Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Irena Kosi Ulbl

ZGLEDI IZ OSNOV LINEARNE ALGEBRE

Povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji

Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo

Zgledi iz osnov linearne algebre

Povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji

Avtorica
Irena Kosi Ulbl

November 2022

Naslov *Title* — **Zgledi iz osnov linearne algebre**
Examples from Bases of Linear Algebra

Podnaslov *Subtitle* — **Povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji**
Theory Resume and Fully Solved Problems with Commentaries

Avtorica *Author* — Irena Kosi Ulbl
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)

Recenzija *Review* — Dominik Benkovič
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Simon Špacapan
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)

Jezikovni pregled *Language edeting* — PRETEKS, d. o. o., Lendava, Slovenija

Tehnična urednika *Technical editors* — Irena Kosi Ulbl
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Oblikovanje ovitka *Cover designer* — Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Grafike na ovitku *Cover graphics* — Chart, avtor: GraphicsNinja, Pixabay.co, CC0, 2022

Grafične priloge *Graphic material* — Kosi Ulbl, 2022

Založnik *Published by* — **Univerza v Mariboru**
Univerzitetna založba
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj *Issued by* — **Univerza v Mariboru**
Fakulteta za strojništvo
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija
https://www.fs.um.si, fs@um.si

Izdaja *Edition* — Prva izdaja

Izdano *Published at* — Maribor, november 2022

Vrsta publikacije *Publication type* — E-knjiga

Dostopno na *Available at* — https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/738

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

512.64(075.8)(0.034.2)

KOSI-Ulbl, Irena
    Zgledi iz osnov linearne algebre [Elektronski
vir] : povzetek teorije in postopki reševanja
nalog s komentarji / Irena Kosi Ulbl. - 1. izd. -
E-učbenik. - Maribor : Univerza v Mariboru,
Univerzitetna založba, 2022

Na in dostopa (URL): https://press.um.si/
index.php/ump/catalog/book/738
ISBN 978-961-286-668-6
doi: 10.18690/um.fs.8.2022
COBISS.SI-ID 129353219
```


ISBN 978-961-286-668-6 (pdf)

DOI https://doi.org/10.18690/um.fs.8.2022

Cena *Price* — Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika *For publisher* — prof. dr. Zdravko Kačič,
rektor Univerze v Mariboru

Citiranje *Attribution* — Kosi Ulbl, I. (2022). *Zgledi iz osnov linearne algebre: povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji.* Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fs.8.2022

KAZALO

PREDGOVOR

Skripta *ZGLEDI IZ OSNOV LINEARNE ALGEBRE Povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji* je v prvi vrsti namenjena študentom univerzitetnega programa Strojništvo ter interdisciplinarnih univerzitetnih programov Mehatronika in Gospodarski inženiring – smer Strojništvo, ki v prvem letniku dodiplomskega izobraževanja poslušajo predmet Linearna algebra oziroma Algebra. Gradivo je dopolnitev k učbeniku *Osnove linearne algebre* (iste avtorice). Medtem ko je v omenjenem učbeniku poudarek na teoretični osnovi obravnavanih vsebin in je večina trditev tudi dokazanih, prinaša skripta k vsakemu obravnavanemu poglavju rešene zglede.

Gradivo obsega istih sedem poglavij kot učbenik: Determinante, Matrike, Sistemi linearnih enačb, Vektorji, Vektorski prostori, Linearne preslikave, Lastne vrednosti in lastni vektorji. Na začetku vsakega poglavja je uvodni del (Namen poglavja), v katerem so navedeni pomembnejši teoretični pojmi, ki jih bomo ponovili, in napoved nalog, ki jih bomo v okviru tega poglavja rešili. Nato sledi kratek teoretični del (Povzetek teorije) z zapisanimi definicijami, lastnostmi in obrazci, ki jih potrebujemo pri reševanju nalog. Študentom tako za osvežitev znanja omenjenih pojmov ni treba iskati v učbeniku. Teoretičnemu delu sledi osrednji del poglavja (Rešeni zgledi), ki ga predstavljajo podrobno rešeni zgledi z vsemi vmesnimi koraki. Reševanje nalog spremljajo tudi komentarji, ki študenta spomnijo, na kateri teoretični osnovi temelji iskanje pravilne poti do rešitve. Vsako poglavje se končuje z Zaključkom, ki vsebuje ključne besede in bistvene ugotovitve poglavja ter tudi kratek opis pomembnejših metod reševanja nalog.

Pri nekaterih zgledih k lažjemu razumevanju poteka reševanja in k boljši prostorski predstavi pripomorejo barvne slike oziroma različni grafični prikazi. Za risanje sem uporabila programa *Mathematica* in *CorelDraw*.

Dodajmo še, da lahko študenti v virih [3], [4] in [5], navedenih v Literaturi na koncu skripte, najdejo večje število primernih nalog z rešitvami (vendar brez podrobnih opisov postopkov reševanja). Zato ob koncu posameznega poglavja v gradivu tovrstne naloge niso dodane.

Delo sta strokovno pregledala recenzenta izr. prof. dr. Dominik Benkovič in izr. prof. dr. Simon Špacapan, lektoriranje je izvedlo podjetje PRETEKS, d. o. o. Za opravljeno delo se jim iskreno zahvaljujem.

Maribor, december 2021

Poglavje 1

DETERMINANTE

1.1 Namen poglavja

V prvem poglavju bomo:

- zapisali definicijo determinante;
- ponovili lastnosti determinant;
- računali determinante drugega in tretjega reda po definiciji oziroma po shemi;
- predstavili računanje determinant z uporabo diagonalizacije determinant;
- pri računanju determinante višjega reda uporabili razvoj determinante po vrstici oziroma po stolpcu;
- izračunali nekaj determinant n-tega reda.

1.2 Povzetek teorije

Determinanta reda n ali *n-vrstna determinanta* je število, ki ga predstavimo v obliki kvadratne sheme, sestavljene iz n vrstic in n stolpcev:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Števila a_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$, (običajno so $a_{ij} \in \mathbb{R}$) so *elementi determinante*. Prvi indeks pri elementu a_{ij} pove, v kateri vrstici leži element, drugi indeks pove, v katerem stolpcu leži element. Tako elementi s prvim indeksom i sestavljajo i-to vrstico, elementi z drugim indeksom j pa j-ti stolpec. Elementi z enakima indeksoma tvorijo *glavno diagonalo determinante*. Determinanto krajše zapišemo kot

$$D = |a_{ij}|_n.$$

Indeks n ob desni navpični črti predstavlja red determinante.

Determinanta prvega reda je enaka kar elementu, ki jo predstavlja:

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Determinanto drugega reda definiramo kot razliko produktov elementov na diagonalah determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Determinanto tretjega reda definiramo na naslednji način:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Pri računanju determinant tretjega reda lahko za pomoč uporabimo t. i. *Sarrusovo pravilo*: na desni strani determinante pripišemo prvi in drugi stolpec determinante ter tvorimo podukte po naslednji shemi:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \underset{*}{a_{11}} & \underset{\heartsuit}{a_{12}} & \underset{\spadesuit}{\overset{\diamond}{a_{13}}} & \overset{\clubsuit}{a_{11}} & \overset{\sim}{a_{12}} \\ a_{21} & \underset{*}{\overset{\diamond}{a_{22}}} & \underset{\heartsuit}{\overset{\clubsuit}{a_{23}}} & \underset{\spadesuit}{\overset{\sim}{a_{21}}} & a_{22} \\ \overset{\diamond}{a_{31}} & \overset{\clubsuit}{a_{32}} & \underset{*}{\overset{\sim}{a_{33}}} & \underset{\heartsuit}{a_{31}} & \underset{\spadesuit}{a_{32}} \end{array}\right. =$$

$$= \underset{*}{a_{11}}\underset{*}{a_{22}}\underset{*}{a_{33}} + \underset{\heartsuit}{a_{12}}\underset{\heartsuit}{a_{23}}\underset{\heartsuit}{a_{31}} + \underset{\spadesuit}{a_{13}}\underset{\spadesuit}{a_{21}}\underset{\spadesuit}{a_{32}} - \overset{\diamond}{a_{31}}\overset{\diamond}{a_{22}}\overset{\diamond}{a_{13}} - \overset{\clubsuit}{a_{32}}\overset{\clubsuit}{a_{23}}\overset{\clubsuit}{a_{11}} - \overset{\sim}{a_{33}}\overset{\sim}{a_{21}}\overset{\sim}{a_{12}}.$$

Pri računanju determinant višjih redov si pomagamo z lastnostmi determinant ali z razvojem determinante po vrstici ali stolpcu.

Lastnosti determinant:

Vrednost determinante se ne spremeni, če vsako i-to vrstico zapišemo kot i-ti stolpec oziroma vsak j-ti stolpec zapišemo kot j-to vrstico:

$$|a_{ij}|_n = |a_{ji}|_n, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Zaradi tega vse lastnosti determinant, ki veljajo za vrstice, veljajo tudi za stolpce.

Če v determinanti zamenjamo dve vrstici, determinanta spremeni predznak.

Če sta v determinanti dve vrstici enaki ali proporcionalni, je vrednost determinante enaka 0.

Njena vrednost je enaka 0, če ima determinanta vse elemente neke vrstice enake 0.

Če i-to vrstico determinante, $i = 1, 2, \ldots, n$, pomnožimo z $\lambda \in \mathbb{R}$, je vrednost nove determinante enaka vrednosti prvotne determinante, pomnožene z λ.

Naj bodo D_u, D_v in D determinante, ki se ujemajo v vseh vrsticah, razen v i-ti vrstici. Tako naj bo i-ta vrstica

determinante D_u enaka n-terici $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$,

determinante D_v enaka n-terici $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in

determinante D enaka n-terici $(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \ldots, \lambda u_n + \mu v_n)$,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Potem med determinantami D_u, D_v in D velja zveza

$$D = \lambda D_u + \mu D_v.$$

Če v determinanti poljubni vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice, se vrednost determinante ne spremeni.

Poddeterminanta D_{ik} elementa a_{ik} v determinanti D, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, je determinanta, ki jo dobimo iz D tako, da v njej prečrtamo i-to vrstico in k-ti stolpec ter: dobljeno determinanto pomnožimo s faktorjem $(-1)^{i+k}$.

Računanje determinante s pomočjo poddeterminant elementov neke vrstice ali nekega stolpca dane determinante:

Determinanta $D = |a_{ij}|_n$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, je enaka vsoti produktov, ki jih dobimo, če vsak element poljubno izbrane vrstice determinante ali vsak element poljubno izbranega stolpca determinante pomnožimo z ustreznimi poddeterminantami. Na primer:

$$D = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot D_{in},$$

$$D = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot D_{nj}.$$

Pravimo, da smo determinanto razvili po i-ti vrstici ali po j-tem stolpcu.

Determinanta je *diagonalizirana*, če so vsi elementi na eni strani glavne diagonale enaki 0. Vrednost diagonalizirane determinante je enaka produktu diagonalnih elementov:

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{n-1,n-1} \cdot a_{nn}.$$

Dogovor: Zaradi krajšega zapisovanja bomo pri računanju vrednosti determinant uporabljali zapis

$$V_j^* = k \cdot V_i + V_j, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{R},$$

ki pomeni: j-to vrstico determinante v naslednjem koraku (V_j^*) bomo izračunali tako, da bomo k j-ti vrstici trenutne determinante (V_j) prišteli i-to vrstico trenutne determinante (V_i), pomnoženo s skalarjem k. Če bomo podobne transformacije izvajali nad stolpci, bomo namesto V pisali S.

1.3 Rešeni zgledi

1.3.1 Poiščite množico točk $T(x,y)$ v ravnini, za katere je determinanta

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$$

enaka 0.

Reševanje naloge:
Po definiciji dvovrstne determinante imamo:

$$D = (x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy = 0.$$

Torej, $x = 0$ ali $y = 0$ in iskane točke ležijo na koordinatnih oseh.

1.3.2 Izračunajte dvovrstni determinanti:

a) $$\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq \pm 1,$$

b) $$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}, \qquad i \text{ je imaginarna enota.}$$

Reševanje naloge:
a) Najprej iz vsake vrstice izpostavimo skupni faktor obeh elementov vrstice $\frac{1}{1-a^2}$, nato računamo vrednost determinante po definiciji:

$$\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{1}{1-a^2} \cdot \begin{vmatrix} 1+a^2 & 2a \\ 2a & 1+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1-a^2)^2}\left((1+a^2)^2 - 4a^2\right) = \frac{1}{(1-a^2)^2}(1 - 2a^2 + a^4) =$$

$$= \frac{1}{(1-a^2)^2} \cdot (1-a^2)^2 = 1.$$

b) Pri računanju upoštevamo, da je $i^2 = -1$. Tako je:

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = (a+bi)(a-bi) - (-c+di)(c+di) =$$

$$= a^2 + b^2 - (-c^2 - d^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

1.3.3 Izračunajte trivrstne determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

i **je imaginarna enota**.

Reševanje naloge:
a) Uporabimo Sarrusovo pravilo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 40 + (-2) + 0 - (5 + 12 + 0) = 21.$$

b) V postopku računanja determinante najprej zamenjamo prvo in drugo vrstico (element 1 zgoraj levo nam v nadaljevanju olajša delo). Pri tem se spremeni predznak determinante. Nato uporabimo pravili $V_2^* = 6 \cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = (-2) \cdot V_1 + V_3$. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -6 & 21 & -30 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 13 & -14 \end{vmatrix}.$$

V drugi vrstici izpostavimo faktor 3 in uporabimo pravilo $V_3^* = (-13) \cdot V_2 + V_3$. Tako je:

$$D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-14) = 42.$$

c) Na začetku računanja determinante uporabimo pravilo $V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3$. Nato determinanto razvijemo po prvem stolpcu. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ -1 & 2+3i & -4+6i \end{vmatrix} =$$

$$= (1-i) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 2+3i & -4+6i \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 0 & 2-3i \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-i)((1+i)(-4+6i) - (2+3i)(1+2i)) - ((1+i)(2-3i) - 0) =$$

$$= -(1-i)(-4-4i+6i-6-2-3i-4i+6) - (2+2i-3i+3) =$$

$$= -(1-i)(-6-5i) - 5 + i = 6 - 6i + 5i + 5 - 5 + i = 6.$$

d) Računanje determinante bo enostavnejše, če bomo najprej odpravili ulomke pri elementih determinante. Tako iz prve vrstice izpostavimo faktor $\frac{1}{6}$, iz druge faktor $\frac{1}{4}$. V nadaljevanju prepišemo tretjo vrstico in uporabimo pravilo $V_j^* = (-3) \cdot V_3 + V_j,\ j = 1, 2$. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 0 & 14 & -7 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sedaj determinanto razvijemo po prvem stolpcu in izpostavimo faktor 7 iz druge vrstice:

$$D = \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{24} \cdot (-6+10) = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}.$$

1.3.4 Dokažite enakost:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Reševanje naloge:
Enakost bomo dokazali tako, da bomo izračunali vrednost determinante (ki jo označimo z D). Prepišimo drugi stolpec determinante, ga pomnožimo s faktorjem -1 in ga prištejmo k prvemu in tretjemu stolpcu ($S_j^* = (-1) \cdot S_2 + S_j,\ j = 1,\ 3$). Tako je:

$$D = \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 0 \\ a+b+c & b-c-a & a+b+c \\ 0 & 2c & -a-b-c \end{vmatrix}.$$

V nadaljevanju prvo vrstico prištejemo k drugi ($V_2^* = V_1 + V_2$), v naslednjem koraku enako naredimo z drugo in s tretjo vrstico ($V_2^* = V_2 + V_3$). Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 0 \\ 0 & a+b-c & a+b+c \\ 0 & 2c & -a-b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 0 \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 2c & -a-b-c \end{vmatrix}.$$

Sedaj iz prvega in tretjega stolpca izpostavimo faktor -1 in determinanto razvijemo po prvem stolpcu:

$$D = (-1) \cdot (-1) \cdot (a+b+c) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 2c & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\big((a+b+c)^2 - 0\big) = (a+b+c)^3.$$

1.3.5 Izračunajte determinanto:

$$D = \begin{vmatrix} t-3 & t+2 & t-1 \\ t+2 & t-4 & t \\ t-1 & t+4 & t-5 \end{vmatrix}.$$

Za katero vrednost parametra t je determinanta enaka 0?

Reševanje naloge:
Z namenom, da si olajšamo delo, bomo determinanto najprej preoblikovali tako, da bo v njej čim manj elementov s parametrom t. Prvo vrstico prepišemo, jo pomnožimo s faktorjem -1 in nato prištejemo k drugi in tretji vrstici ($V_j^* = (-1) \cdot V_1 + V_j,\ j = 2,3$). Nato podobno naredimo še za stolpce: $S_j^* = (-1) \cdot S_1 + S_j,\ j = 2,\ 3.$ Tako imamo:

$$D = \begin{vmatrix} t-3 & t+2 & t-1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 5 & 2 \\ 5 & -11 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Sedaj uporabimo Sarrusovo pravilo za izračun determinante:

$$D = \left|\begin{matrix} t-3 & 5 & 2 \\ 5 & -11 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} t-3 & 5 \\ 5 & -11 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 66(t-3) - 40 + 0 - (-44 + 0 - 150) =$$

$$= 66t - 44.$$

Vrednost determinante bo enaka 0, ko bo izpolnjeno $66t - 44 = 0$, torej za $t = \frac{2}{3}$.

1.3.6 Izračunajte determinanti:

$$\textbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \textbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Reševanje naloge:
a) Z namenom, da v prvem stolpcu pridobimo čim več ničel, uporabimo pravilo $V_j^* = (-1) \cdot V_1 + V_j,\ j = 3,\ 5,$ nato zamenjamo drugo in tretjo vrstico (pri tem determinanta spremeni predznak). Prav tako iz vrstice s samimi negativnimi členi izpostavimo faktor -1. Tako je:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ponovno uporabimo pravilo $V_j^* = (-1) \cdot V_3 + V_j,\ j = 4,\ 5.$ Ko zamenjamo četrto in peto vrstico, ugotovimo, da je determinanta diagonalizirana. Njena vrednost je enaka produktu elementov na glavni diagonali:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 = 2.$$

b) Determinanto bomo izračunali podobno kot v primeru a). Uporabimo pravila $V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2,\ V_j^* = (-1) \cdot V_1 + V_j,\ j = 3,\ 4,$ in $V_5^* = (-3) \cdot V_1 + V_5.$ Tako je:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sedaj iz četrte vrstice izpostavimo faktor –2 ter zamenjamo drugo in četrto vrstico:

$$D_2 = (-1) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

V nadaljevanju uporabimo pravila $V_j^* = (-3) \cdot V_2 + V_j,\ \ j = 3,\ \ 4$ in $V_5^* = (-4) \cdot V_2 + V_5.$ Dobimo:

$$D_2 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -14 & 7 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -19 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Sedaj izpostavimo faktor -10 iz tretje vrstice. Z uporabo pravil $V_4^* = 14 \cdot V_3 + V_4$ in $V_5^* = 19 \cdot V_3 + V_5$ sledi:

$$D_2 = 2 \cdot (-10) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{10} & \frac{17}{20} \end{vmatrix}.$$

Do diagonalizacije determinante manjka še naslednji korak: iz četrte vrstice izpostavimo faktor $\frac{14}{5}$ in uporabimo pravilo $V_5^* = \left(-\frac{23}{10}\right) \cdot V_4 + V_5$. Končno imamo:

$$D_2 = (-20) \cdot \frac{14}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{59}{28} \end{vmatrix} = (-20) \cdot \frac{14}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{59}{28}\right) = 118.$$

1.3.7 Z zniževanjem reda determinante izračunajte determinanto:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Reševanje naloge:

Tretjo vrstico prepišemo in uporabimo pravila $V_1^* = (-6) \cdot V_3 + V_1$, $V_2^* = (-2) \cdot V_3 + V_2$, $V_4^* = (-3) \cdot V_3 + V_4$ in $V_5^* = V_3 + V_5$. Dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -11 & 12 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Sedaj determinanto razvijemo po prvem stolpcu, v naslednjem koraku prepišemo drugo in četrto vrstico, nato uporabimo pravili $V_1^* = (-4) \cdot V_2 + V_1$ in $V_3^* = (-3) \cdot V_2 + V_3$. Tako je:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -11 & 12 & -13 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \\ -3 & -4 & 9 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

V nadaljevanju determinanto ponovno razvijemo po prvem stolpcu, prepišemo prvo vrstico in uporabimo pravili $V_2^* = (-5) \cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = V_1 + V_3$. Imamo:

$$D = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -17 & -30 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix}.$$

Determinanto še enkrat razvijemo po prvem stolpcu in izračunamo njeno vrednost:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -17 & -30 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = (-17) \cdot 12 - 6 \cdot (-30) = -24.$$

1.3.8 Pokažite, da je determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & 5 & 3 \\ d & e & f & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

neodvisna od elementov $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Reševanje naloge:

Izračunali bomo determinanto in pričakujemo, da ne bo odvisna od elementov a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$. V zadnjem stolpcu ima determinanta dva neničelna elementa. Determinanto bomo razvili po tem stolpcu, pred tem bomo v njem pridobili še en ničelni element. S tem namenom prepišemo prve tri in zadnjo vrstico determinante, četro vrstico izračunamo po pravilu $V_4^* = (-1) \cdot V_5 + V_4$:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & 5 & 3 \\ d & e & f & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a-d & b-e & c-f & 3 & 0 \\ d & e & f & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sedaj determinanto razvijemo po zadnjem stolpcu in dobljeno determinanto ponovno razvijemo po zadnjem stolpcu:

$$D=3\cdot(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ a-d & b-e & c-f & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

V zadnji vrstici determinante pridobimo še eno ničlo po pravilu $V_3^* = (-1)\cdot V_2 + V_3$, nato determinanto razvijemo po zadnji vrstici in izračunamo njeno vrednost:

$$D=9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9\cdot 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9\cdot(3-4) = 9.$$

Determinanta je zares neodvisna od elementov $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

1.3.9 Rešite enačbo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

Reševanje naloge:

Dano enačbo želimo zapisati v enostavnejši obliki. S tem namenom bomo izračunali vrednost determinante na levi strani enačaja. Ker vrstice v determinanti vsebujejo veliko enakih elementov (enice), bomo prvo vrstico prepisali, jo pomnožili s faktorjem -1 in jo prišteli k ostalim vrsticam. Dobimo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Ugotovimo, da je determinanta diagonalizirana. Enačba se torej poenostavi v:

$$1 \cdot (-x) \cdot (1-x) \cdot (2-x) \cdot \cdots \cdot (n-1-x) = 0.$$

Enačba ima n rešitev: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \ldots, x_n = n-1$.

1.3.10 Izračunajte determinanto reda n:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Reševanje naloge:
Ugotovimo, da so stolpci determinante podobni med seboj. Z namenom, da v determinanti pridobimo čim več ničel, prvi stolpec prepišemo, nato ga pomnožimo z -1 in ga prištejemo k drugemu stolpcu. Nato pomnožimo drugi stolpec prvotne determinante z -1 in ga prištejemo k tretjemu stolpcu. Tako nadaljujemo do zadnjega stolpca. Dobimo determinanto:

$$D = \begin{vmatrix} x & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}.$$

Opazimo, da so elementi na glavni diagonali determinante in nad njo ravno nasprotni. V nadaljevanju postopamo na naslednji način: zadnjo vrstico prepišemo. Nato predzadnjo vrstico prištejemo k zadnji. Predpredzadnjo vrstico prištejemo k novi predzadnji vrstici. Ko tako nadaljujemo do prve vrstice, dobimo:

$$D = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (n-1)a & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (n-2)a & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2a & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}.$$

Ker je zapisana determinanta diagonalizirana, je njena vrednost enaka produktu elementov na glavni diagonali:

$$D = (x+(n-1)a) \cdot (x-a)^{n-1}.$$

1.3.11 Poiščite ničle polinoma $p_n(x)$, kjer je $n \geq 1$, $p_n(x)$ je polinom, definiran s predpisom:

$$p_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ x & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ x^3 & x^3 & x^3 & x^3 & \cdots & x^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & x^n & x^n & x^n & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

Reševanje naloge:
Glede na elemente determinante bomo v vsaki vrstici izpostavili potenco z osnovo x z največjim možnim eksponentom (eksponenti v potencah, ki ostanejo, naj bodo nenegativna števila). Natančneje: v i-ti vrstici izpostavimo faktor x^{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Tako dobimo:

$$p_n(x) = 1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \cdots \cdot x^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ 1 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Faktor pred determinanto je $x^{1+2+3+\cdots+n}$. Ker je vsota prvih n naravnih števil enaka $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, se ta faktor poenostavi v $x^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Determinanto v zgornjem zapisu za $p_n(x)$ izračunamo tako, da zadnjo vrstico prepišemo, nato uporabimo pravilo $V_i^* = (-1) \cdot V_{n+1} + V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sedaj imamo:

$$p_n(x) = x^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 & \cdots & x^n-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 & \cdots & x^{n-1}-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & \cdots & x^{n-2}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{n-3}-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

V naslednjem koraku determinanto razvijemo po prvem stolpcu:

$$p_n(x) = x^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+(n+1)} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 & \cdots & x^n-1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & \cdots & x^{n-1}-1 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & x^{n-2}-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}.$$

Determinanta v tem zapisu je diagonalizirana, zato je njena vrednost enaka produktu elementov na glavni diagonali. Tako je:

$$p_n(x) = (-1)^{n+2} \cdot x^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot (x-1)^n = x^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot (1-x)^n.$$

Polinom $p_n(x)$ ima torej dve ničli: $x_1 = 0$ s kratnostjo $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ in $x_2 = 1$ s kratnostjo n.

1.4 Zaključek

Ključne besede prvega poglavja: determinanta prvega, drugega, ..., n-tega reda, Sarrusovo pravilo, lastnosti determinant, poddeterminanta, razvoj determinante po vrstici ali po stolpcu, diagonalizirana determinanta.

Povzetek: Determinanta reda n je število, ki ga predstavimo v obliki kvadratne sheme, sestavljene iz n vrstic in n stolpcev. Števila a_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,n$, zapisana v shemi, so elementi determinante. Prvi indeks pri elementu a_{ij} pove, v kateri vrstici leži element, drugi indeks pove, v katerem stolpcu leži element. Determinante prvega, drugega in tretjega reda računamo po definiciji oziroma po shemah, predstavljenih v razdelku 1.2. Pri računanju determinant višjih redov si pomagamo z lastnostmi determinant. Pri tem si prizadevamo znižati red determinante ali determinanto zapisati v diagonalizirani obliki. Pogosto je primerno (s transformacijami, ki ohranjajo vrednost determinante) determinanto preoblikovati tako, da v neki vrstici ali v nekem stolpcu vsebuje le en neničelni element. Potem determinanto razvijemo po tej vrstici ali po tem stolpcu. Če je potrebno, postopek večkrat ponovimo. Računanje determinant n-tega reda zahteva razen omenjenih lastnosti in postopkov tudi nekaj naše iznajdljivosti.

Besedila nalog v prvem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3] in [5], teorija pa iz [2].

Poglavje 2

MATRIKE

2.1 Namen poglavja

V drugem poglavju bomo:

- definirali pojem matrika dimenzije (razsežnosti) $m \times n$;
- ponovili računske operacije z matrikami in definicije posebnih matrik;
- računali z matrikami;
- iskali inverzne matrike danih matrik;
- določali range matrik;
- reševali preprostejše matrične enačbe.

2. 2 Povzetek teorije

Matrika dimenzije (*razsežnosti*) $m \times n$ je shema (tabela) $m \cdot n$ števil, ki so razporejena v m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Števila a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$ in $j = 1,2,\ldots,n$, imenujemo *elementi matrike*. Podobno kot pri determinanti elementi a_{ij} s prvim indeksom i, $i = 1,2,\ldots,m$, tvorijo i-to vrstico, elementi z drugim indeksom j, $j = 1,2,\ldots,n$, pa j-ti stolpec. Matriko krajše zapišemo kot:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Transponirana matrika matrike A je matrika A^T, ki jo dobimo iz matrike A tako, da v njej vsako i-to vrstico zapišemo kot i-ti stolpec, $i = 1,2,\ldots,m$, ali vsak j-ti stolpec zapišemo kot j-to vrstico, $j = 1,2,\ldots,n$. Velja $(A^T)^T = A$.

Ničelna matrika je matrika, ki ima vse elemente enake 0.

Kvadratna matrika je matrika, ki ima enako število vrstic in stolpcev. Kvadratna matrika je *reda*

n, če ima n vrstic in n stolpcev. Elementi $a_{11},\ a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tvorijo *glavno diagonalo*.

Trikotna matrika je kvadratna matrika, ki ima vse elemente na eni strani glavne diagonale enake 0.

Zgornje trikotna matrika ima ničelne elemente pod glavno diagonalo (to pomeni $a_{ij} = 0$ za $i > j$).

Spodnje trikotna matrika ima ničelne elemente nad glavno diagonalo (to pomeni $a_{ij} = 0$ za $j > i$).

Diagonalna matrika je kvadratna matrika, ki ima lahko neničelne elemente le na glavni diagonali (to pomeni $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$).

Enotska matrika je diagonalna matrika, ki ima na glavni diagonali same enice.

Nasprotna matrika matrike A je matrika $-A$, ki jo dobimo iz A tako, da vsem elementom zamenjamo predznak:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad -A = [-a_{ij}]_{m\times n}, \quad i = 1,2,\ldots,m \text{ in } j = 1,2,\ldots,n.$$

Vsaki kvadratni matriki lahko priredimo njeno determinanto tako, da elementi matrike in determinante sovpadajo:

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \qquad \det A = |A| = |a_{ij}|_n.$$

<u>Računske operacije z matrikami:</u>

Matriki A in B sta *enaki*, če imata enako dimenzijo in se ujemata v vseh istoležnih elementih.

Seštevamo lahko le matrike enakih dimenzij. Elementi matrike, ki je vsota dveh matrik, so vsote istoležnih elementov posameznih matrik.

Odštevanje matrike je prištevanje nasprotne matrike.

Matriko množimo s skalarjem (številom) tako, da z njim pomnožimo vsak element matrike.

Matriki A in B lahko *zmnožimo* le, če ima matrika A toliko stolpcev, kot ima matrika B vrstic. Za dimenziji matrik, ki sta faktorja, in dimenzijo matrike, ki je njun produkt, velja:

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}_{n\times p} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}_{m\times p}.$$

Elemente matrike, ki je produkt dveh matrik, izračunamo na naslednji način:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \qquad B = [b_{ij}]_{n\times p},$$

$$C = A \cdot B = [a_{ij}]_{m\times n} \cdot [b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij}]_{m\times p},$$

pri čemer je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Inverzna matrika:

Matrika A je *obrnljiva* ali *nesingularna*, če obstaja taka matrika A^{-1}, da je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$ Matriko A^{-1} imenujemo *inverzna matrika* matrike A. Če taka matrika A^{-1} ne obstaja, pravimo, da je matrika A *singularna*. Matrika A je nesingularna natanko takrat, ko je $\det A \neq 0$.

Inverzno matriko matrike A lahko izračunamo z naslednjim obrazcem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

pri čemer so elementi $D_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n,$ poddeterminante elementov a_{ij} v matriki A.

Če je red matrike A velik, uporabimo za določanje inverzne matrike *Gauss-Jordanovo metodo*. Metodo izvedemo v naslednjih korakih:

1. matriki A dopišemo enotsko matriko enake dimenzije,

2. dobljeno matriko preoblikujemo z dovoljenimi transformacijami (vrstico pomnožimo z neničelnim številom, vrstici prištejemo drugo vrstico, vrstici zamenjamo med seboj) tako, da levi del matrike predstavlja enotsko matriko,

3. na desnem delu matrike odčitamo inverzno matriko.

Shematični prikaz Gauss-Jordanove metode:

$$\left[A \vdots I\right] \sim \cdots \sim \left[I \vdots A^{-1}\right].$$

Rang matrike

Naj bo matrika A dimenzije $m \times n$. Če v tej matriki prečrtamo nekaj vrstic ali nekaj stolpcev, lahko dosežemo, da je preostala matrika kvadratna. Determinanto te matrike imenujemo *poddeterminanta matrike A*. *Rang matrike A*, $\operatorname{rang} A$, je red največje neničelne poddeterminante matrike A.

Rang matrike se ne spremeni, če izvedemo katero izmed *elementarnih vrstičnih transformacij*:

– vrstico pomnožimo z neničelnim številom,

– vrstici prištejemo drugo vrstico,

– vrstici zamenjamo med seboj.

Ker je $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^T$, lahko vse naštete transformacije izvajamo tudi nad stolpci (imenujemo jih *elementarne stolpične transformacije*).

Matriki A in A' sta *vrstično (stolpično) ekvivalentni*, $A \sim A'$, če lahko eno matriko dobimo iz druge z zaporedjem elementarnih vrstičnih (stolpičnih) transformacij.

Rang matrike določimo tako, da dani matriki poiščemo vrstično (stolpično) ekvivalentno matriko take oblike, da iz nje rang kar "odčitamo".

Matrične enačbe

Matrične enačbe so enačbe, v katerih kot koeficienti in neznanke nastopajo matrike, ki so lahko pomnožene s skalarji. Pri reševanju teh enačb upoštevamo definicije računskih operacij z matrikami in dejstvo, da množenje matrik ni komutativno. To pomeni, da za množenje ne velja $AB = BA$.

2.3 Rešeni zgledi

2.3.1 Dane so matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

a) $3A - 4B$, **b**) AC, **c**) BD, **d**) CD,

e) A^T, **f**) A^TB, **g**) A^TC.

Reševanje naloge:
Pri računanju vsakega izraza bomo upoštevali definicije računskih operacij z matrikami:

a) $3A - 4B = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 4 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ker je v produktu AC prva matrika dimenzije 2×3 in druga dimenzije $3 \times 4,$ bomo produkt lahko izračunali (prva matrika ima namreč enako število stolpcev kot druga vrstic). Rezultat množenja bo matrika dimenzije 2×4:

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo elemente produkta matrik AC izračunali na naslednji način:

$$a_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = -5, \qquad a_{12} = 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -2,$$

$$a_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 0 = 4, \qquad a_{14} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 5,$$

$$a_{21} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) = 11, \qquad a_{22} = 0 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -3,$$

$$a_{23} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 = -12, \qquad a_{24} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18.$$

c) V produktu BD je prva matrika dimenzije 2×3 in druga dimenzije $3 \times 1.$ Rezultat množenja bo matrika dimenzije 2×1:

$$BD = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

d) Ker ima v produktu CD prva matrika dimenzijo 3×4 in druga dimenzijo $3 \times 1,$ produkta ni mogoče izračunati.

e) $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

f) V produktu A^TB je prva matrika dimenzije 3×2 in druga dimenzije 2×3. Rezultat množenja bo matrika dimenzije 3×3:

$$A^TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -7 & -6 & 12 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

g) Ker ima v produktu A^TC prva matrika dimenzijo 3×2 in druga dimenzijo 3×4, produkta ni mogoče izračunati.

2.3.2 Poiščite realna števila x, y, z, t, **za katera je izpolnjeno**:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}.$$

Reševanje naloge:
Iz matričnega zapisa dobimo ob upoštevanju računskih operacij z matrikami naslednji sistem enačb:

$$3x = x+4, \quad 3y = 6+x+y, \quad 3z = -1+z+t, \quad 3t = 2t+3.$$

Sistem zapišemo v poenostavljeni obliki

$$2x = 4, \quad -x+2y = 6, \quad 2z-t = -1, \quad t = 3,$$

od koder takoj sledi $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $t = 3$.

2.3.3 Za matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ **in** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ **preverite trditev**

$$(AB)^T = B^TA^T.$$

Reševanje naloge:
Trditev preverimo z neposrednim računanjem. Tako je:

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 & 11 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dobljeni matriki sta enaki.

2.3.4 Dani so matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ **in polinoma** $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ **in** $g(x) = x^2 + 2x - 11$. **Izračunajte** $f(A)$ **in** $g(A)$.

Reševanje naloge:
Najprej zapišimo predpis za $f(A)$. Konstantni člen 5 v predpisu polinoma $f(x)$ nadomestimo s $5I$, kjer je I enotska matrika ustrezne dimenzije; v našem primeru 2×2. Tako je:

$$f(A) = 2 \cdot A^3 - 4 \cdot A + 5 \cdot I.$$

Posebej izračunamo potenco A^3, najprej seveda A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}.$$

Potem je:

$$f(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -14 - 4 + 5 & 60 - 8 + 0 \\ 120 - 16 + 0 & -134 + 12 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}.$$

Podobno dobimo:

$$g(A) = A^2 + 2 \cdot A - 11 \cdot I =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 + 2 - 11 & -4 + 4 - 0 \\ -8 + 8 - 0 & 17 - 6 - 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ugotovimo, da je matrika A ničla polinoma $g(x)$.

2.3.5 Pokažite, da sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \textbf{in} \quad B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

inverzni.

Reševanje naloge:
Pokazali bomo, da sta produkta matrik AB in BA enaka enotski matriki:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.6 Z uporabo obrazca $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}^T$ **poiščite inverzne matrike danim matrikam**:

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, **b)** $A_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, **d)** $A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

Reševanje naloge:

Pri vsakem primeru bomo najprej izračunali determinanto matrike, nato poddeterminante D_{ij} njenih elementov, nazadnje bomo delne izračune vstavili v obrazec in zapisali inverzno matriko:

a) $\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1.$

$D_{11} = 3, \quad D_{12} = (-1) \cdot 1 = -1, \quad D_{21} = (-1) \cdot 5 = -5, \quad D_{22} = 2.$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $\det A_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha) \cdot \sin\alpha = 1.$

$D_{11} = \cos\alpha, \quad D_{12} = (-1) \cdot (-\sin\alpha) = \sin\alpha,$

$D_{21} = (-1) \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha, \quad D_{22} = \cos\alpha.$

$$A_2^{-1} = \frac{1}{\det A_2}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

c) $\det A_3 = \begin{vmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10^3$ (determinanta je diagonalizirana).

$D_{11} = 100, \quad D_{12} = (-1) \cdot 0 = 0, \quad D_{13} = 0,$

$D_{21} = (-1)\cdot 200 = -200, \qquad D_{22} = 100, \qquad D_{23} = (-1)\cdot 0 = 0,$

$D_{31} = 400 - 10\cdot(-30) = 700, \qquad D_{32} = (-1)\cdot(200-0) = -200, \qquad D_{33} = 100.$

$$A_3^{-1} = \frac{1}{\det A_3}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1000}\cdot\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ -200 & 100 & 0 \\ 700 & -200 & 100 \end{bmatrix}^T =$$

$$\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) $\det A_4 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{matrix} = 100 + 280 + 72 - 56 - 150 - 240 = 6$ (uporabili smo Sarrusovo pravilo).

$D_{11} = -10, \qquad D_{12} = (-1)\cdot(-5) = 5, \qquad D_{13} = 4,$

$D_{21} = (-1)\cdot 56 = -56, \qquad D_{22} = 22, \qquad D_{23} = (-1)\cdot(-26) = 26,$

$D_{31} = 32, \qquad D_{32} = (-1)\cdot 13 = -13, \qquad D_{33} = -14.$

$$A_4^{-1} = \frac{1}{\det A_4}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -56 & 22 & 26 \\ 32 & -13 & -14 \end{bmatrix}^T =$$

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}.$$

2.3.7 Poiščite inverzno matriko matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **kjer sta** a **in** b **poljubni števili**.

Reševanje naloge:
Za iskanje inverzne matrike bomo uporabili Gauss-Jordanovo metodo. Matriki bomo torej dopisali enotsko matriko in celotno (razširjeno) matriko preoblikovali z dovoljenimi operacijami tako, da bomo iz nje A^{-1} kar odčitali na desni strani razširjene matrike. V prvem koraku imamo:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -a & -b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sedaj drugo in tretjo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo $V_1^* = a \cdot V_2 + V_1$, nato drugo in tretjo vrstico ponovno prepišemo in uporabimo pravilo $V_1^* = b \cdot V_3 + V_1$. Tako dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -b & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ker smo v levem delu razširjene matrike že pridobili enotsko matriko, inverzno matriko kar odčitamo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.8 Matrika A je ortogonalna, **če je $A^{-1} = A^T$. Katere izmed matrik**:

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **b**) $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

so ortogonalne? **Odgovore utemeljite**.

Reševanje naloge:
Vsaki izmed matrik A_1, A_2 in A_3 bomo najprej z Gauss-Jordanovo metodo poiskali inverzno matriko (če le-ta obstaja), nato še njeno transponirano matriko.

a) Matriki A_1 dopišemo enotsko matriko. Če vrstice razširjene matrike ustrezno premešamo (na prvo mesto zapišemo četrto vrstico, na drugo mesto prvo vrstico, na tretjem mestu pustimo tretjo vrstico, na četrto mesto zapišemo drugo vrstico), lahko inverzno matriko A_1^{-1} takoj odčitamo:

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Inverzna matrika matrike A_1 je torej:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrika matrike A_1 je:

$$A_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $A_1^{-1} = A_1^T$, je matrika A_1 ortogonalna.

b) Matriki A_2 bomo inverzno matriko poiskali z naslednjimi koraki:

1. korak: matriki dopišemo enotsko matriko;

2. korak: uporabimo pravila $V_1^* = \sqrt{3} \cdot V_1$, $V_2^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot V_1^* + V_2$ in $V_3^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot V_1^* + V_3$;

3. korak: uporabimo pravila $V_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V_3$, $V_2^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot V_3^* + V_2$ in $V_1^* = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot V_3^* + V_1$;

4. korak: tretjo vrstico prepišemo, uporabimo pravili $V_2^* = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot V_2$ in $V_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot V_2^* + V_1$.

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right].$$

Iz zadnje razširjene matrike odčitamo inverzno matriko A_2^{-1}:

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrika matrike A_2 je:

$$A_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ker je $A_2^{-1} = A_2^T$, je tudi matrika A_2 ortogonalna.

c) Tudi v tem primeru bomo matriki A_3 inverzno matriko poiskali v več korakih:

1. korak: matriki dopišemo enotsko matriko;
2. korak: prvo vrstico prepišemo, na drugo mesto zapišemo tretjo vrstico in uporabimo pravilo $V_3^* = (-1) \cdot V_1 + V_2$;
3. korak: uporabimo pravila $V_1^* = (-1) \cdot V_2 + V_1,\ V_2^* = (-1) \cdot V_3$ in $V_3^* = V_2 + V_3$.

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Iz zadnje razširjene matrike spet odčitamo inverzno matriko A_3^{-1}:

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrika matrike A_3 je:

$$A_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker $A_3^{-1} \neq A_3^T$, matrika A_3 ni ortogonalna.

2.3.9 Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Izračunajte A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Reševanje naloge:

Izračunali bomo nekaj zaporednih potenc matrike A in skušali ugotoviti predpis za splošno potenco A^n, $n \in \mathbb{N}$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & \cos\varphi\sin\varphi \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & \cos\varphi\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin^2\varphi \end{bmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 & \cos\varphi\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin^2\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos^3\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Pri tem smo uporabili zvezo $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Ugotovimo, da je:

$$A^3 = A, \qquad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2, \qquad A^5 = A^4 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = A,$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = A^2, \qquad A^7 = A^6 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = A, \ \dots .$$

Na osnovi teh ugotovitev postavimo domnevo:

(i) $A^{2n-1} = A, \ n \in \mathbb{N}$,

(ii) $A^{2n} = A^2, \ n \in \mathbb{N}$.

Domnevo bomo dokazali z matematično indukcijo. Najprej preverimo, da trditev velja za $n = 1$. Zares,

(i) $A^{2\cdot 1-1} = A^1 = A$,

(ii) $A^{2\cdot 1} = A^2$.

Sedaj predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število n. Dokažimo (ob upoštevanju predpostavke in zgornjega preračuna za A^3 in A^4), da velja tudi za naslednika tega števila.

(i) $A^{2(n+1)-1} = A^{2n+2-1} = A^{2n-1} \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A, \ n \in \mathbb{N}$,

(ii) $A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n} \cdot A^2 = A^2 \cdot A^2 = A^4 = A^2, \ n \in \mathbb{N}$.

Domneva je dokazana.

2.3.10 Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Reševanje naloge:

Nalogo bi lahko reševali podobno kot prejšnjo, tako da bi izračunali prvih nekaj potenc matrike A, uganili splošni predpis za A^n in njegovo pravilnost dokazali z matematično indukcijo. Oglejmo si še drugačen način reševanja naloge. Matriko A zapišemo kot $A = I + B$, kjer je I enotska matrika dimenzije 4×4 in

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker I komutira z vsako matriko enake dimenzije, velja:

$$A^n = (I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Izračunati je treba potence B^k (kar v splošnem ni lažje delo od računanja potenc A^n). Ugotovimo:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je $B^3 = [0]$. Prav tako velja $B^n = [0]$ za vsak $n > 3$. Potem je:

$$A^n = B^0 + n \cdot B + \binom{n}{2} B^2 = I + n \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n & -n \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.11 Izračunajte range matrik:

$$\textbf{a)}\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Reševanje naloge:
Rang matrike lahko izračunamo tako, da matriko z dovoljenimi transformacijami preoblikujemo do oblike, iz katere rang kar odčitamo. Spomnimo se, da se rang matrike ne spremeni, če v matriki zamenjamo dve vrstici, vrstico pomnožimo z neničelnim številom ali vrstici prištejemo drugo vrstico (elementarne vrstične transformacije). Vse omenjene transformacije lahko izvedemo tudi nad stolpci (elementarne stolpične transformacije).

a) Matriko A bomo preoblikovali z elementarnimi stolpičnimi transformacijami v naslednjih korakih:

1. korak: tretji stolpec prepišemo, nato uporabimo pravila $S_1^* = (-3) \cdot S_3 + S_1$, $S_2^* = (-2) \cdot S_3 + S_2$ in $S_4^* = (-2) \cdot S_3 + S_4$;

2. korak: tretji stolpec napišemo na prvo mesto in uporabimo pravila $S_2^* = \frac{1}{5} \cdot S_1$, $S_3^* = \frac{1}{2} \cdot S_2$ in $S_4^* = \frac{1}{3} \cdot S_4$;

3. korak: sedaj prepišemo prvi in drugi stolpec in uporabimo pravili $S_3^* = (-1) \cdot S_2 + S_3$ in $S_4^* = (-1) \cdot S_2 + S_4$.

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ -15 & -6 & 5 & -9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je red največje neničelne poddeterminante v preoblikovani matriki enak 2, saj ima vsaka poddeterminanta reda tri ničelni stolpec in je njena vrednost enaka 0. Tako je rang $A = 2$.

b) Matriko B bomo najprej preoblikovali z elementarnimi stolpičnimi transformacijami, nato še z elementarnimi vrstičnimi transformacijami v naslednjih korakih:

1. korak: prvi stolpec prepišemo, nato uporabimo pravila $S_2^* = (-\lambda) \cdot S_1 + S_2$, $S_3^* = S_1 + S_3$ in $S_4^* = (-2) \cdot S_1 + S_4$;

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili $V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = (-1) \cdot V_1 + V_3$;

3. korak: sedaj prepišemo prvi stolpec, četrti stolpec zapišemo na drugo mesto ter drugi in tretji stolpec po vrsti na tretje in četrto mesto;

4. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo ter uporabimo pravilo $V_3^* = V_2 + V_3$.

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2\lambda - 1 & 2 + \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda + 10 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda - 1 & 2 + \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda + 10 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda - 1 & 2 + \lambda \\ 0 & -1 & -\lambda + 10 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda - 1 & 2 + \lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda + 9 & -3 + \lambda \end{bmatrix}.$$

Od tu naprej imamo dve možnosti, in sicer:

I. $\lambda = 3$ in II. $\lambda \neq 3$.

Oglejmo si vsako možnost posebej.

I. Če je $\lambda = 3$, je

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je v tem primeru rang $B = 2$.

II. Če je $\lambda \neq 3$, prepišemo prvo in drugo vrstico ter uporabimo pravilo $V_3^* = \frac{1}{\lambda - 3} \cdot V_3$ in imamo

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda - 1 & 2 + \lambda \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru je rang $B = 3$.

2.3.12 Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Poiščite matriko** X, **za katero velja**

$$(A - 2I)X = A + I.$$

Reševanje naloge:
Če obstaja matrika $(A - 2I)^{-1}$, iz dane matrične enačbe izrazimo matriko X kot

$$X = (A - 2I)^{-1}(A + I).$$

Z namenom, da izračunamo matriko $(A - 2I)^{-1}$, najprej zapišimo matriko $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sedaj z Gauss-Jordanovo metodo poiščimo njeno inverzno matriko. Postopek bomo izpeljali v več korakih:

1. korak: matriki dopišemo enotsko matriko I;

2. korak: zamenjamo prvo in tretjo vrstico;

3. korak: uporabimo pravili $V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = 2 \cdot V_1 + V_3$;

4. korak: prvo vrstico prepišemo, tretjo vrstico zapišemo na drugo mesto in nato uporabimo pravilo $V_3^* = (-1) \cdot V_2^* + V_2$;

5. korak: drugo vrstico prepišemo in nato uporabimo pravili $V_3^* = \frac{1}{6} \cdot V_3$ in $V_1^* = V_3^* + V_1$.

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Torej je

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Nazadnje matriko X izračunamo kot

$$X = (A - 2I)^{-1}(A + I) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3.13 Rešite matrični enačbi:

a) $A^TX + 2B = 3A^T - B^TX$,

b) $XA^T + 3B^T = 4B^TX + 2A$,

pri čemer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Reševanje naloge:
a) Enačbo najprej preuredimo in izrazimo matriko X. Pri tem upoštevamo, da matrično množenje ni komutativno. Imamo:

$$A^TX + 2B = 3A^T - B^TX,$$

$$A^TX + B^TX = 3A^T - 2B,$$

$$(A^T + B^T)X = 3A^T - 2B,$$

$$X = (A^T + B^T)^{-1} \cdot (3A^T - 2B).$$

Izračunamo vse potrebne matrike:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$3A^T - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sedaj izračunamo inverzno matriko matrike C:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nazadnje izračunamo elemente matrike X:

$$X = C^{-1} \cdot (3A^T - 2B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ker matrično množenje ni komutativno, matrike X iz enačbe

$$XA^T + 3B^T = 4B^TX + 2A$$

ne moremo izraziti. Elemente neznane matrike X označimo z neznankami x, y, z in u. Glede na dano matrično enačbo izvedemo ustrezne računske operacije z matrikami

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x+y & -y \\ z+u & -u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8x-4z & 8y-4u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

in pridemo do naslednjega sistema enačb:

$$x + y = 2$$

$$-y = 2$$

$$z + u + 6 = 8x - 4z$$

$$-u - 3 = 8y - 4u - 2.$$

Sistem poenostavimo:

$$x + y = 2$$

$$y = -2$$

$$8x - 5z - u = 6$$

$$8y - 3u = -1.$$

Iz prve enačbe izračunamo $x = 4,$ iz četrte enačbe izračunamo u:

$$u = \frac{1}{3}(8y + 1) = \frac{1}{3}(-16 + 1) = -5,$$

iz tretje enačbe izračunamo z:

$$z = \frac{1}{5}(8x - u - 6) = \frac{1}{5}(32 + 5 - 6) = \frac{31}{5}.$$

Iskana matrika X je torej enaka

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \frac{31}{5} & -5 \end{bmatrix}.$$

2.4 Zaključek

Ključne besede drugega poglavja: matrika dimenzije $m \times n$, transponirana matrika, ničelna matrika, kvadratna matrika, trikotna matrika, diagonalna matrika, enotska matrika, nasprotna matrika, računske operacije z matrikami, inverzna matrika, rang matrike, matrična enačba.

Povzetek: Matrika dimenzije $m \times n$ je shema (tabela) $m \cdot n$ števil, ki so razporejena v m vrstic in n stolpcev. Matriko krajše zapišemo kot $[a_{ij}]_{m \times n}$, pri čemer so števila a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$ in $j = 1, 2, \ldots, n$ elementi matrike. Matrike primernih dimenzij lahko seštevamo, odštevamo, množimo s skalarjem in množimo med seboj.

Matrika A je obrnljiva ali nesingularna, če obstaja taka matrika A^{-1}, da je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Matriko A^{-1} imenujemo inverzna matrika matrike A. Če taka matrika A^{-1} ne obstaja, je matrika A singularna. Inverzno matriko matrike A izračunamo po obrazcu $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}^T$, pri čemer so elementi D_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, poddeterminante elementov a_{ij} v matriki A. Če je red matrike večji od 3, za računanje inverzne matrike rajši uporabimo Gauss-Jordanovo metodo, pri kateri k dani matriki zapišemo enotsko matriko, nato z dovoljenimi transformacijami "razširjeno matriko" preoblikujemo tako, da lahko iz nje inverzno matriko kar odčitamo.

Rang matrike A, $\text{rang}A$, je red največje neničelne poddeterminante matrike A. Rang matrike se ne spremeni, če izvedemo katero izmed elementarnih vrstičnih transformacij: vrstico pomnožimo z neničelnim številom, vrstici prištejemo drugo vrstico, vrstici zamenjamo med seboj. Rang matrike razberemo iz matrike, ki smo jo pred tem ustrezno preoblikovali s transformacijami, ki rang ohranjajo.

Matrične enačbe so enačbe, v katerih kot koeficienti in neznanke nastopajo matrike. Pri reševanju matričnih enačb upoštevamo definicije računskih operacij z matrikami in njihove lastnosti.

Besedila nalog v drugem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3], [4] in [5], teorija pa iz [2].

Poglavje 3

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

3.1 Namen poglavja

V tretjem poglavju bomo:

- definirali sistem m linearnih enačb z n neznankami in uvedli različne pojme, povezane s takim sistemom enačb;
- ponovili, kdaj je sistem linearnih enačb rešljiv;
- ponovili, kdaj ima sistem linearnih enačb natanko eno rešitev in kdaj več kot eno rešitev,
- reševali sisteme treh ali več enačb s tremi ali z več neznankami z različnimi metodami;
- upoštevali posebnosti homogenih sistemov linearnih enačb;
- obravnavali rešljivost sistemov linearnih enačb s parametri.

3.2 Povzetek teorije

Sistem *m linearnih enačb z n neznankami* nad $\mathbb{R}$ ima obliko:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \ .$$

Števila a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, so *koeficienti sistema*, števila b_i, $i = 1,2,\ldots,m$, so *desne strani enačb*, x_k, $k = 1,2,\ldots,n$, so *neznanke*.

Sistem linearnih enačb je *homogen*, če so vsi b_i, $i = 1,2,\ldots,m$, enaki 0. Če je vsaj eno izmed števil $b_i \neq 0$, je sistem *nehomogen*.

Rešitve sistema linearnih enačb so urejene n-terice $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, ki zadoščajo vsem enačbam hkrati.

Sistem linearnih enačb lahko zapišemo tudi v skrajšani (matrični) obliki $A \cdot X = B$, pri čemer so:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \textit{osnovna matrika},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textit{stolpec neznank}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \textit{stolpec desnih strani}.$$

Razširjena matrika sistema je osnovna matrika sistema z dodanim stolpcem desnih strani:

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}.$$

Sistem linearnih enačb je *rešljiv*, če ima vsaj eno rešitev.

Rešljiv sistem je *določen*, če ima natanko eno rešitev oziroma *nedoločen*, če ima več kot eno rešitev.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je rešljiv natanko takrat, ko imata osnovna matrika A in razširjena matrika sistema $\left[A \vdots B\right]$ enak rang r. Če je sistem rešljiv in je $r = n$, je sistem določen. Če je $r < n$, lahko za $n - r$ neznank izberemo poljubne vrednosti, ostalih r neznank je z njimi natanko določenih. Sistem ima v tem primeru $(n - r)$-parametrično družino rešitev.

Homogeni sistem enačb je vedno rešljiv, saj imata osnovna matrika sistema in razširjena matrika sistema enak rang. Če je osnovna matrika sistema kvadratna in je njena determinanta različna od nič, ima sistem le trivialno rešitev (vse neznanke so enake 0). Homogeni sistem enačb z več neznakami, kot je število enačb, ima neničelno rešitev.

Če je matrika sistema linearnih enačb obrnljiva, lahko za reševanje sistema enačb uporabimo *Cramerjevo pravilo*. V tem primeru rešitve izračunamo po obrazcu $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Z A smo označili osnovno matriko sistema in z A_k matriko, ki jo dobimo iz A tako, da v njej nadomestimo k-ti stolpec s stolpcem desnih strani enačb, torej s stolpcem B.

Najučinkovitejša metoda za reševanje sistemov linearnih enačb je *Gaussova eliminacijska metoda*. S to metodo danemu sistemu linearnih enačb priredimo ekvivalenten sistem, iz katerega rešitve hitreje izračunamo. Sistema enačb sta *ekvivalentna*, če imata isto množico rešitev. Ker je sistem enačb z razširjeno matriko sistema natanko določen, lahko nad vrsticami take matrike izvajamo enake transformacije kot nad enačbami sistema, ko ohranjamo njegovo ekvivalentnost. To pomeni, da smemo v razširjeni matriki sistema:

– vrstico pomnožiti z neničelnim številom,

– vrstici prišteti drugo vrstico,
– vrstici zamenjati med seboj.

Zaradi enostavnejšega zapisa bomo postopek Gaussove eliminacijske metode prikazali za primer, ko je število enačb v sistemu enako številu neznank. Sicer Gaussovo eliminacijsko metodo uporabljamo tudi v primeru, ko je število enačb različno od števila neznank.

Sistemu linearnih enačb priredimo razširjeno matriko sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix},$$

ki jo z dovoljenimi transformacijami preoblikujemo v matriko oblike

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}.$$

Tej matriki pripada sistem enačb

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n &= d_3 \\ &\vdots \\ c_{nn}x_n &= d_n, \end{aligned}$$

iz katerega rešitve enostavno izračunamo. Iz zadnje enačbe izračunamo neznanko x_n in jo vstavimo v predzadnjo enačbo, iz katere izračunamo neznanko x_{n-1}. Obe izračunani neznanki vstavimo v predpredzadnjo enačbo, iz katere izračunamo neznanko x_{n-2}. Postopek nadaljujemo; na koncu iz prve enačbe izračunamo še neznanko x_1. Rešitev danega sistema linearnih enačb je urejena n-terica števil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V primeru, ko je število enačb (r) manjše od števila neznak (n), poteka postopek Gaussove eliminacijske metode podobno. V zadnji enačbi dobimo namesto ene neznanke $n-r+1$ neznank. Eno izmed njih izrazimo s preostalimi $n-r$ neznankami. Rešitev je v tem primeru $(n-r)$-parametrična družina. Vse preostale neznake izračunamo po prej opisanem postopku.

Če je število enačb večje od števila neznank, sta v rešljivem sistemu vsaj dve enačbi sistema linearno odvisni, kar opazimo tudi kot linearno odvisni vrstici ustrezne prirejene matrike.

3.3 Rešeni zgledi

3.3.1 Rešite sistem linearnih enačb:

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y - z &= -4 \\ 3x - 2y - z &= 5, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
V obeh primerih bomo rešitve sistema iskali z Gaussovo eliminacijsko metodo. Sistemu priredimo razširjeno matriko sistema, ki jo preoblikujemo v več korakih:

a) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-3) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_3^* = 8 \cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{bmatrix}.$$

Zadnji matriki priredimo sistem linearnih enačb, ki je ekvivalenten prvotnemu:

$$x + 2y + z = 3$$

$$y - 3z = -10$$

$$-28z = -84.$$

Iz zadnje enačbe takoj sledi $z = 3$. Če to upoštevamo v drugi enačbi, izračunamo y:

$$y = 3 \cdot 3 - 10 = -1.$$

Na koncu iz prve enačbe izračunamo x:

$$x = (-2) \cdot (-1) - 3 + 3 = 2.$$

Sistem ima natanko eno rešitev $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$.

b) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-3) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadnji matriki priredimo sistem linearnih enačb, ki je ekvivalenten prvotnemu:

$$x + 2y - 3z = 1$$

$$y - 2z = 2.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo y:

$$y = 2z + 2$$

in nazadnje iz prve enačbe izračunamo x (pri tem upoštevamo $y = 2z + 2$):

$$x = -2(2z + 2) + 3z + 1 = -z - 3.$$

Rešitev sistema enačb, ki je enoparametrična, lahko zapišemo v obliki $x = -t - 3,\ y = 2t + 2,$ $z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

3.3.2 Rešite sistem linearnih enačb:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
Za reševanje bomo v obeh primerih spet uporabili Gaussovo eliminacijsko metodo. Sistemu priredimo razširjeno matriko sistema, ki jo preoblikujemo v več korakih:

a) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-3) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_3^* = 2 \cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & -1 & 9 & 9 \\ 3 & 5 & -12 & 17 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadnji vrstici zadnje matrike priredimo enačbo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3$ oziroma enakost $0 = -3$, ki pomeni protislovje. Dani sistem linearnih enačb tako nima rešitve.

b) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-3) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadnji matriki priredimo sistem linearnih enačb, ki je ekvivalenten prvotnemu:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5$$

$$x_3 - 7x_4 = -7.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo x_3:

$$x_3 = 7x_4 - 7,$$

iz prve enačbe izrazimo x_1 (pri tem upoštevamo $x_3 = 7x_4 - 7$):

$$x_1 = -x_2 + 2(7x_4 - 7) - 4x_4 + 5 = -x_2 + 10x_4 - 9.$$

Rešitev sistema enačb, ki je dvoparametrična, lahko zapišemo v obliki:

$$x_1 = -u + 10v - 9,\ x_2 = u,\ x_3 = 7v - 7,\ x_4 = v,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

3.3.3 Poiščite vse rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} &3x - y + z - w = 4 \\ &x + 2y - z - w = -1 \\ &4x + 2z = 4 \\ &2x - 3y + 2z = 5. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
Rešitve sistema enačb bomo poiskali z Gaussovo eliminacijsko metodo. Sistemu priredimo razširjeno matriko sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

V prvem stolpcu bomo (razen v prvi vrstici) pridobili ničle. Eden izmed možnih načinov reševanja je naslednji:

1. korak: drugo vrstico zapišemo na prvo mesto in uporabimo pravila:

$$V_2^* = (-3) \cdot V_1^* + V_1,\ V_3^* = (-4) \cdot V_1^* + V_3 \text{ in } V_4^* = (-2) \cdot V_1^* + V_4;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravila:

$$V_2^* = \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot V_2,\ V_3^* = 8 \cdot V_2^* + V_3 \text{ in } V_4^* = (-1) \cdot V_2 + V_4.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadnji matriki priredimo sistem enačb, ki je ekvivalenten prvotnemu:

$$x + 2y - z - w = -1$$

$$y - \frac{4}{7}z - \frac{2}{7}w = -1$$

$$\frac{10}{7}z + \frac{12}{7}w = 0.$$

Iz tretje enačbe izrazimo $z = -\frac{6}{5}w,\ w \in \mathbb{R}$. Zaradi enostavnejšega zapisa brez ulomkov lahko postavimo $w = 5t,\ t \in \mathbb{R}$. Potem je $z = -6t$. Iz druge enačbe izračunamo y:

$$y = \frac{4}{7} \cdot (-6t) + \frac{2}{7} \cdot 5t - 1 = -2t - 1.$$

Nazadnje iz prve enačbe izračunamo x:

$$x = -2(-2t - 1) - 6t + 5t - 1 = 3t + 1.$$

Rešitev danega sistema enačb je torej enoparametrična:

$$x = 3t + 1,\ y = -2t - 1,\ z = -6t,\ w = 5t,\ t \in \mathbb{R}.$$

3.3.4 Poiščite vse rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3u &= 7 \\ x + 2z + u + 2v &= 8 \\ x + 3y + 4u - 3v &= 2 \\ 2y - z + 2u - 3v &= -3. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
Rešitve sistema enačb bomo poiskali z Gaussovo eliminacijsko metodo. Sistemu priredimo razširjeno matriko sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

V prvem stolpcu bomo (razen v prvi vrstici) pridobili ničle. Eden izmed možnih načinov reševanja je naslednji:

1. korak: tretjo vrstico zapišemo na prvo mesto in uporabimo pravila:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1^* + V_1,\ V_3^* = (-1) \cdot V_1^* + V_2 \text{ in } V_4^* = V_4;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravila:

$$V_2^* = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot V_2,\ V_3^* = 3 \cdot V_2^* + V_3 \text{ in } V_4^* = (-2) \cdot V_2^* + V_4;$$

3. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravila:

$$V_2^* = 5 \cdot V_2,\ V_3^* = \frac{5}{7} \cdot V_3 \text{ in } V_4^* = \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot V_4;$$

4. korak: prve tri vrstice prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_4^* = (-1) \cdot V_3 + V_4.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{7}{5} & \frac{21}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadnji matriki priredimo sistem enačb, ki je ekvivalenten prvotnemu:

$$x + 3y + 4u - 3v = 2$$

$$5y - z + 5u - 6v = -3$$

$$z + v = 3.$$

Iz tretje enačbe izrazimo $z = -v + 3,\ v \in \mathbb{R}.$ Iz druge enačbe izrazimo y kot funkcijo u in v:

$$y = \frac{1}{5}(z - 5u + 6v - 3) = \frac{1}{5}(-v + 3 - 5u + 6v - 3) = \frac{1}{5}(-5u + 5v) = v - u, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Nazadnje iz prve enačbe izračunamo x kot funkcijo u in v:

$$x = -3y - 4u + 3v + 2 = -3(v - u) - 4u + 3v + 2 = -u + 2.$$

Rešitev danega sistema enačb je torej dvoparametrična:

$$x = -u + 2,\ y = -u + v,\ z = -v + 3,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

3.3.5 Rešite sistem linearnih enačb z uporabo Cramerjevega pravila:

a) $$\begin{aligned} ax_1 - 2bx_2 &= c \\ 3ax_1 - 5bx_2 &= 2c, \\ a,\ b &\neq 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
Pri uporabi Cramerjevega pravila izračunamo determinanto osnovne matrike sistema A in determinante matrik A_k, $k = 1, 2$ oziroma $k = 1, 2, 3$, v katerih smo k-ti stolpec nadomestili s stolpcem desnih strani. Rešitve izračunamo po obrazcu $x_k = \dfrac{\det A_k}{\det A}$, $k = 1, 2$ oziroma $k = 1, 2, 3$:

a) $$\det A = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = -5ab - (-6ab) = ab,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -5bc + 4bc = -bc,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = 2abc - 3ac = -ac.$$

Rešitvi sta v tem primeru:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-bc}{ab} = -\frac{c}{a} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-ac}{ab} = -\frac{c}{b}.$$

b) Pri računanju detreminant bomo tokrat uporabili Sarrusovo pravilo. Tako dobimo:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right| = -4 - 9 + 1 - 3 - 2 - 6 = -23,$$

$$\det A_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 2 + 3 + 6 + 1 + 1 - 36 = -23,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -24 - 3 - 1 - 18 + 2 - 2 = -46,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = -2 - 54 - 1 + 3 - 12 - 3 = -69.$$

Rešitve sistema linearnih enačb so v tem primeru:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-23}{-23} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-46}{-23} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-69}{-23} = 3.$$

3.3.6 Poiščite rešitve sistema linearnih enačb, če obstajajo:

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 3, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:

a) Izračunajmo ranga osnovne in razširjene matrike sistema. Sistemu priredimo razširjeno matriko sistema in jo enkrat transformiramo tako, da prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo $V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2$. Tako imamo:

$$\left[A \,\vdots\, B\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iz preoblikovane matrike razberemo, da je rang $A = 1$ in rang $\left[A \,\vdots\, B\right] = 2$. Ker ranga osnovne in razširjene matrike sistema nista enaka, sistem linearnih enačb ni rešljiv.

b) Sistemu linearnih enačb priredimo matriko, ki jo preoblikujemo v dveh korakih:

1. korak: prepišemo vse vrstice razen druge in uporabimo pravilo

$$V_2^* = (-1) \cdot V_1 + V_2;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravila:

$$V_2^* = V_3,\ V_3^* = V_2,\ V_4^* = (-1)\cdot V_3^* + V_4 \text{ in } V_5^* = (-1)\cdot V_4^* + V_5.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovi zadnje matrike ugotovimo, da sta ranga osnovne in razširjene matrike sistema enaka 4, torej je sistem rešljiv. Danemu sistemu enačb priredimo ekvivalenten sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe sledi $x_4 = -x_5 - 1$,
iz druge enačbe sledi $x_2 = -x_3 - x_4 - 3 = -3 - (-x_5 - 1) - 3 = x_5 - 5$,
iz prve $x_1 = -x_2 + 1 = -(x_5 - 5) + 1 = -x_5 + 6$.

Rešitev sistema enačb, ki je enoparametrična, lahko zapišemo v obliki $x_1 = -t + 6,\ x_2 = t - 5,\ x_3 = 3,\ x_4 = -t - 1,\ x_5 = t,\ t \in \mathbb{R}$ (pri tem smo x_5 nadomestili s t).

3.3.7 Ugotovite, ali imajo dani homogeni sistemi linearnih enačb netrivialne rešitve. Če obstajajo, jih poiščite.

a) $$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 4y + 2z &= 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 0, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4u &= 0 \\ 2x - 3y + 5z - 7u &= 0 \\ 5x + 6y - 9z + 8u &= 0. \end{aligned}$$

Reševanje naloge:
V vseh treh primerih danemu sistemu linearnih enačb priredimo matriko sistema in jo z elementarnimi transformacijami preuredimo tako, da iz nje lahko odčitamo rang:

a) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2)\cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-1)\cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo ter uporabimo pravilo:

$$V_3^* = (-1)\cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrike A je enak 2, torej je manjši od števila neznank. Sistem bo imel tudi netrivialne rešitve. Na osnovi zadnje matrike danemu sistemu enačb priredimo ekvivalenten sistem:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -5y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Ker ima sistem dve enačbi s tremi neznankami, ima netrivialno rešitev z eno prosto neznanko. Iz druge enačbe sledi $y = \frac{3}{5}z$ in iz prve $x = -\frac{3}{5}z + z = \frac{2}{5}z$. Rešitev lahko zapišemo v obliki $x = 2t,\ y = 3t,\ z = 5t,\ t \in \mathbb{R}$.

b) 1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-3) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo in drugo vrstico prepišemo ter uporabimo pravilo:

$$V_3^* = \frac{1}{2} \cdot V_2 + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

Ugotovimo, da je rang $B = 3$ in je enak številu neznank. Sistem enačb ima natanko eno rešitev - torej trivialno rešitev $x = y = z = 0$.

c) Ker je sistem enačb sestavljen iz treh enačb s štirimi neznankami, je rang prirejene matrike sistema manjši od števila neznank in sistem zagotovo ima netrivialno rešitev. Sistemu enačb priredimo matriko in jo preoblikujemo z naslednjim postopkom:

1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-5) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili

$$V_2^* = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot V_3 \text{ in } V_3^* = 7 \cdot V_2^* + V_2.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -7 \\ 5 & 6 & -9 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -15 \\ 0 & -4 & 6 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}.$$

Danemu sistemu enačb priredimo ekvivalenten sistem

$$\begin{aligned} &x + 2y - 3z + 4u = 0 \\ &y - \frac{3}{2}z + 3u = 0 \\ &\frac{1}{2}z + 6u = 0. \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe sledi $z = -12u$,
iz druge enačbe $y = \frac{3}{2} \cdot (-12)u - 3u = -21u$
in iz prve enačbe $x = (-2) \cdot (-21u) + 3 \cdot (-12u) - 4u = 2u$.

Rešitev lahko zapišemo v obliki $x = 2t,\ y = -21t,\ z = -12t,\ u = t,\ t \in \mathbb{R}$.

3.3.8 Za katere $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} &ax - a^2y + z + au = 0 \\ &x + ay + 2z + 4au = 4 \\ &ay + z + 2au = 2 \end{aligned}$$

rešljiv? Za taka števila a zapišite rešitve sistema.

Reševanje naloge:
Sistem linearnih enačb je rešljiv, če rang osnovne matrike sovpada z rangom razširjene matrike sistema. Razširjeno matriko koeficientov sistema bomo najprej preoblikovali tako, da bomo v vsaki naslednji vrstici na začetku vrstice pridobili vsaj eno ničlo več kot v prejšnji vrstici. Postopek bomo izvedli z naslednjimi koraki:

1. korak: tretjo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_1^* = V_2 \text{ in } V_2^* = (-a) \cdot V_1^* + V_1;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = V_3 \text{ in } V_3^* = 2a \cdot V_2^* + V_2;$$

3. korak: drugo in tretjo vrstico prepišemo in uporabimo pravilo:

$$V_1^* = (-2) \cdot V_2 + V_1.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$A = \begin{bmatrix} a & -a^2 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 2 & 4a & 4 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 4a & 4 \\ 0 & -2a^2 & -2a+1 & -4a^2+a & -4a \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 4a & 4 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Za $a = 0$ dobimo matriko:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ugotovimo, da je v tem primeru rang $A = 2$ in rang $[A\vdots B] = 3$. Ker rang osnovne matrike sistema ni enak rangu razširjene matrike sistema, sistem linearnih enačb nima rešitve.

Za $a \neq 0$ je rang $A =$ rang $[A\vdots B] = 3$ in sistem enačb je rešljiv. Zadnji preoblikovani matriki priredimo sistem enačb:

$$x - ay = 0$$

$$ay + z + 2au = 2$$

$$z + au = 0.$$

Iz zadnje enačbe sledi $z = -au$. To zvezo upoštevamo v drugi enačbi, iz katere izračunamo najprej ay in nato še y:

$$ay = -(-au) - 2au + 2 = -au + 2,$$

$$y = -u + \frac{2}{a}.$$

Nazadnje še iz prve enačbe izračunamo x:

$$x = a\left(-u + \frac{2}{a}\right) = -au + 2.$$

Rešitev je enoparametrična; zapišemo jo lahko v obliki $x = -at + 2$, $y = -t + \frac{2}{a}$, $z = -at$, $u = t$, $t \in \mathbb{R}$.

3.3.9 Določite realno število a tako, da bo imel sistem enačb

$$x - y - z = 0$$
$$2x - 3y + az = 0$$
$$(a-2)x + y + 4z = 0$$

netrivialne rešitve. Katere so te rešitve?

Reševanje naloge:
Homogeni sistem linearnih enačb bo imel netrivialne rešitve, ko bo rang ustrezne matrike sistema manjši od števila neznank. Matriko koeficientov sistema bomo najprej preoblikovali v zgornje trikotno matriko z elementarnimi vrstičnimi transformacijami, ki ohranjajo rang matrike (in rešitve sistema). V prvem stolpcu matrike A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & a \\ a-2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

bomo (razen v prvi vrstici) pridobili ničle. Eden izmed možnih načinov reševanja je naslednji:

1. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2 \text{ in } V_3^* = (-a+2) \cdot V_1 + V_3;$$

2. korak: prvo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_2^* = (-1) \cdot V_2 \text{ in } V_3^* = (-a+1) \cdot V_2^* + V_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov matriko preoblikujemo na naslednji način:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & a \\ a-2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -(a+2) \\ 0 & 0 & a(a+2) \end{bmatrix}.$$

Rang matrike A bo manjši od 3 za $a = 0$ ali $a = -2$. V obeh primerih je $\mathrm{rang}A = 2$, torej sta rešitvi enoparametrični.

Za vrednost $a = 0$ dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ki ji priredimo sistem enačb:

$$x - y - z = 0$$

$$y - 2z = 0.$$

Iz druge enačbe sledi $y = 2z$ in iz prve $x = y + z = 3z$. Izberimo $z = t,\ t \in \mathbb{R}$ in dobimo rešitev $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Za vrednost $a = -2$ dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ki ji priredimo sistem enačb:

$$x - y - z = 0$$

$$y = 0.$$

Iz prve enačbe sledi $x = z$. Rešitev sistema enačb lahko v tem primeru zapišemo kot $x = u$, $y = 0,\ z = u,\ u \in \mathbb{R}$.

3.3.10 S Cramerjevim pravilom raziščite rešljivost sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

v odvisnosti od parametra λ.

Reševanje naloge:
Pri obravnavi sistema bomo uporabili Cramerjevo pravilo. S tem namenom izračunamo determinanto osnovne matrike sistema $D(\lambda)$ in determinante $D_i(\lambda),\ i = 1,2,3,$ ki jih dobimo iz $D(\lambda)$ po zamenjavi i-tega stolpca s stolpcem desnih strani. Pri računanju determinant bomo uporabili Sarrusovo pravilo. Tako dobimo:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{matrix} = \lambda^3 + 1 + 1 - (\lambda + \lambda + \lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

$$D_1(\lambda) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 1 & \lambda & \lambda^2 & 1 \end{array}\right. = \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda - (\lambda^3 + 1 + \lambda^2) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(1 - \lambda^2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

$$D_2(\lambda) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda & 1 & \lambda^2 \end{array}\right. = \lambda^3 + 1 + \lambda^2 - (\lambda + \lambda^3 + \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 =$$

$$= (\lambda - 1)^2,$$

$$D_3(\lambda) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 & 1 & 1 \end{array}\right. = \lambda^4 + \lambda + 1 - (\lambda + \lambda^2 + \lambda^2) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Za $\lambda \neq 1,\ -2$ je sistem rešljiv in ima natanko eno rešitev. Po Cramerjevem pravilu je v tem primeru:

$$x = \frac{D_1(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2},$$

$$y = \frac{D_2(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2},$$

$$z = \frac{D_3(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}.$$

Za $\lambda = 1$ ima dani sistem enačb obliko:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1, \end{aligned}$$

kar pomeni, da se sistem zreducira v eno enačbo s tremi neznankami. Tak sistem ima dvoparametrično družino rešitev $x = -u - v + 1,\ y = u,\ z = v,\ u, v \in \mathbb{R}$.

Za $\lambda = -2$ ima dani sistem enačb obliko

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \\ x + y - 2z &= 4. \end{aligned}$$

Če seštejemo vse tri enačbe, pridemo do zveze $0 = 3$, kar pomeni, da sistem nima rešitve.

3.3.11 Določite parameter p tako, da bo sistem linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
&2px - 3y + p - 3 = 0\\
&3x - 2y + 1 = 0\\
&4x - py + 2 = 0
\end{aligned}
$$

imel rešitev.

Reševanje naloge:
Sistem linearnih enačb bo rešljiv, če bosta imeli osnovna in razširjena matrika sistema enak rang. S postopkom, opisanim v nadaljevanju, bomo razširjeno matriko sistema preoblikovali tako, da bomo iz nje hkrati določili rang osnovne in rang razširjene matrike sistema.

Razširjeno matriko sistema bomo preoblikovali na naslednji način:

1. korak: drugo vrstico prepišemo in uporabimo pravili:

$$V_1^* = (-p+3) \cdot V_2 + V_1 \text{ in } V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3;$$

2. korak: drugi stolpec prepišemo in uporabimo pravili za spreminjanje stolpcev:

$$S_1^* = S_3 \text{ in } S_3^* = S_1;$$

3. korak: uporabimo pravila:

$$V_1^* = (-1) \cdot V_2,\ V_2^* = V_3 \text{ in } V_3^* = V_1;$$

4. korak:uporabimo pravila:

$$S_1^* = S_1,\ S_2^* = (-2) \cdot S_1 + S_2 \text{ in } S_3^* = 3 \cdot S_1 + S_3.$$

Z upoštevanjem navedenih korakov razširjeno matriko sistema preoblikujemo na naslednji način:

$$
\left[A \,\vdots\, B\right] = \begin{bmatrix} 2p & -3 & -p+3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -p & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -p+9 & 2p-9 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4-p & 0 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 0 & 2p-9 & -p+9 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4-p & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4-p & -2 \\ 0 & 2p-9 & -p+9 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-p & -2 \\ 0 & 2p-9 & 9-p \end{bmatrix}.
$$

Iz preoblikovane matrike ugotovimo, da je rang osnovne matrike sistema enak 2, saj števili $4-p$

in $2p-9$ nista hkrati enaki 0 za nobeno vrednost $p \in \mathbb{R}$. Če naj bo tudi rang $\left[A \vdots B\right] = 2$, mora biti determinanta zadnje zapisane matrike enaka 0. Izračunajmo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-p & -2 \\ 0 & 2p-9 & 9-p \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4-p & -2 \\ 2p-9 & 9-p \end{vmatrix} =$$

$$= (4-p)(9-p) - (2p-9) \cdot (-2) = p^2 - 9p + 18 = (p-6)(p-3) = 0$$

oziroma $p = 3$ ali $p = 6$.

Za $p = 3$ ima dani sistem enačb obliko:

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 0 \\ 3x - 2y &= -1 \\ 4x - 3y &= -2. \end{aligned}$$

Če drugo enačbo pomnožimo z 2 in odštejemo od prve, dobimo $y = 2$ in nato iz prve enačbe $x = 1$.

Za $p = 6$ ima dani sistem enačb obliko:

$$\begin{aligned} 12x - 3y &= -3 \\ 3x - 2y &= -1 \\ 4x - 6y &= -2. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo pomnožimo z $\left(-\frac{2}{3}\right)$ in prištejemo k drugi, dobimo $x = -\frac{1}{5}$ in nato iz prve enačbe $y = \frac{1}{5}$.

3.4 Zaključek

Ključne besede tretjega poglavja: sistem m linearnih enačb z n neznankami, homogeni sistem, nehomogeni sistem, rešitev sistema, osnovna matrika sistema, razširjena matrika sistema, Cramerjevo pravilo, Gaussova eliminacijska metoda.

Povzetek: Sistem m linearnih enačb z n neznankami nad realnimi števili ima obliko:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \,. \end{aligned}$$

Števila a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, so koeficienti sistema, števila b_i, $i = 1,2,\ldots,m$, so desne strani enačb, x_k, $k = 1,2,\dots,n$, so neznanke. Sistem linearnih enačb je homogen, če so vsi b_i, $i = 1,2,\dots,m$, enaki 0. Če je vsaj eno izmed števil $b_i \neq 0$, je sistem nehomogen. Rešitve sistema linearnih enačb so urejene n-terice $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ki zadoščajo vsem enačbam hkrati. Sistem m linearnih enačb z n neznankami je rešljiv natanko takrat, ko imata osnovna matrika in razširjena matrika sistema enak rang. Pri reševanju sistemov največkrat uporabimo Gaussovo eliminacijsko metodo, s katero danemu sistemu priredimo ekvivalenten sistem, iz katerega lahko rešitve enostavneje izračunamo. Če je osnovna matrika sistema obrnljiva in njena dimenzija ni prevelika (v praksi 2×2 ali 3×3), lahko poiščemo rešitve sistema tudi s Cramerjevim pravilom.

Besedila nalog v tretjem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3], [4] in [5], teorija pa iz [2].

Poglavje 4

VEKTORJI

4.1 Namen poglavja

V četrtem poglavju bomo:

- definirali vektorje kot urejene n-terice realnih števil in vpeljali dve osnovni operaciji z vektorji (seštevanje vektorjev in množenje vektorja s skalarjem);
- definirali pojem linearna kombinacija vektorjev;
- definirali skalarni produkt vektorjev iz $\mathbb{R}^n$ in vektorski produkt vektorjev iz $\mathbb{R}^3$ ter omenjeni operaciji uporabili pri reševanju nalog;
- znali izračunati dolžino vektorja in zapisati pravokotno projekcijo vektorja na dani vektor;
- v različnih situacijah izračunali kot med neničelnima vektorjema;
- definirali mešani produkt treh vektorjev, ga izračunali in pri reševanju nalog uporabili njegov geometrijski pomen;
- znali zapisati različne oblike enačbe ravnine in premice;
- določili razdaljo točke do ravnine, točke do premice in razdaljo med premicama;
- znali določiti pravokotno projekcijo točke oziroma premice na dano ravnino.

4. 2 Povzetek teorije

Vektor je urejena n-terica števil, ki jo lahko predstavimo tudi v obliki stolpca ali vrstice:

$$\vec{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \vec{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

$a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$. Ta števila imenujemo *komponente vektorja* $\vec{a}$. Vektorja sta *enaka*, če se ujemata v vseh svojih komponentah.

Množenje vektorja s skalarjem:

$$\alpha \in \mathbb{R},\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n;$$

$$\alpha\, \vec{a} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}.$$

Seštevanje vektorjev:

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$;

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^n$ sta *kolinearna*, če obstaja tak skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $\vec{b} = \alpha\, \vec{a}$.

Naj bodo vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ in skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{c} = \alpha_1\, \vec{a}_1 + \alpha_2\, \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\, \vec{a}_n$$

imenujemo *linearna kombinacija* vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^n$ je operacija, ki vektorjema priredi skalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Število

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

imenujemo *dolžina* ali *evklidska norma* vektorja $\vec{a}$. Vsak vektor z dolžino 1 imenujemo *enotski vektor*.

Kot φ med neničelnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^n$ je definiran z naslednjo zvezo:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}.$$

Za poljubna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ velja $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi$.

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^n$ sta *pravokotna* natanko takrat, ko je njun skalarni produkt enak 0.

Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna neničelna vektorja. Vektor $\vec{p}$, ki je kolinearen z vektorjem $\vec{b}$ in za katerega je vektor $\vec{a} - \vec{p}$ pravokoten na vektor $\vec{b}$, imenujemo *pravokotna projekcija* vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$. Izračunamo ga po obrazcu $\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$.

Vsak vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ lahko na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo izbranih treh vektorjev:

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}.$$

Vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ so enotski, paroma pravokotni in ležijo v smereh, ki jih določajo koordinatne osi. Imenujemo jih *vektorji standardne baze prostora* $\mathbb{R}^3$.

Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ poljuben vektor, z α, β in γ pa označimo kote, ki jih vektor $\vec{a}$ po vrsti oklepa s koordinatnimi osmi x, y in z. Komponente enotskega vektorja $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{a}$ izračunamo kot $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ in jih imenujemo *smerni kosinusi vektorja* $\vec{a}$. Pri tem velja zveza:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Vektorski produkt je operacija, ki vektorjema $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ priredi vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Naj bosta $\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$ in $\vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}$. Pri računanju komponent vektorskega produkta vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ si lahko pomagamo z "determinanto"

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

ki jo razvijemo po prvi vrstici. Pri tem velja:

a) Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je enak $\vec{0}$ natanko takrat, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

b) Velikost vektorskega produkta vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga ta vektorja napenjata, kar pomeni $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, pri čemer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

c) Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Če vektorski produkt dveh vektorjev skalarno pomnožimo s tretjim vektorjem, dobimo t. i. *mešani produkt*. Vpeljali bomo naslednjo oznako:

$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Torej je

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right), \qquad \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Naj bodo spet $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Potem je:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Velja tudi:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Absolutna vrednost mešanega produkta $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ je enaka prostornini paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. *Paralelepiped* je geometrijsko telo, ki ga omejujejo trije pari skladnih vzporednih paralelogramov.

Naj bodo $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ in $A_4(x_4,y_4,z_4)$ oglišča tristrane piramide. Njeno prostornino izračunamo po obrazcu:

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|$$

(zunanji črti pomenita absolutno vrednost determinante).

Vektorje v prostoru $\mathbb{R}^3$ lahko uporabimo tudi kot pripomoček za določanje različnih oblik enačbe ravnine in premice, prav tako tudi za izračun oddaljenosti točke od ravnine oziroma premice ali za določanje razdalje med dvema premicama.

Ravnina v prostoru je lahko določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$, ki leži v tej ravnini, in z vektorjem $\vec{n}$, ki je pravokoten na to ravnino (imenujemo ga *normalni vektor* ravnine). Naj točka $T(x,y,z)$ s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ leži v tej ravnini.

Enačba ravnine v vektorski obliki: $\quad \left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) \cdot \vec{n} = 0.$

S*plošna oblike enačbe ravnine*: $\quad n_1x + n_2y + n_3z = d,$

pri čemer je $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ in $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$.

Segmentna ali *odsekovna oblika enačbe ravnine*: $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Absolutne vrednosti števil $a = \frac{d}{n_1}$, $b = \frac{d}{n_2}$ in $c = \frac{d}{n_3}$ predstavljajo dolžine odsekov (segmentov), ki jih ravnina odreže od koordinatnih osi.

Ravnina je natanko določena tudi s tremi nekolinearnimi točkami $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ in $C(c_1,c_2,c_3)$. Točka $T(x,y,z)$ s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ leži v tej ravnini, če so vektorji $\vec{r}_A - \vec{r}$, $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ in $\vec{r}_A - \vec{r}_C$ komplanarni. V tem primeru mora biti njihov mešani produkt enak 0:

$$\left(\vec{r}_A - \vec{r}, \vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{r}_A - \vec{r}_C\right) = 0$$

oziroma

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ko to determinanto izračunamo in zapis uredimo, dobimo splošno obliko enačbe ravnine.

Premica v prostoru je določena s točko $A(a_1,a_2,a_3)$ in smernim vektorjem $\vec{s}$.

Enačba premice v vektorski obliki: $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{s}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

Parametrična oblika enačbe premice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda s_1 \\ y &= a_2 + \lambda s_2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}; \\ z &= a_3 + \lambda s_3 \end{aligned}$$

Kanonična oblika enačbe premice: $\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}$.

Razdalja točke do ravnine

Vpeljimo naslednje oznake:

π – ravnina,
A – točka, ki leži v ravnini π,
P – točka, ki leži v prostoru $\mathbb{R}^3$,
d – razdalja točke P do ravnine π,
$\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ – krajevna vektorja točk A in P,
$\vec{n}$ – normalni vektor ravnine π,

$$d = \left|\left(\vec{r}_P - \vec{r}_A\right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|.$$

Razdalja točke do premice

Spet vpeljemo nekaj oznak:

p – premica,
A – točka na premici p,
P – točka, ki leži v prostoru $\mathbb{R}^3$,
d – razdalja točke P do premice p,
$\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ – krajevna vektorja točk A in P,
$\vec{s}$ – smerni vektor premice p,

$$d = \frac{\left|\vec{s} \times \left(\vec{r}_P - \vec{r}_A\right)\right|}{\left|\vec{s}\right|}.$$

Razdalja med premicama

V tem primeru bomo ločili dve možnosti.

I. Premici sta vzporedni: razdalja med premicama je enaka razdalji katerekoli točke na prvi premici od druge premice.

II. Premici nista vzporedni (sta mimobežnici): premici sta nosilki dveh nevzporednih robov paralelepipeda, ki ne ležita v isti ravnini.

Za določitev obrazca za računanje razdalje med mimobežnicama bomo spet vpeljali nekaj oznak:

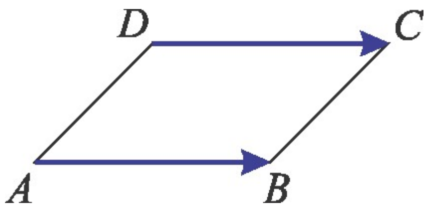
p_1, p_2 – mimobežni premici,
A – točka na premici p_2, B – točka na premici p_1,
$\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ – krajevna vektorja točk A in B,
$\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ – smerna vektorja premic p_1 in p_2,
d – razdalja med premicama p_1 in p_2,

$$d = \frac{\left|\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_A - \vec{r}_B\right)\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.$$

4.3 Rešeni zgledi

4.3.1 Dana so tri oglišča paralelograma $ABCD$: $A(1,-2,0)$, $B(2,1,3)$ **in** $C(-2,0,5)$. **Določite četrto oglišče in dolžino diagonale** BD.

Reševanje naloge:
S slike



Slika 4.1. Paralelogram *ABCD*.

razberemo, da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Če označimo koordinate točke D z d_1, d_2 in d_3, velja

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow$$

$$(2-1, 1-(-2), 3-0) = (-2-d_1, 0-d_2, 5-d_3) \quad \Rightarrow$$

$$1 = -2-d_1, \quad 3 = -d_2, \quad 3 = 5-d_3.$$

Iz zadnje vrstice sledi $d_1 = -3$, $d_2 = -3$, $d_3 = 2$.

Izračunajmo še dolžino diagonale BD:

$$\overline{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}.$$

4.3.2 Dani so vektorji $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ in $\vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$. Zapišite vektor $\vec{c}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Reševanje naloge:
Če je vektor $\vec{c}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, obstajata skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tako da je $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$. Vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ zapišemo po komponentah in upoštevamo navedeno zvezo:

$$\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$$

$$(9,4) = \alpha(2,-3) + \beta(1,-2).$$

Zgornji zapis preoblikujemo v sistem dveh enačb z dvema neznankama, ki ga rešimo:

$$2\alpha + \beta = 9$$

$$-3\alpha - 2\beta = 4,$$

$\alpha = 22$, $\beta = -35$. Torej je $\vec{c} = 22\,\vec{a} - 35\,\vec{b}$.

4.3.3 Naj bodo $\vec{u} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$, $\vec{v} = 3\,\vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}$ in $\vec{w} = \vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$. Izračunajte:

a) $2\,\vec{u} - 3\,\vec{v} + 4\,\vec{w}$,

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ in $\vec{u} \cdot \vec{w}$,

c) $\vec{v} \times \vec{w}$,

d) $|\vec{u}|$ in $|\vec{v}|$.

Reševanje naloge:
Pri reševanju naloge bomo vektorje $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{w}$ najprej zapisali po komponentah. Tako je $\vec{u} = (2,-3,4)$, $\vec{v} = (3,1,-2)$ in $\vec{w} = (1,5,3)$. Nato uporabimo definicije seštevanja oziroma odštevanja vektorjev, skalarnega in vektorskega produkta ter dolžine vektorja:

a) $2\,\vec{u} - 3\,\vec{v} + 4\,\vec{w} = 2(2,-3,4) - 3(3,1,-2) + 4(1,5,3) =$

$(2 \cdot 2, 2 \cdot (-3), 2 \cdot 4) + ((-3) \cdot 3, (-3) \cdot 1, (-3) \cdot (-2)) + (4 \cdot 1, 4 \cdot 5, 4 \cdot 3) =$

$(4,-6,8) + (-9,-3,6) + (4,20,12) =$

$(4 - 9 + 4, -6 - 3 + 20, 8 + 6 + 12) = (-1,11,26).$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,-3,4) \cdot (3,1,-2) = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -5,$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2,-3,4) \cdot (1,5,3) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = -1.$

c) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 - 5 \cdot (-2), -(3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)), 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1) =$

$(13,-11,14).$

d) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$,

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

4.3.4 Dana sta vektorja $\vec{a} = m\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ in $\vec{b} = 4\,\vec{i} + m\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$. Določite m tako, da bosta vektorja pravokotna.

Reševanje naloge:

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko takrat, ko je njun skalarni produkt enak 0. V našem primeru je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (m,3,4) \cdot (4,m,-7) = 4m + 3m + 4 \cdot (-7) = 7m - 28 = 0,$$

od koder sledi $m = 4$.

4.3.5 Izračunajte kot med vektorjema $\vec{a} = \vec{i} + 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ in $\vec{b} = 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$.

Reševanje naloge:

Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo po obrazcu $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. V našem primeru je:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(1,3,-2) \cdot (0,4,-2)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}} =$$

$$\frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{70}}$$

oziroma $\varphi = \arccos \dfrac{8}{\sqrt{70}}$, kar je v stopinjah približno 17°.

4.3.6 Izračunajte kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če sta vektorja $\vec{p} = \vec{a} + 2\,\vec{b}$ in $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ enotska in pravokotna.

Reševanje naloge:

Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ bomo spet izračunali po obrazcu $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Iz besedila naloge sledi, da je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ (vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ sta enotska) in $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ (vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ sta pravokotna). Najprej izrazimo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ z vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{q}$. Zvezi $\vec{p} = \vec{a} + 2\,\vec{b}$ in $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ odštejemo (drugo od prve) in dobimo $3\,\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ oziroma $\vec{b} = \frac{1}{3}\left(\vec{p} - \vec{q}\right)$. Iz druge zveze nato sledi:

$$\vec{a} = \vec{q} + \vec{b} = \vec{q} + \frac{1}{3}\left(\vec{p} - \vec{q}\right) = \frac{1}{3}\,\vec{p} + \frac{2}{3}\,\vec{q}.$$

Sedaj izračunamo dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter njun skalarni produkt. V izračunih upoštevamo, da je $\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{q}\right| = 1$ in $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$. Dobimo:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}\vec{p} \cdot \vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q} \cdot \vec{p} + \frac{2}{9}\vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{4}{9}\vec{q} \cdot \vec{q}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}\vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{1}{9}\vec{q} \cdot \vec{p} - \frac{1}{9}\vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{1}{9}\vec{q} \cdot \vec{q}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\vec{p} \cdot \vec{p} + \frac{2}{9}\vec{q} \cdot \vec{p} - \frac{1}{9}\vec{p} \cdot \vec{q} - \frac{2}{9}\vec{q} \cdot \vec{q} = -\frac{1}{9}.$$

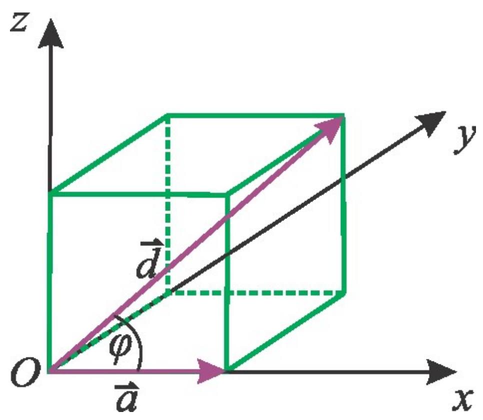
Potem je:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \arccos \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right).$$

Tako smo dobili kot $\varphi = 108{,}4°$.

4.3.7 Določite kot, ki ga rob kocke oklepa z glavno diagonalo.

Reševanje naloge:
Brez izgube na splošnosti lahko vzamemo enotsko kocko, ki jo postavimo v koordinatni sistem, kot kaže slika 2:



Slika 4.2. Kocka z robom a in glavno diagonalo d (označena sta ustrezna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{d}$).

S slike razberemo komponente vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{d}$:

$$\vec{a} = (1,0,0), \quad \vec{d} = (1,1,1).$$

Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{d}$ izračunamo na naslednji način:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{d}\right|} = \frac{(1,0,0) \cdot (1,1,1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Kot med robom kocke in telesno diagonalo je potem enak $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = 54,7°$.

4.3.8 Izračunajte skalarni produkt $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} - 6\vec{b}\right)$, če je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$, $\left|\vec{a}\right| = 4$ in $\left|\vec{b}\right| = 6$.

Reševanje naloge:
Pri izračunu upoštevamo lastnosti operacije skalarni produkt, definicijo dolžine vektorja in zvezo $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$. Dobimo:

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(5\vec{a} - 6\vec{b}\right) = 15\,\vec{a} \cdot \vec{a} - 10\,\vec{b} \cdot \vec{a} - 18\,\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\,\vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$15\left|\vec{a}\right|^2 - 28\,\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\left|\vec{b}\right|^2 = 15\left|\vec{a}\right|^2 - 28\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 12\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$15 \cdot 4^2 - 28 \cdot 4 \cdot 6\cos\frac{\pi}{3} + 12 \cdot 6^2 = 336.$$

4.3.9 Poiščite smerne kosinuse danega vektorja

a) $\vec{a} = 20\,\vec{i} + 30\,\vec{j} - 60\,\vec{k}$,

b) $\vec{b}$ je vektor z začetno točko $B_1(-1,-2,1)$ in s končno točko $B_2(3,-4,6)$.

Reševanje naloge:
Smerni kosinusi danega vektorja so kosinusi kotov, ki jih ta vektor oklepa s koordinatnimi osmi. Za vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ jih izračunamo po obrazcu:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|}.$$

a) Ugotovimo $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k} = (20,30,-60)$. Dolžina vektorja $\vec{a}$ je enaka:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = \sqrt{4900} = 70.$$

Smerni kosinusi so potem:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

b) Najprej izračunamo komponente vektorja $\vec{b}$:

$$\vec{b} = \overrightarrow{B_1B_2} = (3-(-1), -4-(-2), 6-1) = (4,-2,5).$$

Dolžina vektorja $\vec{b}$ je enaka:

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

smerni kosinusi pa:

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}, \quad \cos\beta = \frac{b_2}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{-2}{3\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{15},$$

$$\cos\gamma = \frac{b_3}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

4.3.10 Dana sta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Izračunajte dolžini projekcij $\vec{a}_b$ in $\vec{b}_a$.

Reševanje naloge:

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je vektor $\vec{a}_b$, določen z zvezo $\vec{a}_b = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$.

Dolžina tega vektorja je enaka

$$\left|\vec{a}_b\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^2}\left|\vec{b}\right| = \frac{|(2,2,1)\cdot(6,3,2)|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{|2\cdot 6 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2|}{\sqrt{49}} = \frac{20}{7}.$$

V drugem delu naloge v obrazcu za izračun projekcije $\vec{a}_b$ zamenjamo vlogi vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Tako imamo:

$$\left|\vec{b}_a\right| = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|^2}\left|\vec{a}\right| = \frac{|(2,2,1) \cdot (6,3,2)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{9}} = \frac{20}{3}.$$

4.3.11 Dokažite: če enotska vektorja iz $\mathbb{R}^3$ napenjata paralelogram s ploščino 1, sta pravokotna.

Reševanje naloge:
Naj vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ napenjata paralelogram. Iz besedila naloge razberemo: $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$ in $P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 1$, s φ pa označimo kot, ki ga oklepata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

1. način reševanja:
Velja:

$$1 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right||\sin\varphi| = |\sin\varphi|.$$

Ker je $|\sin\varphi| = 1$, je $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Z omejitvijo na oster kot vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ zares oklepata pravi kot.

2. način reševanja:
Nalogo lahko rešimo tudi z naslednjim izračunom:

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 = \left|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi =$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2(1 - \sin^2\varphi) = \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi =$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = 1 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Pokazali smo, da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, torej sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

4.3.12 Naj bosta $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^3$ poljubna vektorja in $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ poljubni skalarji. Izrazite ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{m} = \alpha\ \vec{a} + \beta\ \vec{b}$ in $\vec{n} = \gamma\ \vec{a} + \delta\ \vec{b}$, s ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Reševanje naloge:
Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je enaka velikosti njunega vektorskega produkta: $P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Najprej izračunajmo vektorski produkt vektorjev $\vec{m}$ in $\vec{n}$:

$$\vec{m} \times \vec{n} = \left(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}\right) \times \left(\gamma \vec{a} + \delta \vec{b}\right) =$$

$$= \alpha\gamma \vec{a} \times \vec{a} + \beta\gamma \vec{b} \times \vec{a} + \alpha\delta \vec{a} \times \vec{b} + \beta\delta \vec{b} \times \vec{b} =$$

$$= \alpha\gamma \vec{0} - \beta\gamma \vec{a} \times \vec{b} + \alpha\delta \vec{a} \times \vec{b} + \beta\delta \vec{0} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

Pri tem smo upoštevali, da je vektorski produkt vektorja s samim seboj ničelni vektor in da je operacija vektorski produkt antikomutativna. Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{m}$ in $\vec{n}$, je potem enaka:

$$P_1 = \left|\vec{m} \times \vec{n}\right| = \left|(\alpha\delta - \beta\gamma)\ \vec{a} \times \vec{b}\right| = |\alpha\delta - \beta\gamma|\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\alpha\delta - \beta\gamma| P.$$

4.3.13 Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\left|\vec{c}\right| = 1$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{3}$, kot med ravnino, določeno z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter vektorjem $\vec{c}$, pa je $\frac{\pi}{6}$. Izračunajte prostornino paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{c}$ in $\vec{o} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Reševanje naloge:
Prostornina paralelepipeda je enaka absolutni vrednosti mešanega produkta vektorjev, ki paralelepiped napenjajo. Pri reševanju naloge bomo uporabili lastnost mešanega produkta, ki sledi iz lastnosti determinant:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right), \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3.$$

Podobna lastnost velja tudi za primer, ko je vsota vektorjev zapisana na drugem ali tretjem mestu v mešanem produktu.

Prostornino paralelepipeda označimo z V. Potem je:

$$V = \left|\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{o}\right)\right| = \left|\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\right|.$$

Upoštevamo prej omenjeno lastnost mešanega produkta in dejstvo, da je mešani produkt vektorjev enak 0, če sta dva med njimi kolinearna:

$$V = \left| \left(\vec{a}, 2\vec{a}, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, 2\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, 2\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}\right) + \right.$$

$$\left(-\vec{b},2\vec{a},\vec{a}\right)+\left(-\vec{b},2\vec{a},\vec{b}\right)+\left(-\vec{b},2\vec{a},\vec{c}\right)+\left(-\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)+\left(-\vec{b},\vec{c},\vec{b}\right)+\left(-\vec{b},\vec{c},\vec{c}\right)+$$

$$\left(\vec{c},2\vec{a},\vec{a}\right)+\left(\vec{c},2\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{c},2\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{c},\vec{c},\vec{a}\right)+\left(\vec{c},\vec{c},\vec{b}\right)+\left(\vec{c},\vec{c},\vec{c}\right)\ |=$$

$$\left|\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)+\left(-\vec{b},2\vec{a},\vec{c}\right)+\left(-\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)+\left(\vec{c},2\vec{a},\vec{b}\right)\right|=$$

$$\left|-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(2\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(2\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=$$

$$2\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=2\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=2\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

Pri zgornjem izračunu smo uporabili tudi lastnost, da mešani produkt treh vektorjev spremeni predznak, če zamenjamo vrstni red dveh vektorjev. V nadaljevanju uporabimo zvezi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \quad \text{in}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi,\quad \vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3.$$

Potem je:

$$V=2\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=$$

$$2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=$$

$$2\cdot2\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\sqrt{3}.$$

4.3.14 Pokažite, da so vektorji $\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}$, $\alpha\vec{b}-\beta\vec{a}$ in $\beta\vec{c}-\gamma\vec{b}$ komplanarni ne glede na izbiro skalarjev $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$ in vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ iz $\mathbb{R}^3$.

Reševanje naloge:
Trije vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ so komplanarni, če je njihov mešani produkt enak 0. V našem primeru uporabimo izkušnje iz prejšnje naloge in dobimo:

$$\left(\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c},\ \alpha\vec{b}-\beta\vec{a},\ \beta\vec{c}-\gamma\vec{b}\right)=$$

$$\left(\gamma\vec{a},\ \alpha\vec{b},\ \beta\vec{c}\right)+\left(\gamma\vec{a},\ \alpha\vec{b},\ -\gamma\vec{b}\right)+\left(\gamma\vec{a},\ -\beta\vec{a},\ \beta\vec{c}\right)+\left(\gamma\vec{a},\ -\beta\vec{a},\ -\gamma\vec{b}\right)+$$

$$\left(-\alpha\vec{c},\ \alpha\vec{b},\ \beta\vec{c}\right)+\left(-\alpha\vec{c},\ \alpha\vec{b},\ -\gamma\vec{b}\right)+\left(-\alpha\vec{c},\ -\beta\vec{a},\ \beta\vec{c}\right)+\left(-\alpha\vec{c},\ -\beta\vec{a},\ -\gamma\vec{b}\right)=$$

$$= \alpha\beta\gamma\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) + (-\alpha\beta\gamma)\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right) = \alpha\beta\gamma\left(\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) - \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right) = 0.$$

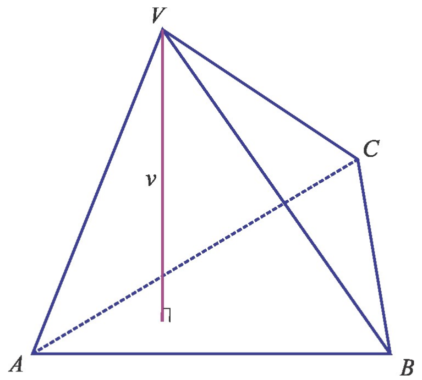
Mešani produkt danih vektorjev je enak 0, torej so komplanarni.

4.3.15 Piramida z oglišči $V(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$ **in** $C(1,2,4)$ **ima trikotnik** ABC **za osnovno ploskev**. **Izračunajte prostornino in višino piramide**.

Reševanje naloge:
Prostornino V tristrane piramide z oglišči $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ in $A_4(x_4,y_4,z_4)$ izračunamo z obrazcem:

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix} \right\|.$$

V našem primeru imamo (pomagamo si z oznakami oglišč piramide na sliki 4.3):



Slika 4.3. Tristrana piramida z osnovno ploskvijo ΔABC in vrhom V.

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 5-0 & 2-0 & 0-0 \\ 2-0 & 5-0 & 0-0 \\ 1-0 & 2-0 & 4-0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \right\| =$$

$$\frac{1}{6}\left| 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot (25-4) = 14.$$

Višino piramide v bi lahko določili kot oddaljenost vrha piramide V od ravnine skozi točke A, B in C. Hitreje jo bomo izračunali z uporabo obrazca za prostornino piramide $V = \frac{Sv}{3}$, pri čemer je S ploščina osnovne ploskve piramide.

Osnovna ploskev piramide v našem primeru je trikotnik ABC, ki predstavlja polovico paralelograma, napetega z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$. Tako je:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2-5 & 5-2 & 0-0 \\ 1-5 & 2-2 & 4-0 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 6|(1,1,1)| = 6\sqrt{1^2+1^2+1^2} = 6\sqrt{3}.$$

Višina piramide je potem enaka:

$$v = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 14}{6\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

4.3.16 Ali premici $p_1\colon 2 - x = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ **in** $p_2\colon \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{2-z}{6}$ **sovpadata**?

Reševanje naloge:
Enačbi premic zapišemo v nekoliko drugačni obliki, da bomo lahko odčitali njuna smerna vektorja:

$$p_1\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{in} \quad p_2\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{-6}.$$

Smerna vektorja premic p_1 in p_2 sta po vrsti $\vec{s}_1 = (-1,2,3)$ in $\vec{s}_2 = (2,-4,-6)$. Ker sta vektorja očitno kolinearna, sta premici vzporedni. Če najdemo kakšno njuno skupno točko, premici v resnici sovpadata. Ugotovimo, da točka $T_1(2,0,-1)$ leži na premici p_1. Ni težko preveriti, da je $T_1 \in p_2$:

$$\frac{2-1}{2} = \frac{0-2}{-4} = \frac{-1-2}{-6} = \frac{1}{2}.$$

Ker sta premici vzporedni in imata skupno točko, sovpadata.

4.3.17 Dani sta točki $A(2,3,-1)$ **in** $B(4,-1,1)$ **iz** $\mathbb{R}^3$. **Za vsako od točk** $P(2,4,-1)$, $Q(3,1,0)$ **in** $R(-2,11,-5)$ **ugotovite**, **če leži na daljici** AB **in če leži na premici** p **skozi točki** A **in** B.

Reševanje naloge:
Vektorska oblika enačbe premice (daljice) skozi točki A in B je:

$$\vec{r} = \alpha\, \vec{r}_A + (1-\alpha)\, \vec{r}_B\ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Za vsako izmed točk P, Q in R bomo glede na zapisano enačbo določili vrednost skalarja α (če obstaja).

<u>Točka P:</u>

$$(2,4,-1) = \alpha(2,3,-1) + (1-\alpha)(4,-1,1)$$

Ko zvezo zapišemo po komponentah, dobimo naslednji sistem enačb:

$$2 = 2\alpha + 4 - 4\alpha \quad \text{oziroma} \quad 2\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1$$

$$4 = 3\alpha - 1 + \alpha \qquad 4\alpha = 5 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{4}$$

$$-1 = -\alpha + 1 - \alpha \qquad 2\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1$$

Ker za α ne dobimo enakih vrednosti iz vseh zvez, obravnavana vektorska enačba ni rešljiva. Torej točka P ne leži na premici p in seveda tudi ne na daljici AB.

Podobna izračuna naredimo tudi za točki Q in R.

<u>Točka Q:</u>

$$(3,1,0) = \alpha(2,3,-1) + (1-\alpha)(4,-1,1)$$

$$3 = 2\alpha + 4 - 4\alpha \quad \text{oziroma} \quad 2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$1 = 3\alpha - 1 + \alpha \qquad 4\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$0 = -\alpha + 1 - \alpha \qquad 2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{2}$$

Ker je $\alpha \in [0,1]$, leži točka Q na daljici AB in torej tudi na premici p.

<u>Točka R:</u>

$$(-2,11,-5) = \alpha(2,3,-1) + (1-\alpha)(4,-1,1)$$

$$-2 = 2\alpha + 4 - 4\alpha \quad \text{oziroma} \quad 2\alpha = 6 \quad \rightarrow \quad \alpha = 3$$

$$11 = 3\alpha - 1 + \alpha \qquad 4\alpha = 12 \quad \rightarrow \quad \alpha = 3$$

$$-5 = -\alpha + 1 - \alpha \qquad 2\alpha = 6 \quad \rightarrow \quad \alpha = 3$$

Vektorska enačba ima v tem primeru rešitev, vendar $\alpha \notin [0,1]$. Zato točka R ne leži na daljici AB, leži pa na premici p.

4.3.18 Zapišite enačbo premice v kanonični in parametrični obliki, če premica:

a) poteka skozi točki $A(1,3,2)$ **in** $B(2,5,-6)$,

b) vsebuje točko $C(1,-2,4)$ **in je pravokotna na ravnino z enačbo** $3x+5y+7z=15$.

Reševanje naloge:
Kanonična oblika enačbe premice je $\frac{x-x_0}{s_1}=\frac{y-y_0}{s_2}=\frac{z-z_0}{s_3}$, pri čemer točka $T(x_0,y_0,z_0)$ leži na premici, $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$ pa je smerni vektor premice. Parametrična oblika enačbe premice je $x=x_0+ts_1,\ y=y_0+ts_2,\ z=z_0+ts_3,\ t\in\mathbb{R}$.

a) Smerni vektor premice je na primer vektor $\overrightarrow{AB}=(2-1,5-3,-6-2)=(1,2,-8)$, za točko na premici uporabimo kar točko $A(1,3,2)$. Kanonična oblika enačbe premice je v tem primeru:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-8},$$

parametrična oblika enačbe premice je

$$x=1+t,\ y=3+2t,\ z=2-8t,\ t\in\mathbb{R}.$$

b) Za smerni vektor premice vzamemo normalni vektor dane ravnine, torej $\vec{s}=(3,5,7)$. Kanonična oblika enačbe premice je:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-4}{7},$$

parametrična oblika enačbe premice je

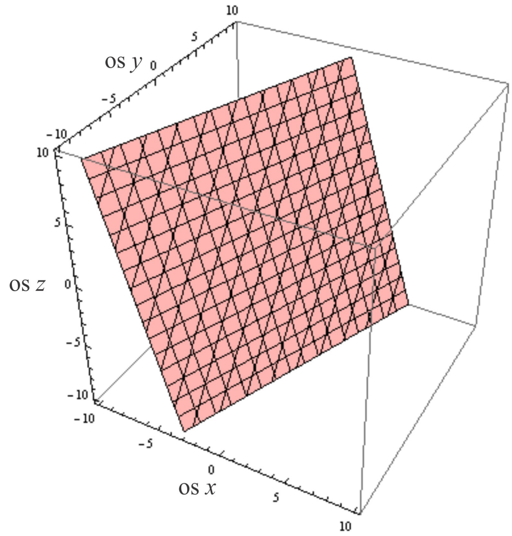
$$x=1+3t,\ y=-2+5t,\ z=4+7t,\ t\in\mathbb{R}.$$

4.3.19 Zapišite enačbo ravnine, ki na koordinatnih oseh x, y, z **po vrsti odreže odseke** -2, 5, -7.

Reševanje naloge:
Uporabili bomo segmentno obliko enačbe ravnine $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, pri čemer so a, b, c po vrsti odseki, ki jih ravnina odreže na koordinatnih oseh x, y, z. Ko vstavimo podatke, lahko enačbo zapišemo še v splošni obliki:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$35x-14y+10z+70=0.$$



Slika 4.4. Ravnina z enačbo $35x - 14y + 10z + 70 = 0$.

4.3.20 Med premicami v ravnini $\pi : x - 2y + 2z = 18$, **ki gredo skozi točko** $T(4, y_0, 5)$, **določite**:

a) premico p, **ki seka premico** $p' : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$,

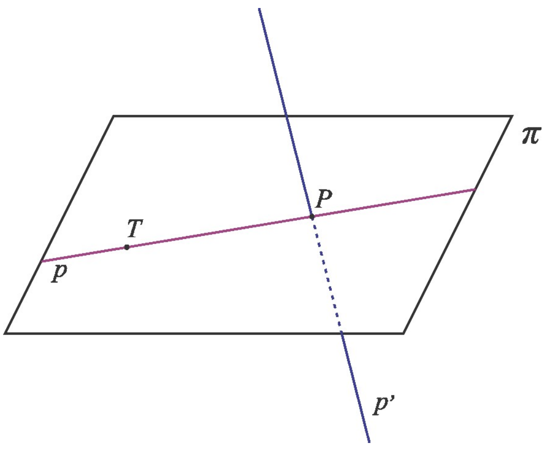
b) premico q, **ki je vzporedna ravnini** $y = 0$.

Reševanje naloge:
Najprej določimo koordinato y_0 točke T. Če leži točka T v ravnini π, velja

$$4 - 2y_0 + 2 \cdot 5 = 18,$$

od koder sledi $y_0 = -2$.

a) Pri reševanju prvega dela naloge si pomagamo s sliko 4.5, kjer smo presečišče premice p' in ravnine π označili s P.



Slika 4.5. Premica $p \subset \pi$ seka premico p' v točki P.

Določimo koordinate točke $P = p' \cap \pi$. Enačbo premice p' zapišemo v parametrični obliki:

$$x = 2t, \quad y = t, \quad z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ker premica p' seka ravnino π, velja $2t - 2t + 2 \cdot 3t = 18$, od koder sledi $t = 3$. Koordinate točke P so potem $P(6,3,9)$. Smerni vektor premice p je na primer vektor $\overrightarrow{TP} = (2,5,4)$, njena enačba je:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-5}{4}.$$

b) Normalni vektor ravnine $y = 0$ je na primer vektor $\vec{n} = (0,1,0)$. Ta vektor je torej pravokoten na smerni vektor $\vec{s} = (s_1,s_2,s_3)$ premice p (slika 4.6). Tako je:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0,$$

$$(s_1,s_2,s_3) \cdot (0,1,0) = 0,$$

$$s_2 = 0.$$

Za smerni vektor premice p torej velja $\vec{s} = (s_1,0,s_3)$.

Enačba premice p je potem oblike $x = 4 + ts_1$, $y = -2$, $z = 5 + ts_3$, $t \in \mathbb{R}$. Ker leži premica p v ravnini π, velja:

$$4 + ts_1 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (5 + ts_3) = 18,$$

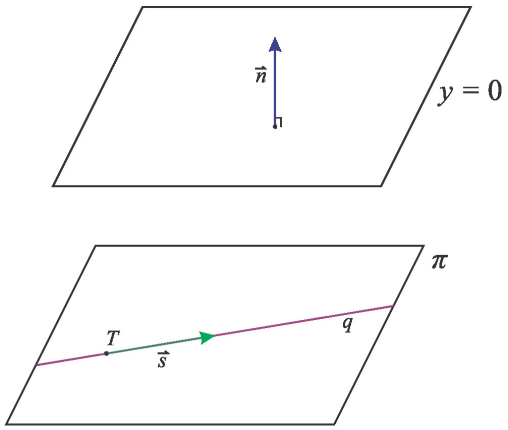
$$ts_1 + 2ts_3 = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dobimo naslednjo zvezo med komponentami vektorja $\vec{s}$:

$$s_1 + 2s_3 = 0 \text{ oziroma } s_1 = -2s_3.$$

Tako bo vektor $\vec{s}$ oblike $\vec{s} = (-2s_3,0,s_3)$. Za smerni vektor premice p lahko izberemo vektor $\vec{S} = (-2,0,1)$. Enačba premice q je potem

$$\frac{x-4}{-2} = z - 5, \ y = -2.$$



Slika 4.6. Premica $q \subset \pi$ je vzporedna ravnini $y = 0$.

4.3.21 Točke $A(2,-1,-2)$, $B(2,2,4)$, $C(-1,2,2)$ **so oglišča trapeza** $ABCD$.

a) **Določite točko** D, **če velja enakost** $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$.

b) **Napišite enačbo ravnine, v kateri leži trapez** $ABCD$.

c) **Izračunajte ploščino trapeza**.

d) **Izračunajte prostornino piramide, ki ima za osnovno ploskev trapez** $ABCD$ **in vrh v izhodišču koordinatnega sistema**.

Reševanje naloge:

a) Pogoj $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$ zapišemo po komponentah, pri čemer naj bo $D(d_1, d_2, d_3)$:

$$(0,3,6) = -3 \cdot (d_1 + 1, d_2 - 2, d_3 - 2).$$

Iz te enakosti dobimo tri zveze, iz katerih izračunamo koordinate točke D:

$$-3d_1 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad d_1 = -1,$$

$$-3d_2 + 6 = 3 \quad \rightarrow \quad d_2 = 1,$$

$$-3d_3 + 6 = 6 \quad \rightarrow \quad d_3 = 0.$$

Torej je $D(-1,1,0)$.

b) Normalni vektor ravnine lahko izračunamo kot:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6,-18,9) = -3(2,6,-3).$$

Enačba ravnine naj bo določena z normalnim vektorjem $\vec{n}_1 = (2,6,-3)$ in s točko $A(2,-1,-2)$. Dobimo:

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) \cdot \vec{n}_1 = 0,$$

$$(x-2, y+1, z+2) \cdot (2,6,-3) = 0,$$

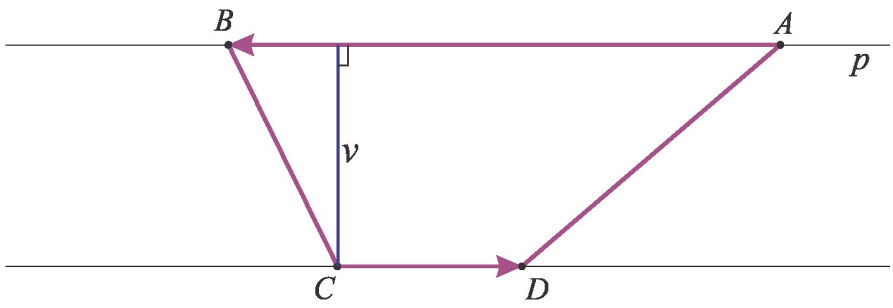
$$2x - 4 + 6y + 6 - 3z - 6 = 0,$$

$$2x + 6y - 3z = 4.$$

c) Ploščino trapeza izračunamo po obrazcu:

$$S = (a+c) \cdot \frac{v}{2},$$

pri čemer je $a = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $c = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ in $v = d(C,p)$. S p smo označili premico skozi točki A in B (slika 4.7).



Slika 4.7. Trapez $ABCD$ z višino v.

Izračunamo:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{0 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$$

$$v = d(C,p) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{|-3(2,6,-3)|}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Ploščina trapeza je potem enaka:

$$S = (a+c) \cdot \frac{v}{2} = \frac{\left(3\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) \cdot 7}{2\sqrt{5}} = 14.$$

d) Prostornino piramide izračunamo po obrazcu:

$$V = \frac{S \cdot v}{3},$$

pri čemer je S ploščina osnovne ploskve in v pa višina piramide. V našem primeru je $v = d(O,\pi)$, kjer je O izhodišče koordinatnega sistema in π ravnina, v kateri leži trapez $ABCD$. Ploščino S smo izračunali v primeru c), višino v določimo na naslednji način:

$$v = d(O,\pi) = \left| \left(\vec{r}_O - \vec{r}_A\right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$\frac{|(0-2, 0-(-1), 0-(-2)) \cdot (2,6,-3)|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{|-4+6-6|}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$$

Prostornina piramide je potem enaka:

$$V = \frac{14 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{3}.$$

4.3.22 Izračunajte razdaljo med premicama $x = -2y = z$ **in** $x = y = z - 2$.

Reševanje naloge:
Vsako enačbo premice najprej zapišemo v kanonični obliki, iz katere bomo odčitali smerni vektor posamezne premice in točko, ki leži na premici:

$$p_1: \quad x = -2y = z \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-2},$$

$$p_2: \quad x = y = z - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Ugotovimo, da ima premica p_1 smerni vektor $\vec{s}_1 = (-2,1,-2)$ in poteka skozi točko $A(0,0,0)$, premica p_2 ima smerni vektor $\vec{s}_2 = (1,1,1)$ in poteka skozi točko $B(0,0,2)$. Razdaljo med premicama p_1 in p_2 izračunamo po obrazcu, ki smo ga predstavili v uvodnem delu tega poglavja:

$$d(p_1,p_2) = \frac{\left|\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_A - \vec{r}_B\right)\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.$$

Najprej izračunajmo absolutno vrednost mešanega produkta $\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_A - \vec{r}_B\right)$:

$$\left|\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_A - \vec{r}_B\right)\right| = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \right\| = \left| (-2) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$|(-2) \cdot (-2-1)| = 6.$$

Izračunajmo še velikost vektorskega produkta $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$:

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,0,-3) = 3(1,0,-1),$$

$$\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right| = 3\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

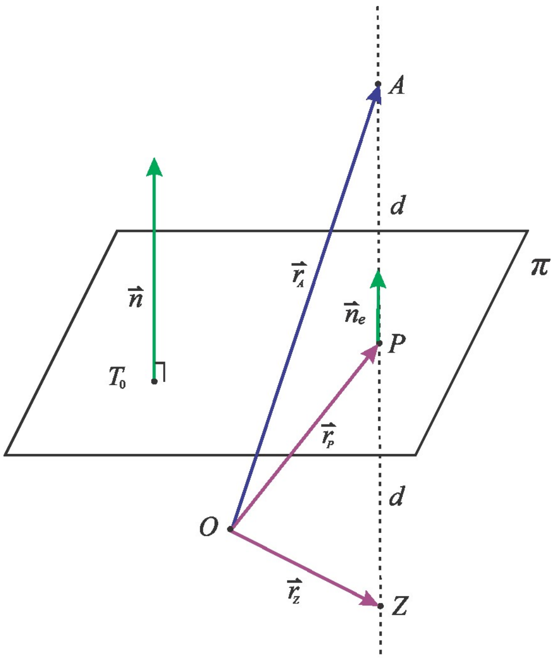
Razdalja med premicama p_1 in p_2 je potem enaka:

$$d(p_1,p_2) = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

4.3.23 Ravnina π je določena z normalnim vektorjem $\vec{n}$ in s točko $T_0 \in \pi$. Poiščite pravokotno projekcijo točke A na ravnino π in njeno zrcalno sliko glede na ravnino π.

Reševanje naloge:
Vpeljimo naslednje oznake (slika 4.8):

P – pravokotna projekcija točke A na ravnino π,
Z – zrcalna slika točke A glede na ravnino π,
$\vec{n}_e$ – enotski vektor v smeri vektorja $\vec{n}$,
d – razdalja točke A do ravnine π.



Slika 4.8. Točka $A \notin \pi$, njena pravokotna projekcija P na ravnino π in zrcalna slika Z točke A glede na ravnino π.

Naj bo $\vec{n} = (a,b,c)$, $A(a_1,a_2,a_3)$ in $T_0(x_0,y_0,z_0)$. Spomnimo se obrazca za izračun razdalje točke do ravnine:

$$d = \left| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{T_0} \right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{T_0} \right) \cdot \vec{n}_e \right|.$$

S slike razberemo:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A - d\,\vec{n}_e = \vec{r}_A - \left| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{T_0} \right) \cdot \vec{n}_e \right| \cdot \vec{n}_e .$$

Podobno ugotovimo:

$$\vec{r}_Z = \vec{r}_A - 2d\,\vec{n}_e = \vec{r}_A - 2\left| \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{T_0} \right) \cdot \vec{n}_e \right| \cdot \vec{n}_e .$$

Če leži točka A v tistem polprostoru glede na ravnino π, v katerega ne kaže vektor $\vec{n}$, izberemo v zgornjih dveh izrazih pred absolutno vrednostjo znak "+".

4.3.24 Poiščite pravokotno projekcijo premice p: $2x + y - z = 1,\ x - 2z = 3$ **na ravnino** π: $3x + y + z = 2$.

Reševanje naloge:
Premica p je podana kot presek dveh ravnin. Najprej bomo poiskali njeno enačbo (rešimo sistem dveh enačb s tremi neznankami):

$$2x + y - z = 1,$$

$$x - 2z = 3.$$

Iz druge enačbe izrazimo x, ga vstavimo v prvo enačbo in izrazimo y:

$$y = -2x + z + 1 = -2(2z + 3) + z + 1 = -3z - 5.$$

Enačbo premice p v parametrični obliki zapišemo kot:

$$x = 2t + 3, \quad y = -3t - 5, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sedaj poiščimo prebodišče premice p z ravnino π:

$$3(2t + 3) + (-3t - 5) + t = 2 \quad \to \quad 4t = -2 \quad \to \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Točka A, ki predstavlja prebodišče, ima potem koordinate:

$$x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2,$$
$$y = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = -\frac{7}{2},$$
$$z = -\frac{1}{2},$$

torej $A\left(2,-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Ta točka se pri pravokotni projekciji na ravnino π projecira sama vase. Vemo, da je pravokotna projekcija premice na ravnino spet premica. Z namenom, da določimo njeno enačbo, poiščimo projekcijo še ene točke premice p, na primer točke $B(3,-5,0)$ na ravnino π. Uporabili bomo obrazec iz prejšnje naloge. Pri tem s P označimo iskano točko, s T_0 izbrano točko na ravnini π (na primer $T_0(0,0,2)$) in z $\vec{n}_e$ enotski vektor v smeri normale na ravnino. Izračunamo:

$$\vec{n}_e = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}(3,1,1) = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1),$$

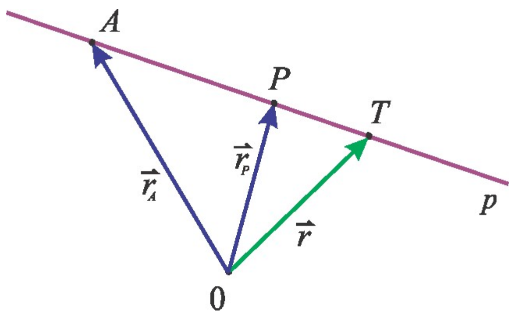
$$\vec{r}_P = \vec{r}_B - \left|\left(\vec{r}_B - \vec{r}_{T_0}\right)\cdot \vec{n}_e\right| \cdot \vec{n}_e =$$

$$(3,-5,0) - \left|(3,-5,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1) =$$

$$(3,-5,0) - \frac{1}{11}\cdot(9-5-2)\cdot(3,1,1) = (3,-5,0) - \left(\frac{6}{11},\frac{2}{11},\frac{2}{11}\right) =$$

$$\left(\frac{27}{11},-\frac{57}{11},-\frac{2}{11}\right).$$

Poiščimo še enačbo premice skozi točki A in P (slika 4.9):



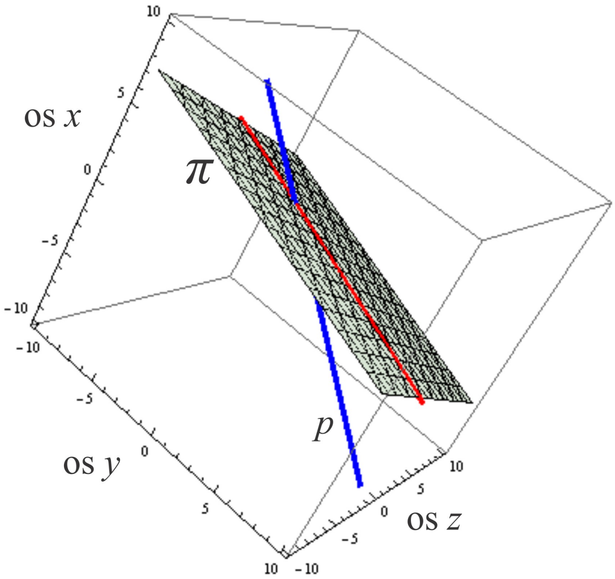
Slika 4.9. Določanje enačbe premice p skozi točki A in P.

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\overrightarrow{AP} = \left(2,-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right) + \lambda\left(\frac{27}{11}-2,-\frac{57}{11}+\frac{7}{2},-\frac{2}{11}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$\left(2,-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right) + \lambda\left(\frac{7}{11},-\frac{37}{22},\frac{7}{22}\right).$$

Nazadnje zapišimo enačbo pravokotne projekcije premice p na ravnino π v parametrični obliki:

$$x = 2 + 10t,\ \ y = -\frac{7}{2} - 37t,\ \ z = -\frac{1}{2} + 7t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$



Slika 4.10. Premica p in njena pravokotna projekcija na ravnino π.

4.4 Zaključek

Ključne besede četrtega poglavja: vektor, urejena n-terica realnih števil, seštevanje vektorjev, množenje vektorjev s skalarjem, linearna kombinacija vektorjev, skalarni produkt, dolžina vektorja, enotski vektor, kot med vektorjema, vektorski produkt, mešani produkt, enačba ravnine, enačba premice, razdalja točke do ravnine, razdalja točke do premice, razdalja med premicama.

Povzetek: Vektor je urejena n-terica realnih števil, ki jo lahko predstavimo v obliki vrstice: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Najpreprostejši računski operaciji z vektorji sta množenje vektorjev s skalarji in seštevanje vektorjev. Linearna kombinacija vektorjev $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\vec{c} = \alpha_1 \ \vec{a_1} + \alpha_2 \ \vec{a_2} + \ldots + \alpha_n \ \vec{a_n}$, pri čemer so skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^n$ je operacija, ki vektorjema priredi skalar. Za poljubna neničelna vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ iz prostora $\mathbb{R}^n$ lahko definiramo kot φ med vektorjema, $\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ in pravokotno projekcijo $\vec{p}$ vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, $\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \ \vec{b}$. Za vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$ definiramo tudi dolžino vektorja in enotski vektor – vektor z dolžino 1, ki kaže v smeri danega vektorja. Vektorski produkt je operacija, ki vektorjema $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ priredi vektor iz $\mathbb{R}^3$. Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je enak $\vec{0}$ natanko takrat, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna. Velikost vektorskega produkta vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga ta vektorja napenjata. Če vektorski produkt dveh vektorjev skalarno pomnožimo s tretjim vektorjem, dobimo t. i. mešani produkt treh vektorjev, ki je realno število. Absolutna vrednost mešanega produkta $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ je enaka prostornini paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$. Če je mešani produkt $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ enak 0, so vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni, ležijo v isti ravnini.

Vektorji v prostoru in računske operacije med njimi omogočajo, da na preprost način zapišemo različne oblike enačbe ravnine in premice ter izračunamo oddaljenost točke do ravnine, točke do premice in razdaljo med premicama v prostoru.

Besedila nalog v četrtem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3], [4] in [5], teorija pa iz [2].

Poglavje 5

VEKTORSKI PROSTORI

5.1 Namen poglavja

V petem poglavju bomo:

- definirali pojma vektorski prostor in vektorski podprostor;
- za dano množico z operacijama seštevanje elementov in množenje elementov s skalarjem preverili, če je vektorski prostor;
- ugotavljali, ali so dane podmnožice neke množice njeni vektorski podprostori;
- definirali pojma linearna odvisnost in linearna neodvisnost vektorjev;
- za konkretne vektorje različnih vektorskih prostorov preverili, ali so linearno odvisni ali neodvisni;
- definirali pojma baza in dimenzija vektorskega prostora;
- preverili, če je neka možica elementov baza danega vektorskega prostora;
- znali zapisati komponente vektorja v neki bazi B_1, če bomo poznali komponente vektorja v neki dani bazi B_2.

5.2 Povzetek teorije

Naj bo V neprazna množica z elementi, ki jih imenujemo *vektorji*. Na množici V sta definirani dve operaciji:

– seštevanje vektorjev,

– množenje vektorjev s skalarji.

Skalar je lahko realno ali kompleksno število, lahko je tudi element poljubnega obsega F (slednje možnosti ne bomo obravnavali). Seštevanje priredi vektorjema $x, y \in V$ vsoto $x + y \in V$, množenje s skalarjem $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ pa priredi vektorju $x \in V$ vektor $\alpha x \in V$.

Pri tem veljajo naslednje lastnosti:

1. seštevanje vektorjev je komutativno:

$$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V;$$

2. seštevanje vektorjev je asociativno:

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad \forall x,y,z \in V;$$

3. obstaja ničelni vektor $0 \in V$, ki je nevtralni element za seštevanje:

$$x+0 = x, \quad \forall x \in V;$$

4. za vsak vektor $x \in V$ obstaja nasprotni element za seštevanje, to je vektor $-x$:

$$x+(-x) = 0;$$

5. množenje vektorjev s skalarjem je "distributivno" glede na seštevanje vektorjev:

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \forall x,y \in V;$$

6. množenje vektorjev s skalarjem je "distributivno" glede na seštevanje skalarjev:

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \forall x \in V;$$

7. velja "neprava asociativnost":

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \forall x \in V;$$

8. obstaja tak element $1 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, da je

$$1 \cdot x = x, \ \forall x \in V.$$

Strukturo $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ imenujemo *realni vektorski prostor* ali *vektorski prostor nad obsegom realnih števil*.

Strukturo $(V,\mathbb{C},+,\cdot)$ imenujemo *kompleksni vektorski prostor* ali *vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil*.

Opomba: Velikokrat bomo rekli kar "V je vektorski prostor", čeprav bomo imeli v mislih celotno strukturo.

Naj bo V vektorski prostor in W podmnožica množice V. Pravimo, da je W *podprostor vektorskega prostora* V, če je W tudi sam vektorski prostor glede na operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarjem v prostoru V.

Kriterij za preverjanje, če je neka množica vektorski podprostor danega vektorskega prostora:

Naj bo W podmnožica vektorskega prostora V. Potem je W vektorski podprostor prostora V nad istim obsegom, če je izpolnjen naslednji pogoj: linearna kombinacija $\alpha x + \beta y$ poljubnih elementov $x,y \in W$ in poljubnih skalarjev $\alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je spet element iz W.

Množica vektorjev $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq V$ je *linearno neodvisna* (ali vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ so *linearno neodvisni*), če je linearna kombinacija

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

enaka ničelnemu vektorju samo, če so vsi skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ enaki 0.

Če obstaja kakšna linearna kombinacija

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

pri čemer je vsaj eden izmed skalarjev $\alpha_i \neq 0$, pravimo, da so vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linearno odvisni*.

Vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ so linearno neodvisni natanko takrat, ko je rang matrike $A \in M_{n,m}$, ki ima te vektorje za stolpce, enak m.

Vektorji $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ sestavljajo *bazo* vektorskega prostora V, če so linearno neodvisni in če lahko vsak vektor $x \in V$ izrazimo kot njihovo linearno kombinacijo:

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Števila $\alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bomo imenovali *komponente vektorja x v bazi* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Če vektorji $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tvorijo bazo vektorskega prostora V, je vsaka množica m vektorjev $c_1, c_2, \ldots, c_m \in V$, kjer je $m > n$, linearno odvisna.

Če ima vektorski prostor V bazo s končno mnogo vektorji, imenujemo število teh vektorjev *dimenzija vektorskega prostora V*, $\dim V$. Če lahko v vektorskem prostoru V najdemo poljubno veliko množico linearno neodvisnih vektorjev, je $\dim V = \infty$.

Vsaka množica $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset V$, ki vsebuje linearno neodvisne vektorje, je baza n-razsežnega podprostora vektorskega prostora V.

Določanje komponent vektorja v standardni bazi, če poznamo komponente vektorja v neki dani bazi:
Komponente poljubnega vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ v standardni bazi dobimo tako, da stolpec komponent vektorja x v dani bazi pomnožimo z matriko prehoda, ki ima za stolpce ravno vektorje dane baze.

Določanje matrike prehoda med dvema poljubnima bazama:

Naj bosta $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ in $B_2 = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ bazi vektorskega prostora V.

Označimo z B in s C matriki, ki imata vektorje baz B_1 in B_2 za stolpce:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ & & & \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ & & & \end{bmatrix}.$$

Matrika $P = B^{-1} \cdot C$ je *matrika prehoda od baze B_2 k bazi B_1*. Če torej stolpec komponent vektorja x v drugi bazi B_2 pomnožimo z matriko prehoda P, dobimo stolpec komponent vektorja x v prvi bazi B_1.

5.3 Rešeni zgledi

5.3.1 Dana je množica $V = \{(2z, w, z);\ z,\ w \in \mathbb{C}\}$. **Pokažite, da je** V **z običajnim seštevanjem vektorjev in množenjem vektorjev s skalarjem po komponentah vektorski prostor nad obsegom** $\mathbb{C}$. **Poiščite** $\dim V$.

Reševanje naloge:
Pokazali bomo, da množica V ni prazna, da je seštevanje elementov iz V notranja operacija in da je rezultat operacije množenje elementov iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ spet element iz V. Nato bomo preverili, ali za množico V z omenjenima operacijama velja vseh osem točk iz definicije vektorskega prostora.

Množica V vsebuje element $(0,0,0) = (2 \cdot 0, 0, 0)$, torej ni prazna. Označimo $v = (2z, w, z)$, $v_1 = (2z_1, w_1, z_1)$, $v_2 = (2z_2, w_2, z_2)$.

Seštevanje vektorjev iz V je notranja operacija na V:
Za poljubna $v,\ v_1 \in V$ je

$$v + v_1 = (2z, w, z) + (2z_1, w_1, z_1) = (2(z + z_1), w + w_1, z + z_1) \in V.$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V ter distributivnost seštevanja in množenja v $\mathbb{C}$.

Množenje elementov iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ daje rezultat iz V:
Za poljubna $v \in V$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ je:

$$\lambda v = \lambda(2z, w, z) = (2(\lambda z), \lambda w, \lambda z) \in V.$$

Uporabili smo definicijo množenja vektorjev iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ ter komutativnost in asociativnost množenja v $\mathbb{C}$.

Komutativnost seštevanja:
Za poljubna $v,\ v_1 \in V$ je:

$$v + v_1 = (2z, w, z) + (2z_1, w_1, z_1) = (2(z + z_1), w + w_1, z + z_1) =$$

$$(2(z_1 + z), w_1 + w, z_1 + z) = (2z_1, w_1, z_1) + (2z, w, z) = v_1 + v.$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V, distributivnost seštevanja in množenja ter komutativnost seštevanja v $\mathbb{C}$.

Asociativnost seštevanja:
Za poljubne $v,\ v_1, v_2 \in V$ velja:

$$(v + v_1) + v_2 = ((2z, w, z) + (2z_1, w_1, z_1)) + (2z_2, w_2, z_2) =$$

$$= (2(z + z_1), w + w_1, z + z_1) + (2z_2, w_2, z_2) =$$

$$= (2((z + z_1) + z_2), (w + w_1) + w_2, (z + z_1) + z_2) =$$

$$= (2(z + (z_1 + z_2)), w + (w_1 + w_2), z + (z_1 + z_2)) =$$

$$= (2z, w, z) + (2(z_1 + z_2), (w_1 + w_2), (z_1 + z_2)) =$$

$$= (2z, w, z) + ((2z_1, w_1, z_1) + (2z_2, w_2, z_2)) = v + (v_1 + v_2).$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V, distributivnost seštevanja in množenja v $\mathbb{C}$ ter asociativnost seštevanja v $\mathbb{C}$.

Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje v V:
$(0,0,0)$ je nevtralni element za seštevanje v V, saj je $(0,0,0) = (2 \cdot 0, 0, 0) \in V$ in za poljubni $v \in V$ velja

$$v + (0,0,0) = (2z, w, z) + (0,0,0) = (2z + 0, w + 0, z + 0) = (2z, w, z) = v.$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V in prištevanje nevtralnega elementa za seštevanje v $\mathbb{C}$.

Obstoj nasprotnega elementa:
Element $-v$ vpeljemo kot $-v = (-2z, -w, -z) \in V$. Potem za poljuben $v \in V$ velja:

$$v + (-v) = (2z, w, z) + (-2z, -w, -z) = (2(z + (-z)), w + (-w), z + (-z)) =$$

$$= (2 \cdot 0, 0, 0) = (0,0,0).$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V, distributivnost seštevanja in množenja v $\mathbb{C}$ ter obstoj nevtralnega elementa za seštevanje v $\mathbb{C}$.

Množenje vektorjev s skalarjem je "distributivno" glede na seštevanje vektorjev:
Za poljubne $v,\ v_1 \in V$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja:

$$\lambda(v+v_1) = \lambda((2z,w,z)+(2z_1,w_1,z_1)) = \lambda(2(z+z_1),w+w_1,z+z_1)) =$$

$$(\lambda \cdot 2z + \lambda \cdot 2z_1, \lambda w + \lambda w_1, \lambda z + \lambda z_1) = (\lambda \cdot 2z, \lambda w, \lambda z) + (\lambda \cdot 2z_1, \lambda w_1, \lambda z_1) =$$

$$\lambda(2z,w,z) + \lambda(2z_1,w_1,z_1) = \lambda v + \lambda v_1.$$

Uporabili smo definicijo seštevanja vektorjev v V in definicijo množenja vektorjev v V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ ter distributivnost seštevanja in množenja v $\mathbb{C}$.

Množenje vektorjev s skalarjem je "distributivno" glede na seštevanje skalarjev:
Za poljubne $v \in V$ in $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ velja:

$$(\lambda_1+\lambda_2)v = (\lambda_1+\lambda_2)\cdot(2z,w,z) = ((\lambda_1+\lambda_2)\cdot 2z, (\lambda_1+\lambda_2)w, (\lambda_1+\lambda_2)z) =$$

$$(2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z, \lambda_1 w + \lambda_2 w, \lambda_1 z + \lambda_2 z) = (2\lambda_1 z, \lambda_1 w, \lambda_1 z) + (2\lambda_2 z, \lambda_2 w, \lambda_2 z) =$$

$$\lambda_1(2z,w,z) + \lambda_2(2z,w,z) = \lambda_1 v + \lambda_2 v.$$

Uporabili smo definicijo množenja vektorjev iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$, definicijo seštevanja vektorjev v V, distributivnost seštevanja in množenja v $\mathbb{C}$.

"Neprava asociativnost" množenja vektorja s skalarjem:
Za poljubne $v \in V$ in $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ velja:

$$(\lambda_1\lambda_2)v = (\lambda_1\lambda_2)\cdot(2z,w,z) = ((\lambda_1\lambda_2)\cdot 2z, (\lambda_1\lambda_2)w, (\lambda_1\lambda_2)z) =$$

$$(\lambda_1(\lambda_2 \cdot 2z), \lambda_1(\lambda_2 w), \lambda_1(\lambda_2 z)) = \lambda_1(\lambda_2 \cdot 2z, \lambda_2 w, \lambda_2 z) = \lambda({}_1\lambda_2 \cdot (2z,w,z)) = \lambda_1(\lambda_2 v).$$

Uporabili smo definicijo množenja vektorjev iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ in asociativnost množenja v $\mathbb{C}$.

Množenje z $1 \in \mathbb{C}$ ohranja vektor:
Za poljubni $v \in V$ velja:

$$1 \cdot v = 1 \cdot (2z,w,z) = (1 \cdot 2z, 1 \cdot w, 1 \cdot z) = (2z,w,z) = v.$$

Uporabili smo definicijo množenja vektorjev iz V s skalarjem iz $\mathbb{C}$ in obstoj nevtralnega elementa za množenje v $\mathbb{C}$.

Določiti moramo še $\dim V$. Poljubni vektor $v \in V$ lahko zapišemo kot:

$$v = (2z,w,z) = z \cdot (2,0,1) + w \cdot (0,1,0), \qquad z,\ w \in \mathbb{C}.$$

Vektorja $(2,0,1)$ in $(0,1,0)$ sta elementa množice V in sta očitno linearno neodvisna, zato predstavljata bazo prostora V. Tako je $\dim V = 2$.

5.3.2 Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ so dane množice:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 - x_n = 0\},\\
W_2 &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 - x_n = 1\},\\
W_3 &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \cdot x_n = 0\},\\
W_4 &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \tfrac{x_1}{x_n} = 0,\ x_n \neq 0\},\\
W_5 &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

Katere izmed zgornjih množic so vektorski podprostori prostora $\mathbb{R}^n$ nad obsegom $\mathbb{R}$?

Reševanje naloge:
Podmnožica W vektorskega prostora V je vektorski podprostor prostora V, če je poljubna linearna kombinacija elementov iz W spet element iz W.

a) Za poljubna $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ iz W_1 ter poljubna $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \beta(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2,\ldots,\alpha x_n + \beta y_n).$$

Preverimo, ali sta prva in zadnja komponenta v tem elementu enaki:

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha(x_1 - x_n) + \beta(y_1 - y_n) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

saj je $x_1 = x_n$ in $y_1 = y_n$. Tako je $\alpha x + \beta y \in W_1$ in W_1 je vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

b) Najprej se spomnimo, da vsak vektorski podprostor vsebuje 0 (ničelni element prostora). V elementu $0 = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ razlika med prvo in zadnjo komponento ni enaka 1, zato $0 \notin W_2$ in W_2 ni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

c) Za element $0 = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ velja, da je $x_1 \cdot x_n = 0 \cdot 0 = 0$, in $0 \in W_3$. Za poljubna $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ iz W_3 ter poljubna $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2,\ldots,\alpha x_n + \beta y_n).$$

Preverimo, če je v tem elementu produkt prve in zadnje komponente enak 0:

$$
\begin{aligned}
(\alpha x_1 + \beta y_1) \cdot (\alpha x_n + \beta y_n) &= \alpha^2 x_1 x_n + \beta\alpha y_1 x_n + \alpha\beta x_1 y_n + \beta^2 y_1 y_n =\\
&= \alpha^2 \cdot 0 + \alpha\beta(y_1 x_n + x_1 y_n) + \beta^2 \cdot 0 = \alpha\beta(y_1 x_n + x_1 y_n) \neq 0
\end{aligned}
$$

za poljubne $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ in $x_1,\ x_n,\ y_1,\ y_n \in \mathbb{R}$. Tako W_3 ni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

d) Element $0 = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ ne more biti element prostora W_4, saj $x_n \neq 0$. Tako W_4 ni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

e) Za poljubna $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ iz W_5 ter poljubna $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ preverimo, ali je $\alpha x + \beta y \in W_5$. Prva komponenta tega elementa je $\alpha x_1 + \beta y_1$, kar je število, ki za poljubna skalarja $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ in poljubna elementa $x_1,\ y_1 \in \mathbb{R}$ ni večje ali enako 0. Tako W_5 ni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

5.3.3 Izrazite polinom $p(t) = 3t^2 + 5t - 5$ **kot linearno kombinacijo polinomov** $p_1(t) = t^2 + 2t + 1$, $p_2(t) = 2t^2 + 5t + 4$ **in** $p_3(t) = t^2 + 3t + 6$.

Reševanje naloge:
Iščemo skalarje α, β in γ iz $\mathbb{R}$, za katere bo veljalo:

$$p(t) = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t).$$

To pomeni:

$$3t^2 + 5t - 5 = \alpha(t^2 + 2t + 1) + \beta(2t^2 + 5t + 4) + \gamma(t^2 + 3t + 6).$$

Desno stran zveze uredimo po padajočih potencah spremenljivke t in izenačimo istoležne koeficiente. Dobimo:

$$3t^2 + 5t - 5 = (\alpha + 2\beta + \gamma)t^2 + (2\alpha + 5\beta + 3\gamma)t + (\alpha + 4\beta + 6\gamma)$$

oziroma

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 3, \quad 2\alpha + 5\beta + 3\gamma = 5, \quad \alpha + 4\beta + 6\gamma = -5.$$

Prvo enačbo pomnožimo z 2 in od nove enačbe odštejemo drugo enačbo; dobimo $-\beta - \gamma = 1$. Nato tretjo enačbo odštejemo od prve; dobimo $-2\beta - 5\gamma = 8$. Iz tako dobljenih enačb izračunamo $\beta = 1$ in $\gamma = -2$. Z upoštevanjem teh dveh vrednosti iz prve enačbe izračunamo še $\alpha = 3$.

Tako polinom $p(t)$ zapišemo kot $p(t) = 3p_1(t) + p_2(t) - 2p_3(t)$.

5.3.4 Ali so dani vektorji linearno odvisni ali neodvisni? **Odgovor utemeljite**.

a) $u = (1,1,0)$, $v = (1,3,2)$, $w = (4,9,5)$,

b) $u = (1,2,3)$, $v = (2,5,7)$, $w = (1,3,5)$.

Reševanje naloge:
Vektorji u, v in w so linearno neodvisni, če je njihova linearna kombinacija $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ samo v primeru, ko je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

a) $\alpha(1,1,0) + \beta(1,3,2) + \gamma(4,9,5) = (0,0,0)$.

Uporabimo definicije za množenje vektorja s skalarjem, za seštevanje vektorjev in za enakost dveh vektorjev. Ugotovimo:

$$(\alpha,\alpha,0) + (\beta,3\beta,2\beta) + (4\gamma,9\gamma,5\gamma) = (0,0,0).$$

Iz te zveze dobimo sistem enačb:

$$\alpha + \beta + 4\gamma = 0, \quad \alpha + 3\beta + 9\gamma = 0, \quad 2\beta + 5\gamma = 0.$$

Ko drugo enačbo odštejemo od prve in izrazimo skalar β, pridemo do zveze $\beta = -\frac{5}{2}\gamma$. Iz prve (ali druge) enačbe določimo še $\alpha = -\frac{3}{2}\gamma$. Obravnavani sistem linearnih enačb ima torej neskončno mnogo rešitev:

$$\alpha = 3t, \quad \beta = 5t, \quad \gamma = -2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tako je na primer:

$$3(1,1,0) + 5(1,3,2) - 2(4,9,5) = (0,0,0)$$

oziroma $3u + 5v - 2w = 0$, kar pomeni, da so vektorji u, v in w linearno odvisni.

b) Podobno razmišljamo tudi v tem primeru. Imamo:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(2,5,7) + \gamma(1,3,5) = (0,0,0)$$

in nato sistem enačb:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \quad 2\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0, \quad 3\alpha + 7\beta + 5\gamma = 0.$$

Ko prvo enačbo pomnožimo z 2 in odštejemo od druge ter prvo enačbo pomnožimo s 3 in odštejemo od tretje, pridemo do dveh enačb z neznankama β in γ; iz ene sledi $\beta = -2\gamma$. Ko to zvezo vstavimo v prvo od obeh enačb, ugotovimo $\beta = \gamma = 0$. Iz prve enačbe začetnega sistema treh enačb ugotovimo še $\alpha = 0$. Sistem ima torej le trivialno rešitev $\alpha = \beta = \gamma = 0$, kar pomeni, da so vektorji u, v in w linearno neodvisni.

5.3.5 V vektorskem prostoru $M_{2,3}$ so dane matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \textbf{ in } C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ali so linearno neodvisne? **Odgovor utemeljite**.

Reševanje naloge:

Nalogo lahko rešimo z ugotavljanjem, če so koordinatni vektorji teh matrik glede na standardno bazo prostora $M_{2,3}$ linearno neodvisni. Ustrezne koordinatne vektorje zapišemo kot stolpce matrike M. Poiščimo njen rang. Tako je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ -3 & -4 & -11 \\ 4 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo prvo vrstico prepisali in uporabili pravila

$$V_2^* = (-2) \cdot V_1 + V_2, \qquad V_3^* = 3 \cdot V_1 + V_3,$$

$$V_4^* = (-4) \cdot V_1 + V_4 \qquad V_5^* = \frac{1}{5} \cdot V_5,$$

$$V_6^* = (-1) \cdot V_1 + V_6.$$

Vrstice V_3 do V_6 v zadnji matriki so neničelni večkratniki vrstice V_2 in tako ugotovimo, da je matrika M vrstično ekvivalentna matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je rang $M = 2$. Ker je manjši od števila koordinatnih vektorjev, so le-ti linearno odvisni med seboj. Tako so tudi matrike A, B in C linearno odvisne. Hitro se tudi prepričamo, da je $A + 2B - C = 0$.

5.3.6 Pokažimo, da so funkcije $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ in $h(t) = t$ iz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linearno neodvisne.

Reševanje naloge:
Pokazati želimo, da so v zvezi $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ vsi trije skalarji α, β, γ enaki 0. Zapisana zveza pomeni, da je za vsak $t \in \mathbb{R}$ izpolnjeno

$$\alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0$$

oziroma

$$\alpha \sin t + \beta \cos t + \gamma t = 0.$$

Izberimo tri poljubne vrednosti za t, na primer $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$ in π.

Dobimo sistem enačb:

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot \pi = 0,$$

ki je ekvivalenten sistemu enačb:

$$\beta = 0, \quad \alpha + \gamma \cdot \frac{\pi}{2} = 0, \quad -\beta + \gamma \cdot \pi = 0.$$

Sistem ima očitno le trivialno rešitev $\alpha = \beta = \gamma = 0.$ Tako so funkcije f, g in h zares linearno neodvisne.

5.3.7 Pokažite, da sta vektorja $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ linearno neodvisna natanko takrat, ko sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$.

Reševanje naloge:
Predpostavimo najprej, da sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja. Torej je:

$\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$ natanko takrat, ko je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Pokažimo, da sta linearno neodvisna tudi vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$. Naj bo njuna linearna kombinacija

$$\beta_1\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta_2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{0}.$$

Pokazati moramo, da sta ničelna tudi oba skalarja β_1 in β_2. Zapišimo:

$$\vec{0} = \beta_1\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta_2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = (\beta_1 + \beta_2)\, \vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\, \vec{b}.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, velja $\beta_1 + \beta_2 = 0$ in $\beta_1 - \beta_2 = 0.$ Prišli smo do sistema dveh linearnih enačb z dvema neznankama, iz katerega takoj sledi $\beta_1 = \beta_2 = 0.$ Torej sta vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ linearno neodvisna.

Za dokaz v nasprotni smeri predpostavimo, da sta vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ linearno neodvisna. Torej je:

$$\gamma_1\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \gamma_2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \qquad (*)$$

Naj za neka skalarja $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ velja $\delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b} = \vec{0}$. Pokazati želimo, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, torej, da je v našem primeru $\delta_1 = \delta_2 = 0$. S tem namenom bomo zvezo $\delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b} = \vec{0}$ preoblikovali na naslednji način:

$$\vec{0} = \delta_1 \vec{a} + \delta_2 \vec{b} = \frac{\delta_1}{2} \vec{a} + \frac{\delta_1}{2} \vec{a} + \frac{\delta_2}{2} \vec{b} - \frac{-\delta_2}{2} \vec{b} \pm \frac{\delta_2}{2} \vec{a} \pm \frac{\delta_1}{2} \vec{b} =$$

$$\frac{\delta_1}{2} \vec{a} + \frac{\delta_2}{2} \vec{a} + \frac{\delta_1}{2} \vec{b} + \frac{\delta_2}{2} \vec{b} + \frac{\delta_1}{2} \vec{a} - \frac{\delta_2}{2} \vec{a} + \frac{\delta_1}{2}\left(-\vec{b}\right) - \frac{\delta_2}{2}\left(-\vec{b}\right) =$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right).$$

Zaradi zveze (*) iz zgornjega zapisa sledi $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = 0$ in $\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = 0$. Podobno kot v prvem delu dokaza od tu dobimo $\delta_1 = \delta_2 = 0$, kar smo želeli pokazati.

5.3.8 Pokažite, da sta vektorja $u = (1 + i, 2i)$ in $w = (1, 1 + i)$ iz $\mathbb{C}^2$ linearno odvisna v vektorskem prostoru $\mathbb{C}^2$ nad obsegom $\mathbb{C}$ in linearno neodvisna nad obsegom $\mathbb{R}$.

Reševanje naloge:
Spomnimo se, da sta vektorja a in b linearno odvisna nad poljubnim obsegom F, če obstaja tak skalar $\lambda \in F$, da je $a = \lambda b$. Poiščimo tak skalar $\lambda \in F$ za naš primer:

$$u = \lambda w \quad \rightarrow \quad (1 + i, 2i) = \lambda(1, 1 + i)$$

$$1 + i = \lambda, \quad 2i = \lambda + \lambda i.$$

Vrednost skalarja $\lambda = 1 + i$ ustreza tudi drugi enačbi. Skalar λ je kompleksno število, ki ima imaginarno komponento različno od 0, torej $\lambda \notin \mathbb{R}$. Tako sta vektorja u in w linearno odvisna nad obsegom $\mathbb{C}$. Po drugi strani očitno ne obstaja skalar $\mu \in \mathbb{R}$, za katerega bo $u = \mu w$. Torej sta u in w linearno neodvisna nad obsegom $\mathbb{R}$.

5.3.9 Katere izmed naslednjih množic tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$?

a) $A = \{(1,1,1), (1,-1,5)\}$

b) $B = \{(1,2,3), (1,2,5), (2,0,1), (1,3,1)\}$

c) $C = \{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$

d) $D = \{(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)\}$

e) $E = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

f) $F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)\}$

Reševanje naloge:
a) in b) Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ je trirazsežen, torej ima vsaka njegova baza natanko tri elemente. Tako množici A in B ne predstavljata baze prostora $\mathbb{R}^3$.

c) Spomnimo se trditve, da so vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ linearno neodvisni natanko takrat, ko je rang matrike $A \in M_{nm}$, ki ima te vektorje za stolpce, enak m. Zapišimo vektorje iz množice C kot stolpce matrike in določimo njen rang:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo najprej uporabili pravila $V_1^* = V_1, V_2^* = (-1) \cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = (-1) \cdot V_1 + V_3$, v naslednjem koraku smo prvi dve vrstici prepisali, tretjo pa določili kot $V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3$. Očitno je rang $M_1 = 3$ in vektorji so linearno neodvisni. Ker je njihovo število enako $\dim \mathbb{R}^3$, tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

d) Primer rešujemo podobno kot primer c). Imamo:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je rang $M_2 = 2$, vektorji iz množice D so linearno odvisni in ne predstavljajo baze prostora $\mathbb{R}^3$. Kot dodatek k nalogi poiščimo koeficiente v njihovi linearni kombinaciji. Na primer, določimo α in β iz $\mathbb{R}$ tako, da bo veljalo:

$$(1,1,2) = \alpha(1,2,5) + \beta(5,3,4).$$

Iščemo torej števili α in β, ki sta rešitvi sistema enačb:

$$1 = \alpha + 5\beta, \quad 1 = 2\alpha + 3\beta, \quad 2 = 5\alpha + 4\beta.$$

Če prvo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo k drugi, lahko iz dobljene zveze izračunamo $\beta = \frac{1}{7}$. Nato iz prve enačbe izračunamo še $\alpha = \frac{2}{7}$. Preverimo, ali obe vrednosti zadoščata tudi tretji enačbi. Tako je:

$$(1,1,2) = \frac{2}{7}(1,2,5) + \frac{1}{7}(5,3,4).$$

e) Ko zapišemo vektorje množice E kot stolpce matrike, je očitno, da je rang matrike

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ enak 3.}$$

Vektorji množice E so torej linearno neodvisni; ker so trije, predstavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

f) Vektorji iz $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^n)$, med katerimi je ničelni vektor, so vedno linearno odvisni. Velja namreč:

$$0 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + \alpha(0,0,0) = (0,0,0),\ \alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Torej vektorji iz množice F ne tvorijo baze prostora $\mathbb{R}^3$.

5.3.10 Ali vektorji $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,2)$, $(2,5,6,4)$ **in** $(2,6,8,5)$ **tvorijo bazo prostora** $\mathbb{R}^4$? **Če ne, poiščite dimenzijo podprostora, ki ga ti vektorji napenjajo**.

Reševanje naloge:
Dane vektorje zapišemo kot stolpce matrike in določimo njen rang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo uporabili naslednja pravila:

1. korak: $V_1^* = V_1,\ V_i^* = (-1) \cdot V_1 + V_i,\quad i = 2,\ 3,\ 4;$

2. korak: $V_1^* = V_1,\ V_2^* = V_2,\ V_3^* = (-2) \cdot V_2 + V_3,\quad V_4^* = (-1) \cdot V_2 + V_4;$

3. korak: $V_1^* = V_1,\ V_2^* = V_2,\ V_3^* = (-\frac{1}{2}) \cdot V_3,\quad V_4^* = \frac{1}{2} \cdot V_3 + V_4.$

Iz zadnje matrike razberemo, da je rang $A = 3$. To pomeni, da so dani vektorji linearno odvisni (rang matrike je manjši od števila teh vektorjev) in tako ne predstavljajo baze prostora $\mathbb{R}^4$. Podprostor, ki ga ti vektorji napenjajo, ima dimenzijo 3.

5.3.11 Pokažimo, da polinomi $p_1(t) = t + 1$, $p_2(t) = t - 1$ **in** $p_3(t) = (t - 1)^2$ **tvorijo bazo vektorskega prostora** $\mathbb{R}_2[x]$ **(prostora vseh polinomov stopnje 2 ali manj nad obsegom realnih števil) in poiščimo komponente polinoma** $p(t) = 2t^2 - 5t + 9$ **v tej bazi**.

Reševanje naloge:
Ker vemo, da je $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, zadošča pokazati, da so polinomi $p_1(t)$, $p_2(t)$ in $p_3(t)$ linearno neodvisni. Pokažimo torej, da so v linearni kombinaciji

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) + \gamma p_3(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

vsi skalarji α, β, γ enaki 0. Tako je:

$$\alpha(t+1) + \beta(t-1) + \gamma(t-1)^2 = 0,$$

$$\gamma t^2 + (\alpha + \beta - 2\gamma)t + \alpha - \beta + \gamma = 0. \quad (*)$$

Ker so polinomi t^2, t in 1 linearno neodvisni, mora biti

$$\gamma = 0, \quad \alpha + \beta - 2\gamma = 0, \quad \alpha - \beta + \gamma = 0.$$

Iz tega sistema enačb hitro ugotovimo, da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ in tako so polinomi $p_1(t)$, $p_2(t)$ in $p_3(t)$ zares linearno neodvisni.

Ko iščemo koordinate polinoma $p(t)$ v bazi $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$, koristimo prej zapisano zvezo (*) in zapišemo:

$$\gamma t^2 + (\alpha + \beta - 2\gamma)t + \alpha - \beta + \gamma = 2t^2 - 5t + 9.$$

Od tu sledi

$$\gamma = 2, \quad \alpha + \beta - 2\gamma = -5, \quad \alpha - \beta + \gamma = 9.$$

Z upoštevanjem $\gamma = 2$ iz druge in tretje enačbe hitro sledi $\alpha = 3$ in $\beta = -4$. Tako je:

$$p(t) = 3p_1(t) - 4p_2(t) + 2p_3(t)$$

oziroma koordinate polinoma $p(t)$ v bazi $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ so $(3, -4, 2)$.

5.3.12 Za katera števila $\lambda \in \mathbb{R}$ je množica $B = \{1 - \lambda x,\ 1 - x^2,\ x - x^2\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$?

Reševanje naloge:
Množica B je baza vektorskega prostora V, če so vsi njeni elementi linearno neodvisni, in lahko vsak vektor iz V izrazimo z njihovo linearno kombinacijo.

Splošno velja: če ima vektorski prostor V končno bazo z n elementi, potem ima vsaka linearno neodvisna množica v V kvečjemu n elementov. V našem primeru ima množica B tri elemente in je podmnožica trirazsežnega prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Zato zadošča, da ugotovimo, kdaj (za katere vrednosti λ) bodo elementi množice B linearno neodvisni. Zapišimo njihovo linearno kombinacijo, ki naj bo enaka 0:

$$\alpha(1 - \lambda x) + \beta(1 - x^2) + \gamma(x - x^2) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Zvezo preoblikujemo in uredimo po potencah spremenljivke x:

$$(\alpha+\beta)+(-\alpha\lambda+\gamma)x+(-\beta-\gamma)x^2 = 0.$$

Ker so elementi 1, x in x^2 linearno neodvisni, mora biti izpolnjeno:

$$\alpha+\beta = 0, \quad -\alpha\lambda+\gamma = 0, \quad -\beta-\gamma = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = -\beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad -\alpha\lambda+\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Za $\lambda = 1$ je zapisan sistem treh enačb s tremi neznankami netrivialno rešljiv (na primer $\alpha = \gamma = 1,\ \beta = -1$). Za $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ velja $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Množica B je torej baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$ za vse vrednosti $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5.3.13 Pri katerem $a \in \mathbb{R}$ tvorijo vektorji $\vec{x} = (1,1,a^2+a-1)$, $\vec{y} = (1,a^2-a+1,-1)$ in $\vec{z}$ $= (-2,-2,a^2+a+2)$ bazo prostora $\mathbb{R}^3$?

Reševanje naloge:
Vektorji $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ bodo linearno neodvisni natanko takrat, ko bodo nekomplanarni, kar bo natanko takrat, ko bo njihov mešani produkt različen od 0. Z drugimi besedami: vektorji $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ bodo linearno neodvisni natanko takrat, ko bo determinanta matrike, ki ima komponente teh vektorjev za elemente stolpcev (ali vrstic), različna od 0 (v tem primeru bo namreč rang matrike enak številu vektorjev, torej bo enak 3). Izračunajmo:

$$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1 \\ 1 & a^2-a+1 & -1 \\ -2 & -2 & a^2+a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1 \\ 0 & a^2-a & -a^2-a \\ 0 & 0 & 3a^2+3a \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(a^2-a)(3a^2+3a) = a(a-1)\cdot 3a(a+1) = 3a^2(a-1)(a+1).$$

Pri tem smo najprej uporabili pravila $V_1^* = V_1, V_2^* = (-1)\cdot V_1 + V_2$ in $V_3^* = 2\cdot V_1 + V_3$, v naslednjem koraku smo determinanto izračunali kot produkt diagonalnih elementov (determinanto smo namreč diagonalizirali). Mešani produkt vektorjev $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ bo različen od 0 za vsak $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Za vse take vrednosti a bodo vektorji $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ tvorili bazo prostora $\mathbb{R}^3$, saj bodo linearno neodvisni, njihovo število pa je enako dimenziji prostora.

5.3.14 Za bazo $B_1 = \{(1,0,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ poiščite matriko prehoda v standardno bazo B prostora $\mathbb{R}^3$ in matriko prehoda iz baze $B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ v bazo B_1. Zapišite komponente vektorjev $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ v bazi B_1.

Reševanje naloge:
Komponente poljubnega vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ v standardni bazi B dobimo tako, da komponente vektorja $\vec{x}$ v dani bazi B_1 pomnožimo z matriko prehoda P, ki ima za stolpce ravno vektorje dane baze ($\vec{x}_B = P\,\vec{x}_{B_1}$). Rešitev prvega dela naloge je torej matrika:

$$P = P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podobno razmišljamo tudi, ko prehajamo iz neke baze B_1 v drugo bazo B_2:

$$\vec{x}_B = P_1\,\vec{x}_{B_1} = P_2\,\vec{x}_{B_2}\ .$$

Pri tem ima matrika P_1 za stolpce vektorje baze B_1 in matrika P_2 vektorje baze B_2. Iz zgornje zveze sledi:

$$\vec{x}_{B_1} = P_1^{-1}P_2\,\vec{x}_{B_2}\ ,$$

če matrika P_1^{-1} obstaja. Tako dobimo naslednjo matriko prehoda:

$$P = P_1^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z Gauss-Jordanovo metodo izračunajmo P_1^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pri tem smo uporabili naslednja pravila:

1. korak: prvi dve vrstici prepišemo, $V_3^* = (-1) \cdot V_1 + V_3$;

2. korak: $V_1^* = (-1) \cdot V_3 + V_1$, $\quad V_2^* = (-2) \cdot V_3 + V_2$, tretjo vrstico prepišemo;

3. korak: $V_1^* = (-2) \cdot V_2 + V_1$, drugo in tretjo vrstico prepišemo.

Iz zadnje matrike odčitamo inverzno matriko P_1^{-1}:

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iskana matrika prehoda je matrika

$$P = P_1^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za določitev komponent vektorjev v bazi B_1 bomo izhajali iz zveze $\vec{x}_B = P\,\vec{x}_{B_1}$, od koder bomo izrazili $\vec{x}_{B_1}$:

$$\vec{x}_{B_1} = P^{-1}\,\vec{x}_B .$$

V našem primeru je $P = P_1$, za vektor $\vec{x}_B$ pa po vrsti vzamemo vektorje $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}_{B_1} = P_1^{-1} \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{j}_{B_1} = P_1^{-1} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{k}_{B_1} = P_1^{-1} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da so vektorji $\vec{i}_{B_1}$, $\vec{j}_{B_1}$ in $\vec{k}_{B_1}$ po vrsti ravno stolpci matrike P_1^{-1}.

5.4 Zaključek

Ključne besede petega poglavja: vektorski prostor, vektorski podprostor, linearno (ne)odvisni vektorji, baza vektorskega prostora, dimenzija vektorskega prostora.

Povzetek: Vektorski prostor V nad obsegom realnih (kompleksnih) števil je neprazna množica elementov, na kateri sta definirani dve operaciji: seštevanje vektorjev in množenje vektorjev z realnimi (kompleksnimi) skalarji. Množica V je zaprta za obe operaciji, ki morata zadoščati osmim lastnostim (glej formalno definicijo vektorskega prostora). Podmnožica $W \subset V$ je podprostor vektorskega prostora V, če je W tudi sama vektorski prostor glede na operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarjem v prostoru V.

Vektorji $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ so linearno neodvisni, če je linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ enaka ničelnemu vektorju samo, če so vsi skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ enaki 0. Če obstaja kakšna linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, pri čemer je vsaj eden izmed skalarjev $\alpha_i \neq 0$, pravimo, da so vektorji $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno odvisni. Vektorji $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ tvorijo bazo vektorskega prostora V, če so linearno neodvisni in če lahko vsak vektor $x \in V$ izrazimo kot njihovo linearno kombinacijo. Če vektorji $b_1, b_2, \dots, b_n$ tvorijo bazo vektorskega prostora V, lahko vsak vektor $x \in V$ na enoličen način izrazimo kot linearno kombinacijo teh vektorjev. Če ima vektorski prostor V bazo s končno mnogo vektorji, imenujemo število teh vektorjev dimenzija vektorskega prostora V, $\dim V$. Komponente poljubnega vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ v standardni bazi dobimo tako, da stolpec komponent vektorja x v dani bazi pomnožimo z matriko prehoda, ki ima za stolpce ravno vektorje dane baze.

Besedila nalog v petem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3] in [5], teorija pa iz [2].

Poglavje 6

LINEARNE PRESLIKAVE

6.1 Namen poglavja

V šestem poglavju bomo:

- ponovili definicijo linearne preslikave;
- za dane preslikave pokazali, da so linearne preslikave;
- za posamezne preslikave ugotovili, zakaj niso linearne;
- dano linearno preslikavo predstavili z ustrezno matriko;
- za dano matriko poiskali linearno preslikavo, ki jo ta matrika določa.

6. 2 Povzetek teorije

Naj bosta V in U vektorska prostora nad istim obsegom $(\mathbb{R})$. Preslikava $F\colon V \to U$ je *linearna preslikava* ali *linearna transformacija*, če velja:

(i) $F(x+y) = F(x) + F(y), \quad \forall x,y \in V,$

(ii) $F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in V.$

Če v (ii) postavimo $\alpha = 0$, dobimo $F(0) = 0$, kar pomeni, da vsaka linearna preslikava preslika ničelni vektor prostora V v ničelni vektor prostora U.

Za poljubna skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubna vektorja $x,y \in V$ velja:

$$F(\alpha x + \beta y) \overset{\text{(i)}}{=} F(\alpha x) + F(\beta y) \overset{\text{(ii)}}{=} \alpha F(x) + \beta F(y).$$

To zvezo običajno uporabimo pri ugotavljanju, če je neka preslikava linearna.

Naj bo A poljubna matrika dimenzije $m \times n$. Ta matrika naj določa preslikavo $F_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definirano s predpisom

$$F_A(x) = Ax$$

za poljuben element $x \in \mathbb{R}^n$. Pri tem pišemo elemente prostorov $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ kot stolpce:

$$F_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Tako definirana preslikava F_A je linearna preslikava.

Naj bosta V in U vektorska prostora nad poljubnim obsegom (v našem primeru bomo za obseg vzeli kar $\mathbb{R}$) in $F\colon V \to U$ linearna preslikava. Označimo z $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ bazo vektorskega prostora V in z $B_2 = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ bazo vektorskega prostora U.

Vektorji $F(b_1)$, $F(b_2), \ldots,$ $F(b_n)$ so elementi vektorskega prostora U. Vsakega med njimi lahko na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev baze B_2:

$$F(b_1) = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1m}c_m,$$

$$F(b_2) = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2m}c_m,$$

$$\vdots$$

$$F(b_n) = a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nm}c_m,$$

pri čemer so $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Transponirano matriko zgornjega sistema linearnih enačb imenujemo *matrična reprezentacija linearne preslikave F glede na bazi* B_1 *in* B_2. Stolpci te matrike so torej komponente vektorjev $F(b_1)$, $F(b_2)$, $\ldots$, $F(b_n)$ glede na bazo B_2:

$$[F]_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Naj bo $F\colon V \to V$ linearna preslikava in B končna baza vektorskega prostora V. Potem za vsak vektor $v \in V$ velja:

$$[F]_B \cdot [v]_B = [F(v)]_B,$$

pri čemer je:

$[F]_B$ matrična reprezentacija preslikave F glede na bazo B,

$[v]_B$ stolpec komponent vektorja v glede na bazo B in

$[F(v)]_B$ stolpec komponent vektorja $F(v)$ glede na bazo B.

6.3 Rešeni zgledi

6.3.1 Za dane preslikave $F_1,\ F_2,\ \ldots, F_7\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **ugotovite, ali so linearne**:

a) $F_1\ :\ (x,y) \mapsto (x,0)$,

b) $F_2\ :\ (x,y) \mapsto (0,x)$,

c) $F_3\ :\ (x,y) \mapsto (x+1,y)$,

d) $F_4\ :\ (x,y) \mapsto (2x,y)$,

e) $F_5\ :\ (x,y) \mapsto (|x|,y)$,

f) $F_6\ :\ (x,y) \mapsto (x,e^y)$,

g) $F_7\ :\ (x,y) \mapsto (x,\sin y)$.

Reševanje naloge:
Preslikava F: $V \to U$ je linearna, če je aditivna ($F(x+y) = F(x)+F(y)$ za vsaka $x,y \in V$) in homogena ($F(\lambda x) = \lambda F(x)$ za vsak $x \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$). Naj bodo v vseh obravnavanih primerih $\vec{a} = (a_1,a_2)$, $\vec{b} = (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ poljubni.

a) Aditivnost:

$$F_1(\vec{a}+\vec{b}) = F_1((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = F_1(a_1+b_1,a_2+b_2) = (a_1+b_1,0) =$$

$$(a_1,0)+(b_1,0) = F_1(a_1,a_2)+F_1(b_1,b_2) = F_1(\vec{a}) + F_1(\vec{b}).$$

Homogenost:

$$F_1(\lambda\,\vec{a}) = F_1(\lambda(a_1,a_2)) = F_1(\lambda a_1,\lambda a_2) = (\lambda a_1,0) = \lambda(a_1,0) = \lambda F_1(a_1,a_2) = \lambda F_1(\vec{a}).$$

Preslikava F_1 je aditivna in homogena, torej je linearna.

b) Aditivnost:

$$F_2(\vec{a}+\vec{b}) = F_2((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = F_2(a_1+b_1,a_2+b_2) = (0,a_1+b_1) =$$

$$(0,a_1)+(0,b_1) = F_2(a_1,a_2)+F_2(b_1,b_2) = F_2(\vec{a}) + F_2(\vec{b}).$$

Homogenost:

$$F_2(\lambda\,\vec{a}) = F_2(\lambda(a_1,a_2)) = F_2(\lambda a_1,\lambda a_2) = (0,\lambda a_1) = \lambda(0,a_1) = \lambda F_2(a_1,a_2) = \lambda F_2(\vec{a}).$$

Preslikava F_2 je aditivna in homogena, torej je linearna.

c) Vemo, da linearna preslikava F: $V \to W$ preslika ničelni vektor prostora V v ničelni vektor prostora W. V našem primeru za $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ velja:

$$F_3(\vec{0}) = F_3(0,0) = (0+1,0) = (1,0) \neq (0,0) = \vec{0}.$$

Preslikava F_3 ničelnega vektorja iz $\mathbb{R}^2$ ne preslika v ničelni vektor in zato ni linearna. Lahko pa tudi preverimo, da ni niti aditivna niti homogena.

Aditivnost:

$$F_3(\vec{a} + \vec{b}) = F_3((a_1,a_2) + (b_1,b_2)) = F_3(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1 + b_1 + 1, a_2 + b_2);$$

po drugi strani je

$$F_3(\vec{a}) + F_3(\vec{b}) = F_3(a_1,a_2) + F_3(b_1,b_2) = (a_1 + 1, a_2) + (b_1 + 1, b_2) =$$

$$(a_1 + b_1 + 2, a_2 + b_2).$$

Ugotovimo, da dobljena izraza nista enaka.

Homogenost:

$$F_3(\lambda \vec{a}) = F_3(\lambda(a_1,a_2)) = F_3(\lambda a_1, \lambda a_2) = (\lambda a_1 + 1, \lambda a_2);$$

po drugi strani je

$$\lambda F_3(\vec{a}) = \lambda F_3(a_1,a_2) = \lambda(a_1 + 1, a_2) = (\lambda a_1 + \lambda, \lambda a_2).$$

Dobljena izraza ponovno nista enaka.

d) Aditivnost:

$$F_4(\vec{a} + \vec{b}) = F_4((a_1,a_2) + (b_1,b_2)) = F_4(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (2(a_1 + b_1), a_2 + b_2) =$$

$$(2a_1 + 2b_1, a_2 + b_2) = (2a_1, a_2) + (2b_1, b_2) = F_4(a_1,a_2) + F_4(b_1,b_2) = F_4(\vec{a}) + F_4(\vec{b}).$$

Homogenost:

$$F_4(\lambda \vec{a}) = F_4(\lambda(a_1,a_2)) = F_4(\lambda a_1, \lambda a_2) = (2(\lambda a_1), \lambda a_2) = \lambda(2a_1, a_2) = \lambda F_4(a_1,a_2) =$$

$$\lambda F_4(\vec{a}).$$

Preslikava F_4 je aditivna in homogena, torej je linearna.

e) Aditivnost:

$$F_5(\vec{a} + \vec{b}) = F_5((a_1,a_2) + (b_1,b_2)) = F_5(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (|a_1 + b_1|, a_2 + b_2);$$

po drugi strani je:

$$F_5(\vec{a}) + F_5(\vec{b}) = F_5(a_1, a_2) + F_5(b_1, b_2) = (|a_1|, a_2) + (|b_1|, b_2) = (|a_1| + |b_1|, a_2 + b_2).$$

Ker $|a_1 + b_1| \neq |a_1| + |b_1|$, potem tudi $F_5(\vec{a} + \vec{b}) \neq F_5(\vec{a}) + F_5(\vec{b})$. Preslikava F_5 ni aditivna in tako tudi ni linearna.

f) Podobno kot v primeru c) preverimo, kam preslikava F_6 preslika ničelni vektor:

$$F_6(\vec{0}) = F_6(0,0) = (0, e^0) = (0,1) \neq (0,0) = \vec{0}.$$

Slika ničelnega vektorja iz $\mathbb{R}^2$ ni ničelni vektor in zato F_6 ni linearna preslikava.

g) Aditivnost:

$$F_7(\vec{a} + \vec{b}) = F_7((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = F_7(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1 + b_1, \sin(a_2 + b_2));$$

po drugi strani je:

$$F_7(\vec{a}) + F_7(\vec{b}\ 9 = F_7(a_1, a_2) + F_7(b_1, b_2) = (a_1, \sin a_2) + (b_1, \sin b_2) =$$

$$(a_1 + b_1, \sin a_2 + \sin b_2).$$

Ker $\sin(a_2 + b_2) \neq \sin a_2 + \sin b_2$, potem tudi $F_7(\vec{a} + \vec{b}) \neq F_7(\vec{a}) + F_7(\vec{b})$. Preslikava F_7 ni aditivna in zato tudi ni linearna.

6.3.2 Pokažite, da naslednje preslikave niso linearne:

a) $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_1(x,y) = (xy, x)$,

b) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F_2(x,y) = (x + 3, 2y, x + y)$,

c) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F_3(x,y,z) = (|x|, y + z)$.

Reševanje naloge:
V vsakem primeru bomo poiskali lastnost preslikave, zaradi katere le-ta ne bo linearna preslikava. Pri tem naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ poljubni.

a) Preverimo, ali je F_1 aditivna preslikava:

$$F_1\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = F_1((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = F_1(a_1 + b_1, a_2 + b_2) =$$

$$((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), a_1 + b_1) = (a_1a_2 + b_1a_2 + a_1b_2 + b_1b_2, a_1 + b_1).$$

Po drugi strani je:

$$F_1(\vec{a}) + F_1(\vec{b}) = F_1(a_1,a_2) + F_1(b_1,b_2) = (a_1a_2,a_1) + (b_1b_2,b_1) =$$

$$(a_1a_2 + b_1b_2, a_1 + b_1).$$

Ker $F_1(\vec{a} + \vec{b}) \neq F_1(\vec{a}) + F_1(\vec{b})$, preslikava F_1 ni aditivna in zato tudi ni linearna.

b) Vemo, da vsaka linearna preslikava $F : V \to U$ preslika ničelni element prostora V v ničelni element prostora U. V našem primeru je:

$$F_2(0,0) = (0+3, 2 \cdot 0, 0+0) = (3,0,0) \neq (0,0,0).$$

Preslikava F_2 torej ničelnega elementa iz prostora $\mathbb{R}^2$ ne preslika v ničelni element prostora $\mathbb{R}^3$ in zato ni linearna.

c) V tem primeru preverimo homogenost preslikave F_3:

$$F_3(\lambda \vec{a}) = F_3(\lambda(a_1,a_2,a_3)) = F_3(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = (|\lambda a_1|, \lambda a_2 + \lambda a_3) =$$

$$(|\lambda||a_1|, \lambda(a_2 + a_3)).$$

Po drugi strani je:

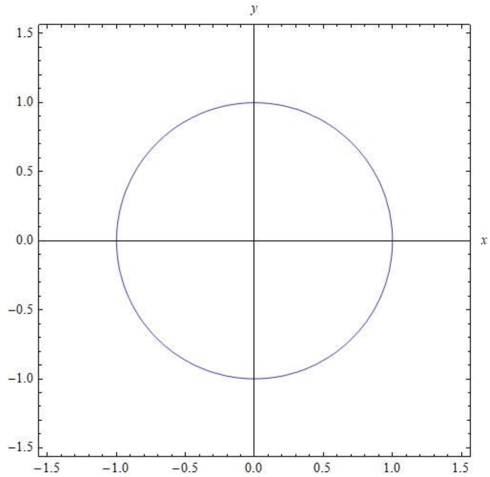
$$\lambda F_3(\vec{a}) = \lambda F_3(a_1,a_2,a_3) = \lambda(|a_1|, a_2 + a_3) = (\lambda|a_1|, \lambda(a_2 + a_3)) \neq F_3(\lambda \vec{a})$$

za poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preslikava F_3 ni homogena in zato ni linearna.

6.3.3 Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikava, definirana s predpisom $F(x,y) = (3y, 2x)$. Označimo s K enotsko krožnico v ravnini $\mathbb{R}^2$, ki ima središče v izhodišču koordinatnega sistema ($K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$). Določite $F(K)$ in $F^{-1}(K)$. Narišite tudi ustrezne slike.

Reševanje naloge:
Na sliki 6.1 je prikazana enotska krožnica K.



Slika 6.1. Enotska krožnica K z enačbo $x^2 + y^2 = 1$.

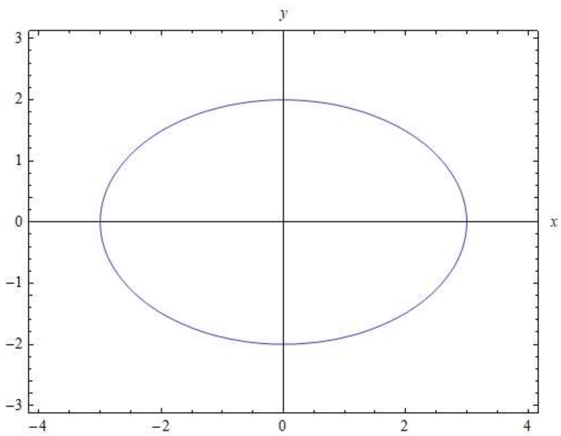
Poiščimo množico točk v ravnini $\mathbb{R}^2$, v katero preslikava F preslika krožnico K. Naj bo točka $(a, b) \in F(K)$. Potem je:

$$F(x, y) = (3y, 2x) = (a, b).$$

Od tu sledi $a = 3y$ in $b = 2x$ oziroma $y = \frac{a}{3}$ in $x = \frac{b}{2}$. Ker leži točka (x, y) na krožnici K, velja:

$$1 = x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2,$$

kar zapišemo drugače kot $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4} = 1$. Slika krožnice K (to je množica točk $F(K)$) je torej elipsa s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polosema $a_1 = 3$, $b_1 = 2$ (slika 6.2).

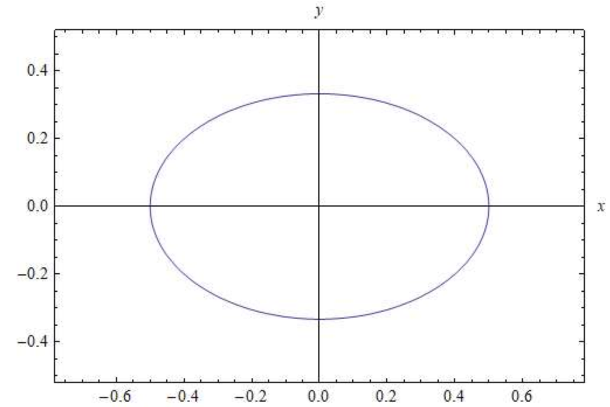


Slika 6.2. Množica točk $F(K)$ je elipsa z enačbo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Določiti moramo še množico točk $F^{-1}(K)$, to pomeni vse točke ravnine $\mathbb{R}^2$, ki jih preslikava F preslika v krožnico K. Naj bo točka $(c,d) \in K$. Iščemo točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, za katere bo $F(x,y) = (c,d)$ oziroma $(3y,2x) = (c,d)$. Od tu sledi $3y = c$ in $2x = d$. Ker leži točka (c,d) na krožnici K, velja:

$$c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow (3y)^2 + (2x)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

Ugotovimo, da je množica točk $F^{-1}(K)$ elipsa s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polosema $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{3}$ (slika 6.3).



Slika 6.3. Množica točk $F^{-1}(K)$ je elipsa z enačbo $4x^2 + 9y^2 = 1$.

6.3.4 Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, za katero poznamo delovanje na bazna vektorja $(1,2)$ in $(0,1)$ iz $\mathbb{R}^2$:

$$F(1,2) = (2,3) \text{ in } F(0,1) = (1,4).$$

Določite predpis za linearno preslikavo F (torej poiščite $F(x,y)$ za poljuben $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

Reševanje naloge:
Vemo, da je vsaka linearna preslikava natanko določena z delovanjem na bazo. Naj bo vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ poljuben. Izrazimo ga z linearno kombinacijo baznih vektorjev $(1,2)$ in $(0,1)$:

$$(x,y) = \alpha(1,2)+\beta(0,1) = (\alpha \cdot 1+\beta \cdot 0, \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta).$$

Ugotovimo:

$$\alpha = x$$
$$2\alpha + \beta = y \quad \to \quad \beta = y - 2\alpha = y - 2x.$$

Potem je:

$$F(x,y) = F(\alpha(1,2)+\beta(0,1)) = \alpha F(1,2)+\beta F(0,1) = \alpha(2,3)+\beta(1,4) =$$

$$x(2,3)+(y-2x)(1,4) = (2x,3x) + (y-2x,4y-8x) =$$

$$(2x+y-2x,3x+4y-8x) = (y,-5x+4y).$$

Pri tem smo uporabili dejstvo, da je F linearna preslikava, in definicijo delovanja preslikave F na bazna vektorja. Predpis za preslikavo F je torej

$$F : (x,y) \mapsto (y,-5x+4y).$$

6.3.5 Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, določene z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

a) glede na bazo $B = \{b_1,b_2\}$, pri čemer je $b_1 = (1,2)$ in $b_2 = (2,5)$,

b) glede na standardno bazo $S = \{e_1,e_2\}$, pri čemer je $e_1 = (1,0)$ in $e_2 = (0,1)$.

Reševanje naloge:
Vsaka matrika $A \in M_{mn}$ določa linearno preslikavo $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dano s predpisom $F_A(x) = A \cdot x$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Matrična reprezentacija linearne preslikave $F : V \to U$ je matrika, ki ima za stolpce komponente slik baznih vektorjev prostora V glede na bazo prostora U.

a) Najprej bomo s preslikavo F_A preslikali bazna vektorja b_1 in b_2, nato bomo poiskali komponente njunih slik v bazi $B = \{b_1,b_2\}$:

$$F_A(b_1) = A \cdot b_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

$$\alpha b_1+\beta b_2 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+2\beta \\ 2\alpha+5\beta \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo sistem enačb:

$$\alpha+2\beta = -1$$
$$2\alpha+5\beta = -6.$$

Prvo enačbo pomnožimo z 2 in jo odštejemo od druge; dobimo $\beta = -4$ in nato še $\alpha = 7$. Torej je $F_A(b_1) = 7b_1 - 4b_2$. Podobno naredimo še z drugim baznim vektorjem:

$$F_A(b_2) = A \cdot b_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -17 \end{bmatrix} =$$

$$\gamma b_1 + \delta b_2 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma+2\delta \\ 2\gamma+5\delta \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} \gamma+2\delta &= -4 \\ 2\gamma+5\delta &= -17, \end{aligned}$$

od koder sledi $\delta = -9$ in $\gamma = 14$. Tako je $F_A(b_2) = 14b_1 - 9b_2$. Matrična reprezentacija dane linearne preslikave glede na bazo B je torej enaka

$$[F_A]_B = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

b) Za standardno bazo $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ je postopek podoben, vendar krajši:

$$F_A(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3e_1 + 4e_2,$$

$$F_A(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} =$$

$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-5) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2e_1 - 5e_2.$$

Matrična reprezentacija dane linearne preslikave je v tem primeru enaka matriki A:

$$[F_A]_S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = A.$$

6.3.6 Dana je linearna preslikava $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **s predpisom** $F(x,y) = (2x - 7y, 4x + 3y)$ **in baza** $B = \{u_1, u_2\} = \{(1,3),(2,5)\}$.

a) Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave F **glede na bazo** B.

b) Preverite zvezo $[F]_B \cdot [v]_B = [F(v)]_B$ za vektor $v = (4,-3) \in \mathbb{R}^2$.

Reševanje naloge:
a) Nalogo rešujemo podobno kot prejšnjo. Najprej poiščemo sliki baznih vektorjev u_1 in u_2 glede na linearno preslikavo F:

$$F(u_1) = F(1,3) = \big(2 \cdot 1 - 7 \cdot 3,\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3\big) = (-19, 13),$$

$$F(u_2) = F(2,5) = \big(2 \cdot 2 - 7 \cdot 5,\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5\big) = (-31, 23).$$

V nadaljevanju izrazimo vektorja $F(u_1)$ in $F(u_2)$ z vektorjema u_1 in u_2. To pomeni, da poiščemo ustrezne skalarje $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$, za katere bo veljalo:

$$F(u_1) = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad \text{in} \quad F(u_2) = \gamma u_1 + \delta u_2.$$

Tako je

$$\begin{aligned}
&F(u_1) = \alpha u_1 + \beta u_2,\\
&(-19, 13) = \alpha(1,3) + \beta(2,5),\\
&-19 = \alpha + 2\beta,\\
&13 = 3\alpha + 5\beta,
\end{aligned}$$

od koder sledi $\alpha = 121$ in $\beta = -70$. Podobno velja:

$$\begin{aligned}
&F(u_2) = \gamma u_1 + \delta u_2,\\
&(-31, 23) = \gamma(1,3) + \delta(2,5),\\
&-31 = \gamma + 2\delta,\\
&23 = 3\gamma + 5\delta,
\end{aligned}$$

od koder sledi $\gamma = 201$ in $\delta = -116$. Vemo, da so stolpci matrike $[F]_B$, ki predstavlja matrično reprezentacijo linearne preslikave F glede na bazo B, ravno komponente slik baznih vektorjev glede na bazo B. Torej je

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 121 & 201 \\ -70 & -116 \end{bmatrix}.$$

b) V znani zvezi $[F]_B \cdot [v]_B = [F(v)]_B$ pomeni $[F]_B$ matrično reprezentacijo linearne preslikave F glede na bazo B, $[v]_B$ stolpec komponent vektorja v glede na bazo B in $[F(v)]_B$ stolpec komponent vektorja $F(v)$ glede na bazo B. Za potrditev zveze potrebujemo torej še komponente obeh vektorjev v in $F(v)$ v bazi B.

Po znanem postopku dobimo:

$$\begin{aligned}
v &= \lambda u_1 + \mu u_2,\\
(4,-3) &= \lambda(1,3) + \mu(2,5),\\
4 &= \lambda + 2\mu,\\
-3 &= 3\lambda + 5\mu,
\end{aligned}$$

od koder sledi $\lambda = -26$ in $\mu = 15$. Podobno velja:

$$\begin{aligned}
F(v) &= \sigma u_1 + \varepsilon u_2,\\
(2 \cdot 4 - 7 \cdot (-3),\ 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-3)) &= \sigma(1,3) + \varepsilon(2,5),\\
(29,7) &= \sigma(1,3) + \varepsilon(2,5),\\
29 &= \sigma + 2\varepsilon,\\
7 &= 3\sigma + 5\varepsilon,
\end{aligned}$$

od koder sledi $\sigma = -131$ in $\varepsilon = 80$. Torej imata vektorja v in $F(v)$ komponente $v = (-26,15)$ in $F(v) = (-131,80)$. Sedaj preverimo zvezo $[F]_B \cdot [v]_B = [F(v)]_B$. Zares je

$$\begin{bmatrix} 121 & 201 \\ -70 & -116 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \cdot (-26) + 201 \cdot 15 \\ -70 \cdot (-26) + (-116) \cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -131 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

6.3.7 Poiščite matrične reprezentacije naslednjih linearnih preslikav $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardno bazo S:

a) $F(x,y,z) = (x + 2y - 3z, 4x - 5y - 6z, 7x + 8y + 9z)$ **za vsak** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) F **je definirana z matriko** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

c) F **je definirana z delovanjem na vektorje standardne baze na naslednji način**:

$$F(e_1) = (1,3,5),\ \ F(e_2) = (2,4,6),\ \ F(e_3) = (7,7,7).$$

Reševanje naloge:

a) Najprej ugotovimo, kam F preslika vektorje standardne baze in kako se slike izražajo z vektorji te baze. Velja:

$$F(e_1) = F(1,0,0) = (1,4,7) = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 7 \cdot e_3,$$

$$F(e_2) = F(0,1,0) = (2,-5,8) = 2 \cdot e_1 - 5 \cdot e_2 + 8 \cdot e_3,$$

$$F(e_3) = F(0,0,1) = (-3,-6,-9) = -3 \cdot e_1 - 6 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3.$$

Komponente vektorjev $F(e_1)$, $F(e_2)$ in $F(e_3)$ (v standardni bazi S) zapišemo kot stolpce matrike:

$$[F]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ugotovili smo, da so vrstice matrične reprezentacije linearne preslikave F glede na standardno bazo kar po vrsti zapisani koeficienti iz predpisa linearne preslikave F.

b) Vemo, da matrika $A \in M_{mn}$ definira linearno preslikavo $F_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definirano s predpisom $F_A(x) = Ax$ za poljuben $x \in \mathbb{R}^n$. Potem je:

$$F(e_1) = F_A(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3.$$

Podobno bi dobili:

$F(e_2) = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3$ in $F(e_3) = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3$.

Tako je

$$[F]_S = [F_A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = A.$$

Torej je v tem primeru matrična reprezentacija linearne preslikave F kar matrika A sama.

c) Iz podatkov razberemo:

$$F(e_1) = (1,3,5) = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3,$$

$$F(e_2) = (2,4,6) = 2 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3,$$

$$F(e_3) = (7,7,7) = 7 \cdot e_1 + 7 \cdot e_2 + 7 \cdot e_3.$$

Matrična reprezentacija linearne preslikave F v tem primeru je torej matrika

$$[F]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

6.3.8 Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardno bazo S, če je T dana s predpisom:

a) $T(x,y,z) = (x,y,0)$,

b) $T(x,y,z) = (z,y+z,x+y+z)$,

c) $T(x,y,z) = (2x-7y-4z, 3x+y+4z, 6x-8+z)$.

Reševanje naloge:
Nalogo rešujemo po znanem postopku (na primer podobno kot nalogo 7a) in dobimo:

a) $$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

b) $$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

c) $$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.3.9 Linearna preslikava $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je določena z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave F_A glede na bazo

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Reševanje naloge:
Najprej bomo ugotovili, v katere vektorje preslika linearna preslikava F_A vektorje baze B:

$$F_A(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$F_A(u_2) = A \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$F_A(u_3) = A \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sedaj vektorje $F_A(u_1)$, $F_A(u_2)$ in $F_A(u_3)$ izrazimo z vektorji baze B. Celoten postopek bomo zapisali le za prvi vektor, za druga dva računamo podobno. Tako je:

$$F_A(u_1) = (0,2,3) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,2,3).$$

Od tu sledi:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 2 \\ \alpha + \beta + 3\gamma &= 3. \end{aligned}$$

Iz zgornjega sistema linearnih enačb izračunamo $\alpha = -1$, $\beta = 1$ in $\gamma = 1$. Vektor $F_A(u_1)$ izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev kot $F_A(u_1) = -u_1 + u_2 + u_3$. S podobnim postopkom določimo še preostala vektorja: $F_A(u_2) = -4u_1 - 3u_2 + 3u_3$ in $F_A(u_3) = -2u_1 - u_2 + 2u_3$. Potem je matrična reprezentacija linearne preslikave F_A glede na bazo B enaka

$$[F_A]_B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.3.10 Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glede na standardno bazo S, če je:

a) F **vrtenje okoli izhodišča koordinatnega sistema za kot 90° v pozitivni smeri**,

b) F **zrcaljenje čez premico** $y = -x$.

Reševanje naloge:

a) Ugotovimo, kam F preslika bazna vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$:

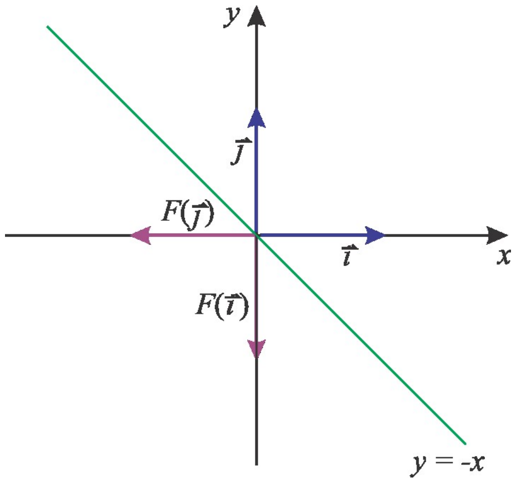
$$F(\vec{i}) = F(1,0) = (0,1) = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j},$$

$$F(\vec{j}) = F(0,1) = (-1,0) = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}.$$

Tako je

$$[F]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Pri reševanju si pomagamo s sliko 6.4.



Slika 6.4. Vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$ ter njuni sliki $F(\vec{i})$ in $F(\vec{j})$, če F predstavlja zrcaljenje čez premico $y = -x$.

Ponovno poiščemo sliki vektorjev $\vec{i}$ in $\vec{j}$:

$$F(\vec{i}) = F(1,0) = (0,-1) = 0 \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j},$$

$$F(\vec{j}) = F(0,1) = (-1,0) = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}.$$

Potem je

$$[F]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.3.11 Naj bo $B = \{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}\}$ baza vektorskega podprostora prostora V funkcij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Označimo z D odvajanje na vektorskem prostoru V. Poiščite matrično reprezentacijo linearne preslikave D glede na bazo B.

Reševanje naloge:
Ugotoviti moramo, kateri vektorji (funkcije) so slike baznih vektorjev in jih nato izraziti z baznimi vektorji. Dobimo:

$$D(e^{3t}) = (e^{3t})' = 3e^{3t} = 3 \cdot e^{3t} + 0 \cdot te^{3t} + 0 \cdot t^2e^{3t},$$

$$D(te^{3t}) = (te^{3t})' = 1 \cdot e^{3t} + t \cdot 3e^{3t} = 1 \cdot e^{3t} + 3 \cdot te^{3t} + 0 \cdot t^2e^{3t},$$

$$D(t^2e^{3t}) = (t^2e^{3t})' = 2t \cdot e^{3t} + t^2 \cdot 3e^{3t} = 0 \cdot e^{3t} + 2 \cdot te^{3t} + 3 \cdot t^2e^{3t}.$$

Potem je matrična reprezentacija linearne preslikave D glede na bazo B enaka

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.4 Zaključek

Ključne besede šestega poglavja: linearna preslikava, matrika kot linearna preslikava, matrična reprezentacija linearne preslikave.

Povzetek: Preslikava F: $V \to U$, kjer sta V in U vektorska prostora nad istim obsegom, je linearna preslikava, če je $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ za poljubna skalarja α, β (iz danega obsega) in za poljubna vektorja $x, y \in V$.

Poljubna matrika dimenzije $m \times n$ določa linearno preslikavo F_A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definirano s predpisom $F_A(x) = Ax$, za poljubni element $x \in \mathbb{R}^n$.

Naj bo F: $V \to U$ linearna preslikava. Označimo z $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ bazo vektorskega prostora V in z $B_2 = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ bazo vektorskega prostora U. Matriko, katere stolpci so komponente slik baznih vektorjev $F(b_1)$, $F(b_2)$, $\ldots$, $F(b_n)$ glede na bazo B_2, imenujemo matrična reprezentacija linearne preslikave F glede na bazi B_1 in B_2.

Besedila nalog v šestem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1] in [3], teorija pa iz [2].

Poglavje 7

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

7.1 Namen poglavja

V sedmem poglavju bomo:

- definirali pojma lastna vrednost in lastni vektor linearne preslikave ter lastna vrednost in lastni vektor matrike;
- iskali lastne vrednosti in lastne vektorje matrik različnih dimenzij;
- določali geometrijsko in algebrsko večkratnost lastnih vrednosti;
- ponovili pojem karakteristični polinom matrike in ga poiskali za dano matriko;
- ponovili Cayley-Hamiltonov izrek in ga preverili za konkreten primer matrike;
- izvedli postopek diagonalizacije matrike za dano matriko.

7.2 Povzetek teorije

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ in $F\colon V \to V$ linearna preslikava.

Neničelni vektor $x \in V$ je *lastni vektor preslikave* F, če obstaja tako število $\lambda \in \mathbb{R}$, da je

$$F(x) = \lambda x.$$

Število $\lambda \in \mathbb{R}$ imenujemo *lastna vrednost preslikave* F, ki pripada lastnemu vektorju x.

Naj bo $F\colon V \to V$ linearna preslikava in λ njena lastna vrednost. Množica V_λ vseh elementov $x \in V$, za katere je $F(x) = \lambda x$, je vektorski prostor, ki ga imenujemo *lastni prostor preslikave* F. Lastni prostor V_λ vsebuje vse lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ, in vektor 0.

Lastni vektorji kvadratne matrike A dimenzije $n \times n$ so netrivialne rešitve enačbe

$$Ax = \lambda x,$$

ki jo lahko zapišemo tudi v obliki

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

pri čemer je I enotska matrika.

Lastne vrednosti kvadratne matrike A so tista števila λ, pri katerih ima prejšnja enačba netrivialne rešitve. Če enačbo povežemo s sistemom linearnih enačb, dobimo še eno oznako lastnih vektorjev.

Lastni vektorji kvadratne matrike A, ki pripadajo lastni vrednosti λ, so netrivialne rešitve homogenega sistema linearnih enačb, katerega matrika koeficientov je enaka matriki $A - \lambda I$. Tak sistem ima netrivialne rešitve, ko je determinanta matrike $A - \lambda I$ enaka 0:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Izraz $\det(A - \lambda I)$ je polinom spremenljivke λ stopnje n, ki ga imenujemo *karakteristični polinom matrike A*. Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma.

Geometrijska večkratnost lastne vrednosti λ je dimenzija lastnega prostora V_λ preslikave F (oziroma matrike A, ki to preslikavo F določa). Hkrati je enaka največjemu številu linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti λ.

Algebrska večkratnost lastne vrednosti λ je večkratnost števila λ kot ničle karakterističnega polinoma.

Izrek (Cayley-Hamilton): Vsaka matrika A je koren (ničla) svojega karakterističnega polinoma.

Naj bo A matrika dimenzije $n \times n$, ki ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $u_1, u_2, \dots, u_n$. Za tako matriko obstaja obrnljiva matrika P, katere stolpci so bazni vektorji $u_1, u_2, \dots, u_n$ in za katero je

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Števila $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ so lastne vrednosti matrike A, ki pripadajo lastnim vektorjem $u_1, u_2, \dots, u_n$. Postopek iskanja matrik P in D imenujemo *diagonalizacija* matrike A.

7.3 Rešeni zgledi

7.3.1 Poiščite skalarje $\lambda \in \mathbb{R}$ in stolpce $x \in M_{3,1}$, ki ustrezajo enačbi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot x = \lambda x.$$

Reševanje naloge:
Enačbo zapišemo v obliki $Ax = \lambda x$ oziroma $(A - \lambda I)x = 0$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Enačba predstavlja homogeni sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami, zapisan v matrični obliki, ki ima vedno trivialno rešitev $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. V tem primeru je λ poljubno realno število.

Za netrivialne rešitve enačbe moramo poiskati lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A. Lastne vrednosti bomo poiskali kot ničle karakterističnega polinoma $\det(A - \lambda I)$. Determinanto razvijemo po tretji vrstici in dobimo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \cdot ((2-\lambda)(-1-\lambda) - (-2) \cdot 1) =$$

$$-(5+\lambda)(-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2+2) = -(5+\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda+5)(\lambda-1) = 0.$$

Imamo torej tri različne lastne vrednosti: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$ in $\lambda_3 = 1$. Za vsako lastno vrednost bomo poiskali ustrezne lastne vektorje, torej netrivialne rešitve enačbe $(A - \lambda I)x = 0$. S simboli x_1, x_2, x_3 bomo označili komponente lastnega vektorja, ki ga iščemo v posameznem primeru. Tako dobimo:

$\lambda_1 = 0$;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve tega sistema so $x_3 = 0$ in $x_2 = -2x_1,\ x_1 \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji za lastno vrednost $\lambda_1 = 0$ so vektorji oblike

$$x_{\mathrm{I}} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Podoben postopek izvedemo tudi za preostali lastni vrednosti.

$\lambda_2 = -5;$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve tega sistema so $x_1 = 0$ in $x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji za lastno vrednost $\lambda_2 = -5$ so vektorji oblike

$$x_{\mathrm{II}} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\lambda_3 = 1;$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve tega sistema so $x_1 = -x_2$ in $x_3 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji za lastno vrednost $\lambda_3 = 1$ so vektorji oblike

$$x_{\mathrm{III}} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

7.3.2 Poiščite lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

in določite parameter a **tako, da bo** 0 **njena lastna vrednost.**

Reševanje naloge:
Lastne vrednosti matrike A so ničle njenega karakterističnega polinoma $\det(A - \lambda I)$. V našem primeru bomo vrednost determinante izračunali z razvojem po prvem stolpcu:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3-\lambda & a \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - 4a) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + (-3-4a)) = 0.$$

Ena rešitev zgornje enačbe je $\lambda_1 = 2$; poiščimo še drugi dve:

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3-4a)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12 + 16a}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{1+a}.$$

Če naj bo ena izmed lastnih vrednosti matrike A enaka 0, mora biti $1 + 2\sqrt{1+a} = 0$ ali $1 - 2\sqrt{1+a} = 0$. Prva možnost odpade, saj je izraz na levi strani enačaja vedno pozitiven (za vrednosti a, za katere je izraz realno število). Iz druge zveze izračunamo:

$$2\sqrt{1+a} = 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{1+a} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 1 + a = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{3}{4}.$$

7.3.3 Za matriki A **in** B **poiščite njuna karakteristična polinoma**:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reševanje naloge:
a) Karakteristični polinom matrike A je izraz $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. V našem primeru je:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 0-\lambda & 4 \\ 6 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Z uporabo Sarrusovega pravila dobimo:

$$p(\lambda) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 2 & 3 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda & 4 & 3 & -\lambda \\ 6 & 4 & 5-\lambda & 6 & 4 \end{array}\right. =$$

$$(1-\lambda)(-\lambda)(5-\lambda) + 48 + 36 - 18(-\lambda) - 16(1-\lambda) - 6(5-\lambda) =$$

$$-\lambda(5 - 6\lambda + \lambda^2) + 84 + 18\lambda - 16 + 16\lambda - 30 + 6\lambda =$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 35\lambda + 38.$$

b) Matrika B je trikotna, njena determinanta je torej diagonalizirana. Tako je karakteristični polinom matrike B enak:

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda).$$

7.3.4 Poiščite karakteristični polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

in za to matriko preverite Caley-Hamiltonov izrek.

Reševanje naloge:
Karakteristični polinom matrike A je polinom spremenljivke λ, ki ga predstavlja izraz $\det(A-\lambda I)$. V našem primeru je:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)((3-\lambda)(9-\lambda)-6)+2-2(3-\lambda) =$$

$$-\lambda^3+13\lambda^2-31\lambda+17.$$

Preveriti želimo še Caley-Hamiltonov izrek – pokazali bomo, da je matrika A ničla svojega karakterističnega polinoma $p(\lambda)$. Ugotovimo

$$p(A) = -A^3+13A^2-31A+17I =$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^3 + 13\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^2 - 31\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} + 17\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$-\begin{bmatrix} 25 & 99 & 224 \\ 26 & 119 & 250 \\ 99 & 388 & 895 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 3 & 10 & 22 \\ 2 & 15 & 24 \\ 10 & 37 & 89 \end{bmatrix} - 31\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} +$$

$$17\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako je matrika A zares ničla polinoma $p(\lambda)$.

7.3.5 Za matriko $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ **poiščite matriko** P, **za katero bo matrika** $D = P^{-1}AP$ **diagonalna**.

Reševanje naloge:
Matrika P ima za stolpce linearno neodvisne lastne vektorje matrike A. Z namenom, da poiščemo matriko P, bomo najprej po znanem postopku izračunali lastne vektorje matrike A.

Karakteristični polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Lastne vrednosti matrike A:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = 6.$$

Lastni vektorji matrike A:

$\lambda_1 = 1$;

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega sistema enačb sledi $x_1 = 2x_2$, kar pomeni, da lahko za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$, vzamemo kar vektor

$$x_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 6$;

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega sistema enačb sledi $x_2 = -2x_1$, kar pomeni, da lahko za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 6$, vzamemo vektor

$$x_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ker sta vektorja x_{I} in x_{II} linearno neodvisna, ju lahko zapišemo kot stolpca matrike P:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

V nadaljevanju bomo izračunali inverzno matriko matrike P:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Na koncu izračunamo še:

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Kot smo pričakovali, ima diagonalna matrika D na glavni diagonali ravno lastne vrednosti matrike A.

7.3.6 Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **Poiščite matriko** P**, za katero bo matrika** $D = P^{-1}AP$ **diagonalna in z uporabo te zveze izračunajte** A^6.

Reševanje naloge:
Po znanem postopku (glejte reševanje naloge 5) poiščemo karakteristični polinom matrike A, njegove ničle, ki so lastne vrednosti matrike A, in nato še lastne vektorje matrike A. Te vektorje zapišemo kot stolpce iskane matrike P.

Karakteristični polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Lastne vrednosti matrike A:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4.$$

Lastni vektorji matrike A:

$$\lambda_1 = 1;\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

od koder sledi $x_1 = -2x_2$. Tako lahko za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$, vzamemo kar vektor

$$x_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 4; \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz tega sistema enačb sledi $x_1 = x_2$, kar pomeni, da lahko za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 4$, vzamemo vektor

$$x_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ker sta vektorja x_{I} in x_{II} linearno neodvisna, ju lahko zapišemo kot stolpca iskane matrike P:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še inverzno matriko matrike P:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalna matrika D je potem enaka:

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz zveze $D = P^{-1}AP$ sledi $PDP^{-1} = A$. Hitro lahko preverimo, da je $A^k = PD^kP^{-1}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Ker je D diagonalna matrika, je D^k tudi diagonalna matrika. Če je $D \in M_{nn}$, ima na glavni diagonali potence $a_{11}^k,\ a_{22}^k,\ \ldots,\ a_{nn}^k$. V našem primeru je:

$$A^6 = PD^6P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^6 & 0 \\ 0 & 4^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1366 & 2730 \\ 1365 & 2731 \end{bmatrix}.$$

7.3.7 Ali sta matriki:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonalizabilni? **Odgovor utemeljite**.

Reševanje naloge:
Matrika A je diagonalizabilna, če obstaja taka nesingularna matrika P, da je matrika $D = P^{-1}AP$ diagonalna matrika. V tem primeru pravimo, da je matrika A podobna matriki D. Velja naslednja trditev:

Matrika A dimenzije $n \times n$ je podobna diagonalni matriki D natanko takrat, ko ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Tako bomo za matriki A in B po znanem postopku poiskali njune lastne vektorje:

a) $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 =$$

$$-(\lambda - 3)^2(\lambda - 5) = 0.$$

Karakteristični polinom ima eno dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 3$ in eno enojno ničlo $\lambda_3 = 5$. Poiščimo ustrezne lastne vektorje:

$\lambda_{1,2} = 3$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Enačbe so linearno odvisne. Najdemo lahko dva linearno neodvisna lastna vektorja, ki ustrezata zgornjemu pogoju:

$$x_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } x_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = 5;$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz sistema enačb sledi $x_1 = x_3$ in $x_2 = 2x_1$. Ustrezen lastni vektor je na primer

$$x_{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ali so vektorji x_{I}, x_{II} in x_{III} linearno neodvisni? Izračunajmo rang matrike, ki ima te vektorje za stolpce:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Očitno je $\mathrm{rang} P = 3$, vektorji x_{I}, x_{II} in x_{III} so linearno neodvisni in matrika A je diagonalizabilna.

b) Enak postopek, kot v prvem delu naloge, naredimo še za matriko B:

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 7 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 12\lambda - 16 =$$

$$-(\lambda-2)^2(\lambda+4) = 0.$$

Lastne vrednosti: $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -4.$

Lastni vektorji:

$\lambda_{1,2} = 2;$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 6x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz sistema enačb sledi $x_1 = x_2$ in $x_3 = 0$. Sistemu enačb ustreza le en linearno neodvisen lastni vektor, na primer

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ta predstavlja bazo lastnega prostora za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 2$:

$\lambda_3 = -4;$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz matričnega zapisa sledi sistem enačb:

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz sistema enačb sledi $x_1 = 0$ in $x_2 = x_3$. V tem primeru sistemu enačb spet ustreza le en linearno neodvisen lastni vektor, na primer

$$x_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika B ima tako le dva linearno neodvisna lastna vektorja, torej ni diagonalizabilna.

7.3.8 Določite algebrsko in geometrijsko večkratnost lastnih vrednosti matrik iz naloge 7.

Reševanje naloge:
Spomnimo se, da je algebrska večkratnost lastne vrednosti λ večkratnost števila λ kot ničle karakterističnega polinoma. Geometrijska večkratnost lastne vrednosti λ je enaka največjemu številu linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti λ. Hkrati je to dimenzija lastnega prostora, ki pripada lastni vrednosti λ.

a) Lastne vrednosti prve matrike so bile $\lambda_{1,2} = 3$ in $\lambda_3 = 5$. Število 3 je dvakratna ničla karakterističnega polinoma in tako je algebrska večkratnost lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = 3$ enaka 2. Tej lastni vrednosti smo našli dva linearno neodvisna lastna vektorja in tako je njena geometrijska večkratnost tudi enaka 2. Število 5 je enkratna ničla karakterističnega polinoma in tako je algebrska večkratnost lastne vrednosti $\lambda_3 = 5$ enaka 1. Tej lastni vrednosti ustreza en linearno neodvisni lastni vektor in tako je njena geometrijska večkratnost tudi enaka 1.

b) Lastne vrednosti druge matrike so bile $\lambda_{1,2} = 2$ in $\lambda_3 = -4$. Število 2 je dvakratna ničla karakterističnega polinoma in tako je algebrska večkratnost lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ spet enaka 2. Tej lastni vrednosti smo našli le en linearno neodvisni lastni vektor in tako je njena geometrijska večkratnost enaka 1. Število –4 je enkratna ničla karakterističnega polinoma in tako je algebrska večkratnost lastne vrednosti $\lambda_3 = -4$ enaka 1. Tej lastni vrednosti ustreza en linearno neodvisni lastni vektor in tako je njena geometrijska večkratnost tudi enaka 1.

V vseh obravnavanih primerih smo tudi potrdili lastnost, da je geometrijska večkratnost posamezne lastne vrednosti manjša ali enaka njeni algebrski večkratnosti. Ugotovili smo tudi, da je dimenzija lastnega prostora, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 3$, enaka 2, vse dimenzije lastnih prostorov, ki pripadajo ostalim lastnim vrednostim iz te naloge, pa so enake 1.

7.4 Zaključek

Ključne besede sedmega poglavja: lastni vektor in lastna vrednost linearne preslikave, lastni prostor linearne preslikave, lastni vektor in lastna vrednost matrike, karakteristični polinom, diagonalizacija matrike.

Povzetek: Neničelni vektor x realnega vektorskega prostora V je lastni vektor preslikave $F\colon V \to V$, če obstaja tako število $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $F(x) = \lambda x$. Število $\lambda \in \mathbb{R}$ imenujemo lastna vrednost preslikave F, ki pripada lastnemu vektorju x. Lastni vektorji matrike A so netrivialne rešitve homogenega sistema linearnih enačb, ki ga v matrični obliki zapišemo kot $(A - \lambda I)x = 0$. Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma matrike A oziroma rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalizacija matrike A dimenzije $n \times n$, ki je diagonalizabilna, je postopek, s katerim poiščemo tako obrnljivo matriko P, za katero je produkt $D = P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Izkaže se, da ima matrika P za stolpce linearno neodvisne lastne vektorje matrike A, diagonalna matrika D pa ima na glavni diagonali lastne vrednosti matrike A.

Besedila nalog v sedmem poglavju so vzeta iz virov/povzeta po virih [1], [3], [4] in [5], teorija pa iz [2].

LITERATURA

1. M. Kolar, B. Zgrablić: *Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre,* 1. izd., Pedagoška fakulteta, Ljubljana, 1996.

2. I. Kosi Ulbl: *Osnove linearne algebre*, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2012.

3. S. Lipschutz, M. Lipson: *Linear algebra*, Fourth Edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2009.

4. P. Mizori Oblak: *Matematika I. del*, ponatis 6. izdaje, Fakulteta za strojništvo, Littera picta, Ljubljana, 2009.

5. N. Mramor Kosta: *Zbirka nalog iz Matematike II,* 8. popravljena in dopolnjena izd., Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2005.

STVARNO KAZALO

Zgledi iz osnov linearne algebre: Povzetek teorije in postopki reševanja nalog s komentarji

Irena Kosi Ulbl

Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, Slovenija
irena.kosi@um.si

Povzetek Publikacija je dopolnitev k učbeniku Osnove linearne algebre (iste avtorice). Medtem ko je v omenjenem učbeniku poudarek na teoretični osnovi obravnavanih vsebin, prinaša skripta k vsakemu obravnavanemu poglavju rešene zglede. Na začetku posameznga poglavja je uvodni del, v katerem so navedeni pomembnejši teoretični pojmi, ki jih bomo ponovili, in napoved nalog, ki jih bomo v okviru tega poglavja rešili. Nato sledi kratek teoretični del z zapisanimi definicijami, lastnostmi in obrazci, ki jih potrebujemo pri reševanju nalog. Študentom tako za osvežitev znanja omenjenih pojmov ni treba iskati v učbeniku. Teoretičnemu delu sledi osrednji del poglavja, ki ga predstavljajo podrobno rešeni zgledi z vsemi vmesnimi koraki. Reševanje nalog spremljajo tudi komentarji, ki študenta spomnijo, na kateri teoretični osnovi temelji iskanje pravilne poti do rešitve. Vsako poglavje se končuje s ključnimi besedami in z bistvenimi ugotovitvami poglavja. Pri nekaterih zgledih k lažjemu razumevanju poteka reševanja in k boljši prostorski predstavi pripomorejo barvne slike oziroma različni grafični prikazi.

Ključne besede:
determinanta,
matrika,
sistem linearnih enačb,
vektor,
vektorski prostor,
linearna preslikava,
lastna vrednost,
lastni vektor

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/um.fs.8.2022

ISBN 978-961-286-668-6

Examples from Bases of Linear Algebra: Theory Resume and Fully Solved Problems with Commentaries

Irena Kosi Ulbl
University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering, Maribor, Slovenia
irena.kosi@um.si

Keywords: determinant, matrix, system of linear equations, vector, vector space, linear mappings, eigenvalue, eigenvector

Abstract The publication is a supplement to the textbook Bases of Linear Algebra (by the same author). At the beginning of each chapter, there is an introduction which foretells the problems that are going to be solved in this chapter. This is followed by a short theoretical part with written definitions, properties and theorems that we need when solving problems. The central part of the chapter is represented by examples solved in detail with all intermediate steps. Solving problems is also accompanied by comments that remind students which theoretical basis is used to find the solution. Each chapter ends with key words and the main findings of the chapter. In some examples, color pictures or various graphic displays help to make the solution process easier to understand and provide a better spatial representation.

ISBN 978-961-286-668-6

DOI https://doi.org/10.18690/um.fs.8.2022

University of Maribor Press

Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo