Moessnerjevo sito

dr. Marko Razpet

Aleksandrijski učenjak Eratosten iz Kirene, grško Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος (276–194 pnš.), je bil vodja slovite aleksandrijske knjižnice, narisal je zemljevid takrat znanega sveta, genialno in razmeroma natančno je izračunal velikost Zemlje. Matematiki pa ga poznamo predvsem po postopku, kako iz zaporedja naravnih števil izločiti praštevila. Temu slikovito pravimo *Eratostenovo sito*.

Z naravnimi števili so se ljudje vedno radi ukvarjali, tudi nematematiki. Veliko zanimivih lastnosti naravnih števil so odkrili razvedrilni ali rekreativni matematiki. Eden takih je bil Nemec Alfred Moessner iz Gunzenhausna na Bavarskem, o katerem ne vemo prav veliko, razen da je iznašel postopek, kako iz naravnih števil izluščiti zaporedje k-tih potenc. Postopek imenujemo *Moessnerjevo sito*. Moessner ga je leta 1951 brez dokaza objavil v neki publikaciji Bavarske akademije znanosti. Že istega leta je znani nemški matematik Oscar Perron (1880–1975) objavil dokaz o pravilnosti Moessnerjevega postopka. Preden nadaljujemo, povejmo, da so členi $s_1, s_2, s_3, \ldots$ zaporedja delnih vsot danega številskega zaporedja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definirani takole:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

Da pridemo do zaporedja kvadratov $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, po Moessnerju najprej zapišemo primerno dolgo zaporedje naravnih števil, nato pa v njem prečrtamo vsak drugi člen, začenši z drugim. Za dobljeno okleščeno zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot in že smo pri zaporedju kvadratov.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	8	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17
1		3		5		7		9		11		13		15		17
1		4		9		16		25		36		49		64		81

Do zaporedja kubov $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ pridemo po Moessnerju tako, da najprej zapišemo primerno dolgo zaporedje naravnih števil, nato pa v njem prečrtamo vsak tretji člen, začenši s tretjim. Za dobljeno okleščeno zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot, nato pa v njem prečrtamo vsak drugi člen, začenši z drugim, in za novo zaporedje zapišemo zaporedje delnih vsot. Dobimo zaporedje kubov.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	~~3~~	4	5	6	7	8	9	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17
1	2		4	5		7	8		10	11		13	14		16	17
1	3		7	12		19	27		37	48		61	75		91	108
1	3		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	75		91	~~108~~
1			7			19			37			61			91	
1			8			27			64			125			216	

Prav tako pridemo do bikvadratov (četrtih potenc). Prečrtamo vsak četrti člen v zaporedju naravnih števil. Zapišemo zaporedje delnih vsot dobljenega zaporedja in v njem prečrtamo vsak tretji člen. Zapišemo zaporedje delnih vsot novega zaporedja in v njem prečrtamo vsak drugi člen. Nazadnje zapišemo zaporedje delnih vsot slednjega zaporedja. Dobimo zaporedje bikvadratov.

Sedaj, ko obvladamo postopek, lahko v tabeli nekaj vrstic izpustimo.

1	2	3	~~4~~	5	6	7	8	9	10	11	~~12~~	13	14	15	~~16~~	17
1	3	~~6~~		11	17	~~24~~		33	43	~~54~~		67	81	~~96~~		113
1	4			15	~~32~~			65	~~108~~			175	~~256~~			369
1				16				81				256				625