{3}{5}$ fl.?
14. Verwandle in Secunden
a) 57 Minuten, b) 18 Stunden, c) 48 Tage,
d) 4 Tage 18 Stunden 35 Minuten 24 Secunden.
15. Wie viel Monate sind $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{25}$ Jahre?
16. Wie viel Jahre, Monate und Tage sind
a) 5·378, b) 3·888, c) 1·245, d) 2·157 Jahre?
17. Ein Jahr hat 365·24222 Tage; wie viel Tage, Stunden, Minuten und Secunden sind es?
18. Verwandle in Bogensecunden
a) 36′, b) 8′ 45″, c) 37° 54′ 28″.
19. Wie viel deutsche Neuloth sind
a) 23 Pfd., b) 8 Ctr. 77 Pfd. 42 Neuloth?
Bringe auf die niedrigste Benennung:
20. 648 fl. 47 kr 3 Pf. Conventions-Münze;
21. 319 Mark 76 Pfennige deutsch;
22. 65 Pfund Sterling 16 Schilling 9 Pence.

Das Reducieren.

§. 52. Die Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung verwandeln, heißt jene reducieren.

1. Eine einnamige Zahl wird auf eine höhere Benennung reduciert, indem man sie durch die entsprechende Verwandlungszahl dividiert. Z. B.

Wie viel Tage sind 816 Stunden? Auf einen Tag gehen 24 Stunden; es werden also in 816 Stunden soviel Tage enthalten sein, als wie oft 24 Stunden darin vorkommen; man hat daher

816 Stunden = (816 : 24) Tage = 34 Tage.

2. Eine einnamige Zahl, welche Ganze von höheren Benennungen enthält, wird auf Ganze dieser höheren Benennungen reduciert, wenn man sie durch die Verwandlungszahl für die nächst höhere Benennung dividiert; der Quotient bedeutet Einheiten dieser höheren, der etwa gebliebene Rest Einheiten der niedrigeren Benennung.

Der Quotient wird, wenn es angeht, auf dieselbe Art auf die nächst höhere Benennung reduciert. Z. B.

Wie viel Tage, Stunden und Minuten sind 5853 Minuten?

5853 : 60 = 97 St. 97 : 24 = 4 T.
33 Min. 1 St.
also 5853 Min. = 4 Tage 1 St. 33 Min.

Ganz einfach gestaltet sich diese Reduction für das Decimalsystem, indem man dabei nur immer 1, 2 oder 3 Ziffern nach links für sich als Ganze der nächst höheren Benennung annimmt, je nachdem die entsprechende Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000 ist. Z. B.

9347 kr. = 93 fl. 47 kr. 1808 kr. = 18 fl. 8 kr.

$4235^{cm} = 42^{m}\ 3^{dm}\ 5^{cm}$.

31268 Gramm = 31 Kilogr. 26 Dekagr. 8 Gramm.

3. Eine mehrnamige Zahl wird auf die höchste Benennung reduciert, indem man die Reduction nach 1. von der niedrigsten Benennung angefangen allmählich vornimmt, und zu dem jedesmaligen Resultate die gegebenen Einheiten der entsprechenden Benennung dazu zählt. Z. B.

Man reduciere 83° 56′ 24″ auf Grade.

24 : 60 = 0·4′
56·4 : 60 = 0·94°
also 83° 56′ 24″ = 83·94°

Man könnte die Reduction auch in gemeinen Brüchen ausführen.

$24 : 60 = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}'$ also $83° 56' 24'' = 83\frac{47}{50}$.

$56\frac{2}{5} : 60 = \frac{282}{300} = \frac{47}{50}$

Aufgaben.

Reduciere folgende Zahlen auf Ganze der höheren Benennungen:

1. a) 314586 Millimeter b) 57843 □Centimeter
2. a) 83045 □Meter b) 934625 Cubikcentimeter
3. a) 7315 Liter b) 38047 Gramm
4. a) 1957 Kreuzer b) 75808 Kreuzer
5. a) 347947 Zeitsecunden b) 37481 Bogensecunden
6. a) 924157 Pfenn. preuß. b) 357894 Pence engl.
7. Wenn jemand in jeder Secunde 1 zählen würde; wie viel Zeit würde er brauchen, um eine Million, und wie viel, um eine Billion zu zählen (das Jahr zu 365 Tagen gerechnet), vorausgesetzt, dass es möglich wäre, Tag und Nacht ununterbrochen fortzuzählen?
8. Wenn jemand täglich 10 kr. erspart; wie groß ist das Ersparnis in einem gemeinen Jahre?

9. Die Zeit von einem Vollmonde zum andern (synodischer Monat) beträgt 2551442 Secunden; wie viel sind dieß Tage, Stunden, Minuten und Secunden?

Verwandle a) in einen Decimalbruch, b) in einen gemeinen Bruch der nächst höheren Benennung:

10. a) 16 Kreuzer b) $8\frac{1}{2}$ Kreuzer c) 1365 Kreuzer
11. a) 4 Decimeter b) $37\frac{1}{4}$ Decim. c) 564 Centimeter
12. a) 13·5 Ar b) $602\frac{1}{2}$ Liter c) 28·4 Dekagr.
13. a) $14\frac{3}{4}$ Kr. Conv. M. b) 44·8 deutsche Kannen
14. a) 798 schweiz. Maß b) 19·835 Stunden.

Verwandle in einen Decimalbruch der höchsten Benennung:

15. a) $3^{m}\ 4^{dm}\ 5^{cm}\ 6^{mm}$ b) $47^{Km}\ 67^{m}$
16. a) $15\square^{m}\ 59\square^{dm}\ 32\square^{cm}$ b) 2 Hektar 7 Ar $72\square^{m}$
17. a) $21\boxtimes^{m}\ 88\boxtimes^{dm}\ 315\boxtimes^{cm}$ b) 63 Hektol. 58 Liter
18. 328 Kilogr. 93 Dekagr. 5 Gramm
19. 3 Gramm 5 Decigr. 8 Centigr. 2 Milligr.
20. a) 12 fl. 24 Kr. b) 75 fl. $8\frac{1}{2}$ Kr.
21. 6 Monate 4 Tage 16 Stund. 36 Min. = ? Jahre.

III. Rechnungsoperationen mit mehrnamigen Zahlen.

Addition mehrnamiger Zahlen.

§. 53. Beim Addieren mehrnamiger Zahlen beginnt man bei der niedrigsten Benennung und reduciert die Summe jeder Benennung, wenn sie Ganze der nächst höhern Benennung enthält, auf diese höhere Benennung. Z. B.

38	Tage	14	Stunden	25	Min.	69 Min. = 1 St. 9 Min.
134	„	85	„	17	„	150 St. = 6 T. 6 St.
87	„	—	„	24	„	
8	„	50	„	3	„	
273	Tage	6	Stunden	9	Min.	

Bei benannten Zahlen, welche dem Decimalsystem angehören, führt man die Addition entweder in gleicher Weise, wie bei mehrziffrigen unbenannten Zahlen aus, oder man verwandelt alle Summanden in dieselbe niedrigste Benennung oder in Decimalbrüche der höchsten Benennung, und verrichtet dann die Addition. Z. B.

1)	375	fl.	28	kr.	oder	37528	kr.	oder	375·28	fl.
	708	„	83	„		70883	„		708·83	„
	659	„	70	„		65970	„		659·70	„
	415	„	8	„		41508	„		415·08	„
	2158	fl.	89	kr.		215889	kr.		2158·89	fl.

2) $5{\cdot}2^{m} = 5{\cdot}2^{m}$
$9\,4^{dm} = 0{\cdot}94^{m}$
$125^{mm} = 0{\cdot}125^{m}$
$6{\cdot}265^{m}$

3)

$15\square^{m}$	$27\square^{dm}$	$5\square^{cm}$	oder	15	2705	$\square^{m}$
27 „	82 „	46 „			27·8246	„
9 „	6 „	78 „			9·0678	„
$52\square^{m}$	$16\square^{dm}$	$29\square^{cm}$			52·1629	$\square^{m}$

Aufgaben.

Addiere:

1. a)

45^{m}	7^{dm}	4^{cm}	5^{mm}
28	9	6	3
34	—	7	6
7	8	5	—

b)

$13\square^{m}$	$84\square^{dm}$	$35\square^{cm}$
27	30	69
18	7	78
16	64	9

2. a)

47 Hektar	38 Ar	$59\square^{m}$
19	5	68
32	93	84
29	76	22

b)

144 Hektol.	78 Liter
106	36
83	98
117	9

3. a)

345 Kilogr.	249 Gr.
157	508
273	665
238	147

b)

1234 fl.	56 kr.
2345	67
3456	78
4567	89

4. Jemand hat vier Capitalien, welche einzeln 124 fl. 45 kr., 48 fl. 84 kr., 213 fl. 58 kr., 308 fl. 75 kr. jährlichen Zins tragen; wie groß ist das ganze jährliche Zinserträgnis?

5. Die Seiten eines Viereckes sind: $2^{m}\ 4^{dm}\ 2^{cm}$, $5^{m}\ 3^{dm}\ 8^{cm}$, $2^{m}\ 5^{dm}\ 1^{cm}$, $4^{m}\ 1^{dm}\ 9^{cm}$; wie groß ist der Umfang?

6. Ein Haus hat bis zur ersten Balkenlage $3^{m}\ 5^{dm}\ 4^{cm}$, von hier bis zur zweiten $3^{m}\ 4^{dm}\ 2^{cm}$, von da bis zur dritten $3^{m}\ 2^{dm}\ 5^{cm}$, und endlich von hier bis zum Gipfel $3^{m}\ 5^{dm}\ 8^{cm}$ Höhe; wie viel beträgt die ganze Höhe?

7. Ein Sechseck enthält vier Dreiecke; das erste hat $48\square^{m}\ 25\square^{dm}$, das zweite $91\square^{m}\ 12\square^{dm}$, das dritte $92\square^{m}\ 15\square^{dm}$, das vierte $65\square^{m}\ 18\square^{dm}$; wie groß ist die ganze Fläche des Sechseckes?

8. Eine Glocke enthält an Messing 647 Kilogr. 78 Dekagr., an Kupfer 953 Kil. 67 Dek., an Zinn 97 Kilog. 29 Dek.; wie schwer ist die Glocke?

9. Jemand verkauft nach und nach an Wein: 12 Hektoliter 28 Liter, 15 Hektoliter 14 Liter, 8 Hektoliter 37 Liter, 26 Hektoliter 4 Liter; wie viel macht dieses zusammen?

10. In Wien tritt der Mittag 56 Minuten 11 Secunden früher ein, als in Paris; wenn nun die Uhr in Paris 3 St. 28 Min. 40 Sec. zeigt, wie viel Uhr ist zu gleicher Zeit in Wien?

11. Jemand wurde am 19. November 1789 geboren und lebte 78 Jahre 8 Monate und 9 Tage; wann starb er?

Geburtszeit: 1788 J. 10 Mon. 18 Tage nach Chr. G.
Lebensdauer: 78 „ 8 „ 9 „
Sterbezeit: 1867 J. 6 Mon. 27 Tage nach Chr. G.
Er starb also am 28. Juli 1868.

12. Kaiser Franz Josef I. wurde am 18. August 1830 geboren und übernahm 18 Jahre 3 Mon. 14 Tage alt die Regierung; wann war dieses?

13. Wenn am 13. September um 7 Uhr 24 Minuten 12 Sec. morgens Vollmond ist, und die Zeit von einem Vollmonde bis zum andern 29 Tage 12 Stunden 44 Min. 3 Sec. beträgt, wann wird der nächste Vollmond eintreten?

Subtraction mehrnamiger Zahlen.

§. 54. Das Subtrahieren mehrnamiger Zahlen beginnt bei der niedrigsten Benennung. Wenn bei einer Benennung die Zahl des Subtrahends größer ist, als jene des Minuends, so wird die letztere um so viel Einheiten vermehrt, als ihrer eine nächst höhere Einheit enthält, und dann die Subtraction verrichtet; sodann wird aber, damit der Rest ungeändert bleibe, auch der Subtrahend in der nächst höheren Benennung um 1 vermehrt. Z. B.

Von $135^0\ 48'\ 37''$ soll subtrahiert werden
$62^0\ 25'\ 52''$; wie viel bleibt übrig?
$73^0\ 22'\ 45''$.

Gehören die Zahlen dem Decimalsysteme an, so subtrahiert man dieselben entweder in gleicher Weise, wie mehrziffrige unbenannte Zahlen, oder verwandelt Minuend und Subtrahend in einnamige Zahlen derselben Benennung und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

1. Jemand ist fl. 2148,,8 schuldig, davon zahlt er fl. 952,,75; wie viel bleibt er noch schuldig?

fl. 2148 „ 8	oder 214808 kr.	oder 2148·08 fl.
„ 952 „ 75	95275 „	952·75 „
fl. 1195 „ 33	119533 kr.	1195·33 fl.

= 1195 fl. 33 kr.

2. 8 Hektol. 27 Liter oder 8·27 Hektol.

2 „ 83·6 „		2·836 „
5 Hektol. 43·4 Liter		5·434 Hektol.

Aufgaben.

Subtrahiere:

1. a) $131^{m}\ 36^{cm}\ 4^{mm}$ — $72\ 48\ 6$

b) $39\square^{m}\ 791\square^{cm}$ — $14\ 4317$

2. a) 105 Hektar 37 Ar 15 $\square^{m}$ — 37 64 52

b) 218 Hektol. 26 Liter — 156 75

3. a) $1\boxtimes^{m}$ — $435\boxtimes^{dm}\ 87\boxtimes^{cm}$

b) 57 Gr. 207 Milligr. — 24 665

4. Ein Haus wird um 8000 fl. gekauft; der Eigenthümer muß es später um 6388 fl. 35 kr. verkaufen; wie viel Verlust hat er dabei?

5. Von einem Acker, welcher 2 Hektar 54·7 Ar groß ist, wird eine Fläche von 1 Hektar 21·5 Ar mit Weizen, der Rest mit Korn besäet; wie viel beträgt die Kornfläche?

6. In einem Dreiecke betragen die Seiten $15^{m}\ 3^{dm}\ 8^{cm}$, $1^{m}\ 11^{dm}\ 9^{cm}$ und $6^{m}\ 5^{dm}\ 6^{dm}$; wie groß ist der Umfang desselben und um wie viel ist die Summe je zweier Seiten größer, als die dritte Seite?

7. Die Oberfläche einer Kugel beträgt $12\square^{dm}\ 81\square^{cm}\ 80\square^{mm}$; wie viel geht ihr bis zu $1\square^{m}$ ab?

8. Auf einer Besitzung lastet eine Schuld von 6200 fl., davon werden 885 fl. 40 kr., 2740 fl., 766 fl. 90 kr. abgetragen; wie viel beträgt noch die rückständige Schuld?

9. Ein Kaufmann hatte 248 Kilogr. Reis vorräthig; wie viel bleibt noch übrig, wenn er 59 Kil. 20 Dekagr., 67 Kil. 50 Dekagr., 88 Kil. 75 Dekagr. verkauft hat?

10. Es soll der Höhenunterschied zwischen zwei Punkten A und D dadurch gefunden werden, dass man die Höhe zweier Zwischenpunkte B und C gegen A und D untersucht. Wenn nun A um $8^m\ 5^{dm}\ 9^{cm}$ höher liegt als B, B um $4^m\ 3^{dm}\ 8^{cm}$ höher als C, und C um $2^m\ 2^{dm}\ 3^{cm}$ tiefer als D; um wie viel liegt A höher als D?

11. Jemand wurde am 5. November 1809 geboren; wie alt war er am 27. Mai 1876?

1875	Jahre	4 Monate	26 Tage
1808	„	10 „	4 „
66	Jahre	6 Monate	22 Tage

12. Der berühmte Tonkünstler Mozart wurde in Salzburg am 27. Jänner 1756 geboren und starb in Wien den 5. December 1791; wie alt ist er geworden?

Multiplication mehrnamiger Zahlen.

§. 55. Wenn eine mehrnamige Zahl mit einer unbenannten multipliciert werden soll, multipliciert man entweder die Einheiten einer jeden Benennung von der niedrigsten angefangen, und reduciert die niedrigeren Producte; oder man verwandelt die mehrnamige Zahl in die niedrigste oder in die höchste Benennung und verrichtet dann die Multiplication. Z. B.

15T.19St.45M.×23
363T.22St.15M.

45M.×23 = 1035M. = 17St.15M.
19St.×23+17St. = 454St. = 18T.22St.
15T.×23+18T. = 363T.

oder

15T.19St.45M. = 22785M., 22785 M. × 23
45570
68355
524055M. = 363T.22St.15M.

oder auch

15T.19St.45M. = 15·82292T. 15·82292T.×23
3164584
4746876
363·92716T. = 363T.22St.15M.

Ist der Multiplicand eine benannte Zahl, welche dem Decimalsysteme angehört, so wird er gleichfalls entweder auf die niedrigste

Benennung oder auf einen Decimalbruch der höchsten Benennung gebracht und dann multipliciert. Z. B.

Multipliciere 248 fl. 64 kr. mit 6.

24864 kr. × 6		oder 248·64 fl. × 6	
149184 kr.		1491·84 fl.	
= 1491 fl. 84 kr.		= 1491 fl. 84 kr.	

Preisberechnungen, welche auf eine Multiplication führen, können häufig, besonders beim Kopfrechnen, durch eine passende Zerlegung der Mehrheit, deren Preis gesucht wird, oder des Preises der Einheit vortheilhaft ausgeführt werden. Z. B.

1) 5 Hektol. 60 Liter à 26 fl. pr. Hekt.

5 Hektol.	130 fl.
50 Lit. = $\frac{1}{2}$ Hekt. .	13 „
10 „ = $\frac{1}{10}$ „ .	2 „ 60 kr.
	145 fl. 60 kr.

2) 12 Meter à 2 fl. 35 kr.

12 Met. à 2 fl.	24 fl.
12 „ à 3 Zehn. = 36 Z.	3 „ 60 kr.
12 „ à 5 kr.	— „ 60 kr.
	28 fl. 20 kr.

Aufgaben.

Bestimme folgende Producte:

1. a) $25^{m}\ 3^{dm}\ 38^{mm} \times 25$; b) $37^{Km}\ 287^{m} \times 9$;
2. a) 7 Hektar 5·2 Ar × 146; b) 15 Hektol. 56 Lit. × 39;
3. a) 8 Kilogr. 47 Dek. × 64; b) 317 fl. 84 kr. × 542.
4. Wenn 1 Ar 27 fl. 72 kr. kostet, wie hoch kommen 10 Ar?
5. Ein Hektoliter Weizen kostet 9 fl. 58 kr.; wie hoch kommen 7, 28, 55, 99, 125 Hektoliter?
6. Ein Beamter bezieht monatlich 128 fl. 75 kr. Gehalt; wie viel jährlich?
7. Wenn zwischen dem Blitze einer Kanone und dem darauf gehörten Knalle 12 Secunden verfließen und der Schall in jeder Secunde $332^{m}\ 2^{dm}\ 5^{cm}$ zurücklegt, wie weit ist die Kanone vom Beobachter entfernt?
8. Wenn ein Ducaten 5 fl. 45 kr. gilt, was betragen 33, 57, 98, 183 Ducaten?
9. Wie lang ist eine Schnur, die sich um eine Welle, deren Umfang $3^{dm}\ 5^{cm}\ 8^{mm}$ ist, 158mal herumwinden läßt?

10. Ein Zimmer ist 7^m 5^{dm} 6^{cm} lang und 5^m 3^{dm} 4^{cm} breit; wie groß ist die Bodenfläche desselben?

11. Ein Gang, welcher 20^m 5^{dm} lang und 2^m 2^{dm} breit ist, soll mit Platten belegt werden; was kostet diese Arbeit, wenn für das $\square^m$ 2 fl. 35 kr. gezahlt wird?

12. Wie groß ist die Oberfläche und wie groß der Körperinhalt eines Würfels, dessen Seite 1^{dm} 3^{cm} 9^{mm} beträgt?

13. Welchen Inhalt hat ein Wagenkasten, dessen Inneres 1^m 8^{dm} lang, $6{\cdot}1^{dm}$ breit und $4{\cdot}7^{dm}$ hoch ist?

14. Ein rechtwinkliges, oben offenes Gefäß ist 1^m 8^{dm} lang, 7^{dm} 5^{cm} breit und 4^{dm} 9^{cm} hoch; welche Oberfläche haben die vier Seitenwände und der Boden?

15. Wie hoch kommt die Aufführung einer Mauer, welche 13^m 4^{dm} lang, 9^m 3^{dm} hoch und 6^{dm} dick ist, wenn für das Cub.^{m} 8 fl. 58 kr. bezahlt wird?

16. Wie viel Hektoliter fasst ein Gefäß von 7^{dm} 2^{cm} Länge, 6^{dm} 5^{cm} Breite und 4^{dm} 5^{cm} Tiefe?

17. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 3^m 4^{dm} 9^{cm} ist?

18. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt einer Kugel, deren Durchmesser 1^m $5{\cdot}26^{dm}$ ist?

Berechne:

19.* 12 Liter à 28 kr., à 32 kr., à 48 kr., à 64 kr.

20.* 9 Kilogr. à 40 kr., à 53 kr., à 62 kr., à 75 kr.

21.* 16 Meter à 26 kr., à 49 kr., à 52 kr., à 80 kr.

22.* 25 Liter à 38 fl. pr. Hektoliter.

23.* 65 Kilogr. à 140 fl. pr. Centner.

24. 127 Meter à 3 fl. 55 kr., à 2 fl. 90 kr.

25. 7 Hektol. 35 Liter à 42 fl. pr. Hektol.

26. 51 Kilogr. 32 Dekagr. à $1\frac{3}{5}$ fl. pr. Kilogr.

Division mehrnamiger Zahlen.

§. 56. Wenn eine mehrnamige Zahl durch eine unbenannte zu dividieren ist (Aufgabe des Theilens), so dividiert man entweder die Einheiten einer jeden Benennung von der höchsten angefangen, indem man dabei den jedesmaligen Rest in die niedrigere Benennung resolviert; oder man verwandelt die mehrnamige Zahl in die niedrigste oder in die höchste Benennung, und verrichtet dann die Division. Z. B.

1) Wie groß ist der 18te Theil eines Winkels von $68^0\,14'\,24''$?

$68^0\ \ 14'\ \ 24'' : 18 = 3^0\ 47'\ 28''$;

14^0	$840'$	$480''$
$840'$	$854'$	$504''$
	134	144
	$8'$	0
	$480''$	

oder

$68^0\ 14'\ 24'' = 245664''$

$245664'' : 18$

$\underline{\qquad\qquad} : 2$

122832

$\underline{\qquad\qquad} : 9$

$13648'' = 3^0\ 47'\ 28''$

oder auch

$68^0\ 14'\ 14'' = 68{\cdot}24^0$

$68{\cdot}24^0 : 18$

$\underline{\qquad\qquad} : 2$

$34{\cdot}12$

$\underline{\qquad\qquad} : 9$

$3{\cdot}7911^0 = 3^0\ 47'\ 28''$.

2) Suche den 6. Theil von fl. 385,,14 kr.

38514 kr. : 6	oder $385{\cdot}14$ fl. : 6
6419	$64{\cdot}19$ fl.

$= 64$ fl. 19 kr.

Ist eine mehrnamige Zahl durch eine andere benannte Zahl zu dividieren (Aufgabe des Messens), so müßen beide früher auf dieselbe Benennung gebracht werden. Z. B.

Wie oft sind 5 Dekagr. 2 Gramm in 3 Kilogr. 38 Dekagr. enthalten?

5 Dek. 2 Gr. $= 52$ Gr. $\qquad 3380 : 52 = 65$

3 Kilogr. 38 Dek. $= 3380$ Gr.

Aufgaben.

Bestimme

1. a) 530 fl. 84 kr. : 23; b) 4501 fl. 84 kr. : 56;
2. a) $12\square^{m}\ 11\square^{dm}$: 28; b) 289 Kilogr. 674 Gr. : 57.
3. Wenn 1 metr. Centner Queckfilber 254 fl. kostet, wie theuer ist 1 Kilogramm?
4. Eine Röhre gibt in 15 Stunden 48 Minuten 43 Hektoliter Wasser; in wie viel Zeit 1 Hektoliter?
5. 31 fl. 50 kr. : 2 fl. 25 kr. = ?
6. $9\square^{m}\ 57\square^{dm}\ 84\square^{cm} : 24^{dm}\ 56\square^{cm} = ?$
7. $10709\boxtimes^{dm}\ 615\boxtimes^{cm} : 4\boxtimes^{dm}\ 567\boxtimes^{cm} = ?$
8. Eine Stiege ist $3^m\ 8^{dm}$ hoch; wie viele Stufen hat sie, wenn jede Stufe $1^{dm}\ 3^{cm}$ hoch ist?

9. Wie viel Stück Ducaten braucht man, um 491 fl. 92 kr. zu zahlen, wenn die Ducaten im Curse zu 5 fl. 72 kr. stehen?

10. Ein Rechteck hat $64\square^{m}$ $73\square^{dm}$ $55\square^{cm}$ Inhalt und 5^{m} 1^{dm} 5^{cm} Breite, wie groß ist die Länge?

11. Ein cylindrisches Gefäß enthält $1\boxtimes^{dm}$ $683\boxtimes^{cm}$; wenn nun die Höhe 9^{cm} beträgt, wie groß ist die Bodenfläche?

12. Ein Spiegel von 7^{dm} 2^{cm} Höhe und 6^{dm} 5^{cm} Breite kostet 53 fl. 82 kr.; wie hoch wird ein $\square^{dm}$ gerechnet?

13. Eine Linie ist viermal gemessen worden, und man fand sie 57^{m} 5^{dm} 4^{cm}, 57^{m} 2^{dm} 3^{cm}, 58^{m} 1^{dm} 8^{cm}, 57^{m} 3^{dm} 5^{cm} lang; wie groß ist die Durchschnittslänge jener Linie?

14. Eine Straße hat in einer Strecke von $854{\cdot}6^{m}$ eine Steigung von 13^{m} 4^{dm} 8^{cm}; wie groß ist die Steigung auf ein Meter Länge?

15. Die Triebräder einer Locomotive haben 1^{m} 2^{dm} im Durchmesser; wie viel Umläufe müßen sie machen, um die Eisenbahnstrecke zwischen Wien und Linz, welche 188^{Km} 890^{m} beträgt, zurückzulegen?

16. Eine Goldstange ist 1 Kilogr. 273·6 Gramm schwer und enthält 1 Kilogr. 18·88 Gramm feines Gold; wie groß ist der Feingehalt dieser Goldmasse?

17. 10 Meter Tuch kosten 52 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 7 Meter von demselben Tuche?

18. Wenn 5 Hektoliter Wein 108 fl. 20 kr. kosten, wie hoch kommen 9 Hektoliter von demselben Weine?

19. Auf einem Getreidemarkte verkaufte man 48 Hektol. Weizen zu 9 fl. 20 kr., 35 Hektol. zu 9 fl. 32 kr. und 17 Hektol. zu 9 fl. 60 kr.; wie theuer wurde im Durchschnitte ein Hektol. verkauft?

Wiederholungsaufgaben.

1.* Verwandle

a) $\frac{2}{3}$ Stunden, $\frac{4}{5}$, 3, $2\frac{1}{2}$, 16, $12\frac{3}{4}$ Stunden in Tage;

b) $\frac{5}{6}$ Minuten, 2, $5\frac{1}{3}$, $13\frac{3}{5}$, 36, $8\frac{4}{5}$ Min. in Stunden.

2.* a) 18 Liter à 32 Kr. b) 65 Kilogr. à 20 Kr.

3.* a) 12 Meter à 54 Kr. b) 9 Hektol. à 8 fl. 30 Kr.

4.* a) 10 Hektol. à 4 fl. 35 Kr. b) 16 Meter à 5 fl. 90 Kr.

5.* $\frac{3}{4}$ Meter kosten $2\frac{7}{10}$ fl.; was kostet 1 Meter?

6.* Auf welche Länge erreicht das Ansteigen einer Eisenbahn $1\frac{1}{4}{}^{m}$ Höhe, wenn dieselbe auf je 50^{m} Länge um $\frac{1}{4}{}^{m}$ ansteigt?

7. Addiere folgende Zahlen zuerst in senkrechter, dann in wagrechter Richtung:

$84\frac{1}{2} + 206\frac{3}{4} + 917\frac{4}{5} + 846\frac{19}{25} + 1556\frac{47}{100}$
$980\frac{3}{5} + 945\frac{5}{8} + 62\frac{17}{20} + 2034\frac{1}{2} + 290\frac{21}{40}$
$875\frac{1}{1}\frac{1}{2} + 3348\frac{9}{10} + 793\frac{23}{25} + 357\frac{3}{8} + 88\frac{1}{4}$
$763\frac{41}{510} + 53\frac{2}{3} + 1642\frac{5}{6} + 495\frac{4}{5} + 707\frac{7}{12}$.

8. a) $100\frac{41}{48} - 15\frac{13}{72} = ?$ b) $125\frac{13}{20} - 31\frac{5}{6} = ?$

9. a) $92\frac{7}{110} - 68\frac{5}{12} = ?$ b) $208\frac{11}{15} - 128\frac{19}{20} = ?$

10. Verwandle in Meter-Decimalbrüche:

a) $45^{m}\ 4^{dm}\ 8^{cm}$; b) $13^{m}\ 5^{cm}\ 7^{mm}$;
c) $3^{dm}\ 9^{cm}\ 2^{mm}$; d) $8^{Mm}\ 39^{m}\ 28^{cm}$.

11. Unter drei Personen sollen 115 fl. 86 kr. so vertheilt werden, dass A die Hälfte, B den dritten Theil und C den Rest bekommt; wie groß ist der Antheil einer jeden dieser drei Personen?

12. Ein Kaufmann hatte 1348 Kil. Reis vorräthig; wie viel bleibt noch übrig, wenn er 315 Kil. 8 Dekagr., 276 Kil. 5 Dekagr., 490 Kil. 7 Dekagr. verkauft hat?

13. Um einen Punct herum liegen fünf Winkel; von diesen ist $a = 85^{\circ}\ 33'\ 46''$, $b = 47^{\circ}\ 18'\ 48''$, $c = 63^{\circ}\ 29'\ 17''$, $d = 58^{\circ}\ 43'\ 50''$, $e = 104^{\circ}\ 54'\ 19''$; wie groß ist die Summe aller dieser Winkel?

14. Kaiser Franz I. starb am 2. März 1835 in einem Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann war er geboren?

15. Der berühmte österreichische Kriegsheld Feldmarschall Radetzky wurde geboren am 2. November 1766 und starb am 1. Jänner 1858; welches Alter hat er erreicht?

16. In Wien tritt der Mittag 56 Min. 11 Sec. früher ein als in Paris; wie viel Uhr ist es in Wien, wenn die Uhr in Paris 4 St. 37 Min. 45 Sec. zeigt?

17. Eine Sonnenfinsternis nahm ihren Anfang um 4 Uhr 25 Min. 49 Sec. und dauerte 1 Stunde 18 Min. 37 Sec.; wann hatte sie geendet?

18. Dividiere 707281 durch 29, den Quotienten wieder durch 29, und so weiter, bis du auf den Quotienten 29 kommst.

19. Dividiere ebenso 24137569 wiederholt durch 17.

20. a) $\frac{5\frac{2}{3} \times 9 \times 7\frac{3}{5}}{4\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} = ?$ b) $\frac{5\frac{1}{2} \times 7\frac{3}{4} \times 3\frac{5}{6} \times 6\frac{1}{4}}{2\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{5} \times 31} = ?$

Berechne nach dem abgekürzten Verfahren:

21. a) 3·9765 × 4·378, b) 0·00576 × 37·85 (3 Decim.);
22. a) 7·6534 × 2·5637, b) 58·3468 × 0·07583 (4 Decim.);
23. a) 19·6162 : 7·6534, b) 0·2736 : 0·7653 (3 Decim.);
24. a) 3·2158 : 0·03584, b) 4·2839 : 8·5679 (4 Decim.).

25. Aus einem Fasse, welches $32\frac{1}{4}$ Hektoliter Wein enthält, werden drei kleinere Fässer, von denen das erste $7\frac{1}{2}$, das zweite $6\frac{3}{4}$, das dritte $6\frac{7}{20}$ Hektol. fasst, gefüllt; wie viel Wein bleibt noch im großen Fasse übrig?

26. Von einer Summe erhält A $\frac{2}{5}$, B $\frac{3}{8}$ und C den Rest. Der Antheil des B beträgt $31\frac{1}{2}$ fl.; wie viel erhält A, wie viel C?

27. Innsbruck hat 9° 3′ 41″, Wien 14° 2′ 36″, Ofen 16° 42′ 47″, Lemberg 21° 42′ 40″ öffentlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade liegt Lemberg östlicher als jede der drei anderen Städte?

28. Von drei Maurern macht der erste in 3 Stunden 158$\boxtimes^{dm}$, der zweite in 4 Stunden 205$\boxtimes^{dm}$, der dritte in 6 Stunden 281$\boxtimes^{dm}$; a) wie viel $\boxtimes^{dm}$ fertigen alle zusammen in einer Stunde, b) in wie viel Tagen werden sie eine Mauer von 1708$\boxtimes^{m}$ herstellen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten?

29.* a) 26 Kilogr. à 40 Kr. b) 112 Meter à 43 Kr.
30.* a) 16 Liter à 26 Kr. b) 13 Dukaten à 5 fl. 42 Kr.
31.* a) 14$\boxtimes^{m}$ à 2 fl. 38 Kr. b) 24 Meter à 5 fl. 90 Kr.
32.* a) $9\frac{3}{4}$ Meter à 4 fl. 40 Kr. b) 8 Hkt. 80 Lt. à 30 fl. pr. Hkt.
33.* 703 + 156; 384 + 472; 536 + 345; 695 + 347.
34.* 684 − 355; 743 − 349; 480 − 157; 903 − 297.

35.* $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ einer Zahl geben zusammen 44; welches ist die Zahl?

36.* Um wie viel ist das Product der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ kleiner als jeder der beiden Factoren?

37.* Um wie viel ist das Product der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ kleiner als ihre Summe?

38. Suche das größte gemeinschaftliche Maß von
a) 901 und 371; b) 637 und 4277;
c) 3552 und 5143; d) 27671 und 21708.

39. Wie viel Hektoliter Weizen kann man für 255 fl. 36 Kr. kaufen, wenn 1 Hektoliter 9 fl. 12 Kr. kostet?

40. Der Umfang eines Wagenrades beträgt 2^m 7^{dm} 5^{cm}; wie viele Umläufe muß das Rad machen, um einen Weg von 6 Kilometer zurückzulegen?

41. Die Kaiserin Maria Theresia starb am 29. November 1780 in einem Alter von 63 Jahren 6 Monaten 16 Tagen; wann war sie geboren?

42. Papst Pius IX. ist den 13. Mai 1792 geboren; wie alt war er bei seinem 25jährigen Papst-Jubiläum am 16. Juni 1871?

43. Eine telegraphische Depesche geht von Wien um 1 Uhr 24 Min. 18 Sec. nach Berlin ab und kommt dort in 58 Min. 30 Sec. an; wie viel Uhr ist es bei der Ankunft der Depesche in Berlin, wenn die Wiener Uhr um 11 Min. 57 Sec. der Berliner Uhr vergeht?

44. $8642\frac{3}{4}\frac{2}{1}\frac{7}{5} \times \frac{7}{8}\frac{1}{6}\frac{3}{6} + 19371\frac{3}{7}\frac{8}{7} \times 255\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{5} = ?$

45. $4751\frac{4}{6}\frac{2}{3}\frac{0}{1} \times 571\frac{1}{2}\frac{7}{2}\frac{1}{5} - 3640\frac{3}{5}\frac{1}{2}\frac{9}{0} \times 460\frac{8}{4}\frac{0}{0}\frac{}{1} =$

46. a) $729\frac{1}{2}\frac{}{5} : 13 = ?$ b) $3165\frac{5}{1}\frac{}{8} : 23 = ?$

47. a) $1045\frac{5}{6}\frac{3}{0} : 47 = ?$ b) $19576\frac{7}{3}\frac{}{2} : 214 = ?$

48. Drei Personen legen in ein Geschäft 9600 fl. und gewinnen damit $\frac{1}{8}$ der Einlage; sie ziehen sodann ihr Geld zurück; wie viel erhält A, der 2400 fl., B, der 3600 fl., und C, der den Rest eingelegt hat?

49. Ein Weingarten von 275^m Länge und 164^m Breite gibt 94 Hektoliter 71 Liter Wein; wie viel Wein kommt durchschnittlich auf 1 Ar?

50. Ein Landmann verkauft 28 Hektol. Weizen und 15 Hektol. Roggen für $350\frac{4}{5}$ fl. Für das Hektol. Weizen erhält er $9\frac{1}{1}\frac{}{0}$ fl.; wie viel bekommt er für das Hektol. Roggen?

51. Wenn man das Sonnenjahr, welches 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden beträgt, zu 365 Tagen rechnet und wegen des dabei Vernachlässigten jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen annimmt; wie groß wird der Fehler, den man bei dieser Rechnungsweise in 400 Jahren begeht?

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

I. Verhältnisse.

§. 57. Bei den meisten Rechnungen wird eine Vergleichung von gleichartigen Größen vorausgesetzt, wodurch man untersucht, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Eine solche Vergleichung von zwei gleichartigen Größen heißt ein Verhältnis; von den beiden Größen wird die erste das Vorderglied, die zweite das Hinterglied genannt. Z. B. Unter dem Verhältnisse von 12 zu 4 versteht man die Angabe, wie oft 4 in 12 enthalten ist, durch diese Zahlen selbst ausgedrückt, somit den angezeigten Quotienten 12 : 4; der Dividend 12 ist das Vorderglied, der Divisor 4 das Hinterglied.

Wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied wirklich dividiert, so heißt der Quotient der Exponent des Verhältnisses; in dem Verhältnisse 12 : 4 ist 3 der Exponent, und zeigt an, dass 4 in 12 3mal enthalten ist oder dass 12 3mal so groß ist als 4.

Aus diesen Erklärungen folgt:

In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten, und das Hinterglied gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

§. 58. Die Größe eines Verhältnisses hängt von dem Exponenten ab; zwei Verhältnisse sind demnach gleich, wenn sie denselben Exponenten haben, und es bleibt ein Verhältnis so lange ungeändert, als es denselben Exponenten beibehält. Daraus folgt:

a) Ein Verhältnis bleibt unverändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliciert. So gibt das Verhältnis 10 : 2, wenn man beide Glieder mit 2,

oder mit 3, oder mit 5 multipliciert, die Verhältnisse 20 : 4, 30 : 6, 50 : 10, welche alle dem ersten Verhältnisse gleich sind, weil sie denselben Exponenten 5 haben.

b) Ein Verhältnis bleibt unverändert, wenn man beide Glieder durch dieselbe Zahl dividiert. Z. B. Das Verhältnis 20 : 4 wird nicht geändert, wenn man beide Glieder durch 4 dividiert; man erhält dadurch 5 : 1, welches Verhältnis mit dem gegebenen denselben Exponenten 5 hat.

Mit Hilfe des ersten Satzes kann ein Verhältnis, worin Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen dargestellt werden; man braucht nur beide Glieder mit dem wegzuschaffenden Nenner, oder wenn ihrer zwei vorkommen, mit dem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner zu multiplicieren. Z. B.

$$\frac{\frac{3}{4} : 5}{3 : 20} \times 4 \qquad \frac{3 : \frac{1}{2}}{6 : 1} \times 2 \qquad \frac{\frac{2}{5} : 3\frac{1}{4}}{8 : 65} \times 20.$$

Mit Hilfe des zweiten Satzes kann jedes Verhältnis, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abgekürzt werden, indem man beide Glieder durch jenes Maß dividiert. Z. B.

$$\frac{15 : 6}{5 : 2} : 3 \qquad \frac{28 : 8}{7 : 2} : 4 \qquad \frac{10 : 5}{2 : 1} : 5$$

Aufgaben.

1. Stelle folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen dar:

$\frac{7}{8} : 4$, $3\frac{1}{2} : 5$, $2 : \frac{3}{4}$, $7 : 5\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, $\frac{7}{10} : \frac{5}{8}$, $\frac{9}{16} : \frac{7}{12}$, $8\frac{3}{7} : \frac{3}{8}$, $\frac{11}{25} : 5\frac{3}{20}$, $23\frac{2}{7} : \frac{7}{12}$.

2. Drücke folgende Verhältnisse durch die kleinsten Zahlen aus:

6 : 2, 10 : 18, 12 : 16, 32 : 24, 56 : 72, 120 : 48.

3. Folgende Verhältnisse sollen auf die einfachste Gestalt gebracht, d. i. in ganzen Zahlen dargestellt, und dann, wenn es angeht, abgekürzt werden:

$4 : 6\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{5} : 7\frac{1}{9}$, $3\frac{3}{8} : 8\frac{2}{5}$, $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$, $11\frac{3}{5} : 2\frac{4}{5}$, $1\frac{7}{8} : \frac{6}{7}$, $\frac{15}{16} : 3\frac{3}{4}$, $6\frac{9}{16} : 15\frac{3}{4}$.

4. Eine Linie ist 12 Meter lang, eine andere 4 Meter; wie verhalten sich die Längen dieser Linien zu einander?

5. Wie verhält sich ein Decimeter zu einem Meter?

6. Ein kaiserlicher Ducaten gilt 5·3 fl., ein Achtguldenstück 8·9 fl.; wie verhalten sich die Werte dieser Goldmünzen zu einander?

7. 100 Kilogr. Kaffee kosten 144 fl., 100 Kil. Zucker 60 fl.; wie verhält sich der Preis vom Kaffee zum Preise des Zuckers?

8. Von zwei Mühlsteinen dreht sich der eine in jeder Minute 72mal, der andere 60mal um; in welchem Verhältnisse stehen ihre Geschwindigkeiten?

9. Von zwei Rädern macht das eine 300 Umdrehungen in $2\frac{1}{2}$ Minuten, das andere braucht zu eben so viel Umdrehungen nur $1\frac{2}{5}$ Minuten; wie verhält sich die Geschwindigkeit des ersten Rades zu jener der zweiten? — Wie $1\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2}$, oder 14 : 25.

10. Wie verhält sich die englische Seemeile zur geographischen Meile, wenn auf einen Grad des Aequators 60 englische Seemeilen, und 15 geographische Meilen gehen? — Wie 15 : 60, oder 1 : 4.

11. Ein Kreis, dessen Durchmesser 1′ ist, hat $3\frac{1}{7}$′ Umfang; welches Verhältnis findet zwischen dem Durchmesser und dem Umfange statt?

12. Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute 520 Meter, die andere 560 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

13. Ein Zimmer ist $15\frac{1}{2}^{m}$ lang und $9\frac{3}{4}^{m}$ breit; wie verhält sich die Länge zu der Breite?

14. Ein Fenster ist $1^{m}\ 8^{dm}$ hoch und $1^{m}\ 2^{dm}$ breit; wie verhält sich die Höhe zu der Breite?

§. 59. Die bisher betrachteten Verhältnisse heißen einfache, im Gegensatze zu einem zusammengesetzten, dessen Vorderglied das Product aus den Vordergliedern mehrerer einfacher Verhältnisse und dessen Hinterglied das Product aus den Hintergliedern derselben Verhältnisse ist. Z. B.

Einfache Verhältnisse $\begin{cases} 4 : 3 & \text{Exponent } \frac{4}{3} \\ 5 : 6 & \text{„ } \frac{5}{6} \\ 9 : 7 & \text{„ } \frac{9}{7} \end{cases}$

Zusammengesetztes Verh. $4 . 5 . 9 : 3 . 6 . 7$ „ $\frac{4 . 5 . 9}{3 . 6 . 7}$

oder $10 : 7$ „ $\frac{10}{7}$

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist also gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der Anwendung vor, wenn man Größen mit einander vergleichen will, die einzeln von zwei oder mehreren andern Größen abhängen. Z. B. A geht durch 10 Tage und legt täglich 56 Kilometer zurück, B geht durch 12 Tage, macht

163 X 2
326

aber täglich nur 48 Kilometer; wie verhalten sich die von beiden zurückgelegten Strecken? Diese hängen offenbar sowohl von der Zeit als von der Geschwindigkeit der Bewegung ab; da A im Ganzen 10×56 Kilometer, und B 12×48 Kilometer macht, so ist das Verhältnis der von beiden zurückgelegten Strecken $10 \times 56 : 12 \times 48$. Man hat somit

Verhältnis der Zeiten	$10 : 12$
Verhältnis der Geschwindigkeiten	$56 : 48$
Verhältnis der Strecken	$10 \times 56 : 12 \times 48$
oder	$35 : 36$

und sagt: die zurückgelegten Strecken stehen in zusammengesetztem Verhältnisse der Zeiten und Geschwindigkeiten.

Ein zusammengesetztes Verhältnis wird nicht geändert, wenn man irgend ein Vorderglied und zugleich irgend ein Hinterglied in den einfachen Verhältnissen mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert. Dadurch können die einzelnen Glieder der einfachen Verhältnisse noch vor ihrer Multiplication von Brüchen befreit und abgekürzt werden.

Aufgaben.

Bilde das zusammengesetzte Verhältnis

1. aus $8 : 5$, $10 : 7$, $21 : 16$;
2. aus $3\frac{1}{4} : 2$, $5\frac{1}{8} : 6\frac{1}{2}$, $3 : 2\frac{1}{3}$;
3. aus $2\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$, $7 : 3\frac{2}{5}$, $1 : 4\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} : \frac{3}{5}$;
4. aus $3\frac{3}{7} : 24$, $35 : 48$, $27\frac{1}{2} : 25$, $12 : 14\frac{3}{4}$;
5. aus $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$, $4 : 5$, $5 : 6$;
6. aus $13\frac{5}{6} : 12$, $15\frac{1}{2} : 8\frac{3}{4}$, $7 : 10\frac{2}{3}$, $30 : 35$, $35 : 25\frac{1}{2}$.
7. Von zwei Rechtecken ist das eine 15 Meter lang und 12 Meter breit, das andere 18 Meter lang und 16 Meter breit; wie verhalten sich die Flächen der beiden Rechtecke?

Verhältnis der Längen		$15 : 18$
„ „	Breiten	$12 : 16$
„ „	Flächen	$5 : 8$.

8. Von zwei Gefäßen hat das eine $1^m\ 2^{dm}$ Länge, 7^{dm} Breite und 5^{dm} Tiefe, das andere ist $1{\cdot}1^m$ lang, $0{\cdot}6^m$ breit und $0{\cdot}4^m$ tief; wie verhält sich der Inhalt der ersten Gefäßes zu jenem des zweiten?

Verhältniß der Längen		$12 : 11$
„ „	Breiten	$7 : 6$
„ „	Tiefen	$5 : 4$
„ „	Inhalte	$35 : 22$.

9. Die Längen zweier Gärten sind $42^m\ 5^{dm}$ und $38^m\ 5^{dm}$, die Breiten $25^m\ 4^{dm}$ und 26^m; in welchem Verhältnisse stehen die Flächen?

10. Von zwei Dampfmaschinen ist die eine im Stande 12 Tonnen 95^m hoch, die andere in derselben Zeit 15 Tonnen 105^m hoch zu schaffen; in welchem Verhältnisse stehen die Kräfte dieser beiden Maschinen?

II. Proportionen.

§. 60. Wenn man zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, und somit gleich sind, durch das Gleichheitszeichen verbindet, so heißt ein solcher Ausdruck eine Proportion. Z. B. $10 : 5 = 12 : 6$ ist eine Proportion, und wird gelesen: 10 verhält sich zu 5, so wie sich 12 zu 6 verhält, oder kürzer: 10 zu 5 wie 12 zu 6; 10 ist das erste, 5 das zweite, 12 das dritte und 6 das vierte Glied der Proportion; das erste und vierte Glied nennt man die äußeren, das zweite und dritte die inneren Glieder.

Eine Proportion, in welcher das zweite und dritte Glied gleich sind, wird eine stetige Proportion, und jedes der inneren Glieder die mittlere stetige Proportionale zwischen den beiden äußern genannt. Z. B. $24 : 12 = 12 : 6$ ist eine stetige Proportion, 12 die mittlere stetige Proportionale zwischen 24 und 6.

In einer Proportion können auch benannte Zahlen vorkommen, nur müssen die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses gleichnamig sein; z. B. 12 Meter : 4 Meter = 30 fl. : 10 fl. Da übrigens die Benennungen, ohne die Proportion zu ändern, weggelassen werden können, und der Rechnung ohnehin nur die reinen Zahlen unterzogen werden, so werden wir in dem Nachfolgenden immer nur solche Proportionen voraussetzen, deren Glieder unbenannte Zahlen sind.

§. 61. Setzt man in einer beliebigen Proportion $16 : 2 = 48 : 6$ statt eines jeden Vorderngliedes das Product aus dem Hintergliede und dem Exponenten, so erhält man

$$2 \times 8 : 2 = 6 \times 8 : 6.$$

Daraus ist ersichtlich, daß sowohl die äußeren als die inneren Glieder mit einander multipliciert, dieselben drei Factoren 2, 8 und 6 enthalten, daher auch dasselbe Product geben müßen.

In jeder Proportion ist also das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Umgekehrt müssen zwei Verhältnisse 16 : 2 und 48 : 6, in denen das Product der äußeren Glieder gleich ist dem Producte der innern, nothwendig einander gleich sein, und somit eine Proportion bilden. Wenn nämlich

$16 \times 6 = 2 \times 48$ ist, so muß auch $\frac{16 \times 6}{2 \times 6} = \frac{2 \times 48}{2 \times 6}$

oder $\frac{16}{2} = \frac{48}{6}$, oder $16 : 2 = 48 : 6$ sein.

Eine Proportion bleibt demnach so lange richtig, als das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren gleich bleibt. Daraus folgt:

1. Werden in einer Proportion die inneren Glieder mit einander vertauscht, so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. Aus $8 : 4 = 10 : 5$ folgt auch $8 : 10 = 4 : 5$.

2. Werden in einer Proportion die äußeren Glieder mit einander vertauscht, so erhält man wieder eine Proportion. Wenn z. B. $8 : 4 = 10 : 5$ ist, so hat man auch $5 : 4 = 10 : 8$.

3. Werden in einer Proportion die inneren Glieder mit den äußeren vertauscht, so hat man wieder eine Proportion. Wenn $8 : 4 = 10 : 5$, so ist auch $4 : 8 = 5 : 10$.

4. Eine Proportion hört nicht auf richtig zu sein, wenn man ein inneres und ein äußeres Glied mit derselben Zahl multipliciert.

Aus $8 : 4 = 10 : 5$ folgt auch

$8 \times 2 : 4 \times 2 = 10 : 5$ oder $16 : 8 = 10 : 5$,
$8 \times 2 : 4 = 10 \times 2 : 5$ „ $16 : 4 = 20 : 5$,
$8 : 4 \times 2 = 10 : 5 \times 2$ „ $8 : 8 = 10 : 10$,
$8 : 4 = 10 \times 2 : 5 \times 2$ „ $8 : 4 = 20 : 10$.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; man braucht nur den Nenner eines äußeren Gliedes als Factor in ein inneres, und den Nenner eines inneren Gliedes in ein äußeres als Factor zu übertragen. Z. B.

Aus der Proportion

$$x : \tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{9} : 2,$$

wo x ein noch unbekanntes Glied vorstellt, folgt

$$x : 3 = 4 : 2 \times 5 \times 9 \text{ oder } x : 3 = 4 : 90.$$

5. Eine Proportion hört nicht auf richtig zu sein, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl dividiert.

Aus $8 : 12 = 16 : 24$ folgt auch

$(8 : 4) : (12 : 4) = 16 : 24$ oder $2 : 3 = 16 : 24$,
$(8 : 4) : 12 = (16 : 4) : 24$ „ $2 : 12 = 4 : 24$,
$8 : (12 : 4) = 16 : (24 : 4)$ „ $8 : 3 = 16 : 6$,
$8 : 12 = (16 : 4) : (24 : 4)$ „ $8 : 12 = 4 : 6$,

Mit Hülfe dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, in kleineren Zahlen ausdrücken. Z. B.

Aus $x : 4 = 3 : 20$ folgt $x : 1 = 3 : 5$
„ $10 : x = 60 : 12$ „ $1 : x = 1 : 2$
„ $6 : 15 = 8 : x$ „ $1 : 5 = 4 : x$.

6. Wenn man in zwei oder mehreren Proportionen die ersten, die zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Aus den Proportionen

$$2 : 3 = 4 : 6$$
$$5 : 3 = 15 : 9$$
$$7 : 2 = 28 : 8$$

folgt auch

$$2 \times 5 \times 7 : 3 \times 3 \times 2 = 4 \times 15 \times 28 : 6 \times 9 \times 8$$

oder

$$70 : 18 = 1680 : 432.$$

Eine Proportion, welche durch die Multiplication der gleichvielten Glieder mehrerer gegebener Proportionen entsteht, heißt eine zusammengesetzte Proportion. 70

7. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Aus $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$(24 + 18) : (8 + 6) = 24 : 8$ und $= 18 : 6$,
$(24 - 18) : (8 - 6) = 24 : 8$ „ $= 18 : 6$.

8. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Differenz, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.

Aus $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$$(24 + 8) : (24 - 8) = (18 + 6) : (18 - 6).$$

oder $$32 : 16 = 24 : 12.$$

§. 62. Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die Proportion auflösen. Das unbekannte Glied wird gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet. Die Auflösung der Proportionen geschieht nach folgenden zwei Sätzen:

1. Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied.

Aus $x : 12 = 3 : 4$ folgt $x = \frac{12 \times 3}{4} = 9,$

„ $4 : 5 = 12 : x$ „ $x = \frac{5 \times 12}{4} = 15.$

2. Jedes innere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der äußeren Glieder, dividiert durch das andere innere Glied.

Aus $7 : x = 14 : 8$ folgt $x = \frac{7 \times 8}{14} = 4.$

„ $2 : 5 = x : 15$ „ $x = \frac{2 \times 15}{5} = 6.$

Aufgaben.

Stelle folgende Proportionen in ganzen Zahlen dar:

1. a) $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6} : x$ b) $15\frac{1}{4} : 2 = 17 : x$
2. a) $\frac{6}{7} : 4 = x : \frac{2}{3}$ b) $6\frac{1}{4} : 11\frac{2}{3} = x : 2\frac{1}{3}$
3. a) $\frac{1}{2} : x = \frac{5}{8} : 3$ b) $5\frac{3}{4} : x = 2\frac{5}{6} : 3$
4. a) $x : \frac{3}{4} = 1 : \frac{4}{5}$ b) $x : 2\frac{1}{4} = 18 : 3\frac{1}{2}.$

Drücke folgende Proportionen durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:

5. a) $9 : 27 = 5 : x$ b) $21 : 24 = 14 : x$
6. a) $27 : x = 6 : 8$ b) $x : 8 = 56 : 64$
7. a) $9\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} = 2 : x$ b) $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = x : 9\frac{1}{3}$
8. a) $x : 3\frac{3}{4} = 5\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$ b) $4\frac{4}{5} : x = 5\frac{1}{3} : 5\frac{5}{8}$
9. a) $x : 13\frac{13}{18} = 27\frac{9}{14} : \frac{35}{48}$ b) $42\frac{7}{9} : x = 25\frac{5}{18} : 47\frac{3}{}$
10. a) $81\frac{17}{72} : 110\frac{23}{60} = x : 50\frac{29}{40}.$

Löse folgende Proportionen auf:

11. a) $x : 5 = 12 : 4$ b) $x : \frac{1}{2} = 2 : 7$
12. a) $3 : x = 5 : 30$ b) $\frac{2}{3} : x = \frac{1}{4} : \frac{3}{5}$
13. a) $3 : 4\frac{1}{2} = x : 18$ b) $\frac{1}{8} : \frac{8}{9} = x : 2\frac{1}{4}$
14. a) $3 : \frac{4}{5} = 5 : x$ b) $1 : \frac{5}{8} = 1\frac{3}{5} : x$
15. a) $x : 15 = 4 : \frac{6}{7}$ b) $x : \frac{5}{9} = 11 : 3\frac{1}{8}$
16. a) $22\frac{1}{9} : x = 18 : 13$ b) $3\frac{1}{2} : x = 2\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$
17. a) $\frac{5}{9} : \frac{11}{21} = x : \frac{11}{24}$ b) $25\frac{5}{18} : 42\frac{7}{9} = 47\frac{3}{11} : x$
18. $2175\frac{23}{64} : x = 341\frac{17}{56} : 93\frac{5}{72}$
19. $815\frac{113}{40} : 941\frac{19}{964} = x : 753\frac{313}{4220}$
20. $x : 35{\cdot}214 = 57{\cdot}24 : 88{\cdot}35$
21. $4{\cdot}156 : 71{\cdot}34 = 15{\cdot}749 : x.$

III. Anwendung der Proportionen mit besonderer Rücksichtnahme auf die Schlussrechnung.

§. 63. Wenn zwei Arten von Zahlen so von einander abhängen, daß zu einer 2=, 3=, 4mal so großen Zahl der einen Art auch eine 2=, 3=, 4mal so große Zahl der anderen Art gehört, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind gerade proportioniert, oder sie stehen in einem geraden Verhältnisse.

So sind Waare und Preis gerade proportioniert; denn 2mal so viel von derselben Waare kostet auch 2mal so viel Geld, 3mal so viel Waare kostet auch 3mal so viel Geld, 4mal so viel Waare kostet 4mal so viel Geld. Kostet z. B.

1 Meter Tuch 5 Gulden,
so kosten 2 Meter 2mal 5, also 10 Gulden,
3 „ 3mal 5, „ 15 „
4 „ 4mal 5, „ 20 „
5 „ 5mal 5, „ 25 „
u. s. w.

Ueberhaupt sieht man, daß zwischen je zwei Zahlen der Meter dasselbe Verhältnis stattfindet, wie zwischen den dazu gehörigen Zahlen der Gulden; z. B.:

2 Meter : 5 Meter = 10 Gulden : 25 Gulden,
oder $2 : 5 = 10 : 2{\cdot}5$

Wenn also zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art in der nämlichen Ordnung genommen.

In einem geraden Verhältnisse stehen auch: die Zeit der Arbeit und der Lohn; die Weite des Weges und der Frachtlohn, das Gewicht der Last und der Frachtlohn; die Zeit und der zurückgelegte Raum; Kapital und Zins, Zeit und Zins; Einlage bei einer Unternehmung und Gewinn; u. dgl. m.

§. 64. Wenn zwei Arten von Zahlen von einander so abhängen, daß zu einer 2=, 3=, 4mal so großen Zahl der einen Art nur der 2te, 3te, 4te Theil von der Zahl der andern Art gehört, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind verkehrt proportioniert, oder sie stehen in einem umgekehrten Verhältnisse.

So sind die Anzahl der Arbeiter und die Dauer der Arbeitszeit verkehrt proportioniert; denn 2mal so viel Arbeiter brauchen für dieselbe Arbeit nur die Hälfte der Zeit, 3mal so viel Arbeiter brauchen den dritten Theil der Zeit, 4mal so viel Arbeiter nur den vierten Theil der Zeit. Braucht z. B.

1 Arbeiter für eine bestimmte Arbeit 60 Tage,
so brauchen 2 „ nur den 2ten Theil von 60, also 30 Tage,
3 „ „ „ 3ten „ „ 60, „ 20 „
4 „ „ „ 4ten „ „ 60, „ 15 „
5 „ „ „ 5ten „ „ 60, „ 12 „
u. s. w.

Man sieht, daß hier das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der Arbeiter dasselbe ist, wie zwischen den zugehörigen Zahlen der Arbeitstage in umgekehrter Ordnung genommen; z. B.:

3 Arbeiter : 4 Arbeiter = 15 Tage : 20 Tage,
oder
3 : 4 = 15 : 20.

Sind daher zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der anderen Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen.

In einem umgekehrten Verhältnisse stehen auch: die Zahl der zu Nährenden und die Zeit, während welcher die Lebensmittel ausreichen sollen; das Gewicht der Last und die Weite des Weges bei gleichem

Frachtlohne; die Länge und die Breite eines Stoffes bei gleichem Inhalte; Capital und Zeit; Zahl der Erben und Größe des Erbtheils; u. dgl. m.

---

1. Lösung von Aufgaben mit einfachen Verhältnissen. (Die einfache Regeldetri.)

§. 65. Wenn zwei Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind, und es sind zwei Zahlen der einen Art gegeben, von den beiden zugehörigen Zahlen der andern Art aber die eine unbekannt, so heißt das Rechnungsverfahren, durch welches diese unbekannte Zahl gefunden wird, gewöhnlich die einfache Regeldetri.

Z. B. 2 Meter einer Waare kosten 8 Gulden; wie viel Gulden kosten 5 Meter? 20 Gulden. — Die beiden Arten von Zahlen, welche hier vorkommen, nämlich die Anzahl Meter und die Anzahl Gulden, sind gerade proportioniert; von der ersten Art sind zwei Zahlen, 2 Meter und 5 Meter, gegeben, von der zweiten Art ist nur eine Zahl, 8 Gulden bekannt, die andere, 20 Gulden, aber zu suchen. Dieß ist also eine Regeldetri-Aufgabe.

Auflösung mittelst der Proportion.

§. 66. Jede Regeldetri-Aufgabe kann mit Hülfe einer Proportion aufgelöst werden. Man darf nur das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, gleich setzen, je nachdem die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und die so angesetzte Proportion auflösen. Es ist dabei gleichgiltig, in welches Glied die unbekannte Zahl, welche gewöhnlich durch x ausgedrückt wird, zu stehen kommt; am zweckmäßigsten erscheint es, dieselbe sogleich in das erste Glied zu setzen. Z. B.

1) 4 Meter kosten 22 fl.; wie viel fl. kosten 7 Meter? — Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so setzt man das Verhältnis der Gulden $x : 22$ gleich dem Verhältnisse der dazu gehörigen Zahlen der Meter in derselben Ordnung, also gleich $7 : 4$, und hat die Proportion $x : 22 = 7 : 4$, durch deren Auflösung man $x = 38\frac{1}{2}$ fl. bekommt.

Hier erhält man eigentlich die Proportion x fl. : 22 fl. = 7 Meter: 4 Meter; allein bei der Auflösung muß wenigstens das zweite Verhältnis als unbenannt angesehen werden, denn man hätte sonst (nach §. 62, 1) zuerst 22 fl. mit 7 Meter zu multiplicieren, was keinen Sinn hat; es ist aber erlaubt, für das Verhältnis 7 Meter: 4 Meter das Verhältnis 7 : 4 zu setzen, weil beide Verhältnisse denselben Exponenten $1^3/_4$ haben. Das erste Verhältniß in der Proportion kann benannt bleiben; denn aus

$$x \text{ fl.} : 22 \text{ fl.} = 7 : 4 \text{ folgt } x \text{ fl.} = \frac{22 \text{ fl.} \times 7}{4} = 38^1/_2 \text{ fl.}$$

was keine Ungereimtheit in sich enthält. Am zweckmäßigsten ist es, im Ansatze die Benennungen der Glieder ganz wegzulassen, und dann dem x jenen Namen beizulegen, den das damit gleichartige zweite Glied hat.

2) 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 30 Tagen: wie viel Arbeiter muß man aufnehmen, damit dieselbe Arbeit in 20 Tagen vollendet werde? — Hier muß man, da die beiden Arten von Größen verkehrt proportioniert sind, das Verhältnis der Zahlen der Arbeiter x : 12 dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der Tage in umgekehrter Ordnung genommen, also 30 : 20, gleich setzen; man erhält dadurch x : 12 = 30 : 20, welche Proportion x = 18 gibt.

Auflösung durch Schlüsse. (Schlussrechnung.)

§. 67. Einfachere Aufgaben der Regeldetri können im Kopfe durch einfache Schlüsse aufgelöst werden. Dabei wird im Allgemeinen aus der gegebenen Bestimmung für eine Mehrheit auf diejenige für die Einheit geschlossen, und sodann aus der gefundenen Bestimmung für die Einheit wieder die für eine andere Mehrheit gesucht. Z. B.

1) 9 Hektoliter Gerste kosten 54 fl.; wie viel kosten 7 Hektoliter? — Wenn 9 Hektol. 54 fl. kosten, so kostet 1 Hektol. den 9ten Theil von 54 fl., also 6 fl.; wenn 1 Hektol. 6 fl. kostet, so kosten 7 Hektol. 7mal 6 fl. d. i. 42 fl.

2) 6 Arbeiter bringen eine Arbeit in 16 Tagen zu Stande; in wie viel Tagen bringen dieselbe Arbeit 8 Arbeiter zu Stande? — Wenn zu einer Arbeit 6 Arbeiter 16 Tage nöthig haben, so braucht dazu 1 Arbeiter 6mal 16 Tage, also 96 Tage; 8 Arbeiter aber werden nur den 8ten Theil von 96 Tagen d. i. 12 Tage brauchen.

Leichter wird die Rechnung im Kopfe, wenn die Mehrheit, deren Werth man sucht, ein Vielfaches, oder ein Theil, oder das Vielfache eines Theiles der Mehrheit ist, deren Werth man kennt. Z. B.

1) 6 Meter kosten 22 fl. 32 kr., wie viel kosten 30 Meter? — 30 Meter sind 5mal 6 Meter, sie kosten also 5mal 22 fl. 32 kr., somit 111 fl. 60 Kr.

2) 100 fl. Capital geben jährlich 6 fl. Zins, wie viel Zins geben 25 fl. Capital? — 25 fl. Cap. sind der 4te Theil von 100 fl. Cap., sie geben daher nur den 4ten Theil von 6 fl., also 1 fl. 50 kr. Zins.

3) 60 Liter kosten 19 fl. 20 kr.; wie viel kosten 24 Liter? — 24 Liter sind 2mal 12 Liter, 12 Liter sind der 5te Theil von 60 Liter; 12 Liter kosten demnach den 5ten Theil von 19 fl. 20 kr. d. i. 3 fl. 84 kr.; 24 Meter kosten daher 2mal 3 fl. 84 kr., also 7 fl. 68 kr.

Manchmal lassen sich die Aufgaben der Regeldetri auch durch eine schickliche Zerfällung der Mehrheit, deren Werth gesucht wird, auflösen. Z. B.

1) 12 Meter kosten 14 fl. 88 kr.; wie viel kosten 26 Meter? — 26 Meter sind 2mal 12 Meter und noch 2 Meter; 2mal 12 Meter kosten 2mal 14 fl. 88 kr., d. i. 29 fl. 76 kr.; 2 Meter sind der 6te Theil von 12 Meter und kosten daher den 6ten Theil von 14 fl. 88 kr., d. i. 2 fl. 48 kr.; 29 fl. 76 kr. und 2 fl. 48 kr. sind 32 fl. 24 kr.

2) Wie viel kosten 23 Hektoliter Weizen, wenn 8 Hektoliter mit 58 fl. bezahlt werden? — 23 Hektoliter sind 3mal 8 Hektol. weniger 1 Hektol.; 3mal 8 Hektol. kosten 3mal 58 fl., d. i. 174 fl.; 1 Hektol. kostet den 8ten Theil von 58 fl. d. i. 7 fl. 25 kr.; von 174 fl. zuerst 7 fl. weg, bleiben 167 fl., und davon noch 25 kr. weg, bleiben 166 fl. 75 kr.

§. 68. Kommen in einer Regeldetri-Aufgabe größere ganze Zahlen, Brüche oder mehrnamige Zahlen vor, so können auch da dieselben Schlüsse, wie beim Kopfrechnen gemacht werden; bloß die Ausrechnung wird schriftlich durchgeführt, und heißt dann die Zweisatzrechnung. Z. B.

1) 35 Meter kosten 65 fl.; wie viel kosten 49 Meter?

35 Meter kost. 65 fl.

1 „ „ $\frac{65}{35}$ „

49 „ „ $\frac{65 \times 49}{35}$ fl. $= 91$ fl.

2) Wie viel kosten $25\frac{1}{2}$ Hektoliter Wein, wenn $2\frac{1}{5}$ Hektoliter mit $37\frac{9}{5\,0}$ fl. bezahlt werden?

$\frac{1}{5}$ Hektoliter kost. $\frac{1859}{50}$ fl.

$\frac{1}{5}$ " " $\frac{1859}{50\,.\,11}$ "

1 " " $\frac{1859\,.\,5}{50\,.\,11}$ "

$\frac{1}{2}$ " " $\frac{1859\,.\,5}{50\,.\,11\,.\,2}$ "

$\frac{5\,1}{2}$ " " $\frac{1859\,.\,5\,.\,51}{50\,.\,11\,.\,2}$ fl. $= 430\frac{1\,9}{2\,0}$ fl.

Kürzer könnte man auch so schließen:

$2\frac{1}{5}$ Hekt. kost. $37\frac{9}{5\,0}$ fl.

1 " " $\frac{37\frac{9}{5\,0}}{2\frac{1}{5}}$ "

$25\frac{1}{2}$ " " $\frac{37\frac{9}{5\,0} \times 25\frac{1}{2}}{2\frac{1}{5}} = \frac{1859 \times 51 \times 5}{50 \times 2 \times 11} = 430\frac{1\,9}{2\,0}$ fl.

Häufig läßt sich bei der Auflösung von Regeldetri-Aufgaben auch eine passende Zerfällung mit Vortheil anwenden. Z. B. 30 Kilogr. kosten 23 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 23 Kilogr. 20 Dekagr.?

30 Kilogr.		fl. 23·2
15 Kilogr.	$= \frac{1}{2}$ von 30 Kil. . . .	fl. 11·6
6 "	$= \frac{1}{5}$ " 30 "	" 4·64
2 "	$= \frac{1}{3}$ " 6 "	" 1·547
50 Dekagr.	$= \frac{1}{4}$ " 2 "	" 0·387
10 "	$= \frac{1}{5}$ " 50 Dekagr. . .	" 0·077
23 Kilogr. 60 Dekagr.	. . . . .	fl. 18·251 = fl. 18,,25

Aufgaben.

Die nachfolgenden Aufgaben sind theils mit Hilfe der Proportion, theils durch die Schlußrechnung, und, wenn sie mit einem Sternchen (*) bezeichnet sind, auch im Kopfe zu lösen.

1.* 6 Meter Tuch kosten 18 fl.; wie viel kosten 12 Meter?

Mit Hilfe der Proportion:

6 Met. 18 fl. $\qquad x : 18 = 12 : 6$

12 " x " $\qquad x = \frac{2}{36}$ fl.

Durch die Schlußrechnung.

a) Im Kopfe: Wenn 6 Meter 18 fl. kosten, so kostet 1 Meter den 6ten Theil von 18 fl., also 3 fl.; 12 Meter werden daher 12mal 3 fl. d. i. 36 fl. kosten. —

Oder kürzer: 12 Meter sind 2mal 6 Meter, sie kosten somit doppelt so viel als 6 Meter, also 2mal 18 fl. d. i. 36 fl.

b) Schriftlich: 6 Meter kosten 18 fl.
1 „ „ $^{18}/_{6}$ „ = 3 fl.
12 „ „ 3 „ × 12 = 36 fl.

2.* Für 75 Liter zahlt man 36 fl.; wie viel für 50 Liter?

3.* 300 Kilogr. Kaffee kauft man für 320 fl.; wie viel Kaffee bekommt man für 32 fl.?

4.* Ein Knecht hat jährlich 75 fl. Dienstlohn; wie viel kommt auf 5 Monate?

5.* In einer Mühle werden stündlich 8 Hektoliter Weizen gemahlen; wie lange dauert es, bis 60 Hektoliter gemahlen sind?

Um 8 Hektoliter zu mahlen, braucht man 1 Stunde; um 60 Hektoliter zu mahlen, braucht man so viele Stunden Zeit, wie oft 8 in 60 enthalten ist, also $7^{1}/_{2}$ Stunden.

6.* 16 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen würde dieselbe Mauer von 10 Arbeitern aufgeführt werden?

Wenn 16 Maurer zu einer Arbeit 20 Tage brauchen, so braucht ein Maurer dazu 16mal so viel Zeit, also 320 Tage; 10 Maurer brauchen nur den 10ten Theil von der Zeit, die 1 Maurer braucht, also nur den 10. Theil von 320 Tagen d. i. 32 Tage.

7.* Um eine Wiese abzumähen, braucht man 18 Mäher durch 4 Tage; in wie viel Tagen werden 12 Mäher damit fertig werden?

8.* 45 Arbeiter brauchen für eine Arbeit 24 Tage; wie viel Arbeiter muß man aufnehmen, damit die Arbeit in 15 Tagen vollendet werde?

9.* Wenn 16 Maurer täglich 12 Stunden arbeiten, so wird eine Mauer in 15 Tagen fertig; in welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jene Maurer täglich nur 10 Stunden arbeiten?

10.* Um eine Mauer, welche 20 Meter lang ist, aufzuführen, sind 35 Arbeiter erforderlich; wie viel Arbeiter braucht man, damit eine eben so hohe und dicke Mauer, welche 28 Meter lang ist, in der nämlichen Zeit vollendet werde?

11.* Ein Haus trägt 540 fl. jährlichen Zins; wie viel kommt auf 8 Monate?

12.* Für 600 Kilogr. verlangt der Fuhrmann 15 fl. Fracht; wie viel Kilogr. wird er für 20 fl. aufladen?

13.* Um eine Waare 60 Kilometer weit zu führen, verlangt der Fuhrmann 20 fl.; wie viel wird er fordern, wenn dieselbe Waare 150 Kilometer weit verführt werden soll?

14.* Wie lange können 18 Pferde mit einem Futter auskommen, welches für 12 Pferde auf 9 Wochen bestimmt ist?

15. Für einen gewissen Betrag kann ein Trottoir, das 2^m breit ist, 72^m lang gelegt werden; wie breit kann es für denselben Preis bei 63^m Länge gelegt werden?

Bei 72^m Länge beträgt die Breite 2^m

" 9 " " " " $2^m \times 9$

" 63 " " " " $\frac{2^m \times 9}{7} = 2^4/_7{}^m$

16. 47 Liter Olivenöl wiegen eben so viel als 43 Liter Wasser; wie viel wiegt ein Liter Olivenöl, wenn ein Liter Wasser 1 Kilogr. wiegt?

17. Ein Manuscript gibt 126 Seiten zu 45 Zeilen; wie viel Seiten wird es geben, wenn auf die Seite nur 35 Zeilen kommen?

18.* A hat einen Weg, indem er täglich 7 deutsche Meilen gieng, in 6 Tagen zurückgelegt; zur Rückreise braucht er 8 Tage; wie viel Meilen hat er täglich gemacht?

19. Ein sich gleichförmig bewegender Körper legt in 14 Minuten 244 Meter zurück; wie viel in einer Stunde?

20. Zur Beheizung eines Zimmers braucht man $15 \square^m$ Brennholz, wenn dessen Scheitlänge 80^{cm} beträgt; wie viel, wenn das Holz nur 64^{cm} lang ist?

21. Zu einem Dache braucht man 6936 Stück Ziegel, wenn jeder Dachziegel $120 \square^{cm}$ deckt; wie viel Stück sind erforderlich, wenn jeder Ziegel nur $90 \square^{cm}$ deckt?

22. Wenn ein Rad in 48 Minuten 264 Umdrehungen macht, a) wie viele Umdrehungen macht es in 36 Minuten? b) in wie viel Minuten dreht es sich 840mal um?

23. Die Erdaxe ist 1714 geogr. Meilen lang, der Durchmesser am Aequator beträgt 1720 Meilen; wie lang müßte bei einem Globus, der diese Abweichung genau darstellen sollte, die Erdaxe genommen werden, wenn man als Durchmesser des Aequators 429^{mm} nimmt?

---

24. 5 Meter Leinwand werden mit $2\frac{1}{2}$ fl. bezahlt; wie hoch kommen 12 Meter?

25. Wie viel kosten 320 Kilogr., wenn 4 Kilogr. für $9\frac{1}{2}$ fl. gekauft werden?

4 Kilogr. kosten . . . . . $9^1/_2$ fl.

320 " " " 80mal so viel = 760 fl.

26. Wenn $11\frac{1}{4}$ Meter Taffet 32 fl. 40 kr. kosten, wie hoch kommen $3\frac{3}{4}$ Meter?

27. $56\frac{7}{8}$ Hektoliter Wein kosten 834 fl.; wie viel Hektoliter bekommt man für 1112 fl.?

28. 24 Arbeiter graben $2\frac{14}{25}$ Ar um; wie viel Ar bestellen in derselben Zeit 27 Arbeiter?

29.* 6 Taglöhner graben ein Feld in $4\frac{1}{2}$ Tagen um; wie viel Taglöhner müßen gedungen werden, damit jene Arbeit in 3 Tagen zu Stande komme?

30. Wenn 30 Personen ein Werk in $4\frac{3}{10}$ Monaten vollenden, wie viel Zeit brauchen dazu 9 Personen?

31. Mit einem bestimmten Vorrathe können 20 Menschen $15\frac{3}{4}$ Monate ausreichen; wie lange werden damit 35 Menschen ausreichen?

32. Jemand braucht für seinen Unterhalt im Durchschnitte alle 10 Tage $34\frac{3}{4}$ fl.; wie lange wird er mit 792 fl. 30 kr. auskommen?

33. Jemand zahlt je 5 Arbeitern zusammen täglich 4 fl. 75 kr., und hat im Ganzen 122 Arbeiter; wie viel beträgt der tägliche Arbeitslohn aller?

34. 5 Kilogramm Butter geben $3\frac{3}{5}$ Kilogr. Schmalz; wie viel Schmalz geben 46 Kilogr. Butter?

35. Eine gleichmäßig ansteigende Straße steigt auf 20·75 Kilometer um 49·8 Meter; wie groß ist die Steigung auf $2\frac{1}{4}$ Kilometer?

36. Ein Gefäß, welches $8\frac{1}{2}$ dm hoch ist, hält 65 Liter; wie hoch muß ein Gefäß von gleicher Weite sein, wenn es 40 Liter halten soll?

37. Ein senkrechter Stab, welcher 1·5 m lang ist, wirft einen 2·1 m langen Schatten; wie hoch ist ein Thurm, welcher zu derselben Zeit einen 43 m langen Schatten wirft?

38. Aus einer bestimmten Menge Garn kann der Weber 84 Meter Leinwand, welche 75 cm breit ist, weben; wie viel Meter 80 cm breiter Leinwand kann er daraus erzeugen?

Bei 75 cm Breite erhält man 84 Met.
" 5 cm " " " 15mal so viel Länge = 84.15 Met.
" 80 cm " " " nur den 16. Theil = $\frac{84.15}{16}$ Met.
= $78\frac{3}{4}$ Met.

39. Jemand braucht zu einem Kleide $3\frac{1}{4}$ Meter Tuch, wenn dieses 2 m breit ist; im Tuchladen findet sich aber nur Tuch von 1 m 75 cm Breite; wie viel Meter sind davon zu dem Kleide erforderlich?

40. Ein Garten ist 40^m lang und 28^m breit; es soll nun ein zweiter Garten um 16^m länger werden, aber dieselbe Fläche einschließen; wie groß wird seine Breite sein müßen?

41.* 20 Schnitter mähen eine Wiese in 4 Tagen ab; es kommen nun noch 4 Schnitter dazu; in wie viel Tagen wird dann die Wiese abgemähet sein?

42. Mit dem Bau einer Eisenbahn können 3000 Arbeiter in 9 Monaten fertig werden; wie viel Arbeiter wird man noch aufnehmen müßen, damit der Bau in 6 Monaten fertig werde?

43. Die atmosphärische Luft übt auf eine Fläche von 1^{cm} einen Druck von 1·03 Kilogramm aus; welchen Luftdruck würde ein Mensch, dessen Oberfläche $1{\cdot}4\square^m$ beträgt, auszuhalten haben, wenn in seinem Körper keine Luft wäre?

44. Ein Vater hinterläßt bei seinem Absterben 7 Kinder, und vermacht jedem 4500 fl.; nun sterben 3 Kinder; wie viel wird auf jedes der übriggebliebenen kommen?

45. Ein Acker von $6\frac{2}{3}$ Hektar gibt einen Ertrag von $68\frac{1}{2}$ Hektolit. Weizen; a) wie viel Weizen trägt eine Ackerfläche von $3\frac{7}{8}$ Hektar? b) auf wie viel Hektar erhält man $37\frac{3}{4}$ Hektoliter Weizen?

46. 477 fl. Capital geben in einer bestimmten Zeit 45 fl. Zins; wie viel Capital muß man anlegen, damit es in derselben Zeit 80 fl. Zins gebe?

Zu 45 fl. Zins gehören 477 fl. Cap.
„ 90 „ „ „ 954 „ „
„ 10 „ „ „ 106 „ „
also zu 80 fl. Zins gehören 848 fl. Cap.

47. Wie viel Capital muß man auf $5\frac{2}{5}$ Jahre ausleihen, damit man eben so viel Zins davon erhalte, als von 370 fl. in 9 Jahren?

48. Wie viel Zins gibt ein Capital in $2\frac{3}{4}$ Jahren, wenn es in 4 Monaten 28 fl. trägt?

49. Ein Capital bringt in 2 Jahren 123 fl. 40 kr. Zins; wie viel in 1 Jahre 7 Monaten?

50. A hat an B 900 fl. auf 5 Monate geliehen, und zwar ohne Interessen; wie lange muß B an A ein Capital von 1250 fl. borgen, um jene Gefälligkeit auszugleichen?

51. Wie lange muß ein Capital angelegt bleiben, um 414 fl. 70 kr. Zins einzutragen, wenn es in 1 Monate 15 fl. 95 kr. Zins gibt?

52. Wenn sich das feste Erdreich zum lockeren dem Inhalte nach wie 10 : 17 verhält, a) wie viel lockere Erde geben 248□^{m} feste Erde, b) wie viel festes Erdreich geben 300□^{m} lockere Erde?

53. Der Preis des Zuckers verhält sich zu dem des Kaffee wie 10 : 23; wie viel kosten 35 Kilogr. Kaffee, wenn 1 Kilogr. Zucker 60 kr. kostet?

54. 100□^{m} Buchenholz entwickeln beim Verbrennen eben so viel Wärme als 37 Tonnen Steinkohle; wenn man nun in einer Haushaltung jährlich 42□^{m} Buchenholz verbraucht und dieses durch Steinkohlen ersetzen will, wie viel Tonnen der letzteren sind erforderlich?

55. Wenn ein Maurer bei gleichem Fleiße bei Grundmauern täglich 500, bei Gewölbemauern dagegen nur 325 Ziegelsteine legt, und für 1□^{m} Grundmauer 1 fl. 25 kr. an Arbeitslohn gezahlt werden, wie viel beträgt der Arbeitslohn für 1□^{m} Gewölbemauer?

56. Um die Entfernung von der Sonne bis zur Erde, d. i. 21 Millionen Meilen zurückzulegen, braucht das Licht 8 Minuten 7·5 Secunden; in welcher Zeit würde das Licht von dem nächsten Fixsterne bis zu uns gelangen, wenn man diese Entfernung auf den kleinsten möglichen Betrag von 426100 Millionen Meilen ansetzt?

57. Um an einen Ort in 15 Tagen zu gelangen, muß man täglich $39\frac{3}{8}$ Kilom. zurücklegen; in wie viel Tagen wird man dahin kommen, wenn man täglich nur $30\frac{1}{2}$ Kilom. macht?

58. Ein Eisenbahnzug geht von Wien auf der Westbahn ab und legt stündlich 33 Kilometer zurück; nach $1\frac{1}{2}$ Stunden wird ihm eine Locomotive nachgesendet, welche stündlich 48 Kilometer zurückgelegt; in welcher Zeit wird sie den Zug erreichen?

Vorsprung des Zuges = $33 \times 1^1/_2 = {}^{99}/_2$ Kilogr.
Beschleunigung der Locomotive in 1 St. 48—33 = 15 Kilom.

Zu 15 Kilom. braucht die Locom. 1 St.
" 1 " " " " $^1/_{15}$ "
" $^1/_2$ " " " " $^1/_{30}$ "
" $^{99}/_2$ " " " " $^{99}/_{30}$ " = $3^3/_{10}$ St.

59. Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 48, das andere 32 Zähne; wie oft wird sich das zweite Rad umdrehen, wenn sich das erste 38mal umgedreht hat?

60. Bei einem Wagen hat das Vorderrad $6\frac{3}{4}$dm, das Hinterrad $9\frac{3}{4}$dm im Durchmesser; wenn sich nun das Hinterrad in einer gewissen Zeit 32mal umdreht, wie viele Umdrehungen macht in derselben Zeit das Vorderrad?

61. Von zwei Rädern soll das eine 200 Umdrehungen machen, während sich das andere 80mal umgedreht hat; wie viel Zähne muß man dem zweiten Rade geben, wenn das erste 26 Zähne hat?

62. Von zwei Röhren füllt die eine einen Wasserbehälter in $3\frac{3}{4}$, die andere in $2\frac{1}{2}$ Stunden; die erste Röhre liefert stündlich 4 Hektoliter 20 Liter; wie viel liefert die zweite Röhre in jeder Stunde?

63. Eine Röhre gibt in 1 Stunde $\frac{2}{3}$ Hektoliter Wasser, eine zweite Röhre in derselben Zeit $\frac{3}{4}$ Hektoliter; in wie viel Stunden erhält man 51 Hektoliter Wasser, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind?

Beide Röhren geben in 1 Stunde $^2/_3 + {}^3/_4 = {}^{17}/_{12}$ Hektoliter Wasser

$^{17}/_{12}$ Hekt. in 1 Stunde

$^1/_{12}$ „ in dem 17. Theile der Zeit = $^1/_{17}$ St.

1 „ in 12mal so viel Zeit = $^{12}/_{17}$ St.

51 „ in 51mal so viel Zeit = $\frac{12.51}{17}$ St. = 36 St.

64. Wie viel Kilogr. Gold von 900 Tausendtheilen Gehalt geben $6\frac{1}{2}$ Kilogr. Gold à 720 Tausendtheilen?

65. Aus 1 Kilogramm feinen Silbers werden 90 österr. Guldenstücke geprägt; wie viel Guldenstücke gehen auf 1 Kilogramm Münzsilber d. i. $\frac{9}{10}$ feines Silber?

Bei $^{10}/_{10}$ Feingehalt . . . . . 90 Gulden

„ $^1/_{10}$ „ . . . . . 9 „

„ $^9/_{10}$ „ . . . . . 81 „

66. Aus 1 Kilogramm Münzgold ($\frac{9}{10}$ feines Gold) werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel solche Stücke gehen auf 1 Kilogramm feinen Goldes?

67. Zwei Personen treten zu einem Geschäfte zusammen und legen 1200 fl. ein. Wenn nun A 700 fl. eingelegt hat, und das Geschäft einen Gewinn von 480 fl. abwirft, wie viel gewinnt A, wie viel B?

68. Bei einer Unternehmung haben A 2400 fl., B 3000 fl. und C 3600 fl. stehen. Durch einen Unfall erleiden sie einen Schaden von 300 fl.; wie groß ist der Schaden, der jeden einzelnen trifft?

69. Bei einem Geschäfte gewinnt A 900 fl., B 700 fl.; wenn nun A zu diesem Geschäfte 4500 fl. hergegeben hat, wie groß war die Einlage des B?

2. Die Procentrechnung.

§. 69. Bei verschiedenen Berechnungen des bürgerlichen Lebens pflegt man das Procent, d. i. den Ertrag von 100, zur Grundlage anzunehmen. Z. B. Ein Capital ist zu 5% (5 Procent) angelegt, heißt: je 100 fl. Capital geben jährlich 5 fl. Zins.

Bei jeder Procentrechnung kommen außer der Grundzahl 100 drei Größen vor: 1) das Procent, d. i. der Betrag, der sich auf 100 bezieht; 2) die Summe, von welcher die Procente berechnet werden; 3) der Ertrag dieser Summe nach den gegebenen Procenten. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte bestimmt werden.

Das Procent bezieht sich zwar immer auf die Zahl 100, es wird jedoch nicht immer von 100 selbst, sondern manchmal von der Summe aus 100 und dem Procent, manchmal auch von der Differenz aus 100 und dem Procent gerechnet. Je nachdem das Procent von der Grundzahl 100 selbst, oder von der um das Procent vermehrten oder verminderten Grundzahl 100 gerechnet wird, heißt die Rechnung bezüglich von Hundert, auf Hundert oder in Hundert. Aus folgenden Beispielen wird diese Unterscheidung klar:

1. Bei einer Waare, welche für 600 fl. eingekauft wird, hat man 3% Spesen; wie viel fl. betragen die Spesen? Oder: Von je 100 fl. Waarenpreis werden 3 fl. Spesen gerechnet; wie viel fl. Spesen entfallen von 600 fl. Waarenpreis? — Man hat zur Auflösung die Proportion

$$x : 3 = 600 : 100,$$

woraus $x = 18$ fl. folgt.

Hier werden von je 100 fl., die in 600 fl. enthalten sind, 3 fl. Spesen gerechnet. (Rechnung von Hundert.)

2. Eine Waare kostet mit Einrechnung von 3% Spesen 600 fl.; wie viel betragen die Spesen?

Da hier die Summe 600 fl. den reinen Waarenpreis bereits um die Spesen vermehrt enthält und daher entstanden ist, indem man je 100 fl. Waarenpreis um die Spesen von 3 fl. vermehrt, statt je 100 fl. also 103 fl. angenommen hat, so läßt sich die Aufgabe auch so ausdrücken: In 103 fl. Waarenpreis mit Spesen sind 3 fl. Spesen

enthalten; wie viel fl. Spesen sind in 600 fl. Waarenpreis mit Spesen enthalten? — Zur Auflösung hat man daher die Proportion

$$x : 3 = 600 : 103,$$

woraus $x = 17{\cdot}48$ fl. folgt.

Hier werden nicht von je 100 fl., sondern von je 103 fl., die in 600 fl. enthalten sind, 3 fl. Spesen gerechnet. (Rechnung auf Hundert.)

3. Der Verkaufspreis einer Waare nach Abzug von 3% Spesen ist 600 fl.; wie viel betragen die Spesen?

Die Summe 600 fl., in welcher von dem reinen Waarenpreise die Spesen bereits abgezogen sind, ist entstanden, indem man von je 100 fl. Waarenpreis 3 fl. Spesen in Abzug gebracht, also statt je 100 fl. nur 97 fl. angenommen hat. Die Aufgabe ist daher gleichbedeutend mit der folgenden: Zu 97 fl. Waarenpreis nach Abzug der Spesen gehören 3 fl. Spesen; wie viel Spesen gehören zu 600 fl. Waarenpreis nach Abzug der Spesen? Man hat die Proportion

$$x : 3 = 600 : 97,$$

woraus $x = 18{\cdot}56$ fl. folgt.

Hier werden auch nicht von je 100 fl., sondern von je 97 fl., die in 600 fl. enthalten sind, 3 fl. Spesen gerechnet. (Rechnung in Hundert.)

Die gegebene Summe, von welcher die Procente berechnet werden, ist also für 3%

bei der Rechnung von Hundert gleichartig mit der Zahl 100,
" " " auf Hundert " " " " 103,
" " " in Hundert " " " " 97.

Rechnung von Hundert.

§. 70. Von einer Zahl 1%, 2%, 3% . . . von Hundert rechnen, heißt von je 100 Einheiten derselben 1, 2, 3, . . . Einheiten nehmen. Dieser ursprüngliche Begriff des Procentes läßt noch eine andere Auffassung zu, die für das Rechnen selbst sehr vortheilhaft ist. Hat man z. B. von 800 fl. 1% zu nehmen, so heißt dieß so viel als: von je 100 fl., die in 800 fl. enthalten sind, 1 fl. nehmen, somit von 1 fl. immer nur den 100sten Theil von 1 fl., von 800 fl. also den 100sten Theil von 800 fl. nehmen. 1% von 800 fl. bedeutet demnach $\frac{1}{100}$ von 800 fl. Ebenso folgt, daß 2% einer Zahl $\frac{2}{100}$ derselben, 3% einer Zahl $\frac{3}{100}$ derselben, u. s. w. bedeutet.

Die Procentrechnungen von Hundert werden mittelst der Proportion oder nach der Schlussrechnung aufgelöst. Einfachere Fälle können im Kopfe berechnet werden.

Aufgaben.

1.* Wie viel ist 1% von 300, 800, 1500, 5000?

2.* Wie viel betragen

a) 2% von 200, 4% von 500, 3% von 700?

b) 6% von 900, 8% von 450, 15% von 600?

3.* Wie viel beträgt

a) $\frac{1}{2}$% von 700, $\frac{3}{4}$% von 800, $\frac{2}{5}$% von 1000?

b) $1\frac{1}{2}$% von 600, $3\frac{1}{4}$% von 1200, $5\frac{3}{4}$% von 1600?

4. Wie groß ist der Ertrag von 1543 fl. zu 5% von Hundert?

a) Nach der Proportion:

x fl. Ertrag 1543 fl. $\quad x : 5 = 1543 : 100$

5 „ „ 100 „ $\quad x = \frac{1543 \times 5}{100}$ fl. $= 77{\cdot}15$ fl.

b) Nach der Schlußrechnung:

100 fl. geben 5 fl. Ertrag

1 fl. gibt $\frac{5}{100}$ „ „

1543 fl. geben $\frac{5 \times 1543}{100}$ fl. $= 77{\cdot}15$ fl.

oder auch:

1543 fl. geben

zu 1% den 100sten Theil von 1543 fl. $= 15{\cdot}43$ fl.

„ 5% . . 5mal so viel $= 15{\cdot}43$ fl. $\times 5 = 77{\cdot}15$ fl.

Der Ertrag einer Summe nach Procenten von Hundert wird also berechnet, indem man den 100sten Theil der Summe mit dem Procent multipliciert.

5. Wie viel betragen

a) 4% von 755? b) $5\frac{1}{2}$% von 840?

c) $4\frac{3}{4}$% von 64? d) $6\frac{1}{4}$% von 7952?

6. Wie viel betragen

a) 5% von 788 fl. b) $4\frac{3}{4}$% von 1328 fl.?

c) $6\frac{1}{2}$% von 2080 Mark? b) $2\frac{1}{5}$% von 825 Kilogr.?

7. Welche Zahl ist

a) um 2% größer als 200, als 450, 750, 1800?

b) um 3% kleiner als 400, als 500, 840, 2222?

Manchmal wird der Ertrag nach Promille (‰) d. i. nach 1000 berechnet. In diesem Falle muß man den 1000sten

Theil der Summe, deren Ertrag gesucht wird, mit dem Promille multiplicieren

8. Jemand hat 2‰ von 12560 fl. zu fordern d. i. 2 fl. von je 1000 fl.; wie viel beträgt dieses?

$$\frac{12{\cdot}560 \times 2}{25{\cdot}120 = \text{fl. } 25 \text{ „ } 12.}$$

9. Wie viel beträgt

a) 1‰ von 8350? b) $1\frac{1}{2}$‰ von 5400?

c) $1\frac{1}{4}$‰ von 1800? d) 5% von 2564?

10. Von welcher Summe geben 6% den Ertrag 75 fl.?

100 fl. geben 6 fl. x : 100 = 75 : 6

x „ „ 75 „ x = 1250 fl.

oder

6% d. i. $^6/_{100}$ von der Summe = 75 fl.

1% d. i. $^1/_{100}$ „ „ „ = 12·5 fl.,

daher die Summe selbst = 12·5 fl. × 100 = 1250 fl.

11.* Welche Summe gibt zu 5% einen Ertrag von

a) 20, b) 36, c) 82, d) 59, e) $60\frac{1}{4}$?

12. Welche Summe gibt

a) zu 4% 447, b) zu $4\frac{1}{2}$% $121\frac{1}{2}$, c) zu $6\frac{1}{4}$% $337\frac{1}{2}$ als Ertrag?

13. Von welcher Summe gibt $\frac{3}{4}$‰ den Ertrag $12\frac{3}{10}$ fl.?

14. Wie viel % muß man von 7975 fl. nehmen, um 638 fl. zu erhalten?

x fl. geben 100 fl. x : 638 = 100 : 7975

638 „ „ 7975 „ x = 8 fl.

oder:

1% von 7975 fl. sind 79·75 fl.; 638 fl. sind daher so viel % von 7975 fl., als wie oft 79·75 fl. in 638 fl. enthalten sind, also 638 : 79·75 = 8%.

15.* Wie viel % von 100 sind folgende Zahlen:

25, 50, 20, 10, 5, 15, 60, 45, 70, $12\frac{1}{2}$, $16\frac{2}{3}$, $33\frac{1}{3}$?

16. Wie viel % sind

a) 30 von 600, 100 von 1200, 54 von 900?

b) 20 von 500, 21 von 700, 48 von 800?

17. Wie viel % sind:

a) 23 fl. von 460 fl.? b) 72 Kr. von 16 fl.?

c) 606 Mark von 8060 Mark? d) $126\frac{9}{10}$ Kil. von 6345 Kil.?

18. 560 fl. Capital sind zu 4% angelegt, d. h. jede 100 fl. Capital geben jährlich 4 fl. Zins; wie viel Zins bezieht man von dem ganzen Capitale?

19. Wie viel beträgt der jährliche Zins a) von 825 fl. zu 5%? b) von 3000 fl. zu $5\frac{1}{2}$%?

20. Wie viel Capital muß man zu $4\frac{1}{2}$% anlegen, damit die jährlichen Interessen $127\frac{3}{4}$ fl. betragen?

21. Ein Haus trägt an Wohnzins jährlich 548 fl.; wie groß ist der Wert dieses Hauses, wenn es sich zu 5% verzinset?

22. Jemand hat ein jährliches Einkommen von 1645 fl.; wie viel beträgt davon die Einkommensteuer à 7%?

23. Ein Haus, dessen Wert auf 18350 fl. geschätzt wurde, wird bei einer Feuer-Versicherungs-Gesellschaft zu 1‰ assecuriert; wie viel beträgt die Versicherungsprämie?

24. Eine Waare wog beim Empfange 4800 Kilogr., nach einiger Zeit wog sie nur 4704 Kilogr.; wie viel % sind eingetrocknet?

25. Zu einem Baue hat man 64800 Ziegelsteine nöthig; wie viel Stück müßen geliefert werden, wenn man für Bruch und Verlust $8\frac{1}{2}$% rechnet?

26. Rindfleisch verliert beim Sieden 15% seines Gewichtes; a) wie viel wiegt ein Stück von $3\frac{1}{4}$ Kilogramm roh (ohne Knochen) nach dem Sieden? b) wie viel rohes Fleisch muß täglich für 12 Personen angeschafft werden, wenn jede $\frac{1}{8}$ Kilogr. gekochtes Fleisch bekommen soll?

27. Von 409 35jährigen Menschen sterben 40% bis zum 60sten Jahre; wie viel erreichen demnach das 60ste Jahr?

28. Wie groß ist die Bevölkerung eines Ortes, wenn 15% derselben 10881 betragen?

29. Böhmen zählte im Jahre 1780 2561794, im Jahre 1870 5140156 Einwohner; um wie viel % hat die Bevölkerung Böhmens in dieser Zeit zugenommen?

30. Prag hat 157713, Budapest 270476 Einwohner; a) um wie viel % hat Prag weniger als Budapest? b) um wie viel % hat Budapest mehr als Prag?

31. Steiermark hat 2066820 Hektar productive Bodenflächen darunter $1\frac{1}{2}$% Weingärten; wie viel Hektar betragen diese?

32. Jemand kauft um 6300 fl. Waaren und gewinnt bei deren Verkaufe 9%; wie viel beträgt der ganze Gewinn?

33. Wenn das Meter Tuch im Einkaufe 3 fl. 20 kr. kostet, wie hoch muß es im Verkaufspreise gesetzt werden, wenn man 12% gewinnen will?

34. Wie viel % werden gewonnen, wenn mit einem Gewinne von a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{8}$ des Einkaufspreises verkauft wird?

35. Eine Waare wird mit einem Gewinne von 21 fl. verkauft, und zwar beträgt dieser Gewinn 20%; wie theuer wurde die Waare eingekauft?

36. Jemand verkauft eine goldene Ankeruhr, die er für 75 fl. kaufte, für 51 fl.; wie viel % verliert er?

Das Gewicht einer Waare mit Inbegriff der Umhüllung oder des Behältnisses, worin sie verpackt ist, nennt man das Brutto-Gewicht, das Gewicht der Waare allein ohne Behältnis das Netto-Gewicht. Das Gewicht des Behältnisses, oder vielmehr der Abzug, der wegen dieses Gewichtes vom Bruttogewichte gemacht wird, heißt Tara. Die Tara wird entweder stückweise, pr. Sack, Ballen, Faß, Kiste, u. s. w. oder nach Procenten vom Bruttogewichte bestimmt.

Der Abzug am Gewichte, welcher dem Käufer bei gewissen Waaren wegen des Eintrocknens oder Verwägens beim Kleinverkaufe gewährt wird, heißt Gutgewicht und wird, wie die Tara, entweder pr. Frachtstück oder nach Procenten angegeben; im zweiten Falle wird es immer von dem nach Abzug der Tara übrigbleibenden Netto-Gewichte, nur in Hamburg vom Brutto-Gewichte berechnet. Sowohl Tara als Gutgewichte werden außer bei sehr theueren Waaren in ganzen Kilogrammen oder Pfunden berechnet. Wenn man vom Brutto-Gewichte die Tara und das Gutgewicht in Abzug bringt, so bleibt als Rest jenes Gewicht übrig, das zu bezahlen kommt, und das im weiteren Sinne auch Netto-Gewicht genannt wird.

37. Das Brutto-Gewicht einer Waare beträgt 2350 Kilogr., die Tara 8%; wie groß ist a) die Tara, b) das Netto-Gewicht?

a) $\frac{23{\cdot}50 \times 8}{188 \text{ Kilogr. Tara}}$

b)
Brutto-Gew.	2350 Kil.
Tara 8%	188 „
Netto-Gewicht	2162 Kil.

38. Wie viel beträgt die Tara von

a) 738 Kilogr. à 5%? b) 648·2 Kilogr. à 6%?

c) 1249 Pfd. à $4\frac{1}{2}$%? d) 216 Pud. à $7\frac{1}{4}$%?

39. Eine Waare wiegt Brutto 565 Kilogr.; wie viel beträgt a) die Tara à 10%, b) das Netto-Gewicht?

40. Bei einer Waare beträgt die Tara à 8% 42 Kilogr.; wie groß ist a) das Brutto-Gewicht, b) das Netto-Gewicht?

41. Von einer Waare ist das Brutto-Gewicht 2150 Kilogr., das Netto-Gewicht 1978 Kilogr.; wie viel % beträgt die Tara?

42. Eine Kiste mit Waaren wiegt Brutto 168 Kilogr., die Tara beträgt 5%; wie theuer ist die Waare, wenn 100 Kilogramm $56\frac{1}{2}$ fl. kosten?

43. Eine Waare wiegt Brutto 750 Kilogr., die Tara beträgt 4%, das Gutgewicht 1%; wie viel Kilogr. sind zu bezahlen?

Brutto 750 Kilogr.
ab Tara 4% . . . 30 „
720 Kilogr.
ab Gutgew. 1% . . 7 „
Netto 713 Kilogr. zu bezahlen.

44. Eine Partie Wachs wiegt 1382 Kilogr. Brutto, Tara 142 Kilogr., Gutgewicht 2%; wie groß ist der Waarenpreis à 192 fl. pr. Centner?

Beim Waarenverkaufe im Großen ist es üblich, dem Käufer eine bestimmte Zahlungsfrist zu bewilligen; damit aber dem Verkäufer daraus kein Nachtheil erwachse, wird er den Verkaufspreis für diese Zeit gegen jenen Preis, um welchen er die Waare gegen bare (contante) Zahlung geben würde, verhältnismäßig höher stellen. Zieht nun der Käufer die bare Zahlung vor, so muß ihm ein Abzug vom Preise der Waare gewährt werden, der jenem früher gerechneten Zuschlage gleich kommt. Der Abzug vom Waarenpreise wegen barer Bezahlung desselben heißt Waarendiscont oder Sconto, auch Rabatt. Er wird allgemein nach Procenten von Hundert der Verkaufssumme berechnet.

Unter Rabatt versteht man häufig auch den Abzug, welcher vom Preise solcher Waaren, bei denen der Erzeuger den Preis für

den Einzelnverkauf festgestellt hat, dem Kleinhändler als Ersatz für die Bezugskosten und zur Ermöglichung eines Gewinnes gewährt wird. Von dieser Art ist der Buchhändlerrabatt. Die Berechnung desselben geschieht gleichfalls von Hundert.

45. Jemand kauft für 3456 fl. Waaren auf 3 Monate Zeit; wenn er nun die Zahlung sogleich leistet, wird ihm ein Sconto von $1\frac{1}{2}\%$ bewilligt; wie viel beträgt a) der Sconto, b) die contante Zahlung?

46. Wie viel beträgt die Barzahlung eines Waarenbetrages von 1048 fl. 56 kr. nach Abzug von a) 2%, b) $1\frac{3}{4}\%$, c) $1\frac{1}{3}\%$ Sconto?

47. Eine Waare kostet bei A 88 kr. mit 5%, bei B 92 kr. mit 7% Sconto; wo ist sie wohlfeiler?

48. Wie viel beträgt eine Buchhändlerrechnung von 358 Mark nach Abzug von 25% Rabatt?

49. Wie viel beträgt der Rabatt à 20% bei einer Bücherrechnung von a) 728 fl. 50 kr.? b) von 417 Mark 20 Pfenn.?

50. Für einen Waarenbetrag von 797 fl., zahlbar auf Zeit, erhält man contant 779·07 fl.; zu wie viel % wurde der Sconto gerechnet?

51. Wie hoch kommen 4 Fässer Feigen Brutto 518 Kilogramm, Tara 10%, wenn der Centner Netto zu 24 fl. mit $1\frac{1}{2}\%$ Sconto bezahlt wird?

Wenn Jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waaren, einem Anderen aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Commissionär, die Vergütung aber, welche dieser für seine Bemühung erhält, Provision. Die Provision wird in Procenten berechnet und beim Einkaufe zu dem Waarenpreise addiert, beim Verkaufe von demselben subtrahiert.

Zur Abschließung von Geschäften desselben Ortes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe heißt Sensarie. Die Sensarie wird nach Procenten oder auch nach Promille bestimmt.

52. Wie viel beträgt bei einem Waarenbetrage von 4712 fl. die Sensarie à $\frac{1}{2}\%$?

53. Wie groß ist die Sensarie à $\frac{5}{8}$% von
a) 2348 fl.? b) 4336 fl.? c) 1207 fl. 72 kr.

54.* Ein Sensal kauft für jemanden um 2500 fl. Staatspapiere ein, und erhält 1‰ Sensarie; wie viel beträgt diese?

55.* Jemand kauft für einen Kaufmann um 4200 fl. Waaren ein, und läßt sich als Provision $1\frac{1}{2}$% bezahlen; wie viel fl. beträgt die Provision?

56. Wie groß ist die Provision à 2% von
a) 758 fl.? b) 1044·54 fl.? c) 2590 Francs?

57. Für den Einkauf von Waaren im Betrage von 3548 fl. erhält der Commissionär 53 fl. 32 kr. als Provision; zu wie viel % wurde diese berechnet?

58. Ein Kaufmann besorgt den Verkauf einer Waare im Betrage von 3518 fl., zahlt dem Sensalen $\frac{1}{2}$% und berechnet für sich $1\frac{3}{4}$% Provision; wie viel erhält der Verkäufer?

59. Wie viel kosten 2308 Kilogr. Brutto einer Waare, wenn die Tara 8%, das Gutgewicht $1\frac{1}{2}$% beträgt, 100 Kilogr. Netto 85·72 fl. mit 2% Sconto kosten und die Provision zu $1\frac{5}{8}$% berechnet wird.

60. Berechne folgende Factura (Einkaufsrechnung):

Hamburg am 1 Mai.

4 Säcke Java-Kaffee			
Brutto 1093 ℔			
Tara 12 „			
Gutg. $\frac{1}{2}$%			
Netto . . . ℔ à 75 Pfenn.	Mark	. .	. .
Sconto 2%	„	. .	. .
	Mark	. .	. .
Verschiedene Spesen	„	37	13
	Mark	. .	. .
Provision 2%	„	. .	. .
	Mark	. .	. .

61. Ein Wiener Kaufmann erhält aus Triest 4 Kisten Weinbeeren, gewogen Brutto 972 Kilogr., Tara 18 Kilogr. per Kiste, zu 30 fl. per Centner Netto, Sensarie $\frac{1}{2}$%, Provision 2%; Einfuhrzoll, Fracht und andere Spesen betragen 68 fl. 64 kr.; wie theuer muß er das Kilogramm verkaufen, um 15% zu gewinnen?

Rechnung auf Hundert.

§. 71. Von einer Zahl 1%, 2%, 3%, . . auf Hundert rechnen, heißt von je 101, 102, 103, . . Einheiten bezüglich 1, 2, 3, . . Einheiten nehmen.

Die Rechnungen auf Hundert werden mit Hilfe der Proportion ausgeführt.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Ertrag von 2226 fl. à 6% auf Hundert, d. i. wie viel wird von 2226 fl. berechnet, wenn man von 106 fl. 6 fl. berechnet?

$$x : 6 = 2226 : 106; \qquad x = 126 \text{ fl.}$$

2. Berechne den Ertrag auf Hundert von

a) 3148 fl. à 5%, b) 958 fl. 25 kr. à 8%,
c) 1507 Francs à $4\frac{1}{2}$%, d) $5033\frac{1}{2}$ Mark à 2%.

3. Von welcher Summe sind 90·192 fl. bei 4% auf Hundert erzielt worden, d. h. welche Summe gibt 90·192 fl. Ertrag, wenn man von 104 fl 4 fl. Ertrag rechnet?

$$x : 104 = 90{\cdot}102 : 4; \qquad x = 2345 \text{ fl.}$$

4. Von welchen Summen sind folgende Beträge gerechnet worden:

a) 62 fl. à 3%, b) 163·24 fl. à $5\frac{1}{2}$%,
c) 108 Mark à 2%, d) 206·75 Francs à $6\frac{3}{4}$%

auf Hundert?

5. Durch Abzug von $4\frac{1}{2}$% auf Hundert hat sich eine Summe auf 2164 fl. vermindert; wie groß war dieselbe?

6. Wie viel % auf Hundert sind 27 fl. von 702 fl.?

Vermehrter Betrag 702 fl.
Procentertrag 27 „
ursprüngliche Summe 675 fl.

$x : 27 = 100 : 675$
$x = 4\%$ auf Hundert.

7. Wenn man statt 1978 Mark nur 1840 Mark zahlt, wie viel % auf Hundert beträgt der Abzug?

Vermehrter Betrag 1978 M.
ursprünglicher „ 1840 „
Procentertrag 138 M.

$x : 138 = 100 : 1840$
$x = 7\frac{1}{2}\%$ auf Hundert.

8. Wie viel % auf Hundert beträgt es, wenn statt 632 fl. nur $509\frac{1}{2}$ fl. gerechnet werden?

9. Jemand zahlte für eine ihm zu $5\frac{1}{2}\%$ geliehene Summe nach einem Jahre 2143 fl. 32 kr. an Capital und Zinsen zurück; a) wie viel betrugen dabei die Zinsen, b) wie groß war das Capital?

10. Für eine Steuer sammt 32% Umlage werden 125 fl. 40 kr. gezahlt; wie groß ist die ursprüngliche Steuer?

11. Ein Beamter erhält zu seinem Gehalte einen Theuerungszuschuß von 15% und bezieht mit diesem monatlich 172 fl. 50 kr.; wie groß ist sein jährlicher Gehalt?

12. Jemand verkauft das Meter Tuch zu $4\frac{1}{2}$ fl. und gewinnt dabei 20%; wie theuer hat er das Meter gekauft?

13. Wie viel beträgt der in dem Verkaufspreise von 828 fl. enthaltene Gewinn à 15%?

14. Eine Waare kommt mit 12% Spesen auf 3500 fl. zu stehen; wie viel betragen die Spesen?

15. Der Einkaufspreis einer Waare beläuft sich mit Einschluss von $\frac{1}{2}\%$ Sensarie auf 2653 fl. 40 kr.; wie groß ist der ursprüngliche Waarenpreis?

16. Eine Waare kommt mit Einrechnung von 2% Provision auf 628 fl. 48 kr.; wie viel beträgt die Provision?

17. Wie viel darf ein Kaufmann beim Einkaufe für 1 Centner Zucker bezahlen, wenn er dabei 2% Provision und 13% Spesen zahlen muß und das Kilogramm mit 10% Gewinn für 60 kr. verkaufen will?

Rechnung in Hundert.

§. 72. Von einer Zahl 1%, 2%, 3%, . . in Hundert rechnen, heißt von je 99, 98, 97, . . Einheiten bezüglich 1, 2, 3, . . Einheiten nehmen.

Die Rechnungen in Hundert werden mittelst der Proportion ausgeführt.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Ertrag von 1224 fl. zu 4% in Hundert, d. h. wie viel werfen 1224 fl. ab, wenn 96 fl. 4 fl. abwerfen?

$$x : 4 = 1224 : 96;\ x = 51 \text{ fl.}$$

2. Wie groß sind die Beträge in Hundert von

a) 982 fl. à $4\frac{1}{2}\%$?
b) 692·64 fl. à 5%?
c) 2805 Francs à 2%?
d) 5177 Mark à $3\frac{1}{4}\%$?

3. Wie viel sind 6% a) von, b) auf, c) in Hundert von 3074 fl.?

4. Von welcher Summe sind 12% in Hundert gleich $397\frac{1}{2}$ fl.?

x : 88 = $397\frac{1}{2}$: 12; x = 2915 fl.

5. Von welchen Summen sind folgende Beträge zu den beigefügten Procenten in Hundert gerechnet worden?

a) 200 fl. à 5%? b) $93\frac{3}{4}$ fl. à $8\frac{2}{3}$%?

c) 512 Lire à $2\frac{1}{2}$%? d) 128·5 Mark à $6\frac{3}{4}$%?

6. Von welcher Summe sind 45 fl. 4% a) von, b) auf, c) in Hundert?

7. Wie viel % in Hundert beträgt es, wenn man statt 3750 fl. 4000 fl. berechnet?

Verminderter Betrag 3750 fl.
ursprünglicher „ 4000 „
Procentertrag 250 fl.

x : 250 = 100 : 4000

x = $6\frac{1}{4}$% in Hundert.

8. Wie viel % a) von, b) auf, c) in Hundert sind 83 fl. von 817 fl.?

9. Wie viel % von Hundert sind a) $15\frac{1}{2}$% auf Hundert, b) $5\frac{3}{4}$% in Hundert?

10. Wie viel % auf Hundert sind a) $13\frac{2}{5}$% von Hundert, b) $4\frac{5}{8}$% in Hundert?

11. Wie viel % in Hundert sind a) 8% von Hundert, b) 15% auf Hundert?

---

12. Jemand zahlte für eine Steuer bei 4% Nachlass 208 fl. 58 kr.; wie groß war die Steuer?

13. Der Verkaufspreis einer Waare nach Abzug von 18% Spesen beträgt 2308 fl.; wie groß sind die Spesen?

14. Für eine mit 3% Verlust verkaufte Waare werden 1040 fl. gelöst; wie groß ist a) der Verlust, b) der Einkaufspreis?

15. Wenn man eine Waare für 150 fl. verkauft, so verliert man 10%; wie theuer muß man sie verkaufen, um 8% zu gewinnen?

16. Jemand zahlte für einen Waarenbetrag, von welchem ihm ein Scouto von $1\frac{3}{4}$% bewilligt wurde, 1551 fl.; wie groß war a) der Sconto, b) der Waarenbetrag?

17. Der Verkaufsbetrag einer Waare stellt sich nach Abzug von von $\frac{1}{2}$% Sensarie auf 2095 fl.; wie theuer wurde die Waare verkauft?

18. Für eine verkaufte Waare erhält man nach Abzug von 2% Provision 2158 fl. 88 kr.; wie viel beträgt die Provision?

3. Lösung von Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen. (Die zusammengesetzte Regeldetri.)

§. 73. Hängt eine Art von Zahlen von zwei oder mehreren Arten so ab, dass sie mit ihnen einzeln genommen theils in geradem, theils in verkehrtem Verhältnisse steht, und ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer zweiten Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt; so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die zusammengesetzte Regeldetri.

Auflösung zusammengesetzter Regeldetri-Aufgaben mit Hülfe der Proportion.

§. 74. Jede zusammengesetzte Regeldetri kann in mehrere einfache zerlegt werden. Z. B.

3 Maurer führen in 14 Tagen 50□^{m} Mauerwerk auf; in wie viel Tagen werden 7 Maurer 125□^{m} Mauerwerk aufführen?

Man hat folgende zwei Ansätze der einfachen Regeldetri:

1) Zur Herstellung von 50□^{m} Mauerwerk brauchen

3 Maurer	14 Tage	y : 14 = 3 : 7
7 „	y „	y = 6 Tage.

2) 7 Maurer brauchen zur Herstellung

von 50□^{m}	6 Tage	x : 6 = 125 : 50
„ 125□^{m}	x „	x = 15 Tage.

Kürzer kann die Aufgabe mit Hülfe einer einzigen zusammengesetzten Proportion gelöst werden. Stellt man nämlich die früher erhaltenen zwei Proportionen zusammen, behält jedoch statt der gefundenen Zahl 6 den Buchstaben y bei, so hat man

y : 14 = 3 : 7
x : y = 125 : 50, daher durch Multiplication

y . x : 14 . y = 3 . 125 : 7 . 50

und wenn man das erste Verhältnis durch y abkürzt,

x : 14 = 3 . 125 : 7 . 50,

oder

x : 14 = 3 : 7
125 : 50,

wenn man die zu multiplicierenden Zahlen unter einander setzt.

Das Verhältnis x : 14 ist demnach gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus 3 : 7 und 125 : 50.

Vergleicht man die Ordnung der Zahlen in diesen Verhältnissen mit der Stellung der Zahlen in der Aufgabe, nämlich

3 Maurer in 14 Tagen 50$\boxtimes^m$
7 " " x " 125$\boxtimes^m$

so sieht man, dass die zu x Tagen und 14 Tagen gehörigen Zahlen der Maurer, welche mit der Zahl der Tage verkehrt proportioniert sind, in umgekehrter, die zugehörigen Zahlen der $\boxtimes^m$ aber, welche mit der Zahl der Tage gerade proportioniert sind, in der nämlichen Ordnung zu einem Verhältnisse verbunden erscheinen.

Daraus ergibt sich für die Lösung der zusammengesetzten Regeldetri-Aufgaben folgendes Verfahren:

1. Man setze x und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältnis.

2. Das zweite Verhältnis der Proportion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse man findet, wenn man die beiden zu x und zu der damit gleichnamigen Zahl gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben oder in umgekehrter Ordnung nimmt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proportioniert ist. Diese Verhältnisse werden unter einander geschrieben.

3. Die Proportion wird aufgelöst, indem man das Product aller in den inneren Gliedern vorkommenden Zahlen durch das Product aller in den äußeren Gliedern befindlichen Zahlen dividiert.

Auflösung zusammengesetzter Regeldetri-Aufgaben durch die Schlussrechnung.

§. 75. Einfachere Aufgaben können auch hier durch leichte Schlüsse im Kopfe gelöst werden. Z. B.

4 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, bringen eine Arbeit in $7\frac{1}{2}$ Tagen zu Stande; wie viel Tage brauchen dazu 6 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten?

Wenn 4 Arbeiter $7\frac{1}{2}$ Tage brauchen, so hat 1 Arbeiter 4mal so viel Zeit, also 4mal $7\frac{1}{2} = 30$ Tage nöthig; 6 Arbeiter aber brauchen nur den 6ten Theil von 30 Tagen d. i. 5 Tage bei täglich 12stündiger Arbeit; würden sie aber nur 1 Stunde täglich arbeiten, so hätten sie 12mal 5 Tage = 60 Tage daran zu thun; da sie nun 10 Stunden täglich arbeiten, so brauchen sie nur den 10ten Theil von 60 Tagen, also 6 Tage.

§. 76. Dieselben Schlüsse, wie beim Kopfrechnen, liegen auch der schriftlichen Zweisatzrechnung zu Grunde.

Für die in §. 74 behandelte Aufgabe würde sich die schriftliche Schlußrechnung so stellen:

3 Maurer brauchen zu 50□m 14 Tage
1 „ braucht „ 50 „ $14 \cdot 3$ „
7 „ brauchen „ 50 „ $\frac{14 \cdot 3}{7}$ „
7 „ brauchen „ 1 „ $\frac{14 \cdot 3}{7 \cdot 50}$ „
7 „ „ „ 125 „ $\frac{14 \cdot 3 \cdot 125}{7 \cdot 50} = 15$ Tage.

Bei der Schlußrechnung bringt man, um die Schlüsse leichter bilden zu können, diejenige Art von Zahlen, zu welcher die unbekannte Zahl gehört, auf die letzte Stelle.

Anfänglich werden wegen des besseren Ueberblickes der Schlußfolgerungen alle Zwischenresultate vollständig angeschrieben; bei vorgerückter Uebung setzt man unmittelbar zu der mit x gleichnamigen Zahl nach und nach diejenigen Zahlen, mit denen multipliciert werden soll, in den Zähler, diejenigen aber, durch welche dividiert werden soll, in den Nenner als Factoren dazu, so dass am Schlusse nur das Endresultat da steht, an welchem dann die Ausrechnung vollzogen wird.

Hiernach würde sich die Lösung der früheren Aufgaben so darstellen:

3 Maurer brauchen zu 50□m
1 „ braucht „ 50 „
7 „ brauchen „ 50 „
7 „ „ „ 1 „
7 „ „ „ 125 „

$$x = \frac{14 \cdot 3 \cdot 125}{7 \cdot 50} = 15 \text{ T.}$$

Aufgaben.

1. Welches Capital gibt in 6 Jahren zu 5% eben so viel Zins als 4260 fl. Capital in 10 Jahren zu $5\frac{1}{2}$%?

Durch die Schlussrechnung:
Zur Erzielung eines bestimmten Zinses wird erfordert
in 10 Jahren à $5\frac{1}{2}$% 4260 fl. Cap.
„ 1 Jahre à $5\frac{1}{2}$% $4260 \cdot 10$ „ „
„ 6 Jahren à $5\frac{1}{2}$% $\frac{4260 \cdot 10}{6}$ „ „
„ 6 „ à 1% $\frac{4260 \cdot 10 \cdot 5\frac{1}{2}}{6}$ „ „
„ 6 „ à 5% $\frac{4260 \cdot 10 \cdot 5\frac{1}{2}}{6}$ „ „
= 7810 fl. Cap.

Mit Hilfe der Proportion:

4260 fl. Cap. in 10 J. à $5\frac{1}{2}$%
x „ „ „ 6 „ à 5 „

x : 4260 = 10 : 6
$5\frac{1}{2}$: 5

x = 7810 fl. Cap.

2. 750 fl. Capital zu 3% angelegt, bringen in einer gewissen Zeit 78 fl. 75 kr. Zins; zu wie viel % müßen 500 fl. Capital ausstehen, damit sie in der nämlichen Zeit 61 fl. 25 kr. Zins geben?

3. Ein Capital gibt zu $5\frac{3}{4}$% in 4 Jahren 7 Monaten 1643 fl. 65 kr. Zins; wie viel Zins gibt dasselbe Capital zu 6% in 2 Jahren 9 Monaten?

4. 8 Pferde brauchen in 15 Tagen 20 Hektoliter Hafer; wie viel Hektoliter braucht 1 Pferd in 7 Tagen?

5. 5 Pferde verzehren in 6 Tagen 360 Kilogramm Heu, und 10 Kühe in 5 Tagen 280 Kilogramm Heu; wie viel Heu werden 12 Pferde und 18 Kühe in 13 Tagen verzehren?

6. 15 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 10 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie die nämliche Arbeit in 6 Tagen vollenden, indem sie täglich nur 10 Stunden arbeiten?

7. Die Abschrift eines Werkes kann von 6 Schreibern, welche täglich $12\frac{1}{2}$ Stunden schreiben, in 8 Tagen vollendet werden; wie viele Schreiber wird man noch dazu aufnehmen müßen, damit sie mit der Abschrift desselben Werkes in 5 Tagen fertig werden, wo sie täglich nur 12 Stunden schreiben?

8. Eine Mühle mit 4 Gängen mahlt in 6 Tagen à 16 Stunden 240 Hektoliter Getreide; in wie viel Tagen mahlen 3 Gänge $187\frac{1}{2}$ Hektoliter Getreide, wenn täglich 20 Stunden gemahlen wird?

9. Auf einem Acker von 150m Länge und 30m Breite können $1\frac{1}{2}$ Hektoliter Weizen gesäet werden; wie lang muß ein 36m breiter Acker sein, um darauf $2\frac{2}{5}$ Hektoliter Weizen säen zu können?

10. Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 56, das andere 21 Zähne; wenn nun das erste in $2\frac{5}{12}$ Minuten 58 Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in $3\frac{3}{4}$ Minuten um?

11. Aus 6 Kilogramm Garn webt der Weber 60 Meter Leinwand, welche $1\frac{1}{2}$ Meter breit ist; wie viel Meter Leinwand wird man von 8 Kilogr. Garn bekommen, wenn die Leinwand nur $1\frac{1}{4}$ Meter breit sein soll?

12. Ein Buch, dessen jede Seite 32 Zeilen zu 45 Buchstaben enthält, hat 240 Seiten; wie viele Buchstaben muß man im Durchschnitte in einer Zeile anbringen, um den Inhalt jenes Buches auf 200 Seiten, deren jede 36 Zeilen enthält, zu bringen?

13. Zu einer Mauer, welche 35^m lang, 12^m hoch und 8^{dm} dick ist, braucht man 88000 Ziegelsteine; wie viel solche Ziegelsteine braucht man zu einer Mauer, welche 28^m lang, 15^m hoch und 1^m dick ist?

14. Aus 500 Gramm feinen Silbers werden 45 Guldenstücke ö. W. geprägt; ein Maria-Theresien-Thaler wiegt 28·063 Gramm und hat einen Feingehalt von $833\frac{1}{3}$ Tausendtheilen. Welchen Wert in österr. Guldenstücken hat 1 Maria-Theresien-Thaler?

500 Gramm Silber 1000 Tdth. fein gelten 45 fl.

1 „ „ 1000 „ „ gilt $\frac{45}{500}$ „

28·063 „ „ 1000 „ „ „ $\frac{45 \cdot 28{\cdot}063}{500}$ „

28·063 „ „ 1 „ „ „ $\frac{45 \cdot 28{\cdot}063}{500 \cdot 1000}$ „

28·063 „ „ $833\frac{1}{3}$ „ „ gelten $\frac{45 \cdot 28{\cdot}063 \cdot 833\frac{1}{3}}{500 \cdot 1000}$ „

$= 2{\cdot}105$ fl.

15. Ein österr. Achtguldenstück wiegt 6·45161 Gramm und ist 900 Tausendtheile fein, ein russischer Halb-Imperial wiegt 6·544 Gramm und enthält $916\frac{2}{3}$ Tdth. feines Gold; wie viel in Achtguldenstücken ist 1 Halb-Imperial wert?

16. In einem Bergwerke befinden sich zwei Dampfmaschinen; die eine schafft alle 2 Minuten 7 Hektoliter Wasser aus einer Tiefe von 84^m, die andere alle 3 Minuten 10 Hektoliter aus einer Tiefe von 108^m. In welcher Zeit würden beide Maschinen vereinigt 2550 Hektoliter Wasser auf eine Höhe von 120^m zu bringen im Stande sein?

17. Aus $77\frac{1}{2}$ Kilogr. Garn werden 7 Stück Leinwand gewebt, deren jedes 48 Meter lang und $\frac{5}{4}$ Meter breit ist; a) wie viel Stück von 52 Meter Länge und $\frac{6}{4}$ Meter Breite wird man aus $118\frac{3}{4}$ Kilogramm Garn weben; b) wie viel Kilogr. Garn sind erforderlich, um 11 Stück von 45 Meter Länge und 1 Meter Breite weben zu lassen; c) wie breit wird die Leinwand sein, wenn man aus $80\frac{1}{4}$ Kilogramm Garn 8 Stück zu 42 Meter weben will; d) wie viel Meter wird das Stück enthalten, wenn aus 65 Kilogr. 6 Stück $\frac{9}{8}$ Meter breite Leinwand gewebt wird?

4. Kettenrechnung.

§. 77. Die Kettenrechnung wird angewendet, wenn aus einer bekannten Zahl einer Art die zugehörige unbekannte Zahl einer andern Art durch Hilfe einer oder mehrerer Mittelbestimmungen gefunden werden soll.

Z. B. Wie viel Kreuzer österr. Währung kosten 20 Dekagramm einer Waare, von welcher $7\frac{1}{2}$ Kilogramm auf 30 Francs kommen?

Um hier den zu 20 Dekagr. gehörigen Preis in kr. österr. Währ. zu finden, muß man nebst der Angabe, daß $7\frac{1}{2}$ Kilogr. 30 Francs kosten, noch folgende Mittelbestimmungen zu Hilfe nehmen: 1 Kilogr. hat 100 Dekagr., 1 Franc gilt 40 Kreuzer österr. Währ.; und die vollständige Aufgabe läßt sich dann in folgende Kettenverbindung bringen:

kr. ö. W. x kosten 20 Dekagramm,
wenn Dekagramm 100 . . . 1 Kilogr. machen,
wenn Kilogramm $7\frac{1}{2}$ . . 30 Francs kosten,
und wenn Franc 1 . . . 40 kr. ö. W. gilt?

In diesem Ansatze hat jede Zahl auf der rechten Seite mit der links stehenden gleichen Wert; jede Zahl auf der linken Seite ist mit der nächstvorhergehenden auf der rechten Seite gleiches Namens und gleicher Natur, und die letzte Zahl rechts ist mit der ersten Zahl links d. i. mit x gleichnamig. Auf diese Art hängen alle Zahlen des Ansatzes wie die Glieder einer Kette zusammen.

Jede Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri ausgeführt werden. Für das frühere Beispiel hätte man folgenden Rechnungsgang:

1) Wie viel Kilogr. sind 20 Dekagr., wenn 100 Dekagr. 1 Kil. ausmachen?

y Kilogr. 20 Dekagr. $\quad y : 1 = 20 : 100$

1 „ 100 „ $\quad y = \frac{20 \times 1}{100} = \frac{1}{5}$ Kilogr.

2) Wenn $7\frac{1}{2}$ Kilogr. 30 Francs kosten, wie hoch kommen $\frac{20 \times 1}{100} = \frac{1}{5}$ Kilogr.?

$7\frac{1}{2}$ Kilogr. 30 Francs $\quad z : 30 = \frac{20 \times 1}{100} : 7\frac{1}{2}$

$\frac{20 \times 1}{100}$ " z " $\quad z = \frac{20 \times 1 \times 30}{100 \times 7\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ Francs.

3) Wie viel kr. ö. W. betragen $\frac{20 \times 1 \times 30}{100 \times 7\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ Francs, wenn 1 Franc 40 kr. gilt?

x kr. ö. W. $\frac{20 \times 1 \times 30}{100 \times 7\frac{1}{2}}$ Francs

40 " 1 "

$$x : 40 = \frac{20 \times 1 \times 30}{100 \times 7\frac{1}{2}} : 1$$

daher

$$x = \frac{20 \times 1 \times 30 \times 40}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 1} = 32 \text{ kr. ö. W.}$$

Es ist jedoch nicht nöthig, bei solchen Aufgaben alle diese weitläufigen Rechnungen durchzuführen. Vergleicht man nämlich den gefundenen Ausdruck $\frac{20 \times 1 \times 30 \times 40}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 1}$ mit der oben in die Kettenverbindung gebrachten Aufgabe, so sieht man, daß x gleich ist dem Producte aller rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Product aller links erscheinenden bekannten Zahlen, und daher sogleich aus dem obigen Kettenansatze berechnet werden kann.

Für die Kettenrechnung hat man daher Folgendes zu beobachten:

Man bilde zuerst den Kettensatz. Zu diesem Ende schreibt man x mit seiner Benennung auf die linke Seite eines aufrechten Striches, und rechts die bekannte Zahl, deren Betrag gesucht wird; darunter setzt man alle Mittelbestimmungen, und zwar fängt man jedesmal links mit einer Zahl an, welche mit nächstvorhergehenden Zahl auf der rechten Seite völlig gleicher Art ist, und rechts neben jede Zahl kommt diejenige Zahl zu stehen, welche mit ihr gleichen Wert hat; die Kette muß mit einer Zahl schließen, die mit x gleichnamig ist. Die Auflösung der angesetzten Kette geschieht, indem man das Product aller rechts stehenden Zahlen durch das Product aller links stehenden bekannten Zahlen dividiert, wobei, wenn es angeht, die in §. 43 angeführten Abkürzungen anzuwenden sind.

Aufgaben.

1. Wie viel Tonnen betragen 317 Londner Centner, wenn 97 Londn. Pfund = 44 Kilogramm sind, wenn 1 Londn. Centner 112 Londn. Pfund und 1 Tonne 1000 Kilogr. enthält?

Tonnen	x	317 Londn. Ctr.
Londn. Ctr.	1	112 Londn. ℔
Londn. ℔	97	44 Kilogr.
Kilogr.	1000	1 Tonne

x = 161·049 Tonnen.

Man beginnt die Kette mit der Frage; x Tonnen betragen 317 Londn. Ctr., und setzt jene Zahl links, diese rechts des Striches. Da man mit Londn. Ctr. aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmung mit Londn. Ctr. anfangen; dieß geschieht, indem man ansetzt: wenn 1 Londn. Ctr. 112 Londn. Pfd. gibt. Hier hört man rechts mit Londn. Pfd. auf, daher muß man wieder links mit Londn. Pfund anfangen; man sagt: wenn 97 Londn. Pfd. 44 Kilogr. machen. Man hört hier mit Kilogr. auf: da aber x Tonnen bedeutet, so muß man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe nehmen: wenn 1000 Kilogr. 1 Tonne geben.

Weil in der Proportion nur das Verhältnis, in welchem x vorkommt, während der Rechnung als benannt betrachtet werden kann, und der Kettensatz eigentlich nichts anderes ist als die Zusammenfassung mehrerer Proportions-Ansätze, so folgt, daß man auch beim Kettensatze während der Rechnung nur x und die damit gleichnamige Zahl als benannt betrachten dürfe, wenn auch in dem Ansatze wegen der leichtern Anordnung auch den übrigen Zahlen ihre Benennung beigesetzt wird.

2. Jemand hat von seinem Freunde 20 Hektoliter Weizen geborgt, und will ihm statt des Weizens Wein zurückstellen. Wenn nun 1 Hektoliter Weizen 9 fl. 20 kr., das Hektoliter Wein aber 23 fl. kostet; wie viel Hektol. Wein müßen für 20 Hektol. Weizen gegeben werden?

3. Wie viel Hektoliter enthält ein englischer Quarter, wenn 1 Hektoliter $5041\frac{1}{5}$ und 1 Quarter $14654\frac{1}{3}$ alte Pariser Cubikzoll hat?

4. In England wiegen die Eisenbahnschienen 57 Pfund Adp. pr. Yard; wie viel Kilogramm gibt dieses auf ein Meter? (100 ℔ Adp. = $45\frac{9}{25}$ Kilogr., 10 Yard = $9\frac{1}{7}$ Met.)

5. In Aegypten kosten 1 Ardeb Weizen 92 Piaster; wie viel fl. ö. W. kostet hiernach 1 Hektoliter, da 100 Ardeb = 27 Hektoliter und 100 Piaster = $8\frac{1}{2}$ fl. sind?

6. Ein Pud Silber kostet in Rußland 825 Silberrubel; wie viel Francs kostet nach diesem Verhältnis ein Kilogramm in Frankreich? (1 Pud = 16·38 Kilogramm, 162 Francs = $40\frac{1}{2}$ Silberrubel.)

7. 913 Kilogr. Cacao kosten im Einkaufe 736 fl.; wenn nun das Kilogramm à 88 kr. verkauft wird, wie viel % beträgt der Gewinn?

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
736	913 Kil.
1	88 kr. Einnahme
100	1 fl. Einnahme

$x = 110\frac{2}{3}$ fl. Einnahme; somit $10\frac{2}{3}$% Gewinn.

8. Ein Weinhändler verkauft das Liter Wein zu 40 kr. und gewinnt dabei 10%; wie theuer hat er beim Einkaufe das Hektoliter bezahlt?

9. Jemand kauft 3 Stück Tuch à 32 Meter für 315 fl. ein; wie theuer muß er das Meter verkaufen, um 12% zu gewinnen?

10. Eine Goldstange wiegt 3 Kilogr. 240 Gramm und hat 720 Tausendtheile Feingehalt; wie viel ist der Betrag davon in ö. W. zu 1395 fl. pr. Kilogr. fein?

11. Ein österr. Guldenstück enthält 900 Tausendtheile feines Silber; wie viel Gramm wiegt es, wenn 45 Guldenstücke 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

12. Wie viele kais. Ducaten sind gleich einem Achtguldenstücke, da 1 Achtguldenstück 5·80645 Gramm feines Gold enthält, und aus einer cöln. Mark (233·87 Gramm) $23\frac{2}{3}$ Karat feines Gold 67 Ducaten geprägt werden?

13. Wie viele Achtguldenstücke können aus 23 Kilogr. 226 Gramm Gold, welches $\frac{8}{10}$ fein ist, geprägt werden?

14. Welcher Wert in fl. ö. W. ergibt sich für 1 Achtguldenstück, da 155 Stück auf 1 Kilogramm Gold von 900 Tausendtheilen Feingehalt gehen, wenn das Wertverhältnis des Goldes zum Silber wie $15\frac{1}{2} : 1$ angenommen wird?

15. Wie viel fl. ö. W. gilt, wenn man die vorige Wertgleichung 1 Kilogr. Gold = $15\frac{1}{2}$ Kilogr. Silber annimmt, 1 deutsches Zehnmarkstück, wovon $139\frac{1}{2}$ Stück ein Pfund = 500 Gramm feinen Goldes enthalten?

16. 1000 Kilogramm Weizen kosten in Berlin 199 Reichsmark; wie hoch in ö. W. stellt sich hiernach der Preis von 1 Hektoliter Weizen im Gewichte von 75 Kilogramm, wenn 100 Reichsmark = 54 fl. ö. W. gerechnet werden?

17. Jemand kauft in Hamburg 3751 ℔ Kaffee für 3125 Reichsmark; wie viel in ö. W. kostet ein Kilogramm, wenn 2 Hamb. ℔ = 1 Kilogr., und wenn 100 Mark = 54 fl. ö. W. sind?

18. Ein Kaufmann in Odessa sendet nach Genua 5218 Tschetwert Weizen, welches dort zu $19\frac{3}{4}$ Lire pr. Hektoliter verkauft wird, und erhält für den Betrag Baumöl, wovon 1 Barile von 60 Kilogr. Gewicht 84 Lire kostet; wie viel russ. Pfund Baumöl werden es sein? (10 Tschetwert = 21 Hektoliter, 97 russ. Pfund = 44 Kilogr.)

19. In Smyrna kostet der Cantaro Feigen 272 Piaster, Einkaufsspesen daselbst sind 5%, Provision 2%, Fracht bis Wien, Zoll und andere Spesen 24%; wie hoch in ö. W. stellt sich das Kilogr. Feigen in Wien? (1 Cantaro = $56\frac{9}{25}$ Kilogr., 100 Piaster = 8·5 fl. ö. W.)

20. Ein Triester bezieht aus Marseille Brutto 3052 Kilogr. Baumwolle, Tara $4\frac{1}{2}$%, à 215 Francs pr. 100 Kilogr. Netto mit 1% Sconto; wie hoch in ö. W. muß er 100 Kilogr. in Triest verkaufen, um 15% zu gewinnen, wenn die Spesen bis Triest 20% betragen und 100 Francs = 43 fl. ö. W. sind?

5. Einfache Zinsrechnung.

Berechnung der Zinsen.

§. 78. Ein Capital von 5380 fl. ist zu 5% angelegt; wie groß ist der Zins in 3 Jahren?

Nach der Proportion:

100 fl. Cap. in 1 J. 5 fl. Zins
5380 „ „ „ 3 „ x „ „

$$x : 5 = 5380 : 100$$
$$3 : 1$$

$$x = \frac{5380 \times 5 \times 3}{100} \text{ fl.}$$
$$= 807 \text{ fl. Zins.}$$

Durch die Schlussrechnung:

100 fl. Cap. in 1 J. 5 fl. Zins
1 „ „ „ 1 „ $\frac{5}{100}$ „ „
5380 „ „ „ 1 „ $\frac{5 \times 5380}{100}$ „ „
5380 „ „ „ 3 „ $\frac{5 \times 5380 \times 3}{100}$ „ „

Oder: 5380 fl. Cap. geben

zu 1% in 1 J. 53·8 fl. Zins
„ 5% „ 1 „ 53·8 × 5 „ „
„ 5% „ 3 „ 53·8 × 5 × 3 „ „

Daraus folgt:

Die Zinsen sind gleich dem 100sten Theile des Productes aus dem Capital, dem Procent und der Zeit in Jahren.

Aufgaben.

1.* Den wievielten Theil des Capitals betragen die jährlichen Zinsen a) zu 5%, b) zu 4%?

2.* Wie viel Zinsen erhält man jährlich
a) von 300 fl., 500 fl., 800 fl., 1200 fl. zu 5%?
b) von 200 fl., 700 fl., 1000 fl., 2500 fl. zu 4%?

3.* Wie viel Zinsen gibt jährlich 1 fl. Capital
a) zu 4%, b) $5\frac{1}{2}$%, c) zu 6%?

4.* Wie viel Zinsen geben jährlich
a) 25 fl., 50 fl., 250 fl., 875 fl., 1220 fl. à 4%?
b) 20 fl., 70 fl., 160 fl., 530 fl., 2080 fl. à 5%?
c) 30 fl., 85 fl., 240 fl., 725 fl., 1350 fl. à 6%?

5.* Wie viel Zinsen geben
a) 200 fl. à 6% in 3 Jahren?
b) 750 fl. à 4% in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

6.* Wie viel Zinsen zu 5% geben
a) 300 fl. in 5 Jahren? b) 650 fl. in 2 Jahren?
c) 480 fl. in 4 Jahren? d) 1240 fl. in $3\frac{1}{2}$ Jahren?

7. Wie viel Zins geben 2860 fl. Capital zu 4% in 4 Jahren?

8. Wie viel Zins geben zu 6% in $2\frac{2}{3}$ Jahren
a) 3080 fl., b) 75·85 fl., c) 815 Francs Capital?

9. Berechne die Zinsen von 1208 fl. 40 kr. à $4\frac{1}{2}$% in
a) 2, b) $1\frac{3}{4}$, c) $2\frac{1}{6}$ Jahren?

10. Wie viel Zins geben 948 Mark in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu
a) $4\frac{3}{4}$%, b) 5%, c) $6\frac{1}{2}$%?

11. Wie viel Zins tragen
a) 4105 fl. à $5\frac{2}{3}$% in 3 Jahren?
b) 7466·2 fl. à $6\frac{1}{4}$% in 6 Monaten?
c) 884 Mark à 7% in 2 Jahren 11 Monaten?

12. Jemand hat 5238 fl. zu 5% durch 2 Jahre 9 Monate, und 4855 fl. 35 kr. zu $4\frac{3}{4}$% durch 3 Jahre 5 Monate ausgeliehen; welches Capital brachte ihm mehr Zinsen, und um wie viel mehr als das andere?

13. Auf einem Gute lastet eine Schuld von 8500 fl.; nach 2 Jahren zahlt der Besitzer die Schuld und die $5\frac{1}{2}$% Zinsen; wie viel muß er zahlen?

14. Zu welcher Summe wachsen 1560 Francs in $1\frac{3}{4}$ Jahren an, wenn der jährliche Zins zu 5% gerechnet wird?

§. 79. Am kürzesten und einfachsten werden die Zinsen auf Jahre, Monate und Tage nach der Zerfällungsmethode berechnet, und zwar:

1. Die Zinsen für ein Jahr berechnet man nach der Procentrechnung, indem man den 100sten Theil des Capitals mit dem Procent multipliciert.
2. Um die Zinsen für mehrere Jahre zu finden, darf man nur die einjährigen Zinsen mit der Anzahl der Jahre multiplicieren.
3. Die Monate werden als Theile des Jahres, und die Tage als Theile des Monates betrachtet, die auf diese Theile entfallenden Zinsbeträge durch die Division bestimmt, und zuletzt zu den Zinsen auf Jahre addiert.

Beispiele.

1) 25 84 fl. à 4% in 1 Jahr
103·36 fl. = 103 fl. 36 Kr.

2) 2480 fl. à 6% in 3 Jahren
148 80 fl. in 1 Jahr
446·40 fl. in 3 Jahren

3) 3450 fl. zu $4\frac{1}{3}$% in 2 Jahren 8 Monaten

13800		
1150		
149·50	fl.	für 1 Jahr
149·50	"	" 1 "
49·833	"	" 4 Mon. = $\frac{1}{3}$ Jahr
49·833	"	" " "
398 666	fl.	= 398 fl. 67 kr.

Aufgaben.

1. Wie viel Zins geben in einem Jahre:
   a) 739 fl. à 5%? b) 1346 fl. 60 kr. à 6%?
   c) 995 Mark à 4%? d) 2375 Francs à 7%?

2. Jemand hat folgende Capitalien anliegen: bei A 2500 fl. zu $4\frac{1}{2}$%, bei B 3850 fl. zu 5%, bei C 4580 fl. zu 6%; wie viel Zins bringen ihm jährlich alle drei Capitalien?

3. Wie viel Zins geben 2480 fl. zu 6% in
a) 2 Jahren? b) 3 Jahren? c) 5 Jahren?

4. Wie viel Zins geben
a) 1426 fl. à 4% in 6 Monaten?
b) 905 Mark à $5\frac{1}{2}$% in 4 Monaten?
c) 2306 Rubel à 6% in 5 Monaten?

5. Ein Capital von 2800 fl. ist zu 4% durch 3 Jahre 11 Monate und 7 Tage angelegt; wie viel Zins wirft es in dieser Zeit ab?

6. Wie viel Zins geben
a) 4800 fl. zu 6% in 1 Jahr 5 Mon. 20 Tagen?
b) 2896 fl. zu $5\frac{1}{2}$% in 2 Jahren 9 Mon. 25 Tagen?
c) 7388 fl. 45 kr. zu 7% in 3 Jahren 1 Mon. 17 Tagen?

7. Jemand nimmt 2560 fl. auf 6 Monat zu 5% auf Zinsen; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

8. $2518\frac{2}{5}$ fl. stehen durch 2 Jahre 5 Monate zu $5\frac{1}{4}$% aus, wie viel muß an Capital und Zins zurückgezahlt werden?

§. 80. Häufig sind die Zinsen eines Capitals bloß für eine bestimmte Anzahl von Tagen zu berechnen. In diesem Falle sucht man zuerst die Zinsen zu 6%, und leitet daraus mittelst Zerfällung die Zinsen für das gegebene Procent ab.

Sind z. B. die 6% Zinsen von 1357 fl. für 239 Tage zu berechnen, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Cap.	in 360 Tagen		6	fl. Zins
1 " "	" 360	"	$\frac{6}{100}$	" "
1357 " "	" 360	"	$\frac{6 \times 1357}{100}$	" "
1357 " "	" 1	"	$\frac{6 \times 1357}{100 \times 360}$	" "
1357 " "	" 239	"	$\frac{6 \times 1357 \times 239}{100 \times 360}$	" "
			$= \frac{1357 \times 239}{6000}$	" "

d. h. die Zinsen für eine bestimmte Anzahl Tage zu 6% werden berechnet, wenn man das Capital mit der An=

zahl Tage multipliciert und das Product zuerst durch 1000 und dann durch 6 dividiert.

Wenn bei den Gulden des Capitals auch Kreuzer vorkommen, so läßt man sie gewöhnlich während der Rechnung weg, vergrößert jedoch, wenn 50 oder mehr als 50 Kreuzer vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer als Decimalen von Gulden angesetzt.

Aufgaben.

1. Wie viel Zins geben 3516 fl. zu 6% in 38 Tagen?

3516 × 38
28128
10548
133·608 : 6
22·268 = fl. 22 „ 27.

2. Wie viel Zins geben zu 6%

a) 5400 fl. in 250 Tagen? b) 6340 fl. in 72 Tagen?
c) 1339 „ „ 287 „ d) 8846 „ „ 23 „

3. Wie viel betragen die Zinsen von 4560 fl. zu 8% in 57 Tagen?

4560 × 57
22800
31920
259920 : 6
43·32 Zins zu 6%
14·44 „ „ 2% = $\frac{1}{3}$ von 6%
57·76 = fl. 57„76 Zins zu 8%.

4. Wie hoch belaufen sich die Zinsen von fl. 2345„25 zu 4% in 99 Tagen?

5. Wie viel Zins bringen 3844 fl.

a) zu 3% in 125 Tagen? b) zu 5% in 56 Tagen?
c) zu $6\frac{1}{2}$% in 88 Tagen? d) zu 7% in 124 Tagen?

6. Wie viel Zins geben 780 fl. Capital zu 6% vom 3. April bis 12. August?

Vom 3. April bis 3. August sind 4 Mon. = 120 Tage
„ 3. Aug. „ 12. „ „ 9 „
129 Tage

780 × 129
1560
7020
100620
16·77 = fl. 16„77.

7. Wie viel Zins geben fl. 748,,36 zu 6% vom 17. August bis 5. October?

8. Wie viel Zins geben fl. 9379 „ 19 à 5% vom 3. März bis 4. November?

9. Wie viel Zinsen tragen

a) 945 fl. zu $5\frac{1}{4}$% vom 1. Aug. bis 7. Nov.?

b) 1278 fl. zu $6\frac{1}{2}$% vom 25. Mai bis 3. October?

c) 3377 fl. zu 5% vom 13. Juni bis 27. August?

10. Jemand nimmt 1580 fl. auf 22 Tage zu 6% auf Zinsen; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

11. Ein Kaufmann hatte eine Summe von 4108 fl. am 20. Oct. zu zahlen, er leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6% Zins zu bezahlen?

12.

A hatte an B zu zahlen:	dagegen hattte B an A zu zahlen:
am 5. Juli fl. 2325,,82,	am 13. Aug. fl. 1646,,6,
am 27. Sept. „ 978,,39,	am 5. Dec. „ 2410,,—,
am 19. Nov. „ 1815,,40;	

Am 31. December werden die gegenseitigen Schulden mit 5% Zins ausgeglichen; wie viel hat da A an B zu bezahlen?

Berechnung des Capitals.

§. 81. Ist z. B. die Größe eines Capitals zu finden, welches in 2 Jahren zu 4% 188 fl. Zins trägt, so hat man:

Um in 1 J. 4 fl. Zins } zu erhalten, { 100 fl. Cap.
„ „ 1 „ 1 „ „ } muß { $\frac{100}{4}$ „ „
„ „ 1 „ 188 „ „ } man { $\frac{100 \times 188}{4}$ „ „
„ „ 2 „ 188 „ „ } anlegen { $\frac{100 \times 188}{4 \times 2}$ „ „

d. h. das Capital ist gleich den 100fachen Zinsen, dividiert durch das Product aus dem Procent und der Zeit in Jahren.

Man kann hier auch so schließen:

Der Zins für 1 Jahr zu 4% ist $\frac{188}{2}$ fl. = 94 fl., d. i.

$\frac{4}{100}$ des Capitals = 94 fl., daher

$\frac{1}{100}$ „ „ = $\frac{94}{4}$ fl. = 23·5 fl., und

das Capital selbst = 23·5 fl. × 100 = 2350 fl.

Aufgaben.

1.* Wie groß ist das Capital, wenn die jährlichen Zinsen zu 5% 20 fl., 30 fl., 42 fl., 36 fl., 25 fl., 64 fl., 100 fl. betragen?

2.* Von welchem Capital betragen die jährlichen Zinsen
a) 80 fl. zu 4%? b) 54 fl. zu $4\frac{1}{2}$%?
c) 69 fl. zu 5%? d) 96 fl. zu 6%?

3.* Welches Capital bringt a) zu 4%, b) zu 5%, c) zu 8% jährlich 1 fl. Zins?

4.* Welches Capital bringt an Zinsen
a) zu 4% in 2 Jahren 44 fl.?
b) zu 5% in 4 Jahren 68 fl.?
c) zu 6% in 3 Jahren 81 fl.?

5. Jemand bezieht in 3 Jahren 556 fl. als Zins; wie groß ist das Capital bei 6%?

6. Welches Capital gibt zu 5% in 2 Jahren 586 fl. Zins?

7. Jemand bezieht jährlich 330 fl. als 6% Zins; wie groß ist das Capital?

8. Welches Capital gibt
a) zu $4\frac{1}{2}$% in 3 Jahren 837 fl. Zins?
b) zu $6\frac{1}{2}$% in $1\frac{2}{3}$ Jahren 390 fl. Zins?
c) zu $5\frac{1}{4}$% in 2 Jahren 7 Mon. 398·58 Mark Zins?

9. Wie groß muß das Capital sein, das zu $4\frac{1}{2}$% in 3 Jahren eben so viel Zins gibt, als 5480 fl. Capital zu 5% in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

10. Ein Capital bringt zu $4\frac{1}{2}$% jährlich 18 fl. Zins; wie viel jährlichen Zins bringt ein 300 fl. größeres Capital zu 5%?

11. Für ein Capital, welches durch 3 Jahre zu $5\frac{1}{2}$% ausgestanden ist, erhält man an Capital und Zinsen 5359 fl.; wie groß war das Capital?

100 fl. betragen sammt den $5\frac{1}{2}$% Zinsen nach 3 Jahren $116\frac{1}{2}$ fl.; man hat also

100 fl. Cap. $116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Zins
x " " 5359 " " " "
$x : 100 = 5359 : 116\frac{1}{2}$
also $x = 4600$ fl.

12. Jemand zahlt für ein durch 6 Jahre benütztes Capital sammt den $5\frac{1}{2}$% Zinsen fl. 452,,20 zurück; wie groß war das ursprüngliche Capital?

Berechnung der Zeit.

§. 82. Ist z. B. die Anzahl der Jahre zu suchen, in welcher ein Capital von 3800 fl. zu 6% 684 fl. Zinsen gibt, so hat man

100 fl. Cap. 6 fl. Zins in 1 Jahr
1 „ „ 6 „ „ „ 100 „
3800 „ „ 6 „ „ „ $\frac{100}{3800}$ „
3800 „ „ 1 „ „ „ $\frac{100}{3800 \times 6}$ „
3800 „ „ 684 „ „ „ $\frac{100 \times 684}{3800 \times 6}$ „

d. h. die Zeit in Jahren ist gleich den 100fachen Zinsen, dividiert durch das Product aus dem Capital und dem Procent.

Man kann hier auch so schließen:

3800 fl. Cap. geben zu 6% in 1 Jahre $38 \times 6 = 228$ fl. Zinsen; 684 fl. Zinsen gibt also dasselbe Capital in so viel Jahren, als wie oft 228 fl. in 684 fl. enthalten sind, somit in $684 : 228 = 3$ Jahren.

Aufgaben.

1.* In wie viel Jahren geben 225 fl. Capital à 4% 45 fl. Zinsen?

2.* In welcher Zeit bringen
a) 675 fl. zu 4% 81 fl. Zins?
b) 820 fl. zu 5% 83 fl. Zins?
c) 450 fl. zu 6% $67\frac{1}{2}$ fl. Zins?

3. In welcher Zeit geben 4700 fl. Capital zu $4\frac{1}{2}$% 423 fl. Zins?

4. Wie lange muß ein Capital von 6520 fl. zu 5% ausstehen, um 320 fl. Zinsen zu geben?

5. In wie viel Zeit geben 3541 fl. Capital zu 4% 352 fl. Zins?

6. In welcher Zeit geben
a) 5460 fl. Cap. zu $5\frac{1}{2}$% 365 fl. Zins?
b) 5244·55 fl. Cap. zu $5\frac{1}{4}$% 956·3 fl. Zins?
c) 6580·5 Mark Cap. zu $4\frac{3}{4}$% 849·82 Mark Zins?

7. Wie lange muß ein Capital angelegt bleiben, damit die Zinsen a) zu 4%, b) zu 5%, c) zu 6% eben so viel betragen, als das Capital?

8. In welcher Zeit geben 720 fl. Capital zu 5% eben so viel Zinsen, als 2400 fl. Capital zu 6% in 6 Monaten?

9. Am 1. Mai wurden 1550 fl. zu 4% ausgeliehen; als die Rückerstattung erfolgte, betrug das Capital mit den Zinsen $1619\frac{3}{4}$ fl., wann ist das Capital zurückgezahlt worden?

Berechnung des Procentes.

§. 83. Es sei z. B. zu bestimmen, zu wie viel % man 3460 fl. Capital anlegen müße, damit es in 3 Jahren 519 fl. Zins abwerfe. Um zu berechnen, wie viel Zins 100 fl. Cap. in 1 Jahre geben, hat man

3460	fl. Cap.	in 3	J.	519	fl. Zins
1	" "	" 3	"	$\frac{519}{3460}$	" "
100	" "	" 3	"	$\frac{519 \times 100}{3460}$	" "
100	" "	" 1	"	$\frac{519 \times 100}{3460 \times 3}$	" "

d. h. das Procent ist gleich den 100fachen Zinsen dividiert durch das Product aus dem Capital und der Anzahl Jahre.

Man kann auch so schließen:

1% von 3460 fl. beträgt in 1 Jahre 34·6 fl., in 3 Jahren 103·8 fl.; 519 fl. sind daher so viel %, als wie oft 103·8 fl. in 519 fl. enthalten sind, also $519 : 103{\cdot}8 = 5\%$.

Aufgaben.

1.* 800 fl. Capital bringen in 1 Jahre 32 fl. Zinsen; zu wie viel % ist das Capital ausgeliehen?

2.* a) 250 fl. Capital bringen jährlich 15 fl. Zins,
b) 550 " " " " 22 " "
c) 360 " " " " $10\frac{4}{5}$ " "
zu wie viel % stehen diese Capitalien aus?

3.* 600 fl. geben in 3 Jahren 72 fl. Zins; zu wie viel % ist dieses Capital angelegt?

4. Zu wie viel % muß ein Capital von fl. 3250 angelegt werden, damit es in 3 Jahren fl. 390 Zins gebe?

5. Jemand leihet 16000 fl. aus; wie viel % muß er verlangen, um davon ein jährliches Einkommen von 900 fl. zu genießen?

6. Zu wie viel % geben 4240 fl. Capital in $3\frac{1}{2}$ Jahren 848 fl. Zins?

7. 7840 fl. 50 kr. bringen in 1 Jahr 6 Mon. 705 fl. 65 kr. Zins; zu wie viel % geschieht die Verzinsung?

8. Zu wie viel % muß man 9110 fl. anlegen, damit sie vom 2. Mai bis 15. October 206 fl. 23 kr. Zins bringen?

9. Zu wie viel % muß ein Capital ausstehen, damit die einfachen Zinsen a) in 20, b) in 25, c) $33\frac{1}{3}$ Jahren dem Capitale gleich sind?

10. Zu wie viel % müßen 2205 Mark angelegt werden, damit sie in 2 Jahren eben so viel Zinsen geben, als 1600 Mark Capital zu $4\frac{1}{5}$% in $3\frac{1}{2}$ Jahren?

11. Ein Capital bringt in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}$% $60\frac{3}{4}$ fl. Zins; ein um 150 fl. größeres Capital bringt in derselben Zeit 90 fl. Zins; zu wie viel % ist das letztere verzinst?

12. Zu wie viel % müßen 375 fl. ausgeliehen werden, damit sie mit den einfachen Zinsen in $1\frac{3}{5}$ Jahren zu 402 fl. anwachsen?

6. Discontrechnung.

§. 84. Wenn Jemand eine Summe Geldes, die er erst nach einer gewissen Zeit ohne Zinsen zu zahlen verpflichtet ist, sogleich bezahlt, so wird er offenbar nicht die volle schuldige Summe entrichten, sondern nur einen so großen Betrag, daß dieser vermehrt um die Zinsen, die er bis zum Zahlungstermine tragen würde, der Schuldsumme gleich wird; es muß daher in diesem Falle dem Schuldner ein bestimmter Abzug gewährt werden. Dieser Abzug von der Schuldsumme heißt Discont oder Rabatt und wird nach Procenten berechnet. Wenn man den Discont von dem Schuldcapitale subtrahiert, so heißt der Rest der bare oder gegenwärtige (auch discontierte) Wert des Capitals.

Z. B. Jemand will eine unverzinsliche Schuld von 418 fl., die er nach $1\frac{1}{2}$ Jahren abzutragen hat, sogleich bezahlen; a) wie viel wird ihm bei 6% jährlichen Discont nachgelassen, b) wie groß ist die bare Bezahlung?

Wenn die Barsumme 100 fl. ist, so beträgt bei 6% Zins deren künftiger Wert nach $1\frac{1}{2}$ Jahren 109 fl., und umgekehrt: 109 fl., welche unverzinslich nach $1\frac{1}{2}$ Jahren gezahlt werden sollen, sind bar

nur 100 fl. wert, oder von je 109 fl. werden, wenn man sie $1\frac{1}{2}$ Jahre früher bezahlt, 9 fl. als Discont in Abzug gebracht. Man hat daher:

a) 109 fl. Cap. 9 fl. Discont

1 „ „ $\frac{9}{109}$ „ „

418 „ „ $\frac{418 \times 9}{109} = 34{\cdot}51$ fl. Discont.

b) Schuldcapital 418.— fl.
ab Discont 34·51 „
Barzahlung 383·49 fl.

Probe:

383·49 fl. à 6%		Barzahlung	383·49 fl.
23·00 94 fl.	Zins für 1 J.	Zins für $1\frac{1}{2}$ Jahr	34·51 „
11·50 47 „	„ „ „ $\frac{1}{2}$ „	Cap. nach $1\frac{1}{2}$ J.	418·— fl.
34·51 41 fl.			

Aus dieser Darstellung geht klar hervor, dass sich der Discont nicht auf die Summe 100 selbst, sondern auf 100 vermehrt um die Discontprocente bezieht, d. i. dass der Discont auf Hundert gerechnet werden müße.

Würde man den Discont von Hundert rechnen, so hätte man:

418 fl. à 9%	Cap. 418 fl.
37·62 fl. Discont	ab Discont 37·62 „
	Barzahlung 380·38 fl.

Eine Barzahlung von 380·38 fl. würde aber mit den 6% Zinsen nach $1\frac{1}{2}$ Jahren nicht das Schuldcapital 418 fl., sondern nur 414·61 fl. geben.

Aufgaben.

1. Nach 1 Jahre soll jemand 2345 fl. bezahlen; er bezahlt sogleich mit 5% Discont; wie viel beträgt a) der Discont, b) die Barzahlung?

2. Wie viel sind 850 fl., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5% Zins jetzt wert?

3. A soll an B nach 5 Jahren 1245 fl. bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}$% nach $2\frac{1}{2}$ Jahren zu zahlen?

4. Ein Schuldbetrag von 1275 fl., der nach $7\frac{1}{2}$ Monaten zahlbar ist, wird gegen 5% jährlichen Discont bar bezahlt; wie groß ist a) der Abzug, b) die Barzahlung?

5. Jemand leiht 1850 fl. zu 6% aus, zieht aber die jährlichen Zinsen sogleich ab; um wie viel ist dabei der Schuldner, welcher die Zinsen erst nach Ablauf des Jahres zu zahlen hätte, im Nachtheil?

6. Jemand erbt 4850 fl., welche aber erst nach 5 Jahren ausgezahlt werden sollen; man will ihm auf seinen Wunsch gegen $6\frac{1}{2}$% Discont das Geld gleich auszahlen; wie viel beträgt die Erbschaft in barer Summe?

7. Für eine nach $2\frac{1}{2}$ Jahren fällige Schuld erhielt jemand bar 2480 fl.; wie groß war die Schuld, wenn 5% Discont für das Jahr gerechnet wurden?

2480 fl. à 5%		Barzahlung	2480 fl.
124 fl. Zins für 1 J.		Zins für $2\frac{1}{2}$ J.	310 „
124 „		Schuldcapital	2790 fl.
62 „			
310 fl. Zins für $2\frac{1}{2}$ J.			

8. Jemand ist nach einer gewissen Zeit 5285 fl. schuldig; er bezahlt bei 6% jährlichem Discont bar 5250 fl.; nach welcher Zeit hätte er zahlen müßen?

5250 fl. à 6%.

105 fl. Discont für 1 Jahr

$$1 \text{ „ } \text{ „ } \text{ „ } \frac{1}{105} \text{ „}$$

$$35 \text{ „ } \text{ „ } \text{ „ } \frac{35}{105} = \frac{1}{3} \text{ Jahr.}$$

9. Statt der später zahlbaren Summe von 1852 fl. werden bar 1712 fl. gezahlt; nach welcher Zeit war die Summe fällig, wenn der Discont mit $5\frac{1}{4}$% jährlich gerechnet wurde?

10. Von einer nach $1\frac{1}{2}$ Jahren fälligen Schuldsumme von 654 fl. werden bei barer Bezahlung 54 fl. nachgelassen; wie viel % beträgt der jährliche Discont

600 fl. Barzahlung . . . . . 54 fl. Nachlass

$$100 \text{ „ } \text{ „ } \ldots\ldots \frac{54}{6} = 9 \text{ fl. Nachlass.}$$

Der Nachlass beträgt also 9% für $1\frac{1}{2}$ Jahr, also 6% für 1 Jahr.

11. Jemand bezahlte für ein Capital, das nach 4 Jahren zahlbar war, bar 1600 Mark; der Discont betrug 288 Mark; wie viel % jährlich sind gerechnet worden?

12. A bietet für ein Haus entweder 25230 fl. bar, oder 26355 fl. nach 9 Monaten zahlbar; wenn nun der Verkäufer das Geld zu 5% ausleihen kann, welches Anbot ist für ihn vortheilhafter?

13. Jemand kauft einen Weingarten für 8000 fl. mit der Bedingung, daß er 2580 fl. sogleich, 2380 fl. nach einem Jahre und den Rest nach 3 Jahren ohne Zinsenvergütung zahlt; er entschließt sich aber, da der Verkäufer damit zufrieden ist, auch die beiden letzten Posten

mit $6\frac{1}{4}\%$ jährlichem Discont sogleich zu entrichten; wie groß ist die ganze Barzahlung?

14. Jemand kauft ein Haus für 29000 fl., welche vertragsmäßig nach 5 Jahren zahlbar sind; er bezahlt nun 6000 fl. bar, 7500 fl. nach $2\frac{1}{3}$ Jahren und den Rest nach 4 Jahren; wie groß ist dieser Rest, wenn für jede Vorauszahlung 5% jährlicher Discont bewilligt wird?

15. A hat an zwei Gläubiger nach einem Jahre zusammen 5319 fl. ohne Zinsen zu entrichten; er bezahlt bar, und erhält von dem ersten bei $4\frac{1}{2}\%$ Discont einen Nachlass von 135 fl.; wie groß wird der Abzug bei dem zweiten sein, der ihm nur 4% Discont gewährt?

7. Terminrechnung.

§. 85. Wenn unverzinsliche Geldsummen, welche in verschiedenen Zeitfristen oder Terminen zahlbar sind, auf einmal oder zu anderen, als den festgesetzten Terminen abgetragen werden sollen, so nennt man das Verfahren, durch welches ermittelt wird, zu welcher Zeit dieses ohne Nachtheil des Schuldners und des Gläubigers geschehen kann, die Terminrechnung.

Bei dieser Rechnung werden einfache Zinsen zu Grunde gelegt, und man kann demnach sagen: 500 fl. geben in 4 Jahren eben so viel Zins, als 4mal 500 fl. in 1 Jahre; oder: 700 fl. geben in 8 Monaten eben so viel Zins, als 8mal 700 fl. in 1 Monate.

Z. B. A hat ein Haus um 8000 fl. unter der Bedingung gekauft, daß die Zahlung in mehreren Terminen ohne Zins und zwar in folgender Weise geleistet werden soll: 3500 fl. nach 2 Monaten, 2000 fl. nach 3 Monaten, 1500 fl. nach 4 Monaten und 1000 fl. nach 5 Monaten; wann ist der mittlere Termin für die Gesammtzahlung, d. h. wann muß die Zahlung geschehen, wenn sie auf einmal geleistet werden soll?

Wenn die einzelnen Zahlungen in den festgesetzten Terminen gemacht werden, so genießt A die Zinsen

von	3500	fl.	auf	2	Mon.	oder von	7000	fl. auf 1 Mon.
„	2000	„	„	3	„	„ „	6000	„ „ 1 „
„	1500	„	„	4	„	„ „	6000	„ „ 1 „
„	1000	„	„	5	„	„ „	5000	„ „ 1 „
						also zusammen von	24000	fl. auf 1 Mon.

A wird daher die Zahlung der ganzen Summe von 8000 fl. so lange zurückhalten dürfen, bis die von derselben eingebrachten Zinsen gerade so viel betragen, als die Zinsen von 24000 fl. in 1 Monate, auf welche er bei der bedungenen Zahlungsweise das Recht hat. Damit nun 8000 fl. eben so viel Zinsen bringen, als 24000 fl. in 1 Monate, müßen sie so viele Monate angelegt bleiben, als wie oft 8000 fl. in 24000 fl. enthalten ist; man hat daher 24000 : 8000 = 3 Monate.

Um also den mittleren Zahlungstermin mehrerer Ratenzahlungen zu finden, multipliciert man jede Terminzahlung mit der Zeit, nach welcher sie geleistet werden soll, und dividiert die Summe dieser Producte durch die Summe aller Terminzahlungen; der Quotient zeigt den mittleren Termin an.

Aufgaben.

1. Wenn A 400 fl. nach 4, 600 fl. nach 5, und 800 fl. nach 10 Monaten bezahlen sollte, nach wie viel Monaten müßte er die ganze Summe auf einmal bezahlen?

A kann benutzen

400 fl. auf 4 Mon. = 1600 fl. auf 1 Mon.
600 „ „ 5 „ = 3000 „ „ 1 „
800 „ „ 10 „ = 8000 „ „ 1 „
1800 fl. auf x Mon. = 12600 fl. auf 1 Mon.

$$x = \frac{12600}{1800} = 7 \text{ Mon.}$$

Mache die Probe für einen bestimmmten Zinsfuß, z. B. für 6%.

2. Eine Summe von 10000 fl. ist in 4 Terminen zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 8 Monaten, und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt werden soll, wann muß dieses geschehen?

3. Jemand hat 6000 fl. sogleich, 4500 fl. nach 4 Monaten, 4500 fl. nach 8 Monaten, 4500 nach 12 Monaten und 4500 fl. nach 16 Monaten zu entrichten; suche den mittleren Zahlungstermin für die Gesammtzahlung.

4. Jemand soll 800 fl. in 4 Jahren bezahlen, und zwar am Ende eines jeden Jahres 200 fl.; er wünscht aber die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; wann wird dieses geschehen müßen?

Wenn die Terminzahlungen gleich sind, so erhält man den mittlern Zahlungstermin kürzer, wenn man nur die Zeiten addiert und die Summe durch die Anzahl der Terminzahlungen dividiert.

1 + 2 + 3 + 4 = 10, 10 : 4 = $2^1/_2$ Jahr.

5. A kauft einen Garten für 1200 fl., wovon er sich nach je 3 Monaten 240 fl. zu zahlen verpflichtet; wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

6. Am 18. Mai erhält ein Commissionär folgende Wechsel zum Eincassiren zugesendet: 600 fl. zahlbar nach 36 Tagen, 800 fl. zahlbar nach 45 Tagen und 400 fl. zahlbar nach 60 Tagen; an welchem Tage wird er seinem Committenten die Summe derselben gutschreiben?

7. A ist an B zu zahlen schuldig: 200 fl. sogleich, 300 fl. nach 5 Monaten, 450 fl. nach 8 Monaten, 300 fl. nach 11 Monaten 600 fl. nach 15 Monaten und 400 fl. nach 30 Monaten. Dagegen ist B an A zu zahlen schuldig: 350 fl. nach 3 Monaten, 500 fl. nach 7 Monaten und 600 fl. nach 1 Jahre. Nun wollen beide mit einander abrechnen und soll der Rest auf einmal berichtiget werden; wie viel beträgt der Rest, und wann muß seine Zahlung erfolgen?

---

8. A soll 2000 fl. nach 2 Jahren und 1600 fl. nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlen; er bezahlt 2400 fl. schon nach $1\frac{1}{6}$ Jahr; wann muß er dann den Rest bezahlen?

A darf benutzen:	2000 fl.	2 Jahre	=	4000 fl.	1 Jahr
	1600 „	4 „	=	6400 „	1 „
zusammen	3600 fl.			10400 fl.	1 Jahr
er benutzt:	2400 „	$1\frac{1}{6}$ Jahr	=	2800 „	1 „
hat noch zu benutzen:	1200 fl.	x Jahre	=	7600 fl.	1 Jahr;

$$\text{daher } x = \frac{7600}{1200} = 6\frac{1}{3} \text{ Jahre}$$

Der Rest von 1200 fl. wird also nach $6\frac{1}{3}$ Jahren, von Beginne an gerechnet, zu zahlen sein.

9. Jemand hat nach 8 Monaten 3000 fl. zu bezahlen; er zahlt 1800 fl. bar; wie lange darf er den Rest behalten?

10. A hat 800 fl. nach 2 Monaten, 500 fl. nach 3 Monaten und 600 fl. nach 4 Monaten zu zahlen; er bezahlt die 800 fl. nach 1 Monate, die 500 fl. nach $3\frac{1}{2}$ Monaten; wann muß er dann die 800 fl. berichtigen?

11. Jemand soll am 20. März 1500 fl., am 25. Juni 2000 fl. und am 30. September 1200 fl. zahlen; er zahlt aber am 1. März 1000 fl., am 25. Mai 800 fl. und am 15. August 1600 fl.; wann muß er den Rest zahlen?

8. Gesellschaftsrechnung. (Theilregel.)

§. 86. Sind mehrere gleichartige Größen so beschaffen, dass die erste z. B. so vielmal 2 Einheiten enthält, als deren die zweite 5, und die dritte deren 7 enthält, so dass sich die erste zur zweiten wie 2 : 5, und die erste zur dritten wie 2 : 7 verhält, so sagt man: die Größen verhalten sich so wie die Zahlen 2, 5, 7, oder sie sind den Zahlen 2, 5, 7 proportional.

Die Rechnung, durch welche eine Zahl in mehrere Theile getheilt wird, welche gegebenen Zahlen proportional sind, wird die Gesellschaftsrechnung oder Theilregel genannt.

Die Zahlen, in deren Verhältnisse die Theilung zu geschehen hat, heißen Verhältniszahlen.

Wenn in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben und somit eine Theilung nach einfachen Verhältnissen vorzunehmen ist, so heißt die Gesellschaftsrechnung eine einfache; dagegen eine zusammengesetzte, wenn die Theilung nach zusammengesetzten Verhältnissen zu geschehen hat, und daher mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben sind.

Einfache Gesellschaftsrechnung.

§. 87. Bei der einfachen Gesellschaftsrechnung dividiert man die zu theilende Zahl durch die Summe der auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen, und multipliciert den Quotienten mit jeder Verhältniszahl.

Ist z. B. die Summe von 3600 fl. unter drei Personen so zu theilen, dass A 2, B 3, C 7 Theile enthält, dass sich also die Theile den Zahlen 2, 3, 7 proportional verhalten, so bilde man zuerst $2 + 3 + 7 = 12$ gleiche Theile, indem man 3600 fl. durch 12 dividiert; man erhält dadurch 300 fl. als die Größe eines Theiles; von solchen Theilen bekommt nun A 2, B 3, C 7; man muß also den Quotienten 300 fl. noch mit jeder Verhältniszahl multiplicieren.

Die Rechnung steht

A	2	$300 \times 2 =$	600 fl.	erhält A,
B	3	$300 \times 3 =$	900 „	„ B,
C	7	$300 \times 7 =$	2100 „	„ C,
$3600 : 12 = 300$			3600 fl.	zusammen.

Aufgaben.

1.* A und B theilen 98 fl. so, dass A so oft 3 fl., als B 4 fl. bekommt; wie viel erhält jeder?

2.* Theile nach dem Verhältnis 3 : 5 die Zahlen a) 24, b) 52, c) 66, d) 128, e) $30\frac{2}{5}$.

3.* Zwei Personen sollen 240 fl. so theilen, dass A 5 Theile und B 7 solche Theile bekommt; wie viel erhält jeder?

4.* 198 fl. sollen unter drei Personen so vertheilt werden, dass A 2, B 3 und C 4 Theile erhält; wie viel bekommt jeder?

5.* Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest; sie gewinnen zusammen 420 fl.; wie viel erhält jeder?

6. Drei Personen treten zu einem Handlungsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 1800 fl., B 2700 fl., C 4500 fl. zu dem gemeinschaftlichen Fonde her; wenn nun bei dem Geschäfte 1570 fl. gewonnen werden, welchen Antheil an dem Gewinne wird jeder haben?

Hier muß der Gewinn den Einlagen 1800, 2700, 4500 oder, wenn man durch 900 abkürzt, den Zahlen 2, 3, 5 proportional getheilt werden. Man hat also

A	1800	2		157 × 2	= 314 fl.	gewinnt A
B	2700	3		157 × 3	= 471 „	„ B
C	4500	5		157 × 5	= 785 „	„ C
	1570 :	10	= 157		1570 fl.	ganzer Gewinn.

7. Zu weißem Glase nimmt man 25 Theile Kiessand, 5 Theile Pottasche und einen Theil Kreide; wie viel braucht man von jedem dieser Bestandtheile zu einer Masse von 100 Kilogr.?

8. Zu feinem rothen Siegellack braucht man 4 Theile Terpentin, 1 Theil Kreide, 6 Theile Zinnober und 6 Theile Schellack; wie viel von jedem dieser Bestandtheile muß man zu 50 Kilogramm Siegellack nehmen?

9. Drei Personen legen zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 12800 fl. zusammen, und zwar A 4300 fl. B 3800 fl., C den Rest; wenn sie nun dabei 3000 fl. gewinnen, wie viel gebührt einem jeden?

10. Jemand ist an A 1500 fl., an B 900 fl., an C 600 fl., an D 300 fl. schuldig; er hat aber nur 1710 fl. Vermögen; wie viel erhalten die Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderung?

11. Wie viel Sauerstoff und Stickstoff befindet sich in einem lufterfüllten Raume von 87 Cub. Meter, wenn in 100 Theilen atmosphärischer Luft 21 Theile Sauerstoff und 79 Theile Stickstoff enthalten sind?

12. Eine Waare ist bei zwei Assecuranzgesellschaften versichert und zwar mit 5000 Francs und 7000 Francs; wie viel hat jede Gesellschaft von dem entstandenen Schaden von 3854 Francs zu tragen?

13. Von 2734 Kilogramm Mandeln und 2891 Kilogr. Kaffee zahlt man 121 fl. 95 kr. Fracht; wie viel entfällt davon für die Mandeln, wie viel für den Kaffee?

14. Ein Kaufmann erhält 3 verschiedene Waaren, welche einzeln 385 fl., 560 fl. und 625 fl. kosten; wenn nun die Wertspesen für alle drei Waaren $68\frac{1}{2}$ fl. betragen, wie viel entfällt davon auf jede einzelne Waare?

15. Es sollen 252 fl. in drei den Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ proportionale Theile getheilt werden.

Hier bringt man die Verhältnisbrüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und behält die neuen Zähler als Verhältniszahlen bei; denn zwischen Brüchen, welche gleiche Nenner haben, findet dasselbe Verhältnis statt, als zwischen ihren Zählern.

	12			
$\frac{1}{4}$	3	3	21 × 3 =	63 fl.
$\frac{1}{3}$	4	4	21 × 4 =	84 „
$\frac{5}{12}$	1	5	21 × 5 =	105 „
		252 : 12 = 21		252 fl.

16. Drei Personen kaufen ein Schiff um 24000 fl. Davon zahlt A 12000 fl., B 8000 fl., C den Rest; welchen Theil oder Part wird jeder am Schiffe haben?

Das ganze Schiff wird als Einheit angenommen.

17. An einem Schiffe hat A $\frac{1}{2}$, B $\frac{3}{8}$ und C $\frac{5}{16}$ Part; wenn nun dieses Schiff 1854 fl. Fracht verdient, wie viel wird der Antheil eines jeden betragen?

18.* Vier Personen nehmen ein Lotterielos; dazu gibt A 50 kr., B 1 fl., C 1 fl. 50 kr., D 2 fl., sie gewinnen damit 8000 fl.; wie viel bekommt jeder?

19. Es sollen 67270 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{13}{60}$ unter A, B, C, D und E getheilt werden; wie viel kommt auf jede Person?

20. Im Sprengpulver verhalten sich die Massen von Salpeter, Kohle und Schwefel, wie die Zahlen 1, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{10}$; wie viel von diesen Stoffen ist zu 5934 Kilogr. Sprengpulver nöthig?

21. Vier Personen sollen 48000 fl. so unter einander theilen, dass sich ihre Theile wie die Zahlen 2, $2\frac{1}{2}$, 3 und 4 verhalten; wie viel erhält jede Person?

22. Vier Gemeinden sollen eine Kriegssteuer von 1500 fl. bezahlen, und zwar nach Verhältnis ihrer Grundsteuer; die Gemeinde A zahlt 758 fl. 40 kr., B 813 fl. 22 kr., C 459 fl. 78 kr., D 908 fl. 50 kr. Grundsteuer; wie viel muß jede Gemeinde zu jener Kriegssteuer beitragen?

23. Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3500 fl., B 2850 fl., C 4180 fl. hergegeben hat, werden 11% gewonnen; wie viel gewinnt jeder?

24. Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen gibt A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest der Summe; wenn nun der Gewinn von 1355 fl. so getheilt werden soll, dass A wegen seiner besonderen Dienstleistung außer seinem verhältnismäßigen Antheile noch 6% des Gewinnes bekomme, wie viel erhält jeder?

25. 3 Personen theilen 3060 fl. so unter einander, dass B doppelt so viel als A, und C 3mal so viel als B bekommt; wie viel erhält jede Person?

26. Drei Kaufleute haben 760 fl. im Handel gewonnen; der Antheil des A verhält sich zu dem des B wie 4 : 3, der Antheil des B zu dem des C wie 6 : 5. Wie viel bekommt jeder?

Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 88. Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung muß man die auf denselben Theil sich beziehenden Verhältniszahlen mit einander multiplicieren, und die Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Theilregel betrachten, nach welcher dann die weitere Rechnung erfolgt.

Aufgaben.

1. Drei Kaufleute sind mit einander in Gesellschaft getreten und haben zusammen 1150 fl. gewonnen. Wenn nun A 2000 fl. durch 8 Monate, B 4000 fl. durch 6 Monate, und C 8000 fl. durch 5 Monate in dem Gesellschaftsfonde liegen ließ; wie viel von dem Gewinne wird jeder von ihnen erhalten?

A fl. 2000 durch 8 Mon.	=	16000	2	115 × 2	=	230 fl.
B „ 4000 „ 6 „	=	24000	3	115 × 3	=	345 „
C „ 8000 „ 5 „	=	40000	5	115 × 5	=	575 „
		1150 : 10	=	115		1150 fl.

Hier werden je zwei neben einander stehende Verhältniszahlen multipliciert; denn es ist gleichviel

ob A 2000 fl. durch 8 Mon. oder 16000 fl. durch 1 Mon.
ob B 4000 „ „ 6 „ „ „ 24000 „ „ 1 „
ob C 8000 „ „ 5 „ „ „ 40000 „ „ 1 „

in dem Fonde liegen läßt. Da nun im zweiten Falle die Zeit bei allen gleich ist, nämlich 1 Monat, so hängen die einzelnen Antheile am Gewinne bloß von den Einlagen, nämlich den Producten 16000, 24000, 40000 ab, welche daher als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet werden.

2. Drei Personen handeln auf gemeinschaftlichen Gewinn. A legt ein 1500 fl. auf ein Jahr, B 1200 fl. auf 6 Monate, C 1000 fl. auf 8 Monate; sie gewinnen 960 fl.; wie viel erhält jeder davon?

3. Vier Fleischhauer pachten einen Weideplatz. A läßt 30 Ochsen durch 4 Monate, B 40 Ochsen durch 6 Monate, C 60 Ochsen durch 3 Monate, D auch 60 Ochsen aber durch 5 Monate darauf weiden; sie zahlen 126 fl. Pachtzins; wie viel hat jeder einzelne zu zahlen?

4. Bei einem Durchmarsch hatte A 4 Mann 7 Tage, B 5 Mann 4 Tage, C 4 Mann 8 Tage lang im Quartier; sie erhielten von der Regierung 8 fl. Vergütung; wie viel bekam jeder?

5. Zu einem Festungsbaue schickt das Dorf A 40 Mann durch 28 Tage, das Dorf B 25 Mann durch 24 Tage, und C 30 Mann durch 30 Tage; es wird dafür eine Entschädigung von 850 fl. hergegeben; wie viel bekommt jedes Dorf?

6. A beginnt im Anfange des Jahres ein Handelsgeschäft mit einem Fonde von 8000 fl.; nach 3 Monaten tritt B mit 4000 fl. bei, und noch 2 Monate später gesellt sich auch C mit 5000 fl. dazu; beim Jahresschlusse ergibt sich ein Gewinn von 1250 fl.; wie viel erhält jeder davon?

7. Es sollen in möglichst kurzer Zeit 1764 Hektoliter Roggen auf 4 Mühlen gemahlen werden, von denen A in 4 Stunden 15 Hektoliter, B in 3 Stunden 16 Hektoliter, C in 5 Stunden 14 Hektoliter, D in 2 Stunden 9 Hektoliter mahlt; wie viel Hektoliter sind jeder dieser Mühlen zuzutheilen, damit sie gleichzeitig fertig werden?

9. Die Mischungsrechnungen.

Durchschnittsrechnung.

§. 89. Wenn der Wert der Einheit einer Mischung, welche aus gleichartigen Theilen von verschiedenem Werte hergestellt wird, gefunden werden soll, wendet man die Durchschnittsrechnung an. Der gefundene Wert wird der Durchschnitts- oder Mittelwert genannt.

Die Durchschnittsrechnung heißt einfach, wenn die Theile, aus denen die Mischung besteht, nur unter einer Beziehung, z. B. im Preise, ungleich sind; zusammengesetzt, wenn die einzelnen Bestandtheile in mehrfacher Beziehung, z. B. in der Quantität und im Preise, verschieden sind.

§. 90. a) Bei der einfachen Durchschnittsrechnung addiert man die gegebenen Zahlen und dividiert die Summe durch die Anzahl derselben; der Quotient gibt den gesuchten Mittelwert.

Z. B. Jemand mischt 1 Liter Wein zu 36 kr., 1 Liter zu 40 kr. und 1 Liter zu 56 kr. zusammen; wie viel ist 1 Liter der Mischung wert?

1 Liter	des ersten	Weines kostet	36 kr.
1 „	„ zweiten	„ „	40 „
1 „	„ dritten	„ „	56 „
3 Liter	der Mischung	kosten	132 kr.
			: 3
	also kostet	ein Liter	44 kr.

b) Bei der zusammengesetzten Durchschnittsrechnung bestimmt man den Betrag eines jeden Bestandtheiles durch Multiplication der dazu gehörigen Zahlen, addiert dann sowohl die Zahlen, welche die Menge der einzelnen Bestandtheile ausdrücken, als die erhaltenen Beträge, und dividiert die zweite Summe durch die erste; der Quotient ist der gesuchte Mittelwert der Einheit.

Z. B. Ein Kaufmann mischt dreierlei Kaffee: 6 Kilog. à 1·65 fl., 8 Kilogr. à 1·50 fl. und 10 Kilogr. à 1·35 fl.; wie viel kostet 1 Kilogr. der Mischung?

6 Kilogr.	à 1·65 fl.	kosten	9·90 fl.
8 „	à 1·50 „	„	12·00 „
10 „	à 1·35 „	„	13·50 „
24 Kilogr.	der Mischung	„	35·40 fl.
			: 24
	also kostet 1	Kilogr.	1·475 fl.

Aufgaben.

1.* Man mischt 1 Kilogr. Kaffee à 1 fl. 32 kr. mit 1 Kilogr. à 1 fl. 48 kr.; wie theuer ist 1 Kilogr. der Mischung?

2.* Ein Wirt mischt 10 Liter Wein à 36 kr. mit 10 Liter à 52 kr.; wie theuer ist 1 Liter der Mischung?

3.* An einem Tage zeigte das Thermometer des Morgens 16°, um Mittag 22°, des Abends 13°; wie groß war die mittlere Temperatur dieses Tages?

4.* Jemand mischt vier Gattungen Kaffee zu gleichen Theilen; von der ersten Gattung kostet das Kilogramm 1 fl. 28 kr., von der zweiten 1 fl. 42 kr., von der dritten 1 fl. 56 kr., von der vierten 1 fl. 68 kr.; welchen Wert hat 1 Kilogr. der Mischung?

5. Ein Goldarbeiter legiert Gold von 1000 Tausendtheilen (feines Gold), von 920, 850 und 750 Tausendtheilen Feingehalt zu gleichen Theilen; wie viel Tausendtheile Gold enthält ein Kilogramm der Mischung?

6. Ein Gut gibt in 5 auf einander folgenden Jahren 2565 fl. 24 kr., 2844 fl. 64 kr., 2085 fl. 38 kr., 2633 fl., 2408 fl. 84 kr. reinen Ertrag; wie groß ist der jährliche Durchschnittsertrag?

7. Der Curs der Bankactien stand an einem Tage auf 884, 880, 882, 878, 876; wie hoch stellt sich der mittlere Curs derselben?

8. Im Laufe einer Woche war das Silberagio notiert: $4\frac{1}{2}$%, $4\frac{1}{4}$%, 4%, $3\frac{1}{4}$%, $3\frac{3}{4}$%, $3\frac{1}{4}$%; welches ist der Durchschnittscurs dieser Woche?

9. 5 Capitalien à 800 fl. sind für dieselbe Zeit zu 5%, $5\frac{1}{2}$%, 6%, $4\frac{3}{4}$%, $5\frac{1}{4}$% verzinslich ausgeliehen; zu wie viel % ist im Durchschnitte das ganze Capital von 4000 fl. ausgeliehen?

10. 5 gleiche Capitalien sind den 31. Jänner, 31. März, 15. April, 20. Mai und 15. Juni fällig; auf welchen Tag fällt die mittlere Verfallszeit dieser Capitalien, wenn man zur Berechnung vom 31. December ausgeht? (Ein Monat zu 30 Tage.)

11*. Jemand mischt 5 Liter Wein à 40 kr. und 3 Liter à 56 kr.; wie viel ist 1 Liter der Mischung wert?

12.* Jemand mischt zwei Sorten Reis, 6 Kilogr. à 25 kr. mit 4 Kilogr. à 30 kr.; wie viel kostet 1 Kilogr. der Mischung?

13. Ein Weinwirt mischt 4 Hektoliter Wein à 24 fl., 3 Hektoliter à 28 fl. und 5 Hektoliter à 30 fl.; wie viel ist 1 Hektoliter des so gemischten Weines wert?

14. Es werden 5 Kilogr. Silber à 720 Tausendtheile und 2 Kilogr. à 900 Tsdth. zusammengeschmolzen; welchen Grad der Feinheit hat die Mischung?

15. Welchen Feingehalt behält die Legierung, wenn man 3 Kilogr. Silber 0·800 fein, a) mit einem Kilogr. feines Silber, b) mit einem Kilogr. Kupfer vermischt?

16. Zu 2 Kilogr. Gold à 0·900 fein setzt man 1 Kilogr. feines Gold und 1 Kilogr. Gold à 0·560 fein; welchen Gehalt hat die Mischung?

17. Von welchem Gehalte wird die Mischung, wenn man aus 3 Kilogr. 0·850 feinen Goldes 1·5 Kilogr. reines Gold ausscheidet?

18. Jemand mischt 16 Liter Spiritus à 80% (80 Grad*) und 4 Liter à 70%; welchen Gehalt hat die Mischung?

19. Zu 5 Hektoliter Spiritus à 60% gießt man 75 Liter Wasser (à 0%) zu; auf wie viel % wird dadurch der Spiritus verdünnt?

20. Wenn man 4 Kilogr. Wasser von 30° Wärme mit 3 Kilogr. von 40° Wärme vermischt und dafür sorgt, daß keine Wärme verloren geht, welche Wärme wird die Mischung haben?

21. Auf einem Wochenmarkte werden 42 Hektoliter Gerste à fl. 5„35, 37 Hektoliter à fl. 5„60, 25 Hektoliter à fl. 5„12 und 36 Hektoliter à fl. 5„36 verkauft; wie groß ist der Mittelpreis pr. Hektoliter?

22. Jemand hat 3600 fl. à $4\frac{3}{4}$%, 4500 fl. à 5% und 1900 fl. à 6% ausgeliehen; zu wie viel % müßte er die Summe aller drei Capitalien ausleihen, um gleich viel Zinsen zu erhalten?

23. Zu 28 Liter Spiritus von 60% gießt man 20 Liter einer schwächeren Sorte; wie viel Grad muß der Zusatz haben, wenn die Mischung einen Gehalt von 55% bekommen soll?

24. Jemand hat 60 Kilogramm einer Waare à 60 kr. und 80 Kilogr. à 55 kr.; er setzt noch 100 Kilogr. einer dritten Sorte dazu und nun kostet 1 Kilogr. der Mischung 50 kr.; wie viel kostet das Kilogr. der letzten Sorte?

---

*) Spiritus von 80% enthält unter 100 Raumtheilen 80 Theile Weingeist (Alkohol) und 20 Theile Wasser.

Die Alligationsrechnung.

§. 91. Um das Verhältnis zu finden, in welchem gleichartige Dinge von verschiedenem Werte mit einander verbunden werden müßen, um eine Mischung von bestimmtem Mittelwerte zu erhalten, wird die Alligationsrechnung angewendet.

Wenn nur zwei Gattungen gemischt werden sollen.

Z. B. Ein Weinhändler will Wein zu 20 fl. pr. Hektoliter haben, er hat aber nur Weine zu 16 fl. und zu 30 fl.; in welchem Verhältnisse muß er diese beiden Gattungen mischen, damit 1 Hektoliter der Mischung gerade den Preis von 20 fl. erhalte? — Ein Hektoliter der besseren Sorte kostet $30 - 20 = 10$ fl. mehr, 1 Hektoliter der schlechteren Sorte $20 - 16 = 4$ fl. weniger, als 1 Hektoliter der Mischung. Man wird also beim Verkaufe der Mischung an 4 Hektolitern der besseren Sorte, welche darin vorkommen, eben so viel verlieren, als an 10 Hektolitern der schlechteren Sorte gewonnen wird, nämlich $4 \times 10 = 40$ fl. Man muß daher, damit sich der Verlust und der Gewinn ausgleichen, je 4 Hektoliter der besseren Sorte mit 10 Hektolitern der schlechteren, oder man muß die bessere Sorte mit der geringeren in dem Verhältnisse 4 : 10 mischen.

Um daher das Mischungsverhältnis zweier Gattungen, damit daraus eine Mittelgattung erhalten werde, zu finden, setze man die beiden Gattungen unter einander und schreibe links in der Mitte die Mittelgattung hin; sodann bestimme man den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren, und setze denselben rechts neben die bessere Gattung; ebenso bestimme man auch den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der besseren und schreibe ihn rechts neben die geringere. Die Unterschiede sind die Verhältniszahlen der Mischung für die nebenstehenden Gattungen; sie werden, wenn sie durch dieselbe Zahl theilbar sind, noch dadurch abgekürzt.

Für das frühere Beispiel hat man folgenden Ansatz:

30	4	2
20		
16	10	5

§. 92. Wenn mehr als zwei Gattungen zur Mischung verwendet werden sollen, so lassen sich verschiedene Zusammensetzungen vornehmen, welche alle auf die verlangte Mittelgattung führen.

Um die Verhältniszahlen der Mischung bei diesen verschiedenen Zusammenstellungen zu erhalten, verbindet man immer je eine bessere und eine geringere Gattung so, dass man die Mittelgattung erhält, und bestimmt dabei das Mischungsverhältnis nach der im vorhergehenden §. für zwei Gattungen gegebenen Vorschrift.

Z. B. Aus Silber von 500, 640 und 900 Tausendtheilen soll Silber von 720 Tsdth. Gehalt zusammengeschmolzen werden; in welchem Verhältnisse wird die Mischung geschehen?

	500	180		180	3
720	640	180		180	3
	900	220	+ 80	300	5

Hier verbindet man die erste Sorte mit der dritten, dann die zweite mit der dritten, und erhält so die Verhältniszahlen 3, 3 und 5.

Nimmt man z. B. 3 Kilogr. Silber à 500, 3 Kilogr. à 640 und 5 Kilogr. à 900 Tsdth., so erhält man 11 Kilogr. à 720 Tsdth.: denn es ist

3 Kilogr.	à 500	Tsdth.	=	1500 Tsdth.
3 „	à 640	„	=	1920 „
5 „	à 900	„	=	4500 „
11 Kilogr.	der Mischung		=	7920 Tsdth.
	also kommen auf 1 Kilogr.			720 „

Aufgaben.

1.* Ein Kaufmann hat zwei Sorten Reis, das Kilogr. zu 28 Kr. und zu 35 Kr.; er will aus beiden eine dritte Sorte mischen, von welcher das Kilogr. 32 Kr. kosten soll; in welchem Verhältnisse muß er die beiden Sorten mischen?

2.* In welchem Verhältnisse muß man Spiritus à 60% und à 45% mischen, um Spiritus à 50% zu erhalten?

3.* Aus 800- und 600tausendtheiligem Silber soll 720tausendtheiliges legiert werden; welches ist das Mischungsverhältnis?

4.* In welchem Verhältnisse mischt man aus Mehl zu 18 Kr. und zu 30 Kr. das Kilogr. eine Sorte zu 25 Kr.?

5.* Ein Weinwirt hat zweierlei Weine, à 48 Kr. und à 36 Kr. das Liter; in welchem Verhältnisse wird er dieselben mischen, um einen Wein zu erhalten, von dem das Liter 40 Kr. kostet?

6.* Wie viel Liter Wein à 36 Kr. und wie viel à 56 Kr. muß man mischen, um 100 Liter à 42 Kr. zu erhalten?

7. Ein Weinwirt will zweierlei Weine, wovon der erste 16 fl., der zweite 28 fl. pr. Hektoliter kostet, so mischen, dass er 24 Hektoliter

à 23 fl. bekommt; wie viel von jeder Gattung wird er zu der Mischung nehmen müßen?

Diese Aufgabe enthält zwei Theile; der erste Theil bildet eine Alligationsrechnung, nämlich: in welchem Verhältnisse müßen zweierlei Weine zu 16 fl. und 28 fl. gemischt werden, um einen Wein zu 23 fl. zu erhalten?

16	5	
23		Man muß also die Weine zu 16 fl. und 28 fl. in dem
28	7	Verhältnisse 5 : 7 mischen.

Der zweite Theil der Aufgabe ist eine Gesellschaftsrechnung, welche so lautet: um einen Wein zu 23 fl. zu erhalten, muß man die Weine zu 16 fl. und 28 fl. in dem Verhältnisse 5 : 7 mit einander mischen; wie viel von jeder dieser Gattungen wird man nehmen müßen, um 24 Hektoliter zu 23 fl. zu erhalten?

5 $\quad 2 \times 5 = 10$ Hektoliter zu 17 fl.
7 $\quad 2 \times 7 = 14$ „ „ 28 „
$24 : 12 = 2$

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, wendet man die Durchschnittsrechnung an; man kehrt nämlich die Aufgabe um, und sagt: wenn man 10 Hektoliter Wein zu 16 fl. und 14 Hektoliter Wein zu 28 fl. mischt, wie viel wird ein Hektoliter von der Mischung kosten? Man hat

10 Hektoliter à 16 fl. = 160 fl.
14 „ à 28 „ = 392 „
24 Hekt. der Mischung 552 fl.
: 24
also 1 Hekt. „ „ 23 fl.

8. Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer braucht man zu einer Masse von 6 Kilogr. 0·750 feinen Silbers?

9. Feines Silber und Silber von 0·640 Gehalt sollen zu Silber von 0·750 eingeschmolzen werden; wie viel von jedem Bestandtheile kommt auf 24 Kilogramm?

10. Ein Goldschmied braucht zu einer Arbeit $\frac{3}{10}$ Kilogr. Gold à 700 Tausendth.; er will solches aus Gold von 650 und 900 Tsdth. Gehalt herstellen; wie viel muß er von jedem nehmen?

11. Wie viel 0·720 feines Gold muß zu 3 Kilogr. 0·900 feinem Gold legiert werden, wenn 0·840 feines Gold daraus entstehen soll?

12. Ein Goldarbeiter hat 2 Kilogr. 0·900 feines Gold; zur Verfertigung von Ketten will er 0·750 feines Gold haben; wie viel reines Gold muß er ausscheiden?

13. Zwei Gattungen Kaffee, zu 1·08 fl. und 1·32 fl. das Kilogr. sollen so gemischt werden, dass man 100 Kilogr. à 1·16 fl. erhält; wie viel von jeder Gattung muß dazu genommen werden?

14. Aus zwei Sorten Wein, von denen das Liter 40 und 30 kr. kostet, sollen 50 Liter so gemischt werden, dass ein Liter 36 kr. koste; wie viel von jeder Gattung wird man dazu nehmen?

15. Ein Getreidehändler hat zweierlei Korn; von der bessern Sorte gilt das Hektoliter 6 fl. 60 kr., von der schlechtern 6 fl. 20 kr.; er will nun 42 Hektoliter so mischen, dass er jedes Hektoliter um 6 fl. 36 kr. verkaufen kann; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

16. Jemand will Spiritus zu 90% und zu 56% zusammengießen, um 720 Liter zu 70% zu erhalten; wie viel Liter muß er von jeder Sorte nehmen?

17. Wie viel Liter Wasser von 30° R. müßen zu 4 Liter Wasser von 15° R. hinzugegossen werden, damit die Mischung eine Temperatur von 24° R. habe?

18. In welchem Verhältnisse kann man drei Sorten einer Waare, von denen das Kilogr. 56, 60 und 80 kr. kostet, zusammensetzen, um eine Mischung zum Preise von 72 kr. pr. Kilogr. herzustellen?

19. Ein Silberarbeiter braucht $4\frac{1}{2}$ Kilogr. 0·800 feines Silber; er hat aber nur ganz feines und 0·900 feines Silber und muß daher auch Kupfer dazu mischen; wie viel Kilogr. muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

20. Ein Kaufmann besitzt von einer Waare drei Sorten zu 60 kr., 66 kr., 80 kr. pr. Kilogramm; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen, um durch die Mischung 340 Kilogramm à 72 kr. zu erhalten?

21. In welchem Verhältnisse kann man Weine à 26 fl., 20 fl., 16 fl. und 12 fl. pr. Hektoliter mischen, um einen Wein zu erhalten, wovon das Hektoliter 18 fl. wert ist?

22. Jemand will aus 4 Sorten Kaffee à 1·32 fl., 1·24 fl., 1·20 fl. und 1·08 fl. pr. Kilogr., 240 Kilogr. à 1·18 fl. zusammensetzen; wie viel kann er von jeder Sorte nehmen?

23. Wie viel Wasser muß man zu 6 Hektoliter Spiritus à 46%, 3 Hektoliter à 44% und 2 Hektoliter à 40% gießen, um den Gehalt auf 42% zu bringen?

Wiederholungsaufgaben.

1.* 3, 5, 6 Stück kosten 8 fl. 40 kr.; was kostet 1 Stück?
2.* 4, 6, 8 Meter „ 14 „ 88 „; „ „ 1 Meter?
3.* 5, 7, 10 Liter „ 4 „ 20 „; „ „ 1 Liter?
4.* 4 Meter kosten 13 fl.; was kosten 8, 20, 28 Meter?
5.* 6 Liter „ 1 fl. 95 kr.; „ „ 12, 18, 30 Liter?
6.* Wie groß ist der jährliche Zins
a) von 15, 75, 92, 156, 207, 880 fl. zu 4%?
b) von 60, 105, 264, 535, 618, 972 fl. zu 5%?
c) von 20, 85, 125, 340, 782, 836 fl. zu 6%?
7.* 100 Kilogr. Kaffee kosten im Einkaufe 120 fl.; wie viel wird daran gewonnen, wenn man den Kaffee a) mit 20%, b) mit 15%, c) mit $12\frac{1}{2}$% Gewinn verkauft?
8. a) $9 : x = 6 : \frac{2}{3}$, b) $x : 10\frac{1}{2} = 18 : 2\frac{5}{8}$,
$42 : 91 = x : \frac{13}{14}$, $63\frac{3}{4} : 76\frac{1}{2} = x : 6$,
$x : 25 = \frac{4}{5} : 96$, $3 : 37{\cdot}5 = 18 : x$,
$8\frac{1}{2} : 28 = 12\frac{3}{4} : x$. $x : 28 = 12\frac{3}{4} : 8{\cdot}5$.
9. Drei Personen versandten eine Ladung Getreide, und zwar A 100 Hektol., B 140 Hektol., C 160 Hektol. Sie zahlten für die Fracht zusammen 35 fl.; wie viel hatte jeder dazu beizutragen?
10. Wie viel feines Silber ist in 42 Kilogr. 12 Dekagr. enthalten, wenn jedes Kilogr. 72 Dekagr. 6·2 Gramm feines Silber enthält?
11. Eine Eisenbahn steigt von der Station A zur Station B um $3^m\ 2{\cdot}8^{dm}$, von B bis C um $2^m\ 1{\cdot}3^{dm}$, von C bis D fällt sie um $4^m\ 4{\cdot}9^{dm}$, von D bis E steigt sie wieder um $3^m\ 3{\cdot}4^{dm}$; um wie viel liegt E höher als A?
12. Die Halbmesser der Erde und des Mondes verhalten sich wie 11 : 3; wenn nun der mittlere Halbmesser der Erde $858\frac{2}{5}$ geogr. Meilen beträgt, wie groß ist der Halbmesser des Mondes?
13. Eine Straße von $10^{Km}\ 161{\cdot}6^m$ Länge wurde zu beiden Seiten mit Bäumen besetzt, die 20 Schritte à 58^{cm} von einander standen; wie viel Bäume waren erforderlich?
14. Jemand kauft zwei Hüte Zucker, von denen der eine $7\frac{1}{2}$ Kilogr., der andere $8\frac{3}{5}$ Kilogr. wiegt; wenn nun der erstere 3 fl. 75 kr. kostet, wie hoch kommt dann der letztere?

15. Dividiere 26541200 durch jede der Zahlen

a) 37 b) 46 c) 60 d) 104
e) 115 f) 150 g) 185 h) 230
i) 520 k) 455 l) 1560 m) 3404.

16. Ein Körper legt in jeder Secunde $3\frac{1}{4}$ Meter zurück, ein zweiter $35\frac{3}{4}$ Meter; wie vielmal so schnell bewegt sich der zweite Körper als der erste?

17. Ein Kaufmann kann für eine gewisse Summe 500 Kilogr. kaufen, wenn das Kilogr. 48 kr. gilt; wie viel Kilogr. kann er kaufen, wenn das Kilogr. a) 36 kr., b) 30 kr., c) 56 kr. kostet?

18. Aus einer Röhre fließen in 27 Minuten 459 Liter Wasser; in wie viel Minuten fließen aus derselben Röhre 1728 Liter?

19. Bei einem nach 3 Monaten zahlbaren Waarenbetrage von 895 fl. 38 kr. wird bei barer Bezahlung ein Sconto von $1\frac{1}{2}\%$ (für 3 Monate) bewilligt; wie groß ist a) der Sconto, b) die bare Zahlung?

20.* 24 Meter kosten 32 fl.; wie viel kosten 30 Meter?

21.* Ein Fäßchen Wein, das 45 Liter hält, kostet 16 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 10 Liter?

22.* Wenn 1000 Stück Ziegel 15 fl. 50 kr. kosten, wie hoch kommen 400 Stück?

23.* Auf den Umfang eines Rades gehen 30 Zähne, wenn sie 9^{cm} von einander entfernt sind; wie viel Zähne gehen darauf, wenn sie 6^{cm} auseinander stehen?

24.* A, B und C kaufen gemeinschaftlich 40 Meter Tuch für 150 fl.; A erhält 6 Meter und C 4 Meter mehr als B; wie viel muß jeder bezahlen?

25. Jemand erhält 5 Fässer Zucker, welche einzeln 138 Kilogr. 46 Dekagr., 120 Kil. 20 Dek., 112 Kil. 28 Dek., 118 Kil. 4 Dek., 120 Kil. wiegen; wie groß ist das ganze Gewicht?

26. a) $\frac{3402 \times 125 \times 96}{5670 \times 35} = ?$ b) $\frac{966 \times 1001 \times 126}{56 \times 99 \times 49} = ?$

27. a) $\frac{50 \times 2\frac{1}{5} \times 12}{256\frac{2}{3} \times 100} = ?$ b) $\frac{375 \times 30 \times 9 \times 8}{25 \times 12 \times 7{\cdot}5} = ?$

28. Jemand hat 385 Kilogr. für 173 fl. 25 kr. gekauft und beim Verkaufe 20% gewonnen; wie theuer ist das Kilogr. verkauft worden?

29. Jemand erhielt ein Fass mit Kaffee, welches 275 Kilogr. Brutto wog; die Tara betrug 8% und 100 Kilogr. Netto kosteten 118·6 fl.; wie theuer war der Kaffee?

30. Von 32500 Ziegelsteinen erleidet man durch Bruch einen Verlust von 1820 Stück; wie viel % beträgt der Verlust?

31. Wie viel betragen die einjährigen Zinsen zu 6% von
975, 1225, 2870, 5995, 8445, 12760 fl.?

32. a) 250 fl. Capital bringen jährlich 15 fl. Zinsen,
b) 360 „ „ „ „ $10\frac{4}{5}$ „ „ „,
c) 550 „ „ „ „ $35\frac{3}{4}$ „ „ „;
zu wie viel % sind diese Capitalien angelegt?

33. 20 Gasflammen 300 Nächte und zwar jede Nacht 6 Stunden zu unterhalten, kostet 675 fl.; wie viel kosten 30 Gasflammen von gleicher Stärke, die man 240 Nächte zu 4 Stunden jede Nacht brennen lässt, wenn das Gas um $\frac{1}{5}$ im Preise gestiegen ist?

34.* Wie viel gewinnt man an:
a) 450 fl. bei 20%, b) 86 fl. 20 kr. bei 10%,
c) 772 fl. 40 kr. bei $12\frac{1}{2}$%, d) 1224 fl. bei 25% Gewinn?

35.* Wie viel % gewinnt jemand, der $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{3}{20}$ des Einkaufspreises gewinnt?

36.* Wie viel beträgt die Provision zu $1\frac{1}{2}$% von 712 fl., 884 fl., 1308 fl., 1426 fl.?

37.* Jemand verkauft 48 Kilogr. Zucker à 52 Kr. und gewinnt dabei 5 fl. 32 kr.; wie viel hat er beim Einkaufe dafür ausgegeben?

38.* Ein Ballen Tuch von 42 Meter kostete 140 fl.; wie viel hatte ein Tuchhändler zu bezahlen, der 120 Meter solchen Tuches kaufte?

39.* Bei 10stündiger Arbeit vollenden 3 Arbeiter ein Werk in 16 Tagen; in welcher Zeit hätten dasselbe 4 Arbeiter bei 8stündiger Arbeit beendet?

40. Bestimme nach der abgekürzten Division auf 3 Decimalen:
a) 11·224 : 2·576; b) 106·2793 : 0·5736;
c) 263·2 : 0·0427; d) 0·6938 : 4·715;
e) 0·04379 : 0·1986; f) 354 : 3·1416.

41. Europa liegt zwischen 11° 50′ 20″ westlicher und 66° 30′ östlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade umfaßt dieser Erdtheil?

42. 100 fl. Capital zu 6% angelegt geben eben so viel Zins, als ein anderes Capital zu $4\frac{1}{2}$% angelegt; wie groß muß dieses letztere Capital sein?

43. Von 1675 fl. hat man in einem Jahre $83\frac{3}{4}$ fl. Zinsen eingenommen; wie hoch waren 100 fl. Capital verzinset?

44. Zu wie viel % muß man ein Capital anlegen, damit es in 6 Jahren eben so viel Zins bringe, als es zu $5\frac{1}{4}$% in 8 Jahren bringen würde?

45. Welches Capital bringt in $5\frac{1}{3}$ Jahren 465 fl. Zinsen, wenn $787\frac{1}{2}$ fl. Capital unter denselben Bedingungen in $2\frac{2}{5}$ Jahren $94\frac{1}{2}$ fl. bringen?

46. In einer Stadt, welche 25000 Einwohner zählt, wurden im Jahre 1875 450 Kinder geboren, und 375 Personen starben; wie viel % betragen a) die Geburten, b) die Sterbefälle?

47. Suche das größte gemeinschaftliche Maß zwischen

a) 56481 und 86829; b) 23625 und 16875;
b) 16848 und 13104; d) 134748 und 47871.

48. In Steiermark leben 1137748 Einwohner auf 224·54 $\square^{Mm}$, in Kärnten 337694 Einwohner auf 103·73 $\square^{Mm}$; a) um wie viel $\square^{Mm}$ ist Steiermark größer als Kärnten; b) wie viel Einwohner hat das erste mehr als das zweite; c) wie viel Einwohner kommen in jedem Lande auf ein $\square^{Mm}$, wo ist also die Bevölkerung dichter?

49. Wie viel kosten $17\frac{3}{20}$ Ar, wenn $8\frac{3}{5}$ Ar mit $208\frac{1}{2}$ fl. bezahlt werden?

50. 20 Arbeiter vollenden einen 30^m langen Graben in 15 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter müßten 10 Stunden täglich arbeiten, um einen 24^m langen Graben in 16 Tagen zu Stande zu bringen?

51. Suche den Sterbetag von Personen, die

geboren wurden am:	und ein Alter erreichten von:
a) 18. Februar 1793	68 J. 4 Mon. 12 Tagen;
b) 9. Novem. 1817	52 „ 10 „ — „ ;
c) 24. Septem. 1807	65 „ — „ 25 „ ;
d) 13. Juni 1780	71 „ 9 „ 8 „ .

52. Jemand hat drei Capitalien ausgeliehen: 548 fl. zu $5\frac{1}{2}$%, 853 fl. 80 kr. zu 5%, 1356 fl. zu $6\frac{1}{4}$%; welches Capital müßte er zu $5\frac{1}{2}$% ausleihen, um eben so viel jährliche Zinsen zu erhalten?

53. Wie viel Zinsen erhält man
a) von 3087 fl. in 8 Monaten 19 Tagen zu $6\frac{1}{2}\%$?
b) von 8055 fl. 33 kr. in 1 Monat 25 Tagen zu $6\frac{3}{4}\%$?
c) von 5540 fl. in 23 Tagen zu $7\frac{1}{4}\%$?

54. Wie viel erhält jeder von 688 fl., wenn A so oft 2 fl. als B 3 fl. und C so oft 6 fl. als B 5 fl. erhalten soll?

55. Aus zwei Sorten Silber von 0·760 und 0·650 Feingehalt soll eine Legierung von 0·700 Gehalt hergestellt werden; welches ist das Mischungsverhältnis?

56. Zu einem Geschäfte gibt A 1250 fl. auf 4 Monate, B 2380 fl. auf 5 Monate, C 3000 fl. auf 3 Monate und D 2710 fl. auf 10 Monate; der Gewinn beträgt 2188 fl. 48 kr.; wie viel erhält jeder?

57. Welche Capitalien geben
a) zu $4\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren 246 fl. 24 Kr.?
b) „ 5% „ 2 „ 125 fl.?
c) „ 6% „ 108 Tagen $67\frac{1}{2}$ fl.?

58. A ist vertragsmäßig verpflichtet, 4800 fl. sogleich, 2000 fl. nach 1 Jahre, und 2200 fl. nach 15 Monaten zu zahlen; wann kann er diese ganze Schuld auf einmal tilgen?

59. Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 1 Theil Gyps und 2 Theile Kies; wie viel von jedem braucht man zu einer Masse von 85 Kilogr.?

60. Mit 20 Hektoliter Hafer kann man 36 Pferde eine gewisse Zeit lang füttern, wenn das Pferd täglich 5 Liter erhält; wie viel Pferde kann man mit 50 Hektoliter Hafer eben so lange füttern, wenn man jedem Pferde täglich 9 Liter gibt?

61. Wie viel Zins geben
a) 8888 fl. Capital zu 7% in 12 Tagen?
b) 9379 fl. zu $6\frac{1}{2}\%$ in 147 Tagen?
c) 1230 fl. 39 kr. zu $4\frac{1}{2}$ in 305 Tagen?

62. Bei $4\frac{3}{4}\%$ jährlichem Discont werden von einer nach $6\frac{2}{3}$ Monaten zahlbaren Schuldsumme $47\frac{1}{2}$ fl. abgezogen; wie groß ist die Schuldsumme?

63. Jemand leiht ein Capital von 3700 fl. zu $5\frac{1}{2}\%$ aus, wovon er selbst einen Theil zu 4% aufgenommen hat; wie groß ist der ihm gehörende Theil des Capitals, wenn er einen jährlichen Zinsüberschuß von $154\frac{1}{2}$ fl. hat?

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Arithmetik auf die Berechnung der Münzen und Wertpapiere.

I. Die Münzrechnung.

§. 93. Das allgemeine Mittel zur Wertbestimmung und zum Eintausche der verschiedenen Gegenstände heißt Geld. Ein aus Metall geprägtes Stück Geld nennt man Münze.

An jeder Münze ist zu unterscheiden:

1) Das Gepräge d. i. die Inschriften und Abbildungen, welche auf der Münze erhaben angebracht sind.

2) Das Metall, aus welchem die Münze geprägt ist. Zu den niederen Scheidemünzen wird vorzugsweise Kupfer verwendet. Wertvollere Geldstücke bestehen aus Silber oder Gold, welche, um bei ihrer Weichheit dem Abschleifen im Verkehr minder ausgesetzt zu sein, legiert werden d. i. einen Zusatz von härteren Metallen, gewöhnlich von Kupfer, erhalten.

3) Das Gewicht. Das ganze Gewicht einer Münze heißt das Schrot derselben, das Gewicht des darin enthaltenen feinen Metalls das Korn.

Als Münzgewicht dient in Oesterreich-Ungarn das Kilogramm mit seinen Unterabtheilungen.

Früher wurde die cölnische Mark = 233·87 Gramm, wie auch die Wiener Mark = 280·67 Gramm, und seit 1857 das deutsche Münzpfund = 500 Gramm als Münzgewicht gebraucht.

In Frankreich, Italien, Belgien und Holland bildet gleichfalls das Kilogramm, in Deutschland das Pfund = $\frac{1}{2}$ Kilogramm, in England das Troypfund = 373·246 Gramm,

in Rußland das Handelspfund = 409·512 Gramm mit der Eintheilung in 96 Solotnik à 96 Doli das Münzgewicht.

4) Der Feingehalt d. i. das Verhältnis des Kornes einer Münze zu deren Schrot. Er wird im allgemeinen durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler das Korn, dessen Nenner das Schrot ist. In Oesterreich-Ungarn, in Deutschland und in den meisten Staaten geschieht diese Angabe in Tausendtheilen; z. B. der Feingehalt der österreichischen Guldenstücke ist $\frac{900}{1000}$ oder 0·900, heißt: in 1000 Gewichtstheilen eines Guldens (Schrot) sind 900 Theile feines Silber (Korn) und 100 Theile Kupfer als Zusatz enthalten. In England ist das Münzgold $\frac{11}{12}$, das Münzsilber $\frac{37}{40}$ fein. In Rußland heißt die Bestimmung des Feingehaltes die Probe; diese gibt an, wie viel Solotnik feinen Metalls in einem Pfund = 96 Solotnik Münzmetall enthalten sind; z. B. die russischen Halbimperiale sind von der Probe 88, heißt: 96 Theile derselben enthalten 88 Theile feinen Goldes, oder sie sind $\frac{88}{96}$ fein.

Früher wurde in Oesterreich und in Deutschland der Feingehalt bei Silbermünzen in Loth, bei Goldmünzen in Karat angegeben, wobei man die Mark beim Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Golde in 23 Karat à 12 Grän eintheilte. Z. B. die kais. Ducaten sind $23^2/_3$ Karat fein, d. i. unter 24 Theilen derselben sind $23^2/_3$ Theile feinen Goldes.

Die gesetzlichen Bestimmungen über Gewicht, Feingehalt, Eintheilung und Ausprägung der Münzen nennt man den Münzfuß.

Man unterscheidet einen dreifachen Wert der Münzen, den inneren, den gesetzlichen und den Handelswert. Der innere Wert einer Münze ist der Wert des darin enthaltenen feinen Metalls; der gesetzliche Wert ist der von der Regierung bestimmte Wert, zu dem sie im Lande, wo sie geprägt wurde, allgemein angenommen werden soll; der Handelswert, auch Curswert, ist der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat. Wird in einem Lande der Wert sämmtlicher Münzen nach einer bestimmten Silbermünze bestimmt, so sagt man, das Land habe die Silberwährung; liegt dagegen dem Geldsystem eine Goldmünze zu Grunde, so hat das Land die Goldwährung. Letztere besteht z. B. in England, Portugal, in den nordamerikanischen Freistaaten, in der neuesten Zeit auch in Deutschland.

§. 94. Die wichtigsten Goldmünzen sind:

1. Die österreichisch-ungarischen Achtguldenstücke, von denen aus dem Kilogramm 0·900 feinen Goldes 155 Stücke

ausgeprägt werden. Nach Verhältnis werden auch Viergulden-stücke geprägt.

2. Die Zwanzigfrankstücke in Frankreich, Belgien und der Schweiz, und die Zwanzigliresstücke in Italien; sie stimmen mit den österr. Achtguldenstücken überein; eben so sind die Zehnfrank-stücke und Zehnliresstücke den österr. Vierguldenstücken gleich.

3. Die kais. österr. Ducaten; 67 Stück wiegen eine cöln. Mark = 233·87 Gramm und enthalten $23\frac{2}{3}$ karatiges Gold.

4. Die deutschen Reichsgoldmünzen, und zwar Fünf-, Zehn- und Zwanzigmarkstücke; von den Zehnmarkstücken werden aus dem Pfund = 500 Gramm feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ Stück ausgebracht. Der Feingehalt ist 0·900.

5. Die englischen Sovereings (Pfund Sterling); aus dem Troypfund = 373·246 Gramm $\frac{11}{12}$ feinen Goldes werden $46\frac{2}{4}\frac{9}{0}$ Stück geprägt.

6. Die russischen Halbimperialen, von denen $62\frac{2}{4}\frac{6}{5}$ Stück ein russisches Pfund Gold von der 88. Probe enthalten.

7. Die nordamerikanischen Eagles (Adler) zu 10 Dollars; ein Eagle wiegt 16·718 Gramm und ist $\frac{9}{10}$ fein.

Die wichtigsten Silbermünzfüße sind:

1. Die österreichische Währung. Aus 500 Gramm feinen Silbers werden 45 Gulden (0·900 fein) geprägt.

In Oesterreich bestand bis zum Jahre 1857 der Zwanzig Guldenfuß oder der Conventions-Münzfuß, nach welchem aus einer cölnischen Mark von 233·87 Gramm feinen Silbers 20 Gulden Conventionsmünze à 60 Kreuzer à 4 Pfennige geprägt wurden.

2. Der Frankenfuß (in Frankreich, Belgien, Italien und der Schweiz), nach welchem aus dem Kilogramm $\frac{835}{1000}$ feinen Silbers $185\frac{5}{9}$ Francs (Lire oder Franken) geprägt werden.

3. Der Silberrubelfuß in Rußland. 100 Silberrubel wiegen 5 Pfund 6 Solotnik und sind von der Probe $83\frac{1}{2}$.

§. 95. In der Münzrechnung kommen gewöhnlich folgende Auf-gaben vor.

1. Berechnung des Feingehaltes, des Kornes oder Schrotes.

a) Der Feingehalt wird gefunden, indem man das Korn durch das Schrot dividiert. Z. B.

Die neuen österr. Zwanziger wiegen $2\frac{2}{3}$ Gramm und enthalten $1\frac{1}{3}$ Gramm feinen Silbers; wie groß ist ihr Feingehalt?

$$\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = \frac{4}{8} = \frac{500}{1000}.$$

Die neuen Zwanziger sind also 500 Tausendtheile fein.

b) Das Korn ist gleich dem Producte aus dem Schrot und dem Feingehalte. Z. B.

Aus 1 Kilogramm $\frac{9}{10}$ feinen Goldes werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel feines Gold enthält 1 Achtguldenstück?

$$\text{Schrot} = \frac{1000}{155} \text{ Gramm},$$

$$\text{Korn} = \frac{1000}{155} \times \frac{9}{10} = 5{\cdot}80645 \text{ Gramm}.$$

c) Das Schrot wird gefunden, indem man das Korn durch den Feingehalt dividiert. Z. B.

Wie viel wiegt 1 kais. Ducaten, da er $23\frac{2}{3}$ Karat fein ist und 3·4421 Gramm feinen Goldes enthält?

$$\text{Feingehalt } \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72},$$

$$\text{Schrot} = 3{\cdot}4421 : \frac{71}{72} = 3{\cdot}4906 \text{ Gramm Schrot}.$$

2. Berechnung der Münzen nach ihrem inneren Werte (Münzpari).

Unter dem Münzpari versteht man die Angabe, wie viel Münzen der einen Art so viel feines Metall enthalten, als eine bestimmte Anzahl Münzen einer anderen Art. Da der innere Wert der Münzen von ihrem Korngewichte abhängt und bei der Bestimmung desselben der Zusatz als wertlos betrachtet wird, so drückt das Münzpari zugleich das Wertverhältnis der mit einander verglichenen Münzen aus.

Nach Verschiedenheit der Angaben des Münzfußes gestaltet sich auch die Lösung der hieher gehörigen Aufgaben verschieden; meistens wendet man dabei die Kettenrechnung an. Z. B.

Man suche das Pari in ö. W. für 100 Francs.

fl. ö. W. x	100 Francs
$185\frac{5}{9}$	1000 Gramm Münzsilber
1000	835 Gr. fein Silber
500	45 fl. ö. W.

$$x = 40{\cdot}5 \text{ fl. ö. W.}$$

Pari: 100 Francs = 40·5 fl. ö. W.

So wie bei den Gold- und Silbermünzen, wird der Feingehalt und der innere Wert auch bei ungemünztem Golde und Silber bestimmt; nur bedient man sich dabei statt der Ausdrücke „Schrot" und „Korn" der Bezeichnungen Rauhgewicht und Feingewicht.

3. Berechnung der Münzen nach dem Curse.

Der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat, heißt der Curs derselben. Hat eine Münze einen festgesetzten (gesetzlichen) Wert, so kann der Curs höher oder niedriger stehen, als dieser Wert; der Mehrbetrag wird Agio, der Minderbetrag Disagio genannt.

Unter besonderen Umständen kann auch die Landesmünze einen Curs herbeiführen, insbesondere dann, wenn sich neben dem Metallgelde auch Papiergeld im Umlaufe befindet und ein größerer Mangel an Metallgeld eingetreten ist. Dieses ist gegenwärtig in Oesterreich der Fall, wo das Silbergeld gegen Papiergeld ein größeres oder geringeres Agio hat.

Der Curs wird meistens pr. Stück, seltener in Procenten angegeben. Die Agio-Procente werden immer von Hundert der besseren Münzsorte berechnet.

Das Cursblatt (der Curszettel) hat zur Aufzeichnung gewöhnlich zwei Colonnen, von denen die eine mit Geld, die andere mit Waare überschrieben ist. Der in der Geldcolonne verzeichnete Curs drückt aus, daß man die Münze um diesen Preis zu kaufen suchte oder auch kaufte (Nachfrage); der Curs in der Waarencolonne bedeutet, daß man die Münze zu diesem Preise zu verkaufen suchte (Angebot).

An der Wiener-Börse werden sämmtliche Münzen per Stück und zwar in Gulden ö. W. Bankvaluta notirt; nur für Silber (Silbergulden oder Coupons der Silberrente) wird der Curs in Procenten angegeben, z. B. für 100 fl. in Silber 103 fl. in Banknoten, in welchem Falle Silbergeld gegen Banknoten ein Agio von 3% hat.

Z. B. Der Curs der kais. Ducaten ist 5·42; wie viel sind 128 Stück wert?

5·42 × 128
1 084
4336
693·76 fl. = 693 fl. 76 kr.

Das Silber ist mit 103 notiert; wie viel in Bankvaluta wird man für 375 fl. Silber bezahlen?

375 à 103
11 25
386·25 fl. Bankvaluta.

Aufgaben.

1. Die österr. Zwanziger sind 500, die Zehner 400, die Fünfer 350 Tausendtheile fein; gib den Feingehalt dieser Münzen in den kleinsten Brüchen an.

2. Die kais. Ducaten enthalten $23\frac{2}{3}$ karatiges Gold, die engl. Sovereigns sind $\frac{11}{12}$ fein, die russ. Imperiale von der 88. Probe; drücke den Feingehalt jeder dieser Münzen in Tausendtheilen aus.

3. Welchen Feingehalt hat eine Silbermasse, welche 640 Gramm wiegt und 480 Gramm feines Silber enthält?

4. Aus 500 Gramm feinen Silbers werden 45 fl. ö. W. geprägt; wie viel feines Silber enthält 1 Gulden?

5. Ein Frankstück wiegt 5·3892 Gramm und enthält 0·835 feines Silber; wie viel beträgt das Korn?

6. Wie viel feines Silber enthält ein holländ. Gulden, da aus 1 Kilogr. Silber von 0·945 Feingehalt 100 Gulden geprägt werden?

7. Bestimme aus den Angaben in §. 94, wie viel Korn a) 1 österr. Achtguldenstück, b) 1 kais. Ducaten, c) 1 deutsches Zehnmarkstück, d) 1 engl. Sovereign, e) 1 russ. Halbimperial, f) 1 nordamerik. Eagle hat.

8. Wie viel Silber und Kupfer hat ein Barren Silber, der $3\frac{2}{5}$ Kilogramm wiegt und 0·520 fein ist?

9. Eine Goldlegierung ist 0·580 fein und wiegt 168·2 Gramm; wie groß ist das Feingewicht?

10. Ein österr. Zwanziger hat bei $\frac{5}{10}$ Feingehalt $1\frac{1}{3}$ Gramm feines Silber; wie viel wiegt er?

11. Welches Schrot hat eine englische Krone, welche 28·276 Gramm feines Silber enthält und $\frac{37}{40}$ fein ist?

12. Bestimme aus den Angaben in §. 94, wie viel Schrot a) 1 österr. Vierguldenstück, b) 1 deutsches Zehnmarkstück, c) 1 engl. Sovereign, d) 1 russ. Halbimperial hat.

13. Zu einer Schüssel aus 0·750 feinem Silber werden 935 Gramm feinen Silbers verwendet; wie viel wiegt die Schüssel?

---

14. Wie viel ist 1 Gramm feinen Silbers wert?

500 Gramm fein Silber = 45 fl. ö. W.
1 „ „ „ = 0·09 fl. = 9 kr. Silber.

So viele Gramm feinen Silbers eine Silbermünze enthält, so vielmal 9 kr. österr. Silbergeld beträgt ihr Wert.

15. a) 1 holländ. Gulden hat 9·45 Gramm feines Silber,
b) 1 russ. Silberrubel hat 17 996 „ „ „
c) 1 dän. Reichsthaler hat 16·511 „ „ „
welchen Silberwert in ö. W. hat jede dieser Münzen?

16. In 375 Zwanzigern, ebenso in 750 Zehnern, wie auch in 1500 Fünfern sind 500 Gramm feinen Silbers enthalten; welchen Silberwert in ö. W. hat a) 1 Zwanziger, b) ein Zehner, c) 1 Fünfer?

17. 20 fl. Conventions-Münze enthalten 233·87 Gramm feinen Silbers; wie viel fl. ö. W. ist hiernach 1 fl. C. M. wert?

18. Eine Silberstange wiegt $2\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ Kilogramm und ist $\frac{8}{10}$ fein; wie groß ist der Silberwert in ö. W.?

19. 1 Achtguldenstück gilt bei den k. k. Cassen 8·1 fl. ö. W. in Silber; welchen Silberwert hat hiernach a) 1 Gramm feinen Goldes, b) 1 Kilogr. feinen Goldes, c) welches Wertverhältnis findet zwischen dem Golde und Silber statt, da 1 Kilogr. Silber = 90 fl. ö. W. ist?

1 Gramm Gold = 1 fl. $39\frac{1}{2}$ kr. ö. W. in Silber
1 Kilogr. Gold = 1395 fl. ö. W. in Silber
Gold : Silber = $15\frac{1}{2} : 1$.

20. Bestimme aus den Angaben im §. 94, welchen Wert 1) in österreichischen Silbergulden, 2) in Achtguldenstücken a) 1 kais. Ducaten, b) 1 deutsches Zehnmarkstück, c) 1 engl. Sovereign, d) 1 russ. Halbimperial hat.

21.* Wenn man 1 deutsches Zehnmarkstück = 5 fl. ö. W. annimmt; welchen Wert in ö. W. haben: 1 Mark, 350 Mark, 1 Pfennig, 618 Mark 68 Pf., 405 Mark 85 Pf.?

22.* Wie viel in deutschem Reichsgelde betragen nach demselben Verhältnisse 85 fl., 147 fl., 258 fl. 28 kr., 560 fl. 72 kr. ö. W.?

23. Nach dem Jahre 1857 wurden in Oesterreich und in Deutschland Goldkronen, 50 Stück aus 500 Gramm feinen Goldes geprägt;

wie viel ist 1 Krone a) in österr. Silbergulden, b) in Achtguldenstücken wert?

---

24. An der Wiener Börse notiert man an einem Tage
den Curs für kais. Ducaten mit 5·44 fl. } in österr.
„ „ „ Achtguldenstücke „ 9·25 „ } Bank-
„ „ „ engl. Sovereigns „ 11·60 „ } valuta;
welchen Wert haben hiernach a) 64 Stück Ducaten, b) 85 Achtguldenstücke, c) 36 Sovereigns?

25. Ein Commissionär kauft 75 Zwanzigfrankstücke im Curse zu 9 fl. 26 kr. und 80 Stück russ. Halbimperiale à 9 fl. 35 kr., und rechnet $\frac{1}{2}$‰ Sensarie und $\frac{1}{2}$% Provision; auf welchen Betrag lautet die Rechnung?

26. Wie viel in Papiergeld sind 328 fl. Silber wert, wenn das Agio 3% beträgt, d. i. wenn das Silber mit 103 notiert ist?

27. Wie viel fl. in Banknoten erhält man für 1234 fl. Silber bei a) 6%, b) $5\frac{1}{2}$%, c) 4%, d) 3·15% Agio?

28. Wie viel fl. in Banknoten sind bei dem Silbercurse 103·35 a) 32 fl., b) 85 fl., c) 248 fl., d) 3032 fl., fl. Silber wert?

29. Wie viel fl. Silber erhält man für 100 fl. Papiergeld, wenn das Silber auf 107 steht?

30. Wie viel fl. Silber sind 2360 fl. in Banknoten a) bei 5%, b) bei $4\frac{1}{2}$%, c) bei $3\frac{3}{4}$%, d) bei 2% Agio wert?

31. Für 3480 fl. in Silber bezahlt man 3501 fl. 80 kr. Papiergeld; zu wie viel % wird das Silberagio gerechnet?

II. Die Wechselrechnung.

§. 96. Eine Urkunde, in welcher sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine bestimmte Geldsumme an eine gewisse Person zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen, oder durch eine dritte Person zahlen zu lassen, wird **Wechsel** genannt.

Rücksichtlich des Zahlers unterscheidet man **eigene** Wechsel und **fremde**, oder **gezogene, trassierte** Wechsel.

Eigene Wechsel heißen jene Wechsel, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme selbst zu bezahlen.

Z. B. A. Richter in Wien kauft von F. Haas daselbst um 2000 fl. Waaren, zahlbar nach 2 Monaten, und stellt ihm über diesen Betrag folgenden Wechsel aus:

Wien am 7. August 1876. pr. fl. 2000 ö. W.

Zwei Monate von heute zahle ich gegen diesen Sola-Wechsel an den Herrn F. Haas die Summe von zweitausend Gulden öst. Währung. A. Richter.

Richter ist dann nach der Wechselstrenge verpflichtet, nach 2 Monaten dem Inhaber dieses Wechsels die darin genannte Summe zu zahlen.

In einem eigenen Wechsel kommen wenigstens zwei Personen vor: 1. der Aussteller, welcher sich zur Zahlung der Wechselsumme verpflichtet (hier Richter); 2. der Remittent oder der erste Inhaber des Wechsels, dem sich der Aussteller die Zahlung zu leisten verpflichtet (hier Haas).

Gezogene oder trassierte Wechsel sind solche Wechsel, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme durch eine dritte Person zahlen zu lassen.

Z. B. C. Fischer in Wien erhält von H. Wittgen in Hamburg Waaren im Betrage von 1200 Mark Banco, zahlbar nach 3 Monaten. In Wien ist aber der Kaufmann J. Moser, welcher mit dem Hamburger Kaufmann F. Korne in Geschäftsverbindung und Rechnung steht. Statt, dass der Wiener Fischer die Summe Hamburger Geld mit österreichischem kauft und an Wittgen in Hamburg sendet, was mit Unbequemlichkeit, Kosten und Gefahren verbunden wäre, begibt er sich zu Moser, erlegt ihm eine Summe in ö. W., welche denselben Wert hat als 1200 Mark Banco und erhält dafür von Moser folgenden Wechsel:

Wien am 15. Juli 1876. pr. M. B. 1200.

Drei Monate nach heute zahlen Sie gegen diesen Prima-Wechsel an den Herrn H. Wittgen die Summe von eintausend zweihundert Mark Banco.

Herrn F. Korne
in Hamburg.

J. Moser.

Diesen Wechsel übersendet Fischer von Wien an Wittgen in Hamburg, welcher denselben dem Korne dort zur Zahlungserklärung vorweiset oder präsentiert. Korne erklärt sich auf demselben schriftlich zur Zahlung der Summe zur bestimmten Zeit, d. i. er acceptiert den Wechsel, und hat nun zu der genannten Zeit die Zahlung an Wittgen zu leisten. Der Wiener hat dadurch seine Zahlung an den Gläubiger Wittgen in Hamburg auf eine sehr einfache Weise geleistet. Würde aber Korne den Wechsel nicht acceptiren, so wäre der Aussteller unter wechselrechtlicher Haltung verpflichtet, für die Wechselsumme und für die Auslagen Ersatz zu leisten.

Ein Wechsel bietet demnach ein sehr einfaches Mittel zur Ausgleichung von Schulden und Forderungen zwischen Kaufleuten verschiedener Plätze.

Bei einem gezogenen Wechsel sind im Allgemeinen vier Personen betheiligt: 1. der Aussteller oder Trassant, welcher den Wechsel ausstellt oder trassiert (hier Moser); 2. der Trassat, welcher vom Aussteller zur Zahlung der Wechselsumme aufgefordert wird (hier Korne), er heißt, wenn er den Wechsel acceptiert hat, auch Acceptant; 3. der Remittent, d. i. jene Person, welche den Wechsel kauft, um ihn an seinen Gläubiger zu übermachen, zu remittieren (hier Fischer); 4. der Präsentant, welcher den Wechsel zur Annahme und späteren Zahlung vorweiset (hier Wittgen).

Ein Wechsel wird in Beziehung auf den Trassanten und den Trassaten eine Tratte, in Beziehung auf den Remittenten und den Präsentanten eine Rimesse genannt.

§. 97. Die im Wechsel bestimmte Zeit zur Zahlung der Wechselsumme, d. i. die Verfallszeit, kann auf vier Arten festgesetzt werden:

a) Auf einen bestimmten Tag, z. B. 8. Mai dieses Jahres, medio Mai d. J. (unter medio versteht man immer den 15. des Monates), ultimo Mai (31. Mai). Solche Wechsel heißen Tagwechsel.

b) Nach Sicht, und zwar 1. unmittelbar nach Sicht (auf Sicht, auf Verlangen, a vista, a piacere), wenn der Wechsel noch am Tage der Vorzeigung oder Präsentation zu bezahlen ist, und 2. auf eine bestimmte Zeit (8 Tage, 3 Wochen, 2 Monate)

nach Sicht, wenn die Zahlung in der angegebenen Zeit nach der Präsentation zur Annahme zu leisten ist. Bei den Sichtwechseln der zweiten Art muß der Acceptant der Acceptation auch das Datum derselben beifügen. Ein Unterlassen der Datierung hat jedoch auf die Giltigkeit des Acceptes keinen Einfluss.

c) Auf eine bestimmte Zeit nach dem Tage der Ausstellung, z. B. 2 Monate a dato, 3 Wochen nach heute. Diese Wechsel heißen Datowechsel.

d) Auf eine Messe oder einen Markt. Solche Wechsel heißen Meßwechsel, und sind, wenn die Messe nur einen Tag dauert, an diesem Tage, wenn der Markt mehrere, jedoch nicht über 8 Tage dauert, am Tage vor dem gesetzlichen Schlusse des Marktes, und wenn der Markt mehr als 8 Tage dauert, am dritten Tage vor dem Schlusse des Marktes fällig.

Bei fremden Wechseln ist der Aussteller verpflichtet, auf Verlangen des Uebernehmers mehrere gleichlautende Exemplare des Wechsels auszufolgen, welche darin als Prima, Secunda, Tertia, . . bezeichnet werden. Von diesen wird zuerst die Prima versendet, und wenn diese verloren ginge, die Secunda u. s. f. Diese Vervielfältigung findet nicht statt bei eigenen Wechseln, welche darum auch Sola-Wechsel heißen.

Damit der Wechsel als kaufmännisches Zahlungsmittel in ausgedehntestem Umfange verwendet werden könne, ist der Remittent berechtiget, den Wechsel sammt dem ihm daraus zustehenden Rechte einem anderen abzutreten. Das Uebertragen der Rechte des Wechselinhabers an einen andern heißt indossieren oder girieren; es geschieht durch eine schriftliche Erklärung auf dem Wechsel, der Rückseite oder einer Copie desselben, Indossament oder Giro genannt. Derjenige, welcher den Wechsel an einen andern überträgt, heißt Indossant oder Girant; derjenige, an welchen der Wechsel übertragen wird, Indossatar oder Giratar. Der Indossatar kann den Wechsel wieder an einen anderen, selbst an den Aussteller, Bezogenen oder einen früheren Giranten giltig girieren, bis zur Verfallszeit der letzte Eigenthümer die Wechselzahlung wirklich erhält. Früher mußte im Wechsel vor dem Namen des Remittenten, damit er das Recht habe, den Wechsel zu girieren, der Zusatz „an die Ordre" gesetzt werden; nach den gegenwärtigen Wechselgesetzen ist dieser Zusatz nicht mehr nothwendig.

Wechseldiscont.

§. 98. Wechsel, welche auf die Valuta des eigenen Handelsplatzes lauten und daselbst zahlbar sind, heißen Platzwechsel. Wenn ein Platzwechsel vor dem Verfallstage verkauft wird, so muß sich der Verkäufer wegen der früheren Bezahlung einen Abzug gefallen lassen, welcher von der Zeit abhängt, die der Wechsel noch zu laufen hat. Dieser Abzug heißt Discont oder Escompt. Einen Wechsel vor der Verfallszeit gegen Abzug des Discontes verkaufen oder kaufen, heißt denselben discontieren.

Der Wechseldiscont wird in Procenten für ein Jahr angegeben und sollte richtig auf Hundert gerechnet werden (§. 84); er wird jedoch thatsächlich immer nach der bequemeren Procentrechnung von Hundert bestimmt, weil die sich ergebende Differenz mit Rücksicht auf die kurze Laufzeit der Wechsel sehr gering ist. Man berechnet daher den Wechseldiscont für die Zeit vom Kauftage bis zum Verfallstage wie die Zinsen auf Tage (§. 80), zählt bei der Bestimmung dieser Zeit den Kauftag oder den Verfallstag nicht und rechnet jeden Monat zu so viel Tagen, als er deren wirklich hat.

Z. B. Ein Wechsel von 3500 fl., fällig am 20. Juni, wird am 23. April mit 5% Discont verkauft; wie viel beträgt a) der Discont, b) der discontierte Wert?

Discontierungstag 23. April
Verfallstag 20. Juni

April	7 Tage	
Mai	31 „	
Juni	20 „	
	58 Disconttage	

$$\frac{3500 \times 58}{28000}$$
$$175$$
$$203000 : 6000$$
$$33{\cdot}833 \text{ à } 6\%$$
$$- \quad 5{\cdot}639 \text{ à } 1\%$$
$$28{\cdot}194 \text{ fl. Discont}$$

Wechselsumme 3500 fl.
ab 5% Discont für 58 Tage 28 „ 19 kr.
Discontierter Wert 3471 fl. 81 kr.

Aufgaben.

1. Ein Wechsel von 1565 fl., welcher nach 24 Tagen zahlbar ist, wird zu $5\frac{1}{2}\%$ discontiert; wie groß ist a) der Discont, b) der discontierte Wert?

2. Berechne den Discont und den discontierten Wert für folgende Wechsel:

	Wechselsumme	Kauftag	Verfallstag	Discont
a)	1834 fl. 56 kr.	3. April	31. Mai	6%
b)	2508 „ 80 „	27. März	2. Mai	5%
c)	960 „ — „	18. Juni	15. August	$4\frac{1}{2}$%
d)	3047 „ 75 „	20. August	10. Octob.	$6\frac{3}{4}$%

3. Am 27. Juni wird ein Wechsel von 2664 fl. pr. 5. August à 7% discontiert; wie groß ist dessen Wert?

4. Man kauft am 4. Jänner einen Wechsel pr. 3800 fl., fällig medio Februar, mit $5\frac{1}{2}$% Discont; wie viel ist dafür zu zahlen?

5. Welchen Wert hat am 22. Mai bei $4\frac{1}{2}$% Discont ein Wechsel von 655 fl., zahlbar ultimo Juni?

6. Ein Wechsel über 2844 Mark, zahlbar 14 Tage nach Sicht, acceptiert am 25. September, wird am 1. October mit 4% Discont verkauft; wie viel nimmt man dafür ein?

7. Ein am 12. Juli 3 Monate a dato ausgestellter Wechsel pr. 2517 fl. 88 kr. wird am 26. August à $6\frac{1}{4}$% discontiert; wie viel beträgt der discontierte Wert?

8. Am 24. April werden bei der österr. Nationalbank folgende Wechsel zu 5% escomptiert:

3128 fl. auf E. Moser, pr. 20. Mai;
1073 „ „ F. Link, pr. ultimo Mai;
536 „ „ K. Müller, 31. Tage nach Sicht, accept. 8. April;
2895 „ „ H. Probst, vom 28. März, 2 Mon. a dato.

Wie viel hat die Bank für alle diese Wechsel zu bezahlen?

9. Zu wie viel % wurde ein am 15. August fälliger Wechsel von 3456 fl. am 23. Juni discontiert, wenn der Discont 25 fl. 44 kr. betrug?

Wechselreduction.

§. 99. Wechsel, welche auf fremde Handelsplätze und gewöhnlich auch auf eine fremde Währung lauten, heißen ausländische Wechsel

oder Devisen. Beim Ein- oder Verkaufe von Devisen muß nach einem gegebenen Wechselcurse der Betrag des fremden Geldes (die Wechselvaluta) in die eigene Währung, oder umgekehrt umgerechnet werden. Diese Rechnung nennt man die Wechselreduction.

Der Wechselcurs hängt von dem inneren Werte des fremden Geldbetrages, von der Laufzeit des Wechsels, sowie von der Nachfrage und dem Angebote solcher Wechsel ab und bezieht sich immer auf zwei Geldwährungen, die des eigenen und die des fremden Handelsplatzes; es wird nämlich angegeben, dass für eine unveränderliche oder feste Summe der einen Valuta eine veränderliche, bald größere, bald geringere Summe in der andern Valuta geleistet wird. An den österreichischen Börsen bilden immer 100 (für London 10) Einheiten des fremden Geldes die feste Valuta, und gibt der notierte Curs an, wie viel fl. ö. W. Bankvaluta dafür gezahlt oder empfangen werden. Wenn z. B. der Curs auf Paris mit 43 notiert ist, so heißt dieß: für 100 Francs zahlt man 43 fl. österr. Währ. in Banknoten.

Der Curszettel enthält, wie bei den Münzcursen, auch für die Wechselcurse zwei Colonnen; der Curs in der mit „Geld" überschriebenen Colonne gibt an, zu welchem Preise die Devisen zu kaufen gesucht werden; der Curs in der mit „Waare" oder „Brief" überschriebenen Colonne dagegen, zu welchem Preise Wechsel angeboten werden.

Bei der Wechselreduction wendet man die Procentrechnung, die Zerfällungsmethode oder auch den Kettensatz an. Z. B.

Ein Wiener hat in Amsterdam eine Zahlung von 2360 fl. holl. zu leisten; er will diese durch Uebersendung eines Wechsels begleichen, den er zum Curse 92·50 einkauft; wie viel muß er für diesen Wechsel bezahlen?

23 60 à $92\frac{1}{2}$	oder	100 fl. holl. . . .	92·50 fl. ö. W.
2124 00		2000 fl. holl. . . .	1850·00 fl. ö. W.
47 20		300 „ „ . . .	277·50 „ „ „
11 80		60 „ „ . . .	55·50 „ „ „
2183·00 fl. ö. W.			2183·00 fl. ö. W.

Aufgaben.

1. Ein Wiener hat in Berlin 2915 Reichsmark zu fordern und will diese Forderung mittelst eines Wechsels, den er auf seinen

Schuldner ausstellt und à 55·60 verkauft, an sich bringen; wie viel nimmt er für diesen Wechsel ein?

2. Ein Wiener ist nach Hamburg den Reinertrag einer Verkaufsrechnung mit 2155 fl. ö. W. schuldig und übermacht dafür einen Hamburger Wechsel; auf wie viel Mark muß dieser gestellt werden, wenn der Curs auf Hamburg 55·55 ist?

3. Ein Wiener schuldet in London 261 Pfund 12 Schill. Sterl.; er will diese Schuld durch eine Rimesse berichtigen, die er à 115 (10 Pfund Sterl. = 115 fl. ö. W.) einkauft; wie viel muß er dafür bezahlen?

4. Wie viel kostet eine Rimesse auf Mailand pr. 5320 Lire à 43·15?

5. Ein Pariser Kaufmann ist einem Prager 3022 fl. ö. W. schuldig; der Prager trassiert zu 43·30, auf wie viel Francs ist die Tratte auszustellen?

6. Wie viel erhält man für folgende verkaufte Devisen:

a) 3189 Mark auf Berlin à 55·40,

b) 4610 fl. holl. auf Amsterdam à 92·55,

c) 5275 Francs auf Marseille à 43·40,

wenn $\frac{1}{2}$‰ Sensarie gerechnet wird?

7. Wenn für einen Amsterdamer Wechsel pr. 2950 fl. holl. in Wien 2666 fl. 80 kr. ö. W. gezahlt werden, wie ist der Curs auf Amsterdam notiert, d. h. wie viel fl. ö. W. sind 100 fl. holl. wert?

8. Wie steht der Curs auf Brüssel, wenn bei Berechnung von $\frac{1}{2}$% Provision für 5248 Francs 2241 fl. 55 kr. ö. W. gutgeschrieben werden?

9. Berlin remittiert nach Wien 2772 fl. ö. W.; wie viel zahlt es bei 1‰ Sensarie zum Curse 184 (100 fl. ö. W. = 184 Mark) für die Rimesse?

10. Ein Wiener ist Amsterdam 4164 fl. holl. schuldig. Um diese Schuld zu berichtigen, kann der Wiener entweder nach Amsterdam à 92·35 fl. ö. W. pr. 100 fl. holl. remittieren, oder von Amsterdam à $112\frac{1}{3}$ fl. holl. pr. 100 fl. ö. W. auf sich trassieren lassen. Durch welche dieser Wechseloperationen wird der Wiener seine Schuld mit der geringeren Ausgabe tilgen?

III. Berechnung der Staatspapiere und Actien.

§. 100. Wenn ein Staat genöthiget ist, ein Anlehen aufzunehmen, so theilt er, damit sich daran auch kleinere Capitalisten betheiligen können, die ganze Anlehenssumme in viele kleinere Beträge und stellt darüber den Darleihern Schuldverschreibungen aus, welche Staatspapiere, auch Staatsobligationen oder öffentliche Fondspapiere heißen. Der Capitalsbetrag, auf welchen ein Staatspapier lautet, wird der Nominalwert desselben genannt.

Die Staatspapiere sind entweder verzinsliche Obligationen, für welche in bestimmten Terminen die Zinsen nach einem bestimmten Zinsfuße und zwar gewöhnlich gegen gedruckte Zinsanweisungen, Coupons, ausgezahlt werden, oder Lose, deren Erträgnis in bestimmten Gewinnsten besteht, die in festgesetzten Ziehungen entfallen. Einige Lose gewähren außer der Möglichkeit, einen großen Gewinn zu machen, auch regelmäßige Zinsen.

Für großartige Unternehmungen, welche sehr hohe Capitalien erfordern, z. B. Eisenbahnbauten, Creditcassen, Berg- und Hüttenwerke, bilden sich Gesellschaften, welche das benöthigte Capital, in kleinere Theile vertheilt, von vielen Geldbesitzern aufnehmen. Die Urkunde, welche dem Geldgeber für jede einzelne Geldeinlage ausgestellt wird, nennt man eine Actie, und die Gesellschaft selbst eine Actiengesellschaft. Bei einer Actie ist der Betrag, auf den sie lautet, als deren Nominalwert anzusehen.

Das Erträgnis der Actien, die Dividende, besteht entweder in bestimmten Zinsen oder in einem Antheile am Gewinne der Unternehmung, oder meistens in beiden zugleich. Die ordentliche Dividende gilt für die Zinsen, die außerordentliche vertheilt den Mehrgewinn.

Außer den Actien werden von den Actiengesellschaften häufig auch verzinsliche Schuldverschreibungen hinausgegeben, welche zwar zu keinem Antheile am Gewinne, dagegen zu dem Anspruche auf die Zahlung der Zinsen noch vor den Actien berechtigen. und darum Prioritäts-Obligationen oder Prioritäten heißen.

Die Actien, Prioritäten und die öffentlichen Fonds werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Effecten bezeichnet.

§. 101. Die Effecten haben einen veränderlichen Wert, welcher Curs heißt und nicht bloß von dem Nominalwerte, sondern auch von der Höhe des Zinsfußes und des Gewinnes, von der Nachfrage und dem Anbote abhängt. Der Curs wird entweder in Procenten d. i. für 100 Einheiten des Nominalwertes, oder pr. Stück angegeben. An den österreichischen Börsen werden die Curse in Gulden ö. W. Bankvaluta, und zwar bei sämmtlichen Actien sowie bei Privatlosen pr. Stück, dagegen bei allen Staatspapieren, Grundentlastungs-Obligationen, Pfandbriefen und den meisten Prioritäts-Obligationen für 100 fl. des Nominalwertes notiert.

Wie für die Münz- und Wechselcurse, so enthält das Cursblatt auch für die Effectencurse 2 Colonnen, von denen die eine mit „Geld", die andere mit „Waare" überschrieben ist.

Beim Kaufe zinstragender Effecten müssen dem Verkäufer nebst dem Capitalswerte auch die noch nicht behobenen Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Tage des Kaufes vergütet werden. Bei den Actien ist die außerordentliche Dividende in dem Curse mitbegriffen, die ordentliche Dividende aber ist als laufender Zins vom letzten Verfallstage bis zum Kauftage gleichfalls dem Verkäufer zu vergüten.

Bei der Berechnung des Einkaufs- oder Verkaufswertes der Effecten verfährt man auf folgende Art:

1) Man bestimme den Curswert der Effecten d. i. den Wert derselben mit Rücksicht auf den gegebenen Curs. Ist der Curs in Procenten gegeben, so multipliciert man den Nominalwert mit dem Curse und dividiert das Product durch 100. Ist dagegen der Curs pr. Stück gegeben, so multipliciert man den Curs mit der Anzahl der Stücke.

2) Bei verzinslichen Staatspapieren berechne man die Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Kauftage und addiere sie zu dem früher gefundenen Curswerte. Der Monat wird dabei zu 30 Tagen angenommen und der Kauftag nicht mitgezählt.

Die Zinsen der Effecten werden immer von dem Nominalwerte berechnet.

Wenn ein Effect auf Conventions-Münze lautet, so haben dieselbe Benennung auch die Zinsen: diese müssen daher, weil der Curswert in ö. W. ausgedrückt ist, gleichfalls in ö. W. umgerechnet werden. Bezüglich der in Silber verzinslichen Effecten besteht an den öster-

reichischen Börsen die Uebung, dass die laufenden Zinsen in Papiergeld ohne Zuschlag des Silberagio berechnet werden.

Bei den meisten Staatspapieren muß von den Zinsen noch die Einkommensteuer in Abzug gebracht werden; nur die Actien, Pfandbriefe und einige Prioritätsobligationen sind steuerfrei.

Aufgaben.

1. Wie viel betragen 9 Stück Lose vom J. 1864 à 146?

2. Wie viel kosten
   6 Stück Creditlose à 161,
   12 „ Palffy-Lose à 29, und
   15 „ Lose der Rudolfsstiftung à 14?

3. Jemand kauft am 3. December 8 Stück Actien der Nationalbank à 842; wie viel muß er dafür bezahlen? (Nominalwert einer Actie = 600 fl. ö. W., 5% Zinsen seit 1. Juli rückständig).

8 Stück à 842 — 6736 fl.
Zinsen von 8 Stück à 600 fl. = 4800 fl.
vom 1. Juli, 152 Tage, à 5% — 101 „ 33 kr.
6837 fl. 33 kr.

4. Am 15. Mai werden 8 Stück Actien der Creditanstalt für Handel und Gewerbe zum Curse 145 gekauft; wie viel kosten sie? (Nominalwert einer Actie 160 fl., 5% Zinsen seit 1. Jänner.)

5. Am 27. August werden verkauft:
   4 Stück Anglo-Actien à 65, (Nominalwerth à 100 fl. 5% Zinsen seit 1. Jänner);
   7 Stück Franco-Actien à 39, Nominalwert à 100 fl., 5% Zinsen seit 1. Jänner).

6. Am 8. November werden gekauft:
   8 Stück Rudolfsbahn-Actien à 108, (Nominalwerth à 200 fl., Zinsen seit 1. Juli);
   14 Stück Theißbahn-Actien à 198, (Nominalwert à 200 fl., Zinsen seit 1. Juli);
   6 Stück Südbahn-Actien à 78, (Nominalwert à 200 fl., Zinsen seit 1. Nov.).

7. Am 28. August werden 1400 fl. einheitliche Staatsschuld in Silber (Silberrente) à 70·50 gekauft; wie viel ist dafür zu zahlen? (Zinsen zu 5% mit 16% Einkommen-Steuer seit 1. Juli).

Hier werden die rückständigen Zinsen anstatt mit 5% nach Abzug von 16% Einkommen-Steuer sogleich nur mit $4^1/_5$% berechnet.

1400 fl. Silberrente à 70·50	987 fl.
Zinsen seit 1. Juli, 57 Tage à $4^1/_5$%	9 „ 31 kr.
	996 fl. 31 kr.

8. Am 12. September verkauft man 2600 fl. einheitliche Staatsschuld in Noten (Papierrente) à 66·20? (Zinsen $4\frac{1}{5}$% seit 1 August).

9. Jemand verkauft am 6. December 9 Stück Lose vom Jahre 1854 à 105; wie viel nimmt er dafür ein? (Nominalwert à 250 fl. C. M., Zinsen 4% mit 20% Einkommen-Steuer seit 1. April).

9 Stück à 250 fl. C. M. = 2250 fl. C. M.

2250 fl. C. M. à 105	2362·5 fl. ö. W.
Zins. von 2250 fl. C. M., 245 Tage à 4%	
61·25 fl. C. M. = 64·31 fl. ö. W.	
ab Eink. St. 20% 12·86 „ „ „	51·45 „ „ „
	2413·95 fl.

10. Am 18. Juli werden 6 Stück ganze Lose vom J. 1860 à 108 gekauft. (Nominalwert à 500 fl., Zinsen 5% mit 20% Einkomm. St. seit 1. Mai).

11. Am 13. März werden verkauft:

6000 fl. C. M. böhm. Grundentlastungs-Oblig. à 99,
2500 „ „ „ niederösterr. „ „ à 101, und
3000 „ „ „ steierm. „ „ à 96.

(Zinsen à 5% mit 10% Einkom.-St. seit 1. November).

12. Wie viel betragen am 28. August 8 Stück Prioritäten der Franz-Josefsbahn à 90·50 (Nominalwert à 200 fl., Zinsen 5% seit 1 Oct.), bei $\frac{1}{2}$‰ Sensarie?

13. Jemand läßt am 7. October folgende Prioritäten verkaufen:

10 Stück böhm. Westbahn à 87, (Nominalwerth 300 fl., 5% Zinsen mit 10% Eink.-St. seit 1. Juli);
8 Stück Leoben-Vordernb. Bahn à 68·50 (Nominalwert à 300 fl., 5% Zinsen seit 1 August);
12 Stück Siebenbürger Bahn à 64·60, (Nominalwert à 200 fl., 5% Zinsen seit 1 October);

wie viel erhält er dafür, wenn die Sensarie $\frac{1}{2}$‰ und die Provision $\frac{1}{3}$% beträgt?

Wiederholungsaufgaben.

1.* Ein Arbeiter hat in $2\frac{2}{3}$ Monaten $181\frac{3}{5}$ fl. verdient; wie viel in $\frac{1}{3}$ Monat?

2.* Der Arbeitslohn für 4 Arbeiter auf 5 Wochen ist 140 fl.; wie viel beträgt derselbe für 7 Arbeiter auf 9 Wochen?

3. Der Mond dreht sich in $27\frac{3}{10}$ Tagen um seine Achse; Jupiter, der größte unter den Planeten, in $9\frac{9}{10}$ Stunden; wie verhalten sich ihre Umdrehungszeiten?

4. Zur Heizung eines Schulzimmers waren für jeden Winter 18 Cub.^{m} Buchenholz erforderlich; in Zukunft will man mit Steinkohlen heizen. Wie viel Tonnen Steinkohlen wird man brauchen, wenn 1 Cub.^{m} Buchenholz 376 Kilogramm wiegt und wenn die Heizkraft der Steinkohlen um 70% größer ist als die einer gleichen Gewichtsmasse Buchenholz?

5. Wie groß ist der Unterschied zwischen $3784\frac{19}{75} + 1738\frac{38}{105}$ und $233\frac{3}{25} + 1817\frac{67}{100} + 2789\frac{37}{240}$?

6. Wie hoch sind die Assecuranzkosten von einer Waare, welche mit 7600 fl. versichert wird, wenn die Assecuranzprämie $1\frac{1}{8}$%, die Sensarie 1‰, die Provision $\frac{1}{3}$% beträgt und die Polizze 2 fl. kostet?

7. A kauft eine Rudolfsbahnactie im Nominalwerte von 200 fl. für 112 fl.; zu wie viel Procent verzinset sich sein Capital, wenn für die Actie halbjährig 5 fl. Zinsen in Silber gezahlt werden und das Silberagio auf 3% steht?

8. 525 Kilogr. Kaffee werden für 609 fl. eingekauft; die Spesen betragen 16%. Wie theuer muß das Kilogr. verkauft werden, wenn man 12% gewinnen will?

9. In einer Factura (Einkaufsrechnung) ist der Preis der gekauften Waaren 2260 fl. 18 kr., Sconto $1\frac{1}{2}$%, verschiedene Spesen 62 fl. 20 kr., Sensarie 1% (vom Preis), Provision $2\frac{1}{2}$%. Wie groß ist der Betrag der Einkaufsrechnung?

10. Den 5ten Theil eines Grabens haben 22 Arbeiter in $35\frac{3}{4}$ Tagen gemacht; wenn nach dieser Zeit 6 Arbeiter entlassen werden, in wie viel Tagen werden die übrigen das Fehlende zu Stande bringen?

11. Welchen Wert hat das Liter einer Mischung, wenn unter 5 Liter Wein à 34 Kr. und 4 Liter à 40 kr. 1 Liter Wasser gegossen wird?

12.* 120 fl. sollen unter drei Personen so getheilt werden, dass A so oft 3 fl. und B so oft 4 fl. erhält, als C 5 fl.; wie viel erhält jede Person?

13.* Zur Bedielung eines Zimmers braucht man 24 Bretter von 4^m Länge und 25^{cm} Breite; wie viel Bretter braucht man, wenn sie 5^m Länge und 30^{cm} Breite haben?

14. Jemand hat 6000 fl. in drei gleich großen Raten zu zahlen, und zwar je 2000 fl. nach 1, nach 4, nach 10 Monaten; wann wird die Zahlung erfolgen, wenn er die ganze Summe auf einmal abtragen soll?

15. Zur Tapezierung eines Zimmers braucht man 28 Rollen Tapeten von 45 Centimeter Breite; wie viel Rollen von gleicher Länge sind dazu erforderlich, wenn die Tapeten nur 42 Centimeter breit sind?

16. Ein Barren Silber wiegt $12\frac{3}{8}$ Kilogr. und enthält $6\frac{21}{100}$ Kil. feines Silber; wie viel tausendtheilig ist derselbe?

17. Die neuen österr. Zehner haben einen Feingehalt von 400 Tausendtheilen und ein Schrotgewicht von $1\frac{2}{3}$ Gramm; wie groß ist das Korngewicht eines solchen Münzstückes?

18. Wie viel betragen 58 Zwanzig-Markstücke à 11 fl. 65 kr.?

19. Eine Mauer von 80^{cm} Dicke und $24^m\ 8^{dm}$ Länge enthält $287\boxtimes^m$ $680\boxtimes^{dm}$; wie hoch ist die Mauer?

20. A legt in eine Handlung 5000 fl., B 7400 fl., C 8409 fl., D 6200 fl.; wenn sie nun zusammen 1800 fl. gewinnen, was erhält jeder vom Gewinne?

21. Ein Schnittwaarenhändler hat 6 Stück Tuch von derselben Güte gekauft und für sämmtliche Stücke 852 fl. bezahlt. Das erste hält 48 Meter, das zweite $52\frac{1}{2}$, das dritte $51\frac{1}{4}$, das vierte $58\frac{3}{4}$, das fünfte 60 und das sechste $54\frac{1}{2}$ Meter; wie viel kostet jedes Stück?

22. Ein Wiener kauft einen Wechsel auf Paris über 2705 Francs 40 Cent. im Curse zu 45·50 (100 Francs = 45·50 fl. ö. W.); wie viel in ö. W. muß er dafür bezahlen?

23. Wie hoch ist der Ladenpreis eines Buches, das nach Abzug von 25% Rabatt 5 Mark 10 Pf. kostet?

24. Am 25. Juni werden folgende Wechsel zu $5\frac{1}{2}$% discontiert:

2735 fl. auf F. Lang, pr. 20. Juli;
3088 „ „ K. Fritsche, vom 31. Mai, 2 Mon. a dato;
970 „ „ G. Roth, 31 T. nach Sicht, accep. 12. Juni;

wie groß ist der discontierte Wert dieser Wechsel?

25. 4500 Mann haben auf 8 Monate Brot, wenn jeder täglich $1\frac{1}{4}$ Kilogramm bekommt. Nun kommen 500 Mann dazu; wie viel

Kilogramm wird jeder täglich bekommen, damit das Brot auf $7\frac{1}{2}$ Monate ausreiche?

26. Von einer Waarengattung kostet das Kilogramm 22 Francs, von einer anderen 12 Francs; wie viel muß man von jeder Sorte zu einer Mischung von 70 Kilogramm nehmen, wenn das Kilogramm 18 Francs kosten soll?

27. Am 22. Februar werden gekauft:

2500 fl. Pfandbriefe der Bodencredit-Anstalt à 100·25
(Zinsen à 5 % seit 1. Nov.);

2000 fl. Pfandbriefe der galiz. Rustical-Credit-Anst. à 93,
(Zinsen à 6% seit 1. Jänner).

28. Zu wie viel % verzinst sich ein in österr. Papierrente (Zinsen $4\frac{1}{5}$%) bei einem Curse von 66 angelegtes Capital?

29. Um einen Graben herzustellen, werden 32 Arbeiter aufgenommen, welche die Arbeit in 25 Tagen vollenden würden; nach 7 Tagen werden jedoch 7 Arbeiter entlassen; wie lange werden die übrigen noch zu arbeiten haben?

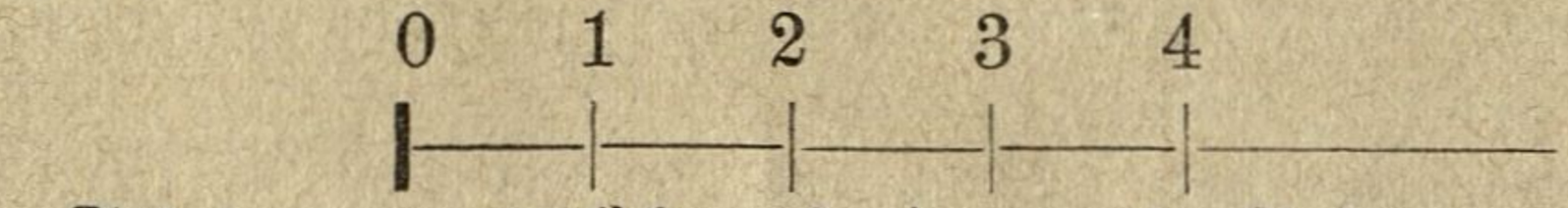
30. Ein Triester kauft in Amsterdam 3214 Pfd. Caffee und bezahlt das Pfund mit $\frac{3}{5}$ fl. holländisch; die Spesen betragen 20%; wie viel fl. ö. W. muß er bezahlen, wenn 100 fl. holl. = 99 fl. ö. W. gerechnet werden?

Siebenter Abschnitt.

Das Rechnen mit algebraischen und allgemeinen Zahlen.

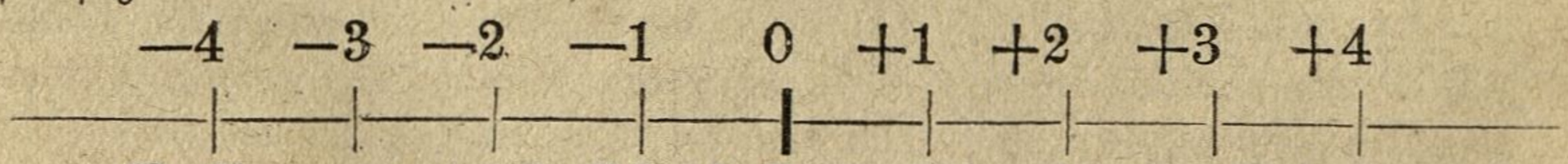
I. Algebraische Zahlen.

§. 102. Zur bildlichen Darstellung der Zahlen bedient man sich der Zahlenlinie.



Trägt man nämlich auf eine gerade Linie von einem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung, z. B. nach rechts, gleiche Strecken (Längeneinheiten) auf, so stellen die Entfernungen der Endpunkte dieser Strecken von dem Anfangspunkte 0 die auf einander folgenden natürlichen Zahlen dar.

Durch fortgesetztes Hinzufügen einer Einheit kann man in der Zahlenlinie, und ebenso in der dadurch versinnlichten natürlichen Zahlenreihe ohne Ende vorwärts schreiten. Wenn man dann von irgend einer Zahl aus durch fortgesetztes Wegnehmen einer Einheit in der Zahlenreihe rückwärts schreitet, so gelangt man nach und nach zu 1, und endlich, wenn noch eine Einheit weggenommen wird, zur 0. Es ist nun nicht nöthig, bei der 0 stehen zu bleiben; man kann nach demselben Gesetze die Zahlenreihe von 0 aus auch weiter rückwärts fortsetzen.



Verlängert man nämlich die Zahlenlinie über den Anfangspunkt 0 hinaus nach der entgegengesetzten Richtung (nach links) und trägt auch hier gleich große Strecken auf, so stellen die Entfernungen ihrer Endpunkte von dem Punkte 0 eine neue Reihe von Zahlen dar, welche sich von den ursprünglichen Zahlen nur dadurch unterscheiden, dass sie von 0

aus rückwärts fortschreiten, während die früheren Zahlen von 0 aus nach vorwärts gezählt wurden. Um diesen Gegensatz auszudrücken, bezeichnet man die Zahlen, welche von 0 aus in der ursprünglichen Richtung, also vorwärts, fortschreiten, mit dem Vorzeichen + (mehr, plus) und nennt sie positiv, wogegen die Zahlen, welche von 0 aus in der entgegengesetzten Richtung, also rückwärts, nach demselben Bildungsgesetze fortschreiten, mit dem Vorzeichen — (weniger, minus) bezeichnet und negativ genannt werden.

Durch diese Erweiterung des Zahlengebietes entsteht die zweiseitige Zahlenreihe

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Indem hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreiche vorstellen, treten die negativen Zahlen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken.

Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden entgegengesetzte oder algebraische Zahlen genannt, im Gegensatze zu den ursprünglichen Zahlen, welche absolute Zahlen heißen.

Jede algebraische Zahl, z. B. + 3 oder — 3, besteht aus einem Vorzeichen + oder — und einem Zahlwerte, hier 3. Das Vorzeichen zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet; der Zahlwert ist eine absolute Zahl und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder negativen Zahlen einnimmt.

Das Vorzeichen + wird am Anfange eines Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben; das Zeichen — darf nie weggelassen werden. Wenn daher vor einer Zahl kein Vorzeichen steht, ist sie als positiv anzusehen; z. B. 3 bedeutet so viel als + 3.

Die Erweiterung des Zahlengebietes durch die Einführung der negativen Zahlen macht es erst möglich, die Subtraction zweier Zahlen auch dann auszuführen, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist. Um z. B. die Differenz 4—7 zu bestimmen, soll man nach dem Begriffe der Subtraction von 4 aus um 7 Einheiten zurückschreiten; dieses ist unmöglich, so lange man auf das Gebiet der absoluten Zahlen beschränkt ist. Wird aber die durch die Aufnahme der negativen Zahlen erweiterte Zahlenreihe zu Grunde gelegt, so gelangt man, von 4 um 7 Einheiten zurückschreitend, zur Zahl — 3, und es erhält sonach die Differenz $4 - 7 = -3$ ihre ganz bestimmte Bedeutung.

Eine algebraische Zahl, welche mit einer andern durch eine Rechnungsoperation zu verbinden ist, umgibt man mit Klammern;

z. B. + 3 — (— 5) bedeutet die Differenz der Zahlen + 3 und — 5.

Der Begriff des Gegensatzes, welcher zwischen den positiven und negativen Zahlen besteht, tritt in zahlreichen Fällen des praktischen Lebens hervor, z. B. bei der Bewegung nach vorwärts und rückwärts, nach rechts und links, bei der Zeit vor und nach Christi Geburt, bei Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust u. dgl. Der Gegensatz besteht darin, dass je zwei solche entgegengesetzte Größen mit einander in Verbindung gebracht, sich gegenseitig entweder ganz oder theilweise aufheben. Z. B. Wenn jemand in einer bestimmten Richtung 20 Schritte vorwärts geht und dann von dem erreichten Punkte 20 Schritte in entgegengesetzter Richtung, also nach rückwärts macht, so ist er, obwohl er 40 Schritte weit gegangen, doch um nichts von seinem anfänglichen Orte entfernt, und es ist in Bezug auf das erreichte Ziel eben so viel, als wenn er sich gar nicht bewegt hätte; 20 Schritte nach vorwärts und 20 Schritte nach rückwärts heben sich also gegenseitig ganz auf. Ebenso heben sich 20 fl. Vermögen und 20 fl. Schulden ganz auf; dagegen heben sich 20 fl. Vermögen und 8 fl. Schulden nur theilweise auf, indem durch ihre Vereinigung d. i. nach der Tilgung der Schulden noch 12 fl. Vermögen übrig bleiben.

Nachdem wir durch die Einführung der negativen Zahlen unser Zahlengebiet erweitert haben, müßen auch die ursprünglichen Begriffe der Rechnungsoperationen angemessen erweitert werden, so dass sie auch auf negative Zahlen anwendbar werden, und dass das Rechnen mit diesen als Gegensatz des Rechnens mit positiven Zahlen erscheint. Aus den so erweiterten Erklärungen der Operationen ergibt sich dann von selbst auch das bei der Ausführung derselben anzuwendende Verfahren.

Das Addieren algebraischer Zahlen.

§. 103. Bei der Addition absoluter Zahlen schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe vom ersten Summand um so viele Einheiten vorwärts, als der zweite Summand angibt.

Algebraische Zahlen addieren heißt nun, in der algebraischen Zahlenreihe vom ersten Summand um die Einheiten des zweiten ebenfalls vorwärts schreiten, wenn der zweite Summand positiv, dagegen rückwärts schreiten, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in derselben Richtung fortschreiten, welche das Vorzeichen des zweiten

Summanden angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Ist z. B. die Summe $+ 5 + (+ 3)$ zu suchen, so schreitet man von $+ 5$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl $+ 8$ gelangt; also

$$+ 5 + (+ 3) = + (5 + 3) = + 8.$$

Um die Summe $- 5 + (- 3)$ zu erhalten, schreitet man von $- 5$ aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl $- 8$ gelangt; folglich

$$- 5 + (- 3) = - (5 + 3) = - 8.$$

Ebenso erhält man

$$+ 5 + (- 3) = + (5 - 3) = + 2,$$
$$- 5 + (+ 3) = - (5 - 3) = - 2.$$

Zwei algebraische Zahlen werden also addiert, indem man, wenn sie gleiche Vorzeichen haben, der Summe ihrer absoluten Werte das gemeinschaftliche Vorzeichen, und, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, der Differenz ihrer absoluten Werte das Vorzeichen der größeren gibt.

Die Summe zweier Gewinne wie zweier Verluste ist wieder bezüglich ein Gewinn oder ein Verlust; die Summe eines Gewinnes und eines Verlustes gibt den Ueberschuß des einen über den andern als Gewinn oder Verlust.

Aufgaben.

1. a) $+ 7 + (+ 2) = ?$ b) $+ 7 + (- 2) = ?$
2. a) $- 4 + (+ 5) = ?$ b) $- 4 + (- 5) = ?$
3. a) $\begin{array}{r} + 9 \\ + 4 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} - 5 \\ - 6 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} - 7 \\ + 8 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} + 9 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$
4. a) $- 38 + (+ 13) = ?$ b) $+ 35 + (- 35) = ?$
5. a) $+ 297 + (- 128) = ?$ b) $- 3048 + (- 1763) = ?$
6. a) $+ 3{\cdot}105 + (- 4{\cdot}342) = ?$ b) $- 5{\cdot}684 + (+ 10) = ?$
7. a) $- \frac{5}{8} + (+ \frac{3}{4}) = ?$ b) $+ \frac{1}{2} + (- \frac{1}{3}) = ?$
8. a) $- 20 + (45 - 17) = ?$ b) $- 15 + (12 - 18) = ?$
9. $+ 15 + (- 8) + (+ 5) = + 7 + (+ 5) = 12$
10. $- 31 + (+ 57) + (- 38) = ?$
11. $- 217 + (- 196) + (+ 790) = ?$
12. $- 9 + (- 7) + (+ 12) + (- 3) = ?$
13. $+ 22{\cdot}9 + (+ 31{\cdot}7) + (- 50{\cdot}1) + (- 19) = ?$
14. $- 702{\cdot}13 + (+ 819{\cdot}92) + (- 563{\cdot}09) + (+ 85{\cdot}58) = ?$
15. $- 2\frac{1}{2} + (+ 6\frac{2}{3}) + [- 1\frac{3}{4} + (- \frac{5}{6})] = ?$

16. Der erste punische Krieg begann im Jahre 264 v. Chr. und dauerte 23 Jahre; wann hörte er auf?

Das Subtrahieren algebraischer Zahlen.

§. 104. Bei der Subtraction absoluter Zahlen schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe vom Minuend aus um so viele Einheiten rückwärts, als der Subtrahend anzeigt.

Algebraische Zahlen subtrahieren heißt nun, in der algebraischen Zahlenreihe vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahends ebenfalls rückwärts schreiten, wenn dieser positiv, dagegen vorwärts schreiten, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten, als sie das Vorzeichen des Subtrahends angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Art gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Um z. B. die Differenz $+ 5 - (+ 3)$ zu finden, schreite man von $+ 5$ aus um 3 Einheiten in negativer Richtung fort; man gelangt dadurch zu der Zahl $+ 2$. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+ 5$ die Zahl $- 3$ addiert, folglich

$$+ 5 - (+ 3) = + 5 + (- 3) = + 2.$$

Es sei ferner $+ 5 \cdot (- 3)$ zu bestimmen. Hier muß man von $+ 5$ aus um 3 Einheiten in positiver Richtung fortschreiten, wodurch man zu der Zahl $+ 8$ gelangt. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+ 5$ die Zahl $+ 3$ addiert; also

$$+ 5 - (- 3) = + 5 + (+ 3) = + 8.$$

Ebenso findet man

$$- 5 - (+ 3) = - 5 + (- 3) = - 8,$$
$$- 5 - (- 3) = - 5 + (+ 3) = - 2.$$

Daraus folgt:

Algebraische Zahlen werden subtrahiert, indem man zu dem Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Zeichen addiert.

Statt Jemandem 3 fl. Vermögen zu nehmen, kann man ihm 3 fl. Schulden (die Verpflichtung, so viel zu bezahlen) geben; statt ihm 3 fl. Schulden abzunehmen, kann man ihm 3 fl. Vermögen (dass er die Schuld damit selber zahle,) geben.

Aufgaben.

1. a) $+ 8 - (+ 3) = ?$ b) $+ 8 - (- 3) = ?$
2. a) $- 13 - (+ 15) = ?$ b) $- 13 + (- 15) = ?$
3. a) $+ 5$ b) $- 15$ c) $+ 23$ d) $- 45$
   $\underline{- 12}$ $\underline{+ 8}$ $\underline{+ 32}$ $\underline{- 60}$

4. a) $+ 210 - (+ 98) = ?$ b) $- 317 - (509) = ?$
5. a) $-5786 - (+2214) = ?$ b) $+1234 - (+945) = ?$
6. a) $+19{\cdot}35 - (+10{\cdot}65) = ?$ b) $-9{\cdot}053 - (-27{\cdot}64) = ?$
7. a) $+35\frac{2}{5} - (+24\frac{1}{2}) = ?$ b) $-71\frac{3}{8} - (+80\frac{3}{5}) = ?$
8. a) $30 - (15 - 18) = ?$ b) $- 12 - (20 - 4) = ?$
9. $- 378 - (- 249) - (+ 518) = ?$
10. $+ 7552 - (- 5864) + (- 9046) = ?$
11. $+ 987 + [- 368 - (- 245)] = ?$
12. $- 37{\cdot}68 - [+ 24{\cdot}02 - (+ 10{\cdot}08)] = ?$
13. $+95358 - [-13561 + \{+58912 - (-3796)\}] = ?$
14. $\frac{1}{2} - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - [(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{4})] = ?$
15. Das Festland Europas liegt zwischen 36° und 71° nördlicher Breite, zwischen 12° westlicher und 63° östlicher Länge (von Paris aus); wie viele Grade dehnt sich dasselbe a) in die Breite, b) in die Länge aus?

Das Multiplicieren algebraischer Zahlen.

§. 105. Bei der Multiplication absoluter Zahlen setzt man den Multiplicand so oft als Summand, wie der Multiplicator anzeigt.

Algebraische Zahlen multiplicieren, heißt nun, wenn der Multiplicator positiv ist, den Multiplicand selbst mit unverändertem Vorzeichen, wenn aber der Multiplicator negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplicands, d. i. den Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen, so oft als Summand setzen, wie der Zahlwert des Multiplicators anzeigt. Hiernach ist

$$+ 4. + 3 = + 4 + (+ 4) + (+ 4) = + 12,$$
$$+ 4. - 3 = - 4 + (- 4) + (- 4) = - 12,$$
$$- 4. + 3 = - 4 + (- 4) + (- 4) = - 12,$$
$$- 4. - 3 = + 4 + (+ 4) + (+ 4) = + 12.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach mit einander multipliciert, indem man das Product aus ihren absoluten Werten positiv oder negativ nimmt, je nachdem beide Factoren gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Man drückt diesen Satz auch so aus:

Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleichbezeichnete Factoren ein negatives Product.

Wer 4 Schritte nach vorwärts 3mal macht, kommt 12 Schritte nach vorwärts; wer 4 Schritte nach rückwärts 3mal macht, legt 12 Schritte nach rückwärts

zurück. Jemandem 4 fl. Gewinn 3mal hinwegnehmen (ihn darum verkürzen), ist so viel, als ihm einen Verlust von 12 fl. zuziehen. Jemandem 4 fl. Verlust 3mal hinwegnehmen (ersparen), ist so viel, als ihm einen Gewinn von 12 fl. zumitteln.

Für drei oder mehrere Factoren ergibt sich aus dem vorhergehenden Satze:

1. Sind alle Factoren positiv, so ist auch das Product positiv.

2. Sind alle oder auch nur einige Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die negativen Factoren in gerader oder ungerader Anzahl vorkommen.

Aufgaben.

1. a) $+ 9. + 5 = ?$ b) $+ 9. - 5 = ?$
2. a) $- 15. + 3 = ?$ b) $- 15. - 3 = ?$
3. a) $- 118 . + 63 = ?$ b) $+ 307 . - 41 = ?$
4. a) $- 52{\cdot}28 . - 7{\cdot}49 = ?$ b) $- 1328 . + 299 = ?$
5. a) $+ \frac{5}{8} . - \frac{3}{10} = ?$ b) $- \frac{3}{5} . - \frac{1}{4} = ?$
6. a) $- 3\frac{3}{4} . + 5\frac{3}{5} = ?$ b) $+ 12\frac{1}{2} . - 7\frac{1}{5} = ?$
7. $- 19 . - 27 . + 31 = ?$
8. $+ 83 . - 25 . + 49 = ?$
9. $+ 83 . - 11 . - 70 . + 72 . - 91 = ?$
10. $- 72{\cdot}8 . - 125 . - 991 . - 4{\cdot}17 = ?$
11. $+ 2{\cdot}34 . - 3{\cdot}45 . - 14{\cdot}4 . + 12{\cdot}5 = ?$
12. $- 35 . - 63 . + 14 . - 84 . - 49 = ?$
13. $[- 345 + (+ 209)] . [- 596 - (- 374)] = ?$
14. $[+ 2315 - (+ 788)] . [- 749 - (+ 385)] . [+ 569 + (- 219)] = ?$

15. Von zwei Körpern, welche sich gleichzeitig von demselben Puncte aus a) in derselben Richtung, b) in entgegengesetzten Richtungen bewegen, legt der eine in einer Minute 783^m, der andere 828^m zurück; wie weit werden beide nach 15 Minuten von einander entfernt sein?

Das Dividieren algebraischer Zahlen.

§. 106. Der Quotient muß so beschaffen sein, dass er mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt.

Ist nun $+ 12$ durch $+ 3$ zu dividieren, so ist der Quotient der Zahlwerte 4, und zwar muß derselbe positiv sein, weil nur eine

positive Zahl + 4 mit einer positiven + 3 multipliciert ein positives Product + 12 geben kann; also

$$+ 12 : + 3 = + 4.$$

Es sei ferner + 12 durch − 3 zu dividieren. Hier soll der Quotient mit − 3 multipliciert + 12 geben, welcher Forderung nur − 4 entspricht; folglich

$$+ 12 : - 3 = - 4.$$

Eben so erhält man

$$- 12 : + 3 = - 4.$$
$$- 12 : - 3 = + 4.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach durch einander dividiert, indem man den Quotienten ihrer absoluten Werte positiv oder negativ nimmt, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Aufgaben.

1. a) $+ 72 : + 9 = ?$ b) $+ 72 : - 9 = ?$
2. a) $- 144 : + 6 = ?$ b) $- 144 : - 6 = ?$
3. a) $+ 2185 : - 5 = ?$ b) $- 3840 : - 30 = ?$
4. a) $- 73{\cdot}242 : + 13 = ?$ b) $+ 10416 : - 48 = ?$
5. a) $+ \frac{3}{5} : - 6 = ?$ b) $- \frac{5}{8} : + \frac{3}{4} = ?$
6. a) $- 10 : + 3\frac{1}{2} = ?$ b) $- 2\frac{1}{2} : - 2\frac{1}{7} = ?$
7. $+ 5070736 : - 752 = ?$
8. $- 56035 : + 52 = ?$
9. $- 56035 \,.\, + 4923 : - 34461 = ?$
10. $[+ 74608 - (- 14816] : [- 278 - (- 422)] = ?$
11. $(32 - 7.4 - 8) : 4 = ?$ 18. $(32 - 7) \,.\, (4 - 8) : 4 = ?$
12. $(32 - (7.4 - 8)] : 4 = ?$ 16. $32 - [(7.4 - 8) : 4] = ?$
13. $[32 - 7. (4 - 8)] : 4 = ?$ 17. $32 - 7 \,.\, [(4 - 8) : 4] = ?$
14. Das Thermometer zeigte an einem Tage Morgens − 9° R., Mittags + 2° R., Abends − 5° R.; wie groß war die mittlere Tagestemperatur?

II. Allgemeine Zahlen.

§. 107. Jede durch Ziffern ausgedrückte Zahl kann nur eine bestimmte Menge von Einheiten vorstellen. Mann nennt eine solche Zahl eine besondere Zahl, im Gegensatze zu einer allgemeinen Zahl, welche irgend eine beliebige Menge von Einheiten vorstellen kann.

Die allgemeinen Zahlen werden durch Buchstaben bezeichnet. So bedeutet a irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl.

Die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen heißt die allgemeine Arithmetik, zum Unterschiede von der besonderen Arithmetik, welche nur die besonderen Zahlen in Betrachtung zieht.

§. 108. Die Operationszeichen für allgemeine Zahlen sind dieselben, wie für besondere Zahlen.

Sind zwei oder mehrere allgemeine Zahlen mit einander zu multiplicieren, so wird das Multiplicationszeichen × oder . gewöhnlich weggelassen; z. B.

statt a × b oder a . b schreibt man ab
„ a × b × c „ a . b . c „ „ abc.

Das 2fache, 3fache, 4fache, . . einer allgemeinen Zahl a wird durch 2a, 3a, 4a, . . ausgedrückt. Die vor einem Buchstabenausdruck stehenden besonderen Zahlen heißen Coefficienten.

Der Coefficient einer allgemeinen Zahl kann immer als Factor derselben betrachtet werden; denn

$$2a = a \times 2 = a + a,$$
$$3a = a \times 3 = a + a + a,$$
$$4a = a \times 4 = a + a + a + a.$$

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet daher a soviel als 1a.

Wenn mehrere gleiche Zahlen als Factoren gesetzt werden sollen, so schreibt man zur Abkürzung einen solchen Factor nur einmal, und fügt demselben rechts oben die Zahl an, welche angibt, wie oft dieser Factor vorkommt. Z. B.

statt aa schreibt man a^2,
„ 4.4.4 „ „ 4^3,
„ xxxx „ „ x^4.

Ein Product aus mehreren gleichen Factoren nennt man eine Potenz; die Zahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, und der Factor, der so oft steht, als der Exponent anzeigt, die Wurzel. So ist a^4 eine Potenz, 4 ist der Exponent und a die Wurzel. Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben und ist daher a so viel a^1.

Die Begriffe Coefficient und Exponent dürfen mit einander nicht verwechselt werden; es ist

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind, da z. B. für $a = 2$

$$4a = 2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$
$$a^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

ist.

Die zweite Potenz einer Zahl wird gewöhnlich auch das Quadrat, die dritte Potenz der Cubus genannt.

§. 109. Ausdrücke, in denen dieselben Buchstaben und diese auch in gleicher Anzahl vorkommen, heißen gleichnamig; die Zeichen und Coefficienten können darin auch verschieden sein. Ausdrücke, in denen entweder verschiedene Buchstaben, oder gleiche Buchstaben, aber in ungleicher Anzahl vorkommen, heißen ungleichnamig; die Zeichen und Coefficienten können darin auch gleich sein. Z. B. 2a und 3a, ebenso — $4a^2x$ und a^2x sind gleichnamig, 2a und 3b, ebenso — 5ax und — $5ax^2$ sind ungleichnamige Ausdrücke.

Zwei oder mehrere gleichnamige Ausdrücke können reduciert, d. i. in einen einzigen Ausdruck zusammengezogen werden.

Es ist zunächst

$$+ a - a = + a - (+ a) = 0,$$
$$+ 3a - 3a = + 3a - (+ 3a) = 0;$$

d. h. zwei gleiche Ausdrücke mit entgegengesetzten Vorzeichen heben sich auf (geben 0 zur Summe).

Ferner ist

$$+ 5a + 3a = + a + a + a + a + a + a + a + a = + 8a,$$
$$- 5a - 3a = - a - a - a - a - a - a - a - a = - 8a;$$

d. h. zwei gleichnamige Ausdrücke, welche dasselbe Vorzeichen haben, werden reduciert, indem man die Summe der Coefficienten mit dem gemeinschaftlichen Vorzeichen vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.

Endlich ist

$$+ 5a - 3a = + a + a + a + a + a - a - a - a = + a + a = + 2a,$$
$$- 5a + 3a = - a - a - a - a - a + a + a + a = - a - a = - 2a;$$

d. h. zwei gleichnamige Ausdrücke, welche verschiedene Vorzeichen haben, werden reduciert, indem man die Differenz des Coefficienten mit dem Vorzeichen des größeren vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.

Sind mehr als zwei gleichnamige Ausdrücke zu reducieren, so reduciert man zuerst die positiven, dann die negativen, und endlich die dadurch erhaltenen Ausdrücke. Z. B.

$$+ 7x + 2x + 6x = + 9x + 6x = + 15x.$$
$$- 3a - 8a - 5a = - 11a - 5a = - 16a.$$
$$+ 3bx - 2bx + 6bx - 3bx = + 9bx - 5bx = + 4bx.$$

Aufgaben.

1. a) $6a + 7a = ?$ b) $8x - 2x = ?$
2. a) $3ax + 8ax + ax = ?$ b) $3by + 7by - 5by = ?$
3. a) $9a^2 - a^2 + 4a^2 = ?$ b) $6x - 5x + 2x - 7x = ?$
4. $6m + 9m - 12m - 15m + 18m = ?$
5. $\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x - \frac{2}{3}x + x - \frac{1}{6}x = ?$
6. $12m^2 - 9m^2 - 17m^2 + 3m^2 = ?$
7. $5a - 6b + 3a - 7b - 2a + 10b = ?$
8. $7ax - 3by - 7by - 5ax + 11by + ax = ?$

§. 110. Ein Zahlenausdruck, welcher durch ein Zeichen, einen Coefficienten und einen Buchstaben oder auch mehrere ohne Zeichen mit einander verbundene Buchstaben dargestellt ist, heißt ein eingliedriger algebraischer Ausdruck oder ein Monom; z. B. a, 3b, $-4ac$, $5a^2bx^3$.

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch das Zeichen + oder − verbundene eingliedrige Ausdrücke enthält, heißt ein mehrgliedriger algebraischer Ausdruck oder ein Polynom. Die einzelnen durch das Zeichen + oder − verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Glieder. Kommen in einem Ausdrucke zwei Glieder vor, so heißt er insbesondere ein Binom; kommen darin drei Glieder vor, so heißt er ein Trinom. So ist z. B. $2x - 3y$ ein Binom, $a^2 - ax + x^2$ ein Trinom, und beide Ausdrücke sind mehrgliedrig.

Mehrgliedrige Ausdrücke werden, wenn damit Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, in Klammern eingeschlossen.

Wenn in einem Polynom mehrere Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten der gemeinschaftlichen Wurzel zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz beginnt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Wurzel enthält und dann zu immer höheren Potenzen hinaufsteigt. Im ersten Falle heißt das Polynom fallend, im zweiten steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

Das Addieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

§. 111. Bei allgemeinen Zahlen kann die Addition nicht, wie bei besonderen Zahlen, wirklich verrichtet werden; man kann die Summe nur anzeigen, indem man die Glieder der Summanden mit ungeänderten Zeichen neben einander setzt.

Allgemeine Zahlenausdrücke werden also addiert, indem man die Glieder der Summanden mit unveränderten Zeichen neben einander setzt, und wenn darunter gleichnamige Zahlen vorkommen, diese reduciert.

Aus diesem Satze folgt auch:

Steht vor einer Klammer das Zeichen +, so bleiben bei Weglassung der Klammern die Zeichen innerhalb derselben unverändert; z. B.

$$a - b + c + (p - q + r) = a - b + c + p - q + r.$$

Aufgaben.

Addiere folgende Zahlen:

1. a) 2a, 3b; b) 3a, 5b; c) $-7mx$, $8ny$.
2. a) $7a$, $-2b-3c$; b) $-5x^2$, $9y^2$, $-7z^2$.
3. a) $5a$ b) $3b$ c) $-4y$
   $2a$ $-b$ $-5y$
4. a) $a-4$ b) -3 c) $-2a^2$
   6 $4-x$ $1+5a^2$

5. a) $9x - 5a$
$6x - 3a$

b) $3a + 2b - 4c$
$2a - 6b + c$

6. a) $a^2 + ab$
$- ab - b^2$

b) $x^2 + 2xy + y^2$
$x^2 - 2xy + y^2$

7. a) $0{\cdot}4m - 0{\cdot}6n$
$-2m + 3{\cdot}1n$

b) $6{\cdot}54x^2 + 5{\cdot}43y^2$
$4{\cdot}32x^2 - 3{\cdot}21y^2$

8. a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

b) $a^2 - \frac{8}{5}ab + \frac{3}{2}b^2$
$a^2 + \frac{4}{3}ab - \frac{6}{5}b^2$

9. a) $3x - 2y + z$
$-x + 3y + 2z$
$2x - y + 3z$

b) $13x + 7y - 3z$
$-4x + 3y + 4z$
$8x - 10y - z$

10. a) $7m^2 - 13n^2 + 2p^2$
$8m^2 - n^2 - 5p^2$
$m^2 - 6n^2 - p^2$

b) $4a^2x - 3b^2y + 2c^2z$
$2a^2x + 7b^2y - 4c^2z$
$-9a^2x + 8b^2y + 5c^2z$

11. $0{\cdot}01a - 2{\cdot}508b - 3{\cdot}171c + 5{\cdot}443d$
$0{\cdot}092a + 3{\cdot}174b - 3{\cdot}28\ c - 6{\cdot}2\ d$
$0{\cdot}135a - 1{\cdot}895b + 4{\cdot}016c + 6{\cdot}57\ d$
$-\ 0{\cdot}06a + 0{\cdot}96b - 4{\cdot}188c + 6{\cdot}915d$

12. $\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$
$\frac{3}{4}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{8}$
$-\frac{9}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{3}$

13. $4x + 3y + (5x - 2y) + (4y - 3x) = ?$
14. $28x + 13y + 20z + (5x - 8y) + (9y - 12z) = ?$
15. $9a + (13a - 4b) + (8a - 7b) + (15b - 11a) = ?$
16. $\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + (\frac{5}{8}a - \frac{5}{6}b) + (\frac{8}{9}b - \frac{1}{2}a) = ?$
17. $2a + 3b + [5a - 2b + \{6b - 12a + (6a - 8b)\}] = ?$
18. $3y^2 - 5y + 1 + [4y^2 + 12y - 6 + (y^2 - 3y + 4)] = ?$

Das Subtrahieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

§. 112. Allgemeine Zahlenausdrücke werden subtrahiert, indem man zu dem Minuend den mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Subtrahend addiert, und wenn gleichnamige Ausdrücke vorkommen, diese reduciert.

Für einen eingliedrigen Subtrahend folgt die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar aus §. 104.

Für einen mehrgliedrigen Ausdruck kann man sich davon auf folgende Art überzeugen:

Es sei $a - b$ der Minuend und $p - q + r$ der Subtrahend. Den Minuend kann man auch so darstellen:

$$a - b + p - p + q - q + r - r.$$

Nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend den Subtrahend $+ p - q + r$ hinweg, so bleibt $a - b - p + q - r$ als Rest; mithin

$$a - b - (p - q + r) = a - b - p + q - r.$$

Daraus folgt auch:

Steht vor einer Klammer das Zeichen $-$, so müßen bei Weglassung der Klammern die Zeichen innerhalb derselben in die entgegengesetzten verändert werden.

Aufgaben.

Subtrahiere folgende Zahlen:

1. a) $5a$ / $3b$ — b) $7x$ / $-2b$ — c) $8a$ / $3a$ — d) $8a$ / $-3a$

2. a) $-a$ / $-2a$ — b) $-5x$ / $5x$ — c) $15a^2$ / $-3a^2$ — d) $-a^2x^2$ / $-9a^2x^2$

3. a) $n-1$ / 1 — b) -1 / $2-3x$ — c) $3y$ / $-2y+4$

4. a) $5x - 7a$ / $2y + 4b$ — b) $8m - 5n$ / $3m - 2n$

5. a) $13a + 10b + 7c$ / $8a + 9b + 10c$ — b) $-3x - 4y + 5z$ / $-4x + 2y - 6z$

6. a) $a^2 + 5ab - 6b^2$ / $a^2 - ab$ — b) $x^2 + 2xy + y^2$ / $x^2 - 2xy + y^2$

7. a) $3{\cdot}14x - 5{\cdot}08y$ / $2{\cdot}37x - 4{\cdot}63y$ — b) $35{\cdot}2a + 17{\cdot}3b - 23{\cdot}8c$ / $-6{\cdot}4a + 8{\cdot}5b + 11{\cdot}2c$

8. a) $\frac{5}{12}a + \frac{7}{8}b$ / $-\frac{4}{9}a + \frac{1}{6}b$ — b) $\frac{3x}{4} - \frac{4y}{5} - \frac{5z}{6}$ / $\frac{2x}{3} + \frac{7y}{10} - \frac{z}{2}$

9. $37by^3 - (-18by^3) - (+13by^3) = ?$
10. $-5{\cdot}36x^2 - (+2{\cdot}08x^2) - (-1{\cdot}37x^2) - (-6{\cdot}07x^2) = ?$
11. $3a^2x + 5ax^2 - (-5a^2x + 3ax^2) = ?$
12. $5 - 4a + 3a^2 - 2a^3 - (1 - 2a + 3a^2 - 4a^3) = ?$
13. $9x - 7y - (5x + y) + (8y - x) = ?$
14. $50xyz - [25xyz + (-10xyz)] = ?$
15. $m^2 - [m^2 - (2m - 3) + m - 1] = ?$
16. $17ax + 8by - [3ax - 5by - (2ax - 3by)] = ?$
17. $a - [b - \{a - [(a - b) - a] + b\} - b] = ?$
18. $2x - y - [2x - \{2x - 3y - (2x + 3y)\}] = ?$
19. $9a - 5b - [7a - 4b - \{3a + 10b - (4b - 7a)\}] = ?$
20. $3x^2 + 5y - [(7x^2 - 3y) - (5x^2 - 7y)] + (x^2 - y) = ?$

Das Multiplicieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

§. 113. 1. Es seien die eingliedrigen Ausdrücke $4a$ und $-3b$ mit einander zu multiplicieren. Da die Coefficienten als Factoren der allgemeinen Zahlen betrachtet, und die Factoren in der beliebigen Ordnung mit einander multipliciert werden können, so ist

$$4a \,.\, -3b = 4 \,.\, -3 \,.\, a \,.\, b = -12 \,.\, ab = -12ab.$$

Eingliedrige algebraische Ausdrücke werden daher mit einander multipliciert, indem man das Product der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 105) dem Producte der allgemeinen Zahlen vorausetzt.

Kommen in den Factoren Potenzen derselben Wurzel vor, so läßt die Rechnung eine bedeutende Vereinfachung zu. Es ist

$$a \,.\, a^2 = a \,.\, aa = aaa = a^3,$$
$$a^5 \,.\, a^2 = aaaaa \,.\, aa = aaaaaaa = a^7.$$

Potenzen derselben Wurzel werden also multipliciert, indem man der gemeinschaftlichen Wurzel die Summe der Exponenten der Factoren zum Potenzexponenten gibt.

2. Ist ein mehrgliedriger Ausdruck $a + b$ mit einem eingliedrigen m zu multiplicieren, d. i. $a + b$ mmal als Summand zu setzen, so hat man

$$(a + b) \,.\, m = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \,.\, .\, \text{mmal}$$
$$= a + a + a + \,.\, .\, \text{mmal} + b + b + b + \,.\, .\, \text{mmal}$$
$$= am + bm,$$

also

$$(a + b) \,.\, m = am + bm;$$

d. h. ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem eingliedrigen multipliciert, indem man jedes Glied des ersteren mit dem eingliedrigen Factor multipliciert und die Theilproducte addiert.

Da das Product nicht geändert wird, wenn man die Factoren vertauscht, so ist auch

$$m \cdot (a + b) = am + bm.$$

3. Sollen zwei mehrgliedrige Factoren $a + b + c$ und $p + q + r$ multipliciert werden, so hat man, wenn der Multiplicand $a + b + c$ vorläufig durch m bezeichnet wird,

$$m \cdot (p + q + r) = m \cdot p + m \cdot q + m \cdot r;$$

folglich, wenn man statt m wieder seinen Wert setzt,

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (p + q + r) = {} & (a + b + c) \cdot p \\ & + (a + b + c) \cdot q \\ & + (a + b + c) \cdot r;\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (p + q + r) = {} & ap + bp + cp \\ & + aq + bq + cq \\ & + ar + br + cr;\end{aligned}$$

d. h. zwei mehrgliedrige Ausdrücke werden mit einander multipliciert, indem man jedes Glied des Multiplicands mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die Theilproducte addiert.

Man pflegt die mehrgliedrigen Factoren unter einander zu stellen, wie auch die Theilproducte so zu schreiben, dass die etwa vorkommenden gleichnamigen Ausdrücke gerade unter einander zu stehen kommen.

4. Wichtig sind folgende Ergebnisse der Multiplication:

a)
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$
also $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

d. h. die Summe zweier Zahlen multipliciert mit deren Differenz gibt die Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

b)
$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$
also
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Ebenso erhält man

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat eines Binoms besteht also aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

c) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Ebenso ist

$$(a - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Der Cubus eines Binoms besteht also aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten, dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten, und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Aufgaben.

1. a) $5a \cdot 4 = ?$ b) $3x \cdot -1 = ?$
2. a) $7x \cdot 3y = ?$ b) $9ab \cdot 5c = ?$
3. a) $-7a \cdot a = ?$ b) $5xy \cdot 8yz = ?$
4. a) $-2a^2 \cdot 7a^3 = ?$ b) $x^2y^4 \cdot x^3y = ?$
5. a) $8ax^2 \cdot -2a^2x = ?$ b) $3a^2 \cdot 4a^3 \cdot 5a^4 = ?$
6. $7a^2b^3 \cdot 4a^2c^3 \cdot -3bc = ?$
7. $5mx^2 \cdot -6nxy \cdot -7py^2 = ?$
8. $a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3 \cdot 4a^4 \cdot 5a^5 = ?$
9. a) $5{\cdot}2x^2 \cdot -3{\cdot}5x = ?$ b) $13{\cdot}6ax \cdot 9{\cdot}55by = ?$
10. a) $-\frac{2}{3}a^2 \cdot 1\frac{9}{10}b^2 = ?$ b) $\frac{3}{4}y^2 \cdot \frac{8}{9}y = ?$
11. a) $\frac{7x}{6y} \cdot -\frac{8x}{7z} = ?$ b) $2\frac{1}{2}a^2x \cdot -3\frac{3}{5}b^2x = ?$
12. $\frac{4bx}{x-a} \cdot \frac{2a^2}{5b^2} \cdot \frac{5(x-a)}{6ax} \cdot \frac{3b}{2a} = ?$
13. a) $(2a - 3b) \cdot 4c = ?$ b) $(3x^2 - 5x + 1) \cdot -1 = ?$
14. $(x^2 + y^2 - z^2) \cdot a^2xyz = ?$
15. $(8x^2 - 3xy + 5y^2) \cdot -2xy = ?$
16. $(ab^2c^3 - a^2b^3c - a^3bc^2) \cdot a^2b^2c^2 = ?$
17. $(1 - 5x + 6x^2 + 3x^3 - 2x^4) \cdot -5x^2 = ?$
18. a) $\left(\frac{a}{x^2} - b\right) \cdot x^2 = ?$ b) $\left(\frac{3x^2}{5} + \frac{5y^2}{6}\right) \cdot \frac{2x}{3} = ?$
19. $-3x \cdot (-2a + 2b - 4c) = ?$
20. $5y(6y^3 - 4y^2 - 8y + 1) - 6y^2(5y^2 - 4y + 6) = ?$

21. $(6a - 2b)\ (4a + 3b) = ?$
22. $(4ax + 8by)\ (2ax - 3by) = ?$
23. $(3a + 2b)\ (3a - 2b) = ?$
24. $(a^3 + b^3)\ (a^3 - b^3) = ?$
25. $(4x^2 - 3y^2)\ (4x^2 + 3y^2) = ?$
26. $(7a^3 + 9b^3)\ (7a^3 - 9b^3) = ?$
27. a) $(3a + 5)^2 = ?$ b) $(4x - 5y)^2 = ?$
28. a) $(2m^2 - 2n^2)^2 = ?$ b) $(7x^2 + 6yz)^2 = ?$
29. $(ax + by)^2 - (ax - by)^2 = ?$
30. a) $(9a + b)^3 = ?$ b) $(3x - 4y)^3 = ?$
31. a) $(5a - 3x^2)^3 = ?$ b) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = ?$
32. $(a^3 - 5a^2 + 6)\ (4a - 7) = ?$
33. $(9x^2 - 24x + 16)\ (3x - 4) = ?$
34. $(x^7 + x^5 + x^3 + x)\ (x^2 - 1) = ?$
35. $(2a^2x^2 - 4ax - 9)\ (7ax + 8) = ?$
36. $(x - y - z)\ (x + y - z) = ?$
37. $(4x + 7y - 5)\ (3x - 5y - 6) = ?$
38. $(3x^2 - 4x - 5)\ (2x^2 - 3x + 4) = ?$
39. $(1 - 2x + 3x^2)\ (2 - 2x + 4x^2) = ?$
40. $(5b^2 + 3by - y^2)\ (2b^2 - 4by + 5y^2) = ?$
41. $(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z)\ (\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{3}{4}x) = ?$
42. $\left(\frac{3x}{4a} - \frac{2}{5} - \frac{4a}{5x}\right)\ \left(\frac{5x}{2a} + \frac{5}{4} - \frac{4a}{3x}\right) = ?$
43. $(x + 3)\ (x - 3)\ (x^2 + 9) = ?$
44. $(x - 5)\ (x - 4)\ (x - 3) = ?$
45. $(3x - 5a)\ (6x - 7a)\ (7x + 4a) = ?$
46. $(7a^2x^2 - 4ax + 1)\ (3a^2x^2 + 3ax + 2)$
$(a^2x^2 - 2ax + 3) = ?$

Das Dividieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

§. 114. 1. Es ist

$ab \cdot c = abc$, daher $abc : c = ab$;
$3bx \cdot -2a = -6abx$, „ $-6abx : -2a = 3bx$;
$-7m \cdot -3np = 21mnp$, „ $21mnp : -3np = -7m$.

Einzelne algebraische Ausdrücke werden daher durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 106) dem Quotienten der allgemeinen Zahlen voraussetzt. Man erhält aber den Quotienten der allgemeinen Zahlen, wenn man im Dividende diejenigen Buch-

staben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl wegläßt.

Kommen im Divisor Buchstaben vor, welche der Dividend nicht enthält, so kann man die Division durch diese Buchstaben nur anzeigen, indem man sie in den Nenner des Quotienten setzt; z. B.

$$abx : by = \frac{abx}{by} = \frac{ax}{y}.$$

Einfach gestaltet sich die Division allgemeiner Zahlen, wenn sie Potenzen derselben Wurzel sind. Man hat

$$a^3 : a = aaa : a = aa = a^2,$$
$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = aaaa = a^4.$$

Potenzen derselben Wurzel werden also dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahiert, und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Wurzel zum Potenzexponenten gibt.

Dieser Satz hat vorerst nur Sinn und Giltigkeit, wenn der Potenzexponent des Dividends größer ist als jener des Divisors. Sind beide Exponenten gleich, so würde man nach diesem Satze eine Potenz mit dem Exponenten Null erhalten; ist der Exponent des Dividends kleiner als der Divisor, so käme bei Anwendung des obigen Satzes eine Potenz mit negativem Exponenten zum Vorschein. Es muß daher zunächst noch die Bedeutung solcher Potenzen festgestellt werden.

Nach dem obigen Satze ist

$$a^3 : a^3 = a^0;$$

es ist aber auch

$$a^3 : a^3 = aaa : aaa = 1;$$

folglich

$$a^0 = 1$$

d. h. eine Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich 1.

Nach dem obigen Satze hat man ferner

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3};$$

es ist aber auch

$$a^2 : a^5 = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3};$$

folglich

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3};$$

d. h. eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich 1 dividiert durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes einer Potenz hat nun der oben für die Division zweier Potenzen derselben Wurzel aufgestellte Satz allgemeine Giltigkeit.

2. Es ist

$$(a + b + c) \cdot m = am + bm + cm,$$

folglich umgekehrt

$$(am + bm + cm) : m = a + b + c.$$

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird also durch einen eingliedrigen dividiert, indem man jedes Glied desselben durch den eingliedrigen Divisor dividiert.

Wenn der Dividend eingliedrig und der Divisor mehrgliedrig ist, so kann man den Quotienten nur anzeigen; z. B.

$$a : (m + n) = \frac{a}{m + n}.$$

3. Wenn man $a + b + c$ mit $p + q + r$ multipliciert, so erhält man

Multiplicand	$a + b + c$	Divisor
Multiplicator	$p + q + r$	Quotient
Product	$\left\{\begin{array}{l} ap + bp + cp \\ + aq + bq + cq \\ + ar + br + cr \end{array}\right\}$	Dividend

Wird hier das Product als Dividend und der Multiplicand als Divisor angenommen, so muß der Multiplicator als Quotient herauskommen. Aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder des Divisors und des Quotienten in ihrem Producte, dem Dividende, zusammengestellt erscheinen, ergibt sich nun für die Division zweier mehrgliedriger Ausdrücke folgendes Verfahren:

1) Man dividiere das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors, so erhält man das erste Glied des Quotienten. Mit diesem multipliciere man den vollständigen Divisor und subtrahiere das Product vom Dividende.

2) Man dividiere das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors, wodurch man das zweite Glied des Quotienten erhält, und wiederhole das vorhergehende Verfahren, bis alle Glieder des Dividends in Anspruch genommen wurden.

Sind der Dividend und der Divisor Polynome, welche Potenzen derselben Wurzel enthalten, so müßen sie vor der Division übereinstimmend geordnet werden.

4. Es iſt

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b,$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - \quad - \\ \hline - ab - b^2 \\ - ab - b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

Eben ſo erhält man

$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b;$$

d. h. die Differenz zweier Quadrate durch die Summe der Wurzeln dividiert, gibt die Differenz der Wurzeln; die Differenz zweier Quadrate durch die Differenz der Wurzeln dividiert, gibt die Summe der Wurzeln.

Aufgaben.

1. a) $10a : 5 = ?$ b) $4a : a = ?$
2. a) $-6ab : 6a = ?$ b) $-24mx : -4m = ?$
3. a) $36xy : -6y = ?$ b) $15abc : 20bc = ?$
4. a) $4ax : 2by = ?$ b) $-amx : 3my = ?$
5. a) $3a^3 : -a = ?$ b) $8a^3 : 4a^2 = ?$
6. a) $16x^4y^4 : 8x^3y^3 = ?$ b) $-7a^2m^5 : 4a^2m = ?$
7. a) $54ab^2x^3 : -bx^2 = ?$ b) $a^2b^3x^4 \quad 8ab^2x^5 = ?$
8. a) $-3{\cdot}2ab : 0{\cdot}5a = ?$ b) $0{\cdot}4x^2yz : 0{\cdot}015xz = ?$
9. a) $\frac{12ax}{5y} : 3a = ?$ b) $2ab : \frac{4ax}{5y} = ?$
10. a) $\frac{2}{3}xy : \frac{5}{6}ay = ?$ b) $\frac{ay}{b} : -\frac{a}{my} = ?$
11. a) $-\frac{2mn}{7pq} : \frac{8nx}{21qy} = ?$ b) $\frac{8a^6xy^3}{3bc^4z^5} : \frac{4a^5x^3y}{5b^3c^2z^4} = ?$
12. $(20ac + 12bc) : 4c = ?$
13. $(15a^2 - 25ab) : -5a = ?$
14. $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2 = ?$
15. $(12x^3 - 24x^2y + 30xy^2) : 6x = ?$
16. $(5a^3 - 35a^4 - 15a^5 + 10a^6) : -5a^3 = ?$
17. $(16x^3y^3 - 12x^2y^2 + 8xy + 4) : 4x^2y^2 = ?$
18. $(7xy - 14xz + \frac{7}{2}yz) : \frac{7}{3}xy = ?$

19. $(15a^2 + 19ab - 10b^2) : (5a - 2b) = 3a + 5b$

$15a^2 - 6ab$

$- \quad +$

$+ 25ab - 10b^2$

$+ 25ab - 10b^2$

$- \quad +$

0

20. $(35x^2 - 27xy - 18y^2) : (5x - 6y) = ?$
21. $(4a^2 - 28ay + 49y^2) : (2a - 7y) = ?$
22. $(64y^2 - 25) : (8y + 5) = ?$
23. $(9x^2 - 49) : (3x + 7) = ?$
24. $(4x^3 - 16x^2 + 7x + 20) : (2x - 5) = ?$
25. $(15x^2 + 4x^2y - 29xy^2 + 10y^3) : (3x + 5y) = ?$
26. $(x^8 - 1) : (x^2 + 1) = ?$
27. $(a^7 - 1) : (a - 1) = ?$
28. $(48x^2 - 12y^2 - 111x + 5y + 72) : (8x - 4y - 9) = ?$
29. $(12a^2 + 26ab - 10b^2 - 36ac + 29bc - 21c^2)$
$: (2a + 5b - 7c) = ?$
30. $(15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4)$
$: (3 + 4x - 5x^2) = ?$
31. $(3a^4 - 11a^3 + 29a^2 - 27a + 30)$
$: (3a^2 - 2a + 5) = ?$
32. $(12 + y - 18y^2 - 73y^3 + 36y^5)$
$: (4 - 5x - 6x^2) = ?$
33. $(12a^4 - 37a^2 + 29a^2 + 13a - 20)$
$: (3a^2 - 7a + 5) = ?$
34. $(18x^6 - 47x^4 - 10x^3 + 55x^2 + 42x - 49)$
$: (6x^2 + 4x - 7) = ?$
35. $(8m^6 + 27) : (4m^4 - 6m^2 + 9) = ?$
36. $(a^6 - 9a^4x^2 + 27a^2x^4 - 27x^6)$
$: (a^4 - 6a^2x^2 + 9x^4) = ?$
37. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2z^2 + 10xy^3 + 8y^3)$
$: (5x^2 + 6xy - 8y^2) = ?$
38. $(x^6 - y^6) : (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3) = ?$
39. $(a^6 - 16a^3b^3 + 64b^6)$
$: (a^4 + 4a^3b + 12a^2b^2 + 16ab^3 + 16b^4) = ?$
40. $(\frac{1}{5} - 14a^2 + 45a^4) : (\frac{1}{5} + 2a + 3a^2) = ?$

41. $(\frac{2}{9}\frac{5}{6}x^4 + x^2y^2 + 6y^4) : (\frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{2}xy + 3y^2) = ?$

42. $(a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{5}{2}b^2 - \frac{2}{4}\frac{3}{}ac + \frac{8}{8}\frac{1}{}bc - \frac{1}{2}c^2)$
$: (3a - 5b + \frac{1}{4}c) = ?$

Das Subſtituieren.

§. 115. In einem Zahlenausdrucke an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchſtaben) beſondere Zahlwerte ſetzen, und mit dieſen die vorgeſchriebenen Rechnungen ausführen, heißt ſubſtituieren.

Z. B. Iſt der Ausdruck $y = ax^2 + 2bx$ für $a = 2$, $b = 1$ und $x = 4$ zu berechnen, ſo hat man

$$y = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 32 + 8 = 40.$$

Aufgaben.

Beſtimme die Zahlwerte folgender Ausdrücke für die beigefügten Subſtitutionen.

1. $A = a + 2b - 3c$ für $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.
2. $B = 2m - 3n + 4p$ für $m = 8$, $n = -3$, $p = -1$.
3. $C = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ für $x = 5$.
4. $D = 3ab - 5ac + 3bc$ für $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.
5. $E = 6x^3 - 15x^2 + 48x - 10$ für $x = 3$.
6. $F = 72x^2 - 17xy - 72y^2$ für $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{2}{3}$.
7. $G = \dfrac{ab}{a+b}$ für $a = 450$, $b = 23{\cdot}84$.
8. $H = \dfrac{MC+mc}{M+m}$ für $M = 80$, $m = 20$, $C = 5$, $c = 8$.
9. $K = ax^3 - bx^2 + cx - d$ für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $x = 2$,
10. $L = m^4 - 4m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + n^4$ für $m = 3$, $n = -2$.
11. $M = (3x + 5y - 6z)(7x - 2y + 3z)$ für $x = 4$ $y = 5$, $z = 6$.
12. $N = \dfrac{a^3b^3 - 3a^2b^2c + 3abc^2 - c^3}{ab - c}$ für $a = 9$, $b = 7$, $c = 5$.

Wiederholungsaufgaben.

1.* Wie viel kosten 9, 15, 20, 31 Meter à a) 40 kr., b) 52 kr., c) 1 fl. 24 kr., d) 3 fl. 96 kr.?

2.* Für 36 Kilogr. bezahlt man 23 fl. 4 kr.; wie theuer sind demnach 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2 Kilogr.?

3.* Wie viel beträgt

a) 2% von 290 fl.? b) 6% von 915 fl.?

c) $\frac{3}{4}$% von 760 fl.? d) $12\frac{1}{2}$% von 834 fl.?

4.* a) $(48 - 36) + 52 = ?$ b) $(57 - 18) + (14 - 24) = ?$

5.* a) $5 - (12 - 15) = ?$ b) $(17 + 39) - (43 - 73) = ?$

6.* $(7 - 21) - (9 - 7) - (19 - 5) - (28 - 38) = ?$

7.* $[11 - 2 - (5 - 3)] - [2 - (3 - 7) - (13 - 16)] = ?$

8. Eine Summe von 2952 fl. soll unter vier Personen so getheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{3}{10}$, C $\frac{7}{30}$ und D den Rest erhält; wie viel kommt auf jede Person?

9. In Oesterreich-Ungarn machen die Grundbesitzer 19·5% der Gesammtbevölkerung, welche 35944000 beträgt, aus; wie viel Grundbesitzer gibt es?

10. Eine Festung, welche 12000 Mann Besatzung hat, ist auf 10 Monate mit Lebensmitteln versehen; wenn nun 2000 Mann abziehen, wie lange werden jene Lebensmittel für die übriggebliebene Mannschaft ausreichen?

11. Eine Mühle mahlt auf 3 Gängen bei 126 Umdrehungen per Minute in 22 Stunden 24 Hektoliter Getreide; auf wie viel Gängen können bei 99 Umdrehungen per Minute in 42 Stunden 32 Hektol. geliefert werden?

12. Bestimme folgende Ausdrücke:

a) $6x \cdot 8$; b) $7a \cdot -5$; c) $-12a \cdot 6b$;

d) $15x \cdot \frac{2}{3}a$; e) $-\frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{5}y$; f) $2\frac{1}{2}ax \cdot 3\frac{3}{5}by$;

g) $(7x - 12) \cdot -3$; h) $(4x + 3y - 3) \cdot 5$.

13. a) $(2a - 3)^2 = ?$ b) $(20 + 7)^2 = ?$ c) $(380 + 4)^2 = ?$

14. a) $(3x + 2y)^3 = ?$ b) $(50 + 3)^3 = ?$ c) $(570 + 9)^3 = ?$

15. Die Achse unserer Erde beträgt 6356^{Km}, der Durchmesser des Aequators 6377^{Km}; wenn man nun bei einem Erdglobus die Erdachse 395^{mm} lang annimmt, wie groß muß dabei der Durchmesser des Aequators angenommen werden?

16. In einen Wasserbehälter, welcher 1^m 5^{dm} lang und 5^{dm} breit ist, wird ein Gefäß von 20 $\boxtimes^{dm}$ Inhalt 15mal geleert; wie hoch wird das Wasser in jenem Behälter stehen?

17.* Bestimme folgende Ausdrücke:

a) $15 - 8 \,.\, 3 + 6 : 3$; d) $15 - 8 \,.\, (3 + 6 : 3)$;
b) $(15 - 8) \,.\, 3 + 6 : 3$; e) $(15 - 8) \,.\, (3 + 6) : 3$;
c) $15 - 8 \,.\, (3 + 6) : 3$; f) $(15 - 8 \,.\, 3 + 6) : 3$.

18. Ein Capital gibt zu $4\frac{1}{2}\%$ in einer bestimmten Zeit $239\frac{2}{5}$ fl. Zinsen; wie viel Zinsen gibt es in derselben Zeit zu $5\frac{1}{2}\%$?

19. Ein Capital bringt in 3 Jahren 251 fl. 22 kr. Zinsen; wie viel in 10 Monaten?

20. Wenn 4080 fl. Capital $500\frac{13}{20}$ fl. Zinsen tragen; wie viel Zinsen trägt in derselben Zeit ein um 1425 fl. größeres Capital?

21. a) $6x + (2x + 2y) = ?$ b) $5a - (3a + 4b) = ?$

22. a) $12a - (5a - 4b) = ?$ b) $16x - 7y - (7x - 5y) = ?$

23. $20 - (5x - 7) + (3x + 2) - (x + 12) = ?$

24. $8a - 3b - [(4a - 3c) - (4b - 2c)] = ?$

25. 20 Weber weben in $4\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 5 Tagen, den Tag zu 10 Stunden, 150 Stück Tuch, deren jedes 45 Meter lang und 120^{cm} breit ist; wie viel Stück von 36 Meter Länge und 180^{cm} Breite werden 25 Weber in 12 Wochen weben, wenn sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 12 Stunden arbeiten?

26. Bestimme folgende Ausdrücke:

a) $36ab : 9$; b) $24ab : -6$; c) $-42bx : 7b$;
d) $\frac{3}{5}ax^2 : \frac{2}{5}x$; e) $\frac{4}{5}mn : \frac{4}{9}n$; f) $\frac{11}{22}a^2b : \frac{15}{32}ab$;
g) $(ax + ay - az) : a$; h) $(24x - 16y) : 8$.

27. Ein Acker von $5\frac{7}{25}$ Hektar wird für $7497\frac{3}{5}$ fl. gekauft; der Käufer tritt nun $1\frac{5}{16}$ Hektar zu dem verhältnismäßigen Preise an seinen Nachbar ab; wie viel hat dieser zu bezahlen?

28. Ein kreisrunder Hof, der 15^m 2^{dm} 3^{cm} im Durchmesser hat, soll gepflastert werden; wie hoch wird die Arbeit kommen, wenn für das $\square^m$ 2·75 fl. bezahlt wird?

29. A erhielt 5 Kisten einer Waare, von denen jede 82 Kilogr. Brutto wog, gegen 12% Tara, zu dem Einkaufspreise von $\frac{3}{5}$ fl. pr. Kilogr. Netto; wenn nun die Waare mit $11\frac{3}{4}\%$ Gewinn wieder verkauft wurde, wie groß war der ganze Gewinn?

30.* Eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft braucht zu einer gewissen Arbeit 4 Tage; wie viel eine andere von 16 Pferdekraft?

31.* Drei gleiche Capitalien sind nach einander abzutragen, das erste nach 2, das zweite nach 5, das dritte nach 6 Jahren; der Schuldner wünscht sie zugleich zu bezahlen; wann muß das geschehen?

32.* Ein Wucherer lieh einem Landmann 45 fl. und forderte als Zins jedes Vierteljahr $2\frac{1}{4}$ fl.; wie viel % nahm er?

33.* In welcher Zeit bringen 800 fl. zu $5\frac{1}{2}$% 110 fl. Zinsen?

34.* A und B theilen 522 fl. so unter sich, dass sich ihre Antheile wie $\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$ verhalten; wie viel erhält jeder?

35. Berechne die Zinsen folgender Capitalien:

a) 4007 fl. zu $4\frac{1}{2}$% vom 1. Juli bis 23. November;

b) 3025 fl. zu 7% vom 20. April bis 15. Juli;

c) 6140 fl. zu $5\frac{3}{4}$% vom 14. Oct. bis 31. December.

36. Eine Waare wird im Werte von 18700 fl. von Triest nach Smyrna gegen Seeschaden versichert; wie hoch sind die Assecuranzkosten, wenn die Prämie $1\frac{1}{2}$% und die Sensarie 1‰ (von der Prämie) beträgt?

37. a) $6x + (5a - 4b) = ?$ b) $15x - (9x + 2) = ?$

38. $(10x - 4) + (10y - 2x) - (2 - 3y) - (7x + y) = ?$

39. $(4\frac{1}{4}x - 8\frac{1}{2}y + 5\frac{2}{3}) - (2\frac{3}{8}x + 1\frac{1}{3}y - 1\frac{5}{6}) = ?$

40. $5a + 3b - [3a - (2b + 4c)] = ?$

41. $7x - 2y - [x - (3y - z) + (2x - 3z)] = ?$

42. $8a - 3b + (6 - 5b) - [5b - 7b - (3a - 6)] = ?$

43. Für eine Steuer sammt 4% Zuschuß wurden 468 fl. bezahlt; wie groß war der eigentliche Steuerbetrag?

44. Wie viel beträgt der in dem Verkaufspreise von 788 fl. enthaltene Gewinn à 6%?

45. Für eine mit 3% Verlust verkaufte Waare werden 520 fl. gelöst; wie groß ist a) der Verlust, b) der Einkaufspreis?

46. Welche Strecke wird eine Locomotive bei gleichförmiger Bewegung in 4 Stunden 24 Minuten durchlaufen, wenn sie in 2 Stunden 15 Minuten eine Strecke von $69^{Km}\ 274^{m}$ zurücklegt?

47. Wie viel Kupfer muß man zu 8 Kilogr. Silber von 720 Tausendtheilen dazuschmelzen, damit die Legierung 540 Tausendtheile Gehalt erhalte?

48. Drei Maurermeister erhalten für einen gemeinschaftlichen Bau 2700 fl., welche sie nach Verhältnis der Anzahl Arbeiter und der Zeit unter sich theilen; nun hat A 16 Arbeiter 40 Tage, B 20 Arbeiter 36 Tage und C 25 Arbeiter 32 Tage gestellt; wie viel erhält jeder Meister?

49. a) $(5ax - 2by) \cdot 3z = ?$ b) $(5x^2 - 3x + 3) \cdot -2x^2 = ?$

50. a) $(2a + x)(2a - x) = ?$ b) $(7a - 5)^2 = ?$

51. a) $(4x^2 + 3a^2)^2 = ?$ b) $(5x - 6a)^3 = ?$

52. $(3{\cdot}4x - 0{\cdot}5y)\ (2{\cdot}5x - 1{\cdot}2y) = ?$

53. $(12x^3 - 7x^2 + 4x - 1)\ (8x - 5) = ?$

54. $(5a^2x^2 - 4ax + 6)\ (3a^2x^2 + 4ax - 5) = ?$

55. $(\frac{2}{5}a^2 + \frac{5}{6}ab - \frac{3}{4}b^2)\ (\frac{5}{6}a^2 - \frac{3}{5}ab + \frac{2}{3}b^2) = ?$

56. $\left(\frac{8x}{9y} - \frac{2}{3} + \frac{3y}{4x}\right)\left(\frac{4x}{3y} + \frac{3}{2} - \frac{9y}{8x}\right) = ?$

57. Am 18. Mai wird ein Wechsel von 1355 fl., zahlbar ultimo Juni, à 5% discontiert; wie groß ist dessen Wert?

58. A bezog für einen nach 75 Tagen fälligen Wechsel bei 5% Discont 532 fl.; auf welche Summe lautete der Wechsel?

59. Ein Wirt will viererlei Weine, das Hektoliter zu 24 fl., zu 28 fl., zu 36 fl. und zu 48 fl., so mischen, dass er 38 Hektoliter zu 32 fl. erhalte; wie viel Hektoliter kann er von jeder Sorte dazu nehmen?

60. Eine Dampfmaschine von 36 Pferdekraft bewegt in 18 Tagen à 12 Stunden eine Erdmasse von 8^m Länge, 5^m Breite und $5{\cdot}2^m$ Höhe; in wie viel Tagen ununterbrochener Arbeit wird eine Erdmasse von 15^m Länge, 7^m Breite und $4{\cdot}5^m$ Höhe durch eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft bewegt werden?

61. $(4a^3b^4 + 8a^5b^5 - 12a^7b^6) : 2a^2b^3 = ?$

62. $(8a^3 - 27b^3) : (2a - 3b) = ?$

63. $(16a^2 - 46ax + 15x^2) : (8a - 3x) = ?$

64. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5) = ?$

65. $(48x^2 - 12y^2 - 118x + 5y + 72) : (8x - 4y - 9) = ?$

66. $(9x^4 - 58x^2y^2 + 49y^4) : (3x^2 - 4xy - 7y^2) = ?$

67. $(30a^4 + 11a^3 - 20a^2 + 29a - 6) : (5a^2 - 4a + 3) = ?$

68. Wenn 1 Kilogr. Gold $15\frac{1}{2}$mal so viel wert ist als 1 Kilogr. Silber, welchen Wert in Gulden ö. W. hat ein neues Vierguldenstück, da aus 500 Gramm Gold, das $\frac{9}{10}$ fein ist, 155 Vierguldenstücke geprägt werden?

69. In einem neuen österr. Zehnkreuzerstücke sind Silber und Kupfer in dem Verhältnisse 2 : 3 mit einander gemischt; wie viel Silber und wie viel Kupfer hat man nöthig, um 6600 fl. in Zehnkreuzerstücken zu prägen, wenn 300 Zehnkreuzerstücke $\frac{1}{2}$ Kilogr. wiegen?

70. Ein Wirt gewinnt an einem Hektoliter Wein 8 fl. 75 kr. oder 28%; welches war die Verkaufssumme?

71. Ein Behälter, welcher 5^m lang, $3{\cdot}25^m$ breit und $1{\cdot}2^m$ tief ist, wird durch eine Röhre in 3 Stunden 15 Minuten gefüllt; in welcher Zeit wird durch eine gleiche Röhre ein anderer Behälter gefüllt, welcher 4^m lang, 3^m breit und $1{\cdot}5^m$ tief ist?

72. Es hat Jemand nach und nach folgende Zahlungen zu leisten: den 17. März 250 fl., den 13. Juli 300 fl., den 21. August 400 fl., den 7. October 250 fl. und den 18. December 500 fl. An welchem Tage kann er diese sämmtlichen Posten auf einmal abtragen? (Man berechne hier die einzelnen Zeiten vom 1. März an, von welchem Zeitpunkte aus dann auch das Resultat zu nehmen ist.)

73. Zur Ausführung einer Arbeit verwendet man anfangs 20 Mann 3 Wochen lang jeden Tag 8 Stunden, dann 30 Mann 4 Wochen täglich 10 Stunden, und endlich 50 Mann, welche in 2 Wochen bei täglich 9stündiger Beschäftigung mit der Arbeit fertig werden. In wie viel Wochen würden 40 Mann bei täglich 12stündiger Arbeit das ganze Werk zu Stande gebracht haben?

Achter Abschnitt.

Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 116. Ein Product mehrerer gleicher Factoren (§. 108) heißt eine Potenz; jeder der gleichen Factoren ist die Wurzel, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Wurzel als Factor gesetzt wurde, der Exponent. Z. B.

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$
$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$
$$4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256.$$

Hier ist 16 die 2. Potenz von 4, 64 die 3., 256 die 4. Potenz von 4; umgekehrt ist 4 die zweite Wurzel von 16, die 3. Wurzel von 64, die 4. Wurzel von 256.

Eine Zahl zur 2., 3., 4, . . . Potenz erheben heißt, diese Zahl 2mal, 3mal, 4mal . . . als Factor setzen.

Wird eine gegebene Zahl in lauter gleiche Factoren aufgelöst, so heißt dieses Verfahren das Wurzelausziehen. Aus einer Zahl die 2., 3., 4., . . . Wurzel ausziehen heißt demnach, eine Zahl suchen, welche 2mal, 3mal, 4mal, . . . als Factor gesetzt, die vorgelegte Zahl zum Producte gibt; z. B. aus 125 die dritte Wurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche 3mal als Factor gesetzt, 125 gibt; diese Zahl ist 5, denn $5 \times 5 \times 5 = 125$. Das Wurzelausziehen zeigt man dadurch an, dass man vor die gegebene Zahl das Wurzelzeichen $\surd$ und in dessen Oeffnung den Exponenten setzt; $\sqrt[3]{125}$ bedeutet die 3. Wurzel aus 125. Der Exponent 2 wird nicht angeschrieben; $\surd 64$ stellt daher die zweite Wurzel aus 64 vor.

Die zweite Wurzel einer Zahl wird insbesondere auch ihre Quadratwurzel, und die dritte Wurzel die Cubikwurzel genannt.

I. Erheben auf das Quadrat und Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 117. Um eine Zahl zum Quadrat zu erheben, darf man sie nur mit sich selbst multiplicieren; z. B.

$$137^2 = 137 \times 137 = 18769,$$
$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = \tfrac{3}{5} \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{25},$$
$$2{\cdot}73^2 = 2{\cdot}73 \times 2{\cdot}73 = 7{\cdot}4529.$$

Das Quadrat eines Decimalbruches enthält doppelt so viel Decimalen, als der gegebene Decimalbruch, woraus folgt, dass in einem vollständigen Quadrate die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müßen.

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind:

Quadratwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

Quadrat: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Um weiterhin das Ausziehen der Quadratwurzel leichter begründen zu können, soll hier noch ein anderes Verfahren beim Quadrieren einer Zahl entwickelt werden.

Nach §. 113. 4. ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Hat man nun eine zweiziffrige Zahl, z. B. 46 auf das Quadrat zu erheben, so zerlege man sie in zwei Theile $40 + 6$, und setze $a = 40$, $b = 6$, so ist nach der obigen Formel

$$46^2 = (\overset{a}{40} + \overset{b}{6})^2 = \overset{a^2}{40^2} + \overset{2ab}{2 \cdot 40 \cdot 6} + \overset{b^2}{6^2}.$$

Ist eine dreiziffrige Zahl $864 = 800 + 60 + 4$ zum Quadrate zu erheben, so setze man $a = 800$, $b = 60$, $c = 4$, und ziehe die ersten zwei Theile a und b in ein Glied zusammen, welches B heißen soll, so daß $B = 800 + 60 = 860$ wird; dann hat man zunächst

$$\overset{B}{860^2} = (\overset{a}{800} + \overset{b}{60})^2 = \overset{a^2}{800^2} + \overset{2ab}{2 \cdot 800 \cdot 60} + \overset{b^2}{60^2},$$

und daher

$$864^2 = (\overset{B}{860} + \overset{c}{4})^2 = \overset{B^2}{860^2} + \overset{2Bc}{2 \cdot 860 \cdot 4} + \overset{c^2}{4^2},$$

oder, wenn statt 860^2 der obige Wert gesetzt wird,

$$\underset{a\,b\,c}{\overset{B}{864^2}} = \overset{a^2}{800^2} + \overset{2ab}{2 \cdot 800 \cdot 60} + \overset{b^2}{60^2} + \overset{2Bc}{2 \cdot 860 \cdot 4} + \overset{c^2}{4^2},$$

und wenn man die Bestandtheile unter einander schreibt,

$\overset{B}{\underset{a\,b\,c}{}}$

$\underline{864} =$

a^2	$= 800^2$	$=$	640000
$2ab$	$= 2 \cdot 800 \cdot 60$	$=$	96000
b^2	$= 60^2$	$=$	3600
$2Bc$	$= 2 \cdot 860 \cdot 4$	$=$	6880
c^2	$= 4^2$	$=$	16
			746496.

Ebenso erhält man

$\overset{C}{\underset{B}{\underset{a\,b\,c\,d}{}}}$

$\underline{4273^2} =$

a^2	$= 4000^2$	$=$	16000000
$2ab$	$= 2 \cdot 4000 \cdot 200$	$=$	1600000
b^2	$= 200^2$	$=$	40000
$2Bc$	$= 2 \cdot 4200 \cdot 70$	$=$	588000
c^2	$= 70^2$	$=$	4900
$2Cd$	$= 2 \cdot 4270 \cdot 3$	$=$	25620
d^2	$= 3^2$	$=$	9
			18258529.

Die Nullen können hier auch weggelassen werden, sobald nur jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts hinausgerückt wird. Ohne Nullen würden sich die letzten zwei Beispiele so darstellen:

$\underline{864^2} =$

a^2	. .	8^2	. . 64
$2ab$	. . 2 .	8 . 6 .	. 96
b^2	. .	6^2	. . 36
$2Bc$	. . 2 .	86 . 4 .	. 688
c^2	. .	4^2	. . 16
			= 746496

$\underline{4273^2} =$

a^2	. .	4^2	. . 16
$2ab$	. . 2 .	4 . 2 .	. 16
b^2	. .	2^2	. . 4
$2Bc$	. . 2 .	42 . 7 .	. 588
c^2	. .	7^2	. . 49
$2Cd$	. . 2 .	427 . 3 .	. 2562
d^2	. .	3^2	. . 9
			= 18258529

Hieraus ergibt sich für die Bildung des Quadrates einer mehrziffrigen Zahl folgendes Gesetz:

1. Die höchste Ziffer der Wurzel gibt ihr eigenes Quadrat.
2. Aus jeder folgenden Ziffer wachsen im Quadrate zwei Bestandtheile zu: die doppelte ihr vorangehende Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.

3. Alle diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Aufgaben.

1. a) $\frac{915^2}{a^2 \ldots 81}$ $\quad 2ab \ldots 18$ $\quad b^2 \ldots 1$ $\quad 2Bc \ldots 910$ $\quad c^2 \ldots 25$ $\quad 837225$

b) $\frac{20{\cdot}48}{a^2 \ldots 4}$ $\quad 2Bc \ldots 160$ $\quad c^2 \ldots 16$ $\quad 2Cd \ldots 3264$ $\quad d^2 \ldots 64$ $\quad 419{\cdot}4304$

2. a) $437^2 = ?$ b) $2263^2 = ?$ c) $9218^2 = ?$
3. a) $29{\cdot}1^2 = ?$ b) $3778^2 = ?$ c) $6\,502^2 = ?$
4. a) $5488^2 = ?$ b) $79{\cdot}0342^2 = ?$ c) $0{\cdot}82025^2 = ?$
5. a) $132746^2 = ?$ b) $9{\cdot}19553^2 = ?$ c) $446{\cdot}491^2 = ?$

§. 118. Das Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung der früher dargestellten Erhebung zum Quadrate.

Es sei z. B. 467 zum Quadrate zu erheben, und dann aus dem gefundenen Quadrate die Quadratwurzel zu ziehen.

Wir stellen, um die Vergleichung zu erleichtern, das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel unter einander.

$467^2 =$				
$a^2 \ldots$	16			
$2ab \ldots$	48			
$b^2 \ldots$	36			
$2Bc \ldots$	64	4		
$c^2 \ldots$		49		$\overline{a\,b\,c}^{B}$
	$\sqrt{21}$	80	89 =	467
$a^2 \ldots$	16			
	5	80	: 8 . . .	2a
$2ab \ldots$	48			
$b^2 \ldots$	36			
	64	89	: 92 . .	2B
$2Bc \ldots$	64	4		
$c^2 \ldots$		49		
	====	==		

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Wenn man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern theilt, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat. Im vorliegenden Falle hat das Quadrat 218089, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; man findet daher die erste Ziffer a der Quadratwurzel, wenn man die Zahl sucht, deren Quadrat der Zahl in der ersten Abtheilung am nächsten kommt, ohne größer als sie zu sein; diese Zahl ist 4, also $a = 4$.

Wird $a^2 = 4^2 = 16$ von der ersten Abtheilung subtrahiert, und zu dem Reste 5 die zweite Abtheilung 80 hinzugesetzt, so müßen in der so entstehenden Zahl 580 die Bestandtheile vorkommen, welche die zweite Wurzelziffer b im Quadrate hervorbringt, nämlich das Product 2ab aus ihr und der doppelten ersten Ziffer und ihr Quadrat b^2, und zwar erstreckt sich das Product 2ab nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Abtheilung, ist also in 58 enthalten. Dividiert man daher die Zahl 580 mit Ausschluß der letzten Ziffer, nämlich 58, durch das doppelte 2a der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 8, so erhält man die zweite Wurzelziffer $b = 6$.

Wenn man dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Wurzelziffer entstehen, nämlich $2ab = 48$ und $b^2 = 36$ an den gehörigen Stellen von 580 subtrahiert und zu dem Reste 64 die dritte Abtheilung 89 hinzusetzt, so enthält die dadurch entstehende Zahl 6489 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer c im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Product $2(a + b)c = 2Bc$ aus dieser Wurzelziffer und der doppelten ihr vorangehenden bereits gefundenen Zahl in der Zahl 6489 mit Ausschluss der letzten Ziffer, also in 648 vor. Dividiert man daher 648 durch $2B = 92$, so erhält man die dritte Wurzelziffer $c = 7$; u. s. w.

Da $2ab + b^2 = (2a + b)b$ ist, so kann man, anstatt 2ab und b^2 zu subtrahieren, sogleich zu dem bezüglichen Divisor 2a mit Rücksicht auf den Stellenwert die neugefundene Wurzelziffer b dazu

setzen, und sodann das Product aus der dadurch gebildeten Zahl und der neuen Wurzelziffer b subtrahieren. Hiernach würde sich die Rechnung so stellen:

$$\sqrt{21|80|89} = 467$$

$a^2 \ldots 16$

$58,0 \quad : 86 \times 6$

$(2a + b)\, b \ldots 516$

$648,9$

$(2B + c)\, c \ldots 6489 \quad : 927 \times 7$

= = = =

Das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neue Wurzelziffer angehängt hat, und aus dieser neuen Ziffer kann auch sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende subtrahiert werden. Die Rechnung steht dann:

$$\sqrt{21|80|89} = 467$$

$58,0 \quad : 86 \times 6$

$648,9 \quad : 927 \times 7$

= = = =

Beim Ausziehen der Quadratwurzel verfährt man daher nach folgenden Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen von zwei Ziffern; die höchste Abtheilung kann auch nur eine Ziffer enthalten. Sodann sucht man die größte Zahl, deren Quadrat in der ersten Abtheilung links enthalten ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer der Wurzel an, und subtrahiert ihr Quadrat von der ersten Abtheilung.

2. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Abtheilung hinzu. Wird diese Zahl, mit Hinweglassung der niedrigsten Stelle, durch das doppelte der bereits gefundenen Wurzel dividiert, so gibt der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel, welche man nicht nur zu der Wurzel, sondern auch zu dem Divisor hinschreibt.

3. Der so ergänzte Divisor wird dann mit der neu gefundenen Ziffer der Wurzel multipliciert, und das Product von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während des Multiplicierens subtrahiert.

4. Zu dem Reste setzt man wieder die nächste Abtheilung herab, und wiederholt dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Abtheilungen in Rechnung gezogen hat.

8
234

Beispiele und Aufgaben.

1. a) $\sqrt{1|53|76} = 124$
   $53 : 22 \times 2$
   $976 : 244 \times 4$

   b) $\sqrt{92|16} = 96$
   $1116 : 186$

2. $\sqrt{25|70|49} = 507$
   $7049 : 1007$

Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so wird sogleich die nächste Classe herabgesetzt, nur muß diese Null sowohl in die Wurzel als zu dem Divisor geschrieben werden.

3. a) $\sqrt{654481} = ?$ b) $\sqrt{404496} = ?$
4. a) $\sqrt{2996756} = ?$ b) $\sqrt{5943844} = ?$
5. a) $\sqrt{1971216} = ?$ b) $\sqrt{11943936} = ?$
6. a) $\sqrt{32524209} = ?$ b) $\sqrt{50083929} = ?$
7. a) $\sqrt{91068849} = ?$ b) $\sqrt{104101209} = ?$
8. a) $\sqrt{11669056} = ?$ b) $\sqrt{100020001} = ?$
9. a) $\sqrt{1655025124} = ?$ b) $\sqrt{6449053636} = ?$
10. a) $\sqrt{4222140484} = ?$ b) $\sqrt{5478220225} = ?$

11. $\sqrt{1|52{\cdot}27|56} = 12{\cdot}34$
    $52 : 22$
    $827 : 243$
    $9856 : 2464$
    $= = = =$

Bei Decimalbrüchen geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpunkte gegen die linke, und die Eintheilung der Decimalen vom Decimalpunkte gegen die rechte; es wird dann in der Wurzel der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung zieht.

12. a) $\sqrt{0{\cdot}2704} = ?$ b) $\sqrt{59{\cdot}29} = ?$
13. a) $\sqrt{5{\cdot}4756} = ?$ b) $\sqrt{229{\cdot}2196} = ?$
14. a) $\sqrt{0{\cdot}556516} = ?$ b) $\sqrt{6325{\cdot}0209} = ?$

15. $\sqrt{7{\cdot}38} = 2{\cdot}716 \ldots$
    $338 : 47$
    $900 : 541$
    $3590 : 5426$
    3344

Bleibt beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch näherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man sich nämlich der vorgelegten Zahl beliebig viele Decimalabtheilungen von Nullen beigefügt denkt, und dem jedesmaligen Reste eine Abtheilung von zwei Nullen anhängt, übrigens aber wie vorhin verfährt.

Soll man in der Quadratwurzel sehr viele Decimalstellen erhalten, so kann die Arbeit bedeutend abgekürzt werden. Nachdem man nämlich mehr als die halbe Anzahl der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läßt man, anstatt zu dem Reste

eine neue Abtheilung von Nullen anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg, und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division.

16. Entwickle $\sqrt{17{\cdot}478}$ in 6 Decimalen.

a. nach dem gewöhnlichen Verfahren:

$\sqrt{17{\cdot}47}\,|\,8_0 = 4{\cdot}180669$

$14_{,}7 \quad : 81$

$668_{,}0 \quad : 828$

$5600\,|\,0_{,}0 \quad : 83606$

$583\,|\,640_{,}0 \quad : 836126$

$81\,|\,96440_{,}0 \quad : 8361329$

$6\,|\,712439$

b. abgekürzt:

$\sqrt{17{\cdot}47}\,|\,8_0 = 4{\cdot}180669$

$14_{,}7 \quad : 81$

$668_{,}0 \quad : 8$

$560_{,}0 : 8_{,}3_{,}6_{,}0$

584

82

7

Bestimme auf 5 Decimalen:

17. a) $\sqrt{5} = ?$ b) $\sqrt{7{\cdot}3} = ?$ c) $\sqrt{228{\cdot}314} = ?$

18. a) $\sqrt{0{\cdot}08} = ?$ b) $\sqrt{9{\cdot}0571} = ?$ c) $\sqrt{0{\cdot}008739} = ?$

19. a) $\sqrt{3{\cdot}78853} = ?$ b) $\sqrt{0{\cdot}041375} = ?$

20. $\sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{576}} = \frac{5}{24}$.

21. a) $\sqrt{\frac{441}{3364}} = ?$ b) $\sqrt{\frac{139876}{178929}} = ?$ c) $\sqrt{\frac{998001}{22667121}} = ?$

22. $\sqrt{\frac{3}{25}} = \sqrt{0{\cdot}12} = 0{\cdot}34641\ldots$

$30_{,}0 \quad : 64$

$440_{,}0 : 686$

$284 \quad : 6_{,}9_{,}2$

7

23. a) $\sqrt{\frac{16}{81}} = ?$ b) $\sqrt{\frac{17}{24}} = ?$ c) $\sqrt{123\frac{116}{233}} = ?$

24. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt 9216 $\square^{cm}$ beträgt?

25. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist als zwei andere Quadrate zusammengenommen, deren Seiten $1^m\ 2^{dm}\ 4^{cm}$ und $1^m\ 5^{dm}\ 2^{cm}$ sind?

26. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $4{\cdot}52^m$ und $6{\cdot}38^m$ sind?

27. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt die Hypotenuse $31^m\ 1^{dm}$ und die eine Kathete $24^m\ 4^{dm}$; wie groß ist die andere Kathete?

28. Drei Balken werden so an einander gelegt, dass zwei derselben einen rechten Winkel bilden; wenn nun diese beiden Balken 1^{m} 3^{dm} 4^{cm} und 1^{m} 1^{dm} 8^{cm} lang sind, wie groß wird die Länge des dritten Balkens sein?

29. Bestimme die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite $5{\cdot}24^{dm}$ beträgt.

30. Ein Messtischblatt ist ein Quadrat von 7^{dm} 8^{cm} Seitenlänge; wie lang ist die Diagonale?

31. Wie lang muß eine Leiter sein, um bis zur Spitze einer 15^{m} hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten 2^{m} 8^{dm} von der Mauer absteht?

32. Eine 12^{m} 3^{dm} lange Leiter wird gegen eine verticale Wand so aufgestellt, dass der Fuß der Leiter 2^{m} 7^{dm} von der Wand absteht; wie weit ist das obere Ende der Leiter vom Fußboden entfernt?

33. Auf ein 8^{m} 85^{cm} breites Haus soll ein 3^{m} 75^{cm} hohes Dach gesetzt werden; wie lang müßen die Dachsparren sein, wenn sie 64^{cm} Vorsprung erhalten?

34. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, wenn eine Seite 2^{m} 3^{dm} 4^{cm} beträgt?

35. Ein Garten von der Form eines Rechteckes ist 24^{m} 2^{dm} lang und 16^{m} 5^{dm} breit; ein anderer Garten hat denselben Flächeninhalt, aber die Form eines Quadrates; wie groß ist eine Seite desselben?

36. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 19 $\square^{m}$ 44 $\square^{dm}$; wie lang ist eine Kante desselben?

37. Welchen Durchmesser hat ein Kreis von 23 $\square^{m}$ 93 $\square^{dm}$ 14 $\square^{cm}$ Inhalt?

38. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 60 $\square^{cm}$; wie groß ist der Halbmesser derselben?

39. Auf einer unrichtigen Wage wiegt ein Körper in der einen Wagschale 472 Gramm, in der anderen nur 454 Gramm; wie groß ist das wahre Gewicht dieses Körpers? (Man multipliciert die beiden falschen Gewichte, und zieht aus dem Producte die Quadratwurzel.)

II. Erheben auf den Cubus und Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 119. Um eine Zahl zum Cubus zu erheben, setzt man dieselbe 3mal als Factor; z. B.

$319^3 = 319 \,.\, 319 \,.\, 319 = 32461759,$

$(\frac{5}{8})^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{125}{512},$

$1{\cdot}28^3 = 1{\cdot}28 \,.\, 1{\cdot}28 \,.\, 1{\cdot}28 = 2{\cdot}097152.$

Da der Cubus eines Decimalbruches 3mal so viel Decimalen als der gegebene Decimalbruch enthält, so muß in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen stets ein Vielfaches von 3 sein.

Die dritten Potenzen der einziffrigen Zahlen sind:

Cubikwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
Cubus: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Zur leichteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Cubikwurzel soll auch hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Cubus zu erheben, abgeleitet werden. Dasselbe beruht auf der Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ist z. B. die Zahl 59 zum Cubus zu erheben, so hat man

$$59^3 = (\overset{a}{50} + \overset{b}{9})^3 = \overset{a^3}{50^3} + 3 \,.\, \overset{3a^2b}{50^2} \,.\, 9 + 3 \,.\, \overset{3ab^2}{50} \,.\, 9^2 + \overset{b^3}{9^3}.$$

Um eine dreiziffrige Zahl, z. B. $248 = 200 + 40 + 8$ auf den Cubus zu erheben, setze man $a = 200$, $b = 40$, $c = 8$ und $a + b = 200 + 40 = B$; dann ist

$$\overset{B}{240}^3 = (\overset{a}{200} + \overset{b}{40})^3 = \overset{a^3}{200^3} + 3 \,.\, \overset{3a^2b}{200^2} \,.\, 40 + 3 \,.\, \overset{3ab^2}{200} \,.\, 40^2 + \overset{b^3}{40^3},$$

und

$$248^3 = (\overset{B}{240} + \overset{c}{8})^3 = \overset{B^3}{240^3} + 3 \,.\, \overset{3B^2c}{240^2} \,.\, 8 + 3 \,.\, \overset{3Bc^2}{240} \,.\, 8^2 + \overset{c^3}{8^3},$$

oder wenn man statt 240^3 den früheren Wert setzt,

$$\overset{\frac{B}{a\ b\ c}}{248^3} = \overset{a^3}{200^3} + 3 \,.\, \overset{3a^2b}{200^2} \,.\, 40 + 3 \,.\, \overset{3ab^2}{200} \,.\, 40^2 + \overset{b^3}{40^3}$$
$$+ 3 \,.\, \overset{3B^2c}{240^2} \,.\, 8 + 3 \,.\, \overset{3Bc^2}{240} \,.\, 8^2 + \overset{c^3}{8^3}.$$

Werden die Bestandtheile unter einander geschrieben und wirklich berechnet, so ist

$$\frac{48^3}{a^2} = 200^3 = 8000000$$
$$3a^2b = 3 \cdot 200^2 \cdot 40 = 4800000$$
$$3ab^2 = 3 \cdot 200 \cdot 40^2 = 960000$$
$$b^3 = 40^3 = 64000$$
$$3B^2c = 3 \cdot 240^2 \cdot 8 = 1382400$$
$$3Bc^2 = 3 \cdot 240 \cdot 8^2 = 46080$$
$$c^3 = 8^3 = 512$$
$$15252992.$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$\frac{\frac{C}{B}}{ab\ c\ d}$$

$$\frac{7135^3}{a^3} = 7000^3 = 343000000000$$
$$3a^2b = 3 \cdot 7000^2 \cdot 100 = 14700000000$$
$$3ab^2 = 3 \cdot 7000 \cdot 100^2 = 210000000$$
$$b^3 = 100^3 = 1000000$$
$$3B^2c = 3 \cdot 7100^2 \cdot 30 = 4536900000$$
$$3Bc^2 = 3 \cdot 7100 \cdot 30^2 = 19170000$$
$$c^3 = 30^3 = 27000$$
$$3C^2d = 3 \cdot 7130^2 \cdot 5 = 762553500$$
$$3Cd^2 = 3 \cdot 7130 \cdot 5^2 = 534750$$
$$d^3 = 5^3 = 125$$
$$363230185375.$$

Die Nullen kann man weglassen; dann stellen sich die letzten zwei Beispiele so heraus:

$\frac{248^3}{a^3}$		$\frac{7135^3}{a^3}$	
a^3	8	a^3	343
$3a^2b$	48	$3a^2b$	147
$3ab^2$	96	$3ab^2$	21
b^3	64	b^3	1
$3B^2c$	13824	$3B^2c$	45369
$3Bc^2$	4608	$3Bc^2$	1917
c^3	512	c^3	27
	15252992.	$3C^2d$	7625535
		$3Cd^2$	53475
		d^3	125
			363230185375.

Für den Cubus einer mehrziffrigen Zahl ergibt [illegible] folgendes Bildungsgesetz:

1. Die erste Ziffer links gibt ihren eigenen Cubus.
2. Jede folgende Wurzelziffer gibt drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, endlich ihren eigenen Cubus.
3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Aufgaben.

1. a) 927^3

a^3 . .	729
$3a^2b$ . .	486
$3ab^2$ . .	108
b^3 . .	8
$3B^2c$ . .	177744
$3Bc^2$ . .	13524
c^3 . .	343
	796597983

b) $0{\cdot}4203^3$

a^3 . .	64
$3a^2b$ . .	96
$3ab^2$ . .	48
b^3 . .	8
$3C^2d$ . .	1587600
$3Cd^2$ . .	11340
d^3 . .	27
	0·074246873427

2. a) $376^3 = ?$ b) $814^3 = ?$ c) $25{\cdot}9^3 = ?$
3. a) $7{\cdot}19^3 = ?$ b) $1023^3 = ?$ c) $5887^3 = ?$
4. a) $0{\cdot}0425^3 = ?$ b) $7992^3 = ?$ c) $61{\cdot}613^3 = ?$
5. a) $53{\cdot}381^3 = ?$ b) $83076^3 = ?$ c) $409513^3 = ?$

§. 120. Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die Cubikwurzel ausgezogen wird, lässt sich aus dem Gesetze ableiten, nach welchem die Ziffern der Cubikwurzel in dem Cubus zusammengestellt erscheinen.

Erhebt man z. B. 537 zum Cubus, und ist dann aus dem gefundenen Cubus die Cubikwurzel zu ziehen, so hat man

$\sqrt[3]{537^3}$ =

a^3	. .	125				
$3a^2b$	. .	22	5			
$3ab^2$	. .	1	35			
b^3	. .		27			
$3B^2c$	. .	5	898	9		
$3Bc^2$	. .		77	91		
c^3	. .			343		$\frac{B}{a\ b\ c}$
	$\sqrt[3]{}$	154	854	153	=	537
a^3	. .	125				
		29	8,54		:	75 . . $3a^2$
$3a^2b$	. .	22	5			
$2ab^2$	. .	1	35			
b^3	. .		27			
		5	977	1,53	:	8427 . . $3B^2$
$3B^2c$	. .	5	898	9		
$3Bc^2$	. .		77	91		
c^3	. .			343		
		=	= =	= = =		

Da die erste Wurzelziffer im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal so viel Ziffern, als deren die Cubikwurzel hat, oder um zwei oder eine weniger. Theilt man daher den Cubus von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Wurzel Ziffern enthält. Im vorliegenden Falle hat der Cubus 154854153, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, drei solche Abtheilungen.

Der Cubus der ersten Wurzelziffer a ist in der ersten Abtheilung enthalten; die erste Ziffer der Cubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die größte Zahl nimmt, deren Cubus in der ersten Abtheilung enthalten ist; in 154 ist der Cubus von 5, nämlich 125, enthalten; die erste Wurzelziffer a ist also 5.

Wird $a^3 = 125$ von der ersten Abtheilung subtrahiert und zu dem Reste 29 die zweite Abtheilung hinzugesetzt, so enthält die so entstehende Zahl 29854 die Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer b hervorgehen, nämlich $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, und zwar erstreckt

sich $3a^2b$ nur bis auf die erste Ziffer der zweiten Abtheilung wird daher die Zahl 29854 mit Ausschluß der letzten zwei Ziffern, nämlich 298, durch das dreifache Quadrat $3a^2$ der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 75, dividiert, so erhält man die zweite Wurzelziffer $b = 3$.

Entwickelt man dann die drei Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich $3a^2b = 225$, $3ab^2 = 135$ und $b^3 = 27$, und rückt jeden derselben um eine Stelle weiter nach rechts, subtrahiert dann diese Zahlen von 29854, und setzt zu dem Reste 5977 die dritte Abtheilung dazu, so enthält die so gebildete Zahl 5977153 die Bestandtheile, welche die dritte Ziffer c im Cubus hervorbringt, und zwar kommt das Product $3(a + b)^2c = 3B^2c$ aus dieser Wurzelziffer und dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl in der Zahl 5977153 mit Ausschluß der letzten zwei Ziffern, also in 59771, vor. Dividiert man daher 59771 durch $3B^2 = 8427$, so erhält man die dritte Wurzelziffer $c = 7$; u. s. w.

Beim Ausziehen der Cubikwurzel ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theilt die Zahl von der rechten gegen die linke in Abtheilungen von je drei Ziffern; die links stehende Abtheilung kann auch bloß eine oder zwei Ziffern enthalten. Sodann sucht man die größte Zahl, deren Cubus in der ersten Abtheilung zur Linken enthalten ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer in die Wurzel, und zieht ihren Cubus von der ersten Abtheilung ab.

2. Die folgenden Ziffern der Cubikwurzel werden durch die Division gefunden. Man setzt nämlich zu dem jedesmaligen Reste die nächstfolgende Abtheilung herab, und betrachtet die dadurch entstehende Zahl mit Ausschluss der zwei letzten Ziffern rechts als Dividend, das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Wurzel aber als Divisor. Der Quotient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

3. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren eigenen Cubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter, und subtrahiert die Summe der so gesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern. Läst sich diese Summe nicht subtrahieren, so ist die neue Ziffer der Wurzel zu groß; sie muß

dah[illegible] 4 und nach kleiner genommen werden, bis man subtrahieren kann.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel nicht vollkommen genau; sie kann aber mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt, und übrigens wie vorhin verfährt.

Kommen in der gegebenen Zahl auch Decimalen vor, so werden diese vom Decimalpunkte angefangen gegen die rechte hin in Abtheilungen eingetheilt; hat die letzte Decimalabtheilung rechts weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ersetzt. In der Wurzel setzt man den Decimalpunkt, bevor man die erste Decimalabtheilung in Rechnung zieht.

Beispiele und Aufgaben.

1. a) $\sqrt[3]{592\,704} = 84$

512

80 7,04 : 192

76 8

3 84

64

=====

b) $\sqrt[3]{5{\cdot}832} = 1{\cdot}8$

1

48,32 : 3

24

192

512

====

c) $\sqrt[3]{12\,2\,30\,590\,464} = 2304$

8

4 2,30 : 12

3 6

5 4

27

635904,64 : 158700

634800

1104 0

64

=====

2. a) $\sqrt[3]{7301384} = ?$ b) $\sqrt[3]{139798359} = ?$

3. a) $\sqrt[3]{152273{\cdot}304} = ?$ b) $\sqrt[3]{223648543} = ?$

4. a) $\sqrt[3]{11{\cdot}089567} = ?$ b) $\sqrt[3]{644972{\cdot}544} = ?$

5. a) $\sqrt[3]{1593413632} = ?$ b) $\sqrt[3]{60006085875} = ?$

6. a) $\sqrt[3]{12895213625} = ?$ b) $\sqrt[3]{914367667816} = ?$

7. a) $\sqrt[3]{750494663741376} = ?$ b) $\sqrt[3]{91557005892911} = ?$

8. a) $\sqrt[3]{}$ 9295 = 21·025 . . .

Hier läßt sich die Cubikwurzel nur annäherungsweise bestimmen.

8
1295 : 12
12
6
1
340000,00 : 132300
264600
2520
8
75147920,00 : 13255212
66276060
1576500
125
8856093 75

Sowie beim Ausziehen der Quadratwurzel, kann auch beim Ausziehen der Cubikwurzel, wenn sehr viele Ziffern zu bestimmen sind, ein abgekürztes Verfahren angewendet werden. Nachdem man nämlich mehr als die Hälfte der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, entwickelt man die folgenden Ziffern mittelst der abgekürzten Division, in welcher man den letzten Rest als Dividend und das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel nach Weglassung der letzten Ziffer als Divisor annimmt.

9. Bestimme $\sqrt[3]{}$ 8·4313527 auf 7 Ziffern.

$\sqrt[3]{}$ 8·431|352|700 = 2·035319
8
=431 352 : 120
3600
540
27
65925700 : 123627
618135
15225
125
3959825 : 12423,6,7,5
232722
108485

...ie in 5 Decimalen:

10. a) $\sqrt[3]{7958} = ?$ b) $\sqrt[3]{8{\cdot}539} = ?$ c) $\sqrt[3]{0{\cdot}8035} = ?$

11. a) $\sqrt[3]{5} = ?$ b) $\sqrt[3]{123456} = ?$ c) $\sqrt[3]{25{\cdot}47382} = ?$

12. a) $\sqrt[3]{2\frac{7}{6}\frac{}{4}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$. b) $\sqrt{\frac{54872}{571787}} = ?$

13. a) $\sqrt[3]{\frac{11}{40}} = \sqrt[3]{0{\cdot}275} = ?$ b) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = ?$ c) $\sqrt[3]{\frac{17}{48}} = ?$

14. Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Cubikinhalt 12 $\boxtimes^{m}$ 167 $\boxtimes^{dm}$ beträgt?

15. Wenn man 21952 gleiche würfelförmige Steine so in einen Haufen bringen würde, dass in der Länge, Breite und Höhe gleich viele Stücke sind; wie viel Steine kommen in jede Reihe?

16. Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum einnimmt, als 2 Würfel zusammengenommen, deren Seiten $3^{dm}\ 4^{cm}$ und $2^{dm}\ 7^{cm}$ sind?

17. Es soll ein würfelförmiger Kessel gefertigt werden, welcher 18 Hektoliter hält; wie lang wird eine Seite des Kessels werden? (1 Liter = 1 $\boxtimes^{dm}$.)

18. Ein eiserner Würfel wiegt 18 Kilogr.; wie groß ist eine Seite, wenn das Cubikdecimeter Eisen 7·8 Kilogr. wiegt?

19. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, wenn ihr Cubikinhalt 13·144256 Cub.-Decimeter beträgt?

20. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, welche mit einem Würfel von $1^{m}\ 5^{dm}$ Seitenlänge gleichen Inhalt hat?

21. Wie groß ist der Durchmesser einer 15 Kilogramm schweren Kanonenkugel, wenn 1 Cubikdecimeter Eisen zu $7\frac{4}{5}$ Kilogr. angenommen wird?

Wiederholungsaufgaben.

1.* 100 Kil. kosten 72 fl.; wie viel kosten 26 Kil.?

2.* 1 Hektol. kostet 36 fl.; wie viel kosten 49 Liter?

3.* Welche Zahl ist es, deren 3faches zu ihrem 5fachen addiert 104 gibt?

4.* A hat doppelt so viel Geld als B, er tritt an B 40 fl. ab und dann haben beide gleich viel; wie viel hatte jeder?

5.* Ein Hektoliter Wein à 60 kr. pr. Liter war ge[illegible]aus 60 Liter à 65 kr. und einer geringeren Sorte; welchen Wert hatte 1 Liter der zweiten Sorte?

6. Ein Vater hinterläßt bei seinem Absterben 7 Kinder, und vermacht jedem 4500 fl.; nun sterben 3 Kinder ab; wie viel wird auf jedes der übriggebliebenen kommen?

7. Von 531 10jährigen Menschen erreichen im Durchschnitt 491 das 20ste Jahr; wie viel % sterben von 10 bis 20 Jahren?

Berechne abgekürzt auf 3 Decimalen:

8. a) $205{\cdot}7368 \times 3{\cdot}915$; b) $9{\cdot}37 \times 0{\cdot}8834$.

9. a) $78{\cdot}0956 \times 2{\cdot}8634$; b) $0{\cdot}0925 \times 1{\cdot}763$.

10. $2348 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$.

11. *Ein Körper bewegt sich a Meter vorwärts und dann b Meter rückwärts; wie viel Meter hat er überhaupt zurückgelegt und wie weit ist er von dem anfänglichen Orte entfernt, je nachdem a größer, eben so groß oder kleiner als b ist?*

12. Eine Eisenbahn steigt von der Station A zur Station B um $3^m\ 1{\cdot}25^{dm}$, von B bis C um $1^m\ 4{\cdot}11^{dm}$, von C bis D fällt sie um $5^m\ 5{\cdot}87^{dm}$, von D bis E steigt sie wieder um $1^m\ 1{\cdot}5^{dm}$; um wie viel liegt E höher oder tiefer als A?

13. Welches Capital bringt in 4 Jahren dieselben Zinsen, welche 1680 fl. Cap. in 3 Jahren bringen?

14. Welches Capital bedarf man, um zu 5% dieselben Zinsen zu haben, welche 3200 fl. Capital à 4% geben?

15. Von welchem Capital erhält man 117 fl. Zinsen, wenn 1230 fl. Capital unter gleichen Umständen $61\frac{1}{2}$ fl. Zinsen geben?

16. Suche das größte gemeinschaftliche Maß von

a) 23310 und 79365; b) 11467 und 16031;

c) 22287 und 30030; d) 47005 und 56485.

17. Wie viel Meter muß man eine $10{\cdot}4^m$ lange Leiter von der Mauer eines $9{\cdot}6^m$ hohen Giebels stellen, wenn sie bis zur Spitze reichen soll?

18. Jemand mischt 50 Kilogr. einer Waare, wovon das Kil. 60 kr. kostet, mit 40 Kil. einer geringeren Sorte, und nun kommt das Kil. der Mischung auf 54 kr.; wie viel kostet ein Kilogr. der zweiten Sorte?

19. Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 18356 fl.; am Schlusse des Jahres stellt sich ein reiner Gewinn von 1376 fl. 70 kr. heraus; wie viel % hat ihm das Capital eingebracht?

die in 5 Tagen wird ihm ein Bote nachgeschickt, der täglich 48 Kilom. 250 Meter zurücklegt; in wie viel Tagen holt er ihn ein?

21. Wie viel Münzgold à 900 Tausendtheile kann man aus 8·35 Kilogr. Gold à 800 fein herstellen?

22. a) $\sqrt{256036} = ?$ b) $\sqrt{64617{\cdot}64} = ?$

23. a) $\sqrt{545{\cdot}2225} = ?$ b) $\sqrt{50{\cdot}296464} = ?$

24. a) $\sqrt{1292114916} = ?$ b) $\sqrt{0{\cdot}1626186276} = ?$

25. a) $\sqrt[3]{592704} = ?$ b) $\sqrt[3]{34{\cdot}012224} = ?$

26. a) $\sqrt[3]{125751501} = ?$ b) $\sqrt[3]{256047875} = ?$

27. a) $\sqrt[3]{2{\cdot}918076589} = ?$ b) $\sqrt[3]{166920094216} = ?$

28. Ein Tuchhändler kauft Tuch, je $4\frac{1}{2}$ Meter für $23\frac{2}{5}$ fl.; er verkauft dasselbe wieder, das Meter à 6 fl.; wie viel Meter waren es, wenn er beim Verkaufe 276 fl. gewonnen hat?

29. Ein Kaufmann erhält aus Hamburg drei Kisten Kaffee, gewogen Brutto 1835 Kilogr., die Tara beträgt 13%, Gutgew. $\frac{1}{2}$%; wie groß ist der Wert, wenn der metr. Centner Netto mit 112 fl. 50 kr. bezahlt wird?

30. Dividiere die Zahl 11576250 vortheilhaft durch a) 25, b) 125, c) 35, d) 49, e) 54.

31. Suche den Geburtstag von Personen, welche

starben:		und alt wurden:			
a)	den 13. April 1868 . . .	59 J.	7 Mon.	18 T.;
b)	„ 5. Juni 1837 . . .	72 „	2 „	5 „;
c)	„ 28. Nov. 1875 . . .	64 „	— „	23 „;
d)	„ 12. Aug. 1870 . . .	29 „	11 „	20 „.

32. In einer Fabrik belaufen sich die jährlichen Kosten für 250 Gasflammen, welche einzeln in jeder Stunde 160 $\boxtimes^{dm}$ Gas verzehren und 1440 Stunden brennen, auf 8064 fl.; wie hoch kommt hiernach die Gasbeleuchtung in einer anderen Fabrik, in welcher 220 Flammen brennen, jede stündlich 144 $\boxtimes^{dm}$ Gas verzehrt und die Beleuchtungszeit 1560 Stunden beträgt?

33.* Welchen Feingehalt in Tausendtheilen hat [redacted]arren von 20 Kilogr. Gewicht, wenn sich darunter 15 Kilogr. feines Silber befinden?

34.* Das 5fache einer Zahl ist um 30 kleiner als ihr 7faches; welche Zahl ist es?

35.* Multipliciert man eine gewisse Zahl mit 7 und subtrahiert vom Producte 4, so bleibt 24; welche Zahl ist es?

36.* Eine gewisse Arbeit würde A für sich allein in 15 Tagen vollenden, B in 10 Tagen; in wie viel Tagen wird die Arbeit vollendet, wenn beide zusammen arbeiten?

37.* Ein Weinhändler kauft das Hektoliter Wein um 23 fl. 72 kr. und will 4 fl. 28 kr. daran gewinnen; wie theuer wird er das Liter verkaufen?

38. Drei Personen sollen 2050 fl. so unter-einander theilen, daß A so oft 3 fl. als B 4 fl., C aber so oft 5 fl. als B 3 fl. erhält; wie viel bekommt jede Person?

39. In wie viel Zeit geben

a) 908 fl. Capital zu $4\frac{3}{4}\%$ 86 fl. 26 kr. Zins?

b) 5160 fl. Capital zu 5% 330 fl. Zins?

c) 2180 fl. Capital zu 6% 327 fl. Zins?

Berechne abgekürzt auf 4 Decimalen:

40. a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{76}$; c) $\sqrt{7{\cdot}15}$.

41. a) $\sqrt{0{\cdot}02}$; b) $\sqrt{33{\cdot}731}$; c) $\sqrt{0{\cdot}1832}$.

42. a) $\sqrt{8{\cdot}2571}$; b) $\sqrt{0{\cdot}00294}$; c) $\sqrt{228{\cdot}5635}$.

43. a) $\sqrt[3]{100}$; b) $\sqrt[3]{7{\cdot}587}$; c) $\sqrt[3]{0{\cdot}09146}$.

44. a) $\sqrt[3]{69{\cdot}245}$; b) $\sqrt[3]{4{\cdot}28888}$; c) $\sqrt[3]{1{\cdot}341592}$.

45. Ein Haus wurde für 28500 fl. gekauft; der jährliche Miethzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel Procent verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 125 fl. in Anschlag gebracht werden, und wenn die Hauszinssteuer 25% beträgt?

46. Wie viel sind 850 fl., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5% Discont jetzt wert?

47. Bei dem Kaufe eines Ackers wird bestimmt, daß von der Kaufsumme 600 fl. sogleich, die übrigen 636 fl. aber nach 1 Jahre gezahlt werden sollen; der Käufer zahlt jedoch auch diese sogleich und erhält 6% Discont; wie viel hat er zusammen bar zu zahlen?

man eine Waare für 150 fl. verkauft, so verliert man 10%; wie theuer muß man sie verkaufen, um 5% zu gewinnen?

49. Beim Verkaufe einer Waare zu 462 fl. gewinnt man $16\frac{2}{3}$%; wie viel % gewinnt man, wenn sie für 420 fl. verkauft wird?

50. $2x + 3 + (5x - 7) - (4x - 3) + 7 = ?$

51. $5(x - 3) - 4(x + 2) - 3(x - 5) + 6(x - 1) = ?$

52. $7a - 3b + 9c - (4a + 7b - c) = ?$

53. $\frac{3x - 2y}{4} - \frac{5x + 3y}{6} + \frac{3y - 4x}{5} = ?$

54. Drei Stück Tuch kosten zusammen 278 fl., und zwar ist das Stück A 20^m lang und 125^{cm} breit, B 24^m lang und $112{\cdot}5^{cm}$ breit, C 30^m lang und 110^{cm} breit; der Güte nach verhalten sich die Sorten A, B und C wie die Zahlen 6, 5 und 4; a) wie viel kostet jedes Stück, b) wie viel kostet 1 Meter jedes Stückes?

55. Zu wie viel Procent tragen

a) 3075 fl. Capital in 9 Monaten 92 fl. 25 kr. Zins?

b) 5409 fl. Capital in $2\frac{1}{2}$ Jahren 607 fl. 50 kr. Zins?

c) 650 fl. Capital in $3\frac{2}{3}$ Jahren 143 fl. Zins?

56. Multipliciere jede der Zahlen 7158267, 3095619, 4786216 a) mit 11, b) mit 19, c) mit 501, d) mit 25, e) mit 125.

57. Multipliciere jede der Zahlen 877205, 1356637, 4924781 a) mit 28, b) mit 36, c) mit 56, d) mit 72, e) mit 993, f) mit 7999.

58. Berechne $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für $a = 5{\cdot}23$, $b = 4{\cdot}78$, $c = 3{\cdot}45$ und $s = \frac{a + b + c}{2}$.

59. Zwei Capitalien, die zusammen 3600 fl. betragen, bringen jährlich 168 fl. Zinsen ein; wie groß ist jedes Capital, da das eine zu 5%, das andere zu 4% ausgeliehen ist?

60. Auf ein Landgut werden folgende Anbote gemacht: A bietet 40000 fl. bar; B bietet 44000 fl. und will 20000 fl. bar und den Rest nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlen; C bietet 45000 fl., und zwar 1000 fl. sogleich, den Rest nach $2\frac{1}{2}$ Jahren zahlbar; a) wie viel sind die Anbote des B und C bar wert, wenn man 5% Discont rechnet, b) welches der drei Anbote ist das vortheilhafteste?

61.* Wie viel Zins geben 420 fl. zu 4% in

62.* Welches Capital bringt an Zinsen:

a) in 3 Jahren zu 5% $34\frac{1}{2}$ fl.?

b) „ $2\frac{1}{2}$ „ „ 6% 60 „?

63.* Für 36 fl. kauft man 114 Liter; wie viel für 60 fl.?

64.* Drei Personen sollen 350 fl. so unter sich theilen, daß B 18 fl. mehr erhält als C, und A 14 fl. mehr als B; wie viel erhält jeder?

65. Zu wie viel % müssen 960 fl. angelegt sein, wenn sie in derselben Zeit die nämlichen Zinsen geben sollen, welche man von 840 fl. à 6% erhebt?

66. Zu wie viel % muß ein Capital angelegt werden, damit es in 3 Jahren *eben so* viel Zinsen gebe, als es in 2 Jahren à 6% geben *würde*?

67. Von einer Schuld soll die Hälfte sogleich, $\frac{1}{3}$ nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, der Rest nach 3 Jahren bezahlt werden. Es steht jedoch dem Schuldner frei, die ganze Schuld auf einmal zu zahlen; wann müßte dies geschehen?

68. a) $\sqrt{208574891} = ?$ b) $\sqrt{52301824} = ?$

69. a) $\sqrt{412455481} = ?$ b) $\sqrt{3163725009} = ?$

70. Der Reinertrag einer Verkaufsrechnung betrug nach Abzug von $2\frac{1}{4}$% Spesen 3448 fl.; für wie viel fl. war die Waare verkauft worden?

71. Von den alten österr. Zwanzigern der letzten Prägung gehen auf 1 cöln. Mark feinen Silbers 60 Stück von $\frac{9}{10}$ Feingehalt; wie groß ist das Schrot dieser Münze?

72. a) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = ?$

b) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = ?$

73. $25x^2 - (5x + 3y)(5x - 3) = ?$

74. $(3a + 8x)^2 + (4a + 6x)^2 - (5a - 10x)^2 = ?$

75. $(x^3 + 2ax^2 - 2a^2x + a^3)(x + 2a) = ?$

76. $(4a^4 + 5a^2b^2 - 6b^4)(2a^2 - 3ab + 4b^2) = ?$

77. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{4x^2}{5} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = ?$

78. An einer Straße arbeiten 20 Mann 12 Tage, 16 Mann 15 Tage, 18 Mann 25 Tage, 15 Mann 18 Tage und 24 Mann 25 Tage; wie viele Arbeiter hätte man aufnehmen müßen, wenn die Straße in 40 Tagen fertig werden sollte?

man[illegible]ndler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen; unverdünnt würde er das Liter um 28 kr. verkaufen; wenn er $12\frac{1}{2}$ Hektoliter verdünnten Essig erhalten und das Liter davon um 21 kr. verkaufen will, wie viel Essig und wie viel Wasser muß er zu der Mischung nehmen?

80. a) $\sqrt[3]{0{\cdot}857375} = ?$ b) $\sqrt[3]{109902239} = ?$

81. a) $\sqrt[3]{80677{\cdot}568161} = ?$ b) $\sqrt[3]{69021909208} = ?$

82. Von einer Schuld soll $\frac{1}{3}$ am 15. Jänner sogleich, $\frac{1}{4}$ am 31. Jänner, $\frac{1}{4}$ am 28. Februar und der Rest am 31. März bezahlt werden; wann kann man alle Zahlungen zu gleicher Zeit entrichten?

83. In Breslau werden im Auftrage eines Prager Committenten 218 Ctr. Weizen à Mark 19 „ 80 pr. 200 ℔ verkauft; die Spesen betragen 30 Pfenn. pr. Ctr., Maßgeld, Trinkgeld 2c. Mark 10 „ 80, Sensarie $\frac{1}{2}\%$; auf welchen Reinertrag lautet die Verkaufsrechnung, wenn die Provision zu $2\frac{1}{4}\%$ gerechnet wird?

84. A leihet dem B 1800 fl. und dem C 3000 fl.; B zahlt um $\frac{1}{2}\%$ höhere Zinsen als C. Zu wie viel % ist jedes Capital ausgeliehen, wenn A von beiden zusammen 225 fl. Zinsen erhält?

85. A, B und C erlitten bei einem gemeinschaftlichen Geschäfte 20% Verlust; ihre Einlagen verhalten sich wie 9 : 8 : 7 und das Capital nach Abzug des Verlustes beträgt 22480 fl. 80 kr.; a) wie viel erhält jeder zurück; b) wie viel hat jeder verloren?

86. $(225a^2 - 480ab + 256b^2) : (15a - 16b) = ?$

87. $\left(\frac{2x^2}{3y^2} - \frac{11}{45} - \frac{2y^2}{3x^2}\right) : \left(\frac{3x}{2y} + \frac{5y}{4x}\right) = ?$

88. $(63x^3 - 16x^2 - 132x - 80) : (9x + 10) = ?$

89. $(30x^4 - 2x^3 - 125x^2 - 51x + 27) : (5x^2 - 7x - 9) = ?$

90. Nach den neuesten Angaben hat Europa 302, Asien 794, Africa 192, America 85, Australien 4 Millionen Menschen; wie vertheilt sich, in Procenten ausgedrückt, die Zahl der Menschen auf die einzelnen Welttheile?

91. Wie viel kosten am 26. April

2 Stück Ferdinands-Nordbahn-Actien à 1862 (Nominalwert à 1000 fl. C. M.), und

6 Stück Elisabethbahn-Actien à 148·25 (Nominalwert à 200 fl. C. M.),

wenn die 5% Zinsen seit 1. Jänner zu vergüten sind und $\frac{1}{2}\%_{00}$ Sensarie gerechnet wird?

92. Drei Personen beschließen auf 2 Jahre eine Gemeinschaft zu führen; A legt dazu 4800 fl., B ebenfalls 4800 fl. und C 6000 fl. ein. Nach 4 Monaten nimmt A 800 fl., nach 8 Monaten B 300 fl. und nach 10 Monaten C 1000 fl. zurück. Am Schlusse theilten sie einen Gewinn von 1415 fl.; wie viel gebührt jedem?

93. A ist an B zu zahlen schuldig: 200 fl. sogleich, 300 fl. nach 5 Monaten, 450 fl. nach 8 Monaten, 300 fl. nach 11 Monaten, 600 fl. nach 15 Monaten und 400 fl. nach 20 Monaten. Dagegen ist B an A zu zahlen schuldig: 350 fl. nach 3 Monaten, 500 fl. nach 7 Monaten und 600 fl. nach 1 Jahre. Nun wollen beide mit einander abrechnen und soll der Rest auf einmal berichtiget werden; wie viel beträgt der Rest, und wann muß seine Zahlung erfolgen?

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

Močnik, Dr. Franz Ritter v., Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik. Für Unterrealschulen. **16.** verbesserte Auflage. 16 Bogen gr. 8. 1877. geh. 90 kr. — 1 Mark 80 Pf.

— Anfangsgründe der Geometrie in Verbindung mit dem Zeichnen. Für Unterrealschulen. Mit 202 in den Text gedruckten Holzschnitten. **16.** verbesserte Auflage. gr. 8. 1877. geh. 70 kr. — 1 Mark 50 Pf.

Pfannerer, Dr. Maurus, (k. k. Landesschulinspector) Deutsches Lesebuch für die unteren Klassen der Gymnasien.
Erster Band. **4.** Aufl. Neue Ausgabe. Preis geh. 85 kr. — 1 Mark 70 Pf.
Zweiter Band. **3.** Aufl. Neue Ausgabe. Preis geh. 85 kr. — 1 Mark 70 Pf.
Dritter Band. **2.** Aufl. Neue Ausgabe. Preis geh. 75 kr. — 1 Mark 50 Pf.
Vierter Band. **2.** Aufl. Neue Ausgabe. Preis geh. 85 kr. — 1 Mark 70 Pf.

Steinhauser, Ant., k. k. Reg.-Rath, Lehrbuch der Geographie. Für Mittelschulen und Lehrerbildungs-Anstalten, sowie zum Selbstunterrichte bearbeitet.
Erster Theil: Allgemeine Geographie. Mit 121 Holzschnitten. 144 Seiten gr. 8. 1875. geh. 80 kr. — 1 Mark 60 Pf.
Zweiter Theil: Specielle (politische) Geographie. Mit 31 Holzschnitten. 300 Seiten. gr. 8. 1876. geh. 1 fl. 50 kr. — 3 Mark.

— Geographie von Oesterreich-Ungarn. Mit 112 Holzschnitten und einem Namenregister gr. 8. geh. 1 fl. 50 kr. — 3 Mark.

Gindely, Prof. Dr. Anton, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die unteren Classen der Mittelschulen. Mit vielen Abbildungen zur Erläuterung der Kulturverhältnisse.
Erster Theil. Das Alterthum. **6.** verbesserte Aufl. Mit 31 Abbild. im Text u. 2 lith. Karten gr. 8. 1877. geh. 60 kr. — 1 Mark 30 Pf.
Zweiter Theil. Das Mittelalter. Fünfte verbesserte Auflage. gr. 8. 1876. geh. 60 kr. — 1 Mark 30 Pf.
Dritter Theil. Die Neuzeit. Fünfte verbesserte Auflage. gr. 8. 1877. geh. 60 kr. — 1 Mark 30 Pf.

Gindely, Prof. Dr. Ant., Lehrb. d. allgemeinen Geschichte für Obergymnasien. Mit vielen Abbild. zur Erläuterung der Kulturverhältnisse.
I. Band. Das Alterthum. Vierte durchgehends verbesserte Auflage. gr. 8. 1877. geh. 1 fl. 50 kr. — 3 Mark.
II. Band. Das Mittelalter. Vierte durchgehends verbesserte Auflage. gr. 8. 1877. geh. 1 fl. 20 kr. — 2 Mark 40 Pf.
III. Band. Die Neuzeit. Vierte verbesserte Auflage. gr. 8. 1876. 1 fl. 20 kr. — 2 Mark 40 Pf.

— Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die Oberklassen der Real- und Handelsschulen. Mit vielen Abbildungen zur Erläuterung der Kulturverhältnisse.
I. Band. Das Alterthum. Dritte umgearbeitete Auflage gr. 8. 1876. geh. 1 fl. 50 kr. — 3 Mark.
II. Band. Das Mittelalter. Vierte umgearbeitete Auflage gr. 8. 1877. geh. 1 fl. 20 kr. — 2 Mark 40 Pf.
III. Band. Die Neuzeit. Vierte umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1876. geh. 1 fl. 20 kr. — 2 Mark 40 Pf.

Tomek, Prof. W. W., Geschichte des österreichischen Kaiserstaates. Zum Gebrauche an Gymnasien u. Realschulen. 2. Aufl. gr. 8. 1875. geh. 60 kr. — 1 Mark 20 Pf.

Pokorny, Dr. Alois, (k. k. Regierungsrath, Director des Leopoldstädter Real- und Obergymnasiums in Wien), Illustrirte Naturgeschichte der drei Reiche für die unteren Classen der Mittelschulen bearbeitet.
Erster Theil. Das Thierreich. Dreizehnte vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 503 Abbildungen. gr. 8. 1875. geh. 1 fl. — 2 Mark.
Zweiter Theil. Das Pflanzenreich. Zehnte verbesserte Auflage. Mit 350 Abbildungen. gr. 8. 1875. geh. 1 fl. — 2 Mark.
Dritter Theil. Das Mineralreich. Neunte verbesserte Auflage. Mit 151 Abbildungen. gr. 8. 1876. geh. 60 kr. — 1 Mark 20 Pf.

map 45

8