

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **19** (1991/1992)

Številka 4

Strani 204-208

Janez Strnad:

LED IN VODA

Ključne besede: fizika, voda, led.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/19/1094-Strnad.pdf>

© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

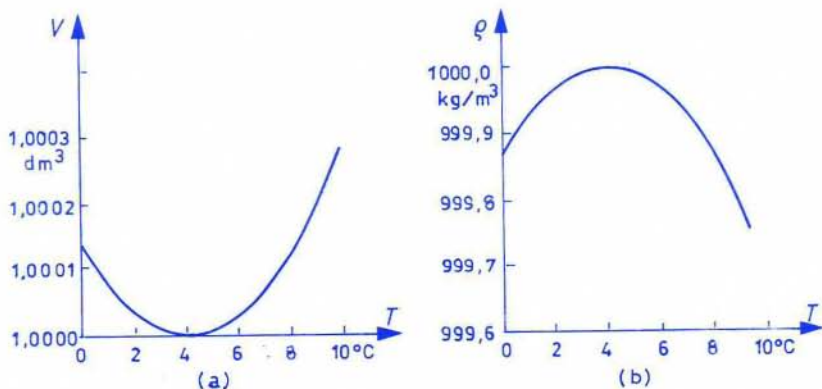
Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

LED IN VODA

Voda je posebna snov. Med njene fizikalne posebnosti sodi temperaturna odvisnost prostornine. Pri navadnem zračnem tlaku 1 bar nad temperaturo 4°C (natančneje $3,98^{\circ}\text{C}$) prostornina vode narašča z naraščajočo temperaturo, kakor je običajno pri drugih snoveh. Pod 4°C pa prostornina vode narašča s *pojema*jočo temperaturo. Prostornina kilograma vode je pri 4°C najmanjša. Tedaj je gostota vode največja (slika 1). Podobno temperaturno odvisnost prostornine opazimo samo pri snoveh, ki so podobne gumiju, in pri nekaterih kristalnih trdninah. To pa še ni vse. Ob tališču - 0°C pri navadnem tlaku 1 bar - ima kilogram ledu precej večjo prostornino kot voda. Led ima tedaj precej manjšo gostoto kot voda. Voda ni edina snov s to lastnostjo, opazimo jo, na primer, pri antimonu, galiju, bizmutu.

Molekula H_2O ima obliko nekakšne črke L z atomoma vodika na krajiščih in atomom kisika v oglišču pri kotu, nekaj večjem od pravega ($104,5^{\circ}$). V kristalu se molekule ne morejo naložiti tesno druga ob drugo, kot če bi bile iztegnjene, ampak se uredijo v šestkotnike. Tako je v njem veliko nezasedenega prostora, zaradi česar ima manjšo gostoto kot kapljevina. Blizu ledišča nastanejo v kapljevini nekakšne zasnove kristalov in je zato njena gostota manjša kot pri 4°C .

V nekaterih učnih knjigah zasledimo trditev, da sta opisani posebnosti vode pomembni za obstanek življenja v mirujoči vodi. Ob ohlajanju vode se



Slika 1. Temperaturna odvisnost prostornine kilograma vode (a) in gostote vode (b). Prostornine ledu pri ledišču pri navadnem zračnem tlaku $1,091 \text{ dm}^3$ in gostote ledu $917 \text{ kg}/\text{m}^3$ ne moremo narisati; ustrezni točki bi ležali kakih 9 metrov nad vodoravno osjo ali pod njo.

vzpostavi ravnovesni *temperaturni profil*: v vse višjih plasteh ima voda vse manjšo gostoto in vse višjo temperaturo. Z globino temperatura pojema in gostota narašča. Razmere se spremenijo, ko se voda ohladi pod 4 °C. Odtlej se na dnu nabira voda s to temperaturo. Pri dovolj nizki temperaturi ozračja ima torej voda ob dnu temperaturo 4 °C in ob gladini 0 °C. Poslej na gladini voda zmrzuje in nastali led, tudi če se odlomi, zaradi manjše gostote plava na gladini. Pri tem smo privzeli, da voda miruje in ni zunanjih motenj.

Dalje sklepajo takole: Če ne bi bila najgostejša pri 4 °C, ampak pri 0 °C, bi imela ohlajajoče se voda temperaturo 0 °C na dnu. V zmernem podnebnem pasu bi led nastajal pozimi na dnu in bi ostal tam, tudi ko bi se odlomil, če ne bi bil redkejši od vode. Plast ledu na dnu bi se debelila in spomladi in poleti bi je v dovolj globoki vodi sonce ne moglo staliti. Iz leta v leto bi postajala plast ledu na dnu debelejša. Vodne živali v morjih, jezerih in ribnikih bi naposled izumrle. Spremenilo bi se podnebje in morda bi nastala ledena doba. Pri tem smo privzeli, da bi se lastnosti vode spremenile, potem ko bi se življenje v vodi že razvilo. Najbrž pa se v navedenih okoliščinah življenje, kakršno je dandanes na Zemlji, sploh ne bi moglo razviti.

Čeprav je bil zadnji del razglabljanja poenostavljen, se je vredno vprašati, ali mu gre zaupati. Že običajna fizikalna vprašanja, ki zadevajo razmere zunaj laboratorija, utegnejo biti zelo zahtevna. Vprašanje vrste "Kaj bi bilo, če bi ...?" pa je še posebej neprijetno, ker vse okoliščine niso dobro določene. Vseeno poskusimo vsaj okvirno odgovoriti nanj. Tega ne delamo zato, da bi pikolovsko preganjali napake v knjigah, ampak zato, da bi bili pri fizikalnih izjavah previdni. Ob tem se lahko naučimo tudi kaj fizike.

Morda se je mogoče dokopati do odgovora s poskusi? Da. Osnovni poskusi niti niso zahtevni. O njih je Klaus Weltner z Inštituta za didaktiko fizike univerze v Frankfurtu poročal leta 1987 na sestanku Nemškega fizikalnega društva v Berlinu. Dve laboratorijski čaši je na straneh in na dnu izoliral z več kot 4 centimetre debelo plastjo penaste plastike in postavil v lesena zabožčka. Pri prvem poskusu je v eni od čaš z magnetnim mešalnikom nenehno mešal vodo in s tem preprečil, da bi se na dnu nabrala voda s temperaturo 4 °C. (Magnetni mešalnik sestavlja v čaši podolgovat kos železa ali podobne snovi, ki se vrti v vrtečem se magnetnem polju. Tega ustvarjajo tokovi po tuljavah zunaj zabožčka.) Zabožčka s čašama je postavil v zmrzovalno skrinjo in opazoval debelino nastale ledene plasti po 12, 24 in 48 urah. Vselej je bila plast ledu na gladini vode v obeh čašah skoraj natanko enako debela. Pri drugem poskusu je eno izmed čaš zaprl s celofanom, jo skupaj z zabožčkom obrnil in postavil v zmrzovalno skrinjo. Celofan je preprečil vodi,

da bi iztekla, a poskrbel, da je bila na dnu v toplotnem stiku z zmrzovalnikom, medtem ko je bila voda na gladini izolirana. Plast ledu se je v tem primeru razvila v glavnem na dnu vode.

Prvi poskus kaže, da bi ribe in druga vodna bitja preživela tudi brez *anomalije vode*, kakor pravimo pojavu, da je voda najgostejša pri 4 °C. Ob dnu bi pač morale plavati v vodi s temperaturo 0 °C, namesto v vodi s temperaturo 4 °C. Vendar niti v primeru, da bi bil led gostejši od vode, ne bi nastajal na dnu. Voda oddaja toploto namreč zraku na gladini in ne tlem na dnu. Na dnu voda ne oddaja toplote, ampak jo prejema od tal, čeprav je toplotni tok zelo majhen. Temperatura zemeljske skorje narašča z globino in se poviša za 3 stopinje na vsakih 100 metrov. Temperaturna razlika poganja toplotni tok navpično navzgor. Na površju oddaja vsak kvadratni meter zemeljske skorje v povprečju toplotni tok 0,06 wattov. To sledi iz *zakona o toplotnem prevajanju* s povprečno toplotno prevodnostjo tal okoli 2 W/m·K. Tudi voda na dnu prejema od tal toplotni tok s približno gostoto 0,06 W/m². Zaradi tega, ker voda oddaja toploto na gladini, nastaja led na gladini. Tam bi ostal tudi, če bi bil gostejši od vode, dokler se ne bi odlomil. Plast ledu na gladini bi se spomladi stalila, kakor se stali zdaj. Le odlomljeni kosi ledu bi padli na dno. Zaradi njih bi voda imela v povprečju nižjo temperaturo, kot jo ima zdaj. Da bi lahko ugotovili, če bi to izrazito vplivalo na življenje v vodi, bi morali vedeti, kolikšen del ledu ostane na gladini in kolikšen del se odlomi. Vsekakor je za razmere na Zemlji to, da je pri tališču voda gostejša od ledu, pomembnejše od anomalije vode.

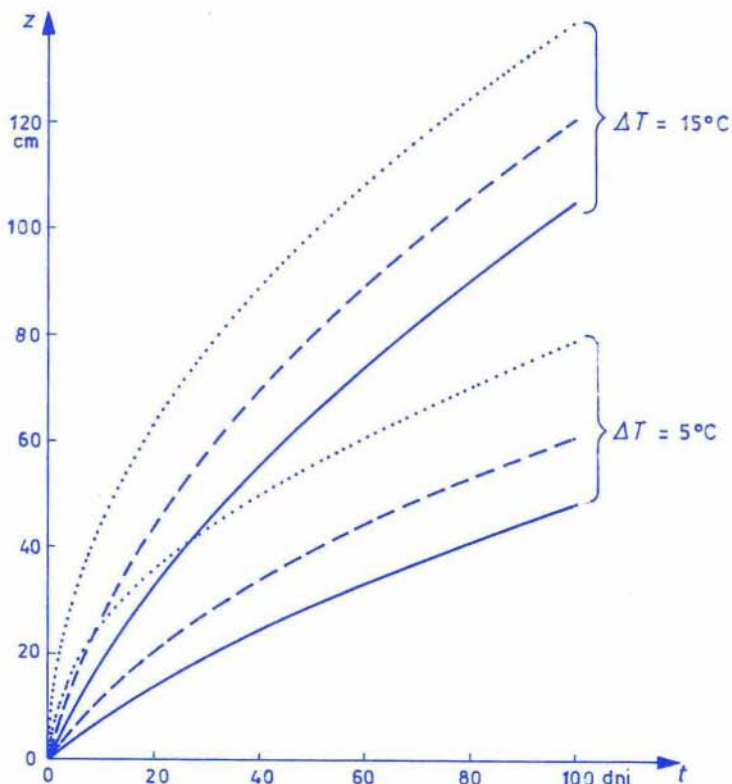
Nazadnje poskusimo odgovoriti še na vprašanje, kako hitro se debeli plast ledu. Za prevajanje toplote skozi plast ledu z debelino z velja zakon o prevajanju toplote v obliki

$$j = \lambda \frac{T_{I1} - T_{I2}}{z}.$$

j je gostota toplotnega toka, $T_{I1} = 0^\circ\text{C}$ temperatura ledu na spodnji meji z vodo, T_{I2} temperatura ledu na zgornji meji plasti in λ toplotna prevodnost ledu, približno enaka 2,3 W/m·K. Plast ledu se zdebela za Δz v času Δt , v katerem odda toploto $jS\Delta t$, če je S osnovna ploskev plasti. Maso m te plasti dobimo, ko pomnožimo gostoto ledu $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$ s prostornino $S\Delta z$, oddano toploto pa, ko maso pomnožimo s talilno toploto ledu $q_t = 0,334 \text{ MJ/kg}$. Izenačimo $jS\Delta t$ z $mq_t = \rho S\Delta z q_t$, pa imamo $j = \rho q_t \Delta z / \Delta t$. V približku izenačimo temperaturo na zgornji meji ledu s temperaturo zraka

$T_{l2} = T_z$ in vpeljemo $T_{l1} - T_z = T_0$. Iz enačbe $\rho q_t z \Delta z = \lambda T_0 \Delta t$ dobimo končni čas t , ko seštejemo vse časovne razmike. Na desni strani pa vstavimo za z povprečje med končno in začetno debelino $z = \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ tanke plasti $\Delta z = z_2 - z_1$ in dobimo za $z \Delta z = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$. Ko seštejemo prispevke med začetno debelino 0 in končno debelino z , preostane le še $\frac{1}{2}z^2$. Debelina ledu

$$z = \sqrt{\frac{2\lambda T_0 t}{\rho q_t}} \quad (1)$$



Slika 2. Časovna odvisnost debeline ledu pri zraku s temperaturo $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ (tri krivulje spodaj) in s temperaturo $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ (tri krivulje zgoraj). Za toplotno prevodnost vzamemo v prvem primeru $2,24\text{ W/m}\cdot\text{K}$ pri $-2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ in v drugem, $2,34\text{ W/m}\cdot\text{K}$ pri $-7,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pikčasti krivulji ustrežata približku (1), sklenjeni in črtkani pa enačbi (2), prva v brezvetrju z $\alpha = 5,6\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ in druga v vetru s hitrostjo 2 m/s z $\alpha = 11,1\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

narašča sorazmerno s kvadratnim korenem iz časa.

Pri tem približnem računanju nismo upoštevali, da v zraku ob ledu nastane tanka mejna plast, v kateri se temperatura zraka zniža enakomerno od T_{I2} na T_z . Ta temperaturna razlika poganja toplotni tok skozi mejno plast:

$$j = \alpha(T_{I2} - T_z).$$

α je koeficient prehajanja toplote skozi mejno plast, ki je enak $5,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ v brezvetrju in, na primer, $11,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ v vetru s hitrostjo 2 m/s . Zdaj temperature na zgornji meji ledu ne poznamo, a jo lahko izračunamo, ko izenačimo obe gostoti toplotnih tokov:

$$T_{I2} = \frac{\lambda T_{I1} + \alpha z T_z}{\lambda + \alpha z}.$$

To vstavimo v prejšnjo enačbo in dobimo

$$\left(z + \frac{\lambda}{\alpha}\right) \rho q_i \Delta z = \lambda T_0 \Delta t.$$

Izid je podoben prejšnjemu, le da ima zdaj člen več, tako da izračunamo debelino iz kvadratne enačbe:

$$z = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{2\lambda T_0 t}{\rho q_i}} - \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (2)$$

Kot je treba, preide enačba (2) v enačbo (1), če α močno naraste, kar ustreza temu, da ne upoštevamo mejne plasti (slika 2).

Z računanjem debeline ledu se je ukvarjal leta 1889 tudi slovenski fizik Jožef Stefan. Sicer ni upošteval mejne plasti, zato pa se je popolnoma splošno lotil naloge, ne da bi privzel linearni potek temperature v ledu. Naloga je po matematični strani zelo zahtevna, ker se plast debeli in se "meja premika". Stefanu jo je uspelo rešiti in odtlej pravijo "nalogi s premično mejo" kar *Stefanova naloga*. Stefan je primerjal tudi izmerjeno debelino ledu v polarnih morjih in ugotovil, da velja linearni približek. Zavedal se je, da "obdelane naloge pomenijo le malo za eksperimentalno preučevanje pojavov pri prevajanju toplote, ker pogojev, pri katerih veljajo najdene rešitve, sploh ne moremo uresničiti ali jih lahko uresničimo le nepopolno". Vendar se je pozneje pokazalo, da je po matematični strani s svojo rešitvijo dosegel več, kot je mislil.